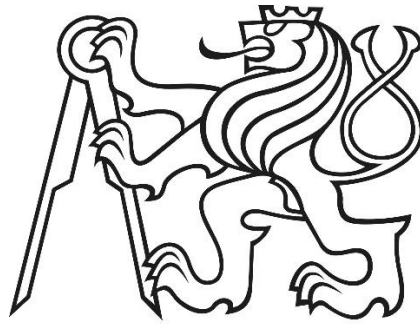


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ



IDENTIFIKACE MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ KONTRUKCÍ VINUTÝCH PRUŽNÝCH SPOJEK

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Fořt** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **424807**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**IDENTIFIKACE MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCÍ VINUTÝCH PRUŽNÝCH SPOJEK**

Název bakalářské práce anglicky:

**IDENTIFICATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF STRUCTURES WOUND FLEXIBLE COUPLINGS**

Pokyny pro vypracování:

Práce se zabývá patentovaným řešením konstrukce vinuté pružné spojky (patent č. 305268) a bude obsahovat části:

1. Rešerše
2. výpočtový model vinuté pružné spojky
3. Funkční návrh vybraných prvků konstrukce spojky v závislosti na přenášeném kroutícím momentu
4. Závěry

Seznam doporučené literatury:

1. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost I. skripta ČVUT v Praze, 2006.
2. Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost II. skripta ČVUT v Praze, 2006.
3. Využití Inventoru

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

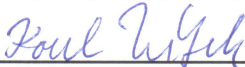
**Ing. Karel Vítek CSc.**

Jméno a pracoviště konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: **12.04.2016**

Termín odevzdání bakalářské práce: **12.08.2016**

Platnost zadání bakalářské práce:



Podpis vedoucí(ho) práce



Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



Podpis děkana(ky)

*Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé*

*Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.*

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

\_\_\_\_\_ Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_ Podpis studenta(ky)

## ANOTAČNÍ LIST

**Jméno autora:** Jan FOŘT

**Název bakalářské práce:** Identifikace mechanických vlastností konstrukcí vinutých pružných spojek

**Anglický název:** Identification of Mechanical Properties of Structures Wound Flexible Couplings

**Rok:** 2016

**Obor studia:** Bezoborový

**Ústav:** Ú12105 Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

**Odbor:** Odbor pružnosti a pevnosti

**Vedoucí:** Ing. Karel Vítek, Csc.

**Bibliografické údaje:**

počet stran	51
počet obrázků	34
počet tabulek	4
počet grafů	1
počet příloh	0

**Klíčová slova:** pružná spojka, vinutá pružina, ohyb pružiny, torzní tuhost, návrhový výpočet

**Keywords:** flexible coupling, coil spring, spring bending, rotational stiffness, design calculation

**Anotace:** Tato bakalářská práce se zabývá především sestavením návrhových výpočtů pro inovativní model pružné spojky. Získané vztahy mohou posloužit k předběžnému dimenzování částí spojky, umožní odhad budoucího chování spojky v závislosti na jejích parametrech a srovnání s již dostupnými typy pružných spojek.

**Abstract:** This bachelor thesis deals primarily with definition of calculation formulas to be used for an innovational type of flexible coupling. Acquired formulas can be used for preliminary dimensioning of coupling parts, might help to estimate behavior of the coupling depending on its parameters and will allow comparison with already existing types of couplings.

### *Prohlášení*

*Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a pouze s použitím zdrojů uvedených na konci této práce.*

*Souhlasím s publikací této bakalářské práce nebo jejích částí, budu-li zároveň uveden jako spoluautor.*

*Dne:*

*Podpis:*

*Poděkování*

*Vedoucímu práce Ing. Karlu Vítkovi za cenné rady a připomínky, vstřícný přístup, ochotu a za čas, který této práci věnoval.*

## SEZNAM SYMBOLŮ A VELIČIN

symbol	veličina	jednotka
$D_{rt}$	deviační moment průřezu	$m^4$
$d, D$	průměr	$m$
$E$	modul pružnosti v tahu	$N \cdot m^{-2}$
$f$	součinitel tření	1
$F, N, P, Q, T$	síla	$N$
$G$	modul pružnosti ve smyku	$N \cdot m^{-2}$
$J$	kvadratický moment průřezu	$m^4$
$J_p$	polární moment průřezu	$m^4$
$k_\tau$	torzní tuhost	$N \cdot m \cdot rad^{-1}$
$M$	moment	$N \cdot m$
$n$	počet závitů pružiny	1
$R$	poloměr	$m$
$s$	stoupání pružiny	1
$u$	posunutí	$m$
$U$	deformační energie	$J$
$W_o$	modul průřezu v ohybu	$m^3$
$W_k$	modul průřezu v krutu	$m^3$
$\gamma$	zkos	1
$\varepsilon$	poměrné prodloužení	1
$\lambda$	hustota deformační energie	$J \cdot m^{-3}$
$\mu$	úhel stoupání	$rad$
$\sigma$	normálové napětí	$N \cdot m^{-2}$
$\tau$	smykové napětí	$N \cdot m^{-2}$
$\varphi$	úhel natočení	$rad$

## OBSAH

1. Úvod .....	2
1.1. Charakteristika spojek .....	2
1.2. Základní rozdělení .....	2
1.3. Mechanicky neovládané spojky .....	2
1.4. Nepružné spojky .....	2
1.5. Pružné spojky .....	3
1.5.1. Pružné spojky s nekovovým pružným členem .....	3
1.5.2. Pružné spojky s kovovým pružným členem .....	6
1.6. Shrnutí úvodní stati .....	9
2. Zkoumaný model spojky .....	9
2.1. Představení .....	9
2.1.1. Některá další možná provedení spojky .....	11
2.2. Silové poměry při ohybu pružiny .....	11
2.2.1. Geometrické charakteristiky pružiny .....	11
2.2.2. Silové účinky při ohybu pružiny .....	14
2.2.3. Stav napjatosti .....	16
2.2.4. Deformace při ohybu .....	21
2.3. Umístění pružinového věnce do drážky .....	24
2.3.1. Průběh operace .....	24
2.3.2. Silové poměry nalisovaného vnitřního pružinového věnce .....	25
2.3.3. Silové poměry nalisovaného vnějšího pružinového věnce .....	31
2.4. Torzní tuhost spojky při přenosu krouticího momentu .....	33
3. Závěr .....	44

# 1. ÚVOD

## 1.1. Charakteristika spojek

Hřídelová spojka je strojní součást, jejímž úkolem je přenos výkonu (potažmo krouticího momentu) mezi spojovanými hřídeli (hnacím a hnaným), které jsou souosé nebo se protínají pod ostrým úhlem. Dále může spojka chránit soustrojí před přetížením nebo slouží k tlumení torzních kmitů [1, str. 587].

## 1.2. Základní rozdělení

Základní rozdělení spojek dle normy ČSN 02 6400, viz též [1, str. 587 – 589], je následující:

- mechanicky neovládané spojky
- mechanicky ovládané spojky
- spojky hydraulické
- spojky elektrické
- spojky magnetické

## 1.3. Mechanicky neovládané spojky

Tyto spojky lze dále dělit následovně na spojky:

- nepružné
  - pevné
  - vyrovnávací
- pružné

## 1.4. Nepružné spojky

**Pevná** spojka zpravidla neumožňuje vzájemný pohyb spojovaných hřídelů v jakémkoli směru, z tohoto důvodu je nutné vyžadovat souosost spojovaných hřídelů. Spojky neobsahují žádný poddajný člen, z toho důvodu neumožňují tlumení rázů a jakékoli (dočasné) rozdíly v otáčkách hnacího a hnaného hřídele. Účelem těchto spojek je chovat se v ideálním případě tak, jak by se choval nedělený hřídel. Do této kategorie se řadí mimo jiné spojka trubková, korýtková (zvaná též misková či objímková), přírubová, kotoučová a spojka s čelním ozubením [1, str. 628 – 629].

Konstrukce **vyrovnávacích** spojek umožňuje vzájemný pohyb spojovaných hřídelů a kompenzaci příslušných vůlí a nepřesností, a to v závislosti na daném typu vyrovnávací spojky. Stále však neřeší problematiku přenášených rázů a kmitů, které mohou během provozu vznikat a být zdrojem nadměrného opotřebení či poškození dalších částí stroje – ložisek, elektromotoru atd.



Tyto jevy potlačují až spojky pružné. Mezi vyrovnávací spojky řadíme vyrovnávací spojky axiální a radiální, kloubové (homokinetické klouby, Kardanův kloub, ...), kolíkové, univerzální aj. [1, str. 640].

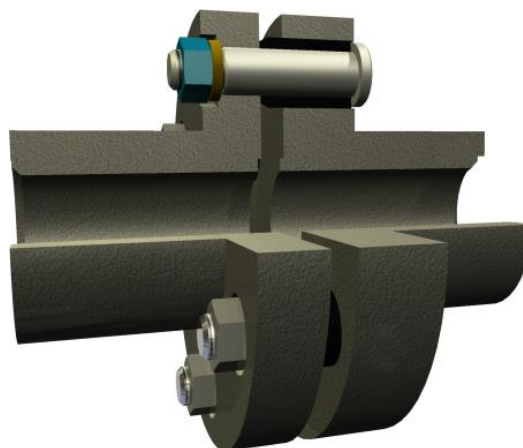
### 1.5. Pružné spojky

Charakteristickým znakem pružných spojek je přítomnost pružného (poddajného, snadno deformovatelného) členu, který dokáže zachytit negativní mechanické vlivy a působením své vlastní pružné deformace značně upravit jejich průběh. Mimoto umožňuje pružná část částečně kompenzovat i polohové a tvarové odchylky. Jelikož poddajnost daného tělesa je závislá na materiálových vlastnostech a tvarových charakteristikách, dostáváme dva hlavní způsoby realizace pružného elementu. Je možné použít snadno deformovatelné materiály s nízkou tuhostí – např. gumy, pryže, plasty a kůži, nebo lze vhodně upravit tvar součásti z materiálu s vysokou tuhostí, především z oceli [1, str. 666 – 667].

#### 1.5.1. Pružné spojky s nekovovým pružným členem

##### ***Spojka kotoučová s pryžovými pouzdry***

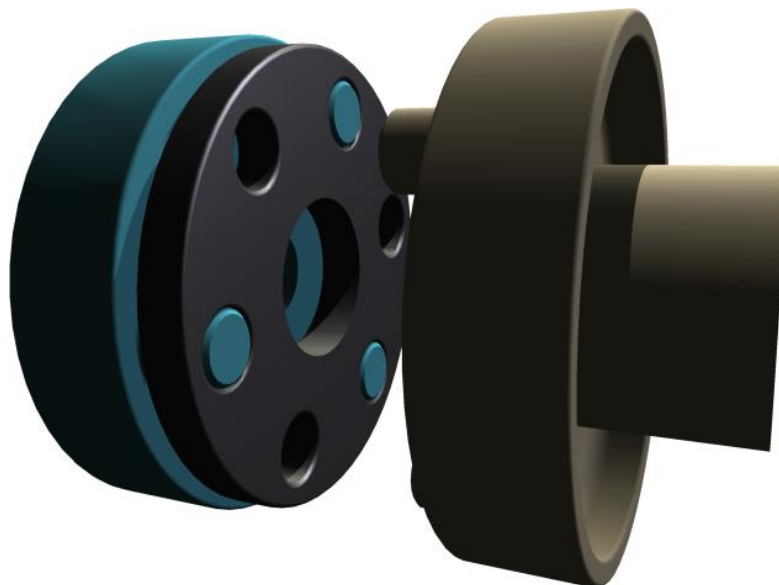
Je obdobou nepružné přírubové spojky [1, str. 632] s tím rozdílem, že spojovací šrouby jsou nyní opatřeny pouzdry zhotovených z pryže [1, str. 673]. Z její konstrukce je patrné, že hnací a hnaný hřídel musí být rovnoběžné, rovněž minimální by měla být i tolerance sousosti hřídelů (viz tab. 1 dále). Tato spojka je tedy vhodná pouze na utlumení rázů od krouticího momentu např. při spuštění pohonu, ohybové momenty a nepřesnosti eliminovat nedokáže.



*Obr. 1 Schéma spojky s pryžovými pouzdry.*

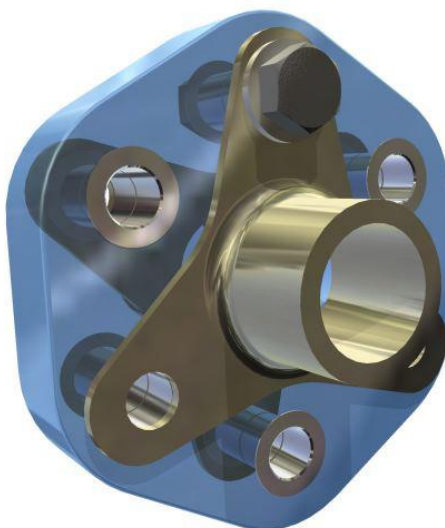
##### ***Spojka s pryžovým kotoučem***

Příkladem tohoto druhu spojky je například typ Discflex výrobce RENOLD. Tato spojka sestává ze dvou přírub, mezi něž je vložen pryžový kotouč. V něm jsou zhotoveny otvory, do kterých přesně zapadají čepy střídavě z obou přírub. Tím se kotouč stává spojovací součástí obou přírub a musí přes něj tedy přecházet veškeré dynamické účinky, které svým pružným chováním vhodně upraví. Tolerance sousosti a rovnoběžnosti hřídelů musí být malé, např. podle [2, str. 8, 31, 32].



Obr. 2 Princip funkce spojky s pryžovým kotoučem.

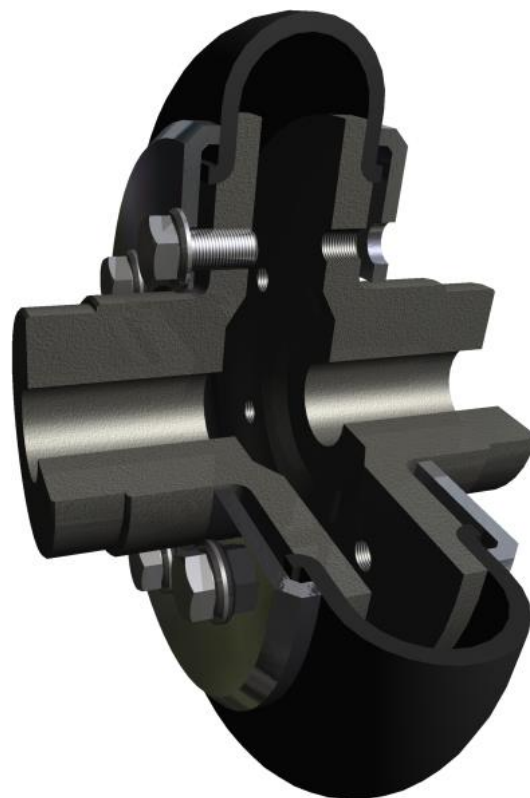
Obdobou spojky s pryžovým kotoučem je tzv. spojka **Hardy**. Do pryžového kotouče s nejčastěji čtyřmi či šesti otvory jsou šrouby připevněny dvoučelistové, respektive tříčelistové unášeče. Toto uspořádání umožňuje větší úhlovou odchylku os spojovaných hřídelů. Pro výkonově méně náročné pohony ji lze použít namísto Kardanova kloubu [3]. Na obr. 3 je pro lepší znázornění principu funkce pryžová část zobrazena průhledně.



Obr. 3 Spojka typu Hardy.

### ***Spojka obručová (periflex)***

Pružným elementem této spojky je pryžová obruč, která je sevřena mezi přírubou a přítlačným diskem pomocí šroubového spoje [1, str. 676 – 677]. Vzhledem ke značné vůli mezi oběma spojovanými částmi dovoluje tato spojka výraznější nesouosost a úhlovou odchylku hřídelů (viz např. typ Tyreflex v katalogu RENOLD [2]).



*Obr. 4 Řez spojkou typu periflex.*

### ***Spojka s pryžovými klíny***

Spojka je tvořena dvěma přírubami a vloženým pružným mezičlenem. Krouticí moment se přenáší tvarovým stykem mezi všemi třemi částmi, tento styk je realizován formou čelních zubů tvarem připomínajících klín [10]. Lze tvrdit, že se jedná o obdobu nepružné spojky s čelním ozubením, ke které je přidán pružný mezičlen.



*Obr. 5 Příklad spojky s pryžovými klíny – typ SpiderJaw, výrobce RENOLD Plc [10].*

### ***Závěrečné shrnutí, srovnání vlastností, oblast použití***

Uvedené typy spojek jsou základními typy, nemohou však zahrnout nespočet možných variant provedení jednotlivých výrobců. Pro lepší představu o možnostech použití uvedených druhů spojek jsem se rozhodl uvést parametry pro odpovídající typy spojek z online katalogu britského výrobce, společnosti RENOLD [2].

Tab. 1 Přehled některých parametrů pružných spojek.

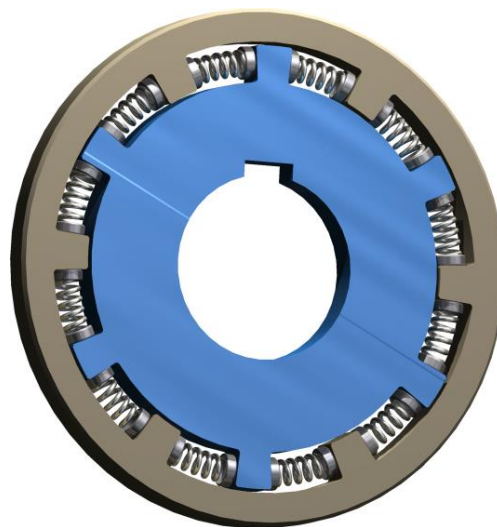
druh spojky	název dle RENOLD Plc.	max. úhlová odchylna hřídelů [°]	max. průměr hřídele [mm]	max. točivý moment [Nm]	příklady použití
s pryžovými pouzdry	Crownpin	0,15	300	249 400	jeřáby, výtahy, pouťové atrakce
s pryžovým kotoučem	Discflex	1	110	4 298	kompresory, míchačky
obručová (periflex)	Tyreflex	4	150	6 270	generátory, čerpadla
s pryžovými klíny	Spiderflex	2,5	115	3 150	kovovýroba, čerpadla

### 1.5.2. Pružné spojky s kovovým pružným členem

Tyto spojky využívají k dosažení požadovaných vlastností pružného elementu zhotoveného z kovu. Různé možnosti provedení reprezentují následující druhy spojek.

#### **Spojka s vinutými pružinami**

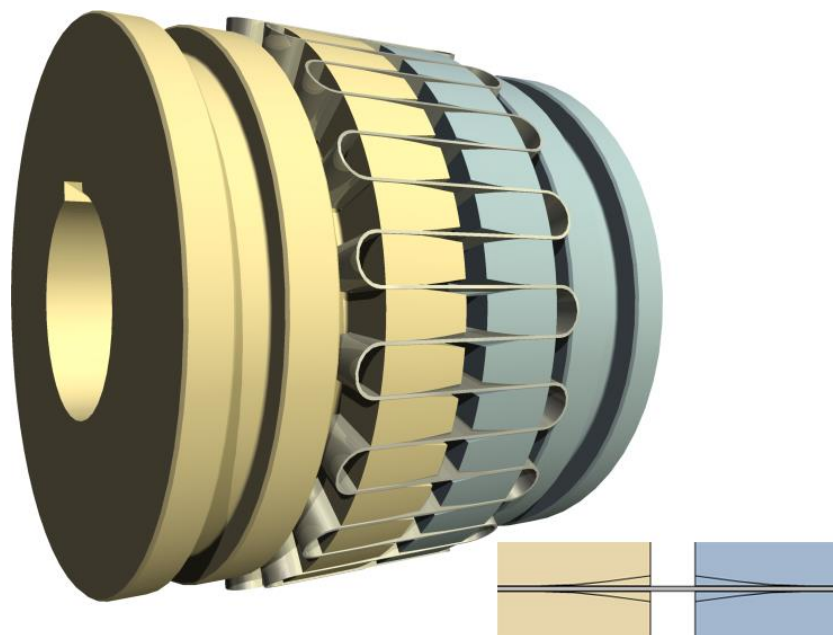
Pružné chování zde zajišťují vinuté (šroubovitě) válcové pružiny umístěné mezi jednotlivými částmi spojky. Při zatížení jsou pružiny stlačovány, charakteristika spojky je až do maximálního stlačení lineární [1, str. 681]. Základní princip znázorňuje obr. 6. V závislosti na konstrukci lze teoreticky dosáhnout pružnosti v jednom, nebo v obou směrech.



Obr. 6 Princip funkce spojky s vinutými pružinami.

#### **Spojka s vloženým hadovitým pružným pásem**

Tento typ spojky, zvaný Bibby (dle jejího vynálezce, jímž byl v roce 1917 Dr. James Bibby), využívá pružného kovového pásu hadovitého tvaru, který se vkládá do jednotlivých zářezů na přírubách. Pružné chování zajišťuje ohyb pásu, který je umožněn specifickým tvarem zářezů v přírubách. Tuhost se odvíjí od délky volných (na přírubu nedoléhajících) částí pružinového pásu, ta se při zatěžování mění, tuhost spojky je proto proměnlivá v závislosti na zatížení [4].



Obr. 7 Spojka s hadovitým pásem - Bibby (nezakrytovaná).

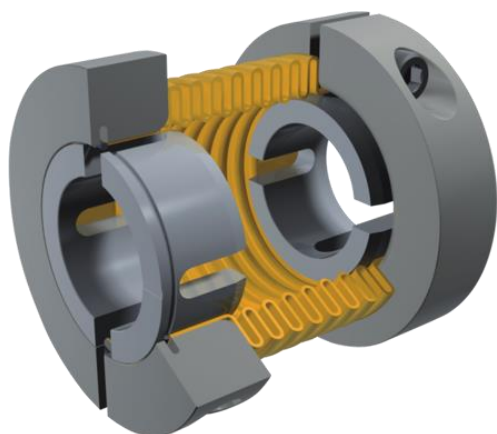
Podobného principu – ohybu pružného elementu – využívá dále např. **spojka jehlová**. Příruby jsou opatřeny otvory, ve kterých jsou připevněny tzv. jehly (tyče velmi malého průřezu), které jsou snadno deformovatelné a zajišťují pružné chování celku [1, str. 680 – 681].

#### **Vlnocová spojka**

Pružnou částí u tohoto druhu spojky je dle názvu vlnovec. Jedná se o vhodně tvarovanou kovovou součást, válec se značně zvlněným povrchem, jež spojuje obě části spojky a vhodně upravuje dynamické vlastnosti pohonu. Především ale tyto spojky vynikají schopností tolerovat úhlovou odchylku hřídelů, která může být v závislosti na zatížení až několik stupňů. Přenášený moment se obvykle pohybuje v řádu desítek až stovek Nm [5].

#### **Spirálová spojka**

Výhodou spirálových spojek je, že celá spojka může být jednodílnou strojní součástí. V principu jde o trubku zčásti narušenou šroubovým řezem. Toto provedení umožňuje mimo elastické chování i výraznou nesouosost spojovaných hřídelů. Tento typ spojek se také často zhotovuje z hliníkových slitin. Je zpravidla určená pro přenos menších krouticích momentů [6].



Obr. 8 Vlnovcová spojka výrobce Mayr [5].



Obr. 9 Spirálová spojka výrobce Reliance Precision Ltd. [6].

### Shrnutí a porovnání vlastností

Pro ucelenější představu o možnostech použití zmíněných typů spojek poslouží následující porovnání některých významných technických parametrů. Na rozdíl od předchozí kapitoly jsem zde již neshledal výrobce, jehož portfolio by zahrnovalo veškeré uvedené druhy spojek, proto je namísto ještě jednou zdůraznit, že se jedná o údaje orientační, kdy některé vlastnosti (např. maximální přenášený moment) se odvíjejí především od velikosti spojky, která se může značně lišit (např. pro spojku Bibby je hmotnostní rozsah dle citovaného katalogu v tabulce 2 níže od dvou kilogramů až po více než tunový výrobek). Dále uváděná úhlová odchylka je z hlediska charakteru spojky, jež je předmětem této práce, významným parametrem, je stěžejní při posuzování schopnosti dané spojky suplovat funkci homokinetického kloubu, tj. mít zároveň charakteristiku spojek vyrovnávacích.

Tab. 2 Příkladů pružných spojek s kovovými členy.

druh spojky	dle údajů výrobce:	max. úhlová odchylka hřídelů [°]	max. průměr hřídele [mm]	max. točivý moment [Nm]	příklady použití
s vinutými pružinami	LO-REZ [7]	0,9	500	471 000	lokomotivy, velké lodě
Bibby	Lovejoy [8]	0,25	330	186 470	těžební průmysl, tvářecí stroje
vlnovcová	Mayr [5]	3	85	700	vyrovnávací členy, přenos menších momentů
spirálová	Reliance Precision [6]	4	14	1,5	

## 1.6. Shrnutí úvodní stati

Tato kapitola měla čtenáři posloužit k získání základní představy ohledně rozdělení a chování prezentovaných typů spojek, přičemž důraz byl kladen zejména na spojky pružné. Je na místě, aby čtenář, jenž nebyl s touto problematikou doposud seznámen, byl pro posouzení dalších částí práce vybaven jakýmsi srovnávacím aparátem, na jehož základě bude schopen objektivně hodnotit a porovnávat vlastnosti dále zkoumané spojky inovativní konstrukce, které budou věnovány zbývajícím částem této práce.

## 2. ZKOUMANÝ MODEL SPOJKY

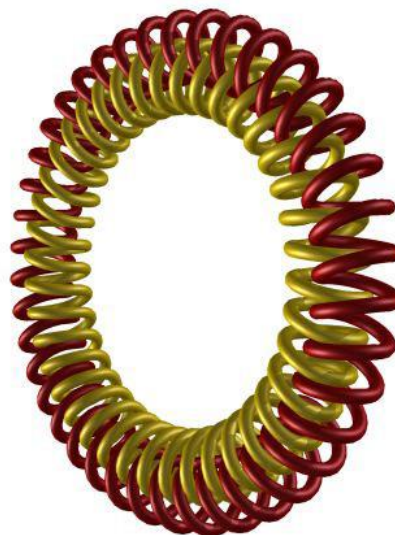
### 2.1. Představení

Předem je nutno předeslat, že autorem a vlastníkem patentu [9] představované spojky je vedoucí této práce, Ing. Karel Vítek, CSc. V následujícím popisu tedy budou shrnuty základní principy a myšlenky ohledně fungování spojky, se kterými jsem jím byl obeznámen.

Jedná se o pružnou hřídelovou spojku, tvořenou dvěma přírubami a kovovým pružným členem. Právě ten je svým provedením inovativní a představuje hlavní předmět zkoumání této práce. Jedná se o dva pružinové věnce, které jsou do sebe souose vloženy tak, že dochází ke styku mezi oběma věnci a jejich vzájemnému silovému působení, na jehož základě bude následně přenášen krouticí moment mezi oběma hřídeli. Věnce jsou zhotoveny ohnutím válcové pružiny po tvořící kružnici do tvaru anuloidu (popř. cívky). Nutnými podmínkami pro realizaci vsunutí jsou následující:

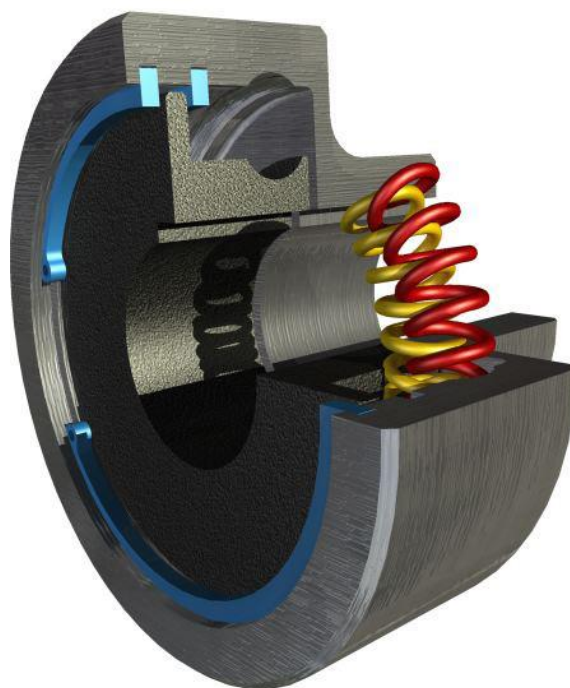
- opačný smysl vinutí pružin, tj. jedna pravotočivá, druhá levotočivá
- stejný počet závitů jednotlivých pružin
- větší stoupání pružiny tvořící vnější věnec a tedy její větší délka
- závity jednotlivých věnců mezi sebou mají dostatečné vůle
- věnce mají dostatečný vzájemný přesah v radiálním směru

Věnce jsou na přírubách vedeny v drážkách ve tvaru anuloidu. Pro jejich montáž je bude nutné deformovat (např. menší věnec se bude muset do drážky dostat přes větší průměr – viz kap. 2.3), jejich pružné chování by to mělo umožnit. Fixace v drážkách by bylo možné dosáhnout různými způsoby, např. bodovými svary. Spojení přírub s hřídeli lze rovněž realizovat rozličnými způsoby, na obr. 11 je jako příklad drážka pro spojení perem. Možnosti vzájemného pohybu přírub v axiálním směru jsou vymezeny umístěnými rozpěrnými hřídelovými kroužky. Tolerance nesouososti a úhlové výchylky hřídelů jsou zde dané geometrickými parametry přírub. Při uspořádání dle nákresu níže je zřejmé, že samotný pružný člen je schopen tolerance nepřesností ve větším rozsahu a není v tomto ohledu limitujícím členem sestavy.



Obr. 10 Vložené pružinové věnce.

Zde se jedná o prvotní náhled na technologii výroby a konstrukci. Jde o stěžejní a nezanedbatelný faktor z hlediska celkového hodnocení výrobku, je nepochybně úzce spjat s ekonomickými náklady na výrobu a významně se tak podílí na možnostech budoucího úspěchu produktu na trhu. Nicméně jakkoli je toto hledisko nezanedbatelné, není v tuto chvíli a na tomto místě předmětem této práce. Detailními otázkami konstrukce a technologie výroby celé spojky dále tedy zabývat nebudu.



Obr. 11 Schematické znázornění funkce spojky.

Terčem mé pozornosti se v tuto chvíli stane samotný pružný člen. V dalších kapitolách se pokusím identifikovat geometrické a pevnostní vlastnosti pružinového věnce.



### 2.1.1. Některá další možná provedení spojky

Na obr. 12 je znázorněno několik dalších variant této spojky.

#### ***Spojka s dvěma páry pružinových věnců***

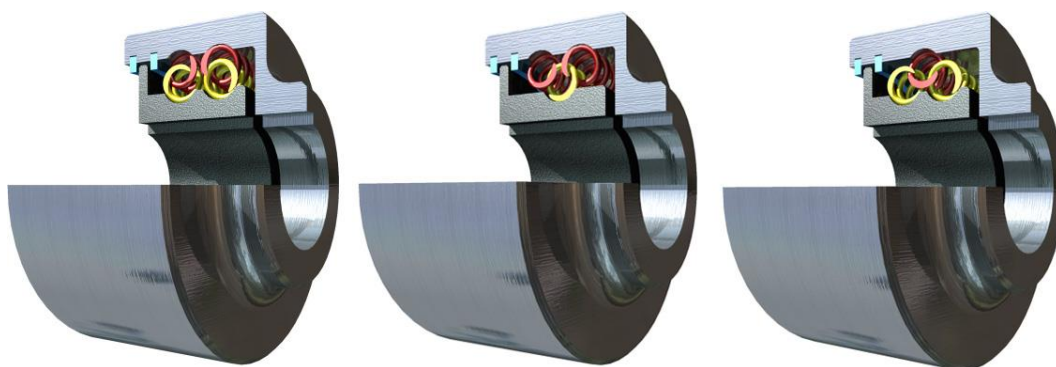
Takovéto uspořádání umožňuje přenos většího (lze předpokládat přibližně dvojnásobného) krouticího momentu přidáním další dvojice pružných členů. Této konstrukční úpravy lze s výhodou použít v případech, kde by spojka původní konstrukce byla poddimenzována. Výhodou této úpravy je skutečnost, že za cenu nevýrazného zásahu do rozměrů spojky, a to zvětšením délky soustavy o šířku věnce a dodatečné vůle (viz obr. 12 níže), lze dosáhnout výrazné změny silových charakteristik spojky.

#### ***Spojka s jedním vnitřním a dvěma vnějšími věnci***

Účelem této konfigurace je především zvýšení schopnosti spojky tolerovat nesouosost hnacího a hnaného hřídele. Spojka v této úpravě by měla mezi ostatními vynikat právě touto schopností, schopností pracovat do určité míry jako náhrada homokinetického kloubu.

#### ***Spojka s dvěma vnitřními věnci a jedním vnějším věncem***

Obdoba varianty předešlé s podobnými charakteristikami opět s důrazem na toleranci odchylek hřídelů.



Obr. 12 Další provedení spojky – dva páry věnců, 1 vnitřní - 2 vnější věnce a 2 vnitřní - 1 vnější věnec.

## 2.2. Silové poměry při ohybu pružiny

### 2.2.1. Geometrické charakteristiky pružiny

Pružinu získáme tažením profilu (nejčastěji kruhového) po tvořící šroubovici. Pro přesné určení šroubovice definujeme následující parametry:

poloměr šroubovice:  $R$

stoupání šroubovice:  $s$

počet závitů:  $n$

Základními pojmy a parametry pružin ve strojírenství jsou poté:

průměr taženého kruhového průřezu (tj. drátu):  $d$

střední průměr pružiny:  $D$

vnější průměr pružiny:  $D_1$

Vazby mezi rozměry  $R, d, D, D_1$  jsou pak zřejmě následující,

$$D = 2 \cdot R, \quad D_1 = D + d. \quad (1)$$

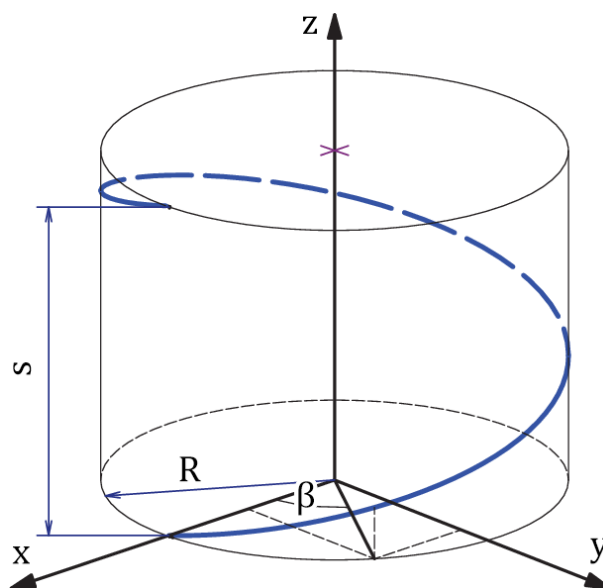
V kartézském souřadném systému lze popsat šroubovici s osou totožnou s osou  $z$  souřadného systému následujícími parametrickými rovnicemi (při zavedení cylindrických souřadnic), viz obr. 13:

$$x(\beta) = R \cdot \cos \beta \quad (2)$$

$$y(\beta) = R \cdot \sin \beta \quad (3)$$

$$z(\beta) = \frac{s}{2\pi} \cdot \beta \quad (4)$$

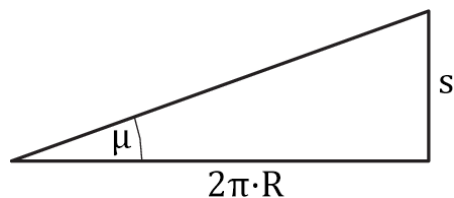
$$\beta \in \langle 0; 2n\pi \rangle \quad (5)$$



Obr. 13 Parametrizace šroubovice.

Pro další výpočet je výhodné stanovit úhel stoupání z rozvinutí šroubovice do charakteristického trojúhelníku. Pro úhel stoupání  $\mu$  platí zřejmě tento vztah (viz obr. 14):

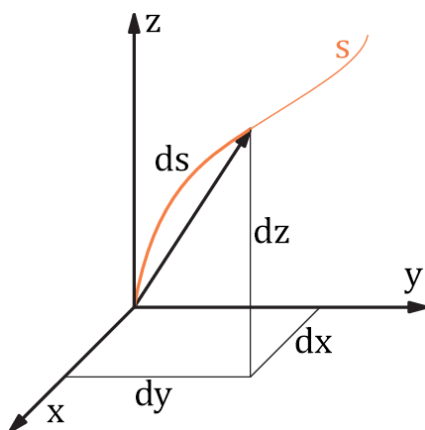
$$\tan \mu = \frac{s}{2\pi \cdot R} \quad (6)$$



Obr. 14 Rozvin šroubovice.

Délku elementu prostorové křivky lze určit jako funkci parametru  $\beta$  (viz obr. 15),

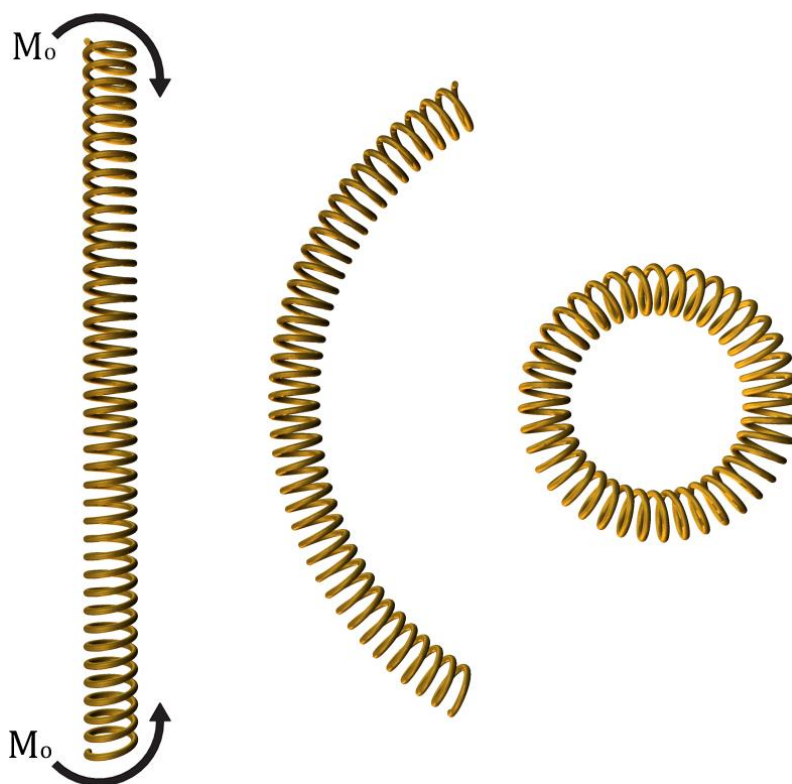
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = d\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2} = \\ &= d\beta \sqrt{(-R \cdot \sin \beta)^2 + (R \cdot \cos \beta)^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2} = d\beta \sqrt{R^2 + R^2 \left(\frac{s}{2\pi \cdot R}\right)^2} = \\ &= Rd\beta \sqrt{1 + \tan^2 \mu} = Rd\beta \sqrt{\frac{\cos^2 \mu + \sin^2 \mu}{\cos^2 \mu}} = \frac{Rd\beta}{\cos \mu}. \end{aligned} \quad (7)$$



Obr. 15 Element obecné křivky.

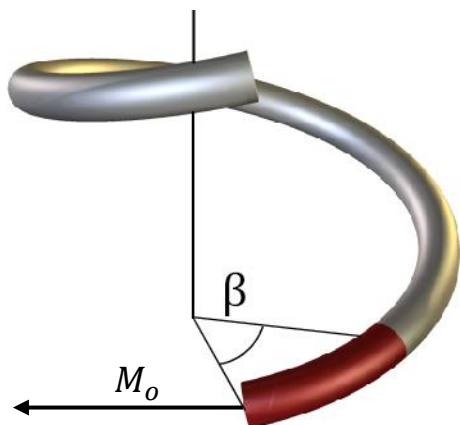
## 2.2.2. Silové účinky při ohybu pružiny

Pružinové věnce budou zhotoveny ohybem válcové pružiny (obr. 16). Pokusme se nyní stanovit rozložení momentů po pružině. Jelikož je tvořena periodicky se opakujícími závity, mělo by postačit řešení pouze v tomto závitě, který je možné libovolně vytknout. Pružina bude ohýbána působením silových dvojic – vnějších momentů, jejichž vektor je kolmý na osu pružiny a rovnoběžný s osou utvářeného věnce. Aby byla zachována silová rovnováha, působí oba momenty vzájemně opačným směrem na obou koncích pružiny.

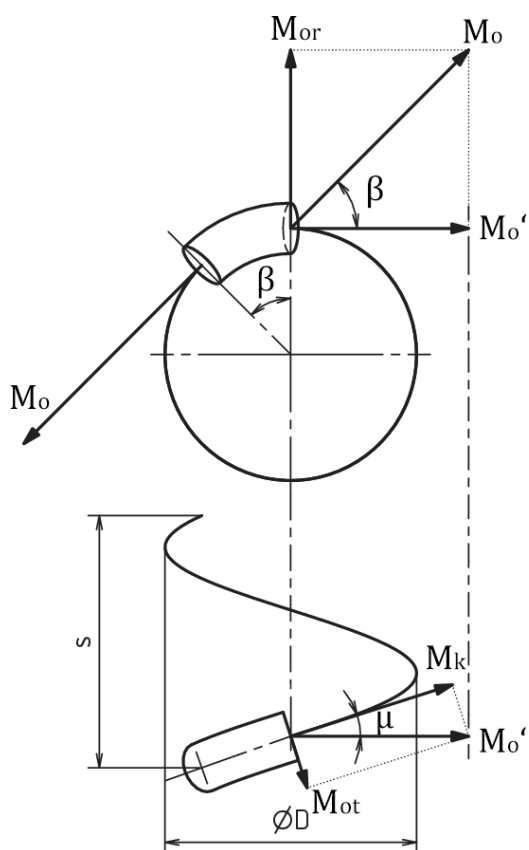


Obr. 16 Ohyb pružiny do tvaru pružinového věnce.

Pro následné řešení je nutné vyšetřit průběhy jednotlivých druhů momentů v obecném místě pružiny. Zavedme pro vytknutý závit pružiny souřadný systém šroubovice dle obr. 13, souřadnicí, jež popisuje místo řezu pružiny v rovině  $xy$ , je úhel  $\beta$ . Dále je nutné uvažovat, že tečna šroubovice (která je normálou kruhového průřezu drátu) svírá v libovolném bodě s rovinou  $xy$  úhel stoupání šroubovice  $\mu$ . Tyto parametry užijeme k rozkladu působícího ohybového momentu  $M_0$ .



Obr. 17 Pohled na závit pružiny, vytknutý řez znázorněn červeně.



Obr. 18 Rozklad vnějšího ohybového momentu.

### Rozklad momentů na jednotlivé složky:

Provedme řez závitem pružiny v obecném místě popsaném souřadnicí  $\beta$ . V místě myšleného řezu působí vnitřní moment, který uvádí odříznutou část do stavu statické rovnováhy, je tedy stejné velikosti a opačného směru. Rozklad tohoto vektoru na ohybové a krouticí složky je znázorněn na obr. 18.

-pohled ve směru osy pružiny (zdola)

$$M_{or} = M_o \cdot \sin \beta \quad (8)$$

$$M_o' = M_o \cdot \cos \beta \quad (9)$$

$$M_{ot} = M_o' \cdot \sin \mu = M_o \cdot \cos \beta \cdot \sin \mu \quad (10)$$

$$M_k = M_o' \cdot \cos \mu = M_o \cdot \cos \beta \cdot \cos \mu \quad (11)$$

-pohled kolmo na osu

## 2.2.3. Stav napjatosti

Zatížením pružinového věnce vnější silou vznikají uvnitř tohoto věnce napěťové stavy, jejichž správná identifikace je zcela zásadní pro odhad dalšího chování materiálu. Cílem řešení stavu napjatosti je získání matematického modelu, jenž popisuje funkční závislost geometrie věnce, jeho vnějšího zatížení, materiálových vlastností a bezpečnosti. V předchozí kapitole byl vnější ohybový moment rozložen na tři významné složky působící ve třech vzájemně kolmých směrech, momenty ohybové  $M_{or}$  a  $M_{ot}$  a krouticí moment  $M_k$ .

Napětí od ohybových momentů  $M_{or}$  a  $M_{ot}$  působících na souřadnicích  $r$  a  $t$  na kruhový průřez o průměru  $d$  (viz obr. 19) je dáno vztahy

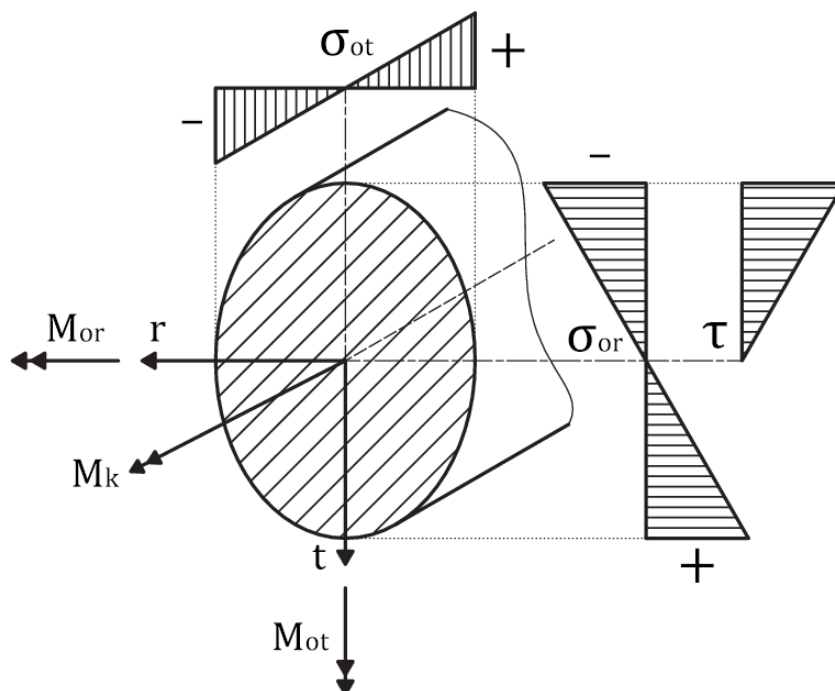
$$\sigma_{or}(r, t) = \frac{M_{or}(\beta)}{J_r} \cdot t, \sigma_{ot}(r, t) = -\frac{M_{ot}(\beta)}{J_t} \cdot r, J_r = J_t = J = \frac{\pi d^4}{64} \quad (12)$$

Napětí vzniklé působením krouticího momentu  $M_k$  lze určit

$$\tau(r, t) = \frac{M_k(\beta)}{J_k} \cdot \rho; J_k = \frac{\pi d^4}{32}; \rho = \sqrt{r^2 + t^2} \quad (13)$$

Protože je průřez kruhový, jsou souřadnice omezeny:

$$r^2 + t^2 \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (14)$$

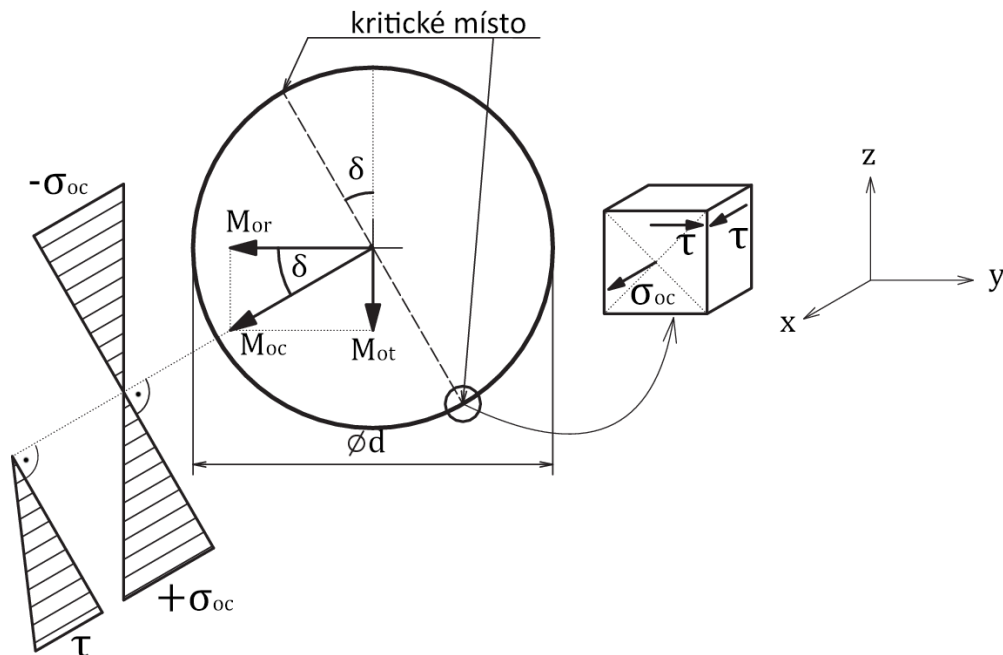


Obr. 19 Rozložení napětí po průřezu pružiny.

Následně stanovíme redukované napětí. Využijeme k tomu energetickou hypotézu, dle které je toto napětí možné stanovit při obecné napjatosti dle vztahu

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}. \quad (15)$$

Pro lepší názornost bude nyní výhodné vektory ohybového momentu nahradit výsledným vektorem ohybového momentu. Kritické místo namáhání se bude nacházet na povrchu pružiny, jeho poloha bude dána poměrem velikostí složek momentů  $M_{or}$  a  $M_{ot}$ . (viz obr. 20).



Obr. 20 Namáhání průřezu v kritických bodech.

Napětí v kritickém bodě od ohybu  $\sigma_{oc}$  se určí dle vztahu

$$\sigma_{oc} = \frac{M_{oc}}{W_o} = \frac{\sqrt{M_{or}^2 + M_{ot}^2}}{W_o} = \frac{32 \cdot \sqrt{M_{or}^2 + M_{ot}^2}}{\pi d^3}. \quad (16)$$

Napětí od krouticího momentu je po celém obvodu průřezu prutu konstantní,

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 \cdot M_k}{\pi d^3}. \quad (17)$$

Chtěli-li bychom popsat kritické místo souřadnicí  $\delta$  dle obr. 20, pak platí

$$\tan \delta = \frac{M_{ot}}{M_{or}}. \quad (18)$$

Zavedeme-li v kritickém bodě souřadný systém dle obr. 20, budou si zřejmě zakreslená napětí s napětími ve směrech os  $x, y, z$  odpovídat následujícím způsobem,

$$\sigma_x = \sigma_{oc}, \tau_{xy} = \tau_z = \tau, \quad (19)$$

ostatní složky napětí budou nulové. Dosazením (19) do původního vztahu energetické hypotézy (15) dostaneme vztah

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\sigma_{oc}^2 + (-\sigma_{oc})^2 + 6\tau^2}, \quad (20)$$

který lze upravit,

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{oc}^2 + 3\tau^2}. \quad (21)$$

### **Ověření použité teorie**

Zdali jsou výše uvedené předpoklady správné a použitelné jsem se rozhodl zjistit porovnáním výpočtu redukovaného napětí dle vztahu výše s výsledky pevnostní analýzy programu Autodesk Inventor. Tento software používá pro výpočet namáhání metody konečných prvků. Jedním z výsledků analýzy je právě redukované napětí stanovené dle energetické hypotézy (užívá ekvivalentní označení – napětí Von Mises). Vlastní výpočty redukovaného napětí jsem provedl pomocí tabulkového kalkulátoru Microsoft Excel. Jako referenční geometrii jsem volil pružinu s následujícími parametry:

$$M_0 = 100 \text{ Nmm}$$

$$D = 20 \text{ mm}$$

$$s = 15 \text{ mm}$$

$$d = 2 \text{ mm}$$

krok úhlové souřadnice  $\beta: 5^\circ$

### **Výsledky výpočtu:**

porovnání redukovaného napětí dle velikosti a průběhu:

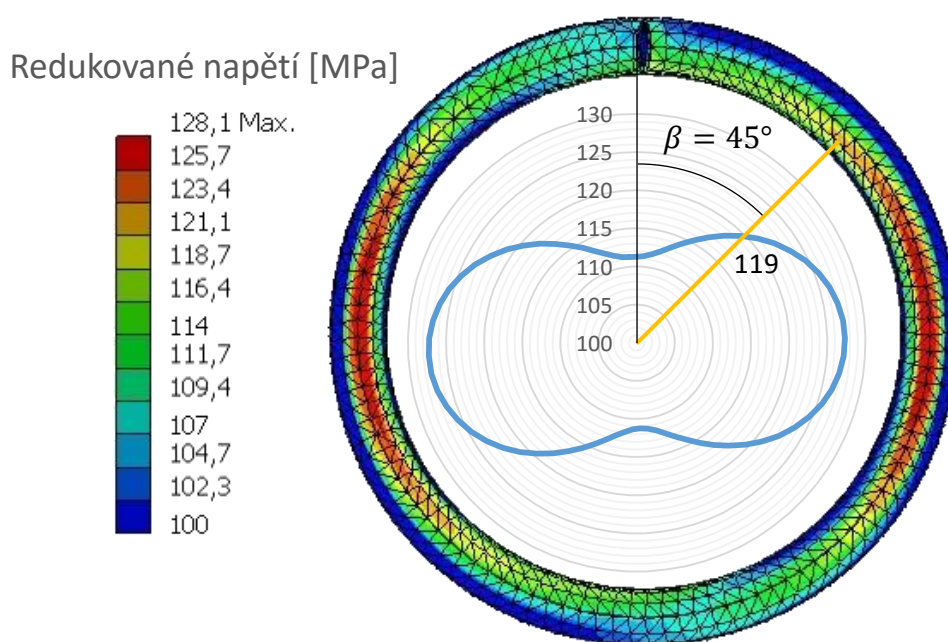
Tab. 3 Porovnání výpočtu.

<b>Maximální hodnota <math>\sigma_{red}</math> [MPa]</b>	
výpočty dle vzorců (MS Excel)	pevnostní analýza (Autodesk Inventor)
127,3	128,1



**Grafické srovnání:**

Na obr. 21 níže je ukázán průběh redukovaného napětí v závislosti na souřadnici  $\varphi$  (lze interpretovat jako pohled na namáhaný závit pružiny ve směru její osy). Barevný profil ukazuje výsledky pevnostní analýzy, uvnitř něj je poté polární graf, který interpretuje výsledky vlastního výpočtu v Excelu. Lze si všimnout, že průběhy tohoto napětí si vzájemně relativně přesně odpovídají.



Obr. 21 Porovnání průběhů napětí.

*Poznámka: Tuto kontrolu jsem provedl vícekrát při různém nastavení zatížení a geometrie tvaru pružiny. Bez důkazů poznamenám, že rozdíl mezi jednotlivými výsledky jsem vždy uvažil jako přijatelné (odchylka v rámci několika procent). Tento rozdíl vykazuje tendenci se zvyšovat při takovém nastavení, kdy dochází k větším deformacím pružiny, kterou zde uvedený výpočet nezohledňuje.*

Z průběhu napětí je patrné, že nejvíce namáhané části pružiny jsou místa popsána souřadnicí  $\beta = 90^\circ, 270^\circ$ . Použití energetické hypotézy se zde jeví jako opodstatněné, jelikož užitím teorie  $\tau_{max}$  získáme průběh napětí dosazením do vztahu pro redukované napětí

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{oc}^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{or}}{W_o}\right)^2 + \left(\frac{M_{ot}}{W_o}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_k}{W_k}\right)^2}. \quad (22)$$

Pro kruhový průřez však platí

$$W_k = 2 \cdot W_o, \quad (23)$$

načež dostáváme dosazením (22) do (23)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_{or}}{W_o}\right)^2 + \left(\frac{M_{ot}}{W_o}\right)^2 + \left(\frac{M_k}{W_o}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{or}^2 + M_{ot}^2 + M_k^2}}{W_o} \quad (24)$$

Složky momentů jsme získali rozkladem vnějšího ohybového momentu do tří ortogonálních rovin. Výraz  $\sqrt{M_{or}^2 + M_{ot}^2 + M_k^2}$  je proto jejich geometrickým součtem a je roven velikosti vnějšího momentu  $M_0$ , o čemž se lze přesvědčit dosazením z rovnic (8, 10, 11). Výsledkem je tedy vztah

$$\sigma_{red} = \frac{M_0}{W_o} = konst. \quad (25)$$

Dle Trescovy teorie je namáhání ve všech částech pružiny konstantní, není tedy závislé na zavedené souřadnici  $\beta$ . Jeho velikost je shodná s maximální hodnotou redukovaného napětí dle energetické hypotézy. Tato vlastnost je zřejmá, uvědomíme-li si, že hodnota onoho maxima nastává právě v místě, kde pružina není namáhána krutem. Porovnáním vztahů pro  $\sigma_{red}$  vidíme, že právě koeficientem u členu napětí od krutu se tyto teorie (v tomto případě) liší, při nulové složce smykového napětí  $\tau$  tedy nutně dávají stejné výsledky.

Užitečným zjištěním pro řešení rozložení napětí při ohybu dalších pružin (kruhového průřezu pružinového drátu) je fakt, že pro určení velikosti maximálního redukovaného napětí v pružině vystačíme pouze se znalostí velikosti ohybového momentu  $M_0$  a průměru drátu  $d$ , jak je vidět při rozepsání vztahu (25),

$$\sigma_{red,max} = \frac{32 \cdot M_0}{\pi d^3}. \quad (26)$$

Ke stejnému zjištění dojdeme při představě nosníku kruhového průřezu jako pružiny, pro kterou se poměr stoupání a jejího průměru blíží limitně nekonečnu. Pro úhel stoupání poté dostaneme vztah:

$$\frac{s}{R} \rightarrow \infty; \mu = \arctan \frac{s}{2\pi \cdot R} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

Dosazením  $\mu = \frac{\pi}{2}$  do rovnic (8, 10, 11) bychom zjistili, že zaniká krouticí moment, zbylé ohybové momenty by bylo opět možné geometricky sečíst a dospět tak ke vztahu (26) uvedenému výše, přičemž energetická hypotéza by konvergovala v hypotézu  $\tau_{max}$ .

Budeme-li považovat výsledky rozložení napětí dle energetické hypotézy za směrodatné, plyne z této úvahy další poznatek – rozdíl v namáhání jednotlivých částí pružiny je tím menší, čím větší je poměr jejího stoupání k průměru (tj. čím více se svou geometrií blíží nosníku kruhového průřezu).

#### 2.2.4. Deformace při ohybu

Z předchozí kapitoly je patrné, že pružina je namáhána ohybovým a krouticím momentem. Pro řešení deformace pomocí Castiglianovy věty je nutné stanovit množství vnesené deformační energie (pro jeden závit pružiny). Jelikož uvažujeme použití pružiny o malém průřezu drátu, budou zcela dominantní složky deformační energie od silových dvojic, vliv zbylých složek zanedbáme.

Elementární objem  $dV$  vyjádříme za pomoci vztahu (7):

$$dV = ds \cdot dA = \frac{R \cdot d\beta}{\cos \mu} \cdot dA \quad (28)$$

kde  $dA$  lze s pomocí souřadnic  $r, t$  (viz obr. 19) psát jako:

$$dA = dr \cdot dt \quad (29)$$

#### **Deformační energie od ohybu:**

$$\begin{aligned} U_o &= \int_{(V)} \lambda_o dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \int_{(V)} \left( \frac{M_{or}(\beta)}{J} \cdot t - \frac{M_{ot}(\beta)}{J} \cdot r \right)^2 dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \int_{(V)} \left( \frac{M_{or}^2}{J^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{M_{ot}}{J} \cdot \frac{M_{or}}{J} \cdot r \cdot t + \frac{M_{ot}^2}{J^2} \cdot r^2 \right) dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \\ &= \frac{R}{2 \cdot E \cdot \cos \mu} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{M_{or}^2}{J^2} \int_{(A)} t^2 dA - 2 \cdot \frac{M_{ot}}{J} \cdot \frac{M_{or}}{J} \cdot \int_{(A)} r \cdot t \cdot dA + \frac{M_{ot}^2}{J^2} \cdot \int_{(A)} r^2 dA \right\} d\beta, \quad (30) \end{aligned}$$

pro kruhový průřez platí

$$\int_{(A)} t^2 dA = \int_{(A)} r^2 dA = \frac{\pi d^4}{64} = J, \quad (31)$$

$$\int_{(A)} r \cdot t \cdot dA = D_{rt} = 0. \quad (32)$$

Vztah dále upravíme dosazením (31), (32) do (30):

$$\begin{aligned} U_o &= \frac{R}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot \int_0^{2\pi} (M_{or}^2 + M_{ot}^2) \cdot d\beta = \\ &= \frac{M_0^2 \cdot R}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \mu) \cdot d\beta = \\ &= \frac{M_0^2 \cdot R \cdot \pi \cdot (\sin^2 \mu + 1)}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} = \frac{32 \cdot M_0^2 \cdot R \cdot (\sin^2 \mu + 1)}{E \cdot d^4 \cdot \cos \mu} \end{aligned} \quad (33)$$

**Deformační energie od krutu:**

$$\begin{aligned} U_k &= \int_{(V)} \lambda_k dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV = \int_{(V)} \frac{\tau^2}{2 \cdot G} dV = \\ &= \frac{1}{2 \cdot G} \int_{(V)} \left( \frac{M_k(\beta)}{J_k} \cdot \rho \right)^2 dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \\ &= \frac{1}{2 \cdot G} \int_{(V)} \left( \frac{M_0 \cdot \cos \beta \cdot \cos \mu}{J_k} \right)^2 \cdot (r^2 + t^2) dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta. \end{aligned} \quad (34)$$

Dále platí pro kruhový průřez

$$\int_{(A)} (r^2 + t^2) dA = J_k = 2 \cdot J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (35)$$

Vztah (35) dosadíme do rovnice (34) a dále upravujeme,

$$U_k = \frac{M_0^2 \cdot R \cdot \cos \mu}{2 \cdot G \cdot J_k} \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta d\beta = \frac{M_0^2 \cdot R \cdot \pi \cdot \cos \mu}{2 \cdot G \cdot J_k} = \frac{16 \cdot M_0^2 \cdot R \cdot \cos \mu}{G \cdot d^4}. \quad (36)$$

**Celkovou deformační energii** získáme součtem energie od ohybu a krutu,

$$U = U_o + U_k = \frac{M_0^2 \cdot R}{d^4} \cdot \left( \frac{32 \cdot (\sin^2 \mu + 1)}{E \cdot \cos \mu} + \frac{16 \cdot \cos \mu}{G} \right). \quad (37)$$

Vzájemné úhlové natočení konců závitu pružiny je dle věty Castiglianovy

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 \cdot R}{d^4} \cdot \left( \frac{64 \cdot (\sin^2 \mu + 1)}{E \cdot \cos \mu} + \frac{32 \cdot \cos \mu}{G} \right). \quad (38)$$

Potřebný počet závitů k vytvoření celistvého pružinového věnce pak určíme vydělením plného úhlu úhlem natočení jednoho závitu (v obloukové míře):

$$n = \frac{2\pi}{\varphi} \quad (39)$$

Počet potřebných závitů je nutné zaokrouhlit na celočíselnou hodnotu nebo je třeba upravit velikost vnějšího ohybového momentu (a potažmo natočení) tak, aby výsledkem bylo celé číslo.

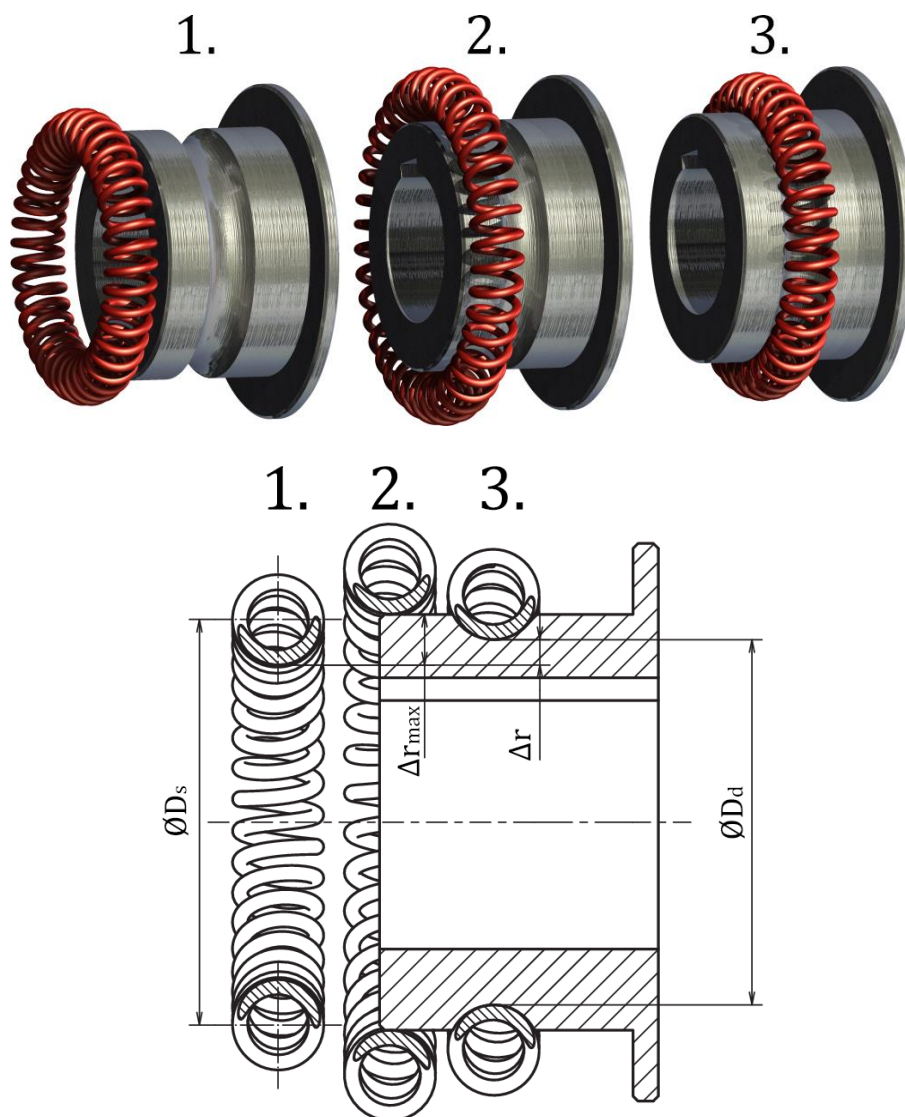
Předpokládejme, že se pružina při ohybu deformuje tak, že nedochází ke změně délky její osy (deformuje se podle své osy symetricky), anebo je odchylka zanedbatelná. Poté bychom pro střední průměr vytvořeného věnce získali jednoduchý vztah vycházející z obvodu kružnice,

$$D_s = \frac{n \cdot s}{\pi}. \quad (40)$$

## 2.3. Umístění pružinového věnce do drážky

### 2.3.1. Průběh operace

Na obr. 22 jsou ukázány tři fáze umísťování vnitřního pružinového věnce do drážky hřídele pružné spojky:



Obr. 22 Postup vložení vnitřního pružinového věnce do drážky hřídele a pohled v osovém řezu.

#### 1. Věnc před začátkem lisování

Toto je pružinový věnc o středním průměru  $D_s$  vytvořený ohybem pružiny tak, jak popisuje předchozí kapitola.

#### 2. Maximálně deformovaný věnc

Bude-li hřídel, do jehož drážky je věnc umísťován, celistvý, pak bude zřejmě nutné během celé operace v tomto kroku „překonat“ místo s největším průměrem hřídele a zde bude tedy věnc nejvíce deformován. Vnitřní průměr věnce se zvětší o hodnotu  $\Delta r_{max}$ .

### 3. Věvec umístěný v drážce

Konečná poloha pružinového věnce. Vnitřní poloměr se od původního liší o  $\Delta r$ . Je evidentní, že konečná hodnota vnitřního poloměru musí být větší než počáteční. V opačném případě by mezi drážkou a věncem byla vůle a přenos krouticího momentu by nebyl možný.

#### **Lisování vnějšího věnce do drážky náboje pružné spojky:**

Průběh této operace by byl vesměs stejný, pouze smysl deformací by byl opačný a uvažovali bychom je na vnějším poloměru věnce. Ve druhé fázi by se tedy vnější poloměr zmenšil o hodnotu  $\Delta r_{max}$ , v konečné fázi bychom měli věvec v drážce s vnějším poloměrem menším o  $\Delta r$ . Podrobněji viz kap. 2.3.3.

#### **Změna středního průměru pružinového věnce:**

Při deformaci pružiny dochází ke změně jejího průměru tak, aby byla zachována délka pružinového drátu, která musí být před natažením a po něm stejná (zanedbáme-li jeho natažení vlivem normálových sil). Stejně tak tomu bude i v případě změny obvodu pružinového věnce. Pokud však bude mít pružina dostatečně malé stoupání a deformace během lisování nebudou vůči původnímu průměru věnce příliš velké, bude změna průměru pružiny zřejmě zanedbatelná.

*Pozn.: Například pružinové věnce na obr. 22 výše byly vymodelovány všechny se stejným průměrem pružiny. Rozdíl mezi délkou drátu nejmenšího a největšího věnce přesto činí pouze 0,05% (použit výpočet pomocí sw. Autodesk Inventor).*

Budeme-li tedy brát střední průměr  $D$  (popř. poloměr  $R$ ) pružiny jako neměnný, platí pro změnu středního průměru po nalisování vztah

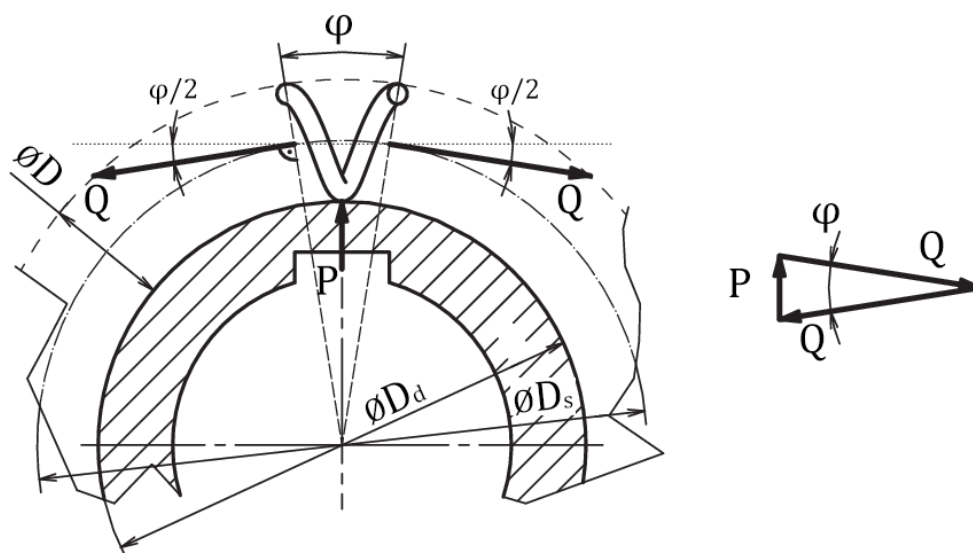
$$\Delta D_s = 2\Delta r. \quad (41)$$

Změna obvodu střednice:

$$\Delta o = \pi \cdot \Delta D_s = 2\pi \cdot \Delta r \quad (42)$$

#### 2.3.2. Silové poměry nalisovaného vnitřního pružinového věnce

Pro určení přenosu krouticího momentu stanovme síly působící na jeden závit vnitřního pružinového věnce nalisovaného v drážce spojky. Roztažení věnce způsobuje osová síla  $Q$ . V místě styku plochy věnce s plochou drážky pak působí síla  $P$ .



Obr. 23 Silové poměry nalisovaného pružinového věnce.

Z obr. 23 získáme vztah mezi silami  $P$  a  $Q$ ,

$$P = 2 \cdot Q \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (43)$$

Bude-li počet závitů pružiny dostatečně velký, pak bude úhel natočení jednoho závitu  $\varphi$  dostatečně malý. Funkce sinus se pak přibližně rovná svému argumentu a vztah výše lze se zanedbatelnou chybou zjednodušit,

$$P = Q \cdot \varphi. \quad (44)$$

Pozn.: Platí pouze pro úhel  $\varphi$  v obloukové míře (rad).

### Vliv síly $P$

Pro vyšetření vlivu síly  $P$  v jednotlivých částech závitu nalisovaného pružinového věnce byla provedena následující úvaha:

Na obr. 24 je při pohledu ve směru osy závitu zaveden úhel  $\beta$ , měřený od bodu dotyku věnce s drážkou. V obecném místě myšleného řezu, popsaném tímto úhlem, pak zavedme silovou nulu. Tím rozložíme namáhání v místě řezu na sílu a moment, jehož velikost závisí na velikosti sil a jejich kolmé vzdálenosti. Kolmá vzdálenost je patrná při pohledu na závit shora a je znázorněna barevným trojúhelníkem o stranách  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

strana  $a$  je dána stoupáním pružiny a úhlem  $\beta$ ,

$$a = \frac{s}{2\pi} \cdot \beta, \quad (45)$$

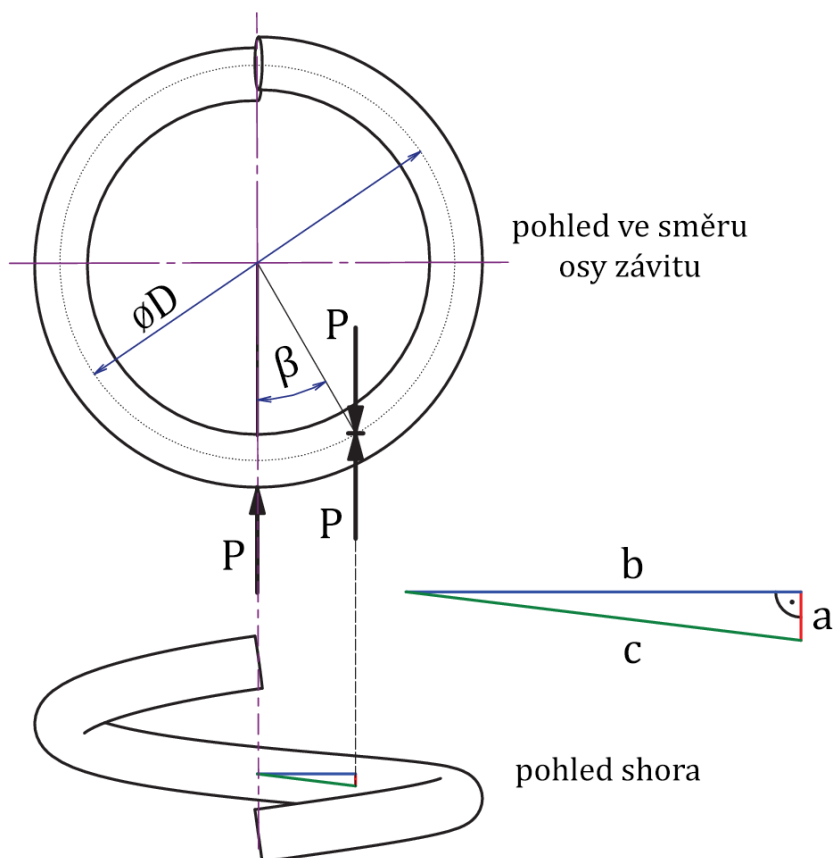


strana  $b$  je dle obrázku

$$b = \frac{D}{2} \cdot \sin \beta, \quad (46)$$

strana  $c$  je přepona pravoúhlého trojúhelníka a skutečná kolmá vzdálenost silové dvojice,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (47)$$



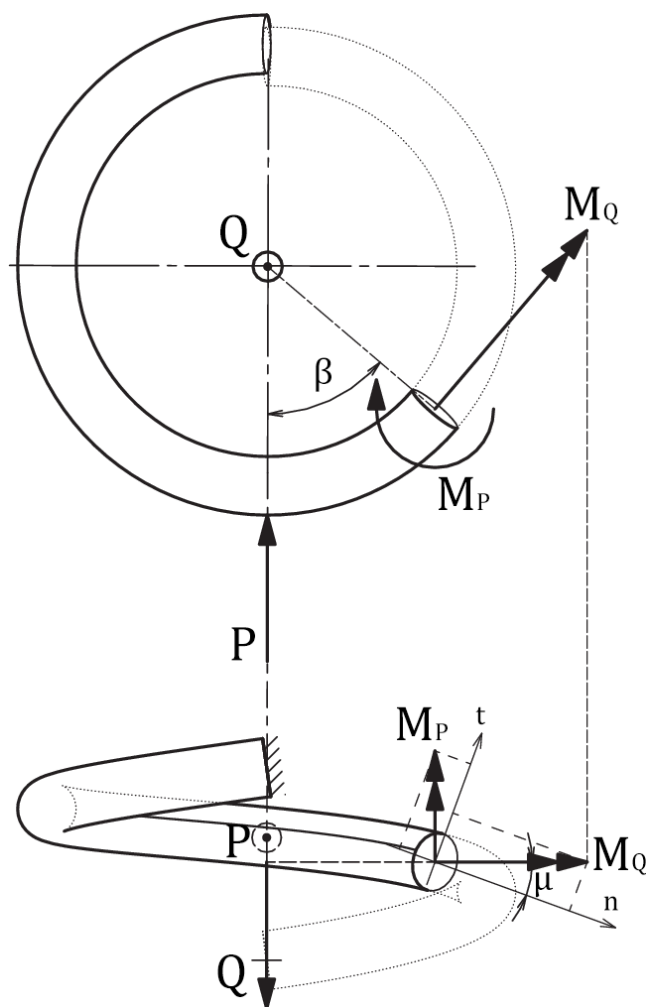
Obr. 24 K vlivu síly  $P$ .

### **Zjednodušení vztahu pro malá stoupání**

Protože bude pravděpodobně vhodné použití pružiny s malým stoupáním, bude pak velikost strany  $a$  zanedbatelně malá. Pro výsledný moment od síly  $P$  pak platí zjednodušený vztah,

$$M_p \approx P \cdot b = P \cdot \frac{D}{2} \cdot \sin \beta. \quad (48)$$

Výhoda tohoto zjednodušení spočívá především v možnosti uvažovat směr tohoto momentu pouze jako rovnoběžný s osou závitů.

**Výsledné silové poměry**

Obr. 25 Síly a momenty působící v obecném místě po nalisování pružinového věnce.

Pro další výpočet předpokládejme závit nedeformované pružiny a uvažujme chybu tímto vzniklou jako zanedbatelnou, obzvláště pro malá stoupání pružiny.

Na obr. 25 jsou na pohledu ve směru osy a kolmo na ni znázorněny působící síly a jimi utvářené momenty, jež působí v místě řezu. Těmi jsou:

Moment  $M_Q$  od osové síly  $Q$ , jehož velikost je konstantní,

$$M_Q = Q \cdot \frac{D}{2} = Q \cdot R. \quad (49)$$

Moment  $M_P$  od síly  $P$ ,

$$M_P = P \cdot \frac{D}{2} \cdot \sin \beta = Q \cdot \varphi \cdot \frac{D}{2} \cdot \sin \beta = Q \cdot R \cdot \varphi \cdot \sin \beta. \quad (50)$$

Následně rozložíme tyto momenty do směru normály a tečny průřezu (přímky  $n$  a  $t$ ), čímž dostaneme vyjádření pro krouticí a ohybový moment:

$$M_n = \mathbf{M}_k = M_Q \cdot \cos \mu - M_P \cdot \sin \mu \quad (51)$$

$$M_t = \mathbf{M}_o = M_Q \cdot \sin \mu + M_P \cdot \cos \mu \quad (52)$$

Dále oba momenty rozepíšeme dosazením z (49, 50) jako funkci úhlu  $\beta$ :

$$\mathbf{M}_k = Q \cdot R \cdot (\cos \mu - \varphi \cdot \sin \mu \cdot \sin \beta) \quad (53)$$

$$\mathbf{M}_o = Q \cdot R \cdot (\sin \mu + \varphi \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta) \quad (54)$$

Pro výpočet deformační energie pak uvažujme deformaci závitu jako zanedbatelnou a výpočet provedme pro závit nedeformované pružiny.

**Deformační energie od ohybového momentu:**

$$\begin{aligned} U_o &= \int_{(V)} \lambda_o dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \int_{(V)} \left( \frac{M_o}{J} \cdot t \right)^2 dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \frac{1}{2 \cdot E} \int_{(V)} \left( \frac{M_o^2}{J^2} \cdot t^2 \right) dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \\ &= \frac{R}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} M_o^2 \cdot d\beta = \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\sin \mu + \varphi \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta)^2 \cdot d\beta = \\ &= \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \mu + 2 \cdot \varphi \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta + \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu \cdot \sin^2 \beta) \cdot d\beta = \\ &= \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot E \cdot J \cdot \cos \mu} \cdot (2\pi \cdot \sin^2 \mu + 0 + \pi \cdot \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu) \end{aligned} \quad (55)$$

**Deformační energie od krouticího momentu:**

$$\begin{aligned}
 U_k &= \int_{(V)} \lambda_k dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV = \int_{(V)} \frac{\tau^2}{2 \cdot G} dV = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot G} \int_{(V)} \left( \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho \right)^2 dA \cdot \frac{R}{\cos \mu} \cdot d\beta = \\
 &= \frac{R}{2 \cdot G \cdot J_p \cdot \cos \mu} \int_{-\pi}^{\pi} M_k^2 \cdot d\beta = \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot G \cdot J_p \cdot \cos \mu} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \mu - \varphi \cdot \sin \mu \cdot \sin \beta)^2 d\beta = \\
 &= \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot G \cdot J_p \cdot \cos \mu} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \mu - 2 \cdot \varphi \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta + \varphi^2 \cdot \sin^2 \mu \cdot \sin^2 \beta) d\beta = \\
 &= \frac{Q^2 \cdot R^3}{2 \cdot G \cdot J_p \cdot \cos \mu} \cdot (2\pi \cdot \cos^2 \mu - 0 + \pi \cdot \varphi^2 \cdot \sin^2 \mu)
 \end{aligned} \tag{56}$$

**Celkovou deformační energii** získáme jejich součtem:

$$U = U_o + U_k = \frac{Q^2 \cdot R^3 \cdot \pi}{2 \cdot \cos \mu} \cdot \left( \frac{2 \cdot \sin^2 \mu + \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot \cos^2 \mu + \varphi^2 \cdot \sin^2 \mu}{G \cdot J_p} \right) \tag{57}$$

**Deformaci** ve směru osově síly  $Q$  získáme derivací deformační energie dle této síly:

$$u = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{Q \cdot R^3 \cdot \pi}{\cos \mu} \cdot \left( \frac{2 \cdot \sin^2 \mu + \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot \cos^2 \mu + \varphi^2 \cdot \sin^2 \mu}{G \cdot J_p} \right) \tag{58}$$

pro přehlednost zavedme konstantu:

$$\frac{1}{\cos \mu} \left( \frac{2 \cdot \sin^2 \mu + \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot \cos^2 \mu + \varphi^2 \cdot \sin^2 \mu}{G \cdot J_p} \right) = C [N^{-1} \cdot m^{-2}] \tag{59}$$

**Deformační podmínka:**

Deformace jednoho závitu násobená jejich počtem je právě změna obvodu střednice pružinového věnce po jeho deformaci (nalisování). Platí tak:

$$n \cdot u = \Delta o = 2\pi \cdot \Delta r \tag{60}$$

$$n \cdot Q \cdot R^3 \cdot \pi \cdot C = 2\pi \cdot \Delta r \tag{61}$$

vyjádřeme sílu  $Q$ :

$$Q = \frac{2 \cdot \Delta r}{n \cdot R^3 \cdot C} \tag{62}$$

následně sílu  $P$ :

$$P = Q \cdot \varphi = \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \varphi}{n \cdot R^3 \cdot C} \quad (63)$$

Uvažujeme-li mezi věncem a povrchem drážky o dotykovém průměru  $D_d$  (viz obr. 22, 23) třecí součinitel  $f$ , pak výsledný přenášený krouticí moment je roven:

$$M_k = n \cdot P \cdot f \cdot \frac{D_d}{2} = \frac{D_d \cdot \Delta r \cdot \varphi \cdot f}{R^3 \cdot C} \quad (64)$$

Upravme vzorec dosazením za následující veličiny:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

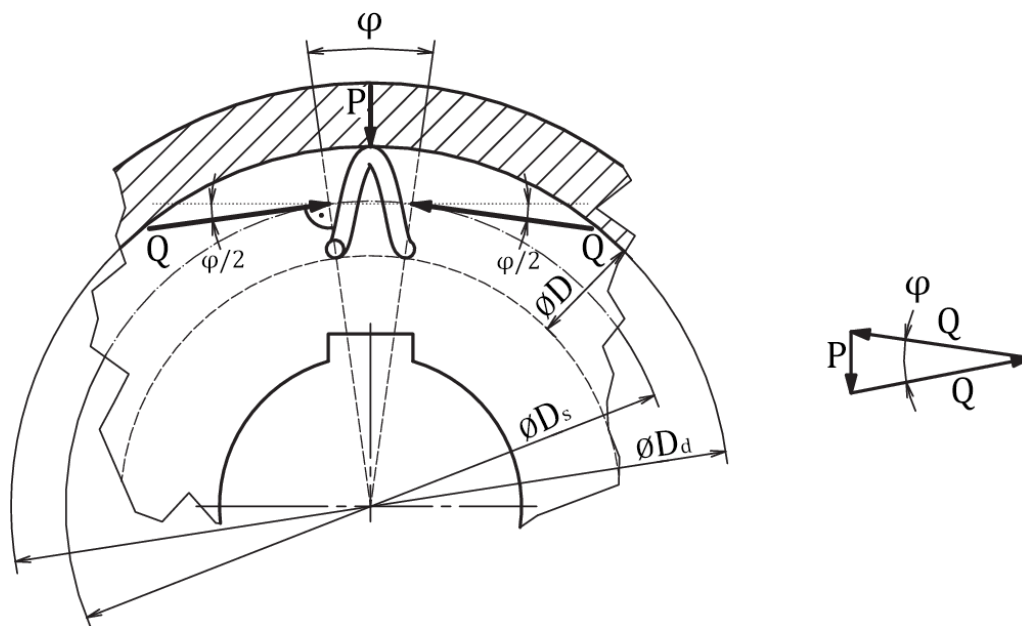
$$R = \frac{D}{2}$$

Výsledný vztah:

$$M_k = \frac{16 \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta r \cdot f}{n \cdot D^3 \cdot C} \quad (65)$$

Silové poměry nalisovaného vnějšího pružinového věnce

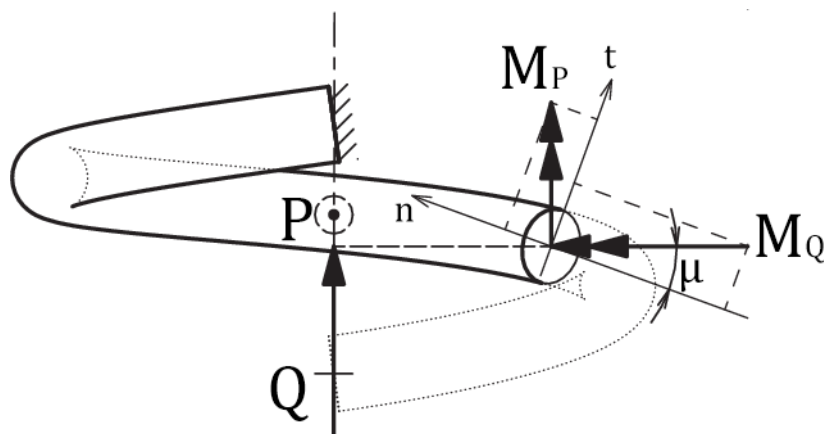
Při umístění vnějšího pružinového věnce do vnější drážky spojky musí dojít k jeho stlačení. Stlačení, tj. zmenšení obvodu a průměru dle (41) a (42), způsobuje osová síla  $Q$ . V místě dotyku s drážkou na průměru  $D_d$  působí na věnec síla  $P$ . Silové poměry znázorňuje obr. 26.



Obr. 26 Síly při lisování vnějšího pružinového věnce

Z obr. 26 je zřejmé, že stejně jako v předchozí kapitole platí vztahy (43) a (44).

Po provedení zjednodušujících úvah popsanych v kap. 2.3.2. je patrné, že síla  $Q$  změnila směr svého působení, zatímco síla  $P$  působí stejně, kolmo do osy závitů. Stejným způsobem se pak zachovaly i momenty od těchto sil,  $M_Q$  a  $M_P$ , viz obr. 27.



Obr. 27 Silové poměry

Pro velikost momentů  $M_Q$  a  $M_P$  platí rovněž vztahy (49), resp. (50). Analogicky jako jsme získali vztahy (51) – (54) dostaneme po rozkladu momentů do směrů  $n$  a  $t$  (směr  $n$  byl oproti obr. 25 obrácen) rovnice krouticího a ohybového momentu:

$$\mathbf{M}_k = Q \cdot R \cdot (\cos \mu + \varphi \cdot \sin \mu \cdot \sin \beta) \quad (66)$$

$$\mathbf{M}_o = Q \cdot R \cdot (-\sin \mu + \varphi \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta) \quad (67)$$

Nyní si všimněme, že pro lisování vnitřního kroužku, popsané v předchozí kapitole, vystupuje např. ve vztahu (55) pro výpočet deformační energie výraz

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin \mu + \varphi \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta)^2 \cdot d\beta,$$

po umocnění závorky

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \mu + 2 \cdot \varphi \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta + \varphi^2 \cdot \cos^2 \mu \cdot \sin^2 \beta) \cdot d\beta.$$

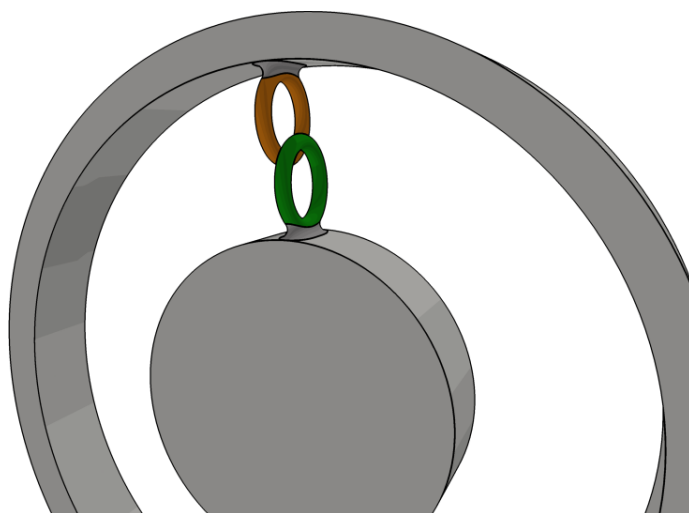
Sčítanec  $(2 \cdot \varphi \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu \cdot \sin \beta)$  je po integraci v daných mezích nulový a jeho znaménko je shodné se znaménkem v původním výrazu, který jsme rozepsali podle

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2. \quad (68)$$

Naprostu analogická úvaha platí i pro deformační energii od krutu. Protože je prostřední člen nulový, nezávisí deformační energie na znaménkách v původní, umocňované, závorce a nezávisí tedy na vzájemném směru působících momentů, jejichž orientaci znaménka reflektují. Proto je výsledek v případech lisování vnitřního a vnějšího věnce stejný a pro výpočet lze tedy v obou případech použít vztahy (60) – (65) odvozené v kap. 2.3.2.

#### 2.4. Torzní tuhost spojky při přenosu krouticího momentu

Torzní tuhost je pro pružnou spojku stěžejní vlastností, jejímž vyšetřením lze získat množství užitečných znalostí ohledně chování spojky. Umožní nám například získat představu o vzájemném natočení spojovaných hřídelů v závislosti na přenášeném krouticím momentu a odhadovat chování spojky při působení dynamických vlivů.



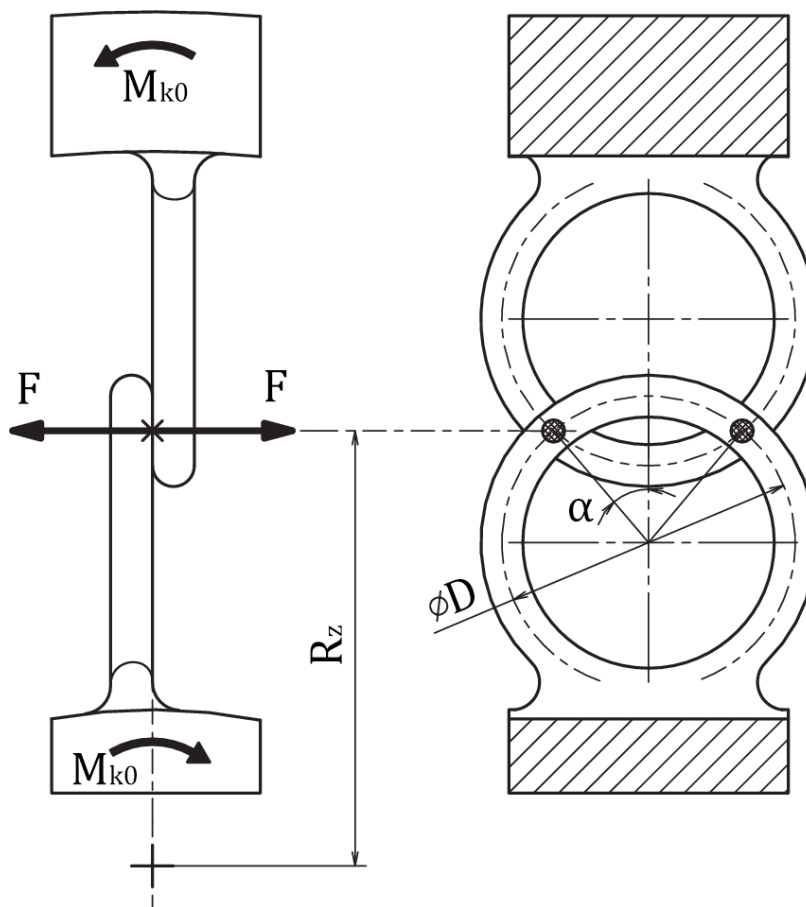
Obr. 28 Představa dvojice závitů zjednodušeného modelu.

Pro výpočet použijeme zjednodušený model. Ten předpokládá, že při použití pružin s malým stoupáním a řešení tuhosti jednoho vytknutého závitu je možné tento závit s dostatečně malou chybou interpretovat jako kruhový rám vetknutý v přírubě spojky.

Přibližné znázornění této situace je naznačeno na obr. 28. Zelený a hnědý kroužek interpretují jeden závit vnitřního, resp. vnějšího pružinového věnce. Jsou pevně vetknuty v přírubách spojky, jež jsou zatíženy krouticím momentem. Silové poměry tohoto modelu jsou znázorněny na obr. 29.

K dotyku mezi kroužky dojde patrně ve dvou bodech. Předpokládejme, že polohu tohoto bodu lze vyznačit známým úhlem  $\alpha$ . V tomto bodě pak dochází k vzájemnému silovému působení dvojice kroužků, sílu v bodě dotyku označme  $F$ . Celková síla působící na kroužek je tedy  $2F$ . Celková síla na jednom kroužku, působící ve známé vzdálenosti od osy otáčení  $R_z$ , násobená počtem kroužků (závitů pružinového věnce)  $n$  musí být rovna krouticímu momentu  $M_{k0}$ , který spojka přenáší. Vyplynuvší vztah je tedy

$$2F \cdot R_z \cdot n = M_{k0} \quad (69)$$



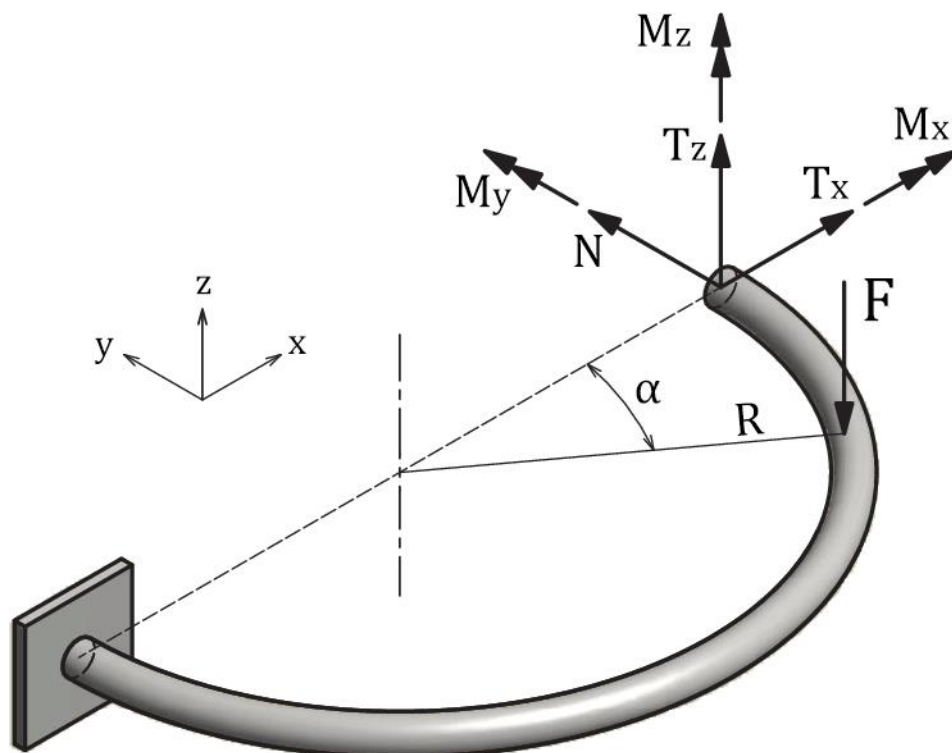
Obr. 29 Silové a geometrické poměry modelu.

Vyjádřeme sílu  $F$ ,

$$F = \frac{M_{k0}}{2 \cdot R_z \cdot n} \quad (70)$$



Pro řešení deformace při zatížení touto silou využijeme rovinné symetrie modelu. Ta nám umožňuje provést řešení pouze na jedné polovině kroužku. Tím získáme finální model ve formě prostorového křivého prutu, na němž provedeme výpočet.

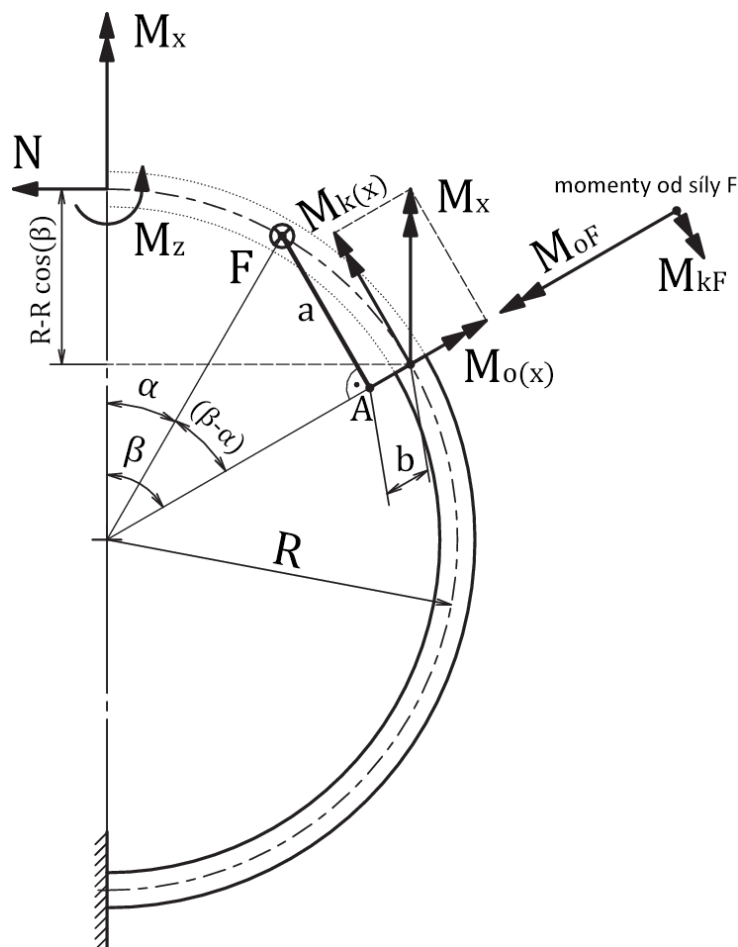


Obr. 30 Konečný výpočtový model.

Na obr. 30 je znázorněn axonometrický pohled řešeného prutu. V místě řezu musíme vzhledem k prostorovému zatížení uvažovat celkem 6 neznámých silových účinků, 3 síly a 3 momenty ve směrech  $x, y, z$ . Smykové síly  $T_x$  a  $T_z$  působící v rovině průřezu musí splňovat dvě podmínky – zákon akce a reakce, dle kterého tyto síly musí na druhé (odříznuté) polovině kroužku působit opačným směrem, a podmínku rovinné symetrie, podle které musí být tyto síly naopak v obou částech stejného směru. Tyto dvě podmínky budou v souladu právě a jen tehdy, budou-li tyto síly nulové. Ze stejného důvodu nebude v místě řezu přítomen ani krouticí moment  $M_y$  (představme si tento moment jako dvojici sil působící v rovině řezu). Získáváme tedy vztahy

$$T_x = T_y = 0, M_y = 0. \quad (71)$$

Řešení zbylých neznámých veličin provedeme s využitím věty Castiglianovy a pomocí Mohrova integrálu. Pro lepší přehlednost je na obr. 31 znázorněn prut v rovině  $xy$ , bez vyznačení silových účinků, které byly v předchozím odstavci odvozeny jako nulové (71).



Obr. 31 Zjednodušení prutového modelu.

Výsledný ohybový moment v obecném místě řezu, popsaném souřadnicí  $\beta$ , se skládá ze složek ohybového momentu působícího ve směru osy  $z$  (kolmo na náčrtnu obr. 31) a ohybového momentu působícího v rovině plochy řezu a v rovině náčrtny. Tyto složky jsou navzájem kolmé, a tudíž pro výsledný ohybový moment v rovině plochy řezu z Pythagorovy věty plyne

$$M_o^2 = M_{o1}^2 + M_{o2}^2. \quad (72)$$

Deformační energie od ohybu je pro daný prut dána vztahem

$$U_o = \frac{R}{2EJ} \int_0^\pi M_o^2 d\beta = \frac{R}{2EJ} \int_0^\pi M_{o1}^2 d\beta + \frac{R}{2EJ} \int_0^\pi M_{o2}^2 d\beta = U_{o1} + U_{o2}. \quad (73)$$

Ze vztahu (73) je tedy zřejmé, že celkovou deformační energii od ohybu lze získat prostým součtem deformačních energií od vzájemně kolmých ohybových momentů. Této vlastnosti využijeme při dalším výpočtu.

**Deformační energie od ohybových momentů působících ve směru osy z:**

Ve směru osy z působí zřejmě dva momenty, oba způsobující pouze ohyb. Moment  $M_{oz}$  je v libovolném místě řezu konstantní a nezávisí tedy na souřadnici  $\beta$ :

$$M_z(\beta) = M_z \quad (74)$$

Druhý moment  $M_N$  vytváří síla  $N$ . Velikost momentu v závislosti na souřadnici  $\beta$  je dána vztahem:

$$M_N(\beta) = N \cdot R \cdot (1 - \cos \beta) \quad (75)$$

Při volbě směrů momentů dle obr. 30 a 31 působí oba stejným směrem, proto je zde výsledný moment ve směru osy z (označme indexem 1) jejich součtem:

$$M_{o1} = M_z + M_N \quad (76)$$

Deformační energie poté:

$$U_{o1} = \frac{R}{2EJ} \int_0^\pi M_{o1}^2 d\beta = \frac{R}{2EJ} \int_0^\pi [M_z + N \cdot R \cdot (1 - \cos \beta)]^2 d\beta \quad (77)$$

Po integraci a úpravě:

$$U_{o1} = \frac{\pi R}{2EJ} \left( M_z^2 + 2 \cdot N \cdot R \cdot M_z + \frac{3}{2} N^2 \cdot R^2 \right) \quad (78)$$

Zbylé složky deformační energie nejsou na těchto momentech závislé. Proto můžeme psát deformační podmínky pouze s využitím vztahu (78).

Bod v místě řezu se z hlediska zachování symetrie nemůže posunout ve směru síly  $N$ ,

$$\frac{\partial U_{o1}}{\partial N} = 0. \quad (79)$$

Bod v místě řezu se rovněž nemůže natočit dle momentu  $M_z$ ,

$$\frac{\partial U_{o1}}{\partial M_z} = 0. \quad (80)$$

Po provedení derivací a po úpravě získáme soustavu dvou rovnic,

$$M_z + N \cdot R = 0, \quad (81)$$

$$2 \cdot M_z + 3 \cdot N \cdot R = 0. \quad (82)$$

Tato soustava má nenulovou hodnotu determinantu a zároveň nulový vektor pravých stran, proto má pouze jediné, triviální, řešení,

$$M_z = 0, \quad (83)$$

$$N = 0. \quad (84)$$

Ve směru osy  $z$  tedy nepůsobí žádné momenty. Deformační energie  $U_{o1}$  je nulová.

**Řešení zbývajících veličin pomocí Mohrova integrálu:**

Nejprve provedme rozklad působících momentů. Momenty, jejichž vektory leží v rovině nákresny obr. 31, jsou zřejmě následující:

Moment  $M_x$ , jehož rozklad na ohybový a krouticí moment je na obrázku znázorněn a jeho složky jsou dány:

$$\text{ohyb: } M_{o(x)} = M_x \cdot \cos \beta \quad (85)$$

$$\text{krut: } M_{k(x)} = M_x \cdot \sin \beta \quad (86)$$

Moment  $M_F$  od síly  $F$ . Zavedeme-li v bodě  $A$  obr. 31 pomocnou silovou nulu, výsledný moment rozložíme na dvě výhodné složky a získáme tak dvě dvojice sil:

**Moment  $M_{oF}$** , tvořený dvojicí sil  $F$  o kolmé vzdálenosti  $a = R \cdot \sin(\beta - \alpha)$ , ležící v rovině průřezu a tedy způsobující ohyb:

$$M_{oF} = F \cdot R \cdot \sin(\beta - \alpha) \quad (87)$$

**Moment  $M_{kF}$** , tvořený dvojicí sil  $F$  o kolmé vzdálenosti  $b = R \cdot [1 - \cos(\beta - \alpha)]$ , ležící kolmo na plochu průřezu a tedy způsobující krut:

$$M_{kF} = F \cdot R \cdot [1 - \cos(\beta - \alpha)] \quad (88)$$

Nyní můžeme přistoupit k sestavení Mohrova integrálu. Pro jeho stanovení je třeba znát výsledný průběh ohybového a krouticího momentu. Dále je třeba stanovit průběh ohybového a krouticího momentu od odpovídajícího jednotkového zatížení v místě hledaných deformací (znázorněno na obr. 32). Vlivem umístění síly  $F$  není průběh veličin na celém prutu spojitý, proto je třeba prut rozdělit na dvě pole, označme tato pole  $I, II$ . Těmito indexy budeme označovat veličiny příslušné danému poli.

Pole I:  $\beta \in \langle 0; \alpha \rangle$

Pole II:  $\beta \in \langle \alpha; \pi \rangle$

**Ohybové složky:**

Výsledný ohybový moment  $M_{o2}(\beta)$  je v zavedených polích následující:

$$M_{o2I} = M_{o(x)} = M_x \cdot \cos \beta \quad (89)$$

$$M_{o2II} = M_{o(x)} - M_{oF} = M_x \cdot \cos \beta - F \cdot R \cdot \sin(\beta - \alpha) \quad (90)$$

Ohybový moment od jednotkového momentu, zavedeného v místě a směru momentu  $M_x$  (viz obr. 32), bude jeho průběh v obou polích kopírovat,

$$m_{oI}^{\varphi} = m_{oII}^{\varphi} = 1 \cdot \cos \beta = \cos \beta. \quad (91)$$

Zcela analogicky získáme průběhy ohybové složky momentu od jednotkové síly ve směru síly  $F$ ,

$$m_{oI}^u = 0, \quad (92)$$

$$m_{oII}^u = -1 \cdot R \cdot \sin(\beta - \alpha) = -R \cdot \sin(\beta - \alpha). \quad (93)$$

**Krouticí složky:**

Výsledný krouticí moment  $M_k(\beta)$ :

$$M_{kI} = M_{k(x)} = M_x \cdot \sin \beta \quad (94)$$

$$M_{kII} = M_{k(x)} - M_{kF} = M_x \cdot \sin \beta - F \cdot R \cdot [1 - \cos(\beta - \alpha)] \quad (95)$$

Krouticí moment od jednotkového momentu

$$m_{kI}^{\varphi} = m_{kII}^{\varphi} = 1 \cdot \sin \beta = \sin \beta \quad (96)$$

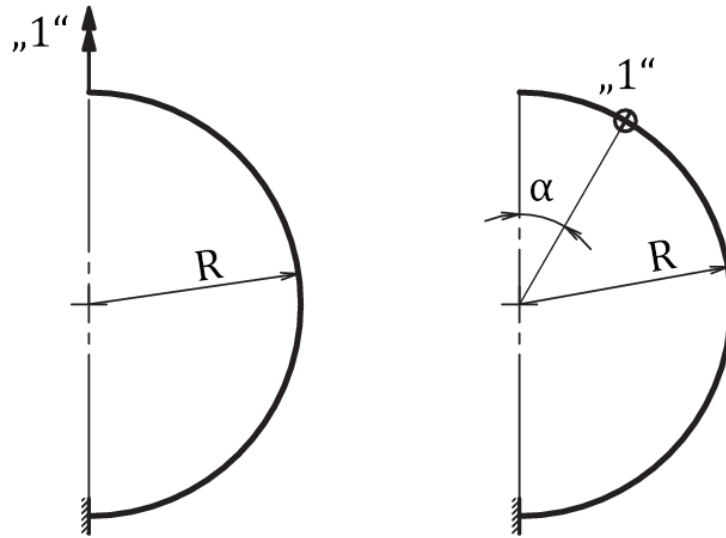
Krouticí moment od jednotkové síly

$$m_{kI}^u = 0 \quad (97)$$

$$m_{kII}^u = -1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\beta - \alpha)] = -R \cdot [1 - \cos(\beta - \alpha)] \quad (98)$$

Se znalostí výše uvedených veličin již můžeme přistoupit k samotnému výpočtu. Nejprve určíme velikost momentu  $M_x$  s využitím deformační podmínky pro úhel natočení  $\varphi$  v místě rozdělení kroužku, tj. v místě působení momentu  $M_x$ . Tento úhel musí být z hlediska zachování symetrie nulový,

$$\varphi = 0, \quad (99)$$



Obr. 32 Zatížení jednotkovým momentem a jednotkovou silou.

což je možné zapsat ve tvaru Mohrova integrálu jako

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{R}{EJ} \left[ \int_0^{\alpha} M_{o2I} \cdot m_{oI}^{\varphi} \cdot d\beta + \int_{\alpha}^{\pi} M_{o2II} \cdot m_{oII}^{\varphi} \cdot d\beta \right] + \\ & + \frac{R}{GJ_p} \left[ \int_0^{\alpha} M_{kI} \cdot m_{kI}^{\varphi} \cdot d\beta + \int_{\alpha}^{\pi} M_{kII} \cdot m_{kII}^{\varphi} \cdot d\beta \right] = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Dosazením ze vztahů (89 – 98), integrací a úpravou získáme rovnici

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{R}{2EJ} [M_x \cdot \pi + F \cdot R \cdot (\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha] + \\ & + \frac{R}{2GJ_p} \{M_x \cdot \pi + F \cdot R [(\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha - 2 \cdot \cos \alpha - 2]\} = 0, \end{aligned} \quad (101)$$

úpravou

$$\begin{aligned} \frac{GJ_p}{EJ} [M_x \cdot \pi + F \cdot R \cdot (\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha] + M_x \cdot \pi + \\ + F \cdot R [(\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha - 2 \cdot \cos \alpha - 2] = 0, \end{aligned} \quad (102)$$

$$M_x \cdot \pi \left( \frac{GJ_p}{EJ} + 1 \right) + \left( \frac{GJ_p}{EJ} + 1 \right) [F \cdot R \cdot (\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha] - 2 \cdot F \cdot R \cdot (\cos \alpha + 1) = 0, \quad (103)$$

$$M_x + F \cdot R \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \cdot \sin \alpha - 2 \cdot \frac{\cos \alpha + 1}{\pi \left( \frac{GJ_p}{EJ} + 1 \right)} \right] = 0. \quad (104)$$

Provedením dalších úprav a s využitím vlastnosti kruhového průřezu

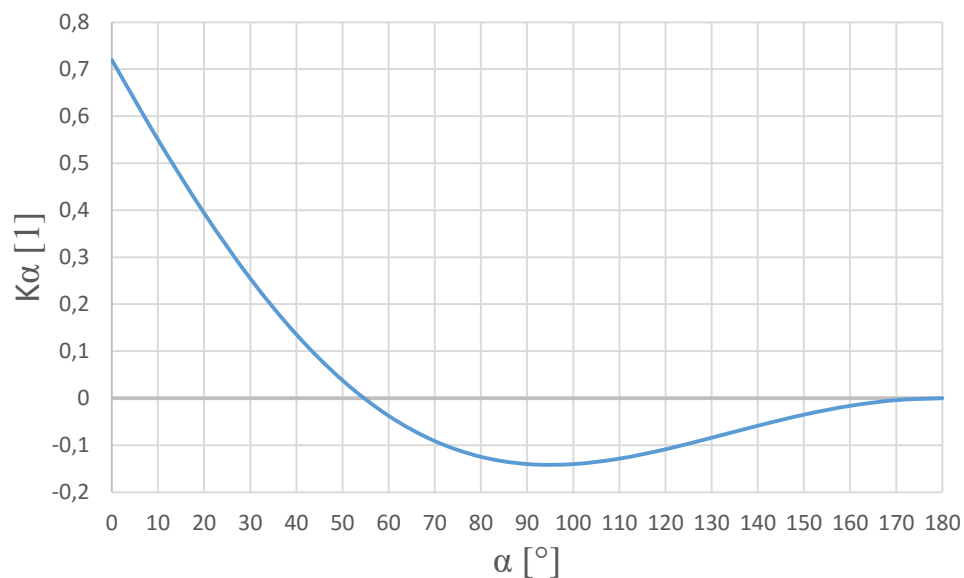
$$J_p = 2 \cdot J, \quad (105)$$

vyjádříme moment  $M_x$ ,

$$M_x = F \cdot R \left[ \frac{\cos \alpha + 1}{\pi \left( \frac{G}{E} + \frac{1}{2} \right)} - \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \sin \alpha \right] = F \cdot R \cdot K_\alpha. \quad (106)$$

Závislost průběhu zavedeného koeficientu  $K_\alpha$  na úhlu  $\alpha$  pro běžnou konstrukční ocel znázorňuje následující graf.

Graf 1 Závislost koeficientu  $K_\alpha$  na poloze síly  $F$ .



Sestavme rovnici pro posuv  $u$  ve směru síly  $F$ ,

$$u = \frac{R}{EJ} \left[ \int_0^\alpha M_{o2I} \cdot m_{oI}^u \cdot d\beta + \int_\alpha^\pi M_{o2II} \cdot m_{oII}^u \cdot d\beta \right] + \frac{R}{GJ_p} \left[ \int_0^\alpha M_{kI} \cdot m_{kI}^u \cdot d\beta + \int_\alpha^\pi M_{kII} \cdot m_{kII}^u \cdot d\beta \right], \quad (107)$$

po dosazení z (89 – 98) a (106), integraci a po provedení dalších úprav získáme výsledný vztah pro posuv

$$u = \frac{F \cdot R^3}{2} \left[ \frac{\sin \alpha [K_\alpha \cdot (\pi - \alpha) + \cos \alpha] + \pi - \alpha}{E \cdot J} + \frac{K_\alpha \cdot [(\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha - 2 \cdot \cos \alpha - 2] - \sin \alpha \cdot (\cos \alpha + 4) + 3 \cdot (\pi - \alpha)}{G \cdot J_p} \right]. \quad (108)$$

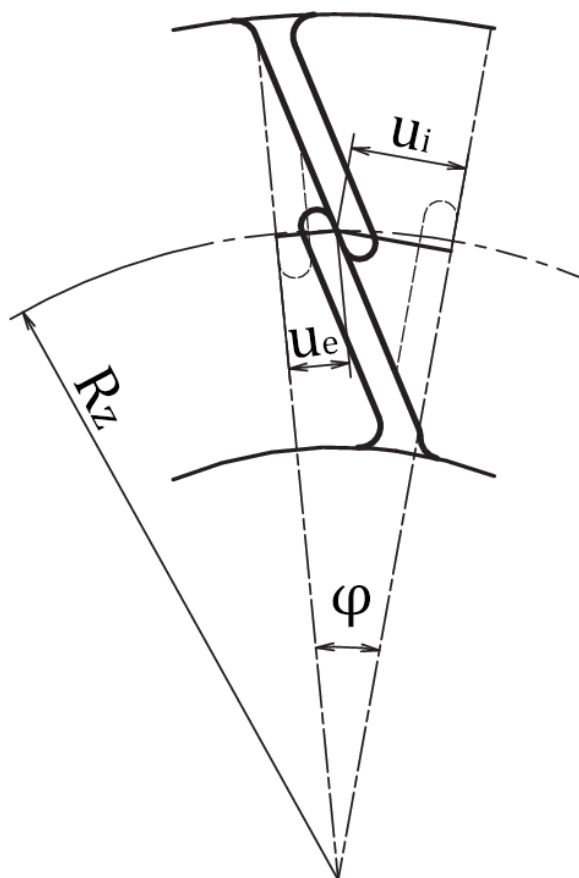
**Výsledná torzní tuhost**

Vztah (108) lze se zanedbatelnou chybou použít v případě, kdy je posunutí  $u$  dostatečně malé a změna geometrie v průběhu zatěžování tedy zanedbatelná. Za použití stejných předpokladů řešme i výslednou torzní tuhost spojky. Označme deformaci závitů vnitřního pružinového věnce  $u_i$ , vnějšího pak  $u_e$ . Je-li poloměr doteku závitů  $R_z$  oproti zbylým rozměrům značně větší, budou deformace  $u_i, u_e$  spočtené pro přímý směr jen málo odlišné od délky oblouku o poloměru  $R_z$ , který by vytýkaly. Úhel  $\varphi$  je pak dán jako podíl délky oblouku a jeho poloměru. Situaci znázorňuje obr. 33. Přibližně můžeme psát

$$\varphi \approx \frac{u_i + u_e}{R_z}. \quad (109)$$

Torzní tuhost spojky je dána vztahem:

$$k_\tau = \frac{M_k}{\varphi} \approx \frac{M_k \cdot R_z}{u_i + u_e} \quad (110)$$



Obr. 33 Deformace závitů po zatížení spojky.



**Ověření výpočtu pro referenční geometrii:**

Volil jsem zatížení silou  $F = 100\text{ N}$  v místě popsaném úhlem  $\alpha = 50^\circ$  a kroužek s následujícími parametry:

$$D = 2 \cdot R = 20\text{ mm}$$

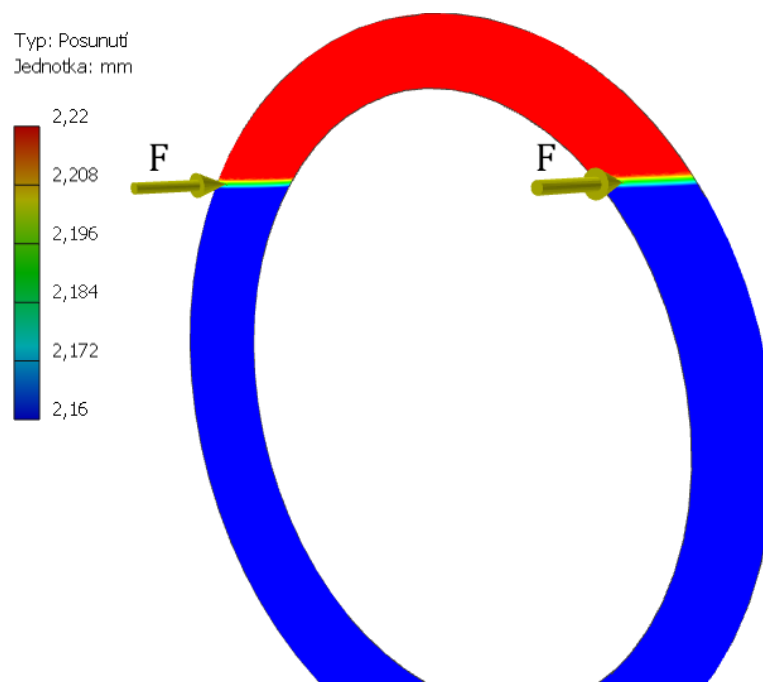
$$d = 2\text{ mm}$$

Pro ověření teorie využiji srovnání vlastních výpočtů s výsledky pevnostní analýzy programu Autodesk Inventor. Výsledky uvádí tab. 4 a obr. 34:

Tab. 4 Srovnání výpočtů.

Hodnota posuvu ve směru síly $F$ v místě jejího působení: $u$ [mm]	
výpočty dle vzorců (MS Excel)	pevnostní analýza (Autodesk Inventor)
2,11	přibližně 2,18

Budeme-li považovat výsledky získané pevnostní analýzou za správné, činí relativní chyba výpočtu přibližně 3%. Tu lze vzhledem k mnoha dalším zjednodušením považovat za zanedbatelnou a je tedy možné použití výše uvedených vztahů k návrhovým výpočtům pružné spojky.



Obr. 34 Posunutí ve směru síly  $F$  dle pevnostní analýzy.

### 3. ZÁVĚR

V této práci byla nastíněna problematika pružných spojek a popsán princip jednotlivých typů, aby si čtenář mohl utvářet vlastní srovnání se spojkou, jež se stala předmětem této práce. Většina obsahu je tak věnována právě vyvíjenému typu spojky. Prováděné výpočty řeší a popisují postupný vznik spojky – nejprve utváření pružného elementu, dále pak jeho připevnění na těleso spojky a konečně jeho chování při zatížení v provozu. Cílem práce je poskytnutí výpočtových vztahů, s jejichž pomocí je možné provádět návrhové a kontrolní výpočty spojky, především je jím však komentovaný průvod řešenou problematikou tak, aby byly použité myšlenkové postupy dobře pochopitelné, názorné a mohly tak sloužit jako základ pro další práci s modelem zkoumané spojky, protože – jak si pozorný čtenář všimne – je zde vzhledem ke komplikované geometrii použito mnoho zjednodušení a existují tedy možnosti, jak celý model dále zdokonalovat. V případech, kdy to bylo možné, byla správnost a přesnost výpočtů kontrolována použitím simulací. Skutečně přesné srovnání pak přinese až testování prototypu, který v době vzniku této práce nebyl dostupný a jehož vznik by mohla tato práce podpořit.

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

1. BOLEK, Alfred a KOCHMAN, Josef. *Části strojů*. 5. přeprac. vydání (v SNTL 1. vyd.). Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989. Sv. I. ISBN 80-03 00046-7.
2. RENOLD Plc. RENOLD Couplings Catalogue 2012. [Online] 2012. [Citace: 27. Únor 2016.] [http://www.renold.com/media/162120/Couplings\\_Catalogue\\_2012\\_2.pdf](http://www.renold.com/media/162120/Couplings_Catalogue_2012_2.pdf).
3. Hardyho spojka. *Wikipedie*. [Online] 12. prosinec 2015. [Citace: 5. červenec 2016.] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Hardyho\\_spojka](https://cs.wikipedia.org/wiki/Hardyho_spojka).
4. Bright Hub Inc. Types of Flexible Coupling – Bibby Resilient Couplings. *Bright Hub Engineering*. [Online] 20. Leden 2010. [Citace: 6. Březen 2016.] <http://www.brighthubengineering.com/machine-design/61969-types-of-flexible-coupling-bibby-resilient-couplings/>.
5. Chr. Mayr GmbH + Co. KG. Smartflex Documentation (pdf). *Mayr.com*. [Online] [Citace: 15. Březen 2016.] [http://www.mayr.com/synchronisation/documentations/k\\_932\\_v11\\_en\\_21\\_07\\_2014.pdf](http://www.mayr.com/synchronisation/documentations/k_932_v11_en_21_07_2014.pdf).
6. Reliance Precision Limited. Flexible Shaft Couplings Catalogue (pdf). [Online] [Citace: 16. března 2016.] [https://www.reliance.co.uk/assets/uploads/1428934740RG36\\_Issue\\_A1\\_Section\\_8\\_Flexible\\_Couplings-Web.pdf](https://www.reliance.co.uk/assets/uploads/1428934740RG36_Issue_A1_Section_8_Flexible_Couplings-Web.pdf).
7. LO-REZ Vibration Control Ltd. Steel-Spring Flexible Couplings Brochure (pdf). [Online] [Citace: 15. března 2016.] [http://www.lo-rez.com/wp-content/uploads/brochure\\_1213745007.pdf](http://www.lo-rez.com/wp-content/uploads/brochure_1213745007.pdf).
8. Lovejoy, Inc. Grid Catalog (full catalog). *Grid Couplings*. [Online] [Citace: 16. března 2016.] <http://www.lovejoy-inc.com/products/grid-coupling.aspx>.
9. VÍTEK, Karel. *Pružná spojka. patent č. 305268 ÚPV v Praze*, 2015.
10. RENOLD Plc. Spiderjaw & Spiderwrap Couplings Brochure. [Online] [Citace: 1. Březen 2016.] [http://www.renold.com/media/162168/SpiderJaw-Wrap\\_eBrochure.pdf](http://www.renold.com/media/162168/SpiderJaw-Wrap_eBrochure.pdf).
11. MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Praha : ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.
12. MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. 2. vyd. Praha : ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02375-3.