

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

Fakulta strojní
Ústav technické matematiky Ú 12101

Využití Fourierových řad v technických aplikacích

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Student:
Vedoucí práce:
Rok

Marek Johánek
Doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.
2016

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok 2015-2016

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

pro: Marka Johánka

studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Název tématu: **Využití Fourierových řad v technických aplikacích**

Zásady pro vypracování:

1. Stručný popis vlastností Fourierovy řady spojitě periodické funkce, souvislost mezi Fourierovou řadou a diskretní Fourierovou transformací.
2. Popis typických příkladů použití Fourierovy řady, resp. diskretní Fourierovy transformace v technických aplikacích. Seznámení se s využitím Fourierových řad pro analýzu časového průběhu fyzikálních veličin.
3. Výpočet Fourierových koeficientů pro dodané časové průběhy fyzikální veličiny.
4. Zhodnocení výsledků - identifikace významných frekvencí.
5. Grafické zpracování a popis výsledků.

Rozsah grafických prací: zobrazení numerických výsledků ve formě grafů

Rozsah bakalářské práce: do 20-30 stran včetně obrázků

Seznam odborné literatury:

1. L. Herrmann: Obyčejné diferenciální rovnice - řady, vydavatelství ČVUT, 2004.
2. C. Gasquet, P. Witomski: Fourier analysis and applications, filtering, numerical computation, wavelets, Springer, 1991.

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: 20. 10. 2015

Datum odevzdání bakalářské práce: 15. 2. 2016



Prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.

vedoucí Ú12101



Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.

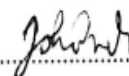
děkan FS, ČVUT v Praze

V Praze dne 20. 10. 2015

Neodevzdá-li student bakalářskou práci včas, je povinen tuto skutečnost předem písemně zdůvodnit, pokud bude omluva (předaná prostřednictvím studijního oddělení děkanovi) děkanem uznána, určí děkan studentovi náhradní termín konání státní závěrečné zkoušky (zůstávají dva termíny SZZ). Pokud tuto skutečnost student řádně neomluví nebo omluva nebude děkanem uznána, určí děkan studentovi termín pro opakování státní závěrečné zkoušky. SZZ je možné opakovat pouze jednou (SZŘ čl. 22, odst. 3, 4).

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použitých literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Zadání bakalářské práce převzal dne:


.....
student

ABSTRAKT

Tato práce se stručně zabývá využitím Fourierových řad v technických aplikacích. Jsou zde uvedeny základní rovnice popisující Fourierovu řadu a diskrétní Fourierovu transformaci. V práci je také popsán princip odvození výpočtu Fourierových koeficientů a 2D diskrétní Fourierova transformace. Praktický význam diskrétní Fourierovy transformace je ukázán na rozboru časového průběhu vybraných veličin proudového pole v turbíně a naměřených dat pro pasivní dynamický hltič.

KLÍČOVÁ SLOVA

Fourierova řada, diskrétní Fourierova transformace

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem „Využití Fourierových řad v technických aplikacích“ vypracoval samostatně pod vedením Doc. Ing. Jana Halamy, Ph.D. a s použitím zdrojů uvedených na konci mé bakalářské práce.

V Praze dne 15. února 2016

Marek Johánek

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu této práce Doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D. za poskytnutí potřebné literatury, informací a podkladů k věcnému, ale i k formálnímu provedení této práce, zejména však za poskytnutý čas, připomínky, rady a v neposlední řadě za korekci. Toto vše pro mne bylo velkým přínosem k dokončení mé práce.

Obsah

1. Úvod	9
1.1 Historie Fourierových řad	9
1.2 Harmonický analyzátor Alberta Michelsona	10
2. Fourierovy řady	13
2.1 Fourierovy řady spojité periodické funkce	13
2.2 Trigonometrický polynom	13
2.3 Vznik Fourierových koeficientů	14
3. Diskrétní Fourierova transformace	16
4. Příklady z praxe	19
4.1 Rozpoznávací metody založené na 2D diskrétní Fourierově transformaci	19
5. Výsledky z naměřených dat	22
5.1 Složky síly statoru a rotoru turbíny	22
5.2 Data z měření pasivního dynamického hltiče	27
6. Závěr	32
7. Literatura	33

1. Úvod

1.1 Historie Fourierových řad

Fourierovy řady hrály významnou roli už v minulosti při vzniku teorie šíření tepla. Francouzský matematik Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) působil v oblasti elektřiny a magnetismu. Jeho práce Analytická teorie tepla vydaná v roce 1822 přinesla matematické metody, které patří ke klasickým nástrojům teoretické fyziky. Pojednává o vyjádření libovolných funkcí (které splňují určité podmínky) řadami nebo integrály harmonických funkcí. Fourierova matematická teorie tepla byla důležitým poznatkem pro George Simona Ohma (1789-1854) při odvození základního zákona vedení elektrického proudu. Jako vědecký poradce se v roce 1798 Fourier zúčastnil invaze do Egypta pod vedením Napoleona Bonaparte. Po celou dobu francouzské okupace Egypta byl jedním z dvanácti členů matematického oddělení, kde zastával funkci tajemníka Káhirskeho institutu. Už zde se Fourier začal zajímat o problematiku šíření tepla. V roce 1801 se Fourier vrátil zpět do Francie, kde získal místo profesora analýzy na Ecole Polytechnique. Dlouho v roli profesora ale nezůstal. Fourier na přání Napoleona nastoupil v Grenoblu na místo prefekta departmentu potom, co zemřel předchozí prefekt Isère. Právě v Grenoblu roku 1804 Fourier začal pracovat na své matematické studii o teorii šíření tepla. Sestavil parciální diferenciální rovnici popisující tepelnou difúzi a našel její řešení pomocí nekonečných řad trigonometrických funkcí (Fourierových řad). Po dokončení práce v roce 1807 Fourier publikoval článek „O šíření tepla v pevných tělesech“. 21. prosince 1807 byla jeho práce předložena v Pařížském institutu. Ačkoliv dnes je dílo všeobecně uznáváno, komise, která práci tehdy posuzovala, nebyla spokojena hned ze dvou důvodů. Prvním z nich bylo Fourierovo vyjádření funkce $f(x)$ trigonometrickou řadou, která je dnes po něm nazývána Fourierova řada:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (1.1)$$

kde a_0, a_k, b_k jsou koeficienty, pro které Fourier odvodil příslušné vztahy. Přestože se Fourier pokusil svou myšlenku vysvětlit podrobněji, nebylo mu to nic platné. Toto nové průkopnické řešení se u většiny matematiků nesetkalo s kladnou reakcí. Ke správnému vysvětlení této metody významně přispěl německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), který v roce 1828 publikoval články o podmínkách konvergence trigonometrických řad a o použití rozvoju určitých funkcí v řady. Stal se prvním matematikem, který podal přesný důkaz konvergence Fourierových řad. Druhým důvodem nespokojenosti komise byla námitka, kterou přednesl francouzský fyzik a matematik Jean Baptiste Biot (1774-1862). Ohradil se proti Fourierovu odvození rovnice přenosu tepla, kde se Fourier neodkazoval na Biotovu práci z roku 1804. Ještě několik let po tom, co byla Fourierova práce přednesena v Pařížském institutu, se Biot dožadoval prvenství. Fourier však nakonec prokázal, že Biotova práce je chybná. V roce 1811 byla Pařížským institutem vypsána cena za řešení problému šíření tepla v pevných tělesech. Fourier zaslal svou práci z let 1804-1807 doplněnou o studii o ochlazení těles a o zemském teple. Komise označila Fourierovu práci opět za nezpůsobitou a uvedla, že metoda integrace rovnic vedení tepla vyžaduje zobecnění a zpřesnění. I přes

tyto výhrady nakonec Fourier ocenění od komise získal. Za dalších jedenáct let byla tato oceněná práce akademií vydána pod názvem *Theorie analytique de la chaleur* (Analytická teorie tepla). Jean Baptiste Joseph Fourier se nezabýval pouze „čistou“ matematikou, ale i o využití matematiky ve fyzice. Svou prací přispěl k velmi významným matematickým i fyzikálním objevům. V předmluvě ke svému základnímu dílu, *Analytická teorie tepla*, k tomu napsal: „Důkladné zkoumání přírody je nejčastější příčinou matematických objevů. Toto zkoumání dává bádání určitý cíl a má tu výhodu, že vylučuje nejasné otázky a výpočty, které nevedou k cíli...“ [4].

1.2 Harmonický analyzátor Alberta Michelsona

V 19. století Albert Michelson vynalezl harmonický analyzátor realizující částečný součet Fourierovy řady. Tento stroj byl sestaven v Anglii a měl sloužit k predikci přílivu a odlivu. Později byl znovu objeven na univerzitě v Illinois. Bill Hammack, Steve Kranz and Bruce Carpenter o tom napsali knihu *Albert Michelson's Harmonic Analyzer* a vysvětlili chod stroje v krátkých videosériích.



Obr. 1.1 Harmonický analyzátor Alberta Michelsona [2]

Stroj implementuje částečný součet Fourierovy řady ve tvaru

$$f(x) = \sum_{k=1}^{20} a_k \cos(kx). \quad (1.2)$$

Podle rovnice se jedná pouze o sudé funkce a střední hodnota funkce $f(x)$ je nulová ($\frac{a_0}{2} = 0$).

Proměnná x je poloha vodorovné osy grafu kosinu. Hodnota k je celé číslo, které může nabývat hodnot od 1 do 20 a určuje frekvenci – počet kmitů jednotlivých kosinů

v rovnici. Symbol a_k je koeficient. Hodnoty a_k ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$) určují funkci, která bude syntetizována. Každá hodnota a_k je amplituda konkrétního cosinu.

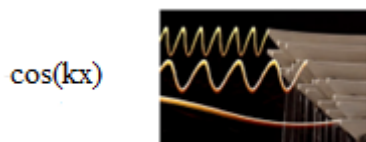
Symbole a jejich význam ve stroji:



Proměnná x je přímo úměrná rotaci kliky, kterou se stroj pohání vačkami.



Variabilní velikosti ozubených kol realizují 20 různých frekvencí $\cos(kx)$.



Vačky připevněné na ozubená kola produkují harmonické kmity vahadel.



Pozice tyčí podél vahadel nastavuje hodnoty koeficientů a_k . Je tu jedna tyč pro každou z 20 frekvencí.



Páka na vrcholku stroje sčítá dohromady mechanickým způsobem (pomocí pružin) výchylky tyčí, tj. členy $a_k \cos(kx)$.

$f(x)$



Psací zařízení na přední straně stroje kreslí výsledný graf ve formě spojitě funkce. Stroj umí určit $f(x)$ z a_k a také a_k ze zadané $f(x)$ [2].

2. Fourierovy řady

2.1 Fourierova řada spojité periodické funkce

Periodickou funkcí se v matematice rozumí taková funkce, ve které se hodnoty po určité konečné periodě opakují. O funkci $f(t)$ budeme říkat, že je T -periodická, platí-li

$$f(t) = f(t + T), T > 0, t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

kde T je perioda [1].

2.2 Trigonometrický polynom

Fourierovy řady jsou rozšířením trigonometrických polynomů.

Nechť $T > 0$ je perioda, označme $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Pojmem trigonometrický polynom stupně N rozumíme funkci

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \text{ kde } t \in (-\infty, \infty) \quad (2.2)$$

a kde a_k a b_k jsou reálná čísla.

Všechny funkce v trigonometrickém polynomu jsou T -periodické, takže automaticky také lineární kombinace $S_N(t)$ je T -periodická.

Lze ukázat, že pro $N \rightarrow \infty$ je možné zapsat T -periodickou funkci $f(t)$ pomocí trigonometrického polynomu. Je-li $f(t)$ periodická s periodou T , po částech spojitá a po částech monotónní a existuje-li integrál $\int_0^T |f(t)|^2 dt$, pak

$$S(t_0) = \frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)), \quad (2.3)$$

kde $S(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_0)$.

Fourierovu řadu funkce f definuje jako

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (2.4)$$

kde koeficienty jsou dány vzorcem

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (2.5)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 1, \quad (2.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \geq 1. \quad (2.7)$$

$$f(t) \approx S(t) \quad (2.8)$$

Všimněte si, že toto je pouze formální přiřazení. Je-li dána f , tak spočítáme integrály a vytvoříme řadu. Toto formální přiřazení zapíšeme následovně:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \quad (2.9)$$

2.3 Vznik Fourierových koeficientů

- 1) Funkce $\cos(k\omega t)$, kde $k=0,1,\dots,\infty$, $\sin(k\omega t)$, kde $k=1,2,\dots,\infty$ tvoří bázi. $S(t)$ je lineární kombinace této báze.
- 2) Lze definovat skalární součin funkcí f a g jako

$$(f, g) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot g(t) dt. \quad (2.10)$$

- 3) Platí

$$\begin{aligned} &\therefore 0, f \neq g \\ (f, g) &= \dots \frac{T}{2}, f = g \quad (k = 1, 2, \dots), \text{ kde } f, g \text{ je dvojice funkcí z báze ad 1).} \\ &\therefore T, f = g, k = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Skalární součin funkcí f, g se rovná nule, když se funkce nerovnají. Když se $f = g$, tak je výsledek buď $\frac{T}{2}$ (když $k = 1, 2, \dots$) nebo je výsledek T (když $k = 0$).

Rovnici (2.9) skalárně násobíme funkcí $\cos(l\omega t)$.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) / \cdot \cos(l\omega t) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} (f(t), \cos(l\omega t)) &= \left(\frac{a_0}{2}, \cos(l\omega t) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (\cos(k\omega t), \cos(l\omega t)) + b_k (\sin(k\omega t), \cos(l\omega t))) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{a_0}{2}, \cos(l\omega t) \right) = 0, \text{ když } l \geq 1 \quad (2.14)$$

$$(\cos(k\omega t), \cos(l\omega t)) = \dots 0, k \neq l \quad (2.15)$$

$$\therefore \frac{T}{2}, k = l$$

Skalární součin $(\cos(k\omega t), \cos(l\omega t))$ se rovná nule, když $k \neq l$ nebo se rovná $\frac{T}{2}$, když $k = l$.

$$(\sin(k\omega t) \cos(l\omega t)) = 0 \quad (2.16)$$

$$(f(t), \cos(l\omega t)) = a_l \cdot \frac{T}{2} \quad (2.17)$$

Obě strany rovnice vynásobíme převrácenou hodnotou $\frac{T}{2}$, tzn. $\frac{2}{T}$.

$$a_l = \frac{2}{T} \cdot (f(t), \cos(l\omega t)) = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(l\omega t) dt \quad (2.18)$$

(u b_l funkci násobíme sinem)

Takto dostaneme reálné Fourierovy koeficienty a_l, b_l .

Význam Fourierových koeficientů:

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) &= A_k \sin \varphi_k \cos(k\omega t) + A_k \cos \varphi_k \sin(k\omega t) = \\ &= A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{kde } A_k \sin \varphi_k = a_k \quad (2.20)$$

$$A_k \cos \varphi_k = b_k \quad (2.21)$$

$$\rightarrow A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2.22)$$

$$\text{tg } \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}, \quad \varphi_k = \text{arctg } \frac{a_k}{b_k} \quad (2.23)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \rightarrow \text{jiný zápis pro Fourierovu řadu,} \quad (2.24)$$

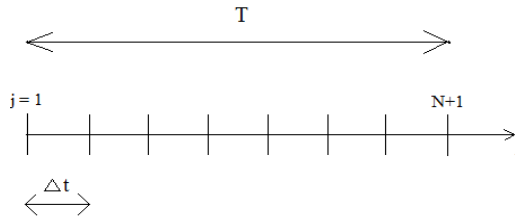
kde A_k je amplituda, φ_k je fázový posuv pro k -tou frekvenci F_k , ω je základní úhlová rychlost, $k\omega$ je k -tá úhlová rychlost a $\frac{a_0}{2}$ je střední hodnota.

$$2\pi F_k = k\omega \quad (2.25)$$

Pomocí takto zapsané Fourierovy řady můžeme zkoumat amplitudové spektrum určitého signálu a do grafu vynášet například závislost amplitudy na frekvenci nebo závislost fázového posuvu na frekvenci.

3. Diskrétní Fourierova transformace

Předpokládáme, že známe hodnoty funkce $f(t)$ pouze pro diskrétní hodnoty t_j .



Obr. 3.1 Označení periody a počtu vzorků na úsečce

Například máme nějaká naměřená data, můžeme psát

$$f(t_j) = f_j \quad (3.1)$$

Diskrétní čas lze vyjádřit jako

$$t_j = j \cdot \Delta t, \quad j = 1, \dots, N + 1 \quad (3.2)$$

kde Δt je časový krok (čas mezi jednotlivými vzorky).

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (3.3)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.4)$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_{\text{vzorkovací}}} \quad (3.5)$$

T je doba měření a považujeme ji za periodu f_j .

Vzorkovací frekvence definuje počet vzorků za jednotku času a vypočítá se jako převrácená hodnota časového kroku Δt .

Do Fourierovy řady dosadím diskrétní čas t_j , f_j , kde $j = 1, \dots, N+1$. Máme $N+1$ vzorků, umíme určit $N+1$ koeficientů.

$$f(t_j) = f_j = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2} (a_k \cos(k\omega t_j) + b_k \sin(k\omega t_j)), \quad \text{kde } j = 1, \dots, N+1. \quad (3.6)$$

Rovnici (3.5) můžeme zapsat v tomto tvaru

$$f(t_j) = f_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k e^{ik\omega t_j} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k (\cos(\omega_k t_j) + i \sin(\omega_k t_j)) \quad (3.7)$$

Pokud zapíšeme rovnici (3.6) pro všechna j , tak dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(-\frac{N}{2})\omega t_1} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & e^{i(\frac{N}{2})\omega t_{N+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-N/2} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_{N/2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$e^{ik\omega t_j} = w_{jk}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.9)$$

Lze ji také zapsat jako

$$Z = F_N \cdot C, \text{ kde} \quad (3.10)$$

$$F_N = \begin{pmatrix} "w_{jk}" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,-\frac{N}{2}} & w_{1,-\frac{N}{2}+1} & \dots & w_{1,\frac{N}{2}} \\ w_{2,-\frac{N}{2}} & w_{2,-\frac{N}{2}+1} & \dots & w_{2,\frac{N}{2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N+1,-\frac{N}{2}} & \dots & \dots & w_{N+1,\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

je matice (N×N).

Sloupce matice soustavy (3.8) označíme jako vektory W_k .

Vektory $W_{-\frac{N}{2}}, W_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, W_0, \dots, W_{\frac{N}{2}}$ tvoří ortogonální bázi $N+1$ – dimenzionálního vektorového prostoru a vektor Z může být zapsán jako lineární kombinace vektorů $W_{-\frac{N}{2}}, \dots, W_{\frac{N}{2}}$.

$$Z = c_{-\frac{N}{2}} W_{-\frac{N}{2}} + \dots + c_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}} \quad (3.12)$$

F_N je regulární (existuje F_N^{-1}).

Z toho vyplývá, že

$$C = F_N^{-1} \cdot Z, \quad (3.13)$$

kde vektor C je tzv. diskrétní Fourierovou transformací původního vektoru Z a F_N^{-1} je inverzní matice k matici F_N . Inverzní matice F_N^{-1} se vypočítá jako

$$F_N^{-1} = \bar{F}_N \cdot \frac{1}{N} \quad (3.14)$$

Z koeficientů c_k lze získat a_k, b_k , které odpovídají rovnici (3.6) a ty lze převést na A_k, φ_k (2.24).

$|c_0|$... má význam střední hodnoty f_j

$|c_1|$... amplituda nejnižší frekvence

$|c_{N/2}|$... amplituda maximální frekvence

Koeficienty $c_{-\frac{N}{2}}$ až c_{-1} „nepotřebujeme“.

Obdobně jako u Fourierovy řady, tak i tady můžeme vynést do grafu závislost amplitudy $|c_k|$ na frekvenci, kde uvidíme amplitudové spektrum signálu.

Někdy se vektor C přeindexovává kvůli programování na:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

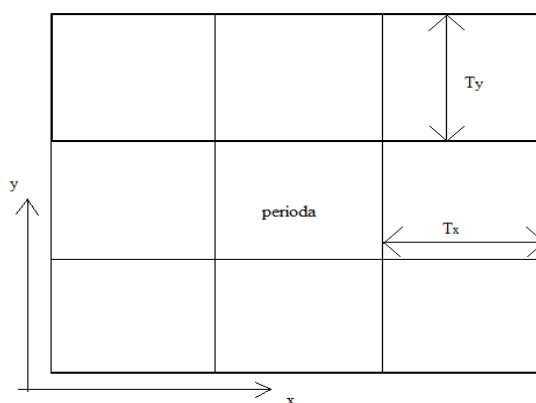
4. Příklady z praxe

4.1 Rozpoznávací metody založené na 2D diskrétní Fourierově transformaci

V mnoha oborech lidské činnosti se setkáváme s analýzou vlastností hmoty (materiálu v metalografii, tkání v medicíně apod.). Jednou z možností, jak zjistit vlastnosti materiálu, je zaměřit se na jeho strukturu.

Významným znakem je orientovanost struktury, která má výrazný vliv na vlastnosti materiálu i finálního výrobku. Jedním z důležitých úkolů v praxi bývá zjištění stupně deformace materiálu, což je prakticky totožné s měřením jeho stupně orientovanosti. Současné metody jsou obvykle založeny na analýze struktury v běžném (reálném) prostoru. Novým přístupem k rozpoznávání stupně deformace (orientovanosti) je využít 2D Fourierovy transformace a provádět rozpoznávání v prostoru plošných frekvencí.

1D diskrétní Fourierovu transformaci lze rozšířit do 2D, kde odpovídá rovnici (4.2).



Obr. 4.1 Schéma periodicity (analogie obrázku 3.1)

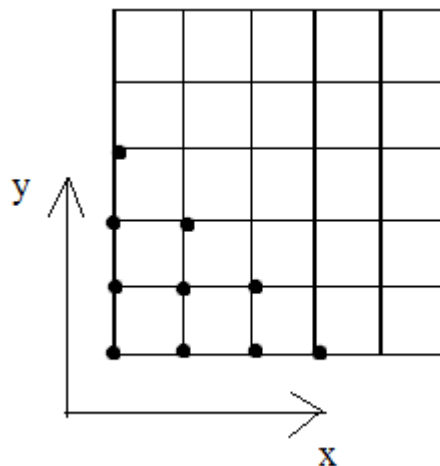
Chceme-li funkci $f(x, y)$ zapsat ve formě součtu 2D Fourierovy řady, musí být periodická. Periodicita $f(x, y)$ je naznačena na obr. 4.1 a lze zapsat jako

$$f(x, y) = f(x + m \cdot T_x, y + n \cdot T_y), \text{ kde} \quad (4.1)$$

$$T_x > 0, T_y > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

T_x je perioda ve směru x a T_y perioda ve směru y .

Uvažujeme diskrétní hodnoty funkce $f(x, y)$ na jedné periodě, tj. hodnoty $f(x_j, y_k)$.



Obr. 4.2 Detail jedné periody u obrázku 4.1

Pomocí 2D diskrétní Fourierovy transformace získáváme z reálného obrazu (hodnoty $f(x_j, y_k)$) obraz plošných frekvencí. Tato transformace je definována dle vztahu:

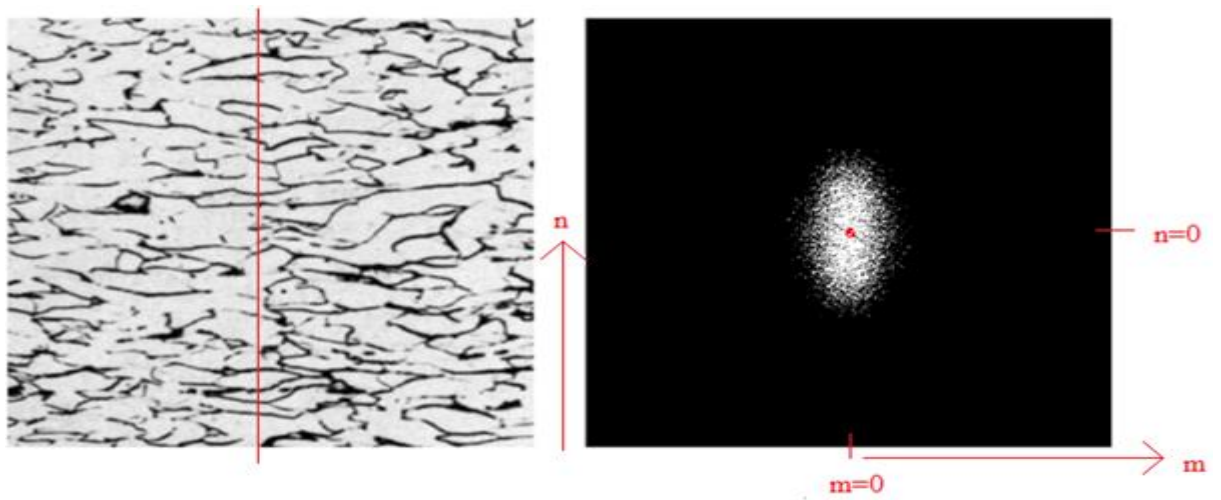
$$f(x_j, y_k) = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_{m,n} \cdot e^{im\omega_x x_j} \cdot e^{in\omega_y y_k} \quad (4.2)$$

Koeficienty m, n určují násobky základních frekvencí ve směru x a y . $|c_{m,n}|$ je amplituda m -té harmonické složky v x a n -té v y .

$$\omega_x = \frac{2\pi}{T_x} \quad (4.3)$$

$$\omega_y = \frac{2\pi}{T_y} \quad (4.4)$$

Struktura oceli se stupněm deformace 40% a obraz po aplikaci 2D Fourierovy transformace je znázorněn na obr. 4.3. $f(x_j, y_k)$ je hodnota jasu na obrázku 4.3 („střídání světlých a tmavých míst“).



Obr. 4.3 Obraz pro aplikaci 2D diskretní Fourierovy transformace [5]

Digitální obraz je tvořen pixely (jednotka digitálního obrazu). Z obr. 4.3 vidíme, že větší zhuštění hran je ve směru y , tím pádem jsou vyšší frekvence v y (elipsa je protažená ve směru y) [5].

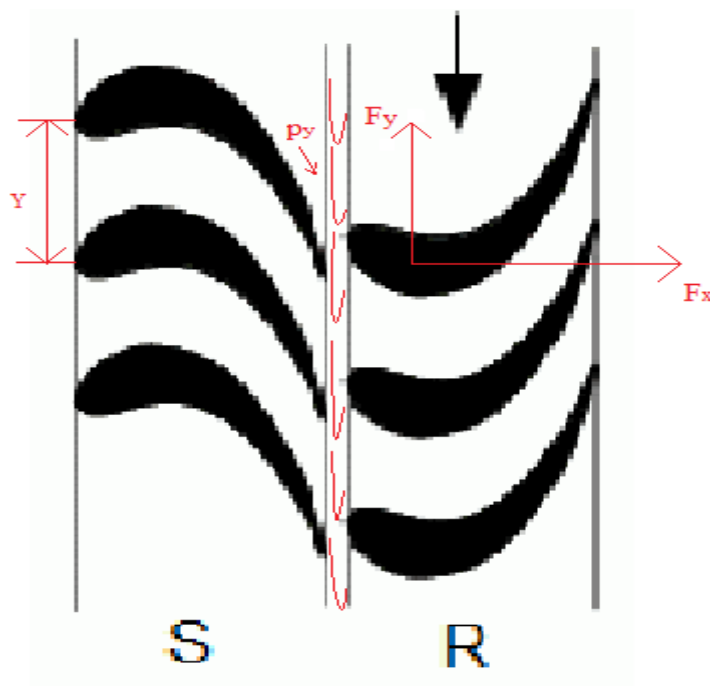
5. Výsledky z dodaných dat

Zde počítáme „ c_k “ z rovnice (3.13) pomocí funkce v MATLABU a vykreslujeme amplitudová spektra.

5.1 Složky síly statoru a rotoru turbíny

Lopátkové stroje jsou širokou skupinou strojů (například parní turbíny, plynové/spalovací turbíny, turbokompresory, odstředivá/radiální čerpadla, vodní turbíny a mnoho dalších strojů). Jejich charakteristickým rysem je **rotor** po obvodu opatřený lopatkami někdy nazývaný oběžným kolem. K transformaci energie dochází vlivem vzájemného silového působení mezi pracovní tekutinou a lopatkami.

Otáčení rotoru lopátkového stroje je způsobeno silou působící na lopatky. Jestliže pracovní tekutina energii předává rotoru, potom se stroj nazývá turbínou (akční síla je od proudu pracovní tekutiny reakční od lopatek). U hydrodynamických čerpadel, turbokompresorů, ventilátorů (tzv. pracovní stroje) probíhá opačný proces, při kterém pracovní tekutina energii získává (akční síla je od lopatek reakční od proudu tekutiny). Pro lopátkové stroje je typický rozdíl tlaku před a za strojem (tlakový spád), nebo rozdíl rychlosti pracovní tekutiny popřípadě kombinace obou. Turbína není tvořena pouze rotorem, ale ještě před ním jsou tzv. rozváděcí řady lopatek seřazené po obvodu oběžného kola, takové řadě lopatek říkáme lopátkový **stator**. Ve statorové řadě lopatek se transformuje část tlakové energie na kinetickou [3].

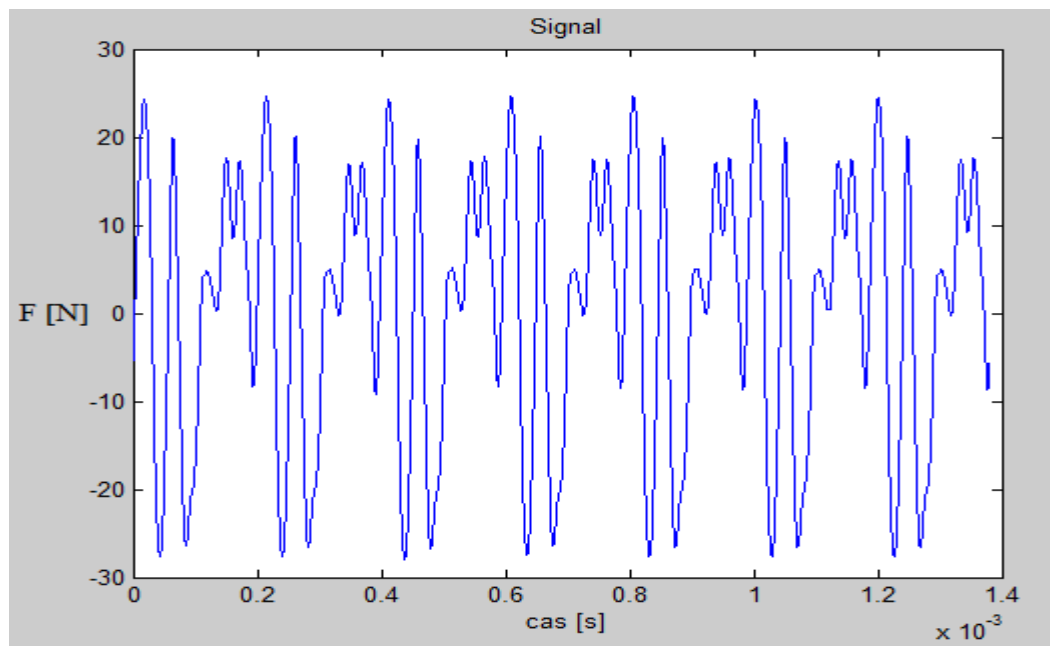


Obr. 5.1 Statorová a rotorová řada lopatek turbíny [3]

Parametry proudového pole v rotoru se periodicky mění. Perioda odpovídá posuvu rotoru o rozteč Y (vzdálenost mezi dvěma lopatkami statoru ve směru osy y). Počet otáček rotoru v turbíně je 3000 ot./min, z toho vyplývá, že frekvence odpovídající otáčkám rotoru je 50 Hz. Jelikož počet lopatek v turbíně je 100, tak základní frekvence fluktuací v rotoru je přibližně 5 kHz ($50 \text{ Hz} \cdot 100 = 5 \text{ kHz}$). Mezi statorem a rotorem působí tlak $p(y)$, který je periodický s periodou Y .

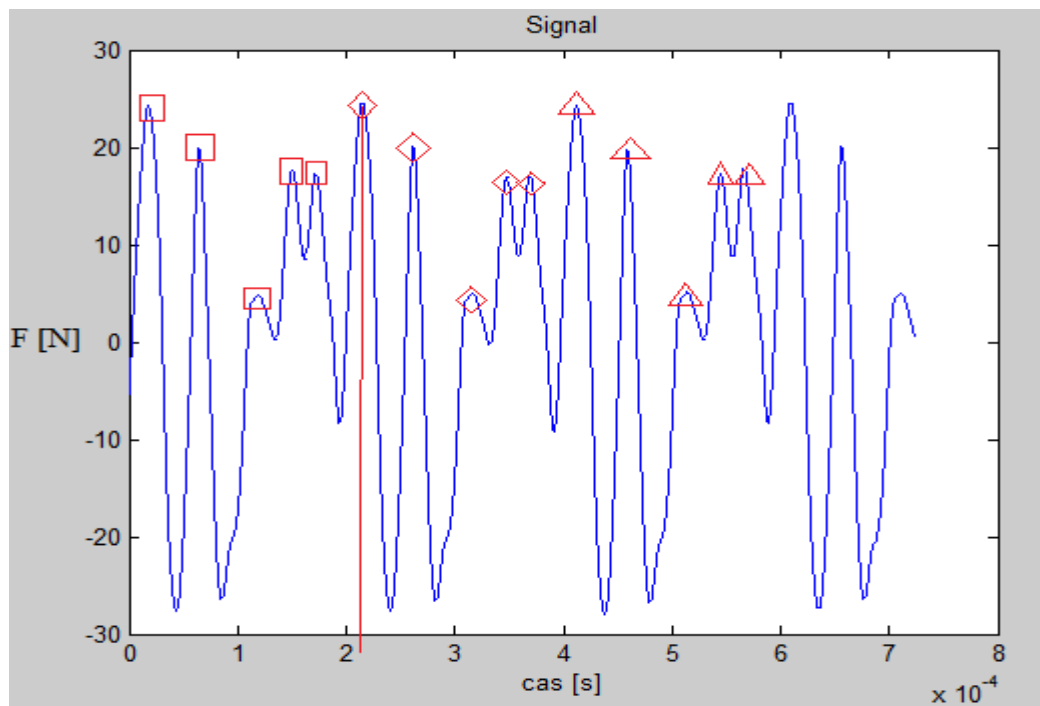
Yová složka síly rotoru

Počet vzorků signálu yové složky síly působící na rotorovou lopatku je 62 500, počet prvků s nejbližší mocninou 2 je 32 768 a vzorkovací frekvence je $4,527 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.



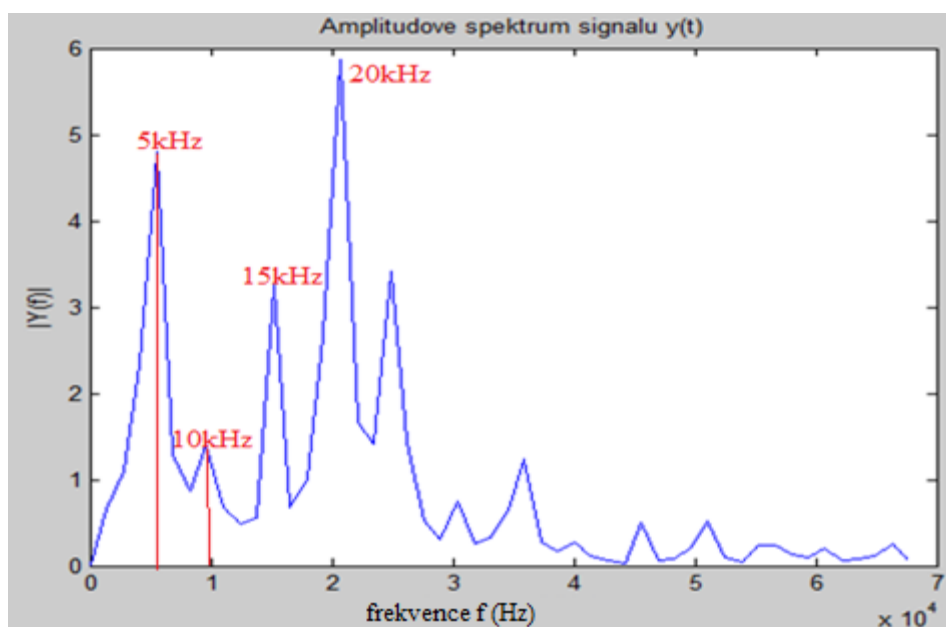
Obr. 5.2 Graf závislosti yové složky síly na rotorovou lopatku na čase

$F[N]$ je odchylka od střední hodnoty.



Obr. 5.3 Graf závislosti yové složky síly na rotorovou lopatku na čase ve větším měřítku.

Pomocí značek (čtverce, kosočtverce a trojúhelníky) si můžeme všimnout, že se signál periodicky opakuje. Perioda tohoto signálu je přibližně $2 \cdot 10^{-4}$ s odpovídající frekvenci 5000 Hz.

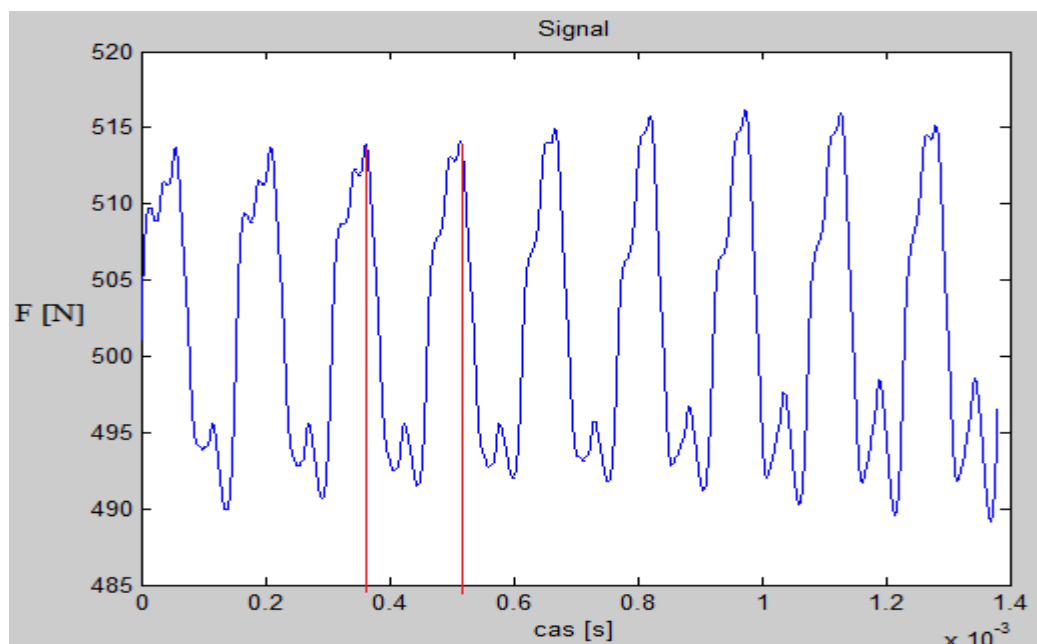


Obr. 5.4 Amplitudové spektrum signálu yové složky síly rotoru

Tento graf závislosti Fourierových koeficientů na frekvenci ukazuje amplitudové spektrum signálu. Frekvence 5kHz a její násobky musí být mimo rezonanční frekvenci lopatky. Významná je frekvence 20 kHz, kde je amplituda největší.

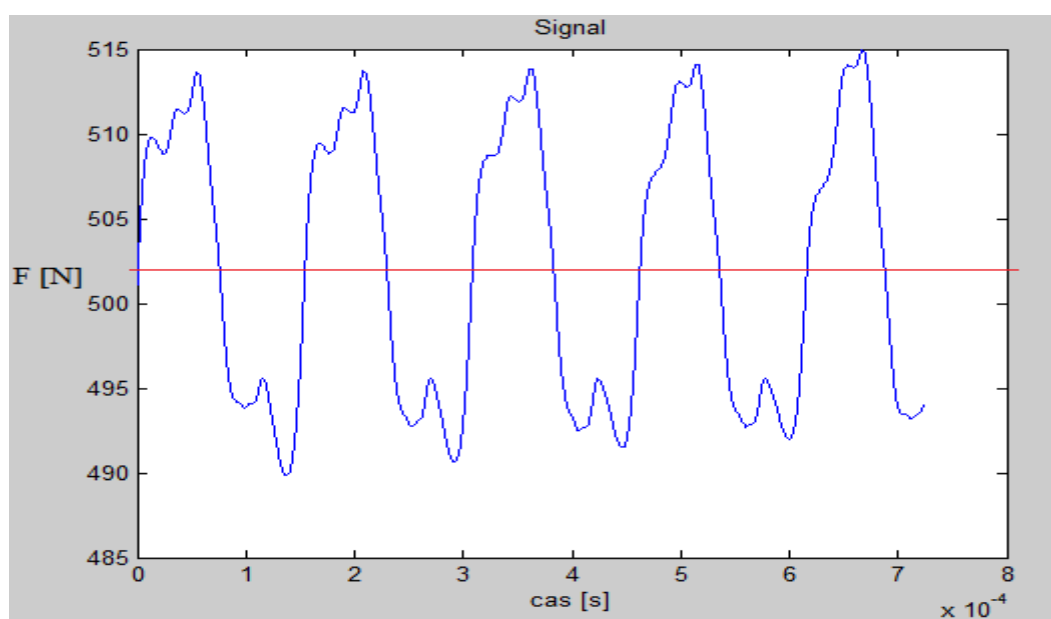
Xová složka síly statoru

Počet vzorků signálu xové složky síly působící na statorovou lopatku je 62 500, počet prvků s nejbližší mocninou 2 je 32 768 a vzorkovací frekvence je $4,527 \cdot 10^7$ Hz.



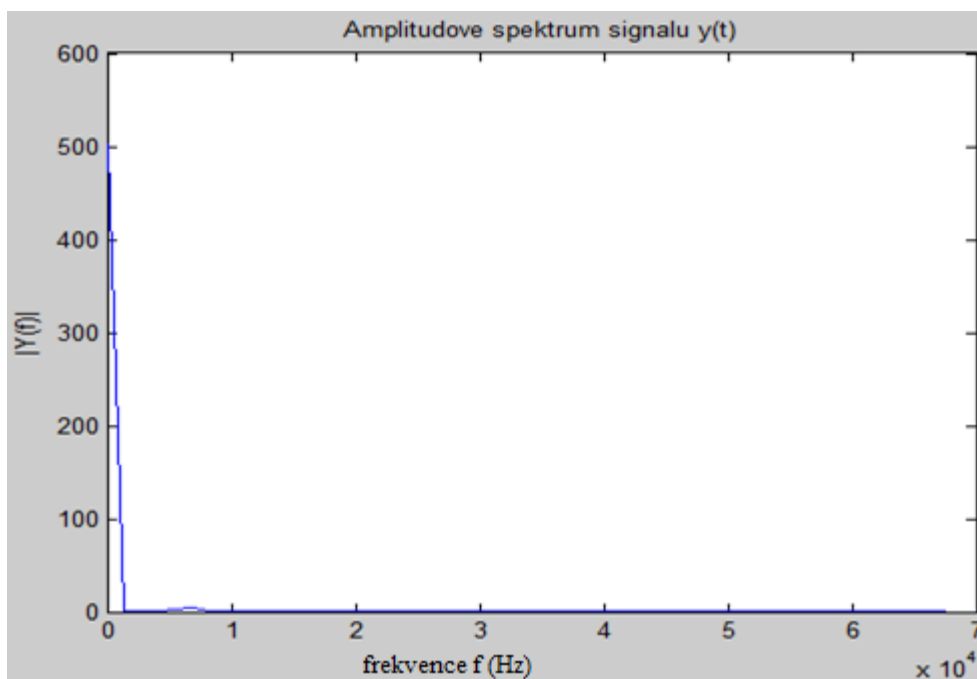
Obr. 5.5 Graf závislosti xové složky síly na statorovou lopatku na čase

Z grafu je poznat, že xová složka síly není úplně periodická jako yová složka. Z tohoto grafu není vidět celá opakující se vlna, tak bereme vyznačenou část na grafu jako jednu periodu. Perioda vyznačená v grafu odpovídá času asi $0,15 \cdot 10^{-3}$ s, což je přibližně 6,6 kHz.



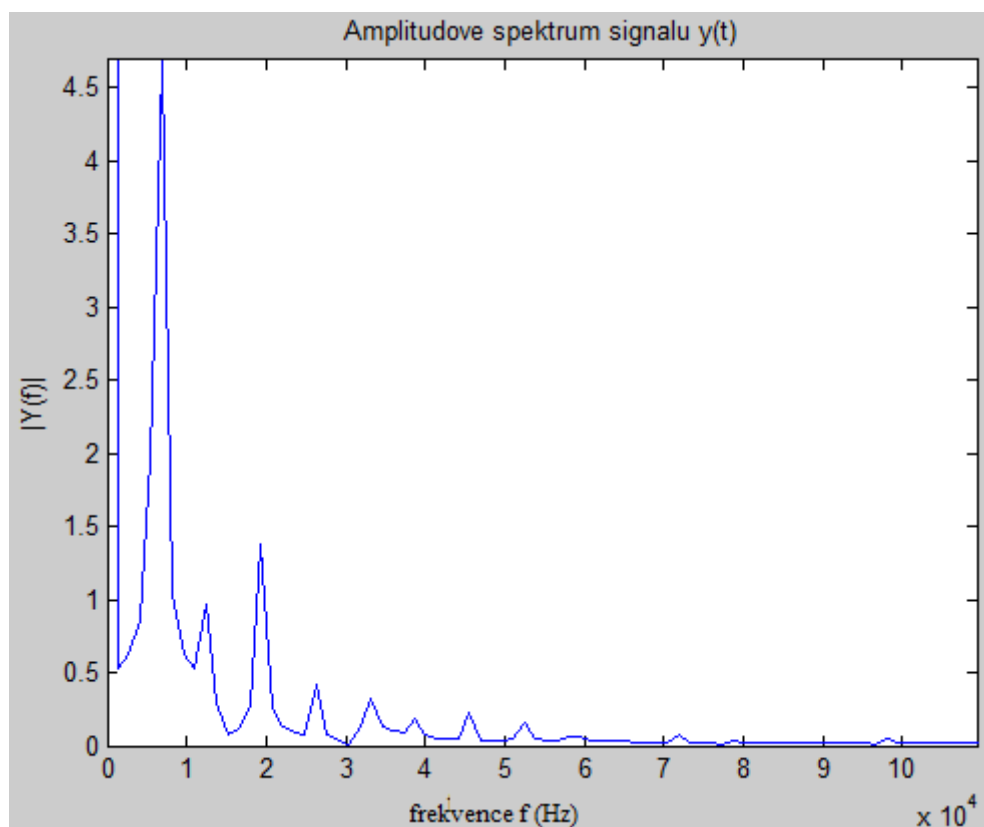
Obr. 5.6 Graf závislosti xové složky síly na statorovou lopatku na čase ve větším měřítku

Střední hodnota síly je 502,1451.



Obr. 5.7 Amplitudové spektrum signálu xové složky síly statoru

Z tohoto amplitudového spektra toho moc nevyčteme, protože střední hodnota grafu je přibližně 500. Proto musíme upravit yovou osu grafu.



Obr. 5.8 Amplitudové spektrum signálu xové složky síly statoru ve větším měřítku

Zde vidíme několik významných frekvencí (násobky základní frekvence $\sim 6,6$ kHz).

5.2 Data z měření pasivního dynamického hltiče

Data byla poskytnutá z Ústavu výrobních strojů, FS ČVUT.

Jedná se o měření pasivního dynamického hltiče umístěného na testovacím smykadle obráběcího stroje. Měření bylo prováděno pomocí modálního kladívka a signál byl snímán jednoosým akcelerometrem. Experiment spočíval v připojení pasivního dynamického hltiče - což si lze představit jako hmotu na pružině o frekvenci shodné s frekvencí 1. vlastního tvaru smykadla, takovým způsobem, aby došlo k potlačení této frekvence. Hltič připojením k poddajné struktuře "vyrobí" na dané frekvenci antirezonanci. Pokud se vhodně naladí na smykadlo, dojde při vhodném tlumení k disipaci energie daného vlastního tvaru vlivem pohybu hmoty hltiče v protifázi. Dalším parametrem k naladění bylo tlumení. To bylo možné ovlivnit množstvím a viskozitou oleje, ve kterém byla hmota hltiče ponořena.

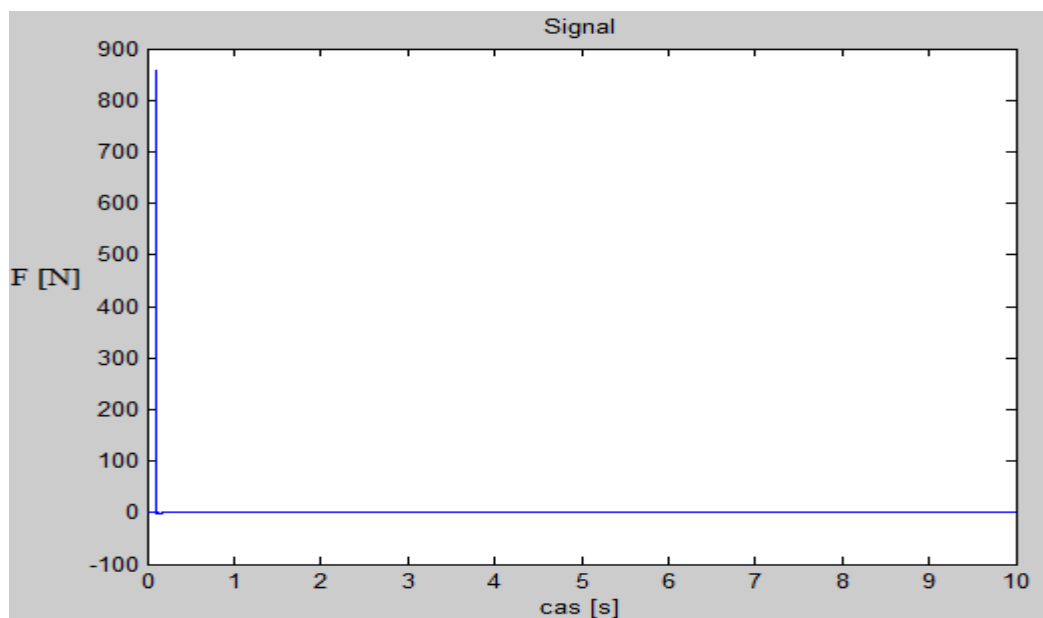
Záznam byl proveden s inkrementem $1,953125e-05$ s (Δt).

Počet vzorků signálu pasivního dynamického hltiče je 512 001, počet prvků s nejbližší mocninou 2 je 262 144, vzorkovací frekvence je 51 200 Hz a maximální frekvence je 25 600 Hz.

$$f_{max} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \quad (5.1)$$

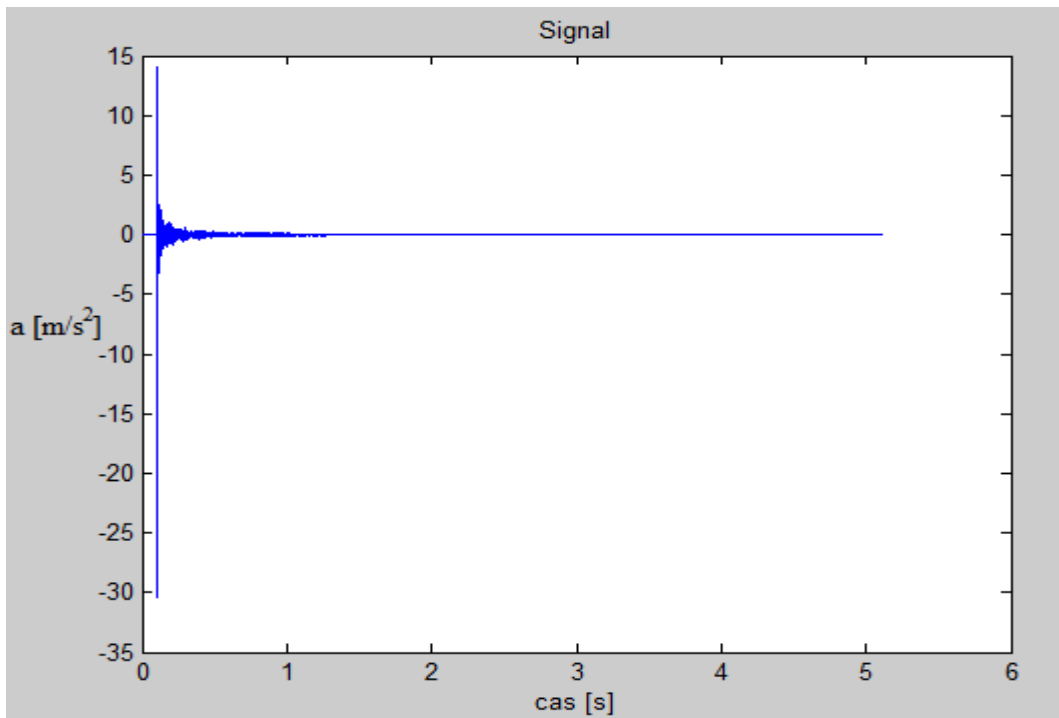
$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \quad (5.2)$$

$$f_{max} = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^5}{4} = 25 \text{ kHz} \quad (5.3)$$



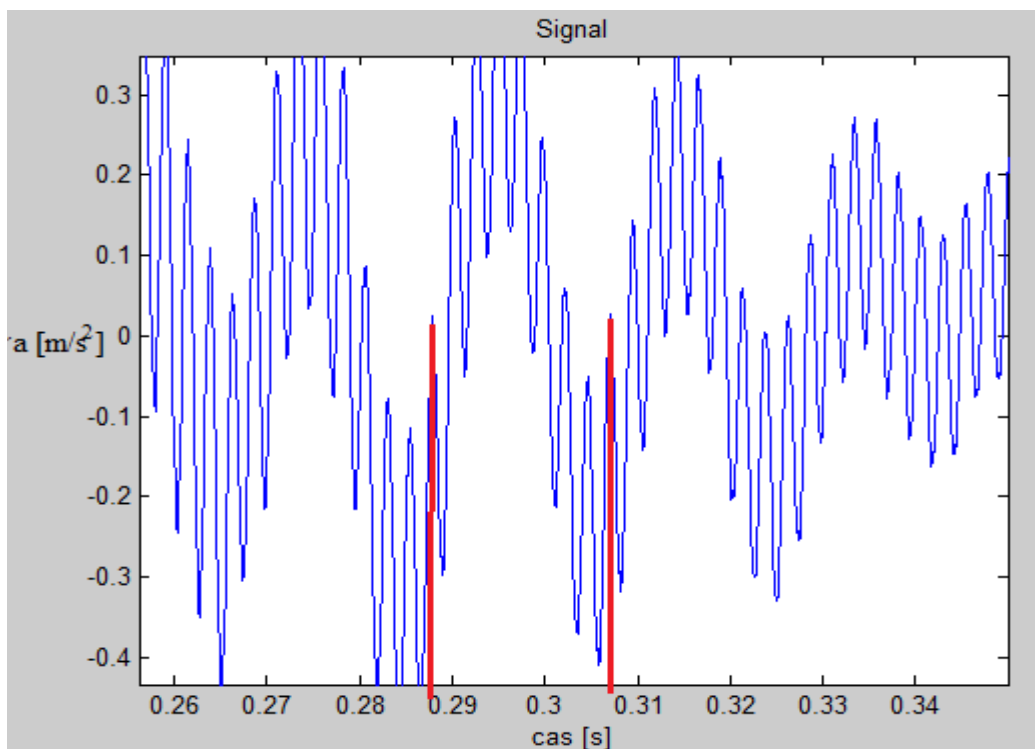
Obr. 5.9 Graf závislosti síly (záznam buzení) na čase pasivního dynamického hltiče

Z grafu je patrné, že v čase Δt bylo použito modální kladívko, což vybudilo sílu skoro 900 N. Kladívko bylo použito jednorázově, proto se na zbytku grafu už „nic neděje“.



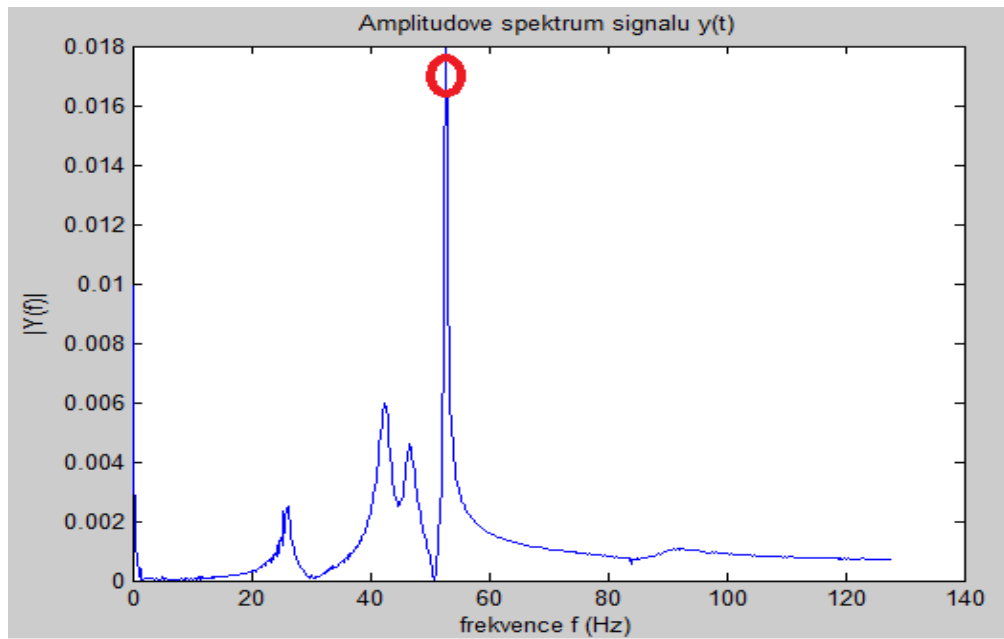
Obr. 5.10 Graf závislosti zrychlení na čase pasivního dynamického hltiče

Signál není periodický, ale když budeme záznam považovat za 1 periodu, pak můžeme využít diskrétní Fourierovy transformace.

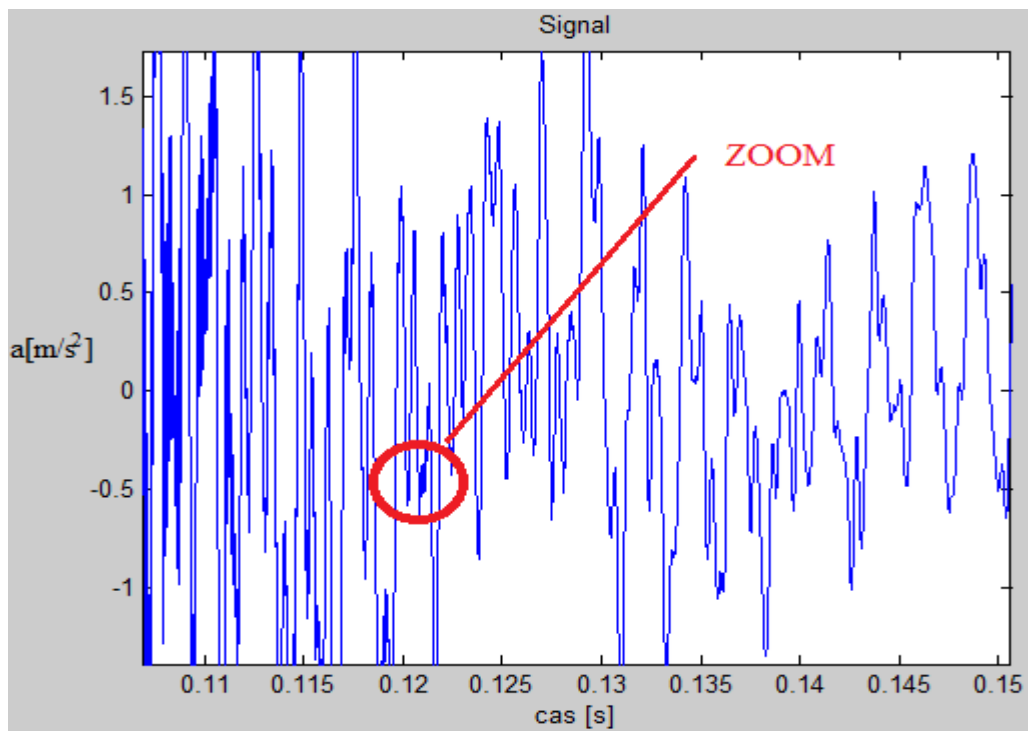


Obr. 5.11 Graf závislosti zrychlení na čase pasivního dynamického hltiče ve větším měřítku

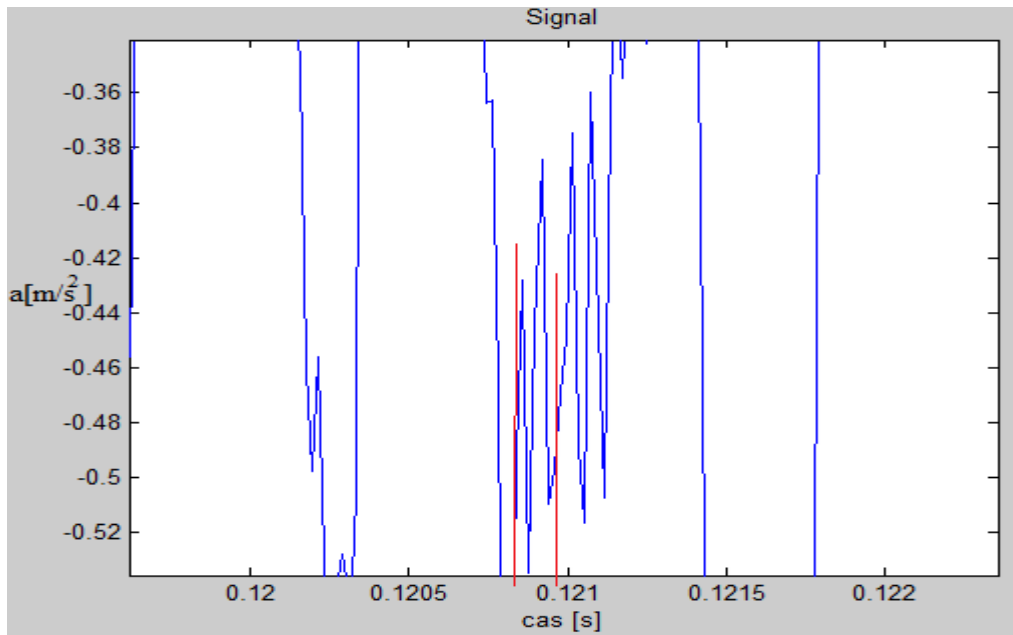
Perioda jedné z frekvencí znázorněná na obrázku je přibližně 0,02 s, což odpovídá frekvenci 50 Hz.



Obr. 5.12 Amplitudové spektrum signálu pasivního dynamického hltiče s vyznačenou frekvencí 50 Hz

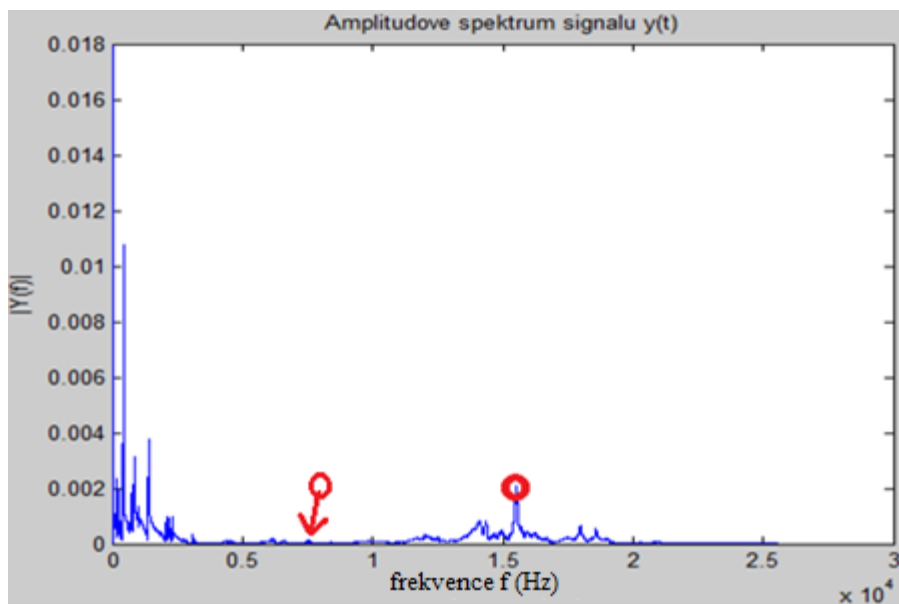


Obr. 5.13 Graf závislosti zrychlení na čase pasivního dynamického hltiče ve větším měřítku



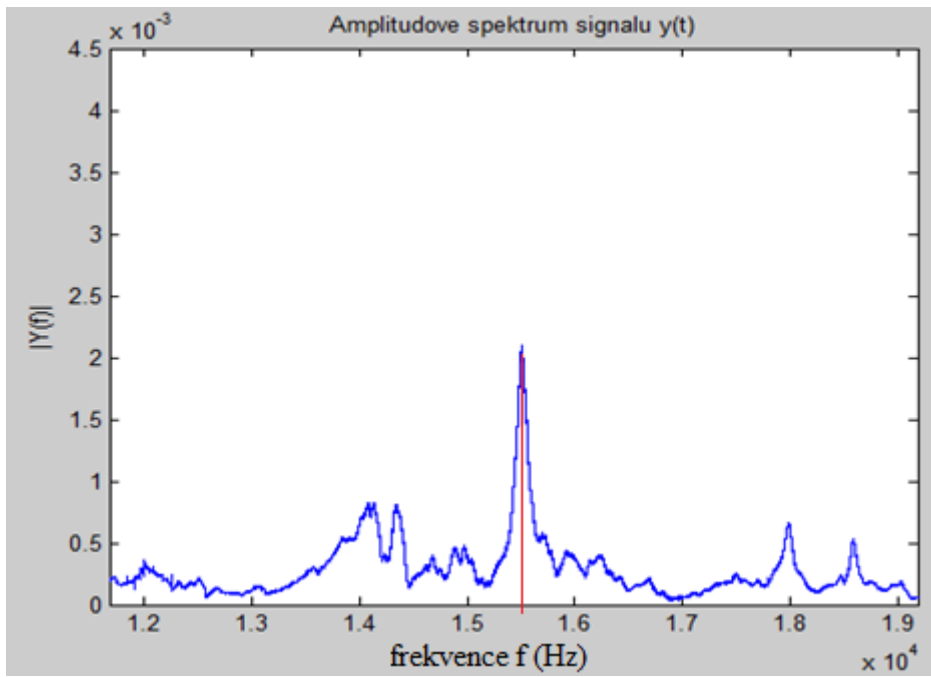
Obr. 5.14 Graf závislosti zrychlení na čase pasivního dynamického hltiče (detail z obrázku 5.13)

V grafu máme vyznačenou periodu přibližně $1,25 \cdot 10^{-4}$ s, což odpovídá frekvenci 8 kHz vyznačené v obrázku 5.14.



Obr. 5.15 Amplitudové spektrum signálu pasivního dynamického hltiče s vyznačenými frekvencemi 15 kHz a 8 kHz

V grafu vidíme vychýlení amplitudy u frekvence 15,5 kHz (viz obr. 5.15), to bude nejspíš způsobené od úderu kladívka.



Obr. 5.16 Amplitudové spektrum signálu pasivního dynamického hltiče pro vyšší frekvence

6. Závěr

V této práci bylo stručně představeno využití Fourierových řad v technických aplikacích. Byly představeny základní rovnice pro Fourierovu řadu a diskrétní Fourierovu transformaci. Dále byly představeny vlastnosti a různé definice týkající se Fourierových řad. U příkladů z praxe jsme si ukázali využití 2D diskrétní Fourierovy transformace v odvětví metalurgie. U mých vlastních příkladů jsem měl data ze simulace proudění ve statoru a rotoru turbíny a měření dat z pasivního dynamického hltiče. U hltiče narozdíl od turbíny nebyl signál periodický, ale považovali jsme tento signál za jednu periodu, abychom mohli použít diskrétní Fourierovu transformaci. Identifikovali jsme výrazné frekvence, které vidíme v obrázcích amplitudových spekter.

7. Literatura

- [1] AUTOR NEUVEDEN. (*Diskrétní*) *Fourierova transformace*. [online]. [cit.6.2.2016]. Dostupný na WWW:
<http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>
- [2] HAMMACK, Bill., Steve KRANZ, Bruce CANPERTER. *Albert Michelson's Harmonic analyzer.*, 2014. ISBN-13: 978-0-9839661-7-3
- [3] ŠKORPÍK, J. [online]. [cit. 17.1.2016]. Dostupný na WWW:
<http://www.transformacni-technologie.cz/lopatkovy-stroj.html>
- [4] Odborný časopis Elektro 1,2/2006: Vývoj názorů na podstatu elektřiny,
FCC PUBLIC s. r. o., Praha 2006
- [5] HOLOTA, R. [online]. [cit. 15.1.2016]. Dostupný na WWW:
<http://home.zcu.cz/~holota5/publ/nectiny3.pdf>