

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

## Disertační práce

*srpen, 2016*

*Ing. Václav Turoň*



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ  
KATEDRA TEORIE OBVODŮ

*Popis metod spektrální analýzy  
založené na Zolotarevových  
polynomech*

Disertační práce

*Ing. Václav Turoň*

Praha, srpen 2016

Doktorský studijní program: *Elektrotechnika a informatika*  
Studijní obor: *Teoretická elektrotechnika*

**Školitel:** *Prof. Ing. Pavel Souka, CSc.*  
**Školitel specialista:** *Prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.*



## Abstrakt

Hlavním tématem této práce je nová časově-frekvenční transformace, kterou je aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace (ADZT), jejíž báze je tvořena aproximovanými symetrickými Zolotarevovy polynomy prvního a druhého druhu. Díky těmto polynomům dosahuje ADZT vysoké časové a frekvenční selektivity, jenž vede na velmi dobrou časovou lokalizaci nestacionarity analyzovaného signálu při zachování dobrého frekvenčního rozlišení. Tato transformace byla odvozena pro výpočet Zolotarevova spektra v rámci disertační práce Radima Špetíka, ve které byly rovněž odvozeny Zolotarevovy řady a teoreticky popsána diskrétní Zolotarevova transformace (DZT), nicméně její implementace nebyla provedena.

Tato práce navazuje na disertační práci Radima Špetíka a doplňuje jí jednak o chybějící popis ADZT, systematickou analýzu vlastností ADZT pomocí vybraných tříd signálů a ověření výpočtu Zolotarevova spektra pomocí skalárního součinu analyzovaného signálu a analyzujících bázevých funkcí DZT tvořenou neaproximovanými symetrickými Zolotarevovými polynomy. Tímto ověřením je nalezen vztah mezi aproximovanými a neaproximovanými symetrickými Zolotarevovými polynomy, jenž je využit pro navržení postupu sestavení báze DZT.

Důraz je rovněž kladen na systematický popis chování ADZT. K tomuto účelu jsou použity vhodně zvolené postupy a signály umožňující názorné ilustrování typických vlastností popisovaného chování ADZT, jako je například potlačování spektrálního prosakování nebo popis pulsování energie spektrálních složek. V práci je rovněž diskutována optimální volba parametrů ADZT zahrnující volbu typu a délky okna segmentace, krok segmentace a počtu nul doplněných do segmentu vybraného signálu. Na základě provedených analýz jsou navrženy v práci modifikace ADZT vedoucí ke snížení počtu operací a tím ke snížení celkové výpočetní náročnosti ADZT, tak i modifikace, jenž vedou ke zlepšení časové přesnosti nižších spektrálních složkách analyzovaného signálu.

V neposlední řadě je provedeno porovnání výsledků spektrální analýzy pomocí krátkodobé ADZT s běžně používanými spektrálními metodami a to jak na syntetickém signálu obsahující stacionární a tak i nestacionární části. Porovnání je rovněž ilustrováno na reálném signálu řeči a EKG.



# Abstract

The doctoral thesis deals with a new time-frequency transformation based on approximated discrete Zolotarev polynomials (ADZT). Its basis consists of approximated symmetrical Zolotarev polynomials of the first and the second order. Due the characteristics of these polynomials ADZT achieves a good time and frequency selectivity and it results into the good time localization of non-stationarity parts of the analysed signal without any changes in a frequency resolution. This transform was designed for the purpose of Zolotarev spectra calculation in a doctoral thesis written by Radim Špetík. In that thesis the Zolotarev series was also derived and discrete Zolotarev transform (DZT) was introduced but it has not been implemented yet.

The proposed doctoral thesis goes on Radim Špetík's thesis and it adds a missing description of ADZT, systematical analysis of its properties by using the selected types of signals and verifies the calculation of Zolotarev spectra by the inner product of signal and functions of analysing DZT basis which is composed of symmetrical Zolotarev polynomials. The new relation between approximated and non approximated symmetrical Zolotarev polynomials is found by this verification and it is used for the method of DZT basis creation.

The main part of this thesis is focused on description of ADZZ behaviour. The several conveniently methods are designed. By using of selected signals the typical properties of ADZT behaviour are described such as the capability of ADZT to efficiently suppress spectral leakage or pulsing of spectral component energy. The thesis also discuss the optimal choice of ADZT parameters including the type and the length of segmentation window, the step of segmentation and the number of leading and trailing zeros added into the signal segment. Based on the proceed analysis the modifications of ADZT are proposed. The first modification decreases the number of operation of Zolotarev spectra calculation which leads to the lower complexity. The second modification improves the time localization of non-stationary parts of analysed signal.

The last but not least the comparison of spectral analysis by short-time ADZT to common used spectral methods is done. For this purpose the synthetic signal including the stationary and non-stationary parts is used. The comparison is also illustrated for the real signal such as speech or EKG.





## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a že jsem důsledně citoval použitou literaturu. Nemám námitky proti půjčování nebo zveřejňování této disertační práce.

V Praze, dne 30.8.2016

Ing. Václav Turoň



## Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé disertační práce prof. Ing. Pavlovi Sovkovi CSc. za jeho pomoc a cenné rady během mé výzkumné činnosti vedoucí k sepsání této práce. Rovněž bych rád poděkoval prof. RNDr. Miroslavu Vlčkovi, DrSc. a Ing. Radimu Špetíkovi, Ph.D. za jejich rady a komentáře. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům za podporu a trpělivost během studia, výzkumu a psaní této práce.



# Obsah

Seznam obrázků . . . . .	xv
Seznam tabulek . . . . .	xxiii
Seznam zkratek . . . . .	xxv
<b>1 Úvod . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2 Rešerše spektrálních metod - stav problematiky . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) . . . . .	3
2.2 Krátkodobá diskrétní Fourierova transformace (STDFT) . . . . .	4
2.3 Metoda minimální energie spektrálního prosakování (MESP) . . . . .	5
2.4 Metoda odhadu okamžité frekvence (MOOF) . . . . .	7
2.5 Aproximovaná Diskrétní Zolotareva transformace (ADZT) . . . . .	7
2.6 Krátkodobá aproximovaná diskrétní Zolotareva transformace (STADZT) . . . . .	10
2.7 Wigner-Villova distribuce (WVD) . . . . .	11
2.8 Vlnková transformace (WT) . . . . .	12
2.9 Hilbert-Huangova transformace (HHT) . . . . .	13
2.10 Shrnutí . . . . .	14
<b>3 Cíle práce . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>4 Systematický popis ADZT . . . . .</b>	<b>17</b>
4.1 Alternativní odvození ADZT . . . . .	17
4.2 Popis ADZT . . . . .	19
4.2.1 Postup výpočtu ADZT algoritmu . . . . .	19
4.2.2 Implementovaný postup výpočtu ADZT algoritmu . . . . .	23
4.2.3 Popis sestavení $\mathbf{Z}$ matice . . . . .	26
4.3 Báze ADZT . . . . .	29
4.4 Výstupy ADZT . . . . .	36
4.4.1 Zolotarevovo spektrum . . . . .	36
4.4.2 Zologram . . . . .	36
4.4.3 k-gram . . . . .	37
4.4.4 m-gram . . . . .	37
4.4.5 $\mathbf{Z}$ matice . . . . .	37
4.5 Shrnutí . . . . .	39
<b>5 Signály a kritéria použitá při hodnocení a optimalizaci ADZT . . . . .</b>	<b>41</b>
5.1 Výběr signálů . . . . .	41
5.2 Kvalitativní kritérium . . . . .	43
5.3 Kvantitativní kritérium . . . . .	43
<b>6 Analýza chování ADZT algoritmu . . . . .</b>	<b>45</b>

6.1	Popis chování algoritmu na dvou spektrálních složkách . . . . .	45
6.2	Potlačení spektrálního prosakování . . . . .	48
6.3	Detekce okamžité obálky . . . . .	48
6.4	Vliv velikosti šířky pásma . . . . .	56
6.5	Poloha pulsu v segmentu . . . . .	62
6.6	Mapování průchodů algoritmem ADZT . . . . .	67
6.7	Analýza signálů se změnou frekvence a fáze . . . . .	72
6.8	Analýza signálu se změnou amplitudy . . . . .	74
6.9	Analýza signálu se šumem . . . . .	77
6.10	Citlivost ADZT na úpravy $\mathbf{Z}$ matice . . . . .	81
6.11	Ilustrace výpočetní náročnosti algoritmu . . . . .	83
6.12	Shrnutí . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Optimalizace parametrů ADZT . . . . .</b>	<b>85</b>
7.1	Tvar okna . . . . .	85
7.2	Délka okna . . . . .	87
7.3	Posun okna . . . . .	90
7.4	Interpolace signálu . . . . .	92
7.5	Shrnutí . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Modifikace ADZT algoritmu . . . . .</b>	<b>95</b>
8.1	Fixace šířky pásma . . . . .	95
8.1.1	Fixní šířka pásma pro všechny spektrální složky . . . . .	95
8.1.2	Maximální šířka pásma . . . . .	96
8.1.3	Minimální šířka pásma . . . . .	96
8.2	Změna masky ADZT (prohledávání v obou směrech) . . . . .	98
8.2.1	Původní maska ADZT (prohledávání zdola) . . . . .	98
8.2.2	Upravená maska ADZT (prohledávání shora) . . . . .	98
8.2.3	Sloučení výsledků z dvou spektrálních masek (sloučení směrů) . . . . .	99
8.3	Symetrická ADZT (cyklické konvoluce) . . . . .	99
8.4	Prohledání celého spektra . . . . .	101
8.5	Výpočetní náročnost modifikovaných ADZT . . . . .	102
8.6	Shrnutí . . . . .	102
<b>9</b>	<b>Porovnání vybraných spektrálních metod . . . . .</b>	<b>105</b>
9.1	Porovnání DFT x ADZT . . . . .	105
9.2	Porovnání STFT x MESP x STADZT . . . . .	105
9.3	Porovnání STADZT x STADZTP . . . . .	110
9.4	Porovnání STADZT x STDFT x CWT x CWD x HHT . . . . .	113
9.5	Shrnutí . . . . .	118
<b>10</b>	<b>Ověření výpočtu DZT spektra . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>11</b>	<b>Závěr . . . . .</b>	<b>127</b>

11.1 Splnění cílů práce . . . . .	127
11.2 Vlastní přínos práce . . . . .	128
<b>Reference . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>Seznam prací disertanta vztahujících se k disertaci . . . . .</b>	<b>135</b>





## Seznam obrázků

1	Naznačení časově-frekvenčního rozlišení DWT (a), SDTFT (b) a STADZT (c).	13
2	Spektrální maska ADZT transformace pro výpočet Zolotarevova spektra odpovídá aproximovanému spektru Zolotarevova polynomu prvního a druhého druhu. . . . .	20
3	Vývojový diagram výpočtu Zolotarevova spektra pomocí ADZT algoritmu .	25
4	Porovnání neaproximovaných a aproximovaných Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu. První řádek zobrazuje neaproximované ZP (a, b) a druhý řádek zobrazuje aproximované ZP (c, d). V levém sloupci jsou ukázány ZP prvního řádu tzv. $z\cos$ (a, c) a v pravém sloupci jsou ZP druhého řádu tzv. $z\sin$ (b, d). . . . .	29
5	Rozklad neaproximovaného Zolotarevova polynomu prvního druhu (a) řádu $l = 10$ a $w_p = 0.1$ na stacionární (c) a nestacionární (e) část. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra rozloženého ZP (a-b, c-d, e-f). . . . .	30
6	Porovnání neaproximované a aproximované Zolotarevovy báze DZT a ADZT: a) Reálná část neaproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ , b) Imaginární část neaproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ , c) Reálná část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ a šířky pásma $m = p$ a indexu nestacionarity $k$ , d) Imaginární část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ , šířky pásma $m = p$ a indexu nestacionarity $k$ , e) Reálná část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ , šířky pásma $m = 5$ a indexu nestacionarity $k$ , f) Imaginární část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu $p$ , šířky pásma $m = 4$ a indexu nestacionarity $k$ . . . . .	31
7	Ukázka analyzujících a syntetizujících bazových polynomů ADZT pro 12. až 15. spektrální složku sudého reálného signálu. Proto je na obrázku zobrazena pouze reálná část spektra. a) Amplitudové Zolotarevovo spektrum, b) analyzující polynomy jsou v levé části a jsou pro všechny spektrální indexy nenulové, c) syntetizující polynomy jsou v pravé části a tyto polynomy jsou nulové pro všechny spektrální indexy kromě 13. a 15. indexu. . . . .	33
8	Ukázka reálné části analyzující báze ADZT pro signál $s_1$ složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí $f_1 = 10.5f_s/N$ a $f_2 = 20.5f_s/N$ frekvenci. Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p). . . . .	34
9	Ukázka imaginární části analyzující báze ADZT pro signál $s_1$ složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí $f_1 = 10.5f_s/N$ a $f_2 = 20.5f_s/N$ frekvenci. Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p). . . . .	34
10	Ukázka reálné části analyzující báze ADZT pro signál $s_1$ složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí $f_1 = 7.1f_s/N$ a $f_2 = 12.9f_s/N$ . Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p). . . . .	35
11	Ukázka imaginární části analyzující báze ADZT pro signál $s_1$ složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí $f_1 = 7.1f_s/N$ a $f_2 = 12.9f_s/N$ . Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p). . . . .	35

12	Ukázka zologramu (a) jednotkového impulsu vytvořeného obdélníkovým oknem délky 256 s posunem o 1 vzorek zobrazené s m-gramem (b) a k-gramem (d). Průměrné velikosti šířky pásma $m$ (c) a indexu nestacionarity $k$ (e) jsou spočteny vzhledem k ose času. . . . .	38
13	Ukázka průběhu euklidovské normy matice $\mathbf{Z}$ pro harmonický signál (a) a jednotkový impuls $b$ . Odpovídající zologramy jsou vytvořeny obdélníkovým oknem délkou $N$ a krokem segmentace o jeden vzorek (c) a (d). Odpovídající průběhy euklidovské normy jsou zobrazeny na (e) a (f). . . . .	40
14	Signál pro výběr optimálních parametrů ADZT složený ze dvou harmonických složek spolu a jednotkového impulsu (a). Signál pro testování vlastností ADZT a jejich modifikací (b) obsahující sms dvou harmonických signálů, jednotkový a Gaussův impuls.. . . .	43
15	Ideální spektra signálu pro výběr optimálních parametrů ADZT (a) a testování jejích vlastností (b). . . . .	44
16	Obrázky na prvních třech řádcích zobrazují DFT spektrum signálu tvořeného ze dvou spektrálních složek, poslední řádek zobrazuje aplikované ADZT masky pro stanovené parametry ADZT. . . . .	47
17	Spektrum DFT (a, b) a ADZT (c, d) harmonického signálu, který není ortogonální na báze polynomy DFT a tím vzniká spektrální prosakování . . .	49
18	Průběh signálu složeného ze dvou harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí $f_1 = 32f_s/N$ a $f_2 = 36f_s/N$ s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrální složky odpovídající $f_2$ (c). 51	51
19	Průběh signálu složeného ze dvou harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí $f_1 = 16f_s/N$ a $f_2 = 32f_s/N$ s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrální složky odpovídající $f_1$ (c). 52	52
20	Průběh signálu složeného ze tří harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí $f_1 = 32f_s/N$ , $f_2 = 36f_s/N$ a $f_3 = 48f_s/N$ s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrálních složek odpovídající $f_1$ a $f_2$ (c).. . . . .	54
21	Průběh signálu složeného ze tří harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí $f_1 = 32f_s/N$ , $f_2 = 36f_s/N$ a $f_3 = 48f_s/N$ s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrálních složek odpovídající $f_1$ a $f_2$ (c).. . . . .	55
22	Princip dosažení maximální přesnosti lokalizace v čase a frekvenci. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy obdélníkového okna $w[n]$ (a), sinusového signálu $x[n]$ (c) a jednotkového impulsu $d[n]$ (e). V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části a spektrum obdélníkového okna $W[l]$ (b), sinusového signálu $X[l]$ (d) a jednotkového impulsu $D[l]$ (f). 57	57

23	Princip zhoršování časové přesnosti bázových polynomů symetrickým nulováním spektrálních složek ve směru od nejnižší spektrální složky po nejvyšší. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotkového impulsu $d[n]$ (a) a signálu vytvořených vynulováním prvních šesti $d_6[n]$ (b) a čtrnácti $d_{14}[n]$ (c) spektrálních složek. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části $D[l]$ (b), $D_6[l]$ (d) a $D_{14}[l]$ (f). . . . .	58
24	Princip zhoršování časové přesnosti bázových polynomů symetrickým nulováním spektrálních složek ve směru od nejvyšší spektrální složky po nejnižší. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotkového impulsu $d[n]$ (a) a signálů vytvořených vynulováním posledních čtyř $d_{-4}[n]$ (b) a dvanácti $d_{-12}[n]$ (c) spektrálních složek. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části $D[l]$ (b), $D_{-4}[l]$ (d) a $D_{-12}[l]$ (f). . . . .	59
25	Princip nastavování časové a frekvenční přesnosti ADZT. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotlivých bázových polynomů. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části, kde velikost stacionární části je rovna velikosti jednotlivých spektrálních složek nestacionární části, proto jsou všechny spektrální složky rovny $\pm 1$ . . . . .	61
26	Časová lokalizace jednotkového impulsu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. . . . .	63
27	Vliv polohy jednotkového impulsu na Zolotarevovo spektrum. První řádek (a) ukazuje vybrané polohy jednotkového impulsu v segmentu a to postupně pro polohy 1, 12, 28 a 32. Těmto signálům odpovídají jednotlivá Zolotarevova spektra na druhém řádku (b). . . . .	64
28	Počet spektrálních čar v závislosti na poloze jednotkového impulsu v segmentu signálu pro různé délky segmentu: 64 (a), 128 (b), 256 (c). . . . .	65
29	Časová lokalizace dvou jednotkových impulsů (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Jednotkové pulsy jsou od sebe vzdáleny na délku okna segmentace, tj. 64. . . . .	66
30	Časová lokalizace dvou jednotkových impulsů (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Vzdálenost jednotkových impulsů je v tomto případě kratší než je délka okna segmentace, v tomto případě 32 vzorků. . . . .	66
31	Spektrogram (a) a zologram (b) složený ze dvou harmonických signálů s jednotkovou amplitudou a frekvencí $f_1 = 16f_s/N$ a $f_2 = 25.5f_s/N$ a jednotkovým skokem. Mapy průchodů výpočtu ADZT reálné (c) a imaginární (d) části spektra. . . . .	69
32	Histogram průchodů výpočtu ADZT reálné (a) a imaginární (b) části spektra odpovídající zologramu na Obr.31b. Barevná škála jednotlivých sloupců představuje časový index zologramu (viz colorbar) . . . . .	70

33	Mapy průchodů výpočtů ADZT reálné a imaginární části bez použití prahování (a, b) hodnot vstupního DFT spektra do algoritmu ADZT a jeho použití (c, d). Modrá barva odpovídá 1. způsobu výpočtu, žlutá barva odpovídá 2. způsobu a červená barva odpovídá 3. způsobu. . . . .	71
34	Spektrální analýza signálu se skokovou změnou frekvence pomocí úzkopásmového STDFT (a), širokopásmového STDFT (b) a STADZT (c), signálu s postupně rozmítanou frekvencí STDFT (d), širokopásmového STDFT (e) a STADZT (f) a signálu se skokově změněnou fází postupně rozmítanou frekvencí STDFT (g), širokopásmového STDFT (h) a STADZT (i). Zologramy byly vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 128 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Úzkopásmové spektrogramy byly vytvořeny oknem délky 32 vzorků a širokopásmové spektrogramy oknem délky 256 vzorků. . . . .	73
35	Analýza tlumeného harmonického signálu dle vztahu (70) pro různou počáteční hodnotu $A$ - $A = 0.97$ (a), $A = 0.91$ (d) a $A = 0.86$ (g). Odpovídající spektrogramy (b, e, h) a zologramy (c, e, i) jsou vytvořené pomocí segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Pro spektrogramy je použito Hammingovo váhovací okno a zologramy zase pravoúhlé. Poslední řádek obrázku ilustruje průběh euklidovské normy matice $\mathbf{Z}$ . . . . .	76
36	Detekce signálu v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d). . . . .	79
37	Detekce signálu s prosakováním v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d). . . . .	79
38	Marginalizace spekter detekce signálu v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d). . . . .	80
39	Marginalizace spekter detekce signálu s prosakováním v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d). . . . .	80
40	Závislost výpočetní náročnosti (doba výpočtu) na délce segmentu - modrý průběh odpovídá FFT výpočtu a červený průběh odpovídá ADZT. . . . .	83
41	Vliv typu okna na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového (a), Hammingovo (b), Hannovo (c) a Blackmanovo (d) okna délky 128, krokem segmentace o 1 vzorek a spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového (e), Hammingovo (f), Hannovo (g) a Blackmanovo (h) okna délky 128, krokem segmentace o 1 vzorek . . . . .	86
42	Vliv délky okna na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 64 (a), 128 (b), 256 (c) a 512 (d) vzorků s krokem segmentace o 1 vzorek a spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 64 (e), 128 (f), 256 (g) a 512 (h) vzorků s krokem segmentace o 1 vzorek. . . . .	88

43	Volba optimální délky okna. Modrý průběh odpovídá době výpočtu Zolotarevova spektra s danou délkou okna segmentace a zelený průběh odpovídá logaritmické spektrální vzdálenosti. Optimální hodnota délky okna odpovídá průsečíku těchto průběhů. . . . .	89
44	Vliv kroku segmentace na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 256 a krokem segmentace 1 (a), 8 (b), 32 (c) a 64 (d) vzorků a na spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 256 s krokem segmentace 1 (e), 8 (f), 32 (g) a 64 (h) vzorků. . . . .	91
45	Vliv interpolace DFT spektra na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 256 a krokem segmentace o jeden vzorek a doplněním na 1x (a), 1.5x (b), 2x (c) a 2.5x (d) násobek své délky a na spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 256 s krokem segmentace o jeden vzorek a doplněním na 1x (e), 1.5x (f), 2x (g) a 2.5x (h) násobek své délky. . . . .	93
46	Princip nastavování šířky pásma zobrazený na pravé horní čtvrtině Z matice a to pro adaptivní nastavování šířky pásma $m$ podle původního ADZT algoritmu (a) a pro fixní nastavení na maximální šířku pásma $m = l$ (b), $m = konst.$ (c) a $m = 0$ (d). . . . .	96
47	Porovnání modifikovaných algoritmů pomocí fixace šířky pásma $m$ . Zologramy byly vytvořené pomocí obdélníkového okna segmentace délky 128 vzorků s krokem o jeden vzorek a s adaptivním nastavením šířky pásma $m$ dle původního ADZT (a) a fixního nastavení na maximální šířku pásma $m = l$ (b), konstantní hodnotu $m = 1$ (c) a minimální hodnotu $m = 0$ (d). . . . .	97
48	Modifikace STADZT založena na různém způsobu prohledávání DFT spektra a jejich sloučení. Zobrazené zologramy byly vytvořeny pomocí obdélníkového okna délky 128 a segmentačním krokem o jeden vzorek a původním algoritmem s prohledáváním zdola (a), modifikovaným algoritmem s prohledáváním shora (b), součtem zologramů vytvořenými oběma směry prohledávání (c), spojením vybraných polovin spektra s vyšším (d) a nižším (e) časovým rozlišením. . . . .	100
49	Princip hledání optimální šířky pásma ADZT algoritmem pracující se vstupním DFT spektrem pro původní ADZT (a), pro navrženou ADZTS pracující se symetrií spektra (b) a pro navrženou ADZTP pracující s periodicitou spektra (c). . . . .	102
50	Zologram signálu vytvořený pomocí obdélníkového okna délky 128 a krokem segmentace o jeden vzorek a pomocí původní ADZT (a), navržené ADZTS (b) a navržené ADZTP (c). . . . .	103
51	Výpočetní náročnost modifikovaných ADZT popsaných v kapitolách 8.1, 8.3 a 8.4. . . . .	104
52	Porovnání spektrogramů vytvořených z testovacího signálu (a) s ideálním spektrogramem (b). Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek pomocí STDFT (c), MESP (d) a STADZT (e). . . . .	108

53	Průběh logaritmické spektrální vzdálenosti spektrogramů od ideálního spektrogramu. Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STDFT (modrá křivka), MESP (červená křivka) a STADZT (modrá křivka). . . . .	109
54	Porovnání spektrogramů vytvořených z testovacího signálu (a) s ideálním spektrogramem (b). Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 a symetricky doplněným nulami na 768 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STADZT (c), STADZTP (d). . . . .	111
55	Průběh logaritmické spektrální vzdálenosti spektrogramů od ideálního spektrogramu. Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků a symetricky doplněným nulami na 768 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STADZT (červená křivka) a STADZTP (zelená křivka). . .	112
56	Porovnání výsledků spektrální analýzy testovacího signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 16 - 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 128 a doplněném o 0 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT. . .	115
57	Porovnání výsledků spektrální analýzy EKG signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 64 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 8 - 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 128 a symetricky doplněném o 384 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT.	116
58	Porovnání výsledků spektrální analýzy řečového signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 128 s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 16 - 256 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 256 a symetricky doplněném o 64 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT.	117
59	Ověření výpočtu ADZT spektra. Analyzovaný signál je složen ze dvou sinusových signálů délky $N = 32$ s frekvencí $f_1 = 10.5f_s/N$ a $f_2 = 20.5f_s/N$ : Jednotlivé obrázky zobrazují DFT spektrum analyzovaného signálu (a), ADZT spektrum vypočtené vztahem (21) (b - modrý průběh) a podle vztahu (81) (b - červený) a rozdíl absolutních ADZT spekter (c). . . . .	121
60	Ověření výpočtu DZT spektra pomocí skalárního součinu analyzovaného signálu s bázovými polynomy DZT. Analyzovaný signál je složen ze dvou sinusových signálů délky $N = 32$ s frekvencí $f_1 = 10.5f_s/N$ a $f_2 = 20.5f_s/N$ : Jednotlivé obrázky zobrazují DFT spektrum analyzovaného signálu (a), ADZT spektrum vypočtené vztahem (21) (b - modrý průběh), DZT spektrum vypočtené vztahem (81) za použití neaproximovaných Zolotarevových polynomů tvořící bázi DZT (b - červený) a rozdíl absolutních hodnot ADZT spekter. .	124

61	Porovnání průběhů indexu nestacionarity $k_0$ vypočtené ADZT (modrý průběh) a šířky laloku $w_p$ stanovených pomocí korelační analýzy (červený průběh) a to pro reálnou (a) a imaginární (b) část spektra zvlášť. . . . .	125
----	---	-----





## Seznam tabulek

1	Tabulka obsahuje dílčí výsledky výpočtu ADZT pro varianty uvedené na obrázku 16. . . . .	47
2	Tabulka obsahuje dílčí výsledky výpočtu ADZT pro variant a obrázku 17. . . . .	49
3	Tabulka obsahuje hodnoty střední kvadratické chyby rekonstruovaného řečového signálu délky 1024 vzorků při $f_s = 8000Hz$ a za použití kvantované matice $Z$ . . . . .	82
4	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ zologramů vytvořených pomocí STADZT a STADZTP (viz Obr.52) od ideálního spektrogramu testovacího signálu. . . . .	83
5	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různých typů váhovacího okna (viz Obr.41). . . . .	87
6	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různě dlouhého okna segmentace (viz Obr.42). . . . .	89
7	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různého kroku segmentace (viz Obr.44) pro délku okna 128 vzorků. . . . .	90
8	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí segmentu s doplněnými nulami (viz Obr.45). . . . .	92
9	Tabulka obsahuje průměrnou spektrální vzdálenost spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různých typů váhovacího okna (viz Obr.41). . . . .	101
10	Tabulka obsahuje průměrnou spektrální vzdálenost spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí vybraných spektrálních metod (viz Obr.52) od ideálního spektrogramu testovacího signálu. . . . .	106
11	Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti $LSD$ zologramů vytvořených pomocí STADZT a STADZTP (viz Obr.52) od ideálního spektrogramu testovacího signálu. . . . .	111
12	Přehled ověření, zpřesnění a vyvrácení stanovených hypotéz. . . . .	127



## Seznam zkratek

Zkratka	Význam
ADZT	Aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace
ADZTP	Periodická Aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace
ADZTS	Symetrická Aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace
AZP	Aproximované Zolotarevovy polynomy
CWD	Choi-Williamova Distribuce
CWT	Spojité vlnková transformace (z anglického názvu Continues Wavelet Transform)
DFT	Diskrétní Fourierova transformace
DTFT	Fourierova transformace diskrétní v čase
DWT	Diskrétní vlnková transformace (z anglického názvu Discrete Time Fourier Transform)
DZT	Diskrétní Zolotarevova transformace
FFT	Rychlá Fourierova transformace (z anglického názvu Fast Fourier Transform)
FT	Fourierova transformace
HHT	Hilber-Huangova transformace
LSD	Logaritmická spektrální vzdálenost (z anglického názvu Logarithmic Spectral Distance)
MESP	Krátkodobá DFT s adaptivním nastavením délky okna pomocí kritéria minimální energie spektrálního prosakování
MSE	Střední kvadratická chyba (z anglického názvu Mean Squared Error)
STADZT	Krátkodobá aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace (z anglického názvu Short-Time Approximated Discrete Zolotarev Transform)
STADZTP	Krátkodobá aproximovaná periodická diskrétní Zolotarevova transformace (z anglického názvu Short-Time Periodical Approximated Discrete Zolotarev Transform)
STADZTS	Krátkodobá aproximovaná symetrická diskrétní Zolotarevova transformace (z anglického názvu Short-Time Symmetrical Approximated Discrete Zolotarev Transform)
STDFT	Krátkodobá diskrétní Fourierova transformace (z anglického názvu Short-Time Discrete Fourier Transform)
WT	Vlnková transformace (z anglického názvu Wavelet Transform)
WVD	Wigner-Villova Distribuce

<b>Zkratka</b>	<b>Význam</b>
ZP	Zolotarevovy polynomy
ZT	Zolotarevova transformace
IMF	Vlastní modální funkce

# 1 Úvod

Zpracování signálů patří v dnešní době mezi vědeckotechnické disciplíny, které jsou nedílnou součástí našeho života, i když si to mnohdy ani neuvědomujeme. Typickým příkladem, kde je využito zpracování signálů je například automobil. Ten je doslova plný různých senzorů a zařízení, které generují signály nesoucí informace stavu a chodu motoru, trajektorii vozidla, rychlosti automobilu a jeho vzdálenosti vůči okolním účastníkům silničního provozu, poloze vozidla, bdělosti řidiče, a mnoho dalšího. Mezi další typy signálů, které mají velké zastoupení během zpracování signálů patří biologické signály, audio a video data. Všechny tyto signály nesou nějakou informaci, která musí být nejprve vyextrahována a zpracována a pak může být následně vyhodnocena. Obecně lze říci, že zpracování signálů je velmi komplexní obor, který se zabývá reprezentací, analýzou, syntézou a modifikací různých typů signálů. Mezi hlavní činnosti zpracování signálů patří jejich filtrování, modulace, úprava, redukce šumu, spektrální a časová analýza, komprese a další.

Tato práce se zabývá spektrální analýzou signálů pomocí nové časově-frekvenční metody, kterou je aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace (ADZT). Tato transformace byla navržena Radimem Špetíkem v rámci jeho disertační práce [1] během jeho doktorského studia na Katedře teorie obvodů na Elektrotechnické fakultě Českého vysokého učení technického v Praze.

Důvodem vzniku této práce je velký potenciál, který má ADZT na poli spektrální analýzy signálů, kde dosahuje vysoké přesnosti časové lokalizace nestacionarity signálu při zachování dobrého frekvenčního rozlišení. Další motivací pro vznik této práce je skutečnost, že doposud nebylo nikde provedeno ani publikováno systematické popsání této transformace a jejího chování při spektrální analýze signálů. Proto si tato práce klade za cíl tuto mezeru vyplnit a poprvé uvést úplný a přesný popis ADZT, který nebyl v této šíři nikde zveřejněn. Zároveň s tím tato práce doplňuje tento komplexní popis o porovnání ADZT s běžně používanými spektrálními metodami a ověřuje některé vlastnosti Zolotarevových polynomů, které ADZT využívá, a navrhuje modifikace vedoucí k jejímu vylepšení.

Práce je rozvržena do několika kapitol. V úvodní části práce (stav řešené problematiky - kapitola 2) jsou popsány běžně používané metody spektrální analýzy. Po definování cílů práce v kapitole 3 na základě studia stavu problematiky je v kapitole 4) systematicky popsána ADZT a její výpočet pomocí ADZT algoritmu. V této části je rovněž uvedena alternativní interpretace ADZT a ilustrována ADZT báze tvořená aproximovanými symetrickými Zolotarevovými polynomy, která je porovnána s neaproximovanými verzemi těchto polynomů. V následující kapitole 5 jsou navrženy signály a kritéria, která jsou využita při hodnocení výsledků ADZT a optimalizaci jejích parametrů, jenž je diskutováno v kapitole 7), kde jsou též navrženy optimální hodnoty parametrů ADZT pro spektrální analýzu signálů využívající spektrogramy. V kapitole 6 se práce zabývá popisem chování ADZT na typických signálech a detailně popisuje některé její vlastnosti jako je schopnost detekce okamžité obálky analyzovaného signálu nebo vliv šířky pásma bázových polynomů na časovou lokalizaci nestacionarity signálu. Kapitola 8 se zaměřuje na návrh modifikací ADZT vedoucí k získání lepších

vlastností spektrální analýzy jako například lepší přesnosti časové lokalizace náhlých změn analyzovaného signálu a k získání algoritmu výpočtu bazových parametrů ADZT s menším počtem operací. V kapitole 9 věnované porovnání spektrálních metod je ADZT porovnávána s vybranými spektrálními metodami, které jsou popsány v úvodní části práce, a dále pak s modifikovanými ADZT. Kapitola 10 se zaměřuje na ověření výpočtu diskretní Zolotarevovy transformace popsané v [1] a navrhuje postup pro určení optimálních parametrů neaproximovaných Zolotarevových polynomů tvořící bázi této transformace. Práce obsahuje vybrané ilustrační obrázky z experimentů a tabulky kvantifikovaného kritéria pro porovnávání metod.

## 2 Rešerše spektrálních metod - stav problematiky

Spektrální analýza je jedním z oborů zpracování signálu, který se převážně zabývá transformací signálů mezi časovou a frekvenční doménou. Jedním z hlavních cílů této analýzy je detekovat, pozorovat a případně i extrahovat informace o signálu, které nelze analyzovat v časové doméně. V posledních 70ti letech bylo za tímto účelem navrženo mnoho spektrálních metod, které se v praxi běžně používají. Mezi velmi rozšířené metody patří Diskrétní Fourierova transformace (DFT) a její krátkodobá varianta (STDFFT), Vlnková transformace (WT) a její diskrétní podoba (DWT), Hilbert-Huangova transformace (HHT), Wigner-Villova distribuce (WVD), Analýza hlavních komponent (PCA) a v neposlední řadě Aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace (ADZT) a její krátkodobá varianta (STADZT). Rešerše stavu spektrálních metod této práce si klade za cíl zmapovat převážně metody spektrální analýzy, které jsou založeny nebo využívají DFT. Důvodem pro toto omezení je skutečnost, že tématem této práce je systematický popis ADZT, která vychází právě z principu DFT. Pro ucelení přehledu nejvíce používaných spektrálních metod jsou ostatní metody v této rešerši pouze velmi stručně popsány a jejich detailnější popis lze najít v příslušné literatuře, která je uvedena v jednotlivých kapitolách.

### 2.1 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Mezi nejvíce rozšířené transformace, které se používají pro spektrální analýzu signálů, patří Diskrétní Fourierova transformace (DFT), jejíž modifikace jsou rovněž využity v dalších spektrálních metodách [11], [15], [16] nebo [21]. Samotná DFT vyjadřuje vztah mezi časovou a frekvenční doménou podle následujícího vztahu [8]

$$S(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n) \cdot \exp\left(\frac{-j2\pi nl}{N}\right), \quad l = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (1)$$

kde  $s(n)$  je vstupní diskrétní signál o dané délce  $N$ ,  $n$  označuje index vzorku signálu a  $l$  je index spektrální složky [2]. Komplexní exponenciála  $\exp\left(\frac{-j2\pi nl}{N}\right)$  tvoří bázi DFT. Výsledkem DFT je spektrum, které je složeno ze spektrálních koeficientů  $S(l)$  a představuje frekvence, které obsahuje vstupní analyzovaný signál. Více podrobností lze nalézt v [4]. Vztah (1) lze pomocí maticového zápisu přepsat do tvaru

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{s}, \quad (2)$$

kde  $\mathbf{S}$  je sloupcová matice obsahující jednotlivé spektrální složky,  $\mathbf{s}$  je vstupní signál a

matice  $\mathbf{W}(n)$  obsahuje bázové funkce DFT

$$\mathbf{W} = \left[ \exp\left(\frac{-j2\pi 0n}{N}\right), \exp\left(\frac{-j2\pi 1n}{N}\right), \dots, \exp\left(\frac{-j2\pi ln}{N}\right), \right. \\ \left. \exp\left(\frac{-j2\pi(-l)n}{N}\right), \dots, \exp\left(\frac{-j2\pi(-1)n}{N}\right) \right]^T. \quad (3)$$

Pokud je analyzovaný signál stacionární, tedy pokud tento signál neobsahuje žádné změny (jak v časové, tak i frekvenční doméně), je v tomto případě DFT velmi dobrý nástroj pro spektrální analýzu. Obtíže však nastávají v případě nestacionárního signálu, kdy se analyzovaný signál mění v čase, nebo obsahuje náhlou změnu frekvence. DFT není schopna korektně detekovat změnu frekvenční charakteristiky. Z tohoto důvodu bylo navrženo mnoho dalších spektrálních metod, které hůře či lépe dokáží interpretovat rozložení energie signálu mezi časovou a frekvenční doménou (časově-frekvenční doméně). Následující kapitoly popisují spektrální metody, které jsou běžně používány pro časově-frekvenční analýzu stacionárních i nestacionárních signálů.

## 2.2 Krátkodobá diskretní Fourierova transformace (STDFT)

Krátkodobá diskretní Fourierova transformace (STDFT) patří mezi jednu z nejvíce používaných spektrálních metod pro analýzu signálu s měnící se charakteristikou v čase, jako je například řeč, hudba nebo různé biologické a diagnostické signály. Princip STDFT přímo vychází z DFT, která se aplikuje na jednotlivé segmenty analyzovaného signálu s konečnou délkou. Tím se podle následujícího vztahu převede vstupní signál  $s(n)$  do časově-frekvenční domény

$$S(m, l) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)w(n-m) \exp\left(-j\frac{2\pi ln}{N}\right), \quad l, m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4)$$

kde  $w(n)$  je váhovací okno segmentu, které vybírá daný segment signálu s definovanou délkou  $N$ . Pomocí tohoto okna se celý vstupní signál rozdělí na dílčí části a to tak, že toto okno je postupně posouváno s krokem  $m$ . DFT je pak aplikována na každý tento signál zvlášť [5]. Výsledek STDFT je velmi zřetelně vyjádřen spektrogramem, který zobrazuje jednotlivé spektrální koeficienty DFT v časově-frekvenční mřížce. Díky tomu spektrogram, respektive STDFT, nabízí informaci o tom, jaké frekvenční složky analyzovaný signál obsahuje, a kdy a jak se tyto složky mění.

Frekvenční a časové rozlišení STDFT je ovlivňováno parametry jako je délka a tvar segmentačního okna a krok segmentace. Tvar použitého okna ovlivňuje pouze frekvenční rozlišení, tedy spektrální prosakování. Vztah mezi tvarem okna a rozlišením je popsán v [6]. Kritickým parametrem určující jak časové, tak i frekvenční rozlišení STDFT, je délka okna. Tato vlastnost je úzce spojena s Heisenbergovým principem nejistoty dle vztahu [3]



$$B.T_0 = konst., \quad (5)$$

kde  $B$  je ekvivalentní šířka pásma a  $T_0$  odpovídá ekvivalentní délce záznamu.

Jinými slovy tento princip vyjadřuje to, že není možné dosáhnout nejlepšího frekvenčního rozlišení bez jakéhokoliv zhoršení časového rozlišení a obráceně. Z tohoto důvodu se musí při použití STDFT najít kompromis mezi časovým a frekvenčním rozlišením pro každou aplikaci (spektrální analýzu) zvlášť. To vede na dva typy spektrogramů, které představují krajní limity STDFT rozlišení. První typ je úzkopásmový spektrogram, kde STDFT používá dlouhé segmentační okno  $w(n)$  a tím vzniká dle vztahu (4) spektrogram, který má velmi jemné frekvenční rozlišení, ale naopak velmi chabé časové rozlišení. To je dáno tím, že je DFT aplikována na dlouhé segmenty signálu, tak lze časovou změnu signálu zaznamenat pouze s přesností na  $N$  vzorků (délka jednoho segmentu). Druhým typem je širokopásmový spektrogram, který je vytvořen pomocí velmi krátkého segmentačního okna. Touto volbou délky okna se sice dosáhne velmi vysokého časového rozlišení s přesností na  $N$  vzorků, ale na druhou stranu je ztraceno frekvenční rozlišení, protože DFT je počítána pouze pro  $N$  spektrálních hodnot.

Obecně lze říci, že DFT a její krátkodobá varianta STDFT patří mezi velmi rozšířené spektrální metody a to pro její jednoduchou definici, interpretaci, reversibilitu a linearitu. Dalším důvodem pro rozšířenost STDFT je to, že výpočet může být velice efektivně implementován pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT). Existují i další modifikace Fourierovy transformace jako například tzv. Fractional Fourier transform (FRFT), která zobecňuje klasickou FT [21], [22] a [23]. Existuje též řada robustních metod, využívajících parametrické modelování, metodu nejmenších čtverců nebo dekompozici korelační matice na signálový a šumový podprostor. Existují též metody využívající statistiky vyšších řádů. Většinu z těchto metod lze nalézt například v [35], [36], [37] nebo [38]. Nicméně vzhledem k rozsahu a zaměření této práce se těmito metodami práce nebude zabývat, i když některé navržené postupy analýzy byly těmito zdroji inspirovány.

### 2.3 Metoda minimální energie spektrálního prosakování (MESP)

Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, mezi nejrozšířenější spektrální metody patří STDFT, která nabízí jasnou a velmi názornou interpretaci výsledků v podobě spektrogramů. Velkou nevýhodou této transformace je neuspokojivá lokalizace nestacionárních změn signálu z důvodu použití okna s fixní délkou, čímž je ovlivněno frekvenční a časové rozlišení. Z tohoto důvodu bylo během několika posledních let navrženo několik adaptivních metod, které jsou založeny na STDFT, s cílem optimálně nastavovat délku okna a tím zlepšit časové rozlišení STDFT a rovněž i lépe detekovat nestacionaritu signálu. Tyto metody lze nalézt v [11] [15] [16].

Z tohoto výčtu v praxi používaných adaptivních metod byla pro porovnání vybrána metoda, která byla navržena pro analýzu audio signálů, protože dosahovala nejlepších výsledků

časově-frekvenčního rozlišení. Tato metoda volí optimální délku okna segmentace pomocí kritéria založeného na minimalizaci energie spektrálního prosakování (MESP).

Metoda je založena na opakovaném výpočtu DFT s rostoucí délkou okna segmentace. Pomocí vhodného kritéria, v tomto případě pomocí kritéria minimální energie spektrálního prosakování využívající principu minimální délky popisu [13], je vybrána optimální délka okna, která poskytne výsledné spektrum použité ve spektrogramu. Spektrální prosakování vzniká porušením ortogonality mezi analyzovaným signálem a bázovou funkcí transformace (pro STDFT je to komplexní exponenciála) a jeho velikost závisí na vzájemném poměru délky okna a velikostí period složek, ze kterých se signál skládá. Vlastní algoritmus výpočtu optimální délky okna navržený v článku [11] lze rozdělit do několika kroků, které byly pro mou práci realizovány takto:

1. Výpočet spektrogramů  $S_r$  s rozdílnou délkou okna  $N_r = 2^c$ , které je centrované kolem aktuálního vzorku, a s rostoucí délkou se symetricky rozšiřuje do stran. Parametr  $c$  je přirozené číslo z intervalu  $\langle c_{min}, c_{max} \rangle$ . Tak získáme sadu spekter s různým časově-frekvenčním rozlišením z nichž to, které minimalizuje energii prosakování je vybráno do výsledného spektrogramu.
2. Výpočet energie spektrálního prosakování, je realizován podle vztahu [11]

$$L_r(d) = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} N_r i |a_{i,r}|^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_r} N_r |a_{i,r}|^2 + \epsilon}}, \quad (6)$$

kde  $d$  je index segmentu  $r$ -tého spektrogramu s příslušnou délkou okna  $N_r$  a  $a_{i,r}$  označuje  $i$ -tý spektrální koeficient  $d$ -tého segmentu. Koeficienty  $a_{i,r}$  musí být seřazeny sestupně podle velikosti. Výraz (6) představuje první moment distribuce proměnných  $|a_{i,r}|^2$  (čitatel) normovaný celkovou energií signálu (jmenovatel). Volba  $\epsilon > 0$  ve jmenovateli ošetřuje případné dělení nulou.

3. Optimální délka okna STFT je rovna délce okna spektrogramu s nejmenší energií spektrálního prosakování  $L_r$ .
4. Spektrogram s optimálním časově-frekvenčním rozlišením je složen z jednotlivých spekter realizovaných spektrogramů  $S_r(k)$ .

Původní článek [11] nediskutoval vliv použitého tvaru okna na velikost spektrálního prosakování. Z provedených experimentů bylo rozhodnuto použít při implementaci algoritmu Hammingovo okno, které dosahovalo nejlepších výsledků. Jednotlivá spektra  $S_r$  (použitá pro výpočet optimální délky okna v 1. a 2. bodě výše popisovaného algoritmu) jsou tedy realizována Hammingovým oknem a bez doplnění nulovými vzorky. Pro sestavení finálního spektrogramu byla použita interpolovaná spektra o maximálním počtu čar  $2_{max}^c$ . Interpolace spolu s posunem okna o 1 vzorek umožňuje porovnat sestavený spektrogram s výsledkem

ADZT a sledovat chování obou metod s vyloučením vlivu decimace (překryv oken menší než  $N - 1$  vzorků), která je běžně při výpočtu STFT používána.

Výhodou této adaptivní metody je jasný princip výběru délky okna, použití FFT a možnost zpětného převodu signálu z frekvenční oblasti zpět do časové (nutnost mít k dispozici použitou délku okna pro každý segment signálu)

## 2.4 Metoda odhadu okamžité frekvence (MOOF)

Následující adaptivní metoda je rovněž fourierovského typu a snaží se nastavovat délku okna segmentace STDFT pomocí odhadu okamžité frekvence příslušející danému segmentu. Volba optimální délky okna je volena podle kritéria pomocí konfidenčních intervalů odhadu okamžité frekvence [16]. Výpočet volby optimální délky okna je následující. Nejprve se vypočítají spektrogramy analyzovaného signálu s různou délkou okna a po té se odhadne okamžitá frekvence  $\omega_d(lT, N_s)$  podle vztahu

$$\omega_d(lT, N_s) = \frac{\pi}{N_s T} \arg(\max(S_d(l))), \quad (7)$$

kde  $S_d(l)$  je výkonové spektrum příslušného segmentu  $d$ ,  $l$  je spektrální index,  $T$  je vzorkovací perioda a  $N_s$  je počet bodů DFT. Výsledný spektrogram je složen z jednotlivých spekter s různým časově-frekvenčním rozlišením, čehož je dosaženo tím, že se stanoví optimální délka okna podle následující podmínky

$$|\omega_{h_{s-1}}(lT) - \omega_{h_s}(lT)| < 2\kappa(\sigma(h_{s-1}) + \sigma(h_s)), \quad (8)$$

kde  $h_s$  označuje délku okna použitého pro výpočet spektrogramů pomocí STDFT a  $\sigma$  je směrodatná odchylka použitého typu okna. Tato podmínka testuje postupně všechny odhadnuté okamžité frekvence od nejkratšího okna po nejdelší do té doby, dokud je tato podmínka stále platná. Pokud tato podmínka přestane platit je délka okna  $h_{s-1}$  označena jako optimální. Detailnější teoretický popis této adaptivní spektrální metody lze nalézt v [16] a v [18]. Myšlenka použití odhadu okamžité frekvence pro adaptivní nastavení frekvenčního rozlišení může být rovněž aplikována na Wigner-Villovu distribuci, jak je ukázáno v [17].

## 2.5 Aproximovaná Diskrétní Zolotareva transformace (ADZT)

Zolotareva transformace (ZT) je nová časově-frekvenční transformace, která vychází z Fourierovy transformace (FT), čímž vylepšuje některé její vlastnosti. Báze FT je ortogonální a je tvořena komplexní exponenciálou.

$$W_\ell = \exp(i2\pi\ell t) = \cos(2\pi\ell t) + i \sin(2\pi\ell t), \quad \ell \in \mathcal{Z} \quad (9)$$

Bázi ZT tvoří funkce  $z_{\exp}$ , která je složena ze Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu, které jsou odvozeny v disertační práci [1]. Tato báze se na rozdíl od báze FT adaptivně

mění s mírou nestacionarity vstupního signálu.

$$\begin{aligned} z \exp(i2\pi\ell t) &= z \cos(2\pi\ell t) + i z \sin(2\pi\ell t) \\ &= \sum_{\mu=-\ell}^{\ell} a_{2\mu} \cos(2\pi\mu t) + i \sum_{\mu=-\ell}^{\ell} b_{2\mu} \sin(2\pi\mu t), \quad \ell \in \mathcal{Z}, \end{aligned} \quad (10)$$

kde  $a_{2\mu}$  a  $b_{2\mu}$  jsou koeficienty Zolotarevových polynomů [1]. Bázi ZT v komplexním tvaru lze napsat jako

$$Z_{\ell} = z \exp(i2\pi\ell t) = \sum_{\mu=-\ell}^{\ell} c_{2\mu} \exp(i2\pi\mu t), \quad \ell \in \mathcal{Z}, \quad (11)$$

kde  $c_{2\mu}$  jsou koeficienty funkce  $z \exp$  [1].

Frekvenčně omezený signál  $s(t)$  lze vyjádřit pomocí koeficientů Fourierovy řady  $S(\ell)$ , které představují spektrum tohoto signálu

$$s(t) = \sum_{\ell=-N}^N S(\ell) \exp(i2\pi\ell t), \quad t \in \left\langle \frac{-T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right\rangle, \quad (12)$$

kde  $T_0$  je perioda signálu a  $S(\ell)$  obsahuje Fourierovy spektrální koeficienty vypočtené jako skalární součin

$$S(\ell) = \langle \exp(i2\pi\ell t), s(t) \rangle = 0, \quad \forall |\ell| > N \quad (13)$$

Nahradí-li se bázevá funkce FT (9) bázevou funkcí ZT (11), lze potom signál  $s(t)$  vyjádřit pomocí koeficientů Zolotarevovy řady  $S_Z(\ell)$ , které představují Zolotarevovo spektrum

$$s(t) = \sum_{\ell=-N}^N S_Z(\ell) \text{cexp}(i2\pi\ell t), \quad (14)$$

kde  $\text{cexp}(i2\pi\ell t)$  je komplementární funkce k bázevé funkci  $z \exp(i2\pi\ell t)$ . Výpočet spektrálních složek  $S_Z(\ell)$  se provede podle vztahu

$$S_Z(\ell) = \langle z \exp(i2\pi\ell t), s(t) \rangle = 0, \quad \forall \ell > N. \quad (15)$$

Použitím vztahů (11) a (13) lze tento výpočet dále upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} S_Z(\ell) &= \left\langle \sum_{n=-\ell}^{\ell} c_{2n} \exp(2\pi n t), s(t) \right\rangle \\ &= \sum_{n=-\ell}^{\ell} c_{2n} \langle \exp(2\pi n t), s(t) \rangle \\ &= \sum_{n=-\ell}^{\ell} c_{2n} S(n), \end{aligned} \quad (16)$$

který vyjadřuje výpočet  $l$ -té spektrální složky  $Z$ -spektra  $S_Z(l)$  jako vážený součet všech spektrálních složek Fourierova spektra  $S(n)$  do  $\ell$ -tého řádu [1].

Nicméně dosud nebyl odvozen algoritmus pro výpočet koeficientů  $c_{2\mu}$  (viz rovnice (11)), které by umožňovaly výpočet Zolotarevova spektra  $S_Z$  podle vztahu (15). Stěžejním problémem zůstává fakt, že Zolotarevovy polynomy nejsou ortogonální v celém rozsahu definičních hodnot  $\langle 1, 1 \rangle$ . Proto byl v disertační práci [1] navržen algoritmus výpočtu koeficientů  $c_{2\mu}$  pracující ve spektrální oblasti. Jedním z cílů této práce bude experimentální ověření využití identity mezi vztahy (15) a (16) pro výpočet  $S_Z$ .

Od rozkladu signálu do Zolotarevových řad lze díky vlastnostem Zolotarevových polynomů přejít k Diskrétní Zolotarevově transformaci (DZT) stejným způsobem, jako lze přejít od Fourierových řad k Diskrétní Fourierově transformaci (DFT) [1], kdy je spojitá báze funkce FT (9) navzorkována v čase (17) a má  $N$  bodů

$$W_N(\ell, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{i2\pi\ell n}{N}\right). \quad (17)$$

a analyzující báze funkce  $zexp$  řádu  $\ell$  může být stejným způsobem jako (17) přepsána do diskrétní podoby

$$Z_N(\ell, n) = zexp\left(\frac{i2\pi\ell n}{N}\right) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{2m} W_N(m, n). \quad (18)$$

DZT spektrum  $S_Z$  časově omezeného diskrétního signálu  $s[n]$  lze tedy vypočítat podle definičního vztahu DZT jako

$$\begin{aligned} S_Z(\ell) &= \langle Z_N(\ell, n), s[n] \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] Z_N(\ell, n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] zexp\left(\frac{-i2\pi\ell n}{N}\right), \quad \ell, n = 0, 1 \dots N-1. \end{aligned} \quad (19)$$

Tento vztah bude použit pro implementaci výpočtu  $S_Z$  pomocí DZT v časové oblasti a k ověření identity mezi vztahy (15) a (16). Tato identita nebyla pro ZP doposud nikterak ověřena, neboť disertační práce [1] nepoužívá ZP, ale pouze jejich aproximaci a získává koeficienty  $c_{2\mu}$  ve spektrální oblasti. Časově omezený signál  $s[n]$  lze zpětně vyjádřit pomocí inverzní DZT (IDZT) jako

$$s[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} S_Z(\ell) cexp\left(\frac{i2\pi\ell n}{N}\right). \quad (20)$$

Vztah (16) je možné rovněž vyjádřit pomocí maticového zápisu jako

$$\mathbf{S}_Z = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{s}, \quad (21)$$

kde matice  $\mathbf{S}$  obsahuje jednotlivé složky Fourierova spektra řádu  $N$ , matice  $\mathbf{S}_Z$  obsahuje jednotlivé složky Zolotarevova spektra řádu  $N$ , matice  $\mathbf{W}$  obsahuje bázové funkce FT [1] a  $\mathbf{s}$  je vektor analyzovaného signálu.

Matice  $\mathbf{Z}$  má velikost  $N \times N$ , je regulární a obsahuje všechny koeficienty  $c_n$  bázové funkce  $\text{zexp}$  [1]. Vztah (14) pro vyjádření frekvenčně omezeného signálu  $s(t)$  spektrálními složkami Zolotarevova spektra lze zapsat za použití vztahu (21) ve tvaru

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}_C \cdot \mathbf{S}_Z = \mathbf{W} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{S}_Z, \quad (22)$$

kde matice  $\mathbf{W}_C$  obsahuje syntetizující bázové funkce  $\text{cexp}(i2\pi lt)$  [1].

Vzhledem k tomu, že výpočet Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu s optimálními parametry tvořící bázi DZT  $Z_{\ell,N}$ , není možné pro neexistenci stěžejních vlastností Zolotarevových řad realizovat<sup>1</sup>, byla Radimem Špetíkem navržená aproximovaná verze této diskrétní Zolotarevovy transformace (ADZT) a její inverzní tvar (IADZT). Aproximovaná verze transformace využívá faktu, že spektrální složky Zolotarevova spektra  $S_Z$  mohou být vyjádřeny jako vážený součet všech složek Fourierova spektra  $S$  podle vztahu (16), a proto je možné sestavit matici  $\mathbf{Z}$ , která obsahuje parametry aproximovaných Zolotarevových polynomů (AZP) tvořící její bázi. K nalezení optimálních parametrů se snaží ADZT algoritmus minimalizovat Zolotarevovo spektrum  $S_Z$ , což podle [19] vede na maximální korelaci syntetizující báze  $C_{\ell,N}$  se signálem. Pokud není stanoveno jinak, tak se při používání vztahů této kapitoly předpokládá, že se pracuje s AZP, a tudíž s ADZT nebo IADZT.

Výhody této nové transformace jsou v dobré detekci nestacionarity analyzovaného signálu, potlačení spektrálního prosakování a dodatečné informaci o lokálních vlastnostech signálu. Nevýhodou je vyšší výpočetní náročnost.

## 2.6 Krátkodobá aproximovaná diskrétní Zolotareva transformace (STADZT)

Pro spektrální analýzu signálu nestacionárních signálů ve spektrální i časové doméně současně se používá krátkodobá DZT, respektive její aproximovaná verze ADZT (STADZT) která je definována jako

$$S_Z(l, n) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p)w(p-n) \text{zexp}\left(\frac{-i2\pi lp}{N}\right), \quad l, m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

kde  $w(p)$  je okno segmentace o konečné délce  $N$ . Stejně jako u STDFT může být pro segmentaci signálů použit různý tvar okna, ale vzhledem k tomu, že ADZT je adaptivní transformace, která přizpůsobuje svou bázi analyzovanému signálu pomocí jejích koeficientů  $a_{2\mu}$ ,  $b_{2\mu-1}$ , není nutné (a jak je v práci později ukázáno ani účelné), používat jakýkoliv jiný tvar než pravoúhlé okno. STADZT dosahuje oproti STDFT dobrého časového rozlišení při

<sup>1</sup>Např. zmíněný problém s ortogonalitou báze tvořené Zolotarevovými polynomy.

zachování frekvenčního rozlišení, což vede k velmi dobrým výsledkům při analýze nestacionárních signálů. Frekvenční rozlišení ADZT není pro všechny frekvenční složky konstantní jako je tomu u STDFT, ale je závislé na aktuálně analyzovaném signálu.

## 2.7 Wigner-Villova distribuce (WVD)

Kromě spektrálních metod využívajících Fourierovu transformaci existuje celá řada metod, které se velmi často používají v praxi pro analýzu nestacionárních signálů a dosahují velice uspokojivých výsledků. Mezi tyto metody se řadí i Wigner-Villova distribuce (WVD), která využívá autokorelační funkci vstupního signálu. Výsledek WVD je určen distribucí energie analyzovaného signálu v časově-frekvenční doméně a nabízí výborné časové rozlišení [24]. Této vlastnosti je dosaženo tím, že se nepoužívá žádné váhovací okno, které zhoršuje frekvenční rozlišení a zároveň omezuje časové rozlišení jako je tomu u STDFT nebo WT. Výpočet WVD lze provést podle následujícího vztahu [27]

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (24)$$

kde  $z(t)$  je analytický signál a  $z^*(t)$  je k němu komplexně sdružený. Analytický signál  $z(t)$  je ze signálu  $s(t)$  vytvořen pomocí Hilbertovy transformace (HT) jako

$$z(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (25)$$

kde  $P$  označuje hlavní hodnotu integrálu (Cauchy principal value). Frekvenční spektrum analytického signálu je téměř shodné s původním signálem pro frekvence, které jsou kladné a nenulové, v opačném případě je frekvenční spektrum nulové. Tato vlastnost minimalizuje interference (cross-terms), které vznikají mezi každým párem harmonických složek analyzovaného signálu [25]. Při použití analytického signálu klesá počet interferencí z původního počtu  $N(2N - 1)$  na  $N(N - 1)$ , kde  $N$  označuje počet spektrálních složek signálu. Vzniklé interference mohou mít za následek nepřesnou interpretaci výsledků WVD. Omezení těchto interferencí lze dosáhnout některou z modifikací této transformace, které se snaží o potlačení interferencí a tím i o zpřehlednění výsledné distribuce energie v časově-frekvenční doméně.

Jednou z velmi často používaných modifikací se nazývá Smoothed pseudo Wigner-Villova distribuce (PSWVD), která redukuje interference pomocí časového vyhlazovacího okna  $h(m)$  a frekvenčního vyhlazovacího okna  $g(m)$ . Jinými slovy okno  $h(m)$  omezuje délku analyzovaného signálu a funkce  $g(m)$  realizuje filtr typu dolní propust [26]. PSWVD lze tedy definovat jako

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(s - t) z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) ds \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (26)$$

Dalším a velmi efektivním způsobem, jak redukovat interference mezi spektrálními složkami analyzovaného signálu je použití "speciálního jádra distribuce", který si lze představit

jako 2-D filtr typu dolní propusti. Mezi velmi používané "distribuční jádra" patří Choi-Williams funkce [24], [28]. Všechny zmíněné modifikace vedoucí ke snížení interferencí analyzovaného signálu mají stejnou nevýhodu a to, že je omezeno výborné časově-frekvenční rozlišení původní WVD. Další nevýhodou oproti metodám založeným na Fourierově transformaci je nemožnost zpětné transformace analyzovaného signálu. Na druhou stranu WVD nabízí výborné časové rozlišení a netrpí spektrálním prosakováním. Stejně jako u metody DFT lze i zde použít některou z modifikací založenou na optimální volbě délky okna [14] nebo [17].

## 2.8 Vlnková transformace (WT)

Vlnková transformace (WT) patří mezi transformace, které se velmi často využívají pro spektrální analýzu nestacionárních signálů. Princip této transformace využívá míru korelace vstupního signálu s předem definovanou mateřskou vlnkou. Časově frekvenční analýza je realizována posouváním mateřské vlnky v čase a změnou její efektivní šířky (měřítka) - tzv. škálování. Báze WT je tvořena škálovanou mateřskou vlnkou. WT se dále dělí na dvě varianty a to na spojitou vlnkovou transformaci (CWT) a diskrétní vlnkovou transformaci (DWT). Obecně lze napsat vztah pro CWT jako

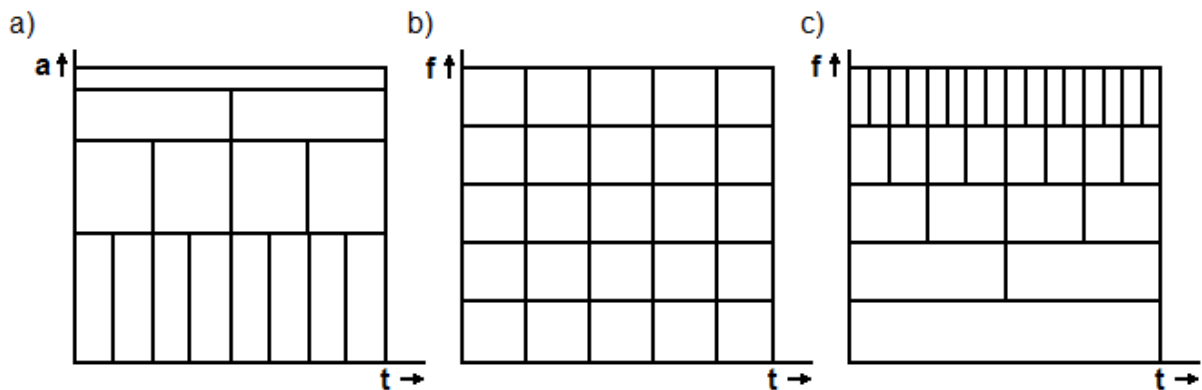
$$W(a, b) = w(a) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (27)$$

kde  $\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$  je posunutá a škálovaná mateřská vlnka, která musí splňovat následující dvě podmínky: (i) energie vlnky musí být konečná a (ii) její střední hodnota se musí rovnat nule. Parametr  $a$  mění měřítko (dilataci) vlnky a parametr  $b$  posouvá vlnku v čase. Váhovací funkce  $w(a)$  garantuje, že energie vlnky je na všech škálách vždy stejná [20].

Výsledek CWT je reprezentován tzv. scalogramem (škálogramem, hladinogramem), který zobrazuje vzájemnou energii mezi bázovou funkcí CWT a analyzovaným signálem v časově-měřítkovém prostoru. Vztah mezi časově-frekvenčním a časově-měřítkovým prostorem musí být stanoven pro každou mateřskou vlnku zvlášť a tento vztah je vyjádřen jako  $a = f_c/f$ , kde  $f_c$  je unikátní frekvence každé mateřské vlnky. Rozlišení výsledného scalogramu je také limitováno principem nejistoty (5), stejně jako je tomu u spektrogramu reprezentující výsledek STDFT. Oproti spektrogramu je frekvenční rozlišení v časové a měřítkové doméně závislé na frekvenčních vlastnostech použité mateřské vlnky a na daném měřítku. Frekvenční rozlišení CWT klesá s rostoucím měřítkem, zatímco časové rozlišení roste. Porovnáním frekvenčního rozlišení CWT a STADZT lze konstatovat, že CWT má stejné frekvenční rozlišení jako STADZT při analýze signálu se silnou nestacionaritou, jako například signál s jednotkovým impulsem. Na Obr.1 jsou pomocí časově-frekvenční mřížky ilustrována jednotlivá frekvenční rozlišení spektrálních metod - STDFT, STADZT a DWT.

Hlavní rozdíl mezi CWT a DWT je v definování parametrů transformace. DWT používá pro časový posuv mateřské vlnky  $a$  a její dilataci  $b$  mocninu 2. Dilatační parametr  $b$  je tedy pro DWT logaritmicky rozdělen [26], [29].





Obrázek 1: Naznačení časově-frekvenčního rozlišení DWT (a), SDTFT (b) a STADZT (c).

Výhodou CWT je dobrá detekce nestacionarity signálu. To je dáno tím, že se vlnkové funkce mohou lépe adaptovat na analyzovaný signál než sinus a kosinus tvořící bázi STDFT, protože se mění jejich efektivní šířka (změna měřítka). Na druhou stranu existuje mnoho vlnkových funkcí, jako například Mexický klobouk, Morletova nebo Meyerova funkce, a je proto nutné vždy volit typ funkce k aktuálně analyzovanému signálu zvlášť.

## 2.9 Hilbert-Huangova transformace (HHT)

Jednou z nejefektivnějších spektrálních metod, které byly vytvořeny během devadesátých let pro analýzu nelineárních a nestacionárních signálů patří Hilbert-Huangova transformace (HHT). Tato transformace je založena na modální dekompozici signálu (Empirical Mode Decomposition - EMD), která rozkládá vstupní signál do množiny signálů tvořených vlastními modálními funkcemi (Intrinsic Mode Functions - IMF). Modální dekompozice signálu je iterativní proces s řadou podmínek, které definují samotné IMF komponenty a řídí jejich výpočet. Detailnější popis výpočtu HHT je uveden v [A11], [30]. Výsledkem dekompozice signálu je množina IMF komponent pomocí kterých lze analyzovaný signál vyjádřit jako

$$s(t) = \sum_{i=1}^n c_i + r_n, \quad (28)$$

kde  $c_i$  je  $i$ -tá IMF komponenta a  $r_n$  je residuum rozkladu po  $n$ -té iteraci. Po dekompozici celého signálu do IMF lze aplikovat Hilbertovu transformaci (25) na každou komponentu signálu a tím získat analytický popis signálu pomocí okamžité frekvence  $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ , kde  $\theta$  je fáze analytického signálu. Vstupní analyzovaný signál  $s(t)$  lze nyní vyjádřit jako [31]

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \exp \left( j \int \omega_i(t) dt \right), \quad (29)$$

kde  $a_i$  and  $\omega_i$  reprezentují okamžitou obálku a frekvenci analytického signálu složeného z  $i$ -té IMF komponenty [34]. Tyto parametry vyjádřené jako funkce času tvoří Hilbertovo spektrum  $H(\omega, t)$  analyzovaného signálu. Další informace o HHT jsou uvedeny v [32], [33].

## 2.10 Shrnutí

Nevýhoda konstantního časově-frekvenčního rozlišení STDFT je řešena pomocí jejích modifikací používající různé kritéria optimality. Metoda MESP minimalizuje energii spektrálního prosakování, což vede k výběru okna vhodné délky. Přesnost časové lokalizace je nicméně stále dána délkou použitých oken<sup>2</sup>, a proto v místech náhlých změn signálu nemusí být uspokojivé. Katkovníková metoda používá poměrně komplikovaný teoretický aparát vedoucí k relativně komplikovanému algoritmu, přičemž z provedených porovnání schopností časové lokalizace náhlých změn signálu vychází metoda MESP lépe než Katkovníková metoda.

V současné době neexistuje systematický popis vlastností ADZT ani vysvětlení jejího chování. Rovněž chybí informace pro jaké aplikace je ADZT vhodná. Předložená práce se proto pokouší o zmapování typických vlastností ADZT. Předběžnou analýzou ADZT byly stanoveny následující hypotézy:

**Hypotéza 1 (H1):** *Pro signál obsahující náhlou změnu ve vybraném segmentu se chování ADZT diametrálně liší od chování DFT. Shodnost chování nastává pouze v případě, kdy je náhlá změna umístěna přesně ve středu segmentu.*

**Hypotéza 2 (H2):** *Pro signál tvořený směsí neharmonických signálů je v Zologramu (spektrogram získaný pomocí STADZT) kromě informace o globálních vlastnostech signálu (tedy frekvencí dílčích harmonických signálů) obsažena též lokální informace o okamžité obálce analyzovaného signálu. Tato vlastnost implikuje "mizení čar" v zologramu a je důsledkem schopností ADZT účinně potlačovat spektrální prosakování.*

**Hypotéza 3 (H3):** *Důsledným využitím cyklických vlastností DFT je možné zlepšit časové rozlišení zologramu pro nízké frekvence.*

**Hypotéza 4 (H4):** *Parametry ADZT/STADZT*

**a:** *Použití jiného než obdélníkového okna povede na zhoršení kvality zologramu.*

**b:** *V rozporu s běžně známou skutečností, že rostoucí délka segmentu zhoršuje časové rozlišení STDFT, je tomu u STADZT naopak.*

**c:** *Posun segmentu má být 1 vzorek, pokud se má využít schopnosti ADZT přesně lokalizovat náhlé změny. Při větším kroku nemusí změna padnout přesně do středu segmentu a tím být nezcela detekována.*

**Hypotéza 5 (H5):** *ADZT je vhodná pro ztrátovou kompresi dat.*

**Hypotéza 6 (H6):** *DZT lze realizovat skalárním součinem signálu se Zolotarevovými polynomy.*

Hypotézy byly formulovány s cílem navrhnout systematický postup analýzy vlastností ADZT a vhodných typů signálů.

---

<sup>2</sup>Minimální délka okna z důvodů stability odhadu spektra je nastavena na  $N_{min} = 16$

### 3 Cíle práce

Cíle práce vyplývají z analýzy současného stavu poznání. Radim Špetík ve své práci [1] odvodil Zolotarevovy řady a teoreticky popsal DZT, nicméně její implementace nebyla provedena. Navrhl výpočet Zolotarevova spektra pomocí ADZT ve spektrální oblasti. Ve své práci rovněž uvedl příklady základních vlastností ADZT jako například potlačení spektrálního prosakování, nulování spektrálních složek signálu nebo časovou a frekvenční selektivitu. Nicméně podrobný popis ADZT a systematická analýza jejího chování v práci uvedena není a nebylo to ani jejím cílem.

Tato disertační práce navazuje na práci [1] a měla by jí doplnit o chybějící popis ADZT, o analýzu jejího chování a o ověření výpočtu Zolotarevova spektra pomocí konvoluce signálu se Zolotarevými polynomy. Důraz bude kladen na systematický popis chování ADZT a nastavení optimálních parametrů ADZT pro spektrální analýzu signálů, který není v [1] rovněž diskutován. Existují metody založené na DFT, které redukují spektrální prosakování, a proto nabízejí zlepšení časového rozlišení oproti běžně užívané STDFT. Tato práce by rovněž měla porovnat výsledky těchto metod s výsledky, které lze dosáhnout pomocí STADZT, a analyzovat možnosti jak vylepšit některé její vlastnosti pomocí vhodně zvolených modifikací. Tyto cíle budou realizovány řadou dílčích kroků, které lze shrnout do následujících bodů:

1. Systematický popis vlastností ADZT a STADZT pomocí vhodně navržených postupů, kritérií a příkladů zevrubně analyzovat vlastnosti ADZT a tím postupně ověřit hypotézy **H1** a **H2**.
2. Na základě výsledků analýzy a stanovené hypotézy **H3** navrhnout modifikace ADZT vedoucí ke:
  - snížení počtu operací ADZT algoritmu a tím i výpočetních nároků
  - zvýšení časového rozlišení na nízkých frekvencích
3. Ověřit hypotézu **H4** a provést optimalizaci parametrů ADZT a STADZT.
4. Na základě výsledků stručně diskutovat vhodné a nevhodné aplikace ADZT (viz hypotéza **H5**).
5. Experimentálně ověřit hypotézu **H6**, že pro výpočet Zolotarevova spektra  $S_Z$  lze používat skalární součin mezi Zolotarevými polynomy a signálem.



## 4 Systematický popis ADZT

Tato kapitola rozvádí a nově doplňuje informace z disertační práce [1]. Nejdříve je v kapitole 4.1 uveden nový alternativní postup vedoucí k odvození kritéria pro ADZT. V kapitole 4.2 je kompletně popsán algoritmus výpočtu ADZT navržený v [1] a to včetně jeho implementace a popisu sestavení matice  $\mathbf{Z}$  obsahující parametry analyzující báze ADZT. Dále je v kapitole 4.3 popsána použitá báze ADZT tvořená aproximovanými Zolotarevovými polynomy. Na závěr jsou v kapitole 4.4 popsány všechny výstupy algoritmu ADZT, které lze využít pro analýzu signálu, mezi které patří Zolotarevovo spektrum, zologram, "k-gram", "m-gram" a matice  $\mathbf{Z}$ , u které je navržena možnost použití její Euklidovské normy k určení míry podobnosti ADZT s DFT.

### 4.1 Alternativní odvození ADZT

ADZT hledá bázové funkce minimalizací Zolotarevova spektra. Tento postup použitý v [1] je zdůvodněn tím, že vede na maximální korelovanost signálu se syntetizujícími bázovými polynomy. Tento závěr lze potvrdit pomocí minimalizace chyby aproximace signálů a to postupem, který je používán pro odvození vztahu pro koeficienty Fourierových řad. Zolotarevovy polynomy společně s jejich spektrálními obrazy patří mezi časově omezené funkce s diskretním spektrem, a proto je možné použít tyto polynomy k vytvoření Zolotarevových řad na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Spektrum Zolotarevových polynomů je diskretní a zároveň je frekvenčně omezeno šířkou pásma danou řádem těchto použitých polynomů [A5]. Díky tomu, že jsou Zolotarevovy polynomy časově a frekvenčně omezené, může být tato báze vzorkovaná v čase a to bez jakéhokoliv aliasingu (jak v časové, tak i ve frekvenční oblasti). Vzorkování Zolotarevových řad v časové oblasti umožňuje zavést Diskretní Zolotarevovu transformaci (DZT), která ovšem nebyla z důvodů uvedených v kapitole 2 kompletně implementována.

Nechť je  $s(t)$  periodickým signálem, který je časově i frekvenčně omezen, a  $\hat{s}(t)$  je jeho aproximace získaná pomocí inverzní Fourierovy řady. Chyba aproximace v časové doméně pak bude

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t), \quad (30)$$

Minimalizace kvadratické chyby

$$J = \min \int_{T_0} (s^2(t) - 2s(t)\hat{s}(t) + \hat{s}^2(t))dt = \min \int_{T_0} e^2(t)dt \quad (31)$$

může být dosaženo i maximalizací korelace vzájemné energie mezi signálem  $s(t)$  a jeho aproximací  $\hat{s}(t)$  pomocí vztahu  $\int_{T_0} s(t)\hat{s}(t)dt$  a z toho vyplývá, že minimalizace chyby aproximace vede na maximální korelaci mezi signálem  $s(t)$  a jeho aproximací tvořenou bází polynomů  $\{\Phi_m(t)\}_{m=0}^N$

$$\hat{s}(t) = \sum_{m=0}^N \hat{S}(m)\Phi_m(t), \quad (32)$$

kde  $\hat{S}(m)$  je aproximované spektrum signálu a polynomy  $\Phi_m(t)$  představují syntetizující bázi Fourierovy řady. Polynomy  $\Phi_m(t)$  mohou být pomocí Fourierova rozvoje přepsány do tvaru

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=-m}^m \alpha_k \exp(i2\pi kt), \quad (33)$$

kde  $\alpha_k$  jsou spektrální koeficienty. Aplikací Fourierovy transformace na (30) získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t) - \hat{s}(t)\} &= \sum_{k=-N}^N S(k) \exp(i2\pi kt) - \sum_{m=0}^N \hat{S}(m) \sum_{k=-m}^m \alpha_k \exp(i2\pi kt) \\ &= \sum_{k=-N}^N \left[ S(k) - \alpha_k \sum_{m=k}^N \hat{S}(m) \right] \exp(i2\pi kt). \end{aligned} \quad (34)$$

Spektrální koeficienty  $\mathcal{F}\{s(t) - \hat{s}(t)\}$  jsou vyjádřeny jako

$$\mathcal{E}(\ell) = S(\ell) - \alpha_\ell \sum_{m=\ell}^N \hat{S}(m). \quad (35)$$

Za předpokladu použití Zolotarevových polynomů může být chyba aproximace (30) definována ve frekvenční oblasti jako

$$S(\ell) - S_Z(\ell), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (36)$$

kde  $S(\ell)$  je spektrum signálu  $s(t)$  a

$$S_Z(\ell) = k_\ell \mathcal{S}(\ell) - (1 - k_\ell) \mathcal{N}(\ell) \quad (37)$$

je Zolotarevovo spektrum  $S_Z(\ell)$ . To je tvořeno dvěma vzájemně váhovanými částmi s váhovacím faktorem  $k_\ell$ . První část je označena jako stacionární  $\mathcal{S}(\ell)$  a druhá jako nestacionární  $\mathcal{N}(\ell)$  [A5]. Díky vlastnostem Zolotarevových polynomů představuje stacionární část  $\mathcal{S}(\ell)$  Zolotarevovy transformace Fourierovy spektrální koeficienty  $S(\ell)$ . Ze vztahu (37) plyne, že minimalizaci spektrální chybové funkce lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\ell} |\mathcal{E}(\ell)|^2 = \sum_{\ell} |S(\ell) - S_Z(\ell)|^2 \\ &= \sum_{\ell} |S(\ell) - (v_\ell S(\ell) - (1 - v_\ell) \mathcal{N}(\ell))|^2 \\ &= \sum_{\ell} (1 - k_\ell)^2 |\mathcal{S}(\ell) + \mathcal{N}(\ell)|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Minimalizace spektrální účelové funkce  $J$  vede na správnou volbu velikosti  $k_\ell$  pro každou část Zolotarevova spektra  $\mathcal{S}(\ell)$  a  $\mathcal{N}(\ell)$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, N-1$  s optimálním poměrem stacionární  $\mathcal{S}(\ell)$  a nestacionární  $\mathcal{N}(\ell)$  části spektrální složky  $S_Z(\ell)$ . Volba správné velikosti  $k_\ell$  tvoří jádro DZT, jejíž báze je tvořena Zolotarevovými polynomy prvního a druhého druhu, které tvoří kompletní vektorový prostor s biortogonálními vlastnostmi [1].

## 4.2 Popis ADZT

Jednou z dalších možných interpretací ADZT je, že vykazuje podobnost s vlnkovou transformací, která má k dispozici  $l$  mateřských vlnek realizovaných prvním a druhým druhem Zolotarevových polynomů, které jsou definovány řádem  $p$ , indexem nestacionarity  $k$  a šířkou pásma  $m$ . Počet mateřských vlnek odpovídá aktuálnímu indexu spektra  $l$  analyzovaného signálu. Jestliže je šířka pásma rovna jedné ( $m = 1$ ), přechází Zolotarevovy polynomy do klasických goniometrických funkcí sinus a kosinus. Naopak pro získání ryze symetrických Zolotarevových polynomů se musí šířka pásma rovnat aktuálnímu indexu analyzované spektrální složky ( $m = l - 1$ ).

Jinými slovy jsou analyzující funkce ADZT tvořeny Zolotarevovými polynomy, které jsou namodulovány na vyšší harmonickou složku odpovídající analyzované spektrální složce signálu  $l$ . Správná volba řádu polynomu  $p$  a indexu nestacionarity  $k$  je zajištěna ADZT algoritmem, který porovnává stacionární a nestacionární části signálu (viz následující podkapitola 4.2.1). Ukázka analyzující a syntetizující báze ADZT je v kapitole 4.3.

### 4.2.1 Postup výpočtu ADZT algoritmu

Algoritmus ADZT je založen na hledání takové analyzující báze ADZT, která minimalizuje obraz  $S_Z(l)$  signálu  $s(n)$  a tím se získá syntetizující báze, která bude maximálně korelovaná s tímto signálem  $s(n)$ . Cílem ADZT algoritmu je tedy nalézt takové parametry bázových polynomů transformace, aby spektrální složky ADZT dosahovaly minimální hodnoty  $|S_Z(n)| \rightarrow \min$  nebo  $|S_Z(n)|^2 \rightarrow \min$ .

Implementovaný algoritmus pro výpočet ADZT je založen na hledání těchto optimálních parametrů pro každou spektrální složku  $S_Z$  zvlášť. K tomuto účelu se používá spektrální maska (zobrazena na obrázku 2), která odpovídá aproximovanému spektru Zolotareva polynomu prvního a druhého druhu. Za předpokladu, že platí vztah (16) a že spektrum Zolotarevových polynomů je tvořeno dvěma vzájemně váhovanými částmi dle vztahu (37), lze pomocí této spektrální masky s vhodně zvolenými parametry šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$  možné vypočítat  $l$ -tou složku ADZT spektra jako vážený součet  $m$  nižších složek DFT spektra s alternujícím znaménkem tvořící nestacionární část signálu a aktuální  $l$ -tou složku DFT odpovídající stacionární části signálu. Tento vztah je popsán následující rovnicí

$$S_Z(l) = \frac{1}{\sqrt{1 + mk^2}}(S(l) + kN(l, m)), \quad (39)$$

kde  $S(l)$  je aktuálně analyzovaná ( $l$ -tá) složka DFT spektra, která odpovídá stacionární části aproximovaného Zolotareva polynomu, zatímco jeho nestacionární část je označena jako  $N(n, m)$  a je vyjádřena vztahem (viz Obr.2)

$$N(l, m) = \sum_{q=1}^m (-1)^l S(l - q). \quad (40)$$





Z výše uvedeného popisu je patrné, že každá spektrální složka  $S_Z(l)$  je doprovázena šířkou pásma  $m$  a indexem nestacionarity  $k$ . Tyto parametry se stanoví zvlášť pro reálnou a imaginární část a to podle následujícího postupu:

Vstupem ADZT algoritmu je pouze DFT spektrum reálného signálu a parametr  $\sigma$ , který určuje podobnost mezi ADZT a DFT spektrem. Výpočet ADZT spektrální složky se provede podle jednoho ze tří možných postupů, který je volen s ohledem na znaménko a velikost stacionární části  $S(l)$  a nestacionární části  $N(l, m)$  signálu.

1.  $S(l)$  a  $N(m, l)$  mají různá znaménka
2.  $S(l)$  a  $N(m, l)$  mají stejná znaménka a  $|S(l)| < |N(m, l)|$
3.  $S(l)$  a  $N(m, l)$  mají stejná znaménka a  $|S(l)| > |N(m, l)|$

V prvním kroku výpočtu se nejprve určí optimální šířka pásma  $m$ , která nabývá hodnoty z intervalu  $(0, l - 1)$  a platí, že po dosazení této hodnoty do vztahu (44) je tato funkce minimální.

$$\left( \frac{1}{m} \left( \sum_{q=1}^m (-1)^q S(l - q) \right) \text{sign}(S(l)) \right) \rightarrow \min, \quad (44)$$

kde  $l$  je aktuální spektrální složka a  $m$  je hledaná optimální šířka pásma. Jakmile je určena optimální šířka pásma  $m$ , vypočte se velikost nestacionární části  $N(l, m)$  podle vztahu (40), a pokud jsou znaménka  $S(l)$  a  $N(l, m)$  různá, algoritmus vypočte ADZT spektrální složku podle postupu pro různá znaménka (viz. postup 1).

V opačném případě je nutné znova stanovit optimální šířku pásma  $m$  podle nového vztahu

$$\left( \frac{1}{m} \left| \sum_{q=1}^m (-1)^q S(l - q) \right| \right) \rightarrow \min, \quad (45)$$

kde  $l$  je opět aktuální spektrální složka a  $m$  je hledaná nová optimální šířka pásma. Porovnáním velikostí stacionární a nestacionární části vypočtené pomocí stejné rovnice (40), se rozhodne, podle kterého postupu pro stejná znaménka bude ADZT spektrum vypočteno (viz. bod 2 a 3).

V následující části jsou k jednotlivým postupům výpočtu doplněny informace o kritérium, podle kterého je volena optimální šířka pásma  $m$ , o vztahy pro výpočet indexu nestacionarity  $k$  a o výsledném tvaru ADZT spektrální složky:

1.  $S(l)$  a  $N(l)$  mají různá znaménka

- Kritérium pro volbu šířky pásma  $m$  je v tomto případě shodné s rovnicí (44).

- Velikost indexu nestacionarity se vypočte podle vztahu

$$k = \frac{-S(l)}{N(l, m)}, \quad (46)$$

kde nestacionární část je vypočtena podle vztahu (40).

- Aktuální složka ADZT spektra se vypočítá dosazením rovnice (46) do (39) a je rovna

$$S_Z(l) = 0, \quad (47)$$

2.  $S(l)$  a  $N(m, l)$  mají stejná znaménka a  $|S(l)| < |N(m, l)|$

- Minimální hodnoty  $S_Z(l)$  je dosaženo volbou:

$$m = 0 \quad k = 0 \quad (48)$$

- Aktuální složka ADZT spektra je rovna aktuální složce DFT spektra.

$$S_Z(l) = S(l) \quad (49)$$

3.  $S(l)$  a  $N(l, m)$  mají stejná znaménka a  $|S(l)| > |N(l, m)|$

- Kritérium pro volbu šířky pásma  $m$  je rovnice (45), zde platí, že  $m$  je z intervalu  $(0, l - 1)$  a tato funkce je minimální.
- Velikost indexu nestacionarity se vypočte podle vztahu

$$k = \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{m \cdot \sigma^2}}, \quad (50)$$

kde  $\sigma$  je volený stupeň potlačení nestacionární části  $N(l, m)$ .

- Aktuální složka ADZT spektra se vypočítá podle vztahu (39). Dosazením  $\sigma = 1$  do vztahu (50) vede na úplné potlačení nestacionární části  $N(l, m)$  (index nestacionarity  $k = 0$ ), a proto

$$S_Z(l) = S(l). \quad (51)$$

Jakmile je  $\sigma$  z intervalu  $(0, 1)$ , roste hodnota indexu nestacionarity  $k$ , a tím se zvětšuje vliv nestacionární části při výpočtu aktuální složky ADZT a to se vzdaluje od DFT.

Poznámka: Implementovaný algoritmus volí postup výpočtu ADZT podle velikosti indexu nestacionarity  $k$  vypočteného podle vztahu (46). Jestliže je splněna podmínka ( $k \geq 0 \wedge k \leq 10^{10}$ ), počítá se ADZT podle případu pro různá znaménka  $S(l)$  a  $N(m, l)$  (viz bod 1). V opačném případě se počítá podle jednoho z případů pro stejná znaménka  $S(l)$  a  $N(m, l)$  (viz body 2 a 3). Při bližším pohledu na tuto podmínku zjistíme že:

- Podmínka  $k \geq 0$  ověřuje pouze znaménka  $S(l)$  a  $N(l, m)$ .

- Podmínka  $k \leq 10^{10}$  nepřímo určuje podobnost mezi ADZT a DFT. Jestliže se bude porovnávací konstanta ( $10^{10}$ ) přibližovat k nule, bude se spektrum ADZT počítat podle jednoho z případů pro stejná znaménka  $S(n)$  a  $N(n)$  a tím se více blížit k DFT.

Výstupní hodnoty indexu nestacionarity  $k$  se normují na interval  $(0, 1)$  podle vztahu

$$k_0 = \frac{k}{k + 1}. \quad (52)$$

Výše popsaný způsob výpočtu ADZT je v implementovném algoritmu aplikován pouze na jednu polovinu reálné a imaginární části spektra a druhá polovina je symetricky doplněna. To znamená, že reálná část se zkopíruje se stejným znaménkem a u imaginární části se znaménko změní. Nakonec se vypočtené části spektra komplexně spojí. Toto zjednodušení lze udělat, protože ADZT algoritmus pracuje pouze s reálným signálem. Stejný postup se aplikuje rovněž na šířku pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$ .

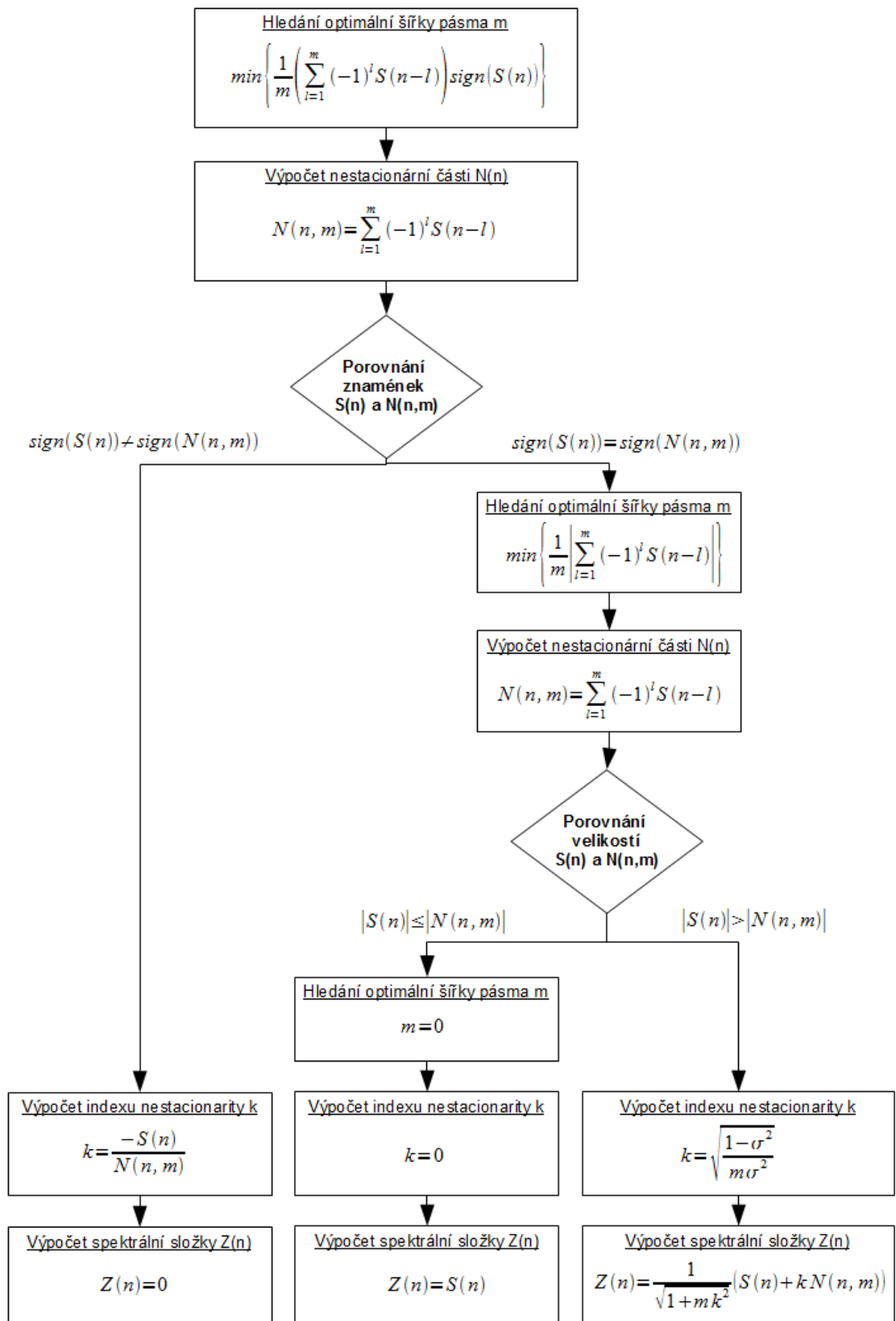
Pro komplexní signál se nedá výše zmíněný postup výpočtu ADZT aplikovat, protože komplexní signály nemají symetrické DFT spektrum. Z tohoto důvodu nelze jednoduše počítat ADZT pouze s jednou polovinou spektra a druhou polovinu spektra symetricky doplnit, jak je tomu u reálného signálu.

#### 4.2.2 Implementovaný postup výpočtu ADZT algoritmu

Implementovaný algoritmus ADZT pracuje s reálnou a imaginární částí DFT zvlášť podle vztahů uvedených v předchozí kapitole. Pro lepší přehlednost je tento postup popsán diagramem na Obr.3 a následujícím postupem výpočtu ADZT spektra pomocí algoritmu, který byl pro potřeby práce [1] implementován v matlabu (*adzt.c*) s odkazy na uvedené vztahy z předchozí kapitoly:

1. Nalezení optimální šířky pásma  $m$  podle rovnic (44) a (45).
2. Výpočet nestacionární části  $N(l, m)$  podle vztahu (40) s šířkou pásma  $m$  zvolenou podle vztahu (44) a výpočet indexu nestacionarity  $k$  podle vztahu (46).
3. Výpočet nestacionární části  $N(l, m)$  podle vztahu (40) s šířkou pásma  $m$  zvolenou podle vztahu (45) a výpočet indexu nestacionarity  $k$  podle vztahu (50).
4. Zjištění znaménka stacionární  $S(l)$  a nestacionární části  $N(l, m)$  pomocí podmínky ( $k \geq 0 \wedge k \leq 10^{10}$ ), kde je index nestacionarity  $k$  vypočten podle bodu 2.
5. Je-li platná podmínka z bodu 4, má stacionární  $S(l)$  a nestacionární  $N(l, m)$  část různá znaménka. Proto se k výpočtu dané spektrální složky použije nestacionární část, index nestacionarity a šířka pásma vypočtené v bodu 2. Algoritmus dále pokračuje bodem 9.

6. Jestliže podmínka z bodu 4 není platná, tak hodnoty stacionární a nestacionární část mají stejná znaménka a výpočet pokračuje porovnáním velikostí obou částí vypočtené bodem 3.
7. Je-li stacionární část větší než nestacionární, šířka pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$  se rovnají nule a spektrální složka ADZT přímo odpovídá složce DFT.
8. Pokud je stacionární část menší než nestacionární, výpočet spektrální složky se provede podle vztahu (39). Nestacionární část, šířka pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$  jsou použity z bodu 3.
9. Nakonec se index nestacionarity  $k$  normuje na interval (0-1).



Obrázek 3: Vývojový diagram výpočtu Zolotarevova spektra pomocí ADZT algoritmu

### 4.2.3 Popis sestavení $\mathbf{Z}$ matice

Matice  $\mathbf{Z}$  je reálná, má motýlkový tvar a každý její řádek je určen k výpočtu jedné složky DZT spektra  $\mathbf{S}_Z$  z DFT spektra  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{S}_Z = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{S} \quad (53)$$

Následující popis sestavení matice  $\mathbf{Z}$  vychází z funkce *zmatrix.m*, kterou navrhnul Radim Špetík v rámci své práce [1] a je určena pouze pro sestavení matice  $\mathbf{Z}$  reálného signálu. Vlastní sestavení matice se provede zvlášť s reálnými a imaginárními hodnotami šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$ , přesněji pouze s jednou polovinou těchto hodnot, protože druhá polovina je stejná díky symetričnosti spektra reálného signálu. Sestavená reálná matice  $\mathbf{Z}_R$  a imaginární matice  $\mathbf{Z}_I$  jsou singulární. Výsledná matice  $\mathbf{Z}$ , která je reálná a regulární, je dána součtem obou těchto dílčích matic. Tvar  $\mathbf{Z}$  matice přímo souvisí se vztahem pro výpočet ADZT (39). K sestavení matice je nutné znát šířku pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$ .

- Tyto parametry se vypočítají jedním z postupů uvedených v předchozí kapitole. 4.2.1)
- Index nestacionarity  $k$  se musí odnormovat tak, aby platilo  $k \in (0, \infty)$

$$k = \frac{k_0}{1 - k_0}, \quad (54)$$

kde  $k_0$  jsou normované hodnoty na interval  $(0,1)$  (52).

Postup sestavení  $\mathbf{Z}$  matice je následující:

1. Vytvoření čtvercové matice, která obsahuje pouze hlavní a posunutou vedlejší diagonálu se samými jedničkami. Vedlejší diagonála je posunutá kvůli symetričnosti spektra - stejnosměrná složka se nezrcadlí. To odpovídá stacionární části  $S(n)$ .

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

2. Na každý řádek se zapíše příslušné hodnoty indexu nestacionarity s alternujícím znaménkem. V první polovině matice se hodnoty  $\pm k$  zapíše před diagonály, ve druhé polovině se zapíše za ně. První hodnota  $-k$  začíná vždy u diagonály a pokračuje se směrem od ní až do vzdálenosti určené šířkou pásma  $m$  pro daný řádek matice (spektrální složku ADZT). To odpovídá výpočtu nestacionární části  $k_n N(n)$  a je to i patrné ze

spektrální masky uvedené na Obr.2.

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & k_4 & -k_4 & 1 & 0 & 1 & -k_4 & k_4 \\ 0 & -k_5 & k_5 & -k_5 & 1 & -k_5 & k_5 & -k_5 \\ 0 & k_4 & -k_4 & 1 & 0 & 1 & -k_4 & k_4 \\ 0 & -k_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Každý řádek matice je určen pro jednu spektrální složku, proto je šířka pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$  konstantní pro celý řádek (viz. kapitola 4.2.1).

- Jednotlivé řádky matice se normují odmocninou energie podle vztahu (43). Pouze první dva a poslední řádek se nenormují, protože tyto spektrální složky ADZT jsou přímo rovny složkám DFT spektra.

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} \\ 0 & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} \\ 0 & \frac{-k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{-k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{-k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} & \frac{-k_5}{\sqrt{1+m_5k_5^2}} \\ 0 & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} \\ 0 & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

- Celý postup sestavení matice se zopakuje s hodnotami šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$  pro imaginární část spektra. Rozdíl proti sestavení reálné matice je v tom, že hodnoty ležící u vedlejší diagonály mají opačné znaménko než stejné hodnoty ležící u hlavní diagonály.

$$\mathbf{Z}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} \\ 0 & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{-k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} & \frac{k_4}{\sqrt{1+m_4k_4^2}} \\ 0 & \frac{k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} & \frac{-k_3}{\sqrt{1+m_3k_3^2}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

5. Nakonec se obě sestavené matice sečtou a výsledná matice  $\mathbf{Z}$  se vydělí dvěma.

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_I) \quad (59)$$

Důvodem součtu obou matic  $\mathbf{Z}_R$  a  $\mathbf{Z}_I$  v posledním bodu postupu je to, aby reálná matice působila jen na reálnou část spektra a imaginární matice zase jen na imaginární část spektra. Toto tvrzení lze odvodit pomocí následujícího vztahu, který představuje výpočet ADZT spektra ( $\mathbf{S}_Z$ ) z DFT spektra ( $\mathbf{S}$ ) pomocí matice  $\mathbf{Z}$ .

$$\mathbf{S}_Z = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{S} \quad (60)$$

Tento vztah lze dále upravit do tvaru

$$(\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_I)(a + jb) + (\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_I)(a - jb) = 2(\mathbf{Z}_R a + \mathbf{Z}_I jb), \quad (61)$$

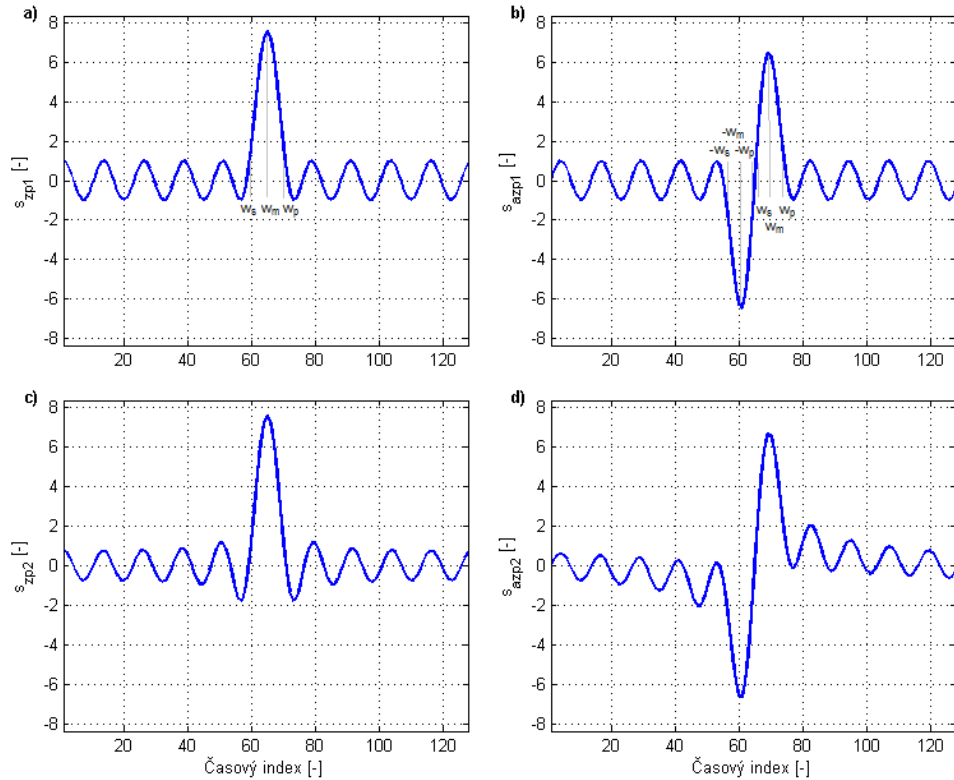
kde člen  $(a + jb)$  představuje složky z první poloviny DFT spektra reálného signálu. Symetrické složky z druhé poloviny spektra mají tvar  $(a - jb)$ . Z výše uvedeného popisu sestavení matice  $\mathbf{Z}$  je patrné, že člen  $(\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_I)$  působí na složky z první poloviny spektra a člen  $(\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_I)$  působí na složky z druhé poloviny spektra. Znaménko "-" před maticí  $\mathbf{Z}_I$  v druhém členu je ukryto uvnitř této matice, kde hodnoty u vedlejší diagonály mají opačné znaménko než hodnoty u hlavní diagonály (viz. předchozí bod popisu sestavení matice  $\mathbf{Z}$ ). Z tohoto důvodu lze vztah pro výpočet matice  $\mathbf{Z}$  zapsat ve tvaru (59).

Výsledná matice  $\mathbf{Z}$  má motýlkový tvar, je reálná a je určena pouze pro reálný signál. Z výše uvedeného postupu sestavení matice  $\mathbf{Z}$  rovněž vyplývá, že pokud jsou hodnoty šířky pásma  $m$  a hodnoty nestacionarity  $k$  pro všechny spektrální složky (řádky matice) rovny nule, tak výsledná matice  $\mathbf{Z}$  bude odpovídat jednotkové matici  $\mathbf{E}$  a tím se ADZT odpovídá DFT (viz druhý způsob výpočtu ADZT zobrazeném na diagramu na Obr.3).



### 4.3 Báze ADZT

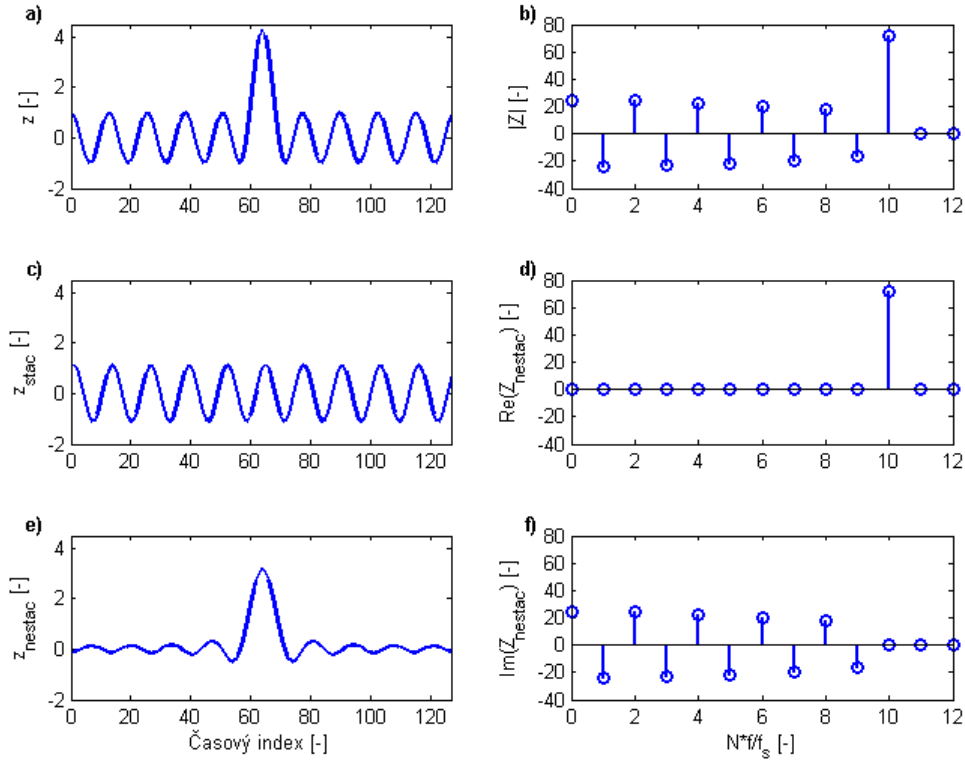
Báze ADZT je složena z aproximovaných Zolotarevových polynomů (AZP) s optimálně nastavenými parametry pomocí implementovaného algoritmu. Hlavní rozdíl mezi průběhy aproximovaných a neaproximovaných Zolotarevových polynomů je možné pozorovat na Obr.4, kde jsou tyto polynomy vykresleny. Rozdíl mezi ZP a AZP je především ten, že AZP nabývají pouze hodnot z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  a to v celém svém průběhu kromě oblasti kolem středového laloku (oblast mezi  $w_s$  a  $w_p$  [1]), kdy hodnoty těchto polynomů mohou být i mimo tento interval. Oproti tomu aproximované polynomy mohou nabývat různé hodnoty i mimo tuto oblast středového laloku. To znamená, že aproximace použitá v ADZT vede na polynomy, které nemají izoextremální odchylku, jako je tomu u Čebyševových a Zolotarevových polynomů. Díky této vlastnosti dosahuje ADZT báze lepší časové i frekvenční selektivity než pro DZT a DFT bázi.



Obrázek 4: Porovnání neaproximovaných a aproximovaných Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu. První řádek zobrazuje neaproximované ZP (a, b) a druhý řádek zobrazuje aproximované ZP (c, d). V levém sloupci jsou ukázány ZP prvního řádu tzv. zcos (a, c) a v pravém sloupci jsou ZP druhého řádu tzv. zsin (b, d).

Z pohledu spektra lze každý ZP rozložit na dvě části, které se nazývají stacionární a nestacionární. Tetno rozklad je pro ilustraci proveden s ZP prvního druhu, je zobrazen na Obr.5. V tomto případě stacionární část odpovídá kosinovému průběhu odpovídajícího

řádu  $l$  (Obr.5c) a nestacionární část odpovídá váhovací funkci (Obr.5e). Obecně lze říci, že nestacionární část ZP odpovídá váhovacímu oknu, a proto při použití AZP je velikost této nestacionární části dynamicky nastavována podle analyzovaného signálu. Z tohoto důvodu není vhodné používat jakékoliv další váhovací okno. Tato vlastnost je diskutována detailněji v kapitole 7.1 zabývající se vlivem volby typu okna na výsledné Zolotarevovo spektrum signálu.



Obrázek 5: Rozklad neaproximovaného Zolotarevova polynomu prvního druhu (a) řádu  $l = 10$  a  $w_p = 0.1$  na stacionární (c) a nestacionární (e) část. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra rozloženého ZP (a-b, c-d, e-f).

Spektrum neaproximovaného Zolotarevova polynomu (ZP) je zobrazeno na Obr.6, kde je zobrazena reálná část spektra ZP prvního druhu (Obr.6a) a imaginární část spektra ZP druhého druhu (Obr.6b). Spektra aproximovaných Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu jsou znázorněny na obrázku 6c a 6d. Z porovnání těchto spekter je patrný hlavní rozdíl mezi ZP a AZP spektry a to, že velikost spektrálních složek nestacionární části je v případech pro aproximované Zolotarevovy polynomy saturována na velikost, která je rovna  $\pm k$ . Tento index  $k$  je nazýván indexem nestacionarity a určuje velikost středového laloku AZP. V některých případech jsou parametry AZP zvoleny tak, že nestacionární část neobsahuje všechny jeho spektrální složky (viz Obr.6e a 6f), ale jen omezený počet vyšších harmonických složek  $m$ . Tento parametr  $m$  je nazýván šířka pásma a společně s indexem nestacionarity  $k$  tvoří matici  $\mathbf{Z}$ . S ohledem na vztah (22) lze pomocí této matice vyjádřit

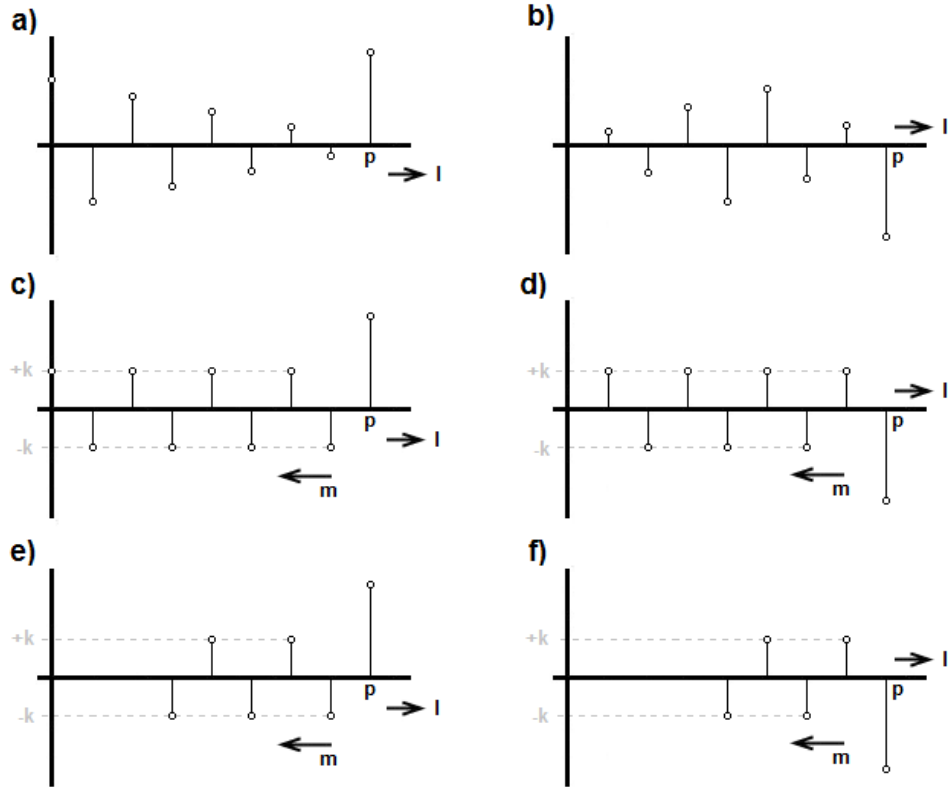
syntetizující a analyzující bázi ADZT jako

$$\mathbf{W}_C = \mathbf{W} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \quad (62)$$

a

$$\mathbf{W}_Z = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}, \quad (63)$$

kde matice  $\mathbf{W}$  obsahuje diskrétní bázové funkce  $\exp\left(\frac{i2\pi ln}{N}\right)$  DFT, matice  $\mathbf{W}_C$  je složena z diskrétních Zolotarevých polynomů  $\text{cexp}\left(\frac{i2\pi ln}{N}\right)$  tvořící syntetizující ADZT bázi a matice  $\mathbf{W}_Z$  obsahuje diskrétní Zolotarevovy polynomy  $\text{zexp}\left(\frac{i2\pi ln}{N}\right)$  analyzující ADZT báze.

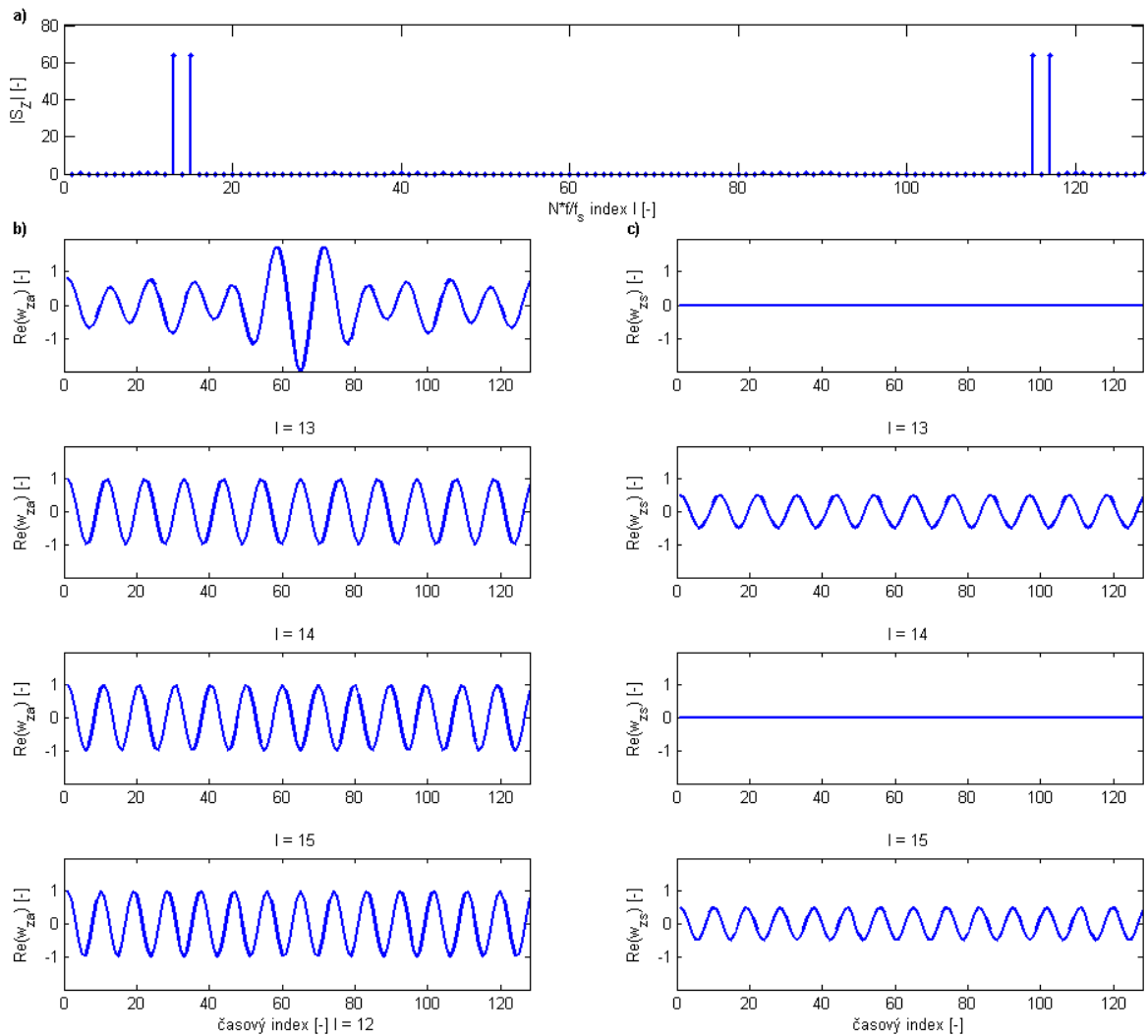


Obrázek 6: Porovnání neaproximované a aproximované Zolotarevovy báze DZT a ADZT: a) Reálná část neaproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$ , b) Imaginární část neaproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$ , c) Reálná část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$  a šířky pásma  $m = p$  a indexu nestacionarity  $k$ , d) Imaginární část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$ , šířky pásma  $m = p$  a indexu nestacionarity  $k$ , e) Reálná část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$ , šířky pásma  $m = 5$  a indexu nestacionarity  $k$ , f) Imaginární část aproximovaného Zolotarevova polynomu řádu  $p$ , šířky pásma  $m = 4$  a indexu nestacionarity  $k$

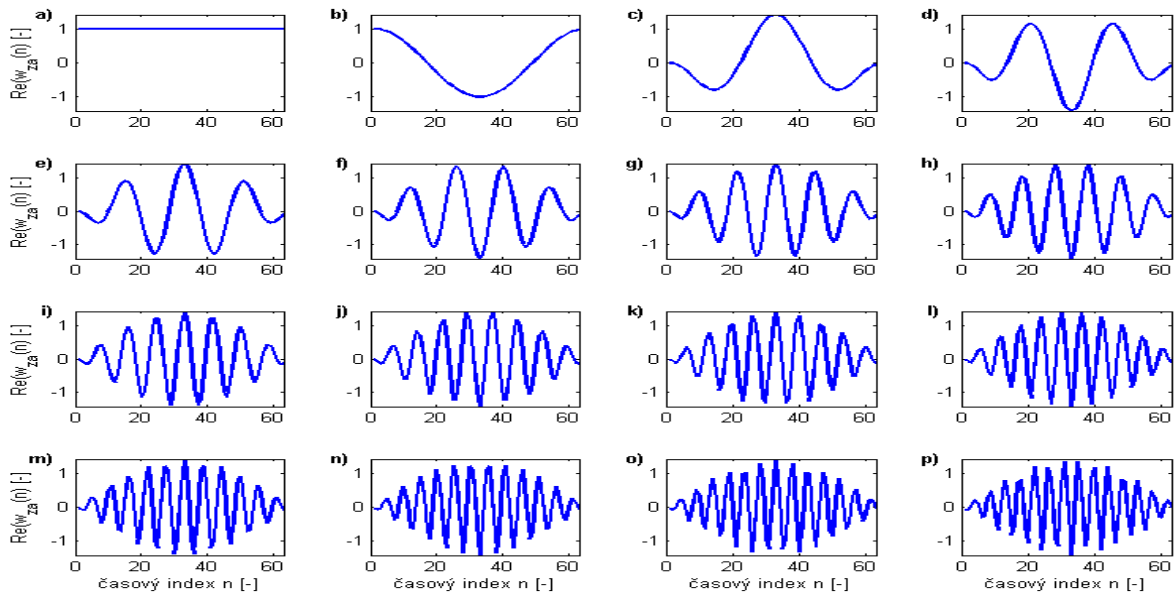
Implementovaný algoritmus ADZT nastavuje tyto parametry  $k$  a  $m$  tak, aby velikost syntetizující báze byla maximálně korelována s analyzovaným signálem, což vede na minimální velikost Zolotarevova spektra. Z tohoto tvrzení a ze vztahů pro výpočet bázových

funkcí (62) a (63) vyplývá, že báze ADZT je biortogonální [19]. Pro ilustraci této vlastnosti jsou zobrazeny na Obr.7 analyzující a syntetizující bazové polynomy ADZT pro reálný sudý signál obsahující pouze dvě harmonické složky. Z vykreslených průběhů je patrné, že tyto báze nejsou shodné a zároveň se nabízí otázka, zda není možné použít ADZT ke kompresi signálu. Tato otázka bude diskutována později v kapitole 6.10 stejně jako ověření volby optimálního indexu nestacionarity a šířky pásma, které bude provedeno v kapitole 4.2 zabývající se vlastním výpočtem ADZT.

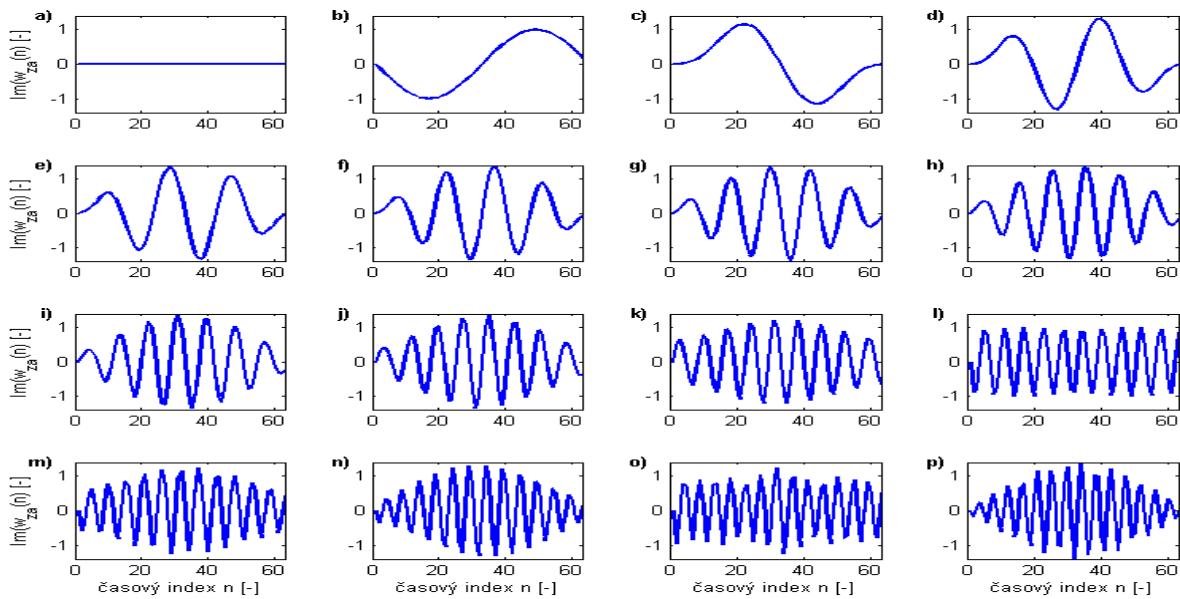
Pro ilustraci jsou na Obr.8 a Obr.9 zobrazeny analyzující bazové funkce ADZT složených z aproximovaných Zolotarevových polynomů, které byly vytvořeny pro analýzu harmonického signálu  $s_1$  složeného ze směsi dvou harmonických průběhů. Jak je z těchto průběhů patrné, tak se tyto bazové funkce liší již zmíněným středovým lalokem, který hraje roli při analýze nestacionárních signálů (nastavuje se časová selektivita bazových polynomů) a umožňuje efektivní redukci spektrálního prosakování, pokud tato nestacionarita není přesně vycentrována na střed segmentu. Obr.10 a Obr.11 zobrazují analyzující funkce ADZT pro signál  $s_2$  složený rovněž ze dvou harmonických složek, avšak jejich frekvence je odlišná od signálu  $s_1$ . Tyto obrázky ilustrují fakt, že tvar analyzujících bazových funkcí významně závisí na analyzovaném signálu.



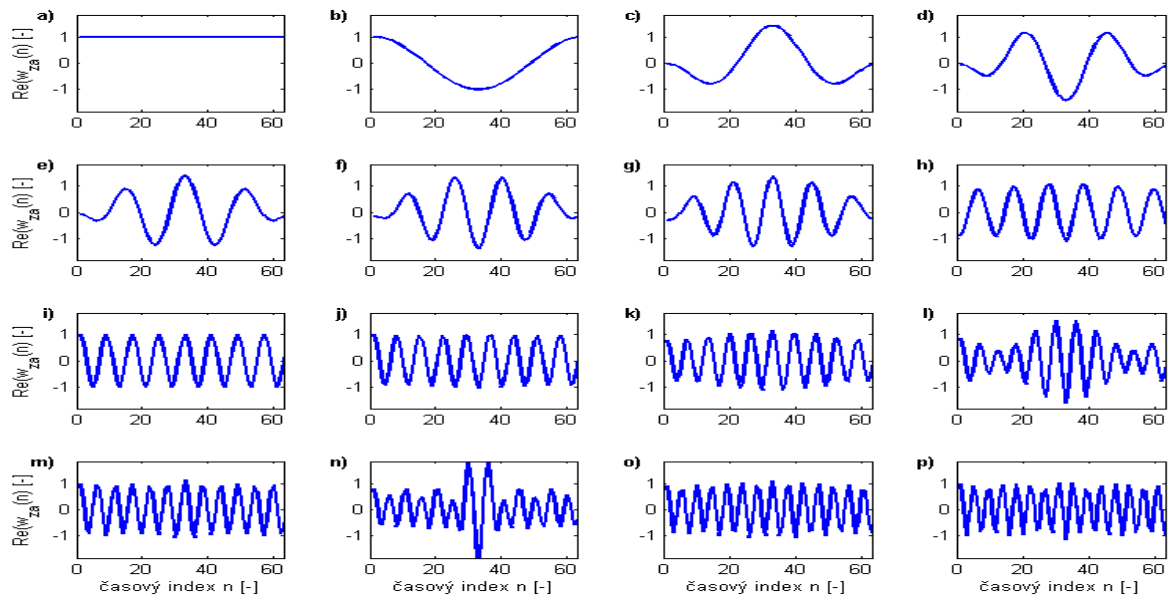
Obrázek 7: Ukázka analyzujících a syntetizujících bázových polynomů ADZT pro 12. až 15. spektrální složku sudého reálného signálu. Proto je na obrázku zobrazena pouze reálná část spektra. a) Amplitudové Zolotarevovo spektrum, b) analyzující polynomy jsou v levé části a jsou pro všechny spektrální indexy nenulové, c) syntetizující polynomy jsou v pravé části a tyto polynomy jsou nulové pro všechny spektrální indexy kromě 13. a 15. indexu.



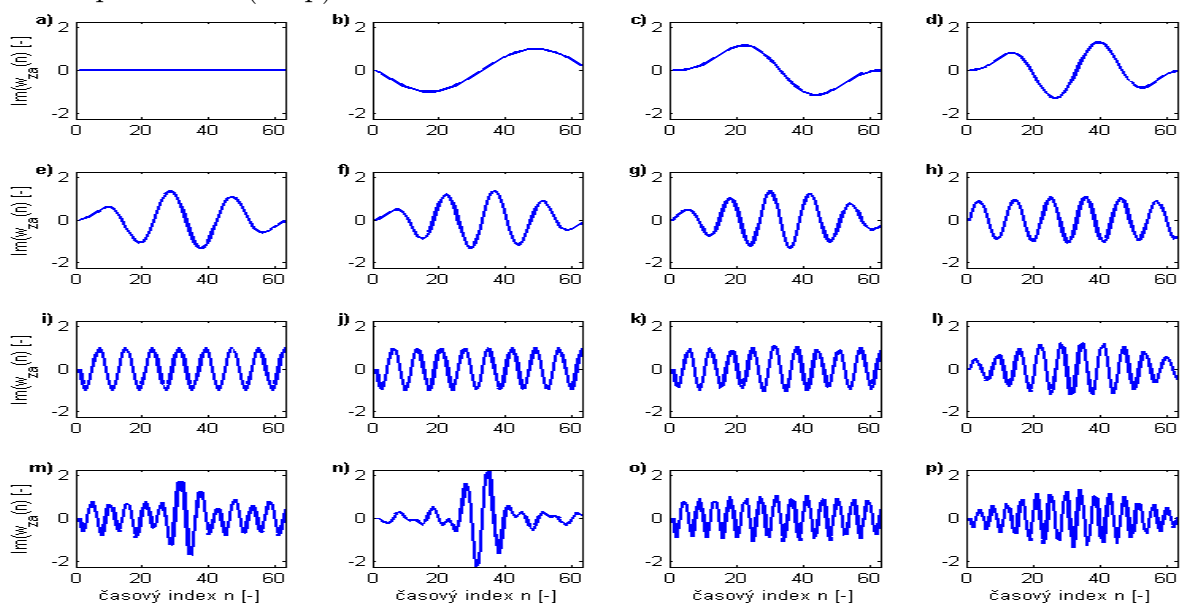
Obrázek 8: Ukázka reálné části analyzující báze ADZT pro signál  $s_1$  složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí  $f_1 = 10.5f_s/N$  a  $f_2 = 20.5f_s/N$  frekvenci. Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p).



Obrázek 9: Ukázka imaginární části analyzující báze ADZT pro signál  $s_1$  složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí  $f_1 = 10.5f_s/N$  a  $f_2 = 20.5f_s/N$  frekvenci. Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p).



Obrázek 10: Ukázka reálné části analyzující báze ADZT pro signál  $s_1$  složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí  $f_1 = 7.1f_s/N$  a  $f_2 = 12.9f_s/N$ . Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p).



Obrázek 11: Ukázka imaginární části analyzující báze ADZT pro signál  $s_1$  složený ze dvou harmonických průběhů s frekvencí  $f_1 = 7.1f_s/N$  a  $f_2 = 12.9f_s/N$ . Zobrazené jsou bazové vektory od 0. až po 15. řád (a - p).

## 4.4 Výstupy ADZT

Hlavním výstupem ADZT použitým při spektrální analýze signálu je stejně jako u DFT spektrum signálu a jeho časový vývoj ve formě spektrogramu, který se nazývá zologram. Mezi další výstupy patří  $k$ -gram a  $m$ -gram zachycující časový vývoj indexu nestacionarity  $k$  a šířky pásma  $m$ . V neposlední řadě se mezi výstupy řadí i  $Z$  matice obsahující parametry analyzující báze ADZT.

### 4.4.1 Zolotarevovo spektrum

Zolotarevovo spektrum reprezentuje analyzovaný signál  $s(n)$  ve frekvenční doméně za pomoci spektrálních koeficientů  $S_Z(l)$ , které jsou získány pomocí výše popsaného vztahu (39). Stejně jako spektrum DFT je i ADZT spektrum tvořeno komplexními čísly, a proto se velmi často zobrazuje v absolutních hodnotách  $|S_Z(l)|$ .

### 4.4.2 Zologram

Zologram signálu  $s(n)$  je vypočten pomocí krátkodobé ADZT (STADZT) a obsahuje jednotlivá Zolotarevova spektra signálu. Teoretické odvození výpočtu je uvedeno v kapitole 2.6. Samotný výpočet STADZT je realizován ADZT do které vstupují DFT spektra analyzovaného signálu  $S_o(l)$ , která jsou vypočtena pomocí váhovacího okna  $w(n)$  s konečnou délkou  $N$ , které je postupně posouváno v časové oblasti s definovaným krokem.

$$S_o(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)w(n-o) \exp\left(\frac{-j2\pi nk}{N}\right), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (64)$$

Vztahy (39) a (40) lze přepsat do tvaru

$$N_o(l, m) = \sum_{q=1}^m (-1)^l S_o(l-q) \quad (65)$$

a

$$S_{Z_o}(l) = \frac{1}{\sqrt{1+mk^2}} (S_o(l) + kN_o(l, m)). \quad (66)$$

Optimální nastavení parametrů STADZT, jako je tvar a délka segmentujícího okna, krok segmentace a interpolace signálu ve spektru, je podrobně diskutováno v kapitole 7 této práce. Všechny spektrogramy a zologramy, které jsou uvedeny v této práci zobrazují amplitudové spektrum v logaritmickém měřítku s použitím barevného schématu Jet definovaném v matematickém programu Matlab. Pro lepší přehlednost prezentovaných výsledků je vykreslena pouze první polovina spektra<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Všechny analyzované signály, které mají symetrická spektra, jsou reálné



### 4.4.3 k-gram

Dalším výstupem STADZT je k-gram, který zobrazuje časový vývoj indexu nestacionarity  $k$ . Oproti zologramu neposkytuje k-gram informaci o velikosti jednotlivých spektrálních složek signálu, ale zobrazuje poměr mezi stacionární a nestacionární částí každé spektrální složky signálu podle vztahu (46), pokud mají obě části stejná znaménka. V opačném případě se hodnota indexu rovná nule, nebo je vypočtena vztahem (50) v závislosti na vzájemné velikosti stacionární a nestacionární části signálu (viz kapitola 4.2). Průběh indexu nestacionarity je možné použít jako další ukazatel nestacionarity analyzovaného signálu. Na Obr.12d je zobrazen k-gram doplňující zologram jednotkového impulsu uvedený na Obr.12a. Z jeho průběhu a průběhu celkové hodnoty indexu nestacionarity pro jednotlivé segmenty signálu zobrazeném na Obr.12e lze pozorovat změnu hodnoty tohoto indexu v závislosti polohy středu segmentu a jednotkového impulsu. Tento jev je dán tím, že ADZT dosahuje nejlepší časové selektivity ve středu segmentu. Tímto jevem se podrobně zabývá kapitola 6.5.

### 4.4.4 m-gram

Stejně jako index nestacionarity, tak i šířka pásma  $m$  může být zobrazena v časově-frekvenční oblasti a může být použita jako dodatečná informace k zologramu o velikosti časové selektivity ADZT báze. S rostoucí šířkou pásma narůstá zároveň i časová selektivita bázových funkcí a jak je vidět z vyobrazeného n-gramu na Obr.12b a celkové šířky pásma jednotlivých segmentů analyzovaného signálu na Obr.12c, tato hodnota narůstá a rovněž se mění se vzájemnou polohou jednotkového impulsu představujícího silnou nestacionaritu a středu segmentu. Podrobněji se velikostí šířky pásma zabývá kapitola 6.4.

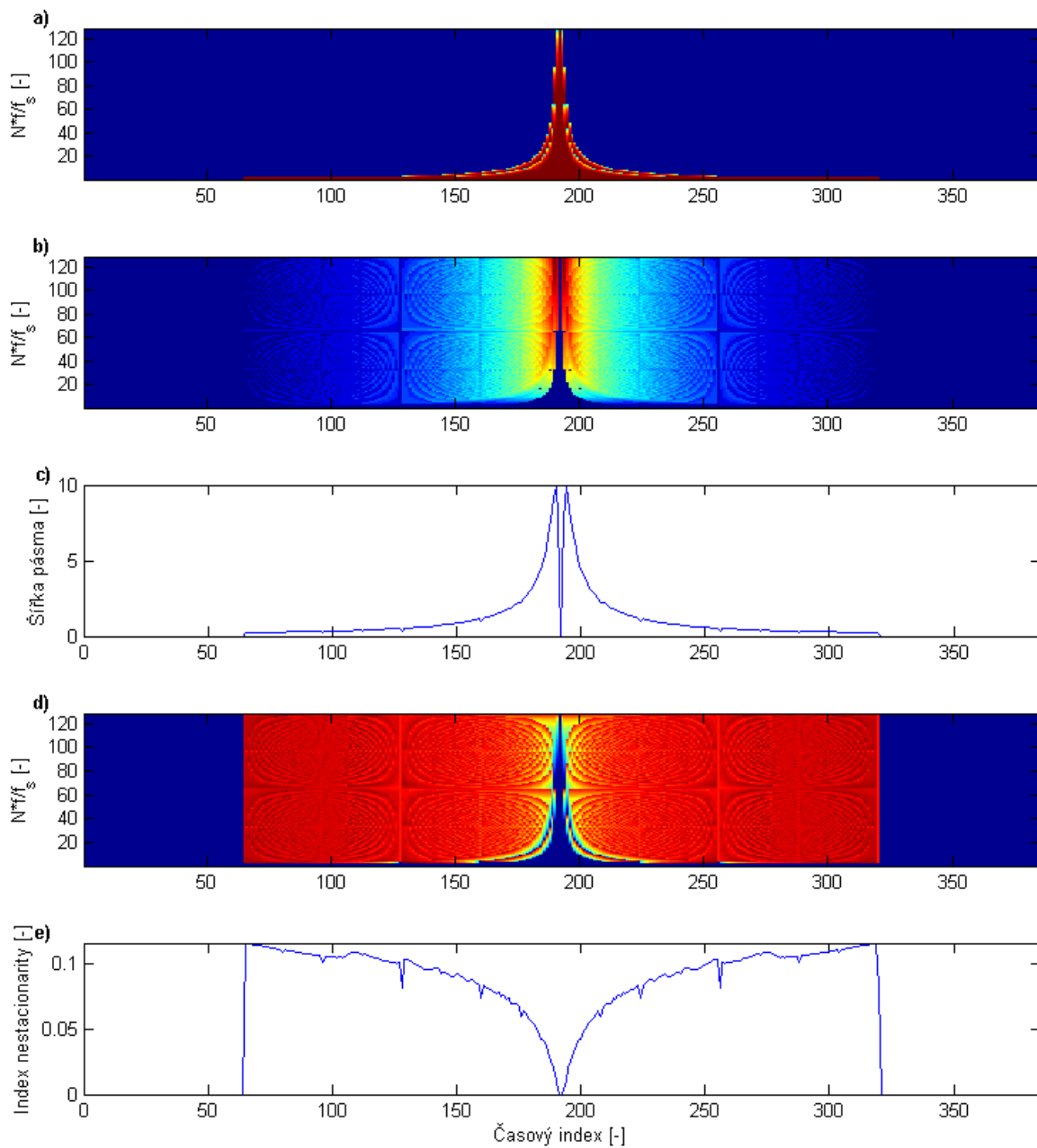
### 4.4.5 Z matice

Matice  $\mathbf{Z}$  obsahuje parametry jednotlivých analyzující polynomů ADZT, které jsou vypočteny z indexu nestacionarity  $k$  a šířky pásma  $m$ . Matice má motýlkový tvar a obsahuje informace o signálu, které jsou odstraněné z ADZT spektra, a proto je nutná ke zpětné ADZT. Rozměry matice jsou  $N \times N$ , a proto není vhodné použít ADZT ke kompresi signálu, jak bylo zdůvodněno v kapitole 4.3. Tvar a popis sestavení  $\mathbf{Z}$  matice je uveden v kapitole 4.2.3. Tato práce se nezabývá podrobnějším popisem  $\mathbf{Z}$  matice, ten však lze najít v [1] a [41].

Jednou z možností využití  $\mathbf{Z}$  matice během spektrální analýzy (respektive pro porovnávání podobnosti ADZT a DFT) je skrze výpočet euklidovské normy. Tato norma je definována jako odmocnina ze součtu kvadrátů všech prvků matice

$$\|\mathbf{Z}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathbf{z}_{i,j}|}, \quad (67)$$

kde  $N$  je počet vzorků ADZT odpovídající rozměrům matice  $N \times N$ . Čím víc se výsledná



Obrázek 12: Ukázka zologramu (a) jednotkového impulsu vytvořeného obdélníkovým oknem délky 256 s posunem o 1 vzorek zobrazené s m-gramem (b) a k-gramem (d). Průměrné velikosti šířky pásma  $m$  (c) a indexu nestacionarity  $k$  (e) jsou spočteny vzhledem k ose času.

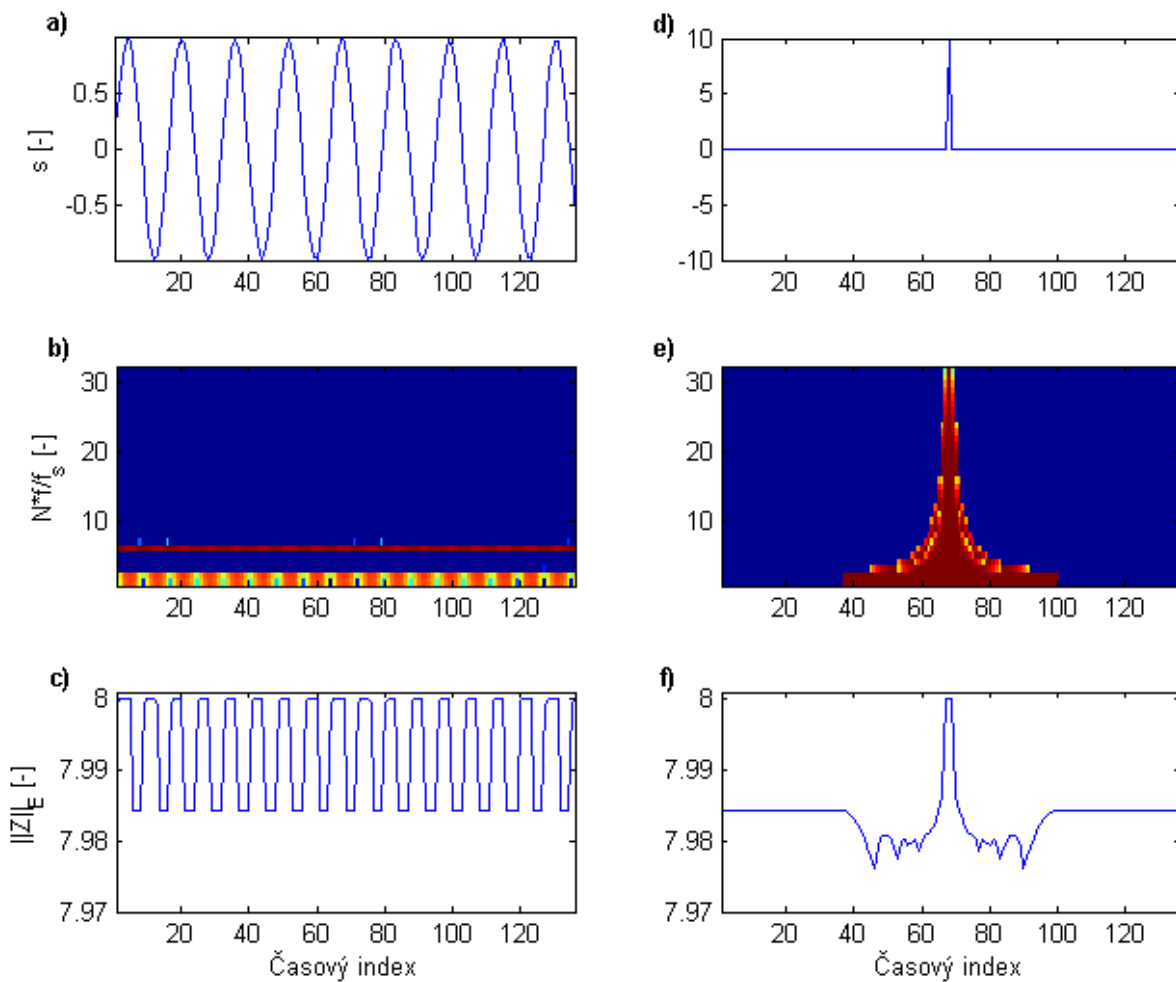
hodnota normy matice blíží hodnotě  $\sqrt{N}$ , tím se ADZT více podobá DFT. Tento fakt je dán tím, že pokud výpočet spektrální složky Zolotarevova spektra odpovídá spektrální složce Fourierova spektra, a proto jsou parametry analyzujícího polynomu rovny nule  $m = 0$  a  $k = 0$  (viz vývojový diagram výpočtu ADZT na Obr.3). Pokud budou tyto parametry rovny nule pro všechny spektrální složky analyzovaného signálu, tak matice  $\mathbf{Z}$  přechází v jednotkovou matici  $\mathbf{E}$  (viz postup sestavení matice  $\mathbf{Z}$  uvedené v kapitole 4.2.3), jejíž Euklidovská norma je rovna  $\sqrt{N}$ , kde  $N$  je její rozměr.

Na Obr.13 jsou uvedeny průběhy Euklidovské normy  $\mathbf{Z}$  matice pro stacionární signál (viz levý sloupec) a nestacionární signál (viz pravý sloupec). Obecně lze říci, že pokud analyzovaný signál obsahuje nějakou harmonickou složku, tak se tato složka promítne jako změna velikosti Euklidovské normy, jak je patrné z průběhu na Obr.13e, jenž odpovídá harmonickému signálu. V opačné případě je tato norma konstantní, jak je vidět na průběhu normy jednotkového impulsu pro krajní časové indexy 1-36 a 101-137 na Obr.13f, kde analyzující signál neobsahuje žádnou harmonickou složku. Tato periodická změna průběhu je dána tím, že ADZT se snaží najít optimální parametry své báze pomocí minimalizace nestacionární části spektra a to pro všechny spektrální složky zvlášť. Tím dochází k optimálnímu nastavení parametrů  $m$  a  $k$  pro spektrální složky s vyšším indexem než je index harmonické složky a tím ke změně euklidovské normy.

Z průběhu euklidovské normy je rovněž možné pozorovat nestacionaritu signálu, jak je ilustrováno na Obr.13f. Z tohoto průběhu je vidět, že ADZT odpovídá DFT, pokud je nestacionarita signálu přesně na středu segmentu. V tomto případě, kdy je počet vzorků ADZT roven  $N = 64$ , hodnota Euklidovské normy matice  $\mathbf{Z}$  odpovídá ( $\|\mathbf{Z}\|_E = 8$ ).

## 4.5 Shrnutí

Tato kapitola se zabývala popisem výpočtu Zolotarevova spektra pomocí ADZT algoritmu navrženém v rámci disertační práce [1]. Byl rovněž popsán postup sestavením matice  $\mathbf{Z}$ , která je nutná pro zpětnou rekonstrukci signálu a ukázána analyzující báze ADZT, která je tvořena aproximovanými Zolotarevovými polynomy prvního a druhého druhu. Závěrem byl proveden popis výstupů ADZT, které lze použít pro spektrální analýzu signálů. V praxi se velmi často pracuje se zobrazením signálu v časově-frekvenční oblasti k čemuž je hojně využíván spektrogram vytvořený DFT. ADZT nabízí pro analýzu signálu rovněž zobrazení signálu v časově-frekvenční doméně ve formě zologramu. Jako dodatečnou informaci o nestacionaritě analyzovaného signálu je možné použít informaci uložené v jednom z dalších výstupů ADZT jako jimiž jsou k-gram, m-gram nebo případně matici  $\mathbf{Z}$ , respektive její Euklidovskou normu.



Obrázek 13: Ukázka průběhu euklidovské normy matice  $\mathbf{Z}$  pro harmonický signál (a) a jednotkový impuls  $b$ . Odpovídající zologramy jsou vytvořeny obdélníkovým oknem délkou  $N$  a krokem segmentace o jeden vzorek (c) a (d). Odpovídající průběhy euklidovské normy jsou zobrazeny na (e) a (f).

## 5 Signály a kritéria použitá při hodnocení a optimalizaci ADZT

Tato kapitola představuje úvod do analýzy ADZT a obsahuje popis signálů, které byly zvoleny pro analýzu chování ADZT, volbu optimálních parametrů ADZT a pro testování jejich vlastností. Dále jsou v této kapitole uvedena dvě kritéria pro kvantitativní a kvalitativní hodnocení vlastností ADZT.

Při vzorkování spektra signálu  $S(f)$  vzniká diskrétní spektrum  $S[l]$ , kde hraje roli frekvenční interval mezi jednotlivými spektrálními složkami  $\Delta f = \beta \frac{f_s}{N}$ , kde  $f_s$  je vzorkovací kmitočet,  $N$  je počet vzorků signálu a  $\beta$  ekvivalentní šířka pásma. Při hodnocení vlastností v textu je tedy předpokládáno, že frekvenční rozlišení dané délkou záznamu  $T_0$  je dostatečné. Budeme proto diskutován pouze vliv velikosti frekvenčního kroku  $\Delta f$  na výsledky popisovaných transformací.

### 5.1 Výběr signálů

Protože ADZT využívá výstup DFT bez jakékoliv úprav obvyklých pro analýzu náhodných signálů, jsou pro analýzu chování ADZT použity v této práci pouze deterministické signály. Chování ADZT pro analýzu stochastických signálů, až na jedinou výjimku, provedeno není. Každá spektrální metoda předpokládá jistý model signálu generující třídu signálů s danými vlastnostmi. Pro danou třídu signálů pak příslušná metoda poskytuje optimální výsledky. Pro účely této práce byly vybrány následující modely signálů.

#### A. Stacionární signály.

**Model 1 (M1):** *Směs sinusovek s celočíselným násobkem frekvence základní harmonické složky, která je dána převrácenou hodnotou periody signálu. Tento model poskytuje periodický signál. Tento model je typický pro Fourierovy řady. Typicky jsou použity jedna, dvě nebo tři složky.*

**Model 2 (M2):** *Směs sinusovek s neceločíselným poměrem frekvencí poskytující neperiodický signál. Tento model je typický pro Fourierovu transformaci. Typicky jsou použity jedna, dvě nebo tři složky.*

**Model 3 (M3):** *Deterministická sinusovka v šumu. V tomto případě nejsou použity postupy pro analýzu stochastických signálů, pouze je deterministickou analýzou testována odolnost ADZT na výskyt šumu v signálu.*

Oba první modely v případě numerického výpočtu spektra vyžadují zkrátit délku signálu, což způsobí prosakování ve spektru. Prosakování lze ovšem vysvětlit též pomocí neortogonality složek signálu k vektorům báze. Tento přístup je v práci systematicky používán. Případ jediné sinusovky lze považovat za zástupce (stacionárního) signálu maximálně lokalizovaného

ve frekvenci a nelokalizovaného v čase (jediná nenulová složka ve spektru). První dva modely též poskytují podle počtu složek (ne)periodický signál libovolného tvaru (obdélníkový průběh, apod.), což je v práci použito.

## B. Nestacionární signály.

Modely použité ve skupině A lze snadno použít pro realizaci nestacionárních signálů. Kromě toho jsou použity i speciální modely pro nestacionární signály.

**Model 4 (M4):** *Jednotkový impuls představuje mezní případ nestacionárního signálu maximálně lokalizovaného v čase a nelokalizovaného ve frekvenci (spektrum je konstantní).*

**Model 5 (M5):** *Signál se sinusovým průběhem a lineárně rostoucí frekvencí jako zástupce chirp signálů s pomalu proměnnou změnou parametru. Jako zástupce úzkopásmových deterministických signálů s náhlou změnou parametrů je použit sinus s náhlou změnou amplitudy, frekvence nebo fáze.*

**Model 6 (M6):** *Gaussův impuls. Tento signál je nestacionární jak v časové, tak i ve frekvenční oblasti a je vhodným testovacím signálem vlastností transformací.*

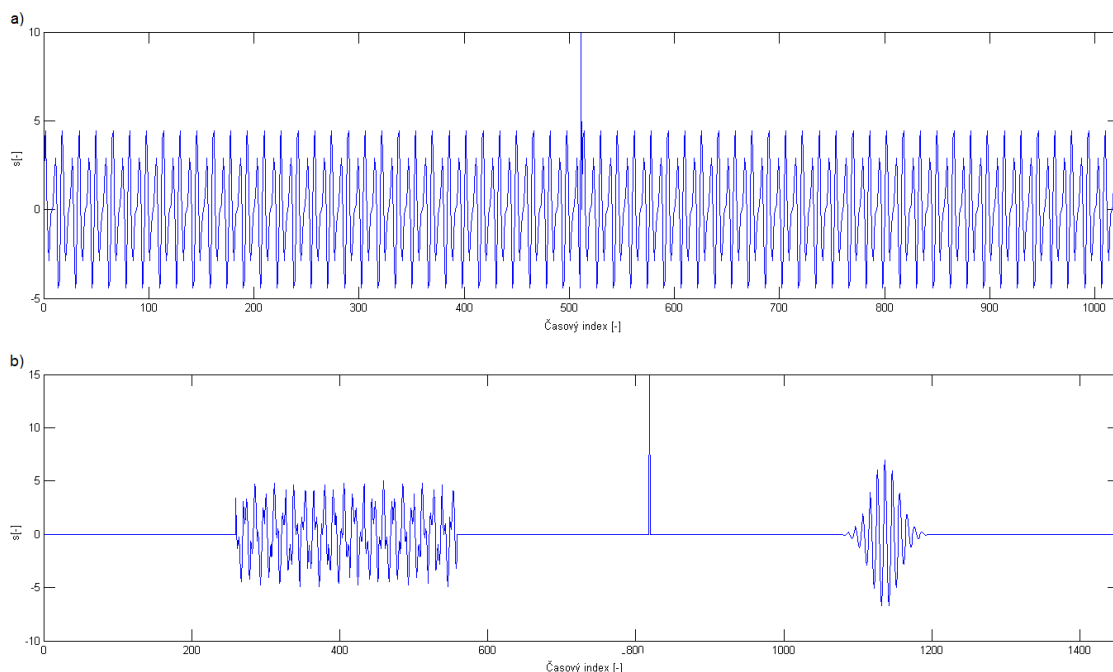
**Model 7 (M7):** *Signál se sinusovým průběhem s exponenciálně tlumenou amplitudou jako zástupce komplexní exponenciály a též deterministického autoregresního modelu poskytující širokopásmový signál. Pro deterministický případ (nenáhodné parametry) je používána Pronyho metoda<sup>4</sup>. Pokud použijeme pro analýzu těchto signálů DFT, tak v tomto případě získáme odhad parametrů (amplitud, frekvencí a fází) jednotlivých složek. ADZT, jak ukážeme později, se ovšem chová zcela jinak.*

V dalším textu jsou použité signály popsány podrobněji včetně konkrétních použitých parametrů.

Signály byly vybrány s ohledem na to, aby bylo možné z jejich spekter snadno ověřit a porovnat časové a frekvenční vlastnosti ADZT a jejich modifikací. Pro volbu optimálních parametrů ADZT byl vybrán signál obsahující dvě části. První část je tvořena součtem dvou harmonických signálů představující stacionární část signálu  $s_1 = \cos(2\pi n \frac{k_1}{N})$ ,  $s_2 = \cos(2\pi n \frac{k_2}{N})$ , kde parametr  $n \in (1, N)$ ,  $N = 1024$ ,  $k_1 = 16$  and  $k_2 = 24$ . Druhá oblast signálu obsahuje jednotkový puls, který reprezentuje silnou nestacionaritu v časové oblasti a je situován na střed tohoto signálu  $s(N/2) = 10$ . Tento signál je vykreslen na Obr.14a. Testovací signál je sestaven ze tří částí, které jsou tvořené součtem harmonických signálů, jednotkovým a Gaussovým pulsem. Tyto části jsou od sebe odděleny tak, aby bylo možné porovnávat vlastnosti ADZT na každé části zvlášť a lépe tak zkoumat jednotlivé vlastnosti transformace. Stejně jako u předchozího signálu je první část tohoto signálu zobrazeném na obrázku 14b složena, ze dvou harmonických složek, které reprezentují stacionární signál a

<sup>4</sup>Typicky se pro směs komplexních exponenciál s náhodnými parametry (amplituda a fáze) používají metody založené na rozkladu autokorelační matice do signálového a šumového podprostoru (Pisarenkova, MUSIC, ...).

lze na ni analyzovat frekvenční rozlišení jednotlivých transformací. V druhé oblasti signálu je pouze jednotkový puls, který představuje silnou nestacionaritu v časové oblasti, kterou se testuje časové rozlišení. Poslední část testovacího signálu je tvořena Gaussovým pulsem a slouží pro testování nestacionarity ve frekvenční oblasti.



Obrázek 14: Signál pro výběr optimálních parametrů ADZT složený ze dvou harmonických složek spolu a jednotkového impulsu (a). Signál pro testování vlastností ADZT a jejich modifikací (b) obsahující sms dvou harmonických signálů, jednotkový a Gaussův impuls..

## 5.2 Kvalitativní kritérium

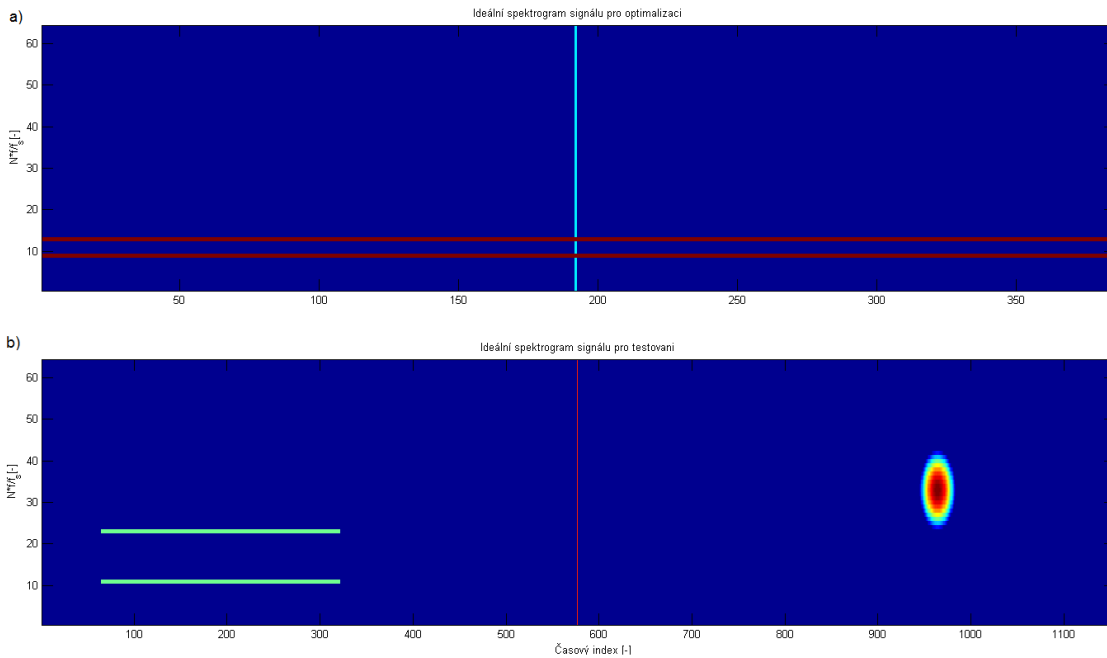
Jako vizuální kvalitativní kritérium pro analyzování výstupů jednotlivých transformací je použit spektrogram a zologram zobrazující jednotlivé spektrální složky DFT respektive ADZT v časové a frekvenční oblasti. Toto zobrazení je zvoleno kvůli jeho rozšířenosti při spektrální analýze signálů a pro svou názornost. Všechny uvedené spektrogramy a zologramy zobrazují pouze jednu polovinu spektra, protože jsou vytvořeny analýzou reálných signálů, jejichž spektra jsou symetrická.

## 5.3 Kvantitativní kritérium

Jako kvantitativní kritérium pro porovnávání výstupů jednotlivých transformací byla použita spektrální vzdálenost, která kvantifikuje odlišnost dvou spekter a je počítána podle vztahu

$$D_{LS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left( 10 \log_{10} \frac{S(l)}{S_I(l)} \right)^2}, \quad (68)$$

kde  $S(l)$  je spektrum signálu vypočítané analyzovanou (testovanou) transformací a  $S_I(l)$  představuje ideální spektrum, které je odvozeno pro signály uvedené v kapitole 5.1. Jednotlivá ideální spektra jsou zobrazena na Obr.15. Tato spektra jsou ideální pouze z pohledu DFT spektra, protože obsahují jen informace o globálních vlastnostech signálu. Ve skutečnosti by ideální spektra z pohledu ADZT měla obsahovat kromě informace o globálních vlastnostech i informaci o lokálních vlastnostech téhož signálu. Tato úprava nebyla provedena, i když ovlivňuje výslednou hodnotu  $D_{LS}$ . Důvodem je, že za ideální spektrum je považováno spektrum získané Fourierovou transformací.



Obrázek 15: Ideální spektra signálu pro výběr optimálních parametrů ADZT (a) a testování jejích vlastností (b).



## 6 Analýza chování ADZT algoritmu

Tato kapitola je věnována analýze chování ADZT pomocí vhodně navržených postupů a příkladů, které jsou uvedeny v jednotlivých kapitolách této části a postupně se zabývají popisem chování ADZT při uměle vytvořeném spektru obsahující pouze dvě spektrální složky (kapitola 6.1) a složky odpovídající spektrálnímu prosakování (kapitola 6.2). Dalším vhodným signálem pro účely této kapitoly je směs harmonických signálů, jenž je použitý pro upřesnění vlastnosti ADZT způsobující v zologramech periodickou změnu jednotlivých spektrálních složek (kapitola 6.3). Pro vysvětlení principu adaptivního nastavení bázových polynomů je použit jednotkový impuls společně s jeho spektrálním obrazem (kapitola 6.4 a 6.5). Schopnost ADZT lokalizovat náhlé a postupné změny signálu je ukázána na vybraných typech signálů uvedených v kapitole 6.7 a 6.8. Závěrem této kapitoly je diskutováno chování ADZT při detekci signálu v šumu (kapitola 6.9) a citlivost rekonstrukce signálu na změny úpravu matice  $\mathbf{Z}$  (kapitola 6.10).

### 6.1 Popis chování algoritmu na dvou spektrálních složkách

Podrobný popis přepočtu vstupního Fourierovského spektra na Zolotarevovo spektrum pomocí implementovaného ADZT algoritmu je uveden v kapitole 4.2. Z diagramu na Obr.3 znázorňujícím postup výpočtu ADZT spektra je patrné, že vstupem do ADZT algoritmu je DFT spektrum analyzovaného signálu a to jak jeho reálná, tak i imaginární část. Algoritmus pracuje s oběma částmi zvlášť, a proto je následující popis chování uveden pouze na jedné části spektra signálu, který obsahuje pouze dvě složky. Tato volba jednoduchého spektra nám umožní udělat si názornější představu o chování algoritmu, kterou můžeme dále aplikovat i na složitějších příkladech.

Jak již bylo zmíněno, vstupem do ADZT algoritmu je spektrum signálu obsahující pouze dvě spektrální složky. Tyto spektrální složky mají stejnou velikost a jsou od sebe v různé vzdálenosti. Na Obr.16 jsou zobrazeny všechny diskutované varianty vstupního DFT spektra (první tři řádky) společně s ADZT maskou, která je použita pro výpočet optimálních parametrů ADZT báze, respektive ADZT spektra (poslední řádek obrázku).

Rozhodování, podle které varianty se bude ADZT v námi diskutovaných případech počítat, závisí na vzdálenosti spektrálních složek, jejich znaménku a jejich velikosti. V tabulce 1 jsou uvedeny dílčí výsledky ADZT algoritmu jako je znaménko stacionární  $S(l)$  a nestacionární části  $N(l-m)$ , způsob výpočtu, možná velikost šířky pásma  $m$  a velikost vypočtené ADZT složky  $S_Z(l)$ . Hodnoty v tabulce jsou počítány pro každou variantu z obr 16 zvlášť a nejvyšší spektrální složka (první zprava) představuje stacionární část  $S(l)$ .<sup>5</sup>

Výpočet všech parametrů uvedených v tabulce se provede podle postupu uvedeném v kapitole 4.2.2. Je-li stacionární část spektra analyzovaného signálu určeného nejvyšší složkou

---

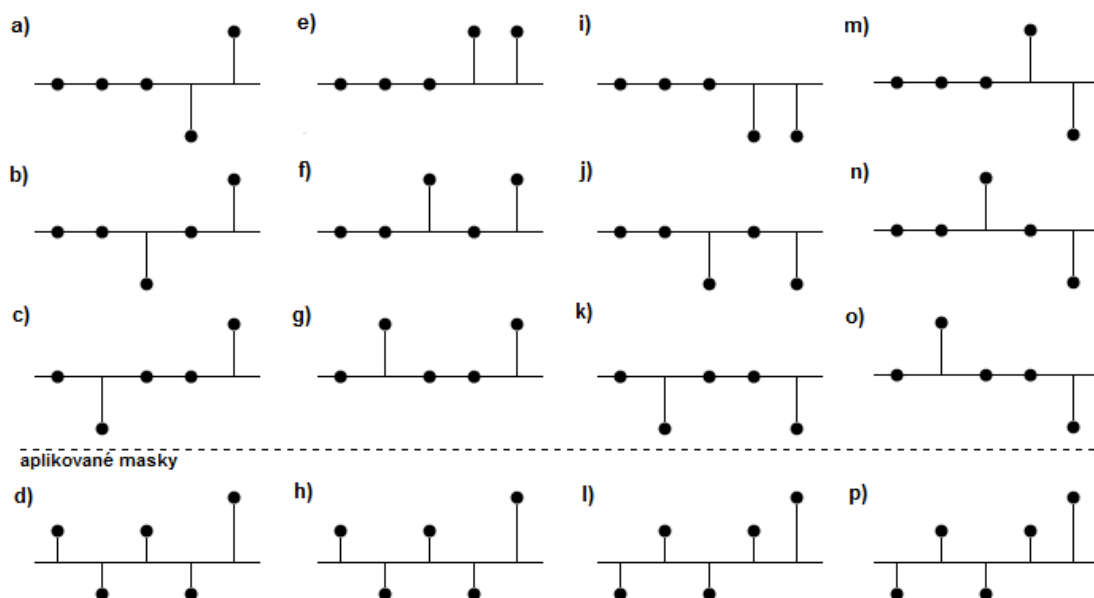
<sup>5</sup>Při výpočtu se počítá s tím, že mají všechny složky spektra nenulovou hodnotu. To je z důvodu, že MATLAB počítá s přesností eps (cca  $10^{-16}$ ) a ani při analyzování reálných signálů nebudou tyto složky nikdy přesně rovny nule, ale bude zde hrát roli spektrální prosakování, které ovlivní všechny složky spektra.

ADZT masky (první zprava) kladná (viz varianty z Obr.16a - 16c a 16 e - 16g), je stanovení šířky pásma  $m$ , indexu nestacionarity  $k$  a ostatních parametrů přímočaré dle popsaného postupu. Za použití vztahů uvedených v kapitole (4.2) se nejprve stanoví šířka pásma, pomocí které se vypočítá nestacionární část  $N(l, m)$ , stanoví se stacionární část  $S(l)$  a porovnají se znaménka těchto částí pro stanovení dalšího postupu výpočtu. Menší nejasnosti mohou nastat v případě, kdy je stacionární část záporná (viz varianty z Obr.16i - 16k a 16m - 16o). Zde je nutné si uvědomit, že při určování optimální šířky pásma  $m$  podle vztahu (44) hraje důležitou roli i samotné znaménko stacionární části, které mění znaménka ADZT masky pro stanovení nestacionární části spektra (viz ADZT masky na Obr.16l a 16p). Z tohoto důvodu je optimální šířka pásma pro ukázky z Obr.16k rovna 3 a to i přesto, že má spektrální složka v nestacionární části kladné znaménko. Mohlo by se totiž zdát, že rovnice (44) je minimální pro šířku pásma  $m$  menší než je 3, protože vzdálenost mezi spektrální složkou tvořící nestacionární část a stacionární částí je rovna 3. Tato vzdálenost odpovídá záporné hodnotě masky ADZT (viz Obr.7), a proto by měla být nestacionární část kladná a největší. Zde se však uplatní zmíněné znaménko stacionární části, které modifikuje ADZT masku (viz 16l) a tím pádem je nestacionární část záporná a minimální.

Hodnoty z tabulky 1, například pro první řádek, lze interpretovat následovně: stacionární část analyzovaného signálu je kladná (znaménko +) a jeho nestacionární část je také kladná (znaménko +). V tomto případě se bude ADZT počítat buď podle postupu číslo 1 nebo číslo 2 popsané v kapitole 4.2.1. Správný způsob pro danou situaci se vybere podle velikosti stacionární  $S(l)$  a nestacionární části  $N(l, m)$ . Jestliže bude nestacionární část větší než stacionární část vybere se postup číslo 2, kde se bude šířka pásma  $m$  rovnat nule a spektrální složka ADZT spektra  $S_Z(l)$  bude odpovídat spektrální složce DFT  $S(l)$ . V opačném případě, kdy je nestacionární část menší než stacionární část, se šířka pásma  $m$  bude počítat podle vztahu (45) a ADZT spektrální složka  $S_Z(l)$  bude počítána podle vztahu (39).

Výsledky ADZT výše popsaných variant dvou spektrálních složek lze shrnout do tvrzení, že pokud bude spektrum analyzovaného signálu odpovídat masce ADZT, jak je tomu u variant na Obr.16a, 16c, 16f, 16j, 16m, 16o, bude se ADZT spektrum počítat podle druhého nebo třetího postupu z kapitoly 4.2.1 a výsledné spektrum signálu se bude buď rovnat DFT spektrální složce  $S(l)$ , nebo se vypočte podle vztahu (39). V opačném případě se bude ADZT spektrum nulovat podle prvního postupu.

Poznámka: Popis chování algoritmu na dvou spektrálních složkách doplňuje série obrázků, které jsou uloženy na příloženém CD v adresáři *two-comp-01* - *two-comp-06*. Tyto obrázky jsou tvořeny spektry signálů obsahující pouze dvě harmonické složky, které jsou ortogonální na bázi ADZT. Jednotlivé obrázky zobrazují vypočtené ADZT spektrum, spolu s DFT spektrem, optimální šířkou pásma a způsobem výpočtu. Parametry jednoho harmonického signálu jsou pevně dány a u druhého se mění fáze s krokem  $\frac{1}{8}\pi$ . Série *two-comp-07* počítá ADZT ze spektra, které je prahované a to tak, že složky menší jak  $10e-10$  jsou rovny nule. Proto ADZT algoritmus počítá všechny spektrální složky podle prvního způsobu odpovídajícímu pro různá znaménka stacionární a nestacionární části.



Obrázek 16: Obrázky na prvních třech řádcích zobrazují DFT spektrum signálu tvořeného ze dvou spektrálních složek, poslední řádek zobrazuje aplikované ADZT masky pro stanovené parametry ADZT.

Tabulka 1: Tabulka obsahuje dílčí výsledky výpočtu ADZT pro varianty uvedené na obrázku 16.

Obr.	znaménko stac.	znaménko nestac.	způsob výp.	šířka pásma	zol. spektrum
16a	+	+	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$
16b	+	-	1	2	0
16c	+	+	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$
16e	+	-	1	1	0
16f	+	+	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$
16g	+	-	1	3	0
16i	-	+	1	1	0
16j	-	-	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$
16k	-	+	1	3	0
16m	-	-	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$
16n	-	+	1	2	0
16o	-	-	$2/3$	$0/m$	$S(n)/Z(n)$

## 6.2 Potlačení spektrálního prosakování

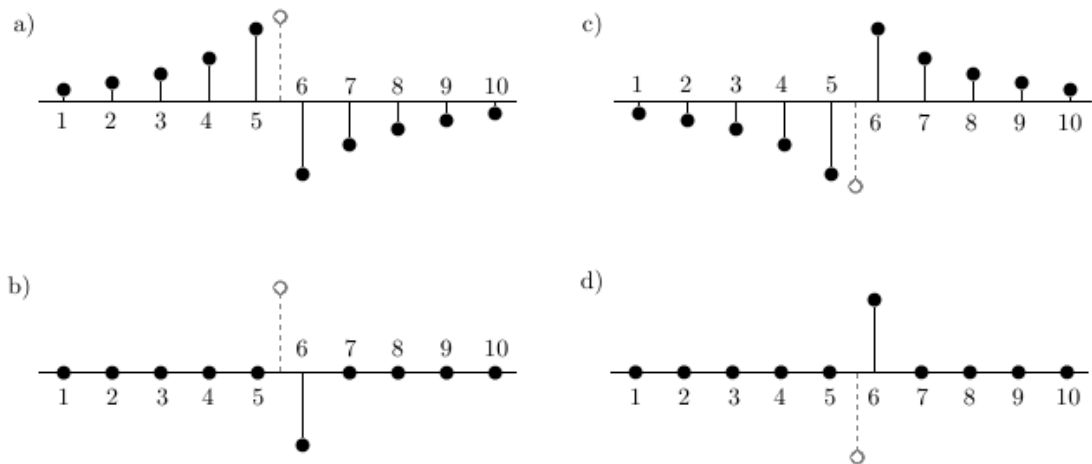
Je-li harmonická složka signálu neortogonální k bázi DFT, vzniká pak ve spektru prosakování. Hlavní vlastností ADZT je její schopnost toto prosakování potlačit a tím zlepšit detekci harmonických složek analyzovaného signálu [1]. Obr.17a a 17c zobrazují DFT spektrum signálu odpovídající signálu s jednou harmonickou složkou (čárkovaná spektrální složka), jejíž perioda není celé číslo, a proto spektrum obsahuje spektrální prosakování. Na Obr.17b a Obr.17d je vykresleno ADZT spektrum stejného signálu. Jak je na první pohled patrné, toto spektrum obsahuje pouze jedinou spektrální složku blížící se harmonické složce signálu.

Energie spektrálních složek narůstá směrem ke spektrální složce analyzovaného signálu (viz Obr.17a a Obr.17c), která je mezi spektrálními složkami s indexem 5 a 6. Jakmile je tato spektrální složka dosažena, otočí se znaménko a energie začne opět klesat. ADZT všechny tyto spektrální složky vzniklé prosakováním vynuluje a ponechá pouze první spektrální složku s otočeným znaménkem (viz Obr.17b a Obr.17d). Dílčí výsledky výpočtu ADZT pro DFT spektrum podle Obr.17a jsou uvedeny v tabulce 2 a jejich interpretace je stejná jako u hodnot v tabulce v předchozí kapitole 6.1. Prvních pět spektrálních složek je počítáno podle prvního postupu výpočtu ADZT a to z toho důvodu, že energie těchto spektrálních složek narůstá a proto bude optimální šířka pásma  $m$  vždy rovna 1 a stacionární i nestacionární část budou mít vždy opačná znaménka. Jakmile se změní znaménko spektrální složky, je ADZT počítáno třetím způsobem a to z toho důvodu, že stacionární i nestacionární část mají stejná znaménka (viz určení šířky pásma pro pro stacionární část se záporným znaménkem popsané v kapitole 6.1) a zároveň je stacionární část větší než nestacionární. Proto bude šířka pásma podle vztahu (45) maximální a v tomto případě tedy rovna 5. ADZT spektrální složka  $S_Z(l)$  se bude počítat vztahem (39). Následující spektrální složky  $S(7) - S(10)$  budou opět nulové, protože znaménka stacionární a nestacionární části jsou různá a šířka pásma je opět rovna 1 nebo takové hodnotě, aby nestacionární část obsahovala spektrální složku s indexem 6.

Poznámka: Tato kapitola je doplněna sérií obrázků, která je uložena na příloženém CD v adresářích *leakage-01 - leakage-05*, kde jsou zobrazeny DFT a ADZT spektra jednoho a více harmonického signálu s měnící se fází s krokem  $\frac{1}{8}\pi$  a kmitočtem, které neodpovídá frekvenčnímu rozlišení DFT a ADZT a tím vzniká ve spektru prosakování.

## 6.3 Detekce okamžité obálky

Jednou z dalších vlastností ADZT je schopnost zachycení pulzování energie mezi jednotlivými harmonickými složkami signálu. DFT dokáže zachytit toto pulzování pouze tehdy, je-li délka okna kratší než vlastní perioda harmonických složek signálu. Zatímco ADZT zachycuje toto pulzování energie mezi jednotlivými složkami signálu i v případě, kdy je okno transformace delší než vlastní perioda těchto harmonických složek. Tato vlastnost je dána časovou selektivitou bazových polynomů ADZT [1], což zároveň souvisí s fázovou citlivostí transformace, jak je patrné z podkapitoly 6.1, kde výpočet dané spektrální složky ADZT spektra závisí nejen na velikosti nižších spektrálních složek vstupujícího DFT spektra, ale



Obrázek 17: Spektrum DFT (a, b) a ADZT (c, d) harmonického signálu, který není ortogonální na báze polynomy DFT a tím vzniká spektrální prosakování

Tabulka 2: Tabulka obsahuje dílčí výsledky výpočtu ADZT pro variant a obrázku 17.

index	znaménko stac.	znaménko nestac.	způsob výp.	šířka pásma	zol. spektrum
1					
2	+	-	1	1	0
3	+	-	1	1	0
4	+	-	1	1	0
5	+	-	1	1	0
6	-	-	3	5	$Z(n)$
7	-	+	1	2	0
8	-	-	1	1	0
9	-	+	1	4	0
10	-	+	1	1	0

i na jejich znaménku, které odpovídá fázi signálu. Systematickou analýzou této vlastnosti bylo prokázáno, že zachycení pulsování energie mezi jednotlivými harmonickými složkami signálu odpovídá detekci okamžité obálky analyzovaného signálu.

Jako první ukázka schopnosti ADZT detekovat okamžitou obálku signálu poslouží signál složený ze součtu dvou harmonických signálů, jejichž kmitočet je ortogonální k bázi DFT, čímž nevzniká žádné spektrální prosakování. Tento signál je zobrazen na Obr.18a. Díky tomu je z průběhu tohoto zologramu na Obr.18b vidět, jak ADZT detekuje oba tyto harmonické signály v zologramu jako vodorovné "čáry sedící" na 32 a 36 spektrálním indexu. Ze zologramu je dále možné pozorovat obálku analyzovaného signálu, která je zde reprezentována jako periodická změna hodnoty spektrální složky odpovídající harmonické složce signálu s vyšší frekvencí (v tomto případě spektrální složka s indexem 36) až po její úplné vynulování. Místa s nulovou hodnotou amplitudového spektra odpovídají uzlům analyzovaného signálu a jak je z uvedeného zologramu patrné, tak perioda přerušování koreluje s okamžitou obálkou vstupního signálu, která je vykreslena červenou barvou v časové oblasti na Obr.18a a pro lepší názornost i do zologramu na Obr.18b. Pomocí vztahu pro součet goniometrických funkcí

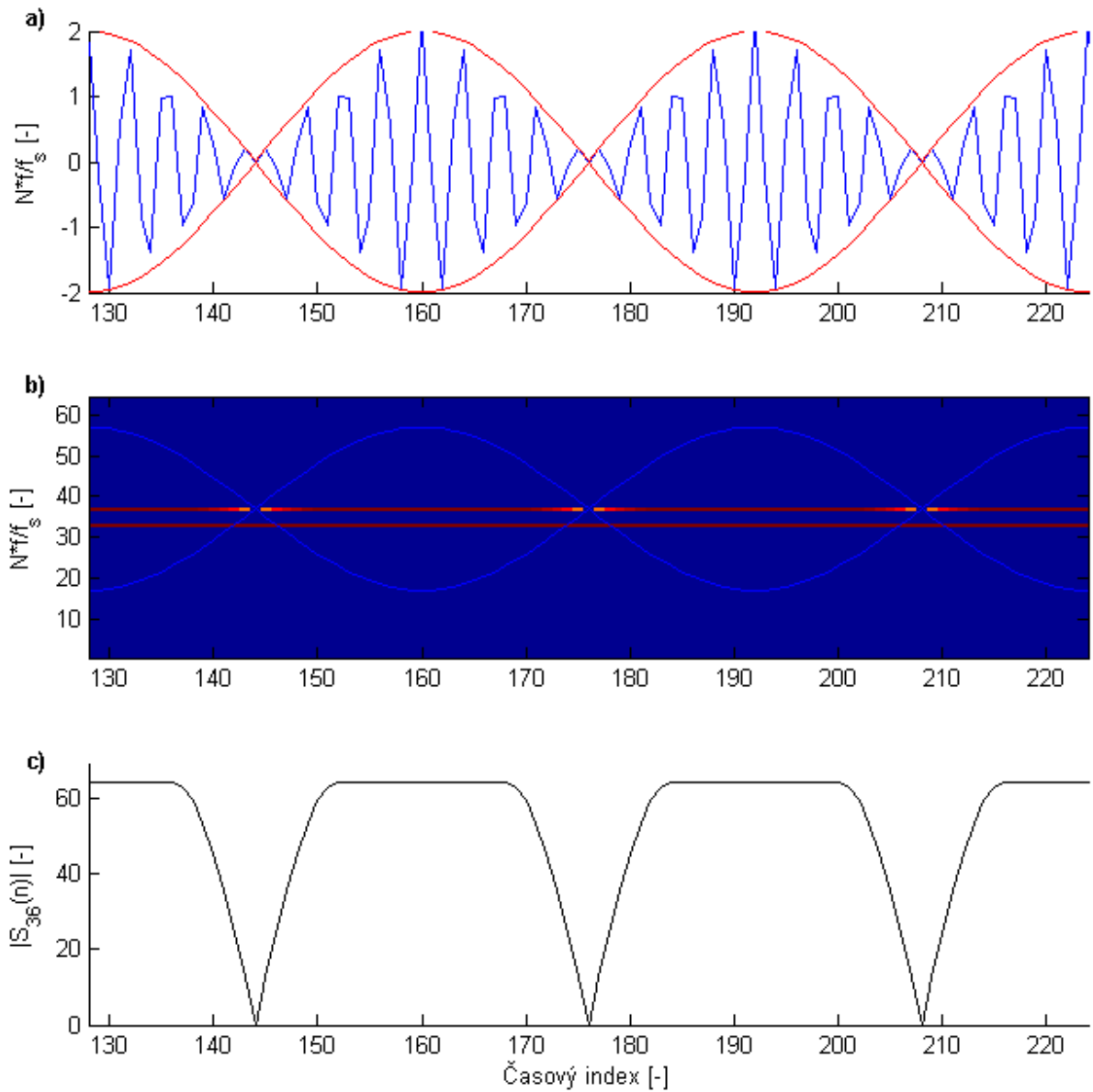
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (69)$$

lze dokázat, že perioda nosného signálu je rovna polovině součtu frekvencí harmonických složek signálu a tedy po dosazení za  $\alpha = 36f_s/N$  a  $\beta = 32f_s/N$  je rovna  $34f_s/N$  (viz vyznačená perioda signálu na Obr.18a), zatímco perioda modulačního signálu je rovna polovině rozdílu těchto frekvencí, což v tomto případě  $2f_s/N$ . Perioda modulačního signálu je rovněž vyznačena na Obr.18a a je totožná s periodou nulových hodnot vyšší spektrální složky (viz Obr.18b).

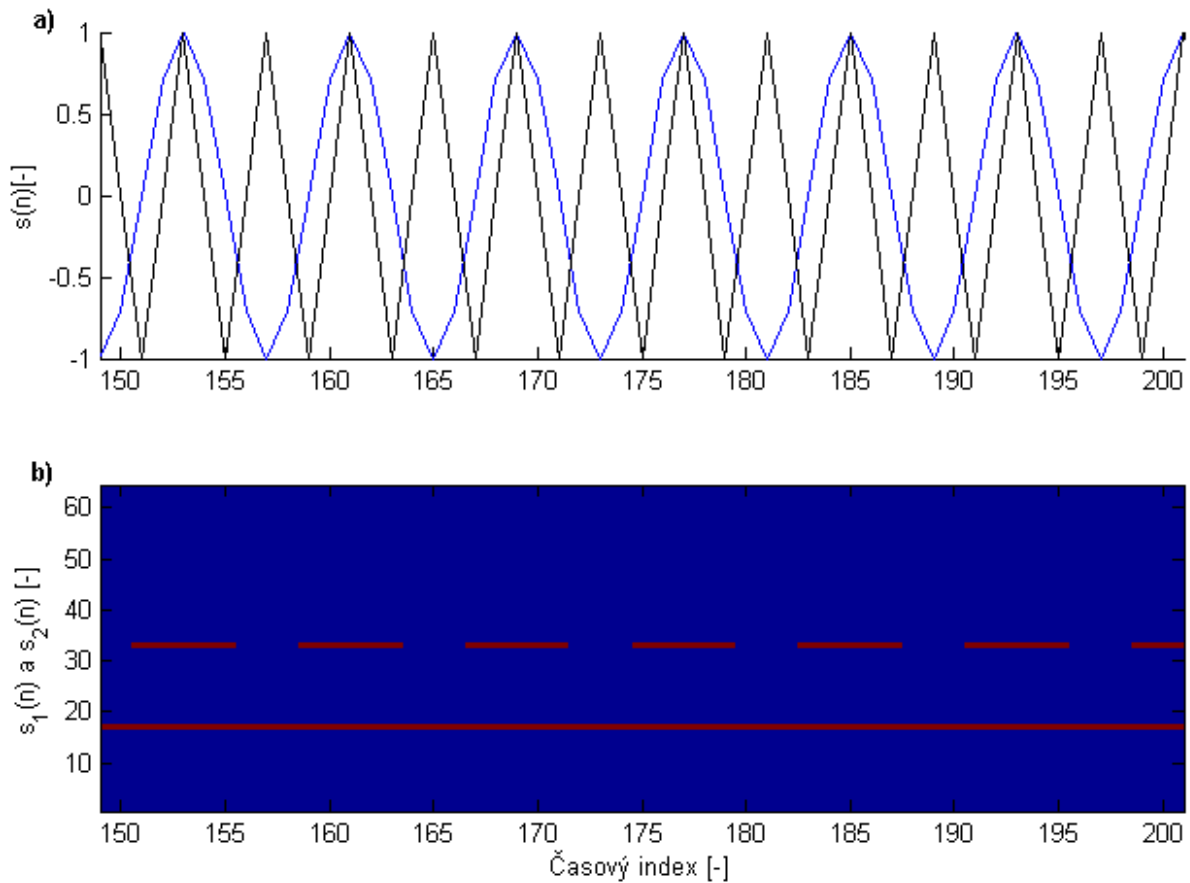
Při detailnějším pohledu na průběh zologramu analyzovaného signálu je patrné, že zologram neobsahuje (respektive že ADZT nedetekuje) pouze dvouúrovňové hodnoty spektrálních složek signálů, ale že jsou tyto složky měněny s úrovní okamžité obálky signálu, jak je zobrazeno na Obr.18c, kde jsou vyneseny průběhy spektrálních složek amplitudového spektra odpovídajícího harmonickým složkám signálu.

Pokud jsou vyneseny jednotlivé harmonické složky signálu zvlášť, je možné lépe pozorovat chování ADZT a určovat, kdy jsou jednotlivé spektrální složky nulovány, jak je tomu na Obr.19. Sčítáním těchto harmonických složek signálu jsou určeny uzly (výsledný signál je nulový) a kmitny (výsledný signál má maximální hodnotu) analyzovaného signálu. Díky tomu, že báze polynomy ADZT jsou selektivní v čase kolem svého středu [1], lze pak určit, kdy se bude daná spektrální složka analyzovaného signálu nulovat a kdy ne. Jako například pro spektrum odpovídající časovému indexu 165 ze zologramu vykresleném na Obr.19, kdy je vyšší harmonická složka rovna nula a tedy energie signálu je nesena pouze nižší složkou.

Podobný postup lze aplikovat i na signály s více harmonickými složkami, pokud spektrum analyzovaného signálu neobsahuje žádné prosakování, tak lze stále poměrně snadno stanovit vztah mezi průběhy jednotlivých harmonických složek signálu a pulzováním jejich obrazů v ADZT spektru. Obecně lze říci, že celková obálka signálu je v zologramu zobrazena periodickou změnou spektrální složky odpovídající harmonickému signálu daného



Obrázek 18: Průběh signálu složeného ze dvou harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí  $f_1 = 32f_s/N$  a  $f_2 = 36f_s/N$  s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrální složky odpovídající  $f_2$  (c).



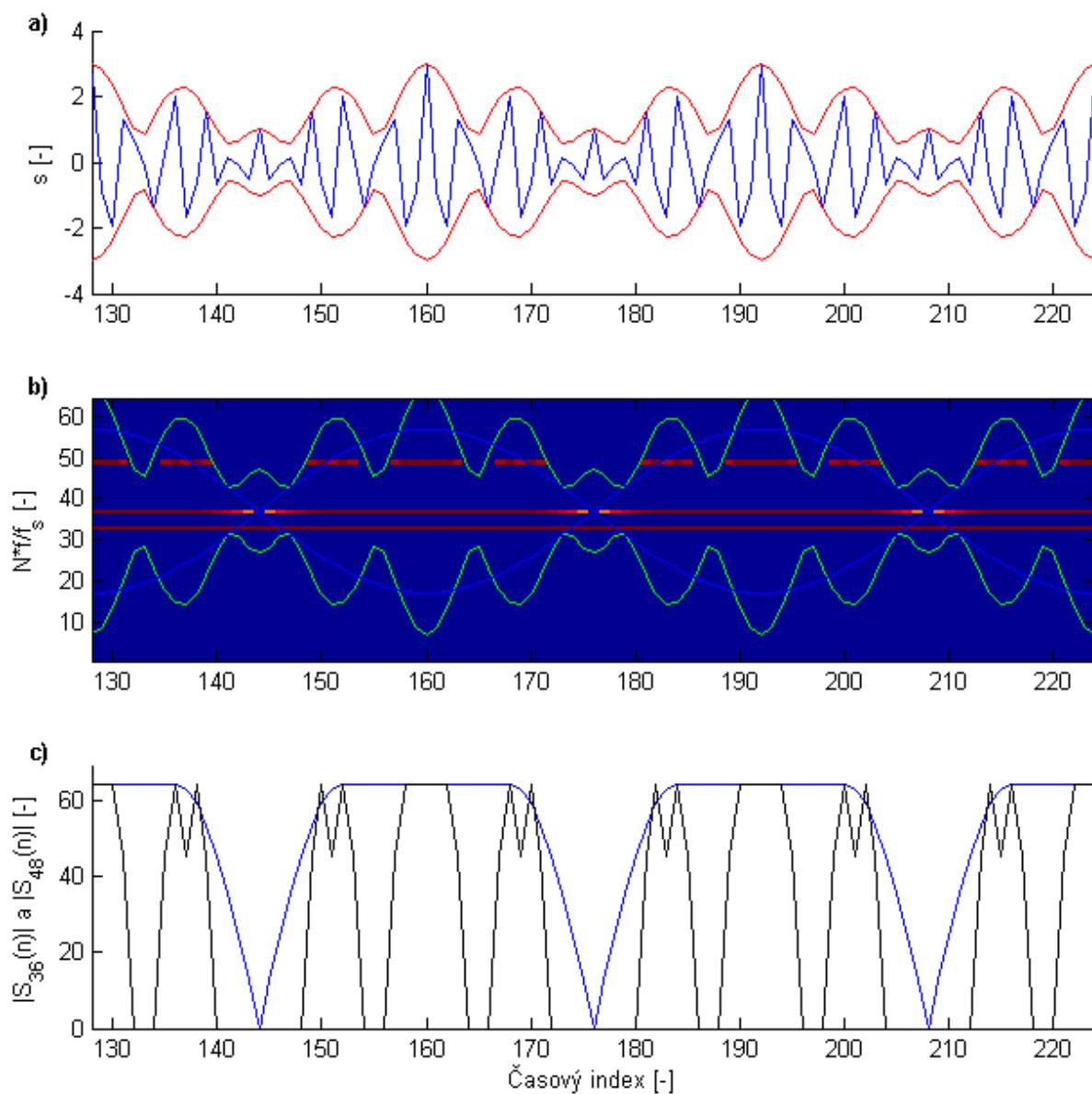
Obrázek 19: Průběh signálu složeného ze dvou harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí  $f_1 = 16f_s/N$  a  $f_2 = 32f_s/N$  s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrální složky odpovídající  $f_1$  (c).



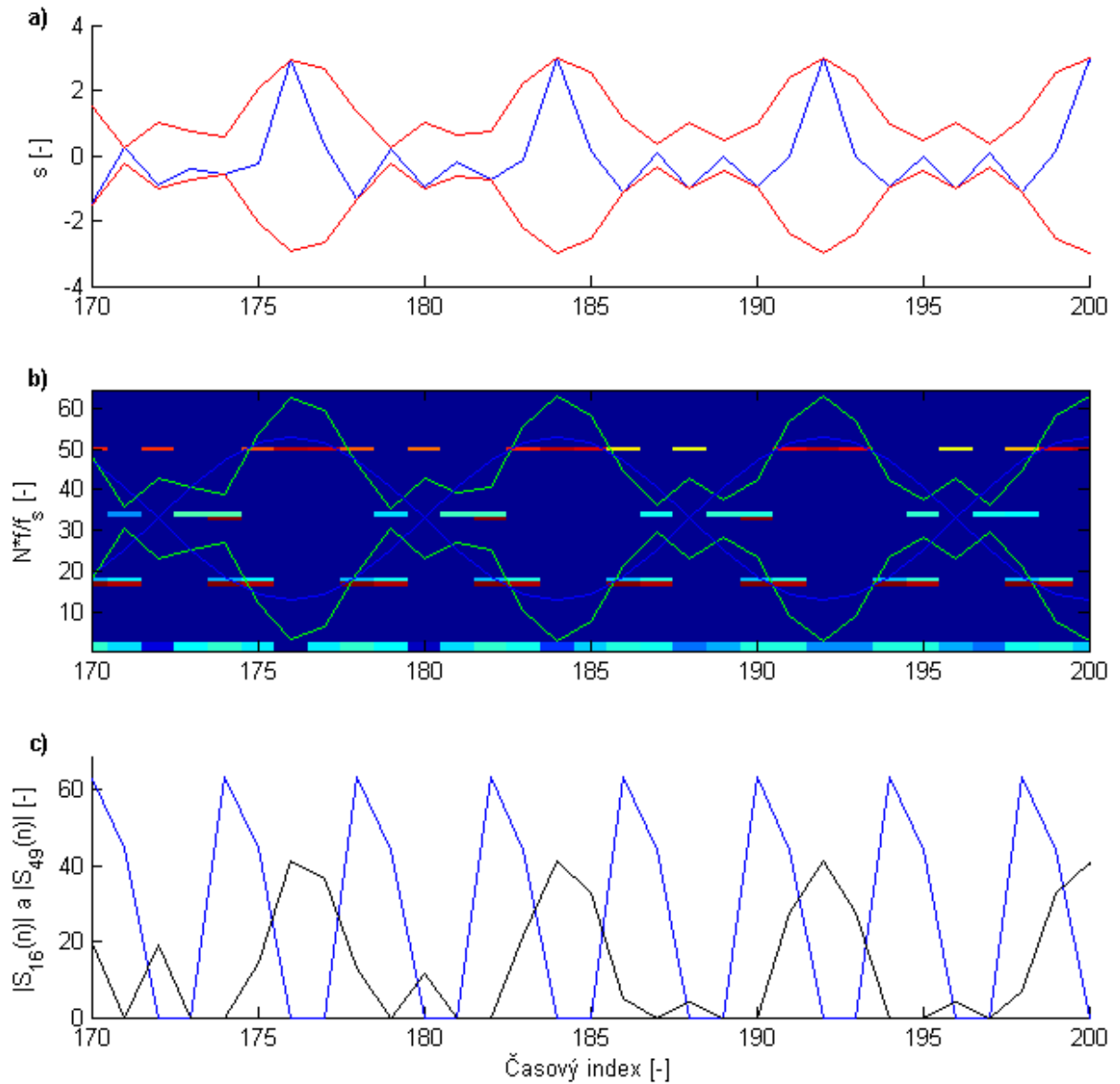
signálu s nejvyšší frekvencí. To je dáno tím, že ADZT počítá vždy aktuální spektrální složku z nižších spektrálních složek (respektive nastavuje optimální parametry bazových funkcí), a proto každá spektrální složka zologramu vždy reflektuje pouze dílčí obálku všech složek signálu odpovídající nižším frekvencím. Například pro signál složený ze směsi tří harmonických signálů zobrazeného na Obr.20 platí, že celková obálka signálu je v zologramu zobrazena periodickou změnou spektrální složky s indexem 48. To je ilustrováno na Obr.20a, kde je časový průběh signálu zobrazen modrou barvou a celková obálka je zobrazena červenou barvou. Obálka tohoto signálu je zároveň vynesena do zologramu na Obr.20b, kde je zobrazena zeleně. Spektrální složka s indexem 36 nese informaci o obálce signálu tvořené nižšími frekvenčními složkami, jež odpovídají spektrálním indexům 36 a 32. Tato obálka dílčího signálu je zobrazena na Obr.20b modrou barvou. Jednotlivé průběhy spektrálních složek jsou vykresleny na Obr.20c.

V opačném případě, kdy analyzovaný signál obsahuje spektrální prosakování, se možnost stanovení vzájemného vztahu mezi jednotlivými průběhy harmonických složek a pulzováním spektrálních složek dosti komplikuje a prozatím tento vztah nelze jednoznačně stanovit. Obecně lze říci, že periodická změna vyšších spektrálních složek vedoucí až k jejich promazávání odpovídá změnám okamžité obálky pouze tehdy, je-li signál ortogonální na bázi ADZT. Pokud tato podmínka není splněna, může poté spektrální prosakování, které je způsobené některou z vyšších spektrálních složek signálu, zasahovat i do nižších spektrálních složek signálů. Tím pádem ADZT může rovněž smazat i spektrální složku odpovídající nižší harmonické složce signálu jako je tomu na zologramu uvedeném na Obr.21 (viz spodní spektrální složka s indexem 32 odpovídající nejnižší frekvenci signálu). Nicméně stále platí, že v zologramu je přítomna přibližná informace o změně okamžité obálky celého signálu, kterou u frekvenčně vyšších složek lze využít ke stanovení uzlů signálu. Toto lze považovat za zajímavou vlastnost umožňující vhled do vztahů mezi globálním popisem signálu pomocí DFT a jeho lokálním popisem pomocí okamžité obálky.

Z provedené analýzy chování ADZT během spektrální analýzy stacionárních signálů obsahující více harmonických složek, je zřejmé že ADZT je pro analýzu těchto typů signálů vhodná a to z několika důvodů. ADZT je schopna velmi efektivně potlačovat spektrální prosakování a zároveň s tím poskytuje informace o lokálních vlastnostech signálů týkající se okamžité obálky analyzovaného signálu.



Obrázek 20: Průběh signálu složeného ze tří harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí  $f_1 = 32f_s/N$ ,  $f_2 = 36f_s/N$  a  $f_3 = 48f_s/N$  s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrálních složek odpovídající  $f_1$  a  $f_2$  (c)..



Obrázek 21: Průběh signálu složeného ze tří harmonických složek s jednotkovou amplitudou a frekvencí  $f_1 = 32f_s/N$ ,  $f_2 = 36f_s/N$  a  $f_3 = 48f_s/N$  s vyznačenou okamžitou obálkou (a), zologram tohoto signálu (b) a průběh spektrálních složek odpovídající  $f_1$  a  $f_2$  (c)..

## 6.4 Vliv velikosti šířky pásma

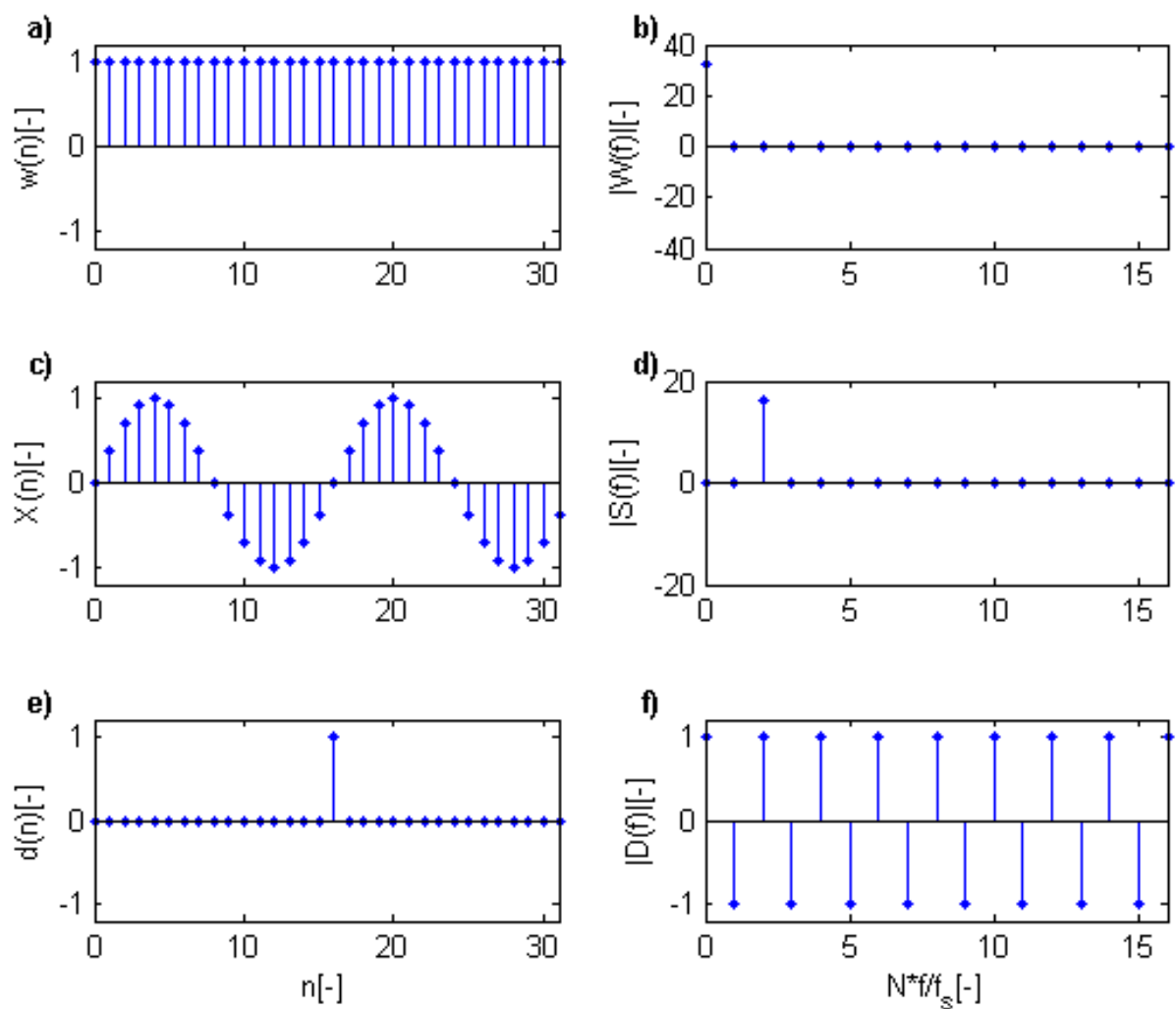
Z teoretického pohledu lze chování ADZT a nastavování parametrů její báze pomocí šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$  shrnout do následujících dvou tvrzení.

1. Pokud je signál stacionární, ADZT se snaží nastavit nejlepší frekvenční rozlišení, které odpovídá rozlišení DFT. To je dáno tím, že ADZT algoritmus nastavuje parametry bazových funkcí podle DFT spektra analyzovaného signálu. V tomto případě by měla být šířka pásma minimální  $m = 0$ , čemuž odpovídá ADZT spektrální maska tvořená pouze stacionární částí, což vede na použití stejné bazové funkce jako je pro DFT a tedy se použije komplexní exponenciála.
2. Pokud bude analyzovaný signál obsahovat nějakou nestacionaritu, bude se ADZT algoritmus snažit nastavit maximální šířku pásma  $m = l/2$ , kde  $l$  je index analyzované spektrální složky a tím dosáhnout maximální selektivity v časové oblasti. Bazový polynom se v tomto (ideálním) případě rovná Zolotarevovu polynomu.

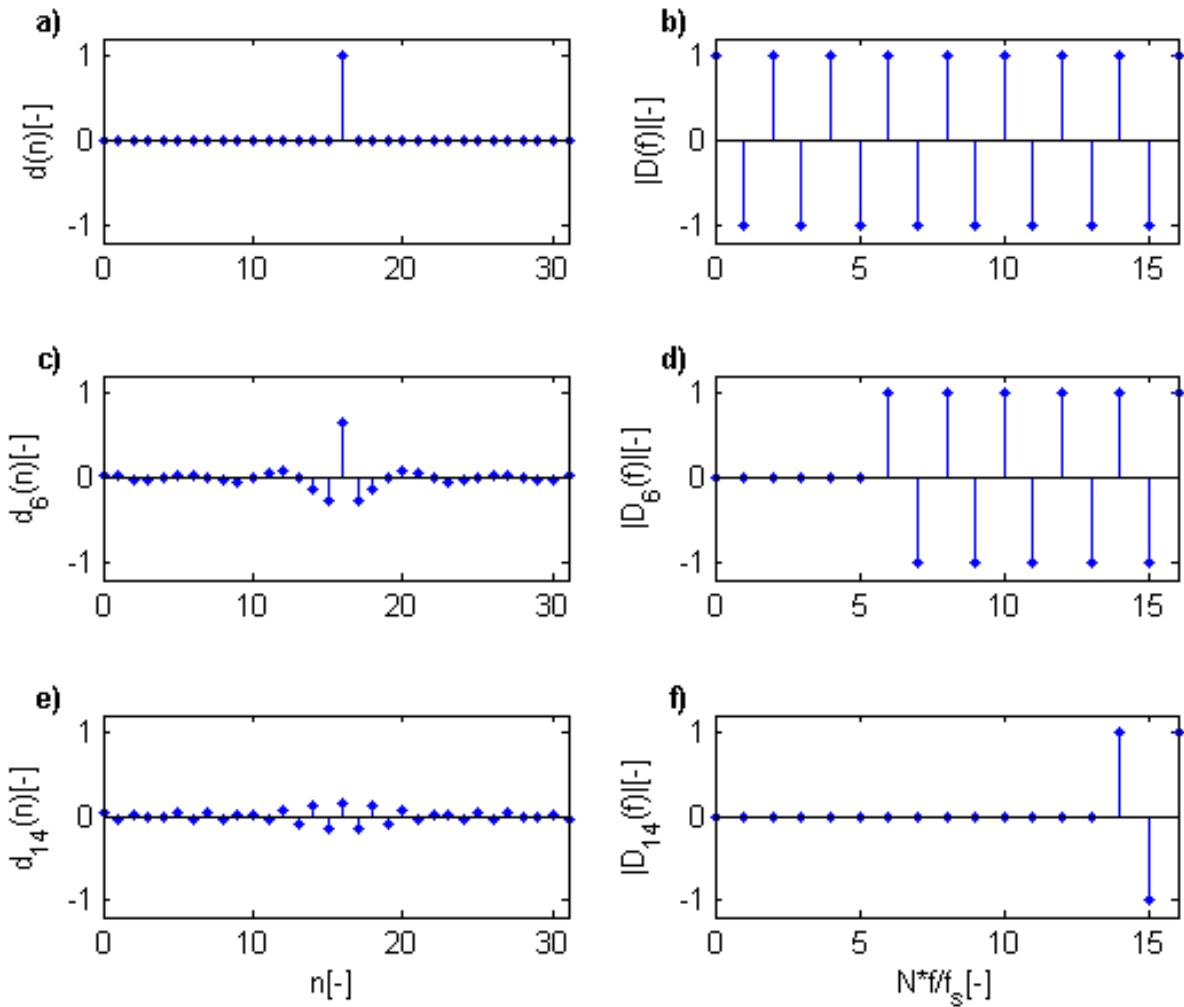
Princip nastavování ADZT bazových polynomů je naznačen na Obr.22. První řádek tohoto obrázku zobrazuje v pravé části (viz Obr.22a) průběh obdélníkového okna  $w[n]$ , kterým je vybírán analyzovaný signál. Tomuto průběhu odpovídá spektrum  $W[l]$  vykreslené v levé části prvního řádku (viz Obr.22b). Toto spektrum obsahuje pouze jednu spektrální složku, čímž je dosaženo maximální přesnosti lokalizace ve frekvenční oblasti, zatímco v časové oblasti je lokalizace minimální. Pro harmonický signál dojde k modulaci tohoto okna  $w[n]$  a tím k posunu spektrální složky na vyšší frekvence, jak je zobrazeno na Obr.22c a Obr.22d. Pro dosažení maximální lokalizace v čase, je potřeba v ideálním případě pro výběr signálu použít jednotkový impuls  $d[n]$ , který je ilustrován na Obr.22e, jehož spektrum  $D[l]$  obsahuje všechny spektrální složky (viz Obr.22f), což vede na minimální lokalizaci ve frekvenci. Jednotkový impuls musí být přesně ve středu segmentu. Při posunu impulsu mimo střed segmentu se spektrum  $D[l]$  začne měnit. Pro DFT platí  $|D[l]| = 1$  pro všechny  $l$  bez ohledu na pozici impulsu. Pro ADZT toto chování neplatí a je popsáno v následující kapitole 6.5.

Této vlastnosti maximální detekce v čase a ve spektru využívá ADZT při nastavování optimálních parametrů bazových funkcí. Následující popis vysvětluje, jak ADZT dosahuje maximální časové selektivity svých bazových funkcí. Jak bylo zmíněno výše, maximální časové lokalizace je dosaženo, pokud by se použil v ideálním případě jednotkový impuls, jenž je představován ve spektru  $\pm 1$  (viz Obr.23a a Obr.23b). Symetrické odebrání (nulování) spektrálních složek ze spektra tohoto signálu odpovídající nižším spektrálním indexům vede na "rozmazání" signálu v čase a tím ke zhoršení časové lokalizace. Toto chování je zobrazeno na Obr.23d a Obr.23f a jim odpovídající časové průběhy na Obr.23c a Obr.23e.

Ze vztahů (39) a (40) je zřejmé, že jednotlivé spektrální složky Zolotarevova spektra jsou počítány z nižších spektrálních složek vybraných ADZT maskou (viz Obr.2) a že se časové rozlišení zlepšuje s roustoucí frekvencí (viz Obr.1c). Tato vlastnost je znázorněna na Obr.24, kde jsou ze spektra jednotkového impulsu (představující ideální polynom pro

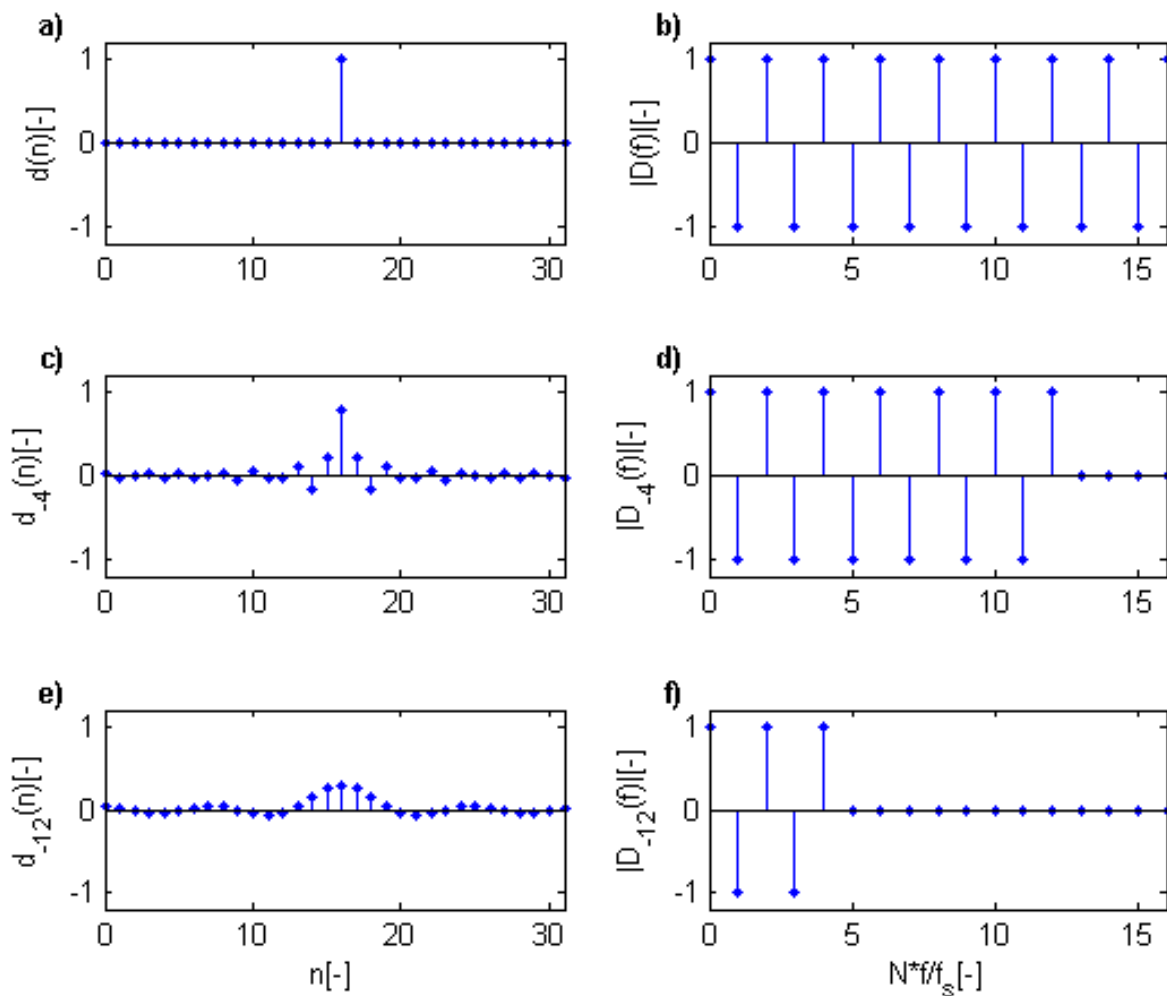


Obrázek 22: Princip dosažení maximální přesnosti lokalizace v čase a frekvenci. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy obdélníkového okna  $w[n]$  (a), sinusového signálu  $x[n]$  (c) a jednotkového impulsu  $d[n]$  (e). V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části a spektrum obdélníkového okna  $W[l]$  (b), sinusového signálu  $X[l]$  (d) a jednotkového impulsu  $D[l]$  (f).



Obrázek 23: Princip zhoršování časové přesnosti bazových polynomů symetrickým nulováním spektrálních složek ve směru od nejnižší spektrální složky po nejvyšší. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotkového impulsu  $d[n]$  (a) a signálu vytvořených vynulováním prvních šesti  $d_6[n]$  (b) a čtrnácti  $d_{14}[n]$  (c) spektrálních složek. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části  $D[l]$  (b),  $D_6[l]$  (d) a  $D_{14}[l]$  (f).

maximální časovou lokalizaci nestacionarity signálu) symetricky odebírány spektrální složky. V tomto případě jsou tyto složky odebírány postupně ve směru odpovídajícímu složkám s vyšším indexem. Jak je z jednotlivých průběhů signálů na Obr.24c a Obr.24e vidět, tak se polynomy s vyšším počtem odebraných spektrálních složek více vzdalují od jednotkového impulsu a tím se zhoršuje jejich schopnost časové lokalizace. Tento fakt potvrzuje to, že časové rozlišení ADZT se s rostoucím spektrálním indexem (frekvencí) zlepšuje.



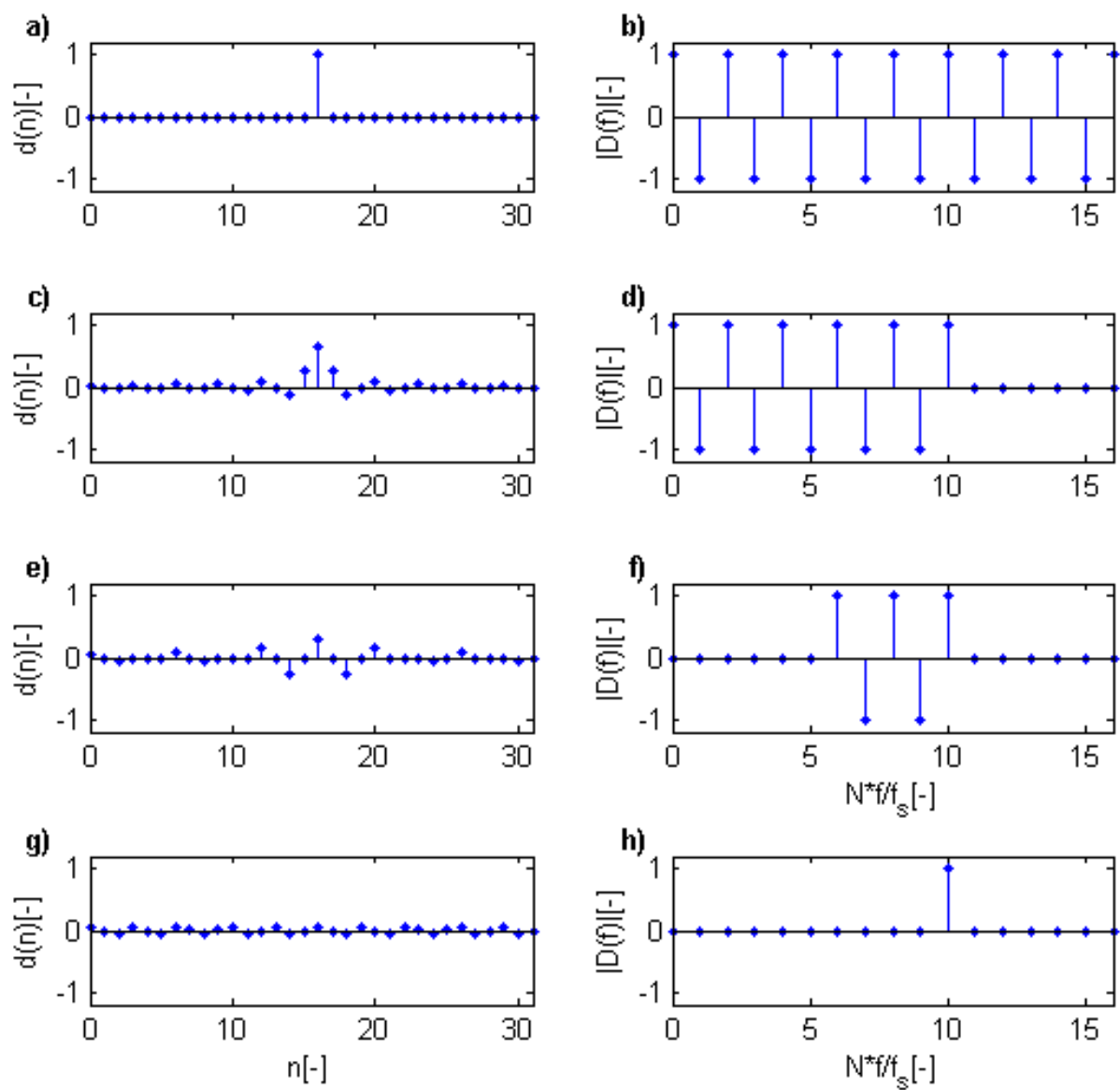
Obrázek 24: Princip zhoršování časové přesnosti bazových polynomů symetrickým nulováním spektrálních složek ve směru od nejvyšší spektrální složky po nejnižší. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotkového impulsu  $d[n]$  (a) a signálů vytvořených vynulováním posledních čtyř  $d_{-4}[n]$  (b) a dvanácti  $d_{-12}[n]$  (c) spektrálních složek. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části  $D[l]$  (b),  $D_{-4}[l]$  (d) a  $D_{-12}[l]$  (f).

Výše uvedené principy jsou v ADZT promítnuty skrze její adaptivní bázi. Spektrum těchto bazových polynomů je zobrazeno na Obr.6e a Obr.6f. Z principu uvedeném na Obr.22, Obr.23 a Obr.24 vyplývá, že ADZT dosahuje nejlepšího časového rozlišení pro nejvyšší

spektrální složky s nastavenou maximální šířkou pásma  $m$ , jak je zobrazeno na Obr.25a a Obr.25b, kde se šířka pásma  $m$  i řád analyzujícího polynomu  $l$  rovenjí  $N/2$ . Na průběhu zobrazeném na Obr.25d je ukázáno spektrum bazového polynomu řádu  $l = 10$  s šířkou pásma  $m = l$  a jak je vidět z časového průběhu tohoto polynomu, jeho průběh je vzdálen od průběhu analyzujícího polynomu z Obr.25a, který dosahuje maximální časovou selektivitu. Omezením šířky pásma  $m$  se časová selektivita tohoto analyzujícího polynomu dále snižuje (viz Obr.25e) a na druhou stranu se zvyšuje jeho frekvenční selektivita (viz Obr.25f). Jakmile šířka pásma  $m$  je rovna 0, analyzující polynom má minimální časovou selektivitu a zároveň maximální frekvenční selektivitu, jak je patrné z Obr.25g a 25h.

Jinými slovy, pokud ADZT algoritmus nastaví maximální šířku pásma  $m$ , tak tomu bude ve spektru odpovídat obraz aproximovaných Zolotarevových polynomů, jemuž odpovídá v časové oblasti maximálně selektivní analyzující bazový polynom. V opačném případě, když bude signál stacionární, bude ADZT nastavovat minimální šířku pásma  $m$ , tak aby analyzující bazové polynomy dosahovaly maximální přesnosti lokalizace ve frekvenci (viz popsany princip na Obr.22).





Obrázek 25: Princip nastavování časové a frekvenční přesnosti ADZT. V levém sloupci jsou zobrazeny časové průběhy jednotlivých bázových polynomů. V pravé části jsou zobrazeny odpovídající spektra signálů z levé části, kde velikost stacionární části je rovna velikosti jednotlivých spektrálních složek nestacionární části, proto jsou všechny spektrální složky rovny  $\pm 1$ .

## 6.5 Poloha pulsu v segmentu

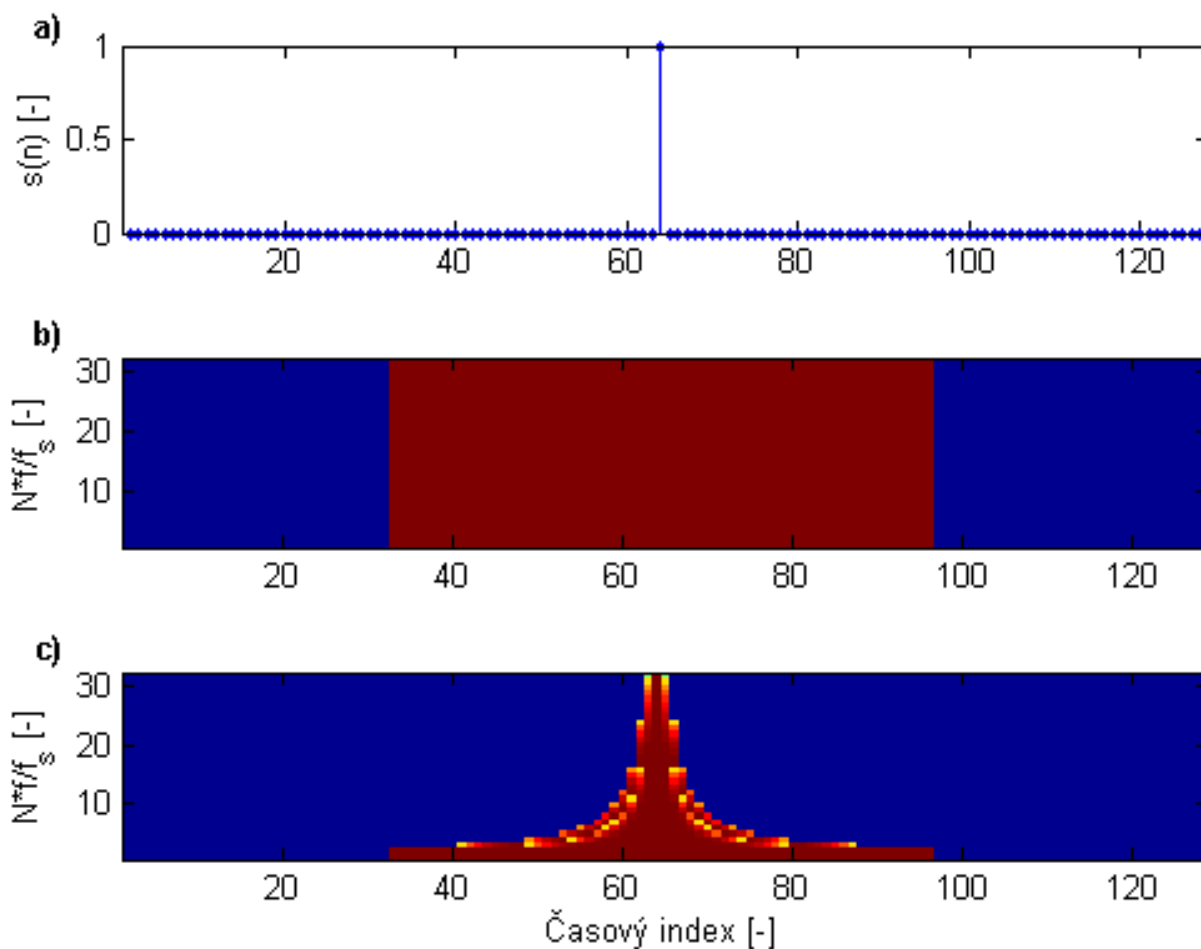
Jednou z hlavních předností ADZT je velice dobrá schopnost lokalizace nestacionarity signálu v čase a to díky bázovým polynomům, které jsou tvořeny Zolotarevovými polynomy, jejichž parametry jsou adaptivně nastavovány ADZT algoritmem. Obr.26 zobrazuje spektrogram a zologram signálu, který obsahuje pouze jednotkový impuls. Tento signál představuje silnou nestacionaritu v časové doméně. Jak je vidět z průběhu spektrogramu na Obr.26b vytvořeného obdélníkovým oknem délky 64 s krokem segmentace 1, tak DFT tento puls lokalizuje s přesností 64 vzorků, což odpovídá velikosti segmentujícího okna. Tato vlastnost je dána tím, že DFT báze je tvořena komplexní exponenciálou, jejíž délka je neměnná a tím poskytuje DFT fixní časové rozlišení nezávislé na poloze pulsu v segmentu signálu.

Na druhou stranu ADZT, respektive její krátkodobá varianta STADZT, dokáže tento puls detekovat téměř s přesností na 1 vzorek pro vyšší frekvence. Tento fakt lze sledovat z průběhu zologramu na Obr.26c, kde je jednotkový puls zobrazen jako rozšiřující se špička připomínající tvar "Ještědu". Tento tvar detekovaného jednotkového pulsu je způsoben tím, že ADZT dokáže nejlépe detekovat náhlé změny signálu, pouze tehdy, když jsou tyto nestacionarity ve středu segmentu, tzn. jednotkový puls musí být přesně vycentrován v analyzovaném segmentu. Rozšiřující se tvar spektra v čase je dán způsobem sestavování matice  $\mathbf{Z}$ . Protože první dvě složky spektra DFT algoritmus ADZT neupravuje a ponechává je nezměněné v Zolotarevovu spektru, je základna "Ještědu" dána časovým rozlišením DFT. Navržené modifikace částečně kompenzují tuto nevýhodu STADZT a budou detailně popsány v kapitole 8.

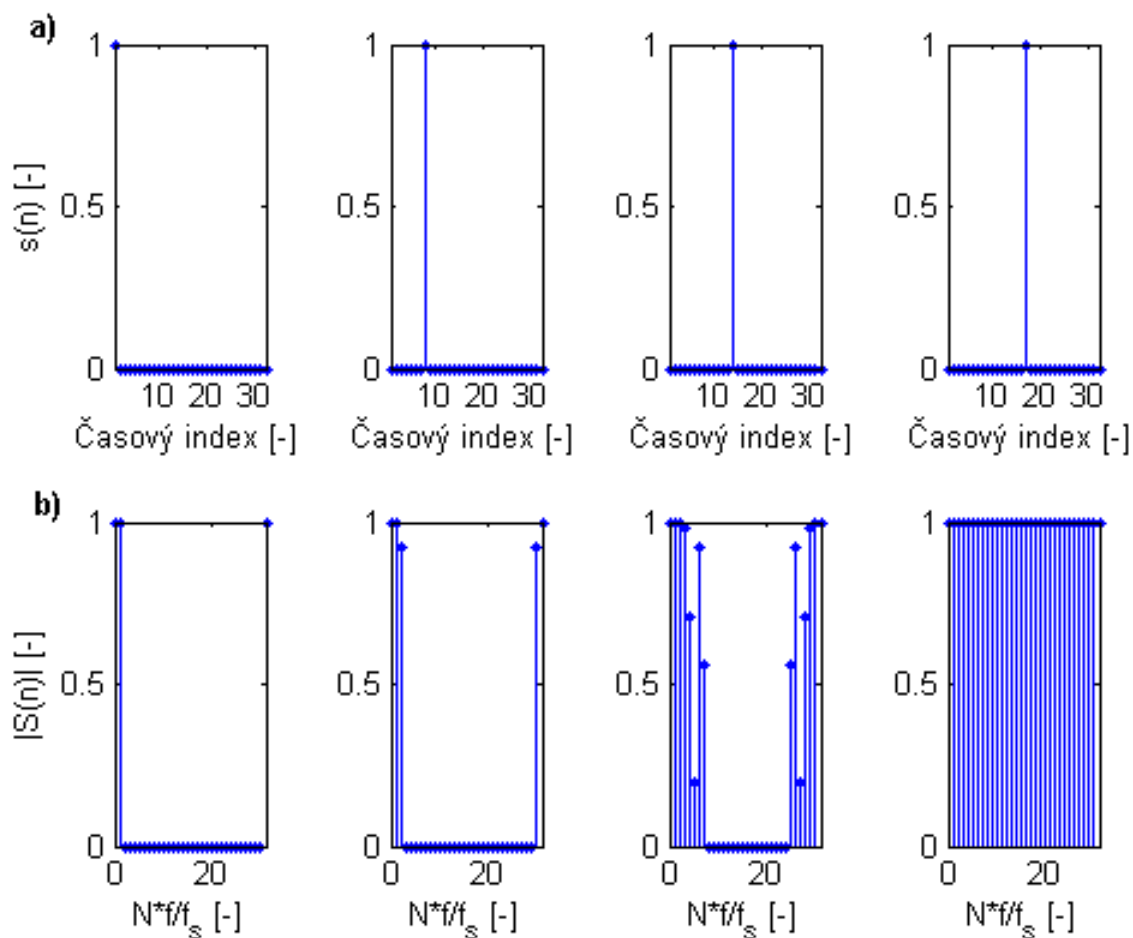
S pozorovaným jevem, kdy se mění přesnost časové lokalizace v závislosti na dané frekvenci, se lze setkat též u WT popsané v kapitole 2.8. Porovnání časově-frekvenčního rozlišení STDFT, WT a STADZT je znázorněno na Obr.1. Na rozdíl od WT, kde časové rozlišení pro vyšší hladiny (parametr  $a$ ) roste a frekvenční rozlišení naopak klesá, je časové rozlišení ADZT dáno mírou nestacionarity analyzovaného signálu skrze parametr šířky pásma  $m$  analyzující bázové funkce. Frekvenční rozlišení STADZT je určeno délkou segmentu signálu a je neměnné. Podobnost ADZT s WT lze rovněž spatřovat v tom, že podobně jako u WT, je i u ADZT prováděn výpočet vzájemné energie segmentu signálu se Zolotarevovým polynomem. Na rozdíl od WT je ovšem příslušný Zolotarevův polynom určen vlastnostmi analyzovaného signálu a nikoliv transformací mateřské vlnky nezávisle na signálu. Proto myšlenka ADZT odpovídá více principu metody hlavních komponent (PCA) než principu vlnkové transformace.

Obr.27 zobrazuje čtyři Zolotarevovy spektra převzatá ze zologramu uvedeném na Obr.26 společně se vstupním signálem, který obsahuje pouze jednotkový puls. Zologramy jsou vybrány pro čtyři polohy pulsu v segmentu odpovídající časovým indexům 33, 44, 60 a 64 spektrogramu. Pro dva krajní případy Obr.26a a Obr.26d, které odpovídají pulsu na začátku segmentu a na jeho středu odpovídají spektra, která obsahují buď pouze první dvě spektrální složky a nebo všechny spektrální složky. Pro první uvedený případ na Obr.26a ADZT detekuje jednotkový impuls představující nestacionaritu, ale nastavením parametrů svých bázových polynomů smaže veškeré spektrální složky a nechá pouze dvě spodní složky odpovídající DFT. Druhý krajní případ, kdy je impuls ve středu segmentu a odpovídá spektru,

které obsahuje všechny spektrální složky stejně jako DFT spektrum. Zbývající dvě polohy pulsu jsou vybrány z první poloviny segmentu, jímž odpovídají spektra, která nejsou konstantní, ale postupně obsahují pouze několik spodních spektrálních složek. Počet spektrálních složek obsažených v ADZT spektru odpovídá poloze pulsu v analyzovaném signálu. Tento vztah má exponenciální charakter, jak je patrné z průběhu počtu spektrálních složek v závislosti na poloze jednotkového impulsu v segmentu analyzovaného signálu zobrazených na Obr.28, kde počet spektrálních složek postupně narůstá s tím, jak se puls přibližuje ke středu segmentu.

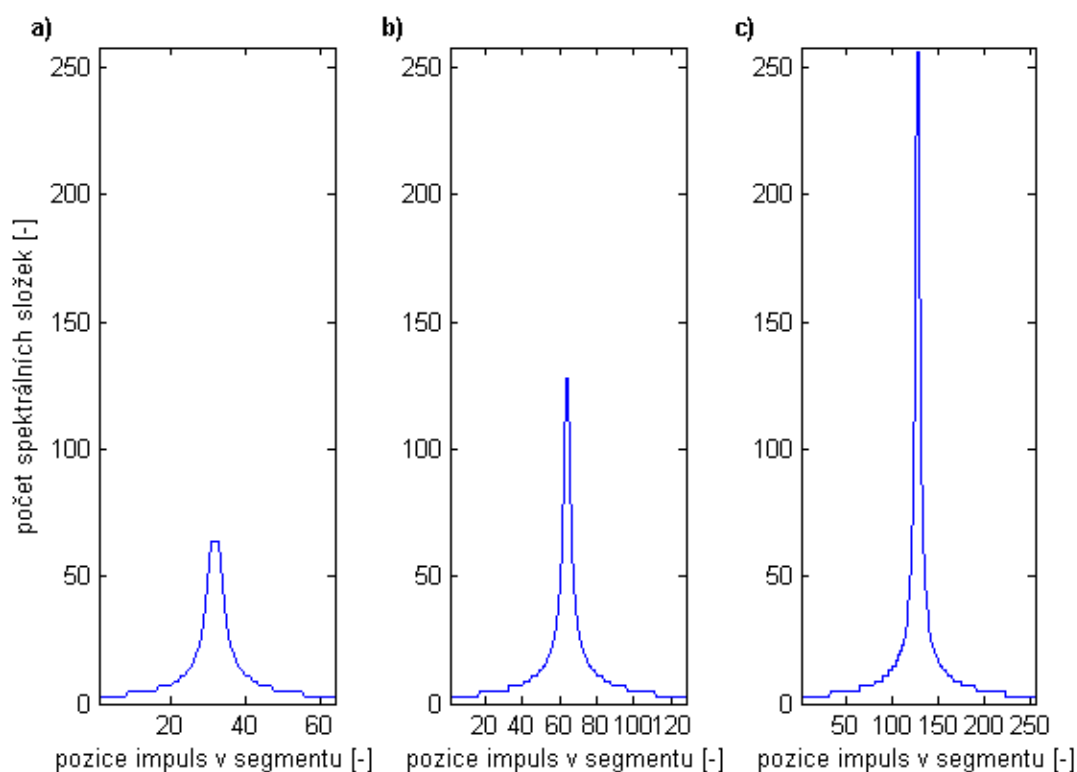


Obrázek 26: Časová lokalizace jednotkového impulsu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek.



Obrázek 27: Vliv polohy jednotkového pulsu na Zolotarevovo spektrum. První řádek (a) ukazuje vybrané polohy jednotkového impulsu v segmentu a to postupně pro polohy 1, 12, 28 a 32. Těmto signálům odpovídají jednotlivá Zolotarevova spektra na druhém řádku (b).

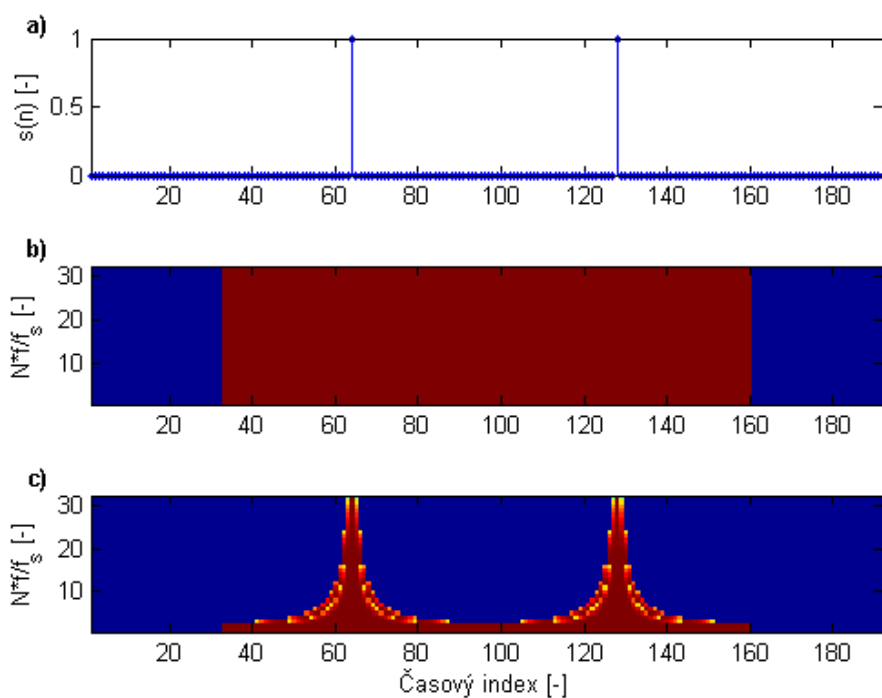
Z uvedeného porovnání detekce jednotkového impulsu na Obr.26 se nabízí myšlenka, že DFT je rovněž schopna časově lokalizovat tento impuls s velkou přesností a to tak, že tento impuls bude vždy centrován na střed oblasti, v tomto případě tedy na 64. segment. Tento postup je možné použít pouze tehdy, když je zajištěno, že analyzovaný signál obsahuje pouze jeden jednotkový impuls a nebo jeho vzdálenost je delší než délka segmentovacího okna. V opačném případě dochází ke zvětšení oblasti obsahující energii signálu rovnoměrně rozloženou do všech frekvenčních složek signálu, a tak není zcela jasné kolik jednotkových impulsů je skryto v této oblasti. Tato situace je zobrazena na Obr.29 a Obr.30, kde jsou tyto jednotkové impulsy od sebe vzdáleny na délku segmentačního okna (Obr.29) a na polovinu délky segmentačního okna (Obr.30). Jak je vidět ze zobrazených spektrogramů, STDFT není schopna tyto impulsy od sebe rozeznat (Obr.29b a Obr.30b). Naproti tomu STADZT je schopna tyto dva jednotkové impulsy detekovat nezávisle na jejich vzdálenosti, jak je patrné z Obr.29b a Obr.30b, kde jsou tyto pulsy opět lokalizovány typickým tvarem "Ještědu"s



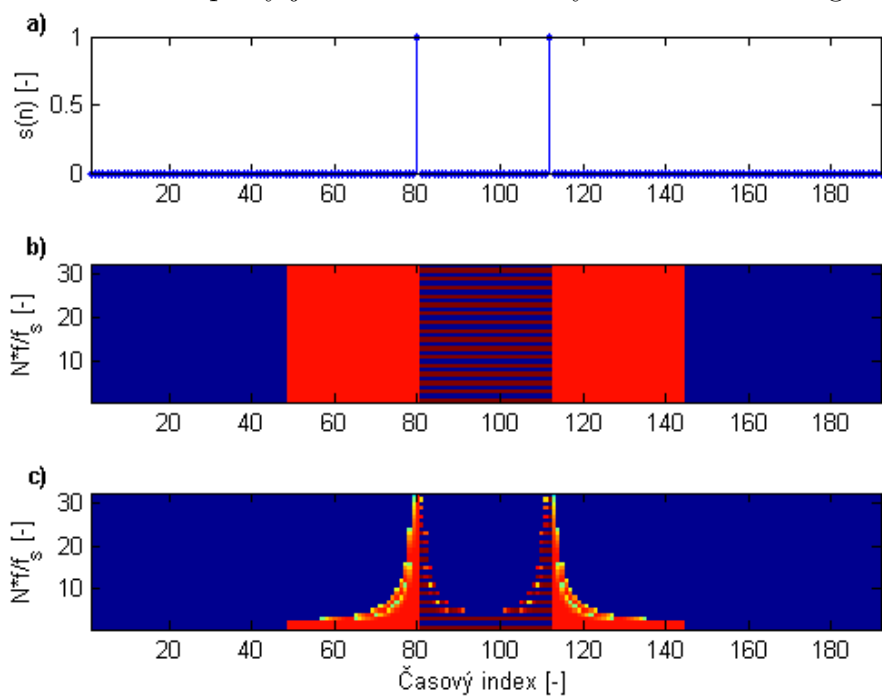
Obrázek 28: Počet spektrálních čar v závislosti na poloze jednotkového impulsu v segmentu signálu pro různé délky segmentu: 64 (a), 128 (b), 256 (c).

velkou přesností pro vyšší frekvence.

Na základě výsledků této kapitoly lze říci, že ADZT umí velice dobře lokalizovat silné nestacionarity signálu v čase, které jsou zde představovány jednotkovým impulsem a to i v případě, kdy je vzdálenost mezi těmito impulsy kratší než je délka okna segmentace. Z této provedené analýzy vyplývá, že ADZT je vhodná ke spektrální analýze těchto typů signálů obsahující nestacionární složky.



Obrázek 29: Časová lokalizace dvou jednotkových impulsů (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Jednotkové pulsy jsou od sebe vzdáleny na délku okna segmentace, tj. 64.



Obrázek 30: Časová lokalizace dvou jednotkových impulsů (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Vzdálenost jednotkových pulsu je v tomto případě kratší než je délka okna segmentace, v tomto případě 32 vzorků.

## 6.6 Mapování průchodů algoritmem ADZT

V kapitole 4.2 je podrobně popsán postup, jak ADZT algoritmus vypočítá spektrální složky ADZT spektra podle jednoho ze tří možných postupů znázorněném diagramem na Obr.3. Jedním z vhodných způsobů analýzy chování ADZT je možnost vykreslení těchto průchodů algoritmem do map, které ukazují použitý způsob výpočtu jednotlivých spektrálních složek v čase. Tím je získán nový nástroj pro analýzu chování ADZT a vyhodnocení frekvence průchodů algoritmem.

První dva řádky na Obr.31 představují spektrogram a zologram signálu, který je volen z ohledem na dobré znázornění vlastností ADZT a jeho výběr je blíže diskutován v následující kapitole 5. Analyzovaný signál obsahuje dvě hlavní části. První oblastí je stacionární část tvořená ze dvou harmonických složek, které nejsou ortogonální na bázi DFT, a proto zde vzniká spektrální prosakování. To je vidět na spektrogramu vytvořeném pravoúhlým oknem o délce  $N = 128$  a s krokem segmentaci 1. Parametry spektrogramu nejsou voleny optimálně, protože DFT spektrum vstupuje do ADZT, která nepotřebuje jakkoliv modifikovat vstupní signál váhovacím oknem (optimální volbou parametrů ADZT se podrobněji zabývá samostatná kapitola 7). Druhá část analyzovaného signálu obsahuje kromě harmonického signálu i Diracův impuls, který reprezentuje silnou nestacionaritu v časové oblasti. Z porovnání spektrogramu a zologramu je patrné, že ADZT dokáže potlačit spektrální potlačení (viz kapitola 6.2) a zároveň zvládne s vysokou přesností lokalizovat jednotkový impuls v časové oblasti.

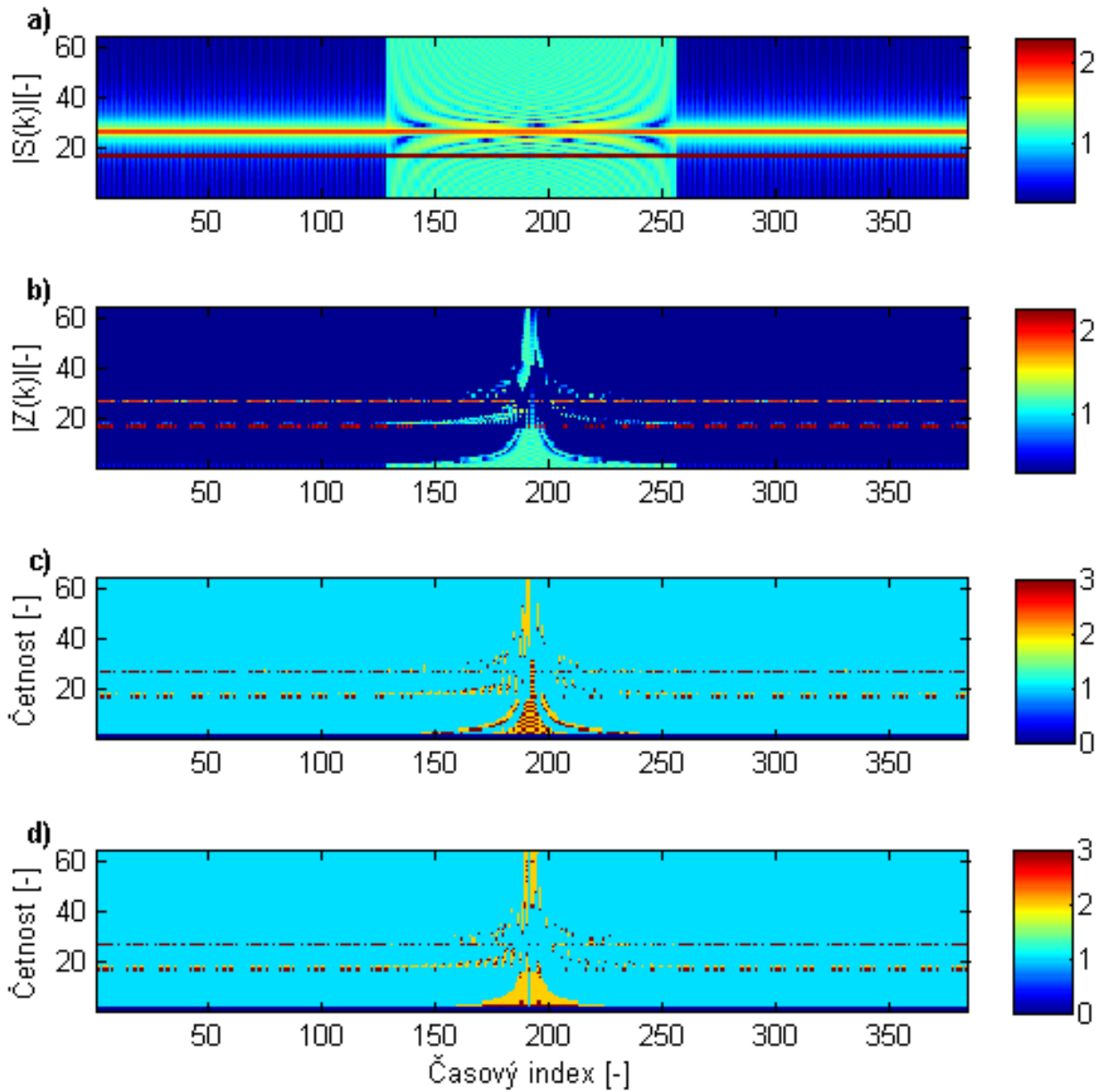
Mapy průchodů algoritmem vykresleny na Obr.31c a Obr.31d ukazují, jak ADZT potlačuje spektrální prosakování díky volbě prvního způsobu výpočtu ADZT spektra a pouze v případě, kdy spektrální složka odpovídá harmonické složce analyzovaného signálu, je tato ADZT spektrální složka určena (ve většině případech) pomocí třetího způsobu výpočtu. Výběr třetího průchodu algoritmem je dán tím, že tato část signálu obsahuje jen dvě harmonické složky, které jsou stabilní a kromě spektrálního prosakování neobsahuje DFT spektrum žádné jiné signifikantní artefakty a proto je ADZT schopna vybrat pouze důležitou část spektra (viz kapitola 6.2). Při pohledu na mapu průchodů signálu tvořenou jednotkovým impulsem (oblast kolem časové oblasti 150-250) je vidět, že ADZT už více využívá i zbylé dva způsoby výpočtu ADZT spektra, protože vstupní DFT spektrum signálu obsahuje hodně artefaktů způsobené silnou nestacionaritou analyzovaného signálu. Přesto je schopna ADZT na rozdíl od DFT celkem přesně lokalizovat jednotkový impuls v čase (viz kapitola 27).

Mapy průchodů jsou doplněny histogramem četností těchto průchodů zobrazeným pro reálnou a imaginární složku zvlášť na Obr.32. Vyobrazené histogramy jen potvrzují výše popsané chování, kdy ADZT při analýze stacionárního signálu prochází z větší části první způsobem výpočtu ADZT spektra, zatímco při výskytu nestacionarity je spektrum počítáno pomocí zbylých dvou způsobů.

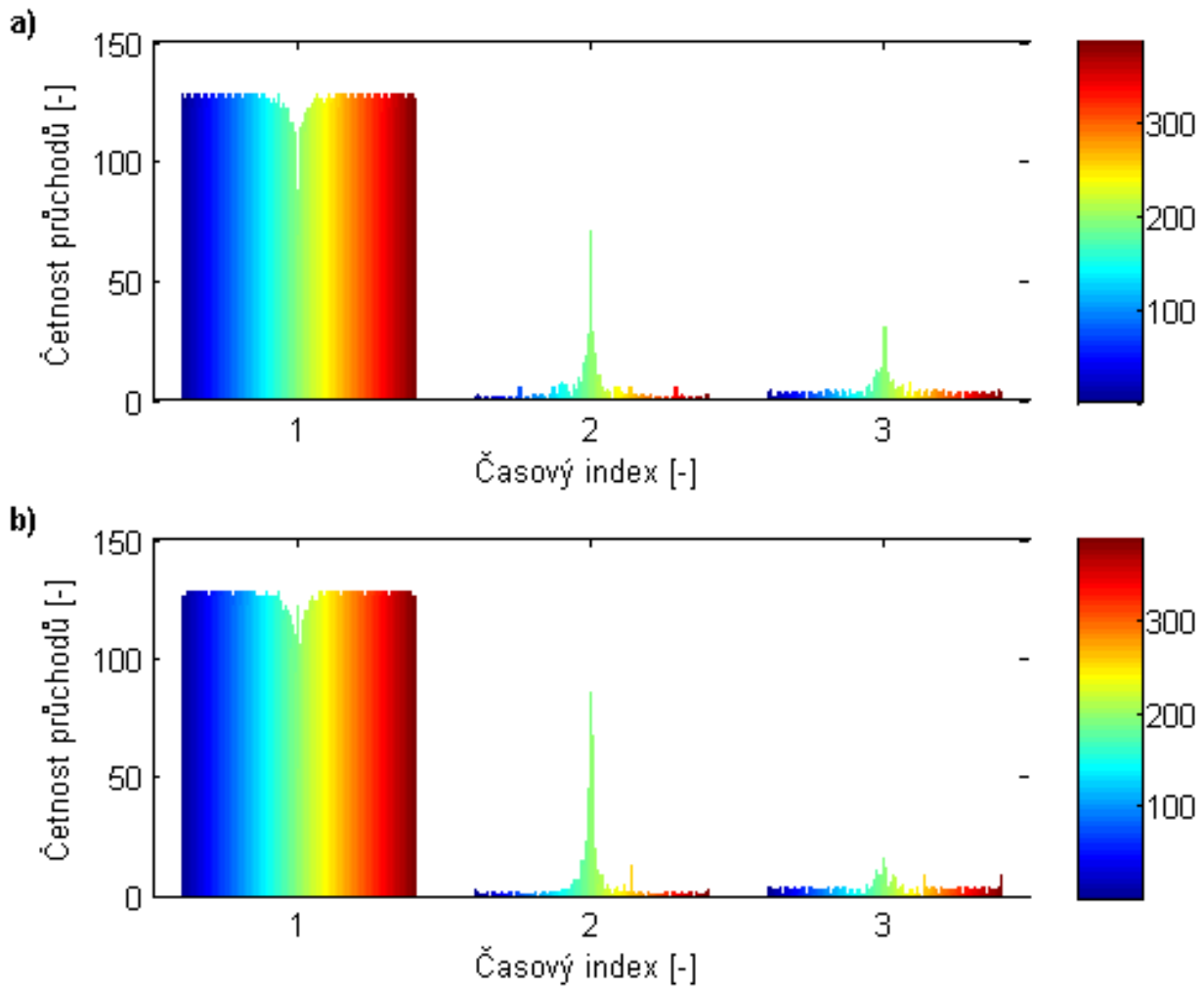
Při vytváření map průchodů ADZT spekter signálů, které neobsahují žádné spektrální prosakování, je možné spatřit velmi malé (řádově  $e^{-14}$ ) hodnoty DFT spektra. Tyto hodnoty vzniknou během výpočtu pomocí FFT algoritmu a jsou náhodně rozmístěny po celém spektru mimo spektrální složky odpovídající harmonickým složkám signálu. Díky tomu ADZT

algoritmus hledá optimální šířku pásma  $m$  a index nestacionarity  $k$  i pro tyto náhodné hodnoty a tím mohou být ovlivněny pomocné výstupy ADZT jako je k-gram, m-gram a samotné mapy průchodů. Výsledná spektra signálu jsou však dle předpokladů v pořádku, protože se jedná o velmi malé hodnoty ( $e^{-14}$ ). Toto chování je možné potlačit tím, že se do ADZT algoritmu zavede prahování vstupního DFT spektra a tím se tyto náhodné hodnoty nahradí malou konstantní hodnotou jako například eps. Mapy průchodů na Obr.33 zobrazují výsledné mapy vytvořené s ADZT algoritmem bez prahování (viz první řádek tohoto obrázku) a s prahováním (viz druhý řádek téhož obrázku). Z porovnání těchto map je zřejmé, že použití prahování vede na mapy průchodů, které odpovídá očekávanému chování ADZT algoritmu.

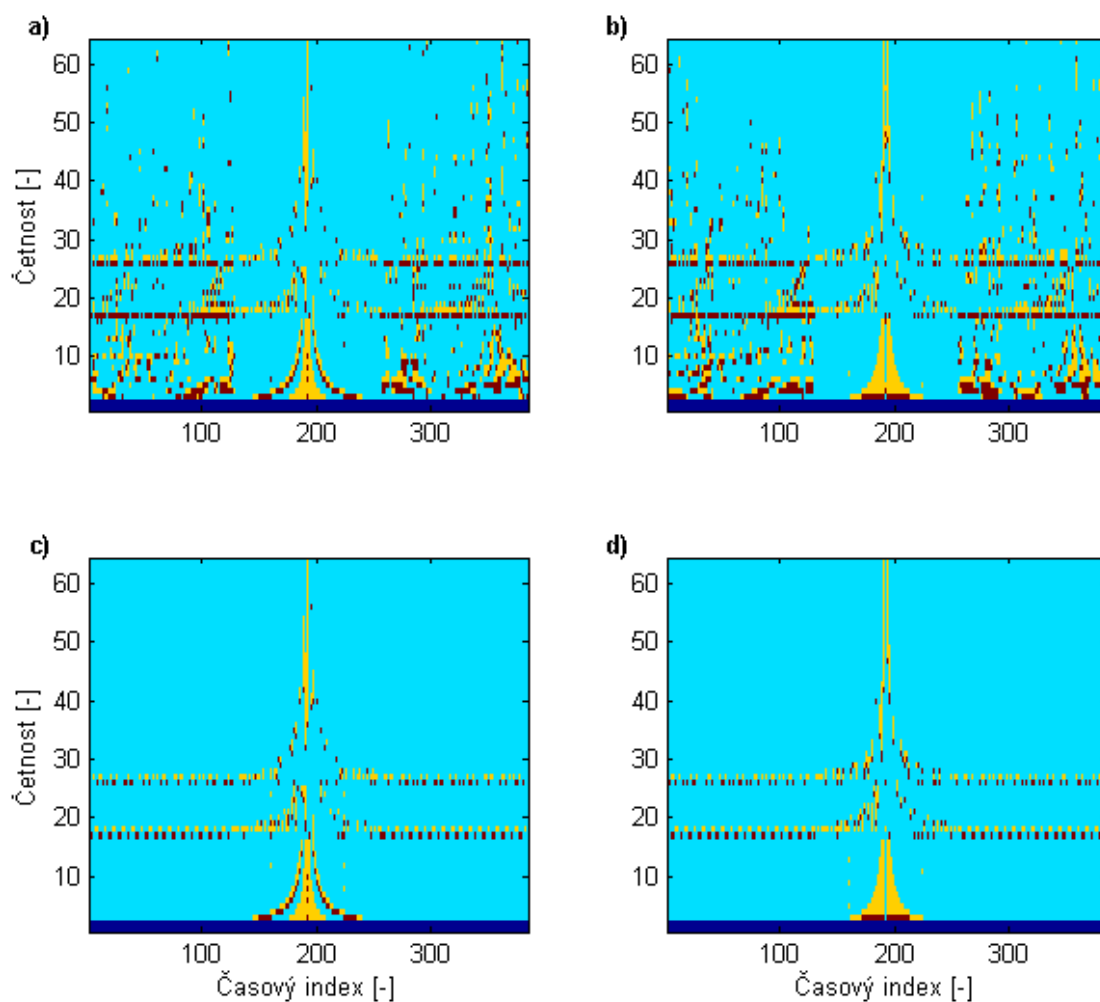




Obrázek 31: Spektrogram (a) a zologram (b) složený ze dvou harmonických signálů s jednotkovou amplitudou a frekvencí  $f_1 = 16f_s/N$  a  $f_2 = 25.5f_s/N$  a jednotkovým skokem. Mapy průchodů výpočtu ADZT reálné (c) a imaginární (d) části spektra.



Obrázek 32: Histogram průchodů výpočtu ADZT reálné (a) a imaginární (b) části spektra odpovídající zologramu na Obr.31b. Barevná škála jednotlivých sloupců představuje časový index zologramu (viz colorbar)



Obrázek 33: Mapy průchodů výpočtů ADZT reálné a imaginární části bez použití prahování (a, b) hodnot vstupního DFT spektra do algoritmu ADZT a jeho použití (c, d). Modrá barva odpovídá 1. způsobu výpočtu, žlutá barva odpovídá 2. způsobu a červená barva odpovídá 3. způsobu.

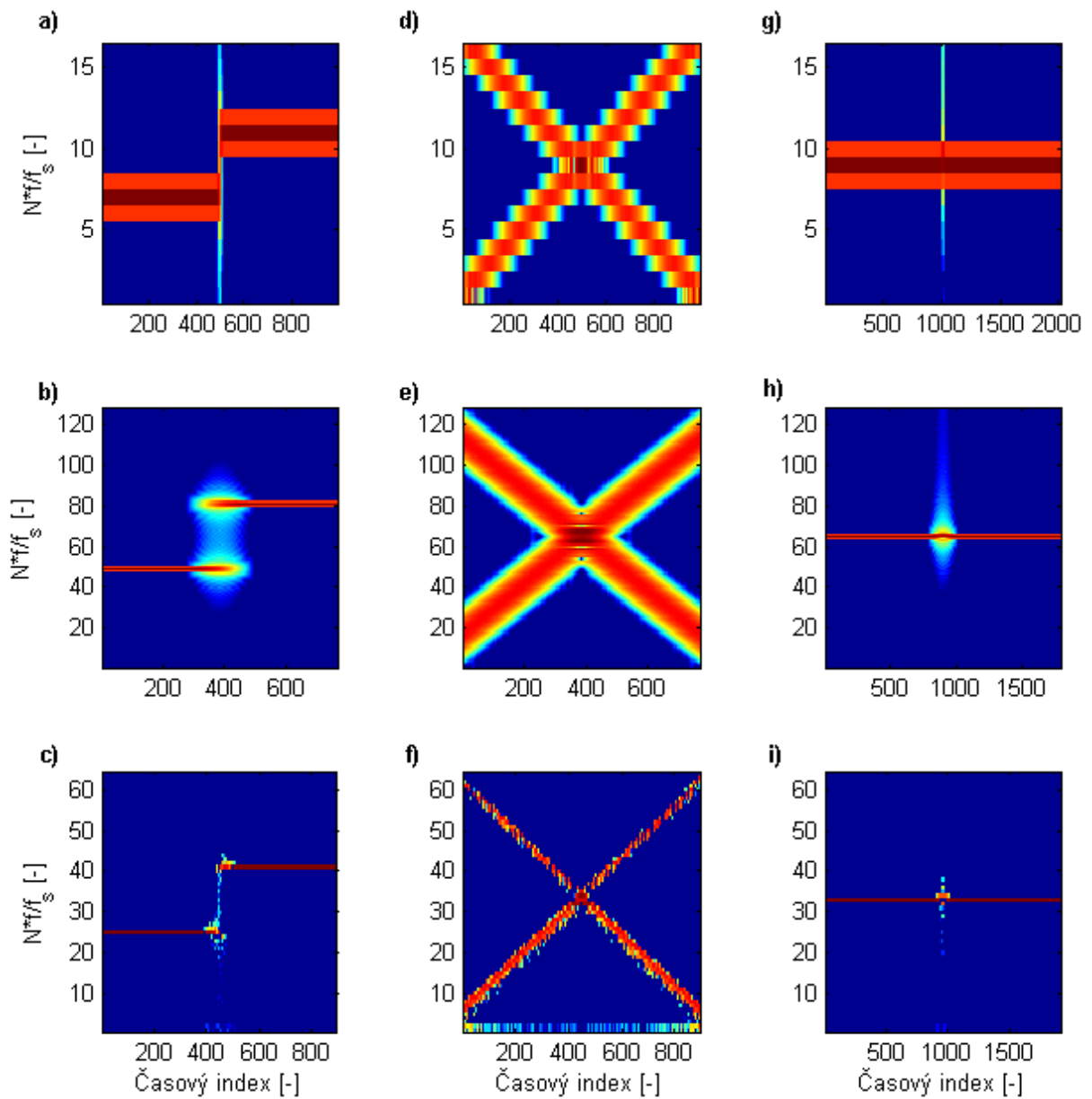
## 6.7 Analýza signálů se změnou frekvence a fáze

Tato kapitola se zabývá popisem chování ADZT, respektive její krátkodobé varianty STADZT při analyzování signálů obsahující změnu jeho frekvence nebo fáze. Průběh těchto změn může být buď skokový, kdy změna parametru představuje silnou nestacionaritu signálu, a nebo pomalý, kdy se daný parametr kontinuálně mění jako například frekvenční modulace. Diskutované výsledky STADZT jsou pro lepší názornost společně uvedeny se širokopásmovými a úzkopásmovými spektrogramy vytvořené pomocí STDFFT.

První uvedený případ popisuje náhlou změnu frekvence, kdy harmonický signál skokově změnil svou frekvenci z 96 Hz na 160 Hz. Tato změna je pomocí širokopásmového spektrogramu dobře lokalizována v čase, jak je patrné z Obr.34a, na kterém je rovněž možné pozorovat odpovídající nepřesné frekvenční rozlišení dáno principem neurčitosti (5). Pokud je pro generování spektrogramu použito dlouhé segmentační okno STDFFT, dosahuje výsledný spektrogram dobré frekvenční rozlišení, ale časová lokalizace změny frekvence signálu se zhorší. Výsledný úzkopásmový spektrogram zobrazený na Obr.34b, bude obsahovat přesahy obou frekvencí odpovídající délce segmentačního okna, což je v tomto případě 128 vzorků. Obr.34c zobrazuje Zologram harmonického signálu se skokovou změnou frekvence a jak je z tohoto obrázku zřejmé, tak STADZT je schopna lokalizovat tuto změnu v čase s velkou přesností (přesah frekvencí v čase je oproti úzkopásmovému spektrogramu minimální) a zároveň si zologram zachovává dobré frekvenční rozlišení. Na uvedeném zologramu lze částečně pozorovat tvar "Ještědu", jenž signalizuje výskyt silné nestacionarity analyzovaného signálu (viz detekce jednotkového pulsu).

Výsledky analýzy signálu s postupnou změnou frekvence signálu jsou ilustrovány dvěma spektrogramy a jedním zologramem v prostředním sloupci na Obr.34, kde je zachyceno spektrum signálu tvořeného směsí dvou harmonických signálů jejichž frekvence je postupně u prvního signálu rozmítána od 36Hz do 220Hz a u druhého signálu právě naopak. V tomto případě, kdy je posun segmentačního okna roven 1 vzorku, poskytují oba spektrogramy srovnatelnou časovou lokalizaci, tzv. "křížení" rozmítaných frekvencí dílčích harmonických signálů (viz Obr.34d a Obr.34e). Použitím STADZT s obdélníkovým oknem o délce 128 vzorků dosahuje výsledný zologram výrazně lepšího časového rozlišení. Z bližšího pohledu na uvedený zologram je však ale patrné, že detekované frekvence signálů nejsou v celém zologramu konzistentní. Jejich průběh je periodicky rušen vlastností ADZT, která se snaží detekovat okamžitou obálku signálu ve vyšší frekvenční složce, která je proto periodicky "promazávána".

Dalším parametrem, který může být u analyzovaného signálu měněn je jeho fáze. STDFFT tuto změnu lokalizuje v čase pro generované spektrogramy s odpovídající přesností, jak je patrné z vykreslených spektrogramů na Obr.34g a 34h. STADZT je schopna tuto změnu fáze také časově lokalizovat a to s přesností až na jeden vzorek pro vyšší harmonické složky, jak je vidět z průběhu zologramu obsahující tvar "Ještědu", který je "posazen" na spektrální složce odpovídající frekvenci harmonického signálu a směřujícího směrem k vyšším a i nižším frekvenčním složkám spektra (viz Obr.34i).



Obrázek 34: Spektrální analýza signálu se skokovou změnou frekvence pomocí úzkopásmového STDFT (a), širokopásmového STDFT (b) a STADZT (c), signálu s postupně rozmítanou frekvencí STDFT (d), širokopásmového STDFT (e) a STADZT (f) a signálu se skokově změněnou fází postupně rozmítanou frekvencí STDFT (g), širokopásmového STDFT (h) a STADZT (i). Zologramy byly vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 128 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Úzkopásmové spektrogramy byly vytvořeny oknem délky 32 vzorků a širokopásmové spektrogramy oknem délky 256 vzorků.

Z analýzy provedené v této kapitole vyplývá, že signály s frekvenční a fázovou změnou lze pomocí ADZT analyzovat s dobrou časovou lokalizací změn a zároveň s dobrým frekvenčním rozlišením.

## 6.8 Analýza signálu se změnou amplitudy

Analyzovaný signál může obsahovat kromě změny frekvence a fáze i změnu jeho amplitudy. Při náhlé změně amplitudy analyzovaného signálu je chování ADZT stejné jako při detekci náhlé změny fáze signálu, která byla popsána v předchozí kapitole a ilustrována obrázky ve třetím sloupci na Obr.34, a proto nebude tento případ znova popisován. Naopak měnila se amplituda signálu plynule s určitou frekvencí, jedná se o analyzování amplitudově modulovaného signálu, což je podrobně rozebráno v kapitole 6.3 zabývající detekcí okamžité obálky a proto ani tato změna nebude v této části znova diskutována.

Zvláštním případem změny amplitudy je tlumený harmonický signál, který lze generovat pomocí následujícího vztahu

$$s(n) = A^n \sin\left(\frac{2\pi f n}{f_s}\right), \quad A \in (0, 1), \quad (70)$$

kde  $A^n$  představuje časovou konstantu tlumení,  $f$  je frekvence signálu a  $f_s$  je vzorkovací frekvence.

Odpovídající zologramy a spektrogramy tohoto signálu jsou zobrazené na Obr.35 a to pro různé tři počáteční amplitudy  $A$ , které nabývají pro jednotlivé sloupce obrázku postupně hodnoty 0.97 (první sloupec), 0.95 (druhý sloupec) a 0.89 (poslední sloupec).

Pomocí Z transformace lze získat vztah pro výkonové spektrum tohoto signálu ve tvaru

$$S(\exp(j\theta)) = Z^* \{s(n)\} Z \{s(n)\} |_{z=\exp(j\theta)}, \quad (71)$$

kde [39]

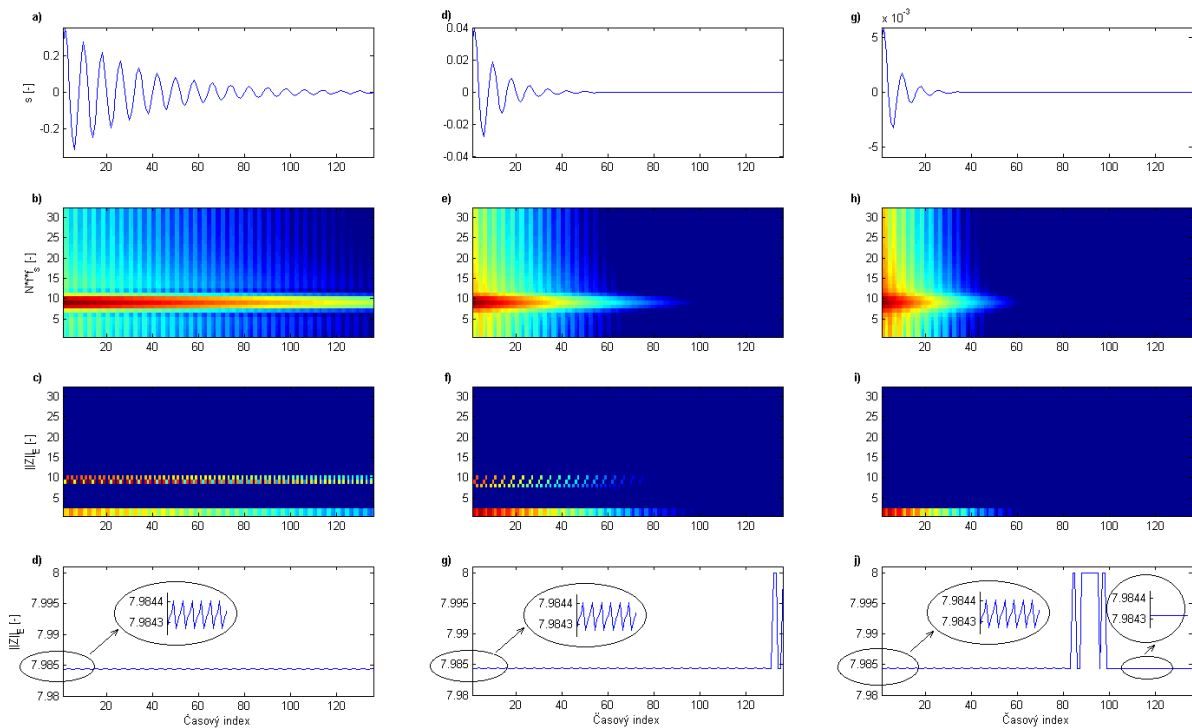
$$Z \{s(n)\} = \frac{Az^{-1} \sin\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right)}{1 - 2Az^{-1} \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) + A^2 z^{-2}}. \quad (72)$$

Tento vztah ukazuje, že DFT spektrum tohoto signálu je v celém rozsahu nenulové z čehož vyplývá, že se tedy jedná o širokopásmový signál. Spektrum této tlumeného harmonického signálu je možné pozorovat na spektru odpovídající 30-tému segmentu spektrogramu uvedeného na Obr.35b, kde je výsledné spektrum zobrazeno jako "kopec" přes celou frekvenční oblast. ADZT považuje všechny spektrální složky tohoto spektra za spektrální prosakování a snaží se je proto z výsledného Zolotarevova spektra odstranit. Tento jev je možné pozorovat na spektru 30-tého segmentu zologramu zobrazeném na Obr.35c, kde ADZT ponechá pouze ty spektrální složky, které odpovídají zadané frekvenci signálu. Díky silné fázové citlivosti ADZT je možné pozorovat vliv pozice okna vůči analyzovanému signálu, což se projeví periodickou změnou velikosti spektrálních složek ponechaných v Zolotarevově spektru, čemuž odpovídají uvedené zologramy spektrální složky s indexem 9 a 10.

Dále je z uvedených zologramů a spektrogramů na Obr.35 zřejmé, že pokud je časová konstanta obálky signálu porovnatelná s délkou okna segmentace jsou obě transformace schopné tento signál detekovat s tím rozdílem, že STADZT zároveň odstraňuje všechny spektrální složky, které neodpovídají zadané frekvenci analyzovaného signálu. Jak je vidět z uvedeného příkladu tlumení v posledním sloupci Obr.35, rozdíl nastává jakmile je časová konstanta tlumení menší než polovina délky okna, kdy je harmonický průběh signálu velmi rychle utlumen. V tomto popisovaném případě ztrácí STADZT schopnost tento signál detekovat, a proto výsledný zologram (viz Obr.35i) obsahuje pouze první a druhou spektrální složku (dle definice výpočtu Zolotarevova spektra ADZT algoritmem). Z provedené analýzy chování pomocí mapování průchodů algoritmem (viz kapitola 6.6) vyplývá, že je mazání způsobeno tím, že ADZT prochází pouze větví algoritmu odpovídající tomu, kdy má stacionární a nestacionární část analyzovaného signálu opačné znaménko, což vede na vymazání analyzované spektrální složky.

Díky tomu, že je ADZT schopna zpětné rekonstrukce signálu ze spektra, není informace o signálu zcela odstraněna, ale je přesunuta ve formě parametrů analyzujících bázevých funkcí matice  $\mathbf{Z}$ , a proto je možné do jisté míry pomocí euklidovské normy určit, zdali analyzovaný signál obsahuje nějakou významnou spektrální složku či nikoliv. Z uvedených průběhů euklidovské normy (viz kapitola 4.4.5) lze říci, že signál obsahuje nějakou významnou složku pokud tato norma není konstantní. Toto tvrzení lze pozorovat v průběhu této normy pro tlumený harmonický signál v posledním případě zobrazeném na Obr.35j, kde ilustrovaný zologram neobsahuje informaci o tlumené harmonické složce, ale její přítomnost je zachycena periodickou změnou průběhu euklidovské normy způsobenou adaptivním nastavováním bázevých funkcí ADZT.

Tento analyzovaný signál (70) odpovídá modelu komplexních sinusovek v šumu, pro který je vhodná Pronyho metoda nebo metoda využívající rozklad signálu do šumového a signálového podprostoru [35]. Z uvedené analýzy v této kapitole je evidentní, že ADZT není pro tento typ širokopásmových signálů, které mohou být získány vybuzením rezonátoru Diracovým impulsem, příliš vhodná.



Obrázek 35: Analýza tlumeného harmonického signálu dle vztahu (70) pro různou počáteční hodnotu  $A$  -  $A = 0.97$  (a),  $A = 0.91$  (d) a  $A = 0.86$  (g). Odpovídající spektrogramy (b, e, h) a zologramy (c, e, i) jsou vytvořené pomocí segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek. Pro spektrogramy je použito Hammingovo váhovací okno a zologramy zase pravoúhlé. Poslední řádek obrázku ilustruje průběh euklidovské normy matice  $\mathbf{Z}$ .



## 6.9 Analýza signálu se šumem

Jedním z cílů spektrální analýzy je analyzování signálů, které obsahují kromě vlastního signálu také i šum, který ztěžuje detekci jednotlivých harmonických složek a změny jejich parametrů v čase. Některé tyto spektrální metody se používají pro odstranění šumu ze signálu a to tím způsobem, že se signál převede do frekvenční oblasti (například DFT s vhodně zvoleným typem a délkou okna) a pomocí prahování je nežádoucí šum ze signálu odstraněn a následně se signál zpětně převede do časové oblasti.

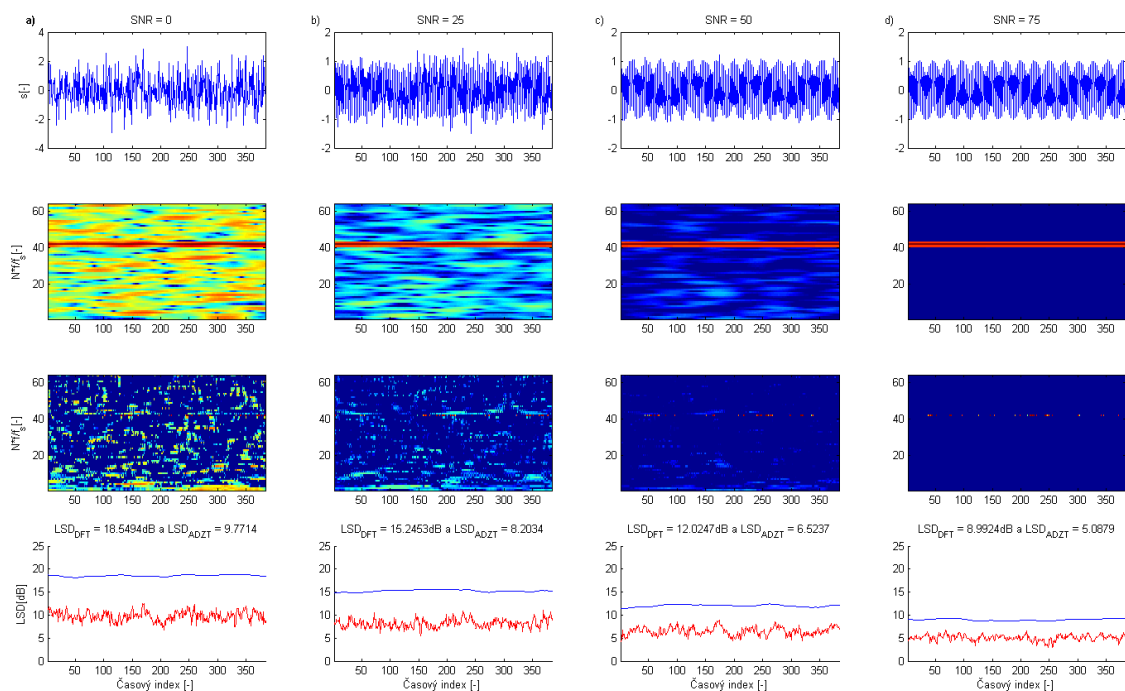
ADZT se jeví pro tuto spektrální disciplínu jako vhodný nástroj, což z prvních zologramů uvedených na Obr.36 není moc patrné. Tento obrázek ilustruje výsledky STADZT a STDFT harmonického signálu, který je ortogonální k analyzující bázi ADZT a rovněž i k bázi DFT. Touto vlastností analyzovaného signálu nevzniká žádné spektrální prosakování. K tomuto signálu je v různém poměru přičten bílý šum (náhodný signál s rovnoměrnou výkonovou spektrální hustotou) - SNR = 0dB, 25dB, 50dB a 75dB. V ideálním případě, kdy by se použila taková spektrální transformace, která by byla schopna úplně potlačit dodaný šum, by výsledný spektrogram obsahoval pouze jednu spektrální složku a to nezávisle na velikosti přičteného bílého šumu.

Obr.36 zobrazuje analyzovaný harmonický signál v čase (viz první řádek), výsledný spektrogram vytvořený STDFT pomocí Hammingova okna (viz druhý řádek), výsledný zologram vytvořený STADZT za použití pravoúhlého okna (viz třetí řádek) a logaritmickou spektrální vzdálenost (viz poslední řádek) výsledných spektrogramů vypočítanou podle vztahu (68) od ideálního spektra analyzovaného signálu bez přidaného šumu. Výsledné spektrogramy, zologramy a spektrální vzdálenosti uvedené ve sloupcích odpovídají vždy jednomu odstupům signálu od šumu - SNR (viz nadpis slouce). Z uvedených výsledků je patrné, že při zatížení analyzovaného signálu bílým šumem o jakékoliv velikosti (z uvedených SNR) není STADZT schopna daný harmonický signál detekovat a to ani v případě, kdy je SNR rovno 75db (viz poslední sloupec). Z uvedených zologramů je ale možné sledovat fakt, že ADZT celkem dobře potlačuje šum, přičemž dochází i k "promazání" harmonického signálu. Toto chování je způsobeno dodaným šumem, který ovlivňuje adaptivní nastavení analyzujících bázevých polynomů. STDFT nepotlačuje šum tak jako STADZT, ale narozdíl od STADZT je schopna detekovat harmonický signál i při SNR rovné 0dB. Z průběhu logaritmické spektrální vzdálenosti je vidět, že STADZT více potlačuje šum než STDFT (spektrální vzdálenost je nižší), ale jak již bylo řečeno STADZT zároveň maže i analyzovaný signál.

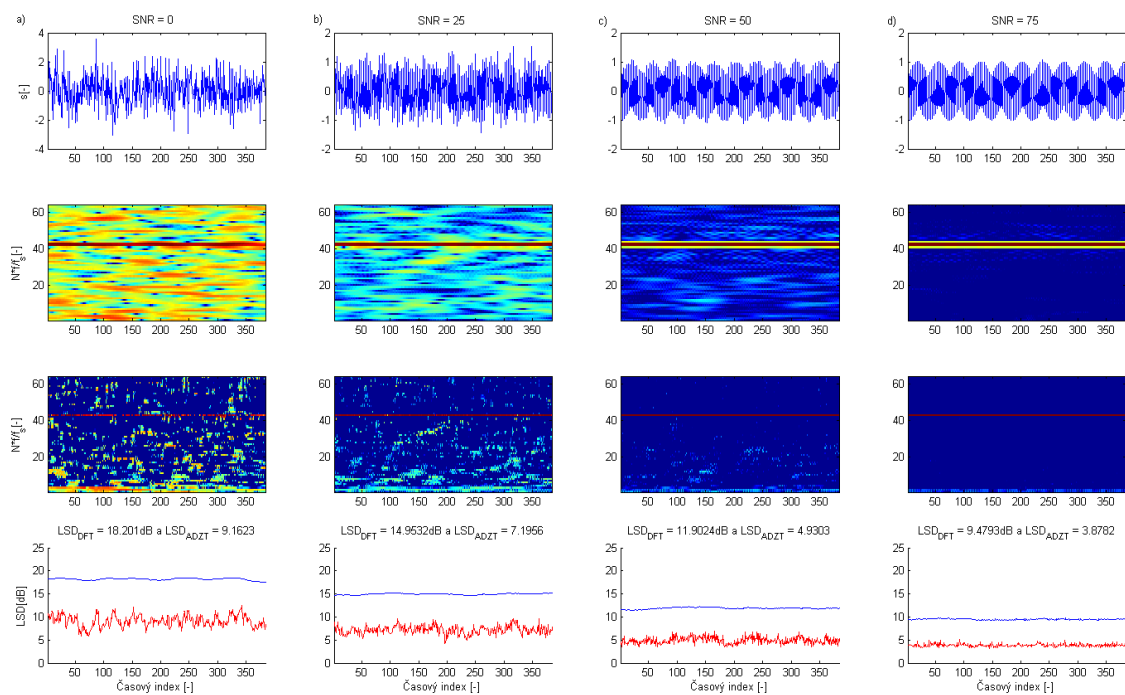
Pokud analyzovaný signál obsahuje spektrální prosakování, to znamená, že tento signál není ortogonální k bázi použité transformace (což je většina případů z reálného světa), není chování STADZT stejné jako v předchozím případě, kdy STADZT dosahuje velice nepřesných výsledků. V tomto případě, jak je ilustrováno na zologramech a spektrální vzdálenosti na Obr.37, je STADZT schopna detekovat harmonickou složku signálu a zároveň i potlačit dodaný šum. Toto chování je způsobeno spektrálním prosakováním, které ovlivňuje celé spektrum signálu, které už neobsahuje náhodné hodnoty spektrálního šumu, a proto se ADZT chová k analyzovanému signálu (pro uvedené SNR) jako by se jednalo o signál obsahující pouze spektrální prosakování, které je ADZT potlačováno čímž se zároveň odstraňuje i šum.

Toto chování je i potvrzeno průměrnou hodnotou ADZT a DFT spektra počítanou ze všech segmentů signálů a zobrazených na Obr.38 a Obr.39. Z těchto průběhů je patrné, že ADZT pro signál bez prosakování ADZT velmi silně redukuje krom šumu i vlastní signál (amplitudové spektrum se pohybuje do maximální hodnoty 10). Jestliže analyzovaný signál obsahuje i spektrální prosakování ADZT redukuje pouze šum a vlastní signál je ve spektru ponechán (viz hodnoty spektrální složky pohybující se kolem 40) a tím ADZT dosahuje lepších výsledků než je DFT.

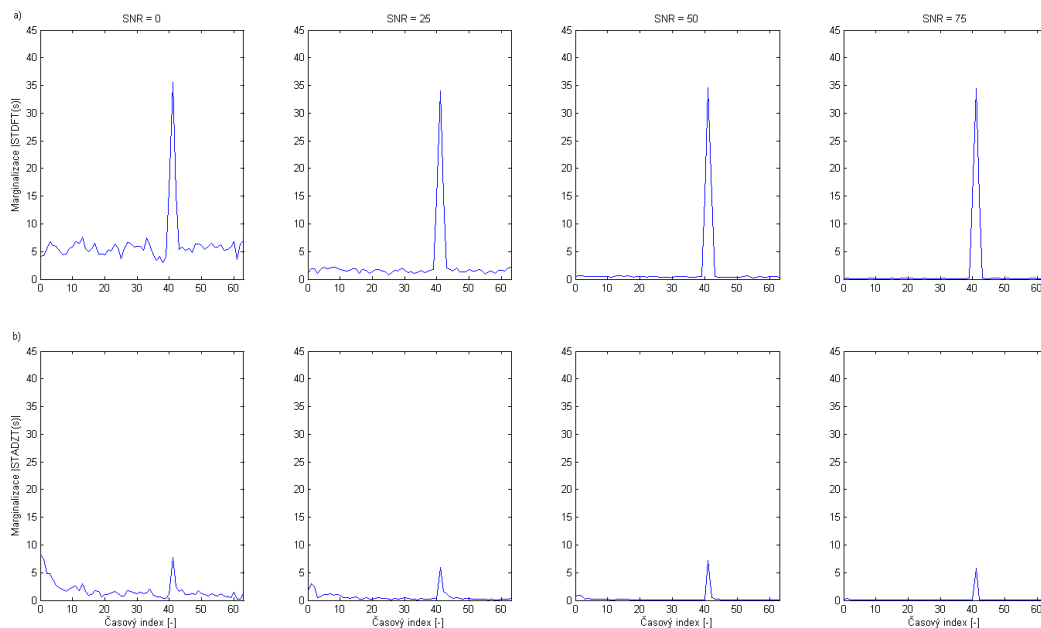
Jak by se mohlo na první pohled zdát, ADZT není vhodná pro odstraňování šumu ze signálů a to z toho důvodu, že informace, které jsou odstraněny ze Zolotarevova spektra (v tomto případě bílý šum) jsou pouze přesunuty do matice  $\mathbf{Z}$ . Při zpětné transformaci jsou tyto informace opět do signálu dodány. Jednou z možností, jak použít ADZT k odstranění šumu, je modifikace matice  $\mathbf{Z}$ . Na druhou stranu z analýzy uvedené v této kapitole je zřejmé, že ADZT lze použít k analýze signálů se šumem tehdy, pokud analyzovaný signál není ortogonální k bázi ADZT (spektrum tohoto signálu obsahuje spektrální prosakování).



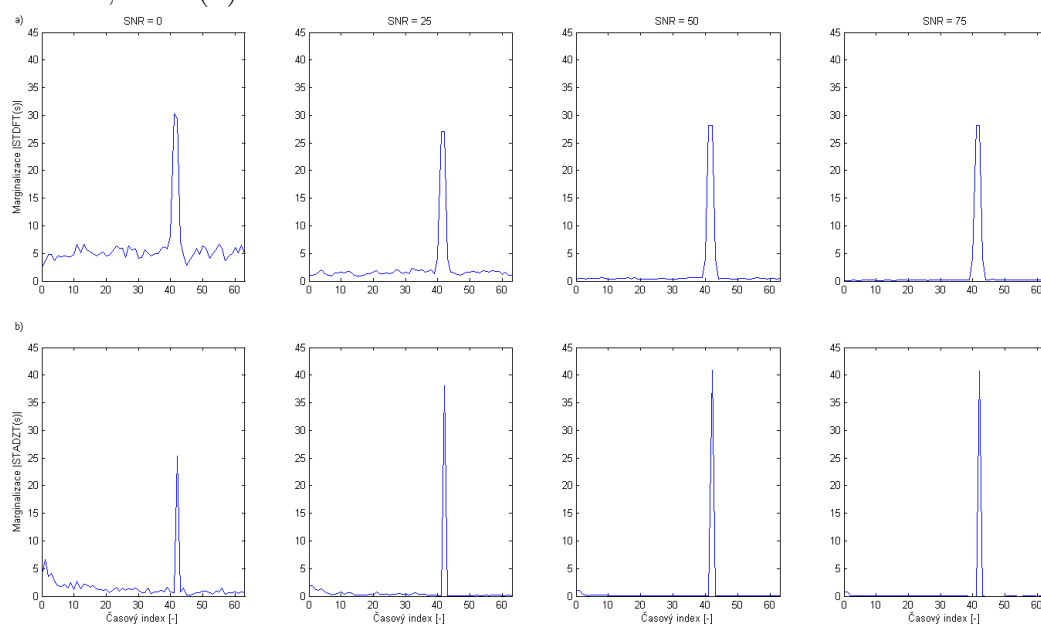
Obrázek 36: Detekce signálu v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d).



Obrázek 37: Detekce signálu s prosakováním v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d).



Obrázek 38: Marginalizace spekter detekce signálu v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d).



Obrázek 39: Marginalizace spekter detekce signálu s prosakováním v šumu (a) pomocí STDFT (b) a STADZT (c) vytvořené pomocí pravoúhlého segmentačního okna délky 64 vzorků s krokem segmentace o jeden vzorek, LSD (d).

## 6.10 Citlivost ADZT na úpravy $\mathbf{Z}$ matice

Díky tomu, že ADZT je schopna velmi účinně potlačovat spektrální prosakování, obsahují výsledná Zolotarevova spektra pouze významné spektrální složky signálu, ze kterých je možné zpětně rekonstruovat analyzovaný signál pomocí vztahu (22). Obr.7, zobrazuje Zolotarevovo spektrum společně s analyzujícími a syntetizujícími bázovými polynomy ADZT pro reálný sudý signál, který obsahuje pouze dvě harmonické složky. Zolotarevovo spektrum analyzovaného signálu obsahuje pouze dvě nenulové spektrální složky.  $\mathbf{Z}$  průběhů bázových funkcí, kde syntetizující báze obsahuje též pouze dva nenulové polynomy a spektra analyzovaného signálu by se mohlo zdát, že je ADZT ideální transformace pro kompresi signálu, protože její spektrum obsahuje pouze minimální počet složek. Bohužel tomu tak není a to z toho důvodu, že každá spektrální složka Zolotarevova spektra musí nést rovněž informaci o velikosti indexu nestacionarity a šířky pásma. Tyto hodnoty jsou nutné k sestavení  $\mathbf{Z}$  matice pro generování syntetizujících bázových polynomů podle vztahu (62) potřebných pro zpětnou ADZT pomocí vztahu (20).<sup>6</sup> To znamená, že ke každé spektrální složce ADZT náleží hodnoty  $k$  a  $m$ , které jsou rovněž komplexní. Proto k rekonstrukci signálu potřebujeme tři komplexní čísla místo jedné komplexní DFT spektrální složky. Z toho důvodu ADZT pracuje z hlediska ztrátové komprese s třikrát větším objemem dat než DFT pro stejný počet spektrálních složek.

Jako první možnost snížení objemu dat při kompresi signálu pomocí ADZT se nabízí nulování jednotlivých prvků matice  $\mathbf{Z}$ . To se musí provést tak, že z daného řádku matice se vynulují všechny hodnoty a prvky odpovídající hlavní a vedlejší diagonále se nastaví na hodnotu jedna. Z postupu sestavení matice popsané v kapitole 4.2.3 vyplývá, že tento postup úpravy matice vede na vymazání indexu nestacionarity  $k$  a šířky pásma  $m$  dané spektrální složky, která odpovídá modifikovanému řádku matice. Postupným vynecháváním prvků matice  $\mathbf{Z}$  se bude zhoršovat rekonstrukce signálu, protože bázové polynomy těchto modifikovaných spektrálních indexu (řádků matice) nebudou tvořeny ZP ale bází DFT tvořenou komplexní exponenciálou. V limitním případě, kdy bude matice  $\mathbf{Z}$  obsahovat pouze jedničkové hodnoty na hlavní a vedlejší diagonále (to odpovídá nulovým hodnotám indexu nestacionarity  $k$  a šířky pásma  $m$ ), se bude rekonstrukce signálu provádět pomocí zpětné DFT.

Pokud budou tedy z matice  $\mathbf{Z}$  odstraněny hodnoty všech řádků, kterým odpovídá nulová hodnota Zolotarevova spektra, bude rekonstrukce signálu záviset na typu použitého signálu. Pro ukázkou je slovně popsána rekonstrukce třech typů signálů:

1. Pokud signál obsahuje jednu harmonickou složku, která je ortogonální na ADZT bázi, tak Zolotarevovo spektrum obsahuje pouze jednu složku. Při použití upravené matice  $\mathbf{Z}$  podle výše zmíněného popisu bude rekonstruovaný signál odpovídat původnímu signálu. To je dáno tím, že ADZT v případě ortogonálních signálů přechází v DFT.
2. V případě, že použitý signál nebude ortogonální k bázi, tak jeho spektrum bude obsahovat prosakování pouze pro Fourierovo spektrum. Zolotarevovo spektrum bude opět

---

<sup>6</sup>Detailnější popis sestavení  $\mathbf{Z}$  je uveden v kapitole 4.2.3.

obsahovat pouze jednu spektrální složku a zbytek informace bude přesunuto do  $\mathbf{Z}$  matice. To povede při rekonstrukci signálu za použití stejné modifikace jako v předchozím případě k nepřesné rekonstrukci signálu.

3. Jestliže je rekonstruovaný signál složen ze dvou harmonických složek, může Zolotarevovo spektrum tohoto signálu obsahovat pouze jednu spektrální složku (např. spektrum signálu odpovídající 175. segmentu na Obr.18). V tomto případě vyšší spektrální složka reflektuje okamžitou obálku analyzovaného signálu, která je pro tento segment signálu nulová (odpovídá uzlům zánějů obálky). Proto při použití modifikované matice  $\mathbf{Z}$  dojde k nepřesné rekonstrukci signálu.

Druhá možnost jak snížit přenosovou rychlost je použít kvantování šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$ , což vede na kvantování matice  $\mathbf{Z}$ . Numerické chování inverzní ADZT pomocí  $\mathbf{Z}^{-1}$  je kriticky závislé na regularitě matice  $\mathbf{Z}$ , která je maximalizována algoritmem ADZT [1]. Použití kvantovaných hodnot  $m$  a  $k$  vede ke zhoršení numerických vlastností rekonstrukce signálu jak je patrné z výsledků střední kvadratické chyby vypočtené jako poměr energie chyby rekonstruovaného signálu a celkové energie původního signálu

$$MSE = \frac{\sum_{n=0}^N (s[n] - s_q[n])^2}{\sum_{n=0}^N (s[n]^2)}, \quad (73)$$

kde  $s[n]$  odpovídá původnímu signálu,  $s_q[n]$  představuje rekonstruovaný signál a  $N$  je počet vzorků signálu. Při shodnosti původního a rekonstruovaného signálu je hodnota MSE rovna nule, v opačné případě tato hodnota narůstá. V Tab.3 jsou uvedeny hodnoty MSE pro rekonstrukci řečového signálu při použití kvantované matice  $\mathbf{Z}$  postupně na postupně na počet bitů uvedených v tabulce. Je zřejmé, že pro nízké počty bitů, které jsou zajímavé pro realizaci ztrátové komprese, dochází k neakceptovatelné chybě při rekonstrukci signálu. Pro počet bitů menší než 8 se matice stane singulární a rekonstrukci signálu nelze provést.

Tabulka 3: Tabulka obsahuje hodnoty střední kvadratické chyby rekonstruovaného řečového signálu délky 1024 vzorků při  $f_s = 8000Hz$  a za použití kvantované matice  $\mathbf{Z}$ .

Počet bitů	64	32	16	8
MSE	1.15e-26	1.82e-15	1.44e-06	1.052e-01

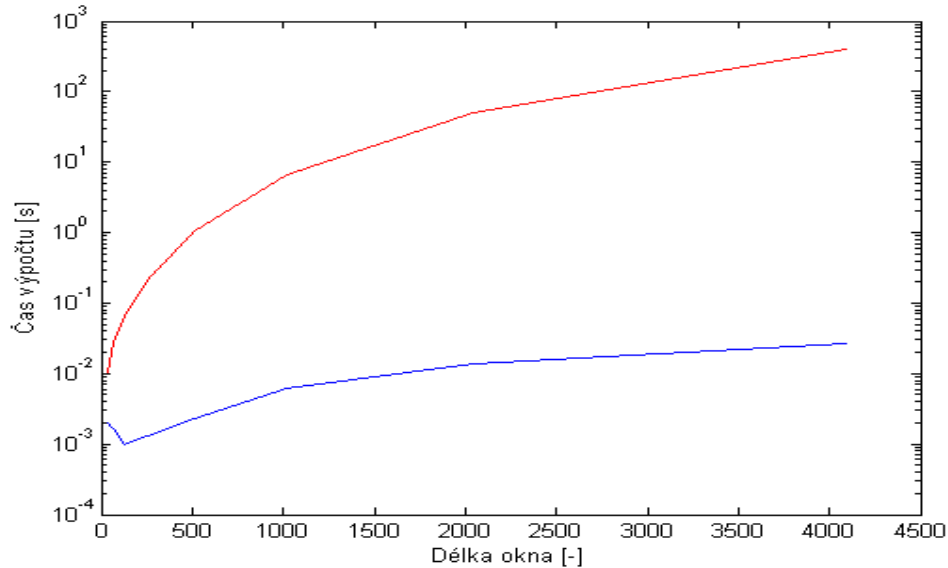
Z výsledků a výše popsaných důvodů lze uzavřít, že hypotéza **H5** není pravdivá, a tedy ADZT není vhodná ke ztrátové kompresi dat.

## 6.11 Ilustrace výpočetní náročnosti algoritmu

Výpočet ADZT spektra je realizován pomocí algoritmu ADZT, který je podrobně popsán v kapitole 4. Vstupem do tohoto algoritmu je DFT spektrum analyzovaného signálu, pomocí kterého algoritmus určí optimální parametry šířky pásma  $m$  (vztah ) a indexu nestacionarity  $k$ , podle nichž se následně vypočte spektrální složka ADZT spektra (39). Z principu algoritmu je patrné, že výpočetní náročnost ADZT algoritmu je kvadratická a je větší než je tomu pro DFT, která je velmi efektivně realizována pomocí algoritmu rychlé Fourierovy transformace (FFT) s logaritmickou výpočetní náročností. Tento fakt je ilustrován na Obr.40, kde je vynesena závislost doby výpočtu 128 segmentů signálů na délce okna. Z toho obrázku je zřejmé, že ADZT platí za své lepší spektrální vlastnosti poměrně vysokou daň ve formě několikanásobně vyšší výpočetní náročnosti<sup>7</sup>. Pro doplnění doby výpočtu je uvedena tabulka Tab.4 obsahující jednotlivé časy výpočtu.

Tabulka 4: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  zologramů vytvořených pomocí STADZT a STADZTP (viz Obr.52) od ideálního spektrogramu testovacího signálu.

Délka seg. [-]	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Čas výp. ADZT [s]	0.009	0.022	0.060	0.190	0.835	4.772	30.500	223.346
Čas výp. FFT [s]	0.0011	0.0013	0.0012	0.0012	0.0015	0.0025	0.0058	0.0121



Obrázek 40: Závislost výpočetní náročnosti (doba výpočtu) na délce segmentu - modrý průběh odpovídá FFT výpočtu a červený průběh odpovídá ADZT.

<sup>7</sup>Počítáno na PC s konfigurací AMD Phantom II X2 565, 8GB RAM a Matlab v7.11

## 6.12 Shrnutí

Byly navrženy postupy, kritéria a příklady pro systematickou analýzu chování ADZT, čímž jsou potvrzeny nebo zpřesněny některé hypotézy uvedené v kapitole 2. Hypotéza **H2** týkající se toho, že ADZT v sobě zahrnuje globální popis signálu získaný pomocí DFT a zároveň lokální popis odpovídající informaci, kterou poskytuje okamžitá obálka analyzovaného signálu. Tato hypotéza byla potvrzena a upřesněna v kapitole 6.3 na příkladech obsahující směsi harmonických signálů. Například součet dvou harmonických funkcí se v STDFFT spektru projeví jako dvě "čáry" bez jakékoli informace o vzniklých záznamech v časovém průběhu signálu. STADZT svou schopností mazat spektrální složky umožňuje přibližně lokalizovat uzly a těchto záznamů, čímž poskytuje přibližnou představu o průběhu okamžité obálky signálu.

Též jsou diskutovány základní rozdíly oproti DFT a výsledky kapitoly 6.5 ukazují, že chování ADZT odpovídá chování DFT pouze v případě, že nestacionarita signálu je umístěna přesně ve středu segmentu. V ostatních pozicích se spektrum ADZT liší od spektra DFT, neboť dochází k potlačení spektrálního prosakování. Tím je potvrzena hypotéza **H1**, že výsledek ekvivalentní výstupu DFT lze dosáhnout pouze tehdy, je-li nestacionarita lokalizována přesně uprostřed použitého segmentu signálu. Není-li nestacionarita uprostřed použitého segmentu, tak se výsledek se od výsledku DFT významně liší. Je to důsledek schopnosti ADZT účinně redukovat prosakování ve spektru.

Dále lze z výsledků jednotlivých kapitol říci, že ADZT je vhodná k analýze stacionárních signálů, kdy je schopna velmi výrazně potlačovat spektrální prosakování, ale i nestacionárních signálů se změnou amplitudy, frekvence a fáze. Za určitých podmínek je vhodná i k analýze signálů v šumu, kdy tyto analyzované signály nesmí být ortogonální k bázi ADZT. Na druhou stranu ADZT není příliš vhodná k analýze širokopásmových signálů a to z důvodu, že ADZT se k těmto signálům chová jako by se jednalo o signály obsahující spektrální prosakování, a proto ADZT spektrum tohoto typu signálu "promazává".

Byl též navržen nástroj pro určování počtu průchodů algoritmem ADZT umožňující vyhodnocení závislosti četnosti průchodu větvemi algoritmu na charakteru signálu, což může být využito jako další nástroj pro analýzu signálů. Z provedené analýzy je patrné, že algoritmus ADZT "hledá" v DFT spektru obrazce odpovídající typickému tvaru spektra ZP. Tato interpretace chování ADZT umožňuje velmi rychle a spolehlivě rozhodnout, jak bude vypadat výsledné Zolotarevovo spektrum.



## 7 Optimalizace parametrů ADZT

Správná volba parametrů má velký vliv na časově-frekvenční rozlišení transformace a to jak krátkodobé DFT, tak i krátkodobé ADZT. Mezi tyto parametry se především řadí tvar okna použitého pro segmentaci signálu, délka tohoto okna, krok segmentace a v neposlední řadě i interpolace spektra pomocí doplnění nul. Následující kapitoly se zabývají popisem těchto parametrů a ukazují jejich vliv na výsledný zologram analyzovaného signálu v porovnání se spektrogramem. Jako hlavní kritérium hodnocení vlivu parametrů na výsledné spektrum analyzovaného signálu bylo použito kritérium využívající velikost spektrální vzdálenosti LSD od ideálního spektra analyzovaného signálu, které je počítáno přes všechny segmenty analyzovaného signálu podle následujícího vztahu.

$$LSD = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C D_{LS}(S_c, I_c), \quad (74)$$

kde  $C$  je počet segmentů tvořící analyzovaný zologram nebo spektrogram,  $S_c$  (případně též  $S_{Z_c}$ ) je aktuální spektrum segmentu  $c$  a  $I_c$  je spektrum ideálního spektrogramu signálu. Jako orientační kritérium pro výběr optimálních parametrů bylo zvoleno vizuální kritérium pomocí výše zmíněného zologramu v porovnání se spektrogramem stejného signálu. Analyzovaný signál je popsán v kapitole 5 a zobrazený na Obr.14a.

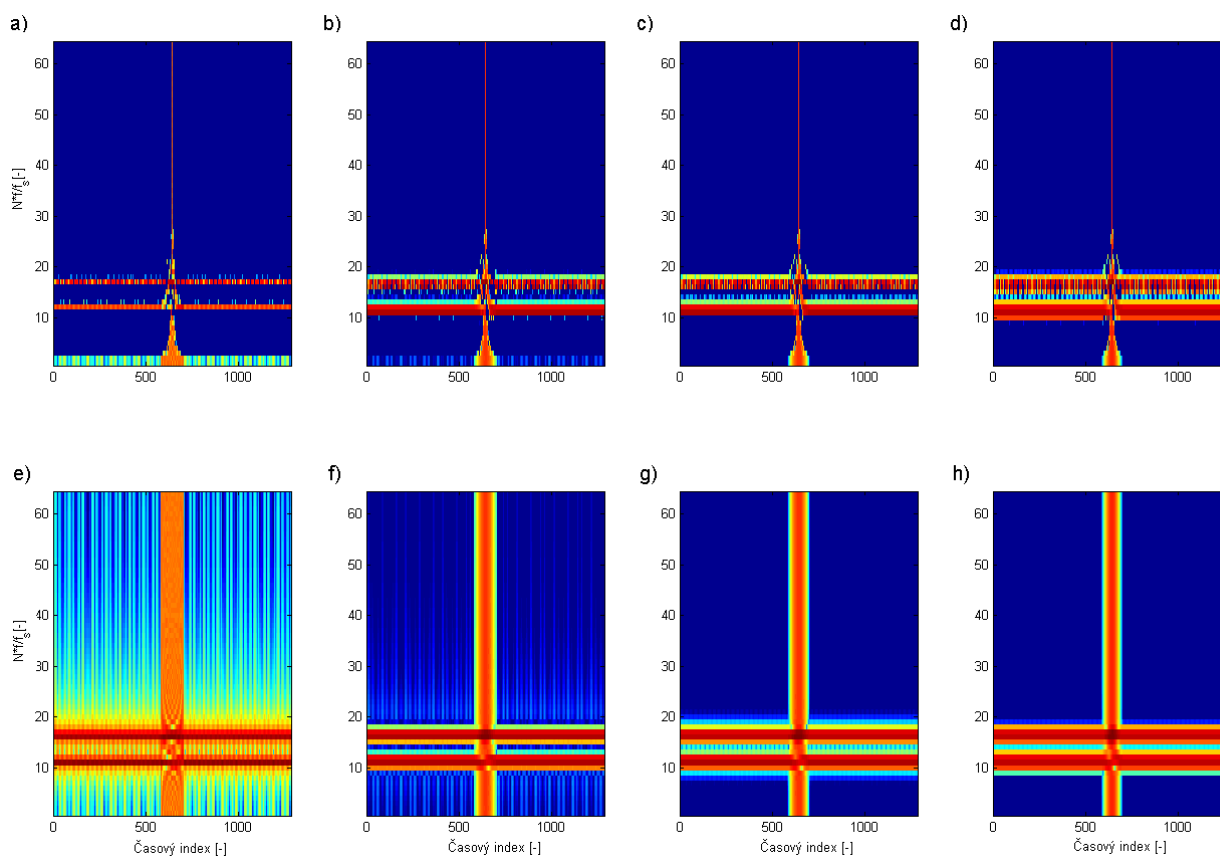
Hlavní obtíž velmi rozšířené DFT je v tom, že obsahuje spektrální prosakování, které omezuje frekvenční rozlišení její krátkodobé varianty STDFFT. Jak již bylo konstatováno v dřívějších kapitolách, tak spektrální prosakování vzniká, pokud je porušena ortogonalita mezi analyzovaným signálem a bází použité transformace. Jinými slovy se dá říci, že toto prosakování vzniká zkracováním signálu na signál s omezenou délkou pomocí segmentujícího okna a případně váhovacího okna. Důsledkem tohoto zkracování je výsledné spektrum signálu dáno jako výsledek konvoluce spektrálních koeficientů analyzovaného signálu a váhovacího okna [6], [12]. Velikost spektrálního prosakování závisí na následujících faktorech:

- Tvar segmentačního okna.
- Poměr délky segmentu a periody signálu

### 7.1 Tvar okna

Prvním diskutovaným parametrem je tvar okna segmentace signálu, protože přímo ovlivňuje frekvenční rozlišení STDFFT. Segmentační okno s hladkým nárůstem náběžné a sestupné hrany potlačuje spektrální prosakování více než okno, které je tvořeno ostrými přechody jako například okno obdélníkového tvaru. Aplikací takového okna s hladkým tvarem se redukuje diskontinuity vzniklé omezením periodického signálu na jeho okrajových částech. A tím lze od sebe lépe rozlišit jednotlivé frekvenční složky signálu. Mezi nejvíce využívané typy okna s hladkým průběhem patří Hammingovo, Hannovo a Blackmanovo okno [6], [12].

Obr.41 porovnává spektrogram a zologram vytvořený pomocí STDFT a STADZT s různými typy okna segmentace. Zbylé parametry jsou kvůli jednoduššímu porovnání stejné a jsou voleny následovně - délka okna je rovna 256 vzorkům, krok segmentace je 1 vzorek. Jak je patrné z Obr.41e až Obr.41h spektrální prosakování je použitím hladkého okna potlačováno a nejlepších výsledků je v tomto případě dosaženo použitím Blackmanovo oknem, protože útlum jeho bočních laloků je -58dB [12]. Na druhou stranu je nejlepších výsledků frekvenčního rozlišení STADZT dosaženo pomocí obdélníkového okna viz Obr.41a. Jak je vidět z dalších průběhů zologramů, tak při aplikaci jakéhokoliv okna s hladkým průběhem se frekvenční rozlišení zhoršuje. To je způsobeno interferencí mezi váhovacím oknem a časově selektivními básovými polynomy ADZT, čímž se zhoršuje schopnost algoritmu stanovit optimální parametry těchto polynomů pro aktuálně zpracovávaný segment signálu. To je patrné z druhého řádku Tab.5. První řádek této tabulky dokumentuje známý fakt, že použití okna zlepšuje vlastnosti STDFT.



Obrázek 41: Vliv typu okna na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového (a), Hammingovo (b), Hannovo (c) a Blackmanovo (d) okna délky 128, krokem segmentace o 1 vzorek a spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového (e), Hammingovo (f), Hannovo (g) a Blackmanovo (h) okna délky 128, krokem segmentace o 1 vzorek

Tabulka 5: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různých typů váhovacího okna (viz Obr.41).

Typ okna	Spektrální vzdálenost [dB]			
	Obdélníkové	Hammingovo	Hannovo	Blackmanovo
STDFT	16.17	10.46	8.49	8.11
STADZT	3.52	5.54	5.37	6.63

## 7.2 Délka okna

Dalším parametrem, který značně ovlivňuje frekvenční a časové rozlišení STADZT, je délka segmentačního okna. Frekvenční krok DFT je definován jako

$$\Delta f = \beta \frac{f_s}{N}, \quad (75)$$

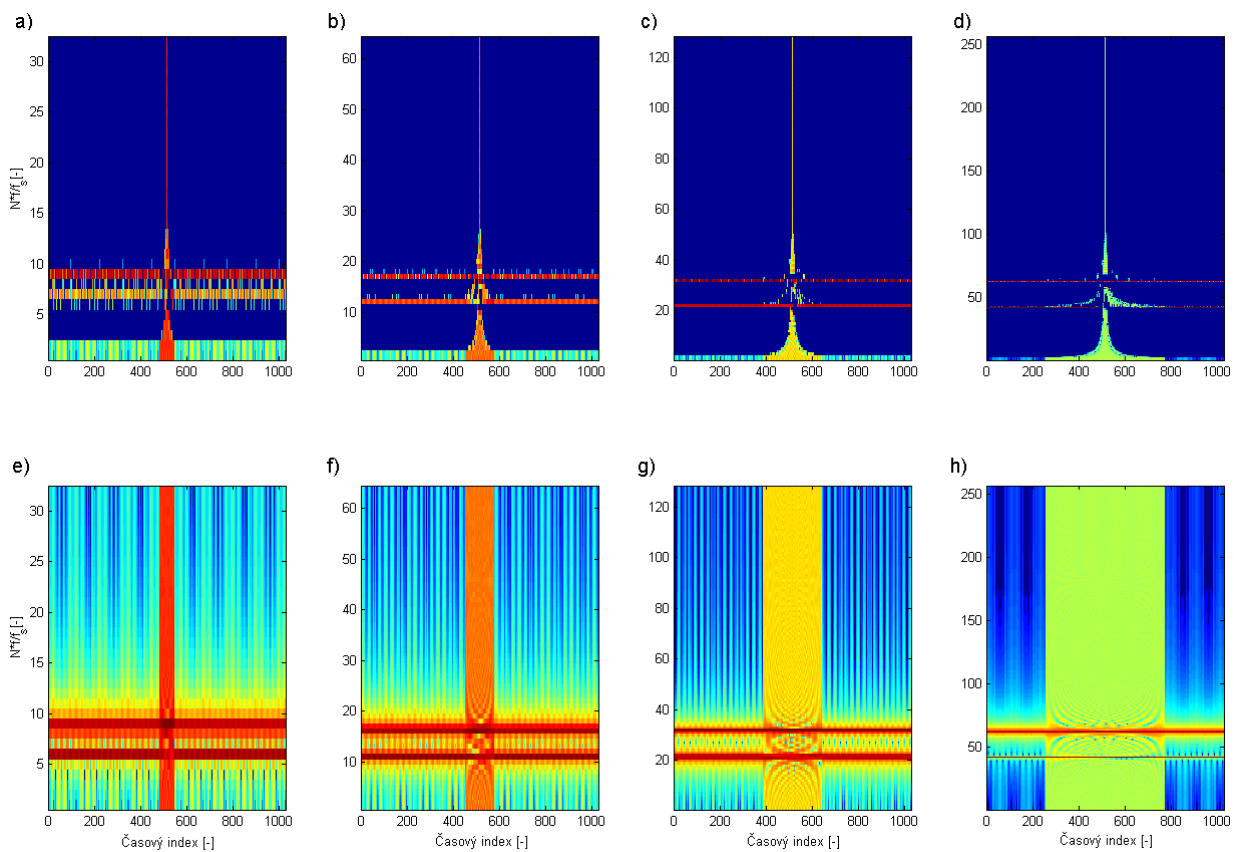
kde  $f_s$  je vzorkovací frekvence,  $N$  je délka signálu a  $\beta$  představuje ekvivalentní šumovou šířku pásma použitého okna, která je pro obdélníkové okno  $\beta = 1$  [12]. Z tohoto vztahu je očividné, že frekvenční rozlišení se zvyšuje s rostoucí délkou segmentu. Nicméně zvyšování frekvenčního rozlišení je omezeno principem neurčitosti, který říká, že není možné získat nejlepší frekvenční rozlišení bez ztráty časového rozlišení a opačně [5]. Z tohoto důvodu musí být při spektrální analýze signál pomocí STDFT zvolen kompromis mezi časovým a frekvenčním rozlišením. Tuto vlastnost demonstrují spektrogramy vytvořené pomocí okna s rostoucí délkou (viz Obr.42e - Obr.42h). Z průběhů je patrné, že nejlepší časové rozlišení je dosaženo při použití nejkratšího okna segmentace (viz Obr.42e), kde jsou všechny náhlé změny signálu v časové oblasti (jednotkový puls) lokalizovány s velkou přesností na rozdíl od frekvenčního rozlišení. Jakmile je spektrogram vytvořen pomocí dlouhého okna, tak se frekvenční rozlišení zvyšuje, ale zároveň se přichází o časovou přesnost transformace, jak je tomu na Obr.42f.

Frekvenční rozlišení STADZT je dáno délkou okna, stejně jako je tomu u STDFT, ale rozdíl nastává v tom, že časové rozlišení není pro všechny frekvenční složky konstantní. To je způsobeno tím, že spektrální složky mohou být lépe analyzovány než spektrální složky signálu s nižšími frekvencemi pomocí Zolotarevových polynomů s vyšším řádem [A4]. Velkou výhodou ADZT je, že časové a frekvenční rozlišení jsou na sobě jistým způsobem nezávislé, protože optimální parametry Zolotarevových polynomů tvořících báze polynomy ADZT poskytují velké časové i frekvenční rozlišení. Obr.42a až Obr.42d dokládají to, že časové rozlišení STADZT je zachovááno i pro zologramy tvořené pomocí okna se zvyšující se délkou, přičemž se frekvenční rozlišení zvyšuje.

Závěry z obou předchozích odstavců jsou potvrzeny Tab.6, ve které je vidět STADZT poskytuje kvalitnější spektrogram pro rostoucí délku okna segmentace. Zvětšující se délka okna poskytuje kvalitnější zologram, nicméně s rostoucí délkou narůstá exponenciálně výpočetní náročnost algoritmu ADZT a čas výpočtu se neúměrně prodlužuje (modrá křivka na Obr.43). Proto jako kompromis mezi frekvenčním rozlišením a výpočetními nároky lze doporučit

volbu délky okna 512 nebo 1024 vzorků (FFT pracuje s délkou segmentů v násobcích dvou) ležící kolem optima daného průsečíkem křivek výpočetní náročnosti a logaritmické spektrální vzdálenosti.

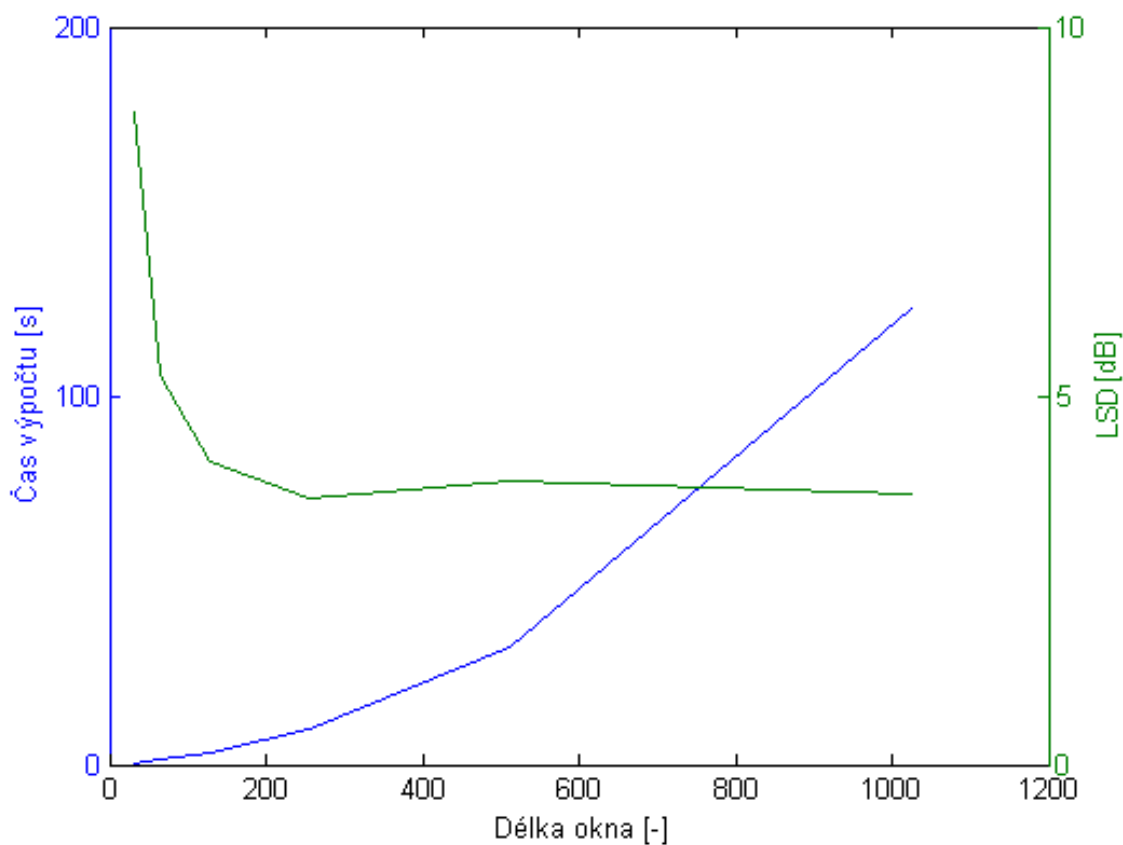
Dále je třeba zmínit, že všechny spektrogramy uvedené na Obr.42, Obr.44 a Obr.45 jsou generovány STDFT využívající obdélníkové okno. Prvním důvodem pro tuto volbu typu okna segmentace je skutečnost, že ADZT nastavuje optimální parametry své analyzující báze podle aktuálního DFT spektra signálu a nejlepších výsledků dosahuje s DFT spektrem, které je tvořeno obdélníkovým oknem, jak je popsáno v kapitole 7.1. Druhým důvodem je to, že princip ADZT lze interpretovat jako filtrování DFT spektra, a proto když jsou spektrogramy tvořeny obdélníkovým oknem, tak lze pozorovat vstupní nezměněná spektra, která jsou zpracována ("filtrována") ADZT algoritmem.



Obrázek 42: Vliv délky okna na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 64 (a), 128 (b), 256 (c) a 512 (d) vzorků s krokem segmentace o 1 vzorek a spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 64 (e), 128 (f), 256 (g) a 512 (h) vzorků s krokem segmentace o 1 vzorek.

Tabulka 6: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různě dlouhého okna segmentace (viz Obr.42).

Délka okna	Spektrální vzdálenost [dB]			
	64	128	256	512
STDFT	15.15	16.31	17.21	18.70
STADZT	4.99	3.61	2.95	2.71



Obrázek 43: Volba optimální délky okna. Modrý průběh odpovídá době výpočtu Zolotarevova spektra s danou délkou okna segmentace a zelený průběh odpovídá logaritmické spektrální vzdálenosti. Optimální hodnota délky okna odpovídá průsečíku těchto průběhů.

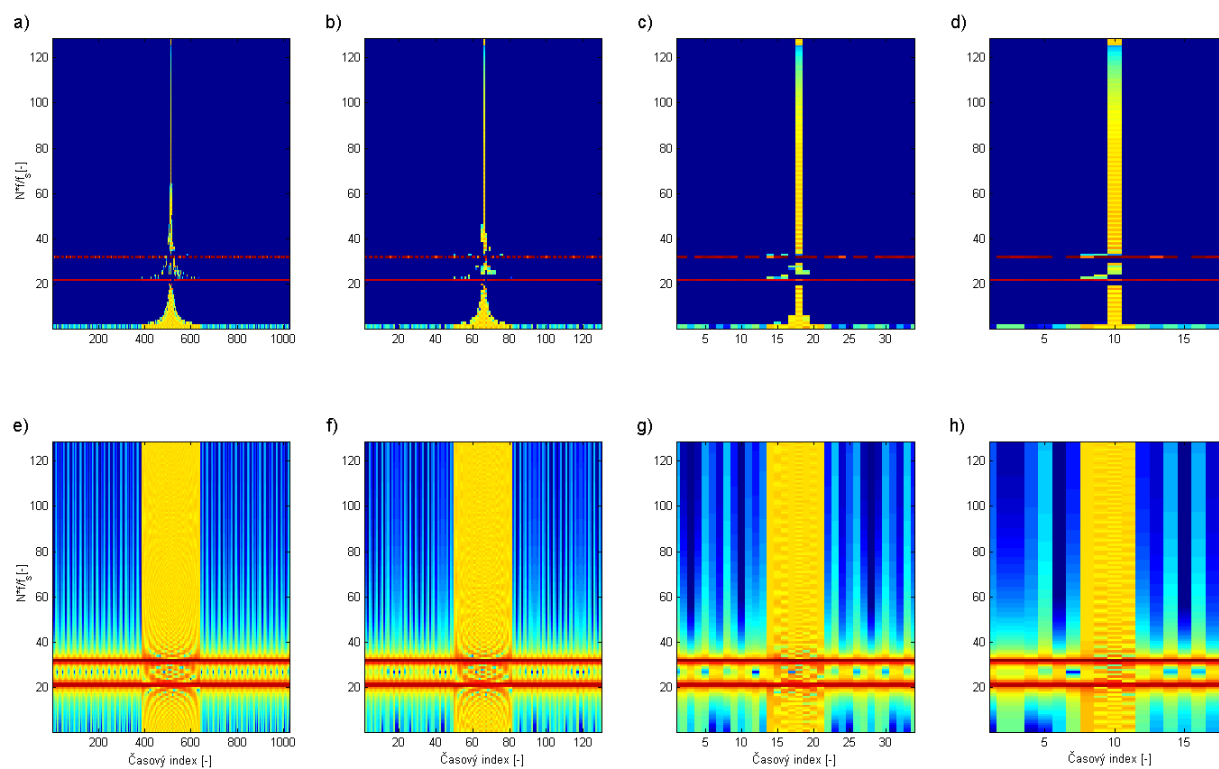
### 7.3 Posun okna

Jedním z další parametrů STADZT je krok segmentace, respektive překrytí okna segmentace. Pokud se použije takový krok segmentace, že jednotlivá okna se nepřekrývají, tak STDFT přichází o informaci, jak vypadá signál na krajích aplikovaného okna důsledkem jeho použitého tvaru [12]. Proto se pro STDFT obvykle používá překrytí 50% nebo 75%, které umožňují analyzování celého signálu bez významné ztráty informace o signálu ( viz Obr.44e až Obr.44h). Výhoda použití překryvu okna menšího než je 99% je v tom, že se snižuje výpočetní náročnost na výpočet celého spektragramu.

Výpočet optimálních parametrů ADZT, které tvoří matici  $\mathbf{Z}$ , je založeno na minimalizaci nestacionární části Zolotarevových polynomů reprezentujícími spektrálními koeficienty DFT spektra (37), jak je to popsáno v kapitole 4.1 a v [A5]. Důsledek této vlastnosti je fakt, že ADZT algoritmus je citlivý na fázi vstupního signálu, a proto STADZT dosahuje nejlepšího časového rozlišení pro segmentaci signálu s překrytím 99%. Překrytí 99% odpovídá segmentaci s krokem o jeden vzorek. Obr.44a až Obr.44d ukazují Zologramy vytvořené s klesajícím překryvem segmentujících oken. Nejhorší časové rozlišení nastává pro případ překrytí s 50% (posun o 64 vzorků při délce okna 128 vzorků), jak dokumentuje druhý řádek Tab.7.

Tabulka 7: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  spektragramů a zologramů vytvořených pomocí různého kroku segmentace (viz Obr.44) pro délku okna 128 vzorků.

Krok segmentace	Spektrální vzdálenost [dB]			
	1	8	32	64
STDFT	17.21	17.14	16.85	16.24
STADZT	2.95	2.99	3.37	3.99



Obrázek 44: Vliv kroku segmentace na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 256 a krokem segmentace 1 (a), 8 (b), 32 (c) a 64 (d) vzorků a na spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 256 s krokem segmentace 1 (e), 8 (f), 32 (g) a 64 (h) vzorků.

## 7.4 Interpolace signálu

Jednou z možností, jak snížit frekvenční krok DFT definovaný vztahem (75), je doplnění nul do analyzovaného signálu vybraného oknem fixní délky  $N$ . Tím se sníží vzdálenost mezi spektrálními složkami na

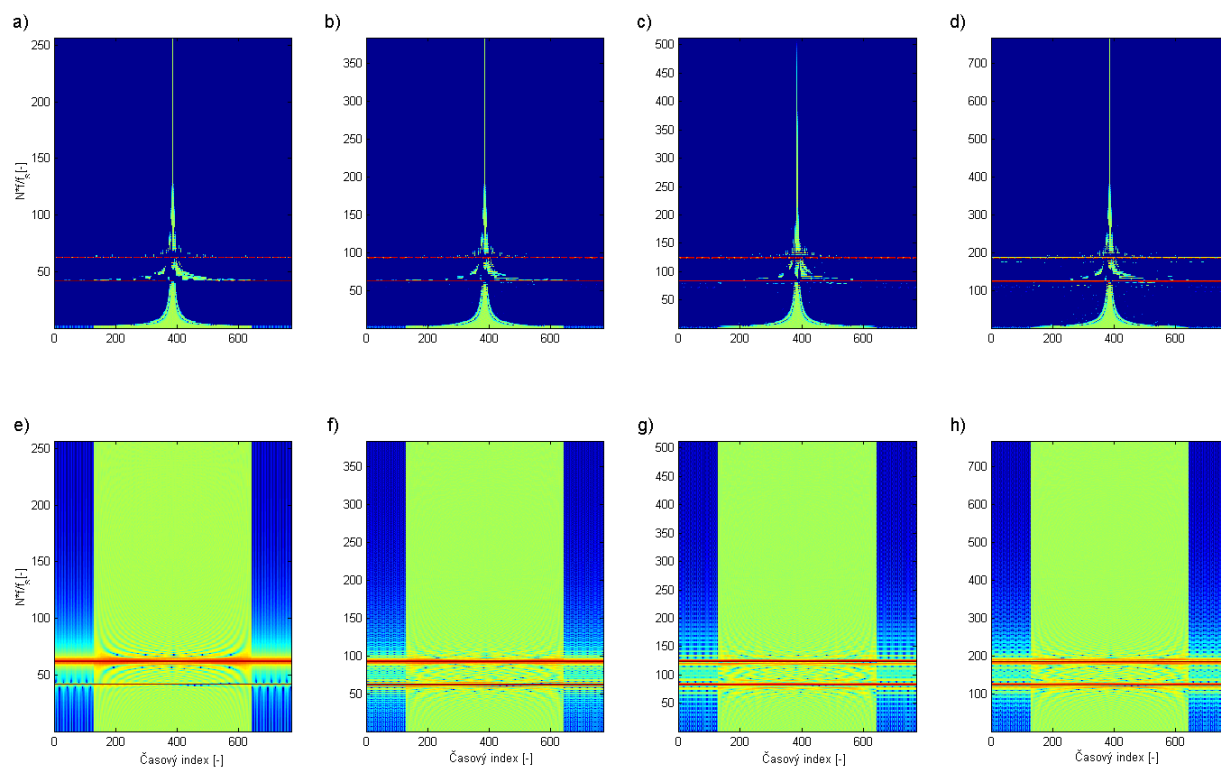
$$\Delta f = \beta \frac{f_s}{N + N_N}, \quad (76)$$

kde  $N$  je počet vzorků segmentu a  $N_N$  je počet doplněných nul do jednoho segmentu. Důsledek doplnění nul na STDFT je znázorněn na Obr.45e až Obr.45h. Je patrné, že doplnění nul nemá vliv na časové rozlišení transformace, které zůstává stále stejné, zatímco frekvenční rozlišení se zlepšuje. Díky doplnění nul do vybraného signálu se interpoluje DFT spektrum tohoto signálu a ADZT algoritmus má na svém vstupu více spektrálních složek, ze kterých pak lze lépe určit optimální vlastnosti Zolotarevových polynomů tvořící bázové vektory ADZT. Výsledné zologramy vytvořené STADZT s doplněnými nulami jsou na Obr.45a až Obr.45d. Z jejich průběhů a z hodnot logaritmické spektrální vzdálenosti uvedených v Tab.8 ve druhém řádku lze stanovit, že nejlepších výsledků je dosaženo doplněním nul na 1.5 násobek délky segmentačního okna (viz Obr.45b). Interpolací spektra klesá nejednoznačnost ve spektru vznikající vzorkováním DTFT spektra. Je třeba poznamenat, že doplnění nul by mělo být provedeno symetricky před a za vybraný segment signálu a to z důvodů analyzování reálných nekauzálních signálů a symetrie spektra[42].

Tabulka 8: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí segmentu s doplněnými nulami (viz Obr.45).

	Spektrální vzdálenost [dB]			
Doplnění nul na	1x	1,5x	2x	2,5x
STDFT	19.67	19.75	19.73	19.81
STADZT	3.09	2.98	3.44	3.93





Obrázek 45: Vliv interpolace DFT spektra na zologram vytvořený STADZT pomocí obdélníkového okna délky 256 a krokem segmentace o jeden vzorek a doplněném na 1x (a), 1.5x (b), 2x (c) a 2.5x (d) násobek své délky a na spektrogram vytvořený STDFT pomocí obdélníkového okna délky 256 s krokem segmentace o jeden vzorek a doplněném na 1x (e), 1.5x (f), 2x (g) a 2.5x (h) násobek své délky.

## 7.5 Shrnutí

Tato kapitola se zabývala volbou parametrů ADZT a jejich vlivem na časově-frekvenční rozlišení STADZT. Diskutované parametry byly tvar a délka okna, velikost překrytí jednotlivých oken segmentace a interpolace signálu ve spektru doplněním nul do analyzovaného signálu (segmentu). Výsledky STADZT byly porovnávány s STDFT, protože ADZT pro určení optimálních parametrů využívá DFT spektra signálu. Vhodné nastavení těchto parametrů je pro STDFT velmi důležité, a proto musí být zvolen přijatelný kompromis mezi frekvenčním a časovým rozlišením transformace. Výsledky této části práce postupně potvrdily všechny stanovené hypotézy **H4a**, **H4b** a **H4c** a je z nich zřejmé, že u STADZT není nastavení některých parametrů až tak kritické, protože ADZT je signálově závislá transformace. To znamená, že ADZT se snaží najít vhodné parametry báze podle aktuálně analyzovaného signálu.

Nejllepší frekvenčně-časové rozlišení STADZT lze získat pro obdélníkové okno délky 1024 vzorků segmentující signál s krokem o 1 vzorek a doplněným nulami na jeden a půl násobek své délky. Při tomto nastavení je STADZT schopna efektivně potlačovat spektrální prosakování, určit frekvenční složky signálu a zároveň určit náhlé změny signálu v časové oblasti představující nestacionaritu signálu. Tato volba vznikla jako kompromis mezi rostoucí kvalitou zologramu pro rostoucí délku okna a exponenciálním růstem výpočetní náročnosti ADZT.

## 8 Modifikace ADZT algoritmu

Důvodem pro hledání ADZT modifikací je na prvním místě snaha najít algoritmus, který bude méně výpočetně náročný (viz. kapitola 6.11) než je navržený algoritmus i přesto, že bude poskytovat horší výsledky. Jedním z dalších důvodů úpravy algoritmu je dosažení takové úpravy algoritmu, aby bylo dosaženo konstantního časového rozlišení pro všechny spektrální složky a tím zlepšení výsledků detekce nestacionarity v zologramu. První část této kapitoly popisuje modifikace založené na fixaci šířky pásma a ve druhé polovině jsou uvedeny modifikace, využívající cyklické konvoluce a periodicity DFT spektra.

### 8.1 Fixace šířky pásma

Každá spektrální složka  $S_Z(l)$  je vypočtena pomocí šířky pásma  $m$  a indexu nestacionarity  $k$ . Podle algoritmu uvedeným v kapitole 4.2.1 se nejdříve musí určit šířka pásma  $m$ , pomocí které se dopočítá index nestacionarity  $k$  a nakonec i velikost spektrální složky Zolotarevova spektra  $S_Z(l)$ . ADZT algoritmus hledá optimální šířku pásma  $m$  podle vztahu (44) (resp. (45)), což je výpočetně velmi náročné, protože musí hledat minimum z kumulativního součtů spektra DFT v rozsahu  $0 - (l - 1)$  spektrální složky. Šířka pásma může tedy nabývat velikosti  $m \in \ll 1, (n - 1) \gg$ . V následujících odstavcích je popsáno několik úprav výpočtu ADZT, kdy je tato šířka pásma fixně nastavena.

#### 8.1.1 Fixní šířka pásma pro všechny spektrální složky

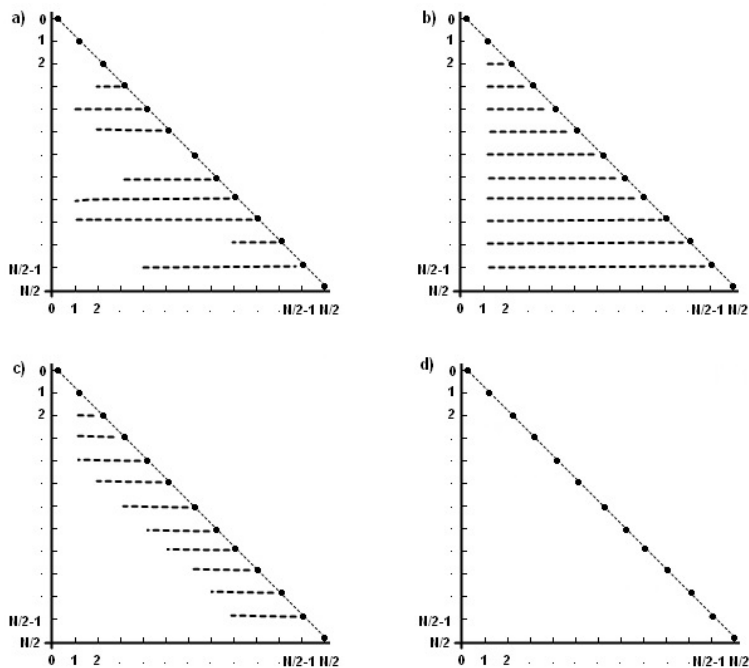
Chování ADZT algoritmu je s různou šířkou pásma popsáno v kapitole 6.4, ze které je patrné, že velikost šířky pásma jednoznačně ovlivňuje vlastnosti ADZT, což má samozřejmě dopad na časové a frekvenční rozlišení STADZT. O správnou volbu šířky pásma se stará ADZT algoritmus, který ji adaptivně určuje podle analyzovaného signálu. Fixací šířky pásma přichází ADZT (STADZT) o optimální nastavení. Princip fixace šířky pásma je zobrazen na obrázku 46, který vykresluje čtvrtinu  $Z$  matice. Na druhou stranu fixací šířky pásma se značně urychlí výpočet ADZT spektra, protože počet operací pro výpočet jedné spektrální složky klesne, ADZT algoritmus totiž nemusí hledat její optimální velikost. Hlavním důsledkem fixace šířky pásma je omezení časové selektivity ADZT, protože všechny spektrální složky jsou počítány pomocí analyzujících bázevých polynomů stejného řádu. Obr.47 ukazuje zologramy vytvořené pomocí STADZT s různou šířkou pásma. Z jejich průběhů je patrné, že jakýmkoliv omezením volnosti ADZT algoritmu při volbě šířky pásma, se zhoršuje časové a částečně i frekvenční rozlišení. Nicméně motivací pro fixaci šířky pásma  $m$  bylo kromě snížení výpočetní náročnosti i snaha o vytvoření ADZT s ortogonální  $Z$  maticí.

### 8.1.2 Maximální šířka pásma

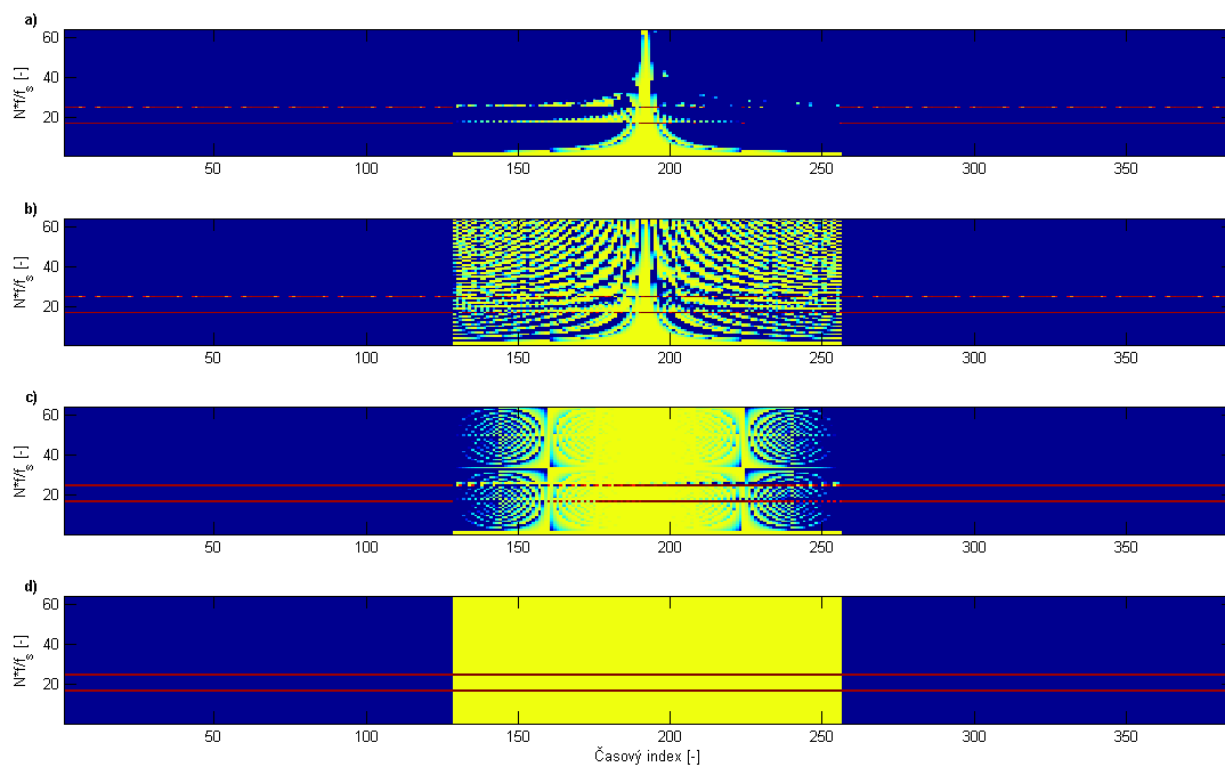
Tato úprava algoritmu fixuje šířku pásma  $m$  pro každou spektrální složku  $S_Z(l)$  tak, aby byla maximální. To znamená, že šířka pásma je pro každou spektrální složku rovna  $m = l - 1$ . Tato varianta odpovídá tomu, že se příslušná harmonická složka signálu hledá odpovídajícím aproximovaným Zolotarevovým polynomem stejného řádu. Nedochozí zde tedy k překládání jednotlivých složek, kdy je vyšší harmonická složka signálu určována Zolotarevovým polynomem nižšího řádu, jak se děje u původního algoritmu. Ze Zologramu uvedeném na Obr.47b je vidět, že při nastavení maximální šířky pásma dochází ke zhoršení časové lokalizace jednotkového impulsu, je však stále vidět obrazec odpovídající "Ještědu", jako je tomu u nemodifikované ADZT. Transformace je stále schopna detekovat okamžitou obálku signálu. Frekvenční rozlišení je nezměněno.

### 8.1.3 Minimální šířka pásma

Tato úprava algoritmu fixuje šířku pásma  $m$  pro každou spektrální složku  $S_Z(l)$  tak, aby byla nulová  $m = 0$ . Tím dochází k přechodu od ADZT ke klasické DFT, respektive polynomy analyzující báze jsou tvořeny komplexní exponenciálou. Tomu odpovídá i průběh zologramu na Obr.47d, a tudíž přesnost časové lokalizace nestacionarity signálu je stejná jako u STDFT.



Obrázek 46: Princip nastavování šířky pásma zobrazený na pravé horní čtvrtině Z matice a to pro adaptivní nastavování šířky pásma  $m$  podle původního ADZT algoritmu (a) a pro fixní nastavení na maximální šířku pásma  $m = l$  (b),  $m = konst.$  (c) a  $m = 0$  (d).



Obrázek 47: Porovnání modifikovaných algoritmů pomocí fixace šířky pásma  $m$ . Zologramy byly vytvořené pomocí obdélníkového okna segmentace délky 128 vzorků s krokem o jeden vzorek a s adaptivním nastavení šířky pásma  $m$  dle původního ADZT (a) a fixního nastavení na maximální šířku pásma  $m = l$  (b), konstantní hodnotu  $m = 1$  (c) a minimální hodnotu  $m = 0$  (d).

## 8.2 Změna masky ADZT (prohledávání v obou směrech)

Jednou z motivací úpravy ADZT bylo zlepšení časového rozlišení STADZT, které není pro všechny spektrální složky konstantní, ale zvyšuje se pro spektrální složky s vyšším indexem (vyšší frekvencí). Tuto vlastnost lze ovlivnit změnou spektrální masky, podle které ADZT algoritmus určuje optimální parametry ADZT.

### 8.2.1 Původní maska ADZT (prohledávání zdola)

Algoritmus ADZT (popsán v kapitole 4.2.2) určuje parametry transformace podle analyzovaného signálu a spektrální masky, která vybírá stacionární část DFT spektra (tvořenou aktuálně analyzovanou spektrální složku) a nestacionární část, která je tvořena kombinací nižších spektrálních složek. Tento způsob byl motivován tvarem spektra symetrických Zolotarevových polynomů prvního druhu (viz Obr.6). Díky této masce ADZT dosahuje lepšího časového rozlišení pro vyšší harmonické složky analyzovaného signálu. Předpokládejme DFT spektrum, které je tvořeno  $N = 128$  spektrálními složkami, potom ADZT spektrální složka  $S_Z(N/2)$  bude počítána pomocí nestacionární části podle vztahu (40), kde šířka pásma  $m$  může nabývat hodnot od 0 až po  $N/2$  a tím se nestacionární část může rovnat  $N(N/2, N/2) = -S(N/2) + S(N/2 - 1) + \dots + S(1) - S(0)$ . Na druhou stranu může být ADZT spektrální složka  $S_Z(3)$  počítána pomocí nestacionární částí tvořenou pouze ze tří spektrálních složek DFT spektra  $N(3, 3) = -S(2) + S(1) - S(0)$ . Z těchto mezních případů je vidět, že ADZT algoritmus má větší "volnost" volby parametrů pro spektrální složky odpovídající vyšším frekvencím než pro nižší.

### 8.2.2 Upravená maska ADZT (prohledávání shora)

Jednoduchou úpravou ADZT spektrální masky lze dosáhnout, že nižší spektrální složky budou mít lepší časové rozlišení než vyšší, jak je tomu v původní ADZT. V tomto případě se musí spektrální maska změnit tak, aby se nestacionární část počítala ze spektrálních složek, které jsou vyšší než je aktuálně analyzovaná spektrální složka tvořící stacionární část  $S(l)$ . Potom lze vztah pro výpočet nestacionární části (40) přepsat do tvaru

$$N(l, m) = \sum_{q=1}^m (-1)^l S(l + q), \quad (77)$$

kde  $m \in (0, N/2 - l)$ . Zologram vytvořený pomocí modifikovaného algoritmu je vykreslen na Obr.48b a z jeho průběhu je patrné, že jednotkový skok je nyní přesněji lokalizován v čase pro nižší spektrální složky. Zároveň je vidět, že okamžitá obálka analyzovaného signálu již není detekována mizením vyšších spektrálních složek, ale spektrálními složkami nižších frekvencí.

### 8.2.3 Sloučení výsledků z dvou spektrálních masek (sloučení směrů)

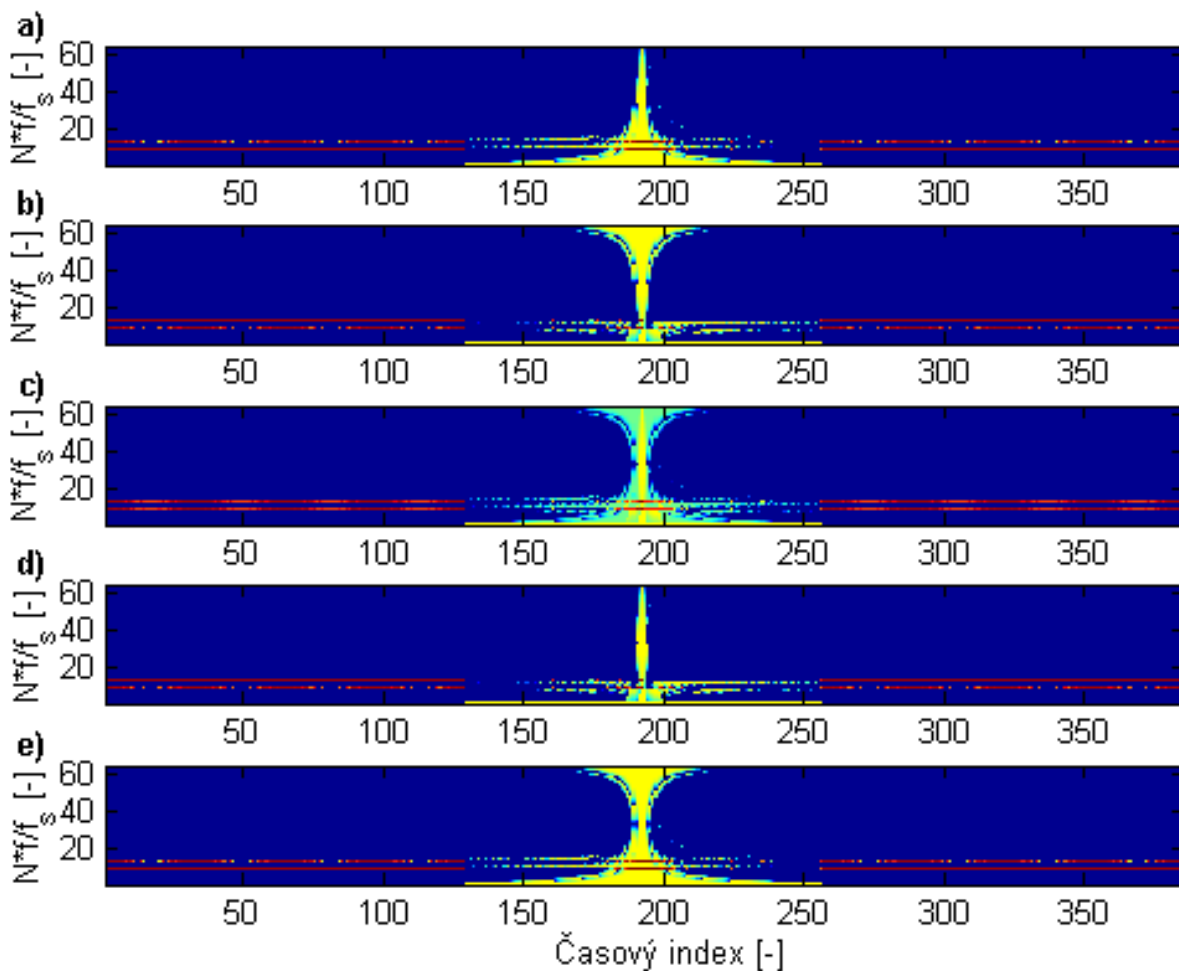
Bohužel žádná jiná změna ADZT algoritmu, respektive změna ADZT spektrální masky, nevede přímo na dosažení konstantního časového rozlišení ADZT, a proto se nabízí následující tři varianty, které slučují oba výše zmíněné způsoby výpočtu ADZT spektra pomocí původní spektrální masky a její upravené verze. Správným výběrem sloučení zologramů lze částečně ve výsledném zologramu potlačit nebo vyzdvihnout některé vlastnosti ADZT. Výsledný zologram lze realizovat jedním z následujících tří způsobů:

- Jako první způsob sloučení se nabízí součet obou vytvořených Zologramů (podobně jako součet úzkopásmového a širokopásmového spektrogramu), čímž by se dosáhlo dobrého časového rozlišení v obou krajních frekvenčních pásmech signálu a nejhorší rozlišení by bylo kolem středu. Jak je vidět z Obr.48c, tak výsledný zologram není moc přehledný, protože jsou zde promítnutá nepřesná časová lokalizace na obou koncích analyzovaného frekvenčního pásma.
- Jelikož způsob sloučení zologramů pomocí součtu nedosahovalo kýžených výsledků, nabízí se varianta sloučení těchto zologramů tak, že se vybere jen ta část spektra, která má námi požadované vlastnosti. Spojení horní poloviny zologramu obsahující spektrální složky  $S(N/4)$  až  $S(N/2)$  vytvořeného pomocí ADZT s nezměněnou spektrální maskou (prohledáváním zdola) se spodní polovinou zologramu obsahující  $S(0)$  až  $S(N/4)$  vytvořeného ADZT se změněnou spektrální maskou (prohledáváním shora) vede na zologram s vyšším časovým rozlišením v obou krajních frekvenčních pásmech (viz zologram zobrazen na Obr.48d).
- Spojení opačných polovin Zolotarevova spektra než je tomu v předchozím případě, vede na zologram (viz Obr.48e), který se podobá zologramu vytvořeného pomocí součtu (viz bod 1) a má nepřesné časové rozlišení.

Během hledání vhodného způsobu jak sloučit zologramy vytvořené pomocí dvou ADZT spektrálních masek (prohledávání spektra shora a zdola) vyvstala myšlenka využít periodicity DFT spektra během výpočtu Zolotarevova spektra, což vede na další modifikaci ADZT algoritmu, která je založena na symetrickém prohledávání DFT spektra (viz. následující kapitola).

## 8.3 Symetrická ADZT (cyklické konvoluce)

Symetrická ADZT (tzv. ADZTS) je založena na faktu, že DFT spektrum diskrétního signálu je periodické. Proto lze sestavit takovou ADZT spektrální masku, která bude obsahovat "i záporné" spektrální složky, což se projeví během sestavování nestacionární části ADZT spektra. Jinými slovy ADZT algoritmus nebude sestavovat svou nestacionární část  $N(l, m)$  pouze prohledáváním spektrálních složek směrem od stacionární složky spektra  $S(l)$  ke stejnosměrné složce  $S(0)$ , ale i zpět k stacionární složce  $S(-l + 1)$ . Touto úpravou může ADZT



Obrázek 48: Modifikace STADZT založena na různém způsobu prohledávání DFT spektra a jejich sloučení. Zobrazené zologramy byly vytvořeny pomocí obdélníkového okna délky 128 a segmentačním krokem o jeden vzorek a původním algoritmem s prohledáváním zdola (a), modifikovaným algoritmem s prohledáváním shora (b), součtem zologramů vytvořenými oběma směry prohledávání (c), spojením vybraných polovin spektra s vyšším (d) a nižším (e) časovým rozlišením.



algoritmus lépe stanovit index nestacionarity  $k$  a šířku pásma  $m$ , které může nabývat hodnot  $m \in \langle 0, 2l - 1 \rangle$ . Princip sestavení nestacionární části spektra, respektive prohledávání spektrogramu, je zobrazeno na Obr.49b.

Zologram signálu z Obr.50b, který je použitý ke stanovení optimálních parametrů ADZT, je vytvořený pomocí krátkodobé ADZTS označované jako STADZTS. V porovnání s STADZT (viz zologram na Obr.50a) je patrné, že tato úprava ADZT vede na zlepšení časového rozlišení transformace pro nižší frekvenční složky signálu, to je vidět ve zmenšení základny "Ještědu" označující jednotkový puls v zologramu. Tato vlastnost je podpořena numericky lepším výsledkem logaritmické spektrální vzdálenosti  $LSD$  signálu (viz Tab9).

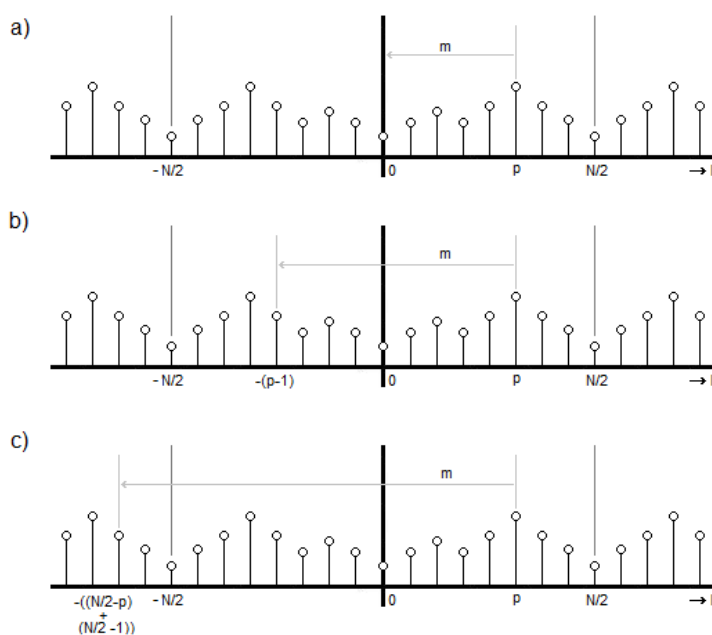
## 8.4 Prohledání celého spektra

Dalším logickým krokem během úpravy ADZT spektrální masky využívané pro ADZTS bylo využití cyklického přerovnění spektrálních složek, čímž není omezena spektrální maska nové periodické ADZT (tzv. ADZTP) pouze na jednu polovinu svého spektra. Tím dochází k sestavení nestacionární části z celého spektra včetně vyšších spektrálních složek, kdy se prohledávají obě poloviny spektra. Tato úprava v sobě vlastně skrývá modifikaci algoritmu, která je popsána v předchozí kapitole 8.2.2, kde upravená ADZT dosahuje lepší detekce nestacionarity v čase pro nižší harmonické složky signálu, než je tomu v původní verzi transformace. Šířka pásma může v tomto případě nabývat hodnot  $m \in \langle 0, N - 1 \rangle$ , jak je naznačeno na obrázku 49c. Z porovnání zologramů na Obr.50 je vidět, že periodická úprava ADZT dosahuje nejlepších výsledků časové lokalizace nestacionarity signálu.

Toto tvrzení však nepotvrzují hodnoty logaritmické spektrální vzdálenosti  $LSD$  uvedené v Tab.9, kde ADZTP dosahuje nejvyšší hodnoty. Obecně lze říci, že pokud stacionární část signálu nebude obsahovat spektrální prosakování, tak ADZT a její modifikace budou dosahovat horších hodnot  $LSD$  než transformace založené na DFT a to z toho důvodu, že ADZT poskytuje informace o lokálních vlastnostech analyzovaného signálu pomocí detekce okamžité obálky, jenž se projeví jako periodické mazání spektrálních složek signálu. Tato vlastnost se odrazí během výpočtu  $LSD$ , protože ideální spektrum, ke kterému se  $LSD$  počítá neobsahuje informaci o aktuální obálce signálu, a proto nejsou hodnoty  $LSD$  pro stacionární signál konstantní (viz průběhy  $LSD$  signálu S1 uvedené na Obr.53 a Obr.55). ADZTP díky své vysoké časové selektivitě maže spektrální složky stacionárního signálu více než ADZT a ADZTS transformace. Tato vlastnost je daná za schopnost detekce nestacionarity signálu s vysokou přesností. Proto tato úprava není vhodná pro analýzu stacionárních signálů.

Tabulka 9: Tabulka obsahuje průměrnou spektrální vzdálenost spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí různých typů váhovacího okna (viz Obr.41).

Typ transformace	STADZT	STADZTS	STADZTP
Spektrální vzdálenost	3.18	3.05	3.63



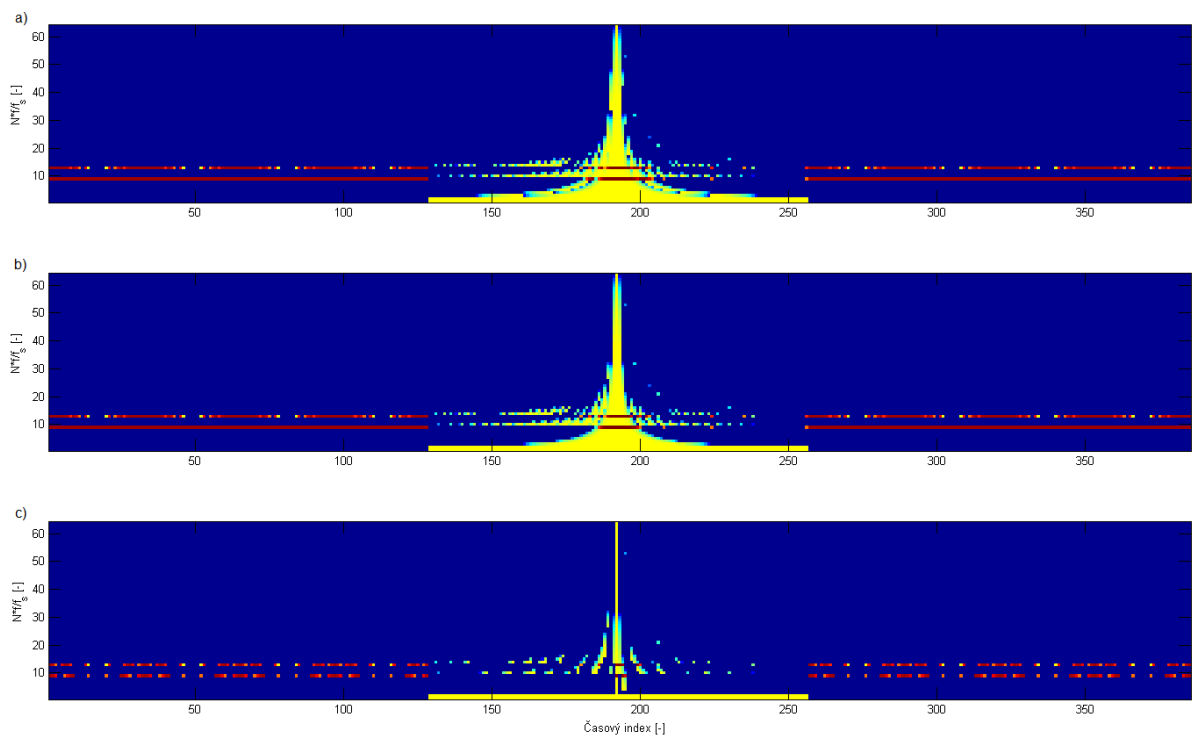
Obrázek 49: Princip hledání optimální šířky pásma ADZT algoritmem pracující se vstupním DFT spektrem pro původní ADZT (a), pro navrženou ADZTS pracující se symetrii spektra (b) a pro navrženou ADZTP pracující s periodicitou spektra (c).

## 8.5 Výpočetní náročnost modifikovaných ADZT

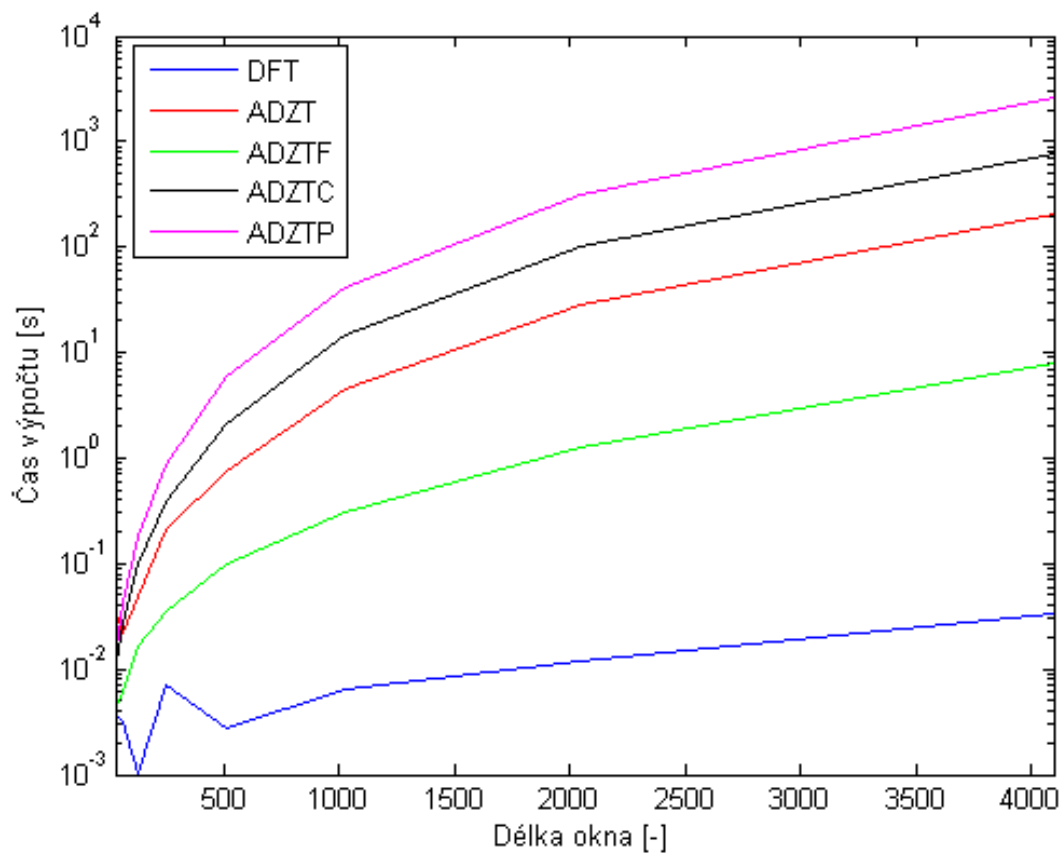
Všechny uvedené modifikace byly podrobeny analýze výpočetní náročnosti a jejich výsledky jsou na prezentovány na Obr.51. Průběhy uvedené na tomto obrázku potvrzují to, že fixací šířky pásma  $m$  je výpočet Zolotarevova spektra zrychlen (viz zelený průběh), zatímco při použití modifikace založené na prohledávání celého spektra se doba výpočtu značně prodlužuje (viz růžový průběh).

## 8.6 Shrnutí

Modifikace z první části kapitoly snižují výpočetní náročnost ADZT, ale produkují zologramy s horší schopností lokalizovat nestacionarity signálu a schopnost poskytovat informaci a okamžité obálce analyzovaného signálu. Poslední dvě modifikace navržené v této kapitole, které využívají cyklicky a periodických vlastností DFT a tím prodlužují interval stanovení šířky pásma, zlepšují časovou lokalizaci změn v signálu pro nižší frekvence, ale na druhou stranu zároveň zvyšují výpočetní náročnost algoritmu. Těmito modifikacemi je tedy potvrzena hypotéza **H3**.



Obrázek 50: Zologram signálu vytvořený pomocí obdélníkového okna délky 128 a krokem segmentace o jeden vzorek a pomocí původní ADZT (a), navržené ADZTS (b) a navržené ADZTP (c).



Obrázek 51: Výpočetní náročnost modifikovaných ADZT popsaných v kapitolách 8.1, 8.3 a 8.4.

## 9 Porovnání vybraných spektrálních metod

Následující část práce se zabývá porovnáním vybraných spektrálních metod, mezi které patří DFT a spektrální metody založené na DFT jako je MESP a ADZT společně s její modifikovanou verzí ADZTP, která je popsána v kapitole 8.4. Srovnání jednotlivých metod je provedeno na spektrech signálu, kde je ukázána základní vlastnost ADZT, což je potlačení prosakování. Dále jsou porovnány spektrogramy generované jednotlivými transformacemi, na kterých je ukázána možnost časové lokalizace nestacionarity signálu a detekce jednotlivých harmonických složek. Jako kritérium pro porovnání spektrálních metod je zvolena průměrná logaritmická spektrální vzdálenost (viz kapitola 5), která je spočítána ze spektrogramů a zologramů analyzovaného signálu. Pro bližší pochopení některých hodnot je spektrální vzdálenost vynesena do grafu, kde je zobrazen její časový vývoj. Vzhledem k tomu, že jsou spektra signálu symetrická, obsahují všechny prezentované spektrogramy jen jednu polovinu jejich spektra.

### 9.1 Porovnání DFT x ADZT

Detailní popis a porovnání spekter signálů je provedeno v práci [1], a proto je porovnání těchto transformací shrnuto v této kapitole do následujících několika bodů:

1. ADZT využívá adaptivní bázi založenou na aproximovaných Zolotarevových polynomech a oproti DFT je proto schopna lépe detekovat nestacionarity signálu.
2. Jednou z hlavních výhod ADZT je schopnost potlačovat spektrální prosakování a tím zlepšovat detekci frekvenčních složek signálu. Ke spektrálnímu prosakování dochází, pokud je porušena ortogonalita mezi analyzovaným signálem a bázovými polynomy použité transformace. Tato vlastnost je diskutována v kapitole 6.2, kde je detailně popsáno chování ADZT na umělých příkladech. Další popis je možné najít v [1].
3. Během potlačování rozlišení dochází k mazání spektrálních složek. V případě, kdy frekvence harmonické složky signálu neodpovídá frekvenčnímu rozlišení ADZT se během potlačení prosakování "maže" i jedna ze dvou nejbližších spektrálních složek a to vždy ta nižší. Tento jev byl popsán v kapitole 6.2.
4. ADZT je fázově citlivou transformací, což přispívá ke schopnosti detekovat okamžitou obálku analyzovaného signálu, jenž se projeví periodickou změnou hodnoty spektrální složky, jak bylo popsáno v kapitole 6.3.

### 9.2 Porovnání STFT x MESP x STADZT

Tato část práce podrobně analyzuje chování STADZT, což v práci [1] není popsáno a porovnává výsledky s STDFFT a MESP metodami.

Hlavní předností STADZT je možnost lokalizovat jednotlivé nestacionarity signálu s velkou přesností při zachování dobrého frekvenčního rozlišení. Tato vlastnost je ilustrována na obrázku 52, na kterém jsou zobrazeny spektrogramy testovacího signálu (viz kapitola 5.1) vytvořené pomocí spektrálních metod STDFT, MESP a STADZT, společně s ideálním spektrogramem testovacího signálu. Parametry jednotlivých transformací, jako je délka a typ segmentačního okna, krok segmentace, jsou uvedeny v popisku obrázku. Pro STADZT byly zvoleny parametry v souladu s kapitolou 7 diskutující optimální nastavení STADZT. Parametry STDFT a MESP byly voleny podle parametrů STADZT a to z toho důvodu, že ADZT stanovuje optimální parametry aproximovaných bázeových polynomů podle DFT spektrálních složek analyzovaného signálu. Volba stejných parametrů tak nabízí jednodušší a názornější srovnání těchto spektrálních metod. Výsledné spektrogramy jsou doplněny průběhy logaritmické spektrální vzdálenosti (viz Obr.53), které jsou vypočítané podle vztahu (68).

Hodnoty průměrné logaritmické spektrální vzdálenosti jsou vypočítány pro celý signál a jejich velikost v sobě odráží jak frekvenční tak i časové rozlišení jednotlivých spektrálních transformací. Podle hodnot logaritmické spektrální vzdálenosti uvedených na prvním řádku Tab.10 dosahuje nejlepších výsledků STADZT a to hodnotou 3.33dB. Tato hodnota je zhruba pětikrát menší než je velikost logaritmické spektrální vzdálenosti STDFT a nepatrně menší než pro MESP. Na druhém až čtvrtém řádku Tab.10 obsahuje logaritmické spektrální vzdálenosti výsledků diskutovaných spektrálních metod od ideálního spektra pro jednotlivé dílčí části testovacího signálu zvlášť, což umožňuje vytvoření lepší představy o vlastnostech spektrálních metod pro různé typy signálu. První část testovacího signálu S1 je nejlépe detekována STADZT. Z průběhu logaritmické spektrální vzdálenosti je patrné, že je toho dosaženo díky dobré časové detekci začátku a konce tohoto signálu (viz průběhy odpovídající signálu S1 na Obr.53). Druhá část testovacího signálu S2 tvořena jednotkovým pulsem, která je určena pro testování časové lokalizace silné nestacionarity signálu, je nejlépe detekována pomocí MESP. Ta podle svého principu počítá výsledný spektrogram pomocí nejkratšího okna až do chvíle, než je jednotkový puls uprostřed segmentačního okna, poté je zvoleno nejdelší možné okno segmentace. STADZT dosahuje oproti SDTFT taktéž dobrých výsledků, ale oproti MESP je časová lokalizace jednotkového pulsu o něco málo horší. Poslední část testovacího signálu S3 je vytvořena Gaussovým pulsem reprezentujícím nestacionaritu signálu jak v čase, tak i ve frekvenci. Výsledné hodnoty logaritmické spektrální vzdálenosti jsou obdobné jako u předchozí části, kde nejlepších výsledků dosáhla MESP společně s STADZT.

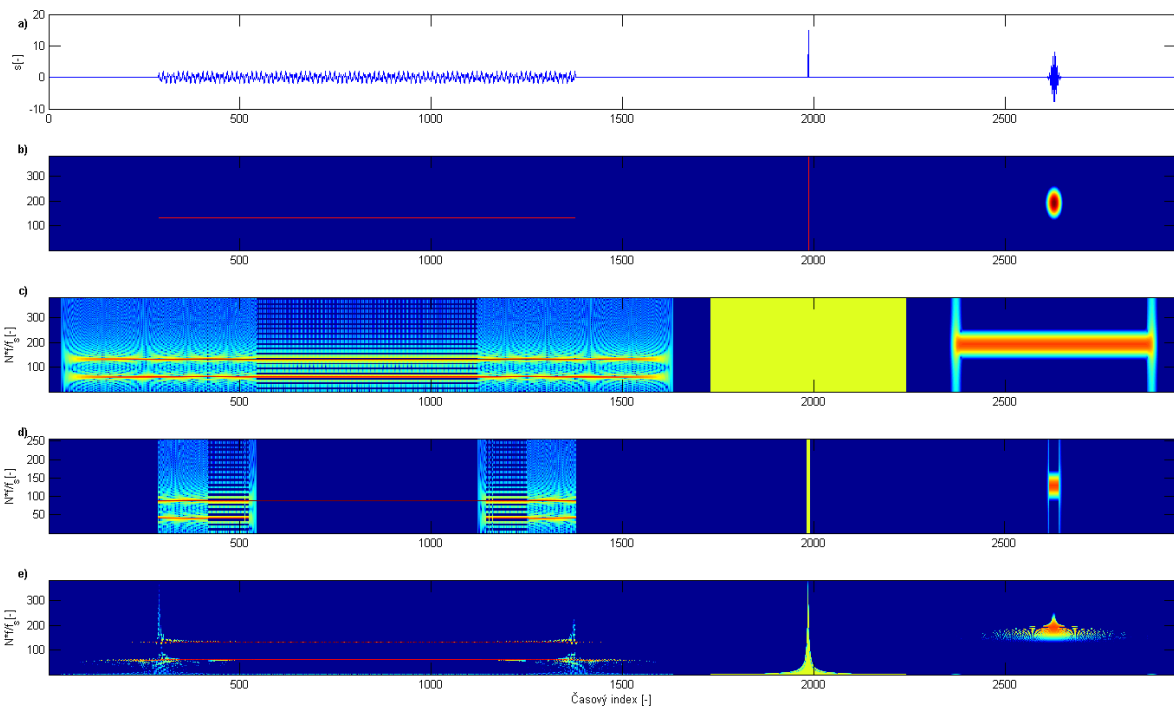
Tabulka 10: Tabulka obsahuje průměrnou spektrální vzdálenost spektrogramů a zologramů vytvořených pomocí vybraných spektrálních metod (viz Obr.52) od ideálního spektrogramu testovacího signálu.

Typ transformace / Spektrální vzdálenost [dB]	STDFT	MESP	STADZT
Celý testovací signál	15.18	3.61	3.33
Část testovacího signálu S1	15.94	5.94	3.38
Část testovacího signálu S2	17.33	0.75	3.05
Část testovacího signálu S3	12.28	4.14	3.47

Z uvedeného zologramu na Obr.52e, respektive z jeho první části obsahující testovací signál S1, je patrné, že STADZT dosahuje vysokého frekvenčního rozlišení pro celý průběh tohoto signálu a to včetně částí obsahující silnou nestacionaritu (viz začátek a konec harmonického signálu S1). Toto vysoké frekvenční rozlišení je dosaženo tím, že STADZT zpracovává analyzovaný signál dlouhým segmentačním oknem, díky kterému je ADZT algoritmus schopen najít optimální parametry bazových funkcí tvořených aproximovanými Zolotarevovými polynomy (viz kapitola 4.2). Na rozdíl od MESP, je frekvenční rozlišení STADZT konstantní pro celý analyzovaný signál. To je způsobeno tím, že STADZT detekuje nestacionaritu signálu pomocí adaptivního nastavování bazových polynomů, zatímco MESP zlepšuje svou schopnost lokalizace nestacionaritu signálu pomocí zkracování okna segmentace, čímž ale zároveň zhoršuje její frekvenční rozlišení (viz spektrogram počátek a konec signálu S1 a signál S2 na obrázku 52d). MESP používá dlouhé okno pouze v případě, je-li analyzovaný signál ryze stacionární. V tomto případě je použito pouze pro analýzu střední části signálu S1 na obrázku 52d.

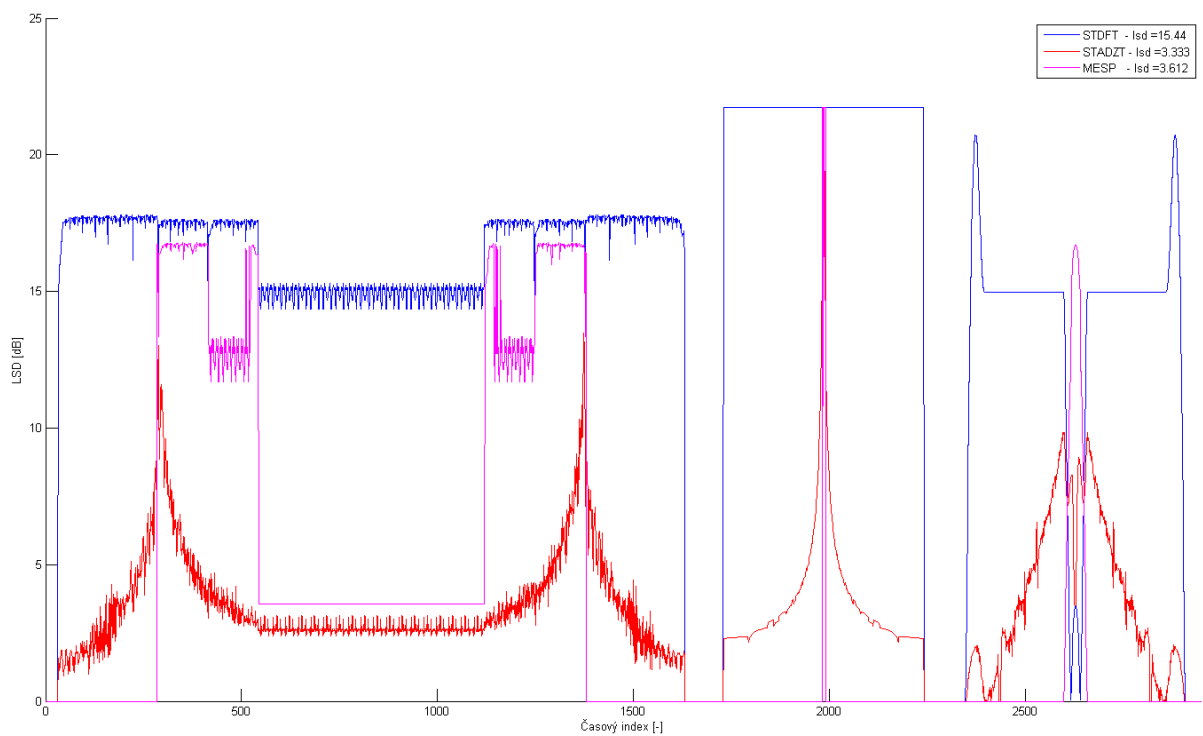
Během analýzy stacionárního signálu S1 (mimo kraje tohoto signálu) je možné pozorovat další vlastnost STADZT, jež je schopnost detekce okamžité obálky signálu. Tato vlastnost je promítnuta i do průběhu logaritmické spektrální vzdálenosti jako periodické pulsování této hodnoty. To je způsobeno tím, že použité ideální spektrum analyzovaného signálu obsahuje pouze konstantní spektrální složky a nereflktuje okamžitou obálku signálu.

Při bližším pohledu na časové rozlišení STADZT je vidět, že časová lokalizace nestacionaritu signálu není pro všechny frekvenční složky konstantní, ale zpřesňuje se s rostoucí frekvenční složkou signálu (viz jednotkový puls S2 na obrázku 52e). Tato vlastnost je dána tím, že STADZT používá pro výpočet nižších frekvenčních složek bazové polynomy tvořené aproximovanými Zolotarevovými polynomy nižších řádů, které se nemohou tak dobře adaptovat na daný signál, jako je tomu pro analyzující bazové polynomy vyšších harmonických složek signálu. Tato vlastnost je patrná i z poslední části testovacího signálu S3 jimž je Gaussův puls. Ze zologramu tohoto pulsu je vidět, že časová lokalizace pulsu je výrazně lepší pro horní polovinu spektrálních složek.



Obrázek 52: Porovnání spektrogramů vytvořených z testovacího signálu (a) s ideálním spektrogramem (b). Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek pomocí STDFT (c), MESP (d) a STADZT (e).





Obrázek 53: Průběh logaritmické spektrální vzdálenosti spektrogramů od ideálního spektrogramu. Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STDFT (modrá křivka), MESP (červená křivka) a STADZT (modrá křivka).

### 9.3 Porovnání STADZT x STADZTP

Tato podkapitola je zaměřena na porovnání vlastností navržené STADZTP s původní STADZT navržené v [1]. Jak je vidět z výsledků logaritmické spektrální vzdálenosti uvedené v Tab.11, STADZTP dosahuje výrazně lepších hodnot a to pro všechny tři dílčí části testovacího signálu.

Modifikací původní transformace se především zlepšilo časové rozlišení transformace, které je nyní pro všechny spektrální složky konstantní, protože se při určování báze modifikované ADZT využívá periodicity spektra (viz kapitola 8.4), což umožňuje lépe určit její parametry. Toto zlepšení je dobře patrné z porovnání zologramů harmonického signálu S1 generovaním STADZT (viz Obr.54c) a pomocí STADZTP (viz 54d), na kterém jsou přesněji lokalizovány časové nestacionarity signálu v krajních částech tohoto harmonického signálu, které odpovídají okamžitému začátku a konci generování tohoto signálu.

Oproti zologramu vytvořeném pomocí STADZT, je časový vývoj spektra ADZTP zobrazen zologramem na Obr.54d, který je shodný s časovým průběhem ideálního spektrogramu (viz Obr.54b), potažmo s časovým průběhem analyzovaného signálu (viz 54a). To znamená, že STADZTP zologram nezobrazuje žádné spektrální složky signálu, které jsou před a nebo za analyzovaným signálem (viz signál S1 mezi časovými indexy 0 - 300 a 1300-1600) a nemají svůj ekvivalent v časové oblasti, kde je testovací signál roven nule. Tyto části jsou pozůstatkem DFT, ze které samotná ADZT vychází, a proto mohou být odstraněny, čímž se výsledný zologram více přiblíží ideálnímu spektrogramu (viz průběh logaritmické spektrální vzdálenosti signálu na Obr.55).

Zlepšení časového rozlišení lze rovněž sledovat na lokalizaci Gaussova pulsu (viz část testovací signálu S2), který je v tomto případě lokalizován s přesností jednoho vzorku a to po pro všechny jeho frekvenční složky. Tomu odpovídá i průběh logaritmické spektrální vzdálenosti na Obr.55. V ideálním případě by měl být tento průběh nulový, což v tomto případě není. Je zde offset, který odpovídá prvním dvěma spektrálními složkám DFT spektra, které ADZT ponechává ve svém spektru <sup>8</sup> (viz kapitola 4.2).

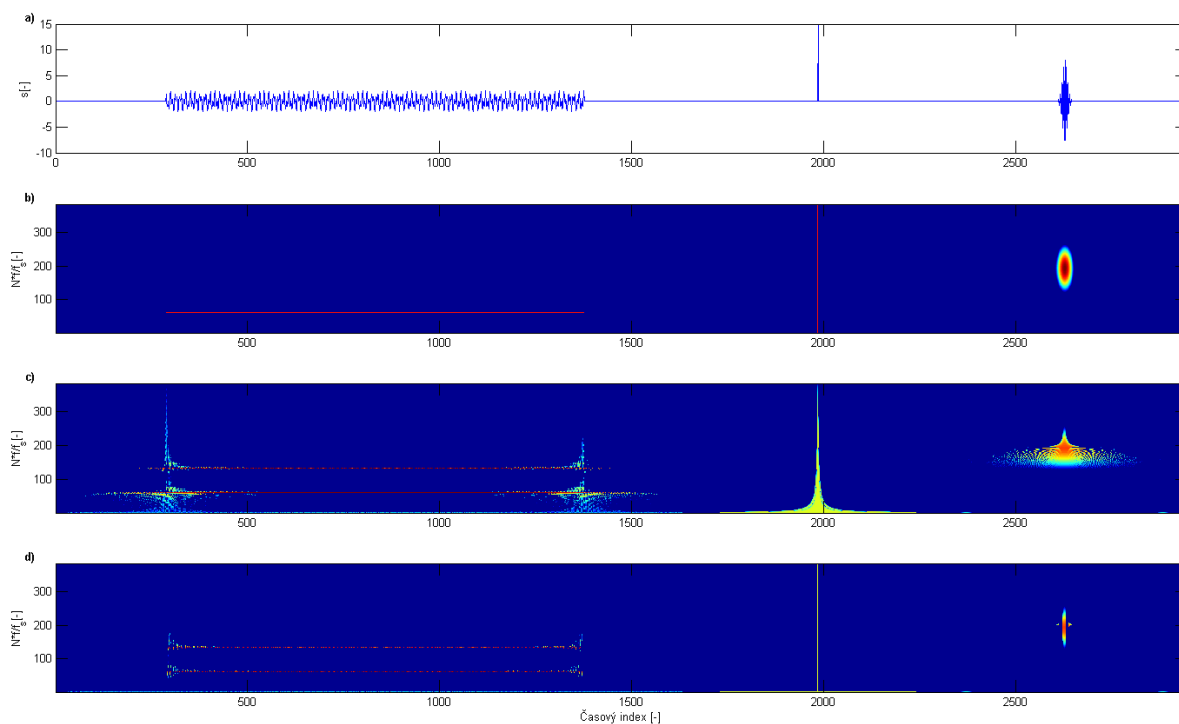
Ideální tvar Gaussova impulsu v časově-frekvenční oblasti je zobrazen na Obr.54b a jak je vidět z průběhu zologramu tohoto impulsu zobrazeném na Obr.54d, STADZTP tento puls v porovnání s STDFT a STADZT velmi přesně detekuje. Při bližším pohledu je však patrné, že STADZTP pravidelně nuluje každý druhý segment, což je cena za schopnost transformace zobrazovat okamžitou obálku analyzovaného signálu (viz kapitola 6.3).

---

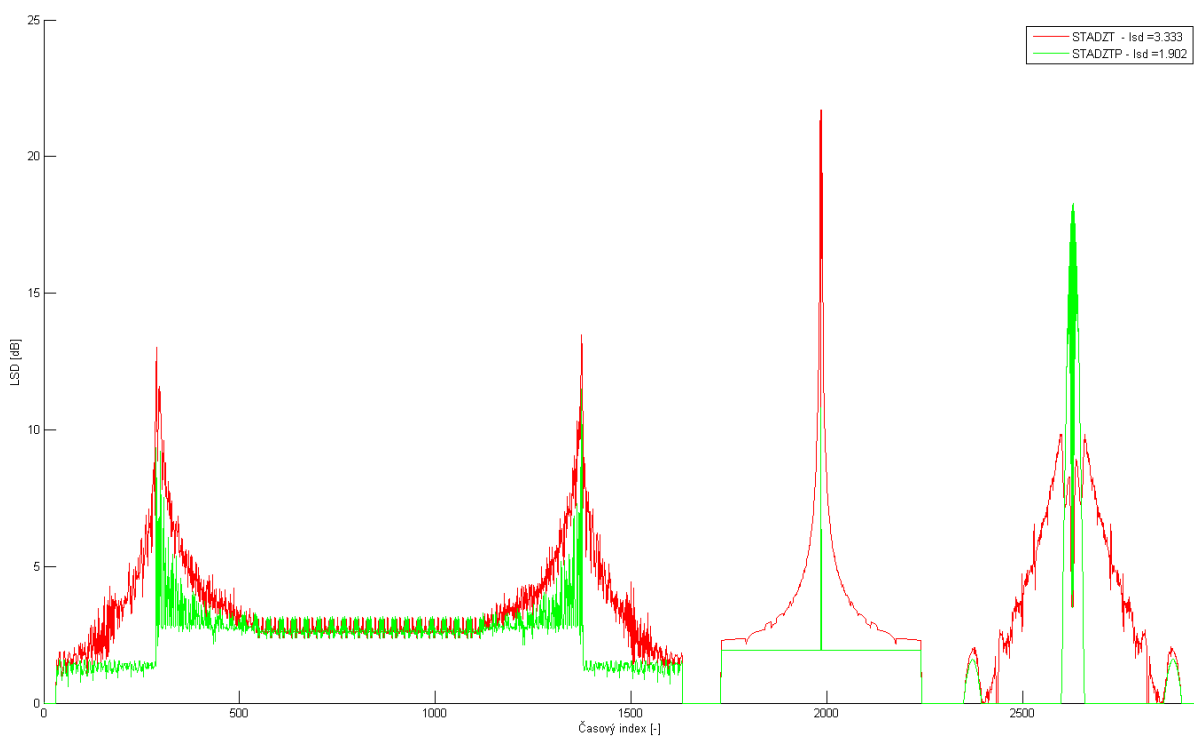
<sup>8</sup>První dvě spektrální složky ADZT spektra odpovídají spektrálním složkám DFT spektra a ADZT transformace je ponechává ve svém spektru z důvodu možnosti převodu signálu z frekvenční oblasti zpět do časové oblasti. Pro účely spektrální analýzy by bylo možné tyto spektrální složky odstranit nebo případně dále modifikovat navrženou ADZTP tak, aby upravovala i tyto spektrální složky.

Tabulka 11: Tabulka průměrné spektrální vzdálenosti  $LSD$  zologramů vytvořených pomocí STADZT a STADZTP (viz Obr.52) od ideálního spektragramu testovacího signálu.

	STADZT	STADZTP
Celý testovací signál	3.33 [dB]	1.66 [dB]
Část testovacího signálu S1	3.38 [dB]	2.34 [dB]
Část testovacího signálu S2	3.05 [dB]	1.54 [dB]
Část testovacího signálu S3	3.47 [dB]	1.10 [dB]



Obrázek 54: Porovnání spektrogramů vytvořených z testovacího signálu (a) s ideálním spektrogramem (b). Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 a symetricky doplněným nulami na 768 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STADZT (c), STADZTP (d).



Obrázek 55: Průběh logaritmické spektrální vzdálenosti spektrogramů od ideálního spektrogramu. Spektrogramy byly vytvořeny obdélníkovým oknem délky 512 vzorků a symetricky doplněným nulami na 768 vzorků s krokem segmentace jeden vzorek a pomocí STADZT (červená křivka) a STADZTP (zelená křivka).

## 9.4 Porovnání STADZT x STDFT x CWT x CWD x HHT

Tato kapitola doplňuje porovnání STADZT s vybranými spektrálními metodami, které jsou popsány v úvodní kapitole zabývající se rešerší stavu spektrálních metod (kapitola 2) a to včetně metod, které nejsou založeny na DFT. Mezi vybrané metody patří STDFT, MSP, STADZT, CWT, CWD a HHT, jejichž parametry jsou nastaveny tak, aby dosahovaly nejlepších výsledků. Během porovnání není použita logaritmická spektrální vzdálenost, jako tomu bylo v předchozích kapitolách, kde bylo podrobně diskutováno o rozdílech mezi ADZT a metodami založených na DFT. Tato kapitola slouží pouze k ilustraci chování vybraných metod při spektrální analýze následujících třech signálů:

- Testovací signál popsáný v kapitole 5.1.
- Biologický signál EKG obsahující několik P-QRT-S vln.
- Řečový signál obsahující slovo znělé a neznělé hlásky (slovo "osum").

Rozdíl mezi STADZT a STDFT, respektive její adaptivní verzí MESP, je detailně popsán v předchozí kapitole 9.2, kde byl použit stejný testovací signál jako je pro výsledné spektrogramy z Obr.56. Jak je patrné z výsledných STDFT spektrogramů reálných signálů uvedených na Obr.57a a Obr.58a, tak musí být zvolen kompromis mezi časovým a frekvenčním rozlišením STDFT skrze délku okna segmentace, a proto je nutné vědět, co je cílem prováděné analýzy, a podle toho přizpůsobit délku okna. Tuto nepříjemnou vlastnost odstraňuje MESP, kde je okno segmentace adaptivně nastavováno podle zvoleného kritéria minimální energie spektrálního prosakování (6) a jak je vidět ze spektrogramů (Obr.57c a Obr.58c), tak časové rozlišení výsledných spektrogramů je zlepšeno.

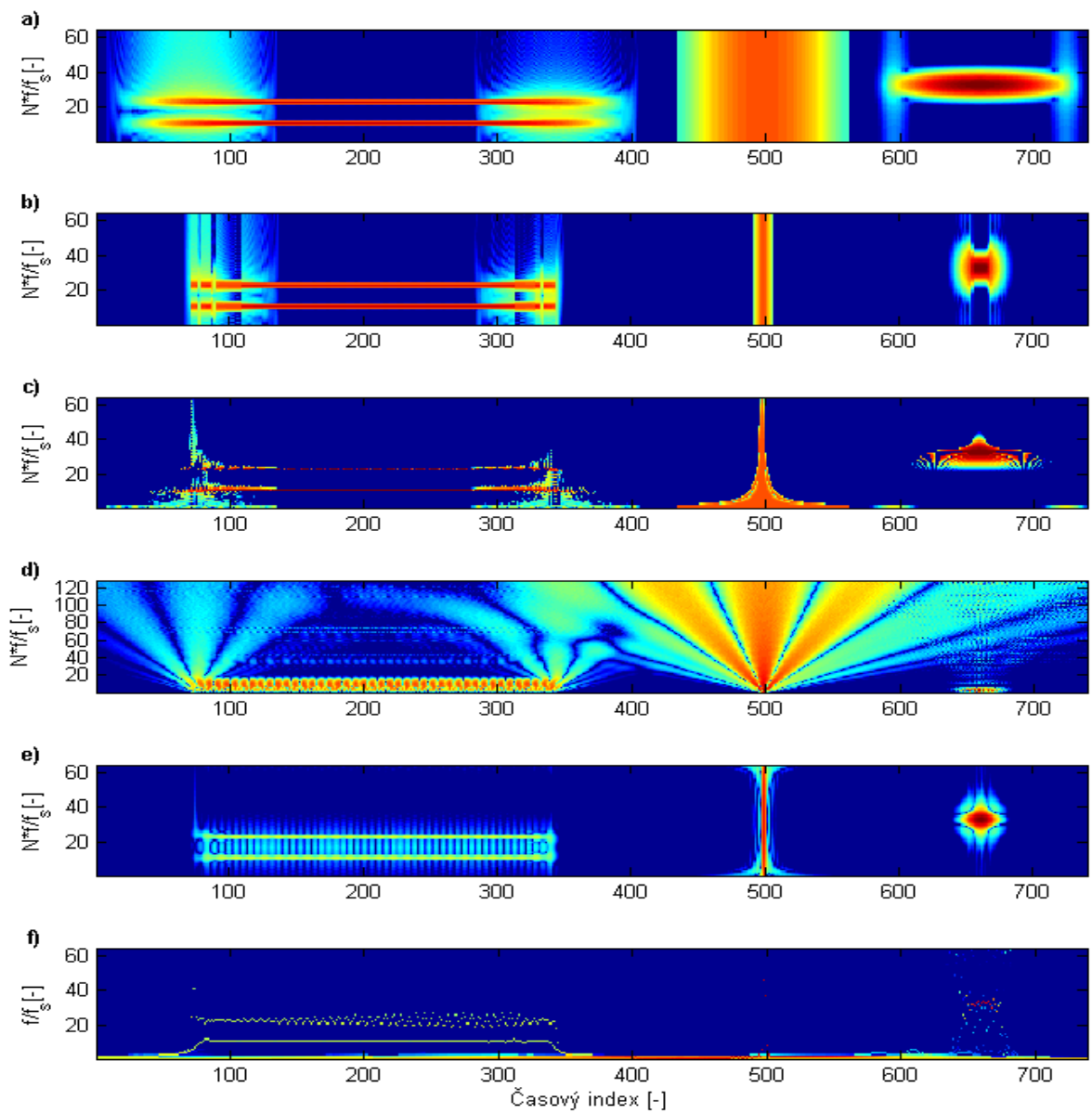
Použitím CWT se výrazně vylepšuje časová lokalizace nestacionarity signálu, což je dáno změnou měřítka mateřské vlnky. Časové rozlišení CWT není pro všechny škály konstantní (viz Obr.1). Tento jev je vidět na scalogramu testovacího signálu (Obr.56d), kde je velmi přesně lokalizován jednotkový impuls a začátek s koncem harmonického signálu pouze pro nízké škály. Oproti STADZT je frekvenční rozlišení CWT horší, jak je možné pozorovat na první části testovacího signálu, kde není možné od sebe odlišit jednotlivé harmonické části signálu. Při analýze reálných signálů dosahuje CWT dobrých výsledků a proto je v praxi běžně používána pro analýzu EKG signálu, kde jsou jednotlivé EKG impulsy zobrazeny jako opakující se obrazce (viz Obr.57d).

CWD metoda byla vybrána z toho důvodu, že díky použití exponenciálního jádra distribuce velmi výrazně potlačuje interference mezi spektrálními složkami analyzovaného signálu, jenž se běžně vyskytují u WVD. Nicméně lze stále tyto interference spatřovat ve stacionární části, které u STADZT nejsou (signál S1). I přesto je možné u CWD rozlišit obě spektrální složky harmonické části signálu a zároveň i velmi dobře detekovat jednotkový a Gaussův impuls. Časová lokalizace těchto změn je u CWD lepší než je tomu u STADZTm, kdy STADZT dosahuje menšího časového rozlišení na nízkých frekvencích. Tuto nevýhodu odstraňuje navržená modifikace STADZTP (Obr.54). Při porovnání spektrogramu EKG a řeči vytvořené

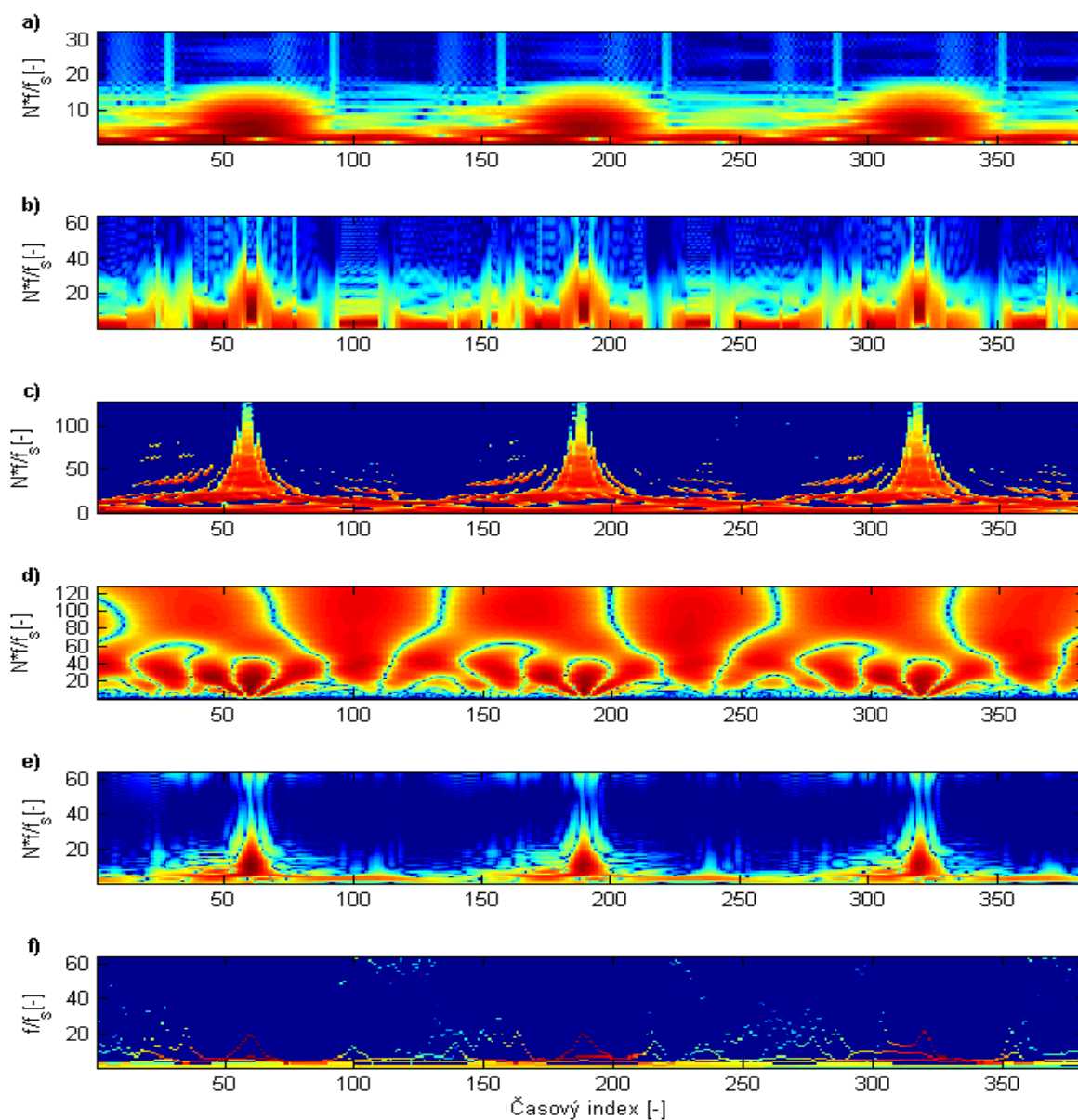
CWD a STADZT (Obr.57 a Obr.58) lze konstatovat, že obě metody dosahují srovnatelných výsledků.

Při analýze signálu pomocí HHT dochází k rozkladu signálu do tzv. vlastních modálních funkcí (IMF), z nichž je pomocí dalších úprav vytvořeno Hilbertovo spektrum. Z vytvořeného spektrogramu testovacího signálu zobrazeného na Obr.56f je možné pozorovat, že HHT velice dobře lokalizuje časové změny signálu reprezentované začátkem a koncem harmonického části testovacího signálu. HHT rozlišuje obě harmonické složky této části signálu, kterým odpovídá samostatná IMF, která ale pro vyšší harmonickou složku není konstantní. Jednotkový impuls je detekován pouze jednou IMF komponentou zatímco Gaussův puls je rozložen do tří.

Podrobnější diskuze výsledků analýzy spektrálních metod uvedených v této kapitole je možné najít v [A2] nebo [A3].

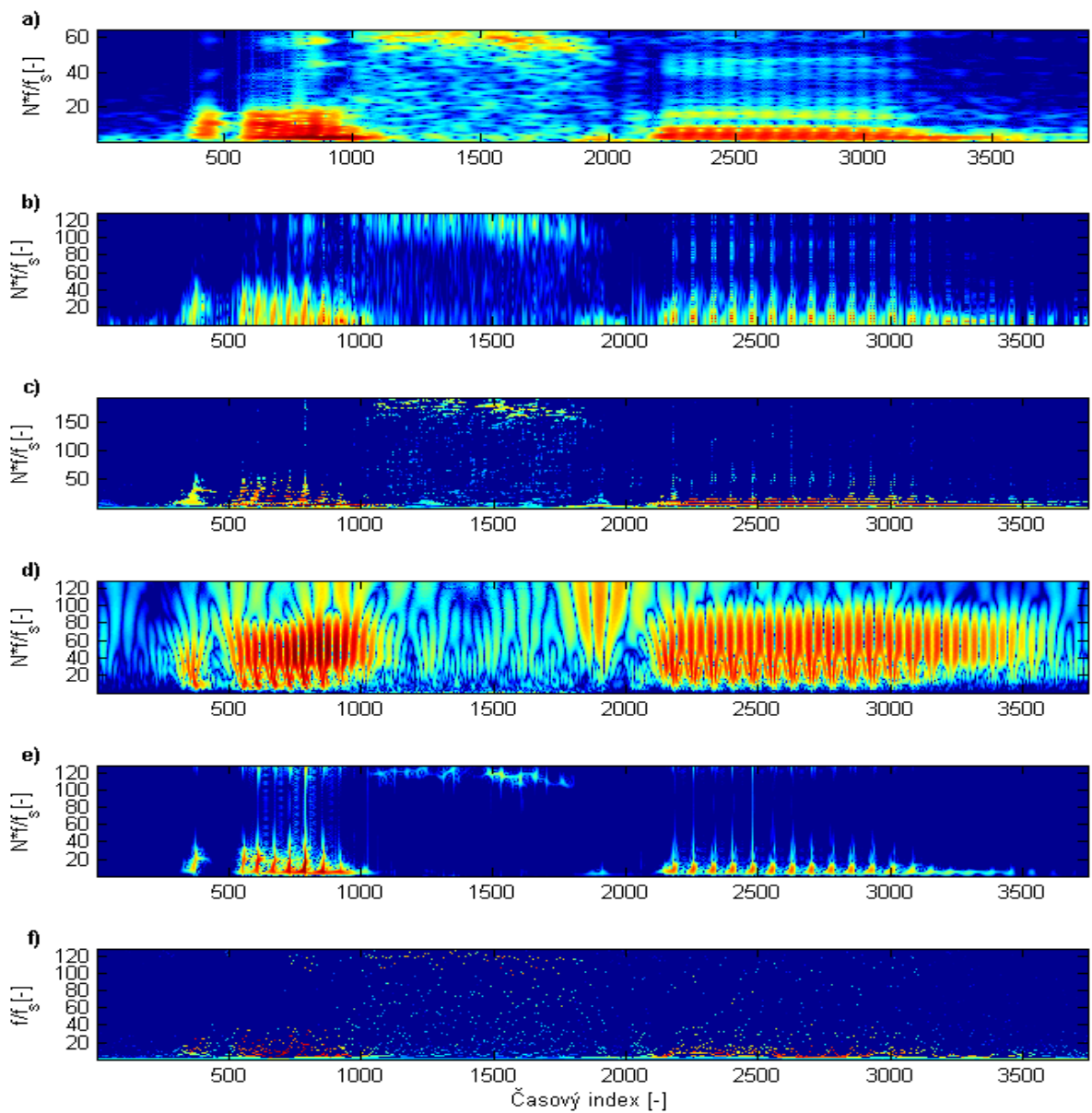


Obrázek 56: Porovnání výsledků spektrální analýzy testovacího signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 16 - 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 128 a doplněném o 0 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT.



Obrázek 57: Porovnání výsledků spektrální analýzy EKG signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 64 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 8 - 128 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 128 a symetricky doplněném o 384 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT.





Obrázek 58: Porovnání výsledků spektrální analýzy řečového signálu: a) STDFT - Hammingovo okno délky 128 s krokem segmentace 1 vzorek; b) MESP - Hammingovým okno s adaptivní délkou okna v rozmezí 16 - 256 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; c) STADZT obdélníkové okno délky 256 a symetricky doplněném o 64 vzorků s krokem segmentace 1 vzorek; d) CWT - Coifletovo okno délky 128 vzorků; e) CWD - obdélníkové okno délky 128 vzorků; f) HHT.

## 9.5 Shrnutí

Tato kapitola porovnává spektrogramy a zologramy získané pomocí vybraných spektrálních metod. Z podrobného porovnání STADZT, STDFT a MESP je zřejmé, že ADZT dosahuje přesnějších výsledků, jenž je doloženo průběhy logaritmické spektrální vzdálenosti. Z porovnání modifikovaných metod STDFT nejlépe vychází modifikace využívající periodicity spektra STADZTP, jak je možné pozorovat na uvedených zologramech a průbězích logaritmické spektrální vzdálenosti. Pro ilustrace vlastností a schopností spektrálních metod uvedených v rešerši této práce jsou tyto vybrané metody použité k analýze testovacího signálu a dvou reálných signálů.

## 10 Ověření výpočtu DZT spektra

Účelem této kapitoly týkající se ověření výpočtu DZT spektra je prokázat, že DZT spektrum se dá počítat stejně jako DFT spektrum a to pomocí skalárního součinu bázevých polynomů s analyzovaným signálem, což nebylo prozatím nikde provedeno. Koeficienty DFT lze získat pomocí minimalizace (31). To vede na [9]

$$c_k = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t) \exp(-i2\pi kt) dt, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (78)$$

kde  $T_0$  je perioda signálu,  $k$  je index spektrální složky signálu. Diskretizací tohoto vztahu lze spektrální složky DFT zapsat jako [7]

$$c_k = T_s \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x[n] \exp(-i2\pi knT_s), \quad k = \frac{-N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (79)$$

kde  $N$  je počet vzorků signálu a  $T_s$  je perioda vzorkování. Obdobně lze získat vztah pro spektrální koeficienty DZT pomocí skalárního součinu bázevých polynomů a signálu (15) a přepsat tento vztah jako

$$S_Z[\ell] = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \text{zexp}(-i2\pi \ell n T_s), \quad \ell = \frac{-N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (80)$$

kde  $\text{zexp}(-i2\pi \ell n T_s)$  představuje bázevých polynom DZT tvořený ZP  $\ell$ -tého řádu.

Jak již bylo popsáno v kapitole 4.2.1, ADZT spektrum signálu je počítáno pomocí algoritmu, který adaptivně nastavuje analyzující bázevých polynomy ADZT podle vstupního signálu. Algoritmus ADZT pracuje se signálem, který je vyjádřen pomocí Fourierovského spektra z něhož je pak za pomoci sestavené matice  $\mathbf{Z}$  vypočteno ADZT spektrum podle vztahu (21). Tímto postupem lze na ADZT rovněž nahlížet jako na filtraci DFT spektra pomocí uvedené matice  $\mathbf{Z}$ . Tato matice v sobě rovněž nese informace o analyzovaném signálu, jenž jsou z výsledného ADZT spektra odstraněny. Například během potlačení spektrálního prosakování, kdy jsou jednotlivé spektrální složky odpovídající spektrálnímu prosakování z výsledného spektra odstraněny, se informace o odstraněných spektrálních složkách přesune ze spektra do matice  $\mathbf{Z}$ , kde jsou tyto informace uloženy ve formě parametrů analyzujících bázevých funkcí. Tím si ADZT ponechává informaci o odstraněných spektrálních složkách, a proto je možné pomocí vztahu (22) zpětně rekonstruovat analyzovaný signál.

Pro ověření, zda-li je výpočet koeficientů DZT spektra podle vztahu (19) možný je nejprve nutné ověřit, že je možné získat ADZT spektrum pomocí ADZT bázevých funkcí, tak jako je tomu pro DFT spektrum (2) stejně jako pomocí vztahu (21) pracující ryze ve frekvenční oblasti (filtrace DFT spektra). Pro výpočet ADZT spektrálních složek v časové oblasti tedy platí následující vztah

$$\mathbf{S}_Z = \mathbf{W}_Z \cdot \mathbf{s}, \quad (81)$$

kde vektor  $\mathbf{s}$  obsahuje vstupní signál a matice  $\mathbf{W}_Z$  obsahuje aproximované Zolotarevovy polynomy (AZP) tvořící analyzující báze ADZT obdobně jako je báze DFT  $\mathbf{W}$  tvořena komplexními exponenciálami (3)

$$\mathbf{W}_Z = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}, \quad (82)$$

kde matice  $\mathbf{Z}$  obsahuje koeficienty AZP polynomů.

Pro ilustraci ověření byl použit signál složený ze směsi dvou harmonických signálů, jejichž frekvence není ortogonální ani k jedné bázi DFT a ADZT, a proto výsledné DFT spektrum uvedené na Obr.59a obsahuje spektrální prosakování, které ADZT potlačuje. ADZT spektrum (Obr.59b) je nejprve počítáno ve spektru podle vztahu (21) (viz modré vykreslení spektra) a poté v časové oblasti podle vztahu (81) (viz červený průběh). Z obou těchto průběhů a rozdílu absolutních hodnot spekter vykreslených na Obr.59c je patrné, že oba výpočty vedou na shodné výsledky. Tento fakt je ještě podpořen výpočtem logaritmické spektrální vzdálenosti podle vztahu (68), která je rovna nule.

Díky provedenému experimentálnímu porovnání vztahů (19) a (81) pro výpočet Zolotarevova spektra pomocí ADZT lze nyní bez jakýchkoliv pochybností ověřit výpočet Zolotarevova spektra pomocí DZT a to za použití vztahu (81) (respektive vztahu (19)), kde matice  $\mathbf{W}_Z$  obsahuje analyzující báze polynomy DZT tvořené neaproximovanými ZP<sup>9</sup>.

Dalším krokem ověření, který musel být vyřešen, bylo nutné najít postup sestavení DZT analyzující báze z neaproximovaných Zolotarevových polynomů prvního a druhého druhu (18) [1]. Tyto polynomy jsou určeny řádem polynomu  $\ell$  a parametry  $w_p$ ,  $w_s$  a  $w_m$ , jež určují výšku středového laloku. Parametry sudého Zolotarevova polynomu (tzv. *zcos*) jsou definovány jako [1]

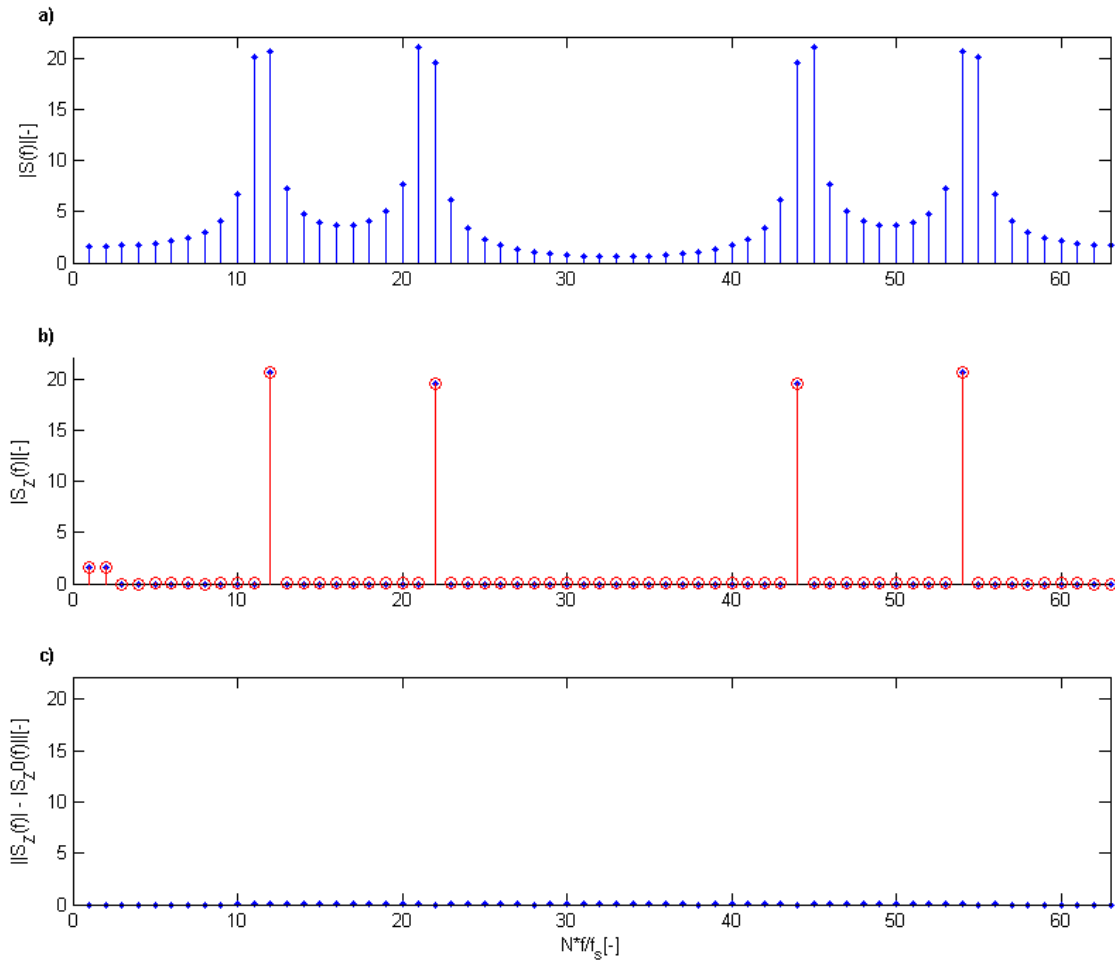
$$\begin{aligned} w_p &= \frac{1 - \kappa'}{1 + \kappa'}, \\ w_s &= -w_p, \\ w_m &= 0, \end{aligned} \quad (83)$$

kde parametr  $\kappa'$  je komplementární eliptický modul, který nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  [1]. Pro lichý Zolotarevův polynom (tzv. *zsin*) lze tyto vztahy definovat pomocí Chebychevových polynomů [1].

ADZT určuje index nestacionarity jako poměr stacionární a nestacionární části spektra analyzovaného signálu (46),

Vzhledem k tomu, že v tuto chvíli neexistuje žádný postup pro optimální nastavení parametrů analyzující DZT báze, řádu ZP  $\ell$  a šířky středového laloku  $w_p$ , je nasnadě využít k tomuto účelu ADZT algoritmus určující optimální šířku pásma  $m$  a normovaného index nestacionarity  $k_0$  analyzující báze ADZT tvořenou AZP. Z dosavadních výsledků analýzy ADZT a jejich modifikací je zřejmé, že jakákoliv změna šířky pásma ve většině případů vede

<sup>9</sup>Předchozí ověření bylo provedeno s AZP.



Obrázek 59: Ověření výpočtu ADZT spektra. Analyzovaný signál je složen ze dvou sinusových signálů délky  $N = 32$  s frekvencí  $f_1 = 10.5f_s/N$  a  $f_2 = 20.5f_s/N$ : Jednotlivé obrázky zobrazují DFT spektrum analyzovaného signálu (a), ADZT spektrum vypočtené vztahem (21) (b - modrý průběh) a podle vztahu (81) (b - červený) a rozdíl absolutních ADZT spekter (c).

ke zhoršení vlastností ADZT. Bylo proto nutné nejprve vyřešit způsob sestavení ZP daného řádu  $\ell$  a požadované šířky pásma  $m$ . Zde se nabízejí dva postupy. První postup vedl na vygenerování ZP daného řádu  $\ell$  a následným oříznutím jeho nestacionární části na požadovanou velikost šířky pásma  $m$  (tj. vynulování všech spektrálních složek s indexem nižším než je  $\ell - m$  v pravé polovině spektra). Druhá možnost pracovala s tím, že řád ZP je roven šířce pásma  $m$ , tím se vygeneruje ZP v základním pásmu a poté je frekvenčně namodulován na požadovanou frekvenci odpovídající řádu  $\ell$  (tj. celé spektrum ZP je posunuto  $\ell - m$  spektrálních složek vpravo). Prováděné operace byly ve spektru provedeny v obou jeho polovinách symetricky. Během sestavování DZT báze se ukázalo, že tento druhý postup vede ke správné interpretaci ADZT spektrální masky respektive ADZT báze (viz Obr.2) pomocí neaproximovaných ZP.

Šířka pásma  $m$  získaná během výpočtu ADZT spektra přímo odpovídá řádu ZP  $\ell$  hledané analyzující DZT báze a její hodnota je ADZT algoritmem určena optimálně pro dosažení nejlepší časové lokalizace. Na základě provedených analýz a experimentů lze předpokládat vztah mezi normovaným indexem nestacionarity ADZT  $k_0$  a šířkou středového laloku ZP  $w_p$  tvořící DZT analyzující bázi, který nebyl prozatím matematicky odvozen. Důvodem je to, že nejsou úplně odvozeny vztahy, které popisují jak se chovají ZP v celém intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Prozatím je dokázáno pouze to, že jsou tyto polynomy ortogonální na intervalech  $\langle -1, w_p \rangle$  a  $\langle w_s, 1 \rangle$  [40], ale už není jasné jejich chování na intervalu  $\langle w_p, w_s \rangle$ , a proto nelze získat optimální parametry DZT bazových polynomů  $\text{zexp}\left(\frac{-i2\pi\ell n}{N}\right)$ . Bylo tedy nutné parametry ZP empiricky určit pomocí korelace mezi bazovými funkcemi ADZT tvořenými AZP, které byly optimálně nastaveny během výpočtu ADZT spektra a hledanými ZP. Postup generování optimálních ZP je shrnutý v následujících bodech:

1. Získání analyzující bazové funkce ADZT odpovídající  $l$ -té spektrální složce společně s hodnotou jejich parametrů šířky pásma  $m$  a normovaného indexu nestacionarity  $k_0$ .
2. Vygenerování ZP řádu  $\ell$  odpovídajícímu šířce pásma ADZT bazové funkce  $m$  (tj.  $\ell = m$ ) s počáteční hodnotou šířky středového laloku  $w_p$ .
3. Modulace ZP, tedy posunu jeho spektra na  $l$ -tou spektrální složku pomocí frekvenčního posunutí ve spektru. Díky ADZT algoritmu platí  $m < l$ . Modulací se změní řád polynomu z hodnoty  $m$  na hodnotu  $\ell$ .
4. Pomocí korelace a postupnou změnou šířky středového laloku  $w_p$  v rozmezí  $(0, 1)$  v bodě 2 je iterativně (opakováním bodů 2-4) nalezen takový ZP, který dosahuje maximální vzájemné energie s ADZT bazovou funkcí.
5. Uložení nalezeného ZP do matice  $\mathbf{W}_z$  představující analyzující bázi DZT.
6. Opakování postupu pro všechny bazové funkce.

Z korelační analýzy, během které je určena analyzující báze DZT, a porovnáním normovaných indexů nestacionarity  $k_0$  a nalezených šířek středového laloku  $w_p$  lze konstatovat, že hodnoty  $w_p$  kopírují trend hodnot  $k_0$  (viz Obr.61). Tento trend lze definovat vztahem

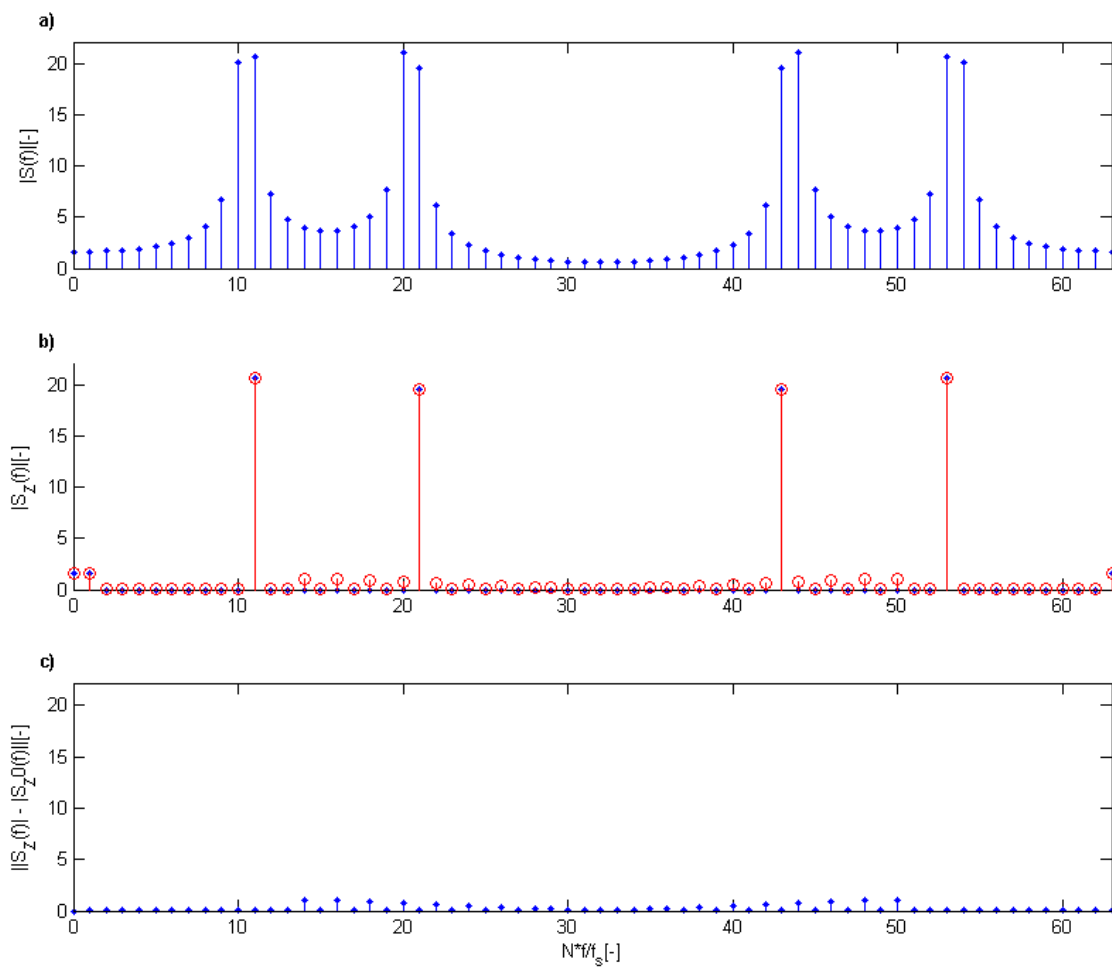
mezi normovaným indexem nestacionarity ADZT  $k_0$  a hodnotou  $w_p$  pro ZP prvního druhu. Pomocí vztahu (52) lze vyjádřit jako

$$w_s = -w_p = \frac{k}{k+1} = k_0, w_m = 0. \quad (84)$$

Analogický vztah pro ZP druhého druhu, není tak "přímočarý" jako pro ZP prvního druhu a to z důvodu použití Jacobiho eliptických integrálů při určování  $w_p$ ,  $w_s$  a  $w_m$ , a proto i jejich dynamika/chování není lineární. Dosud se nepodařilo tento vztah jednoznačně určit.

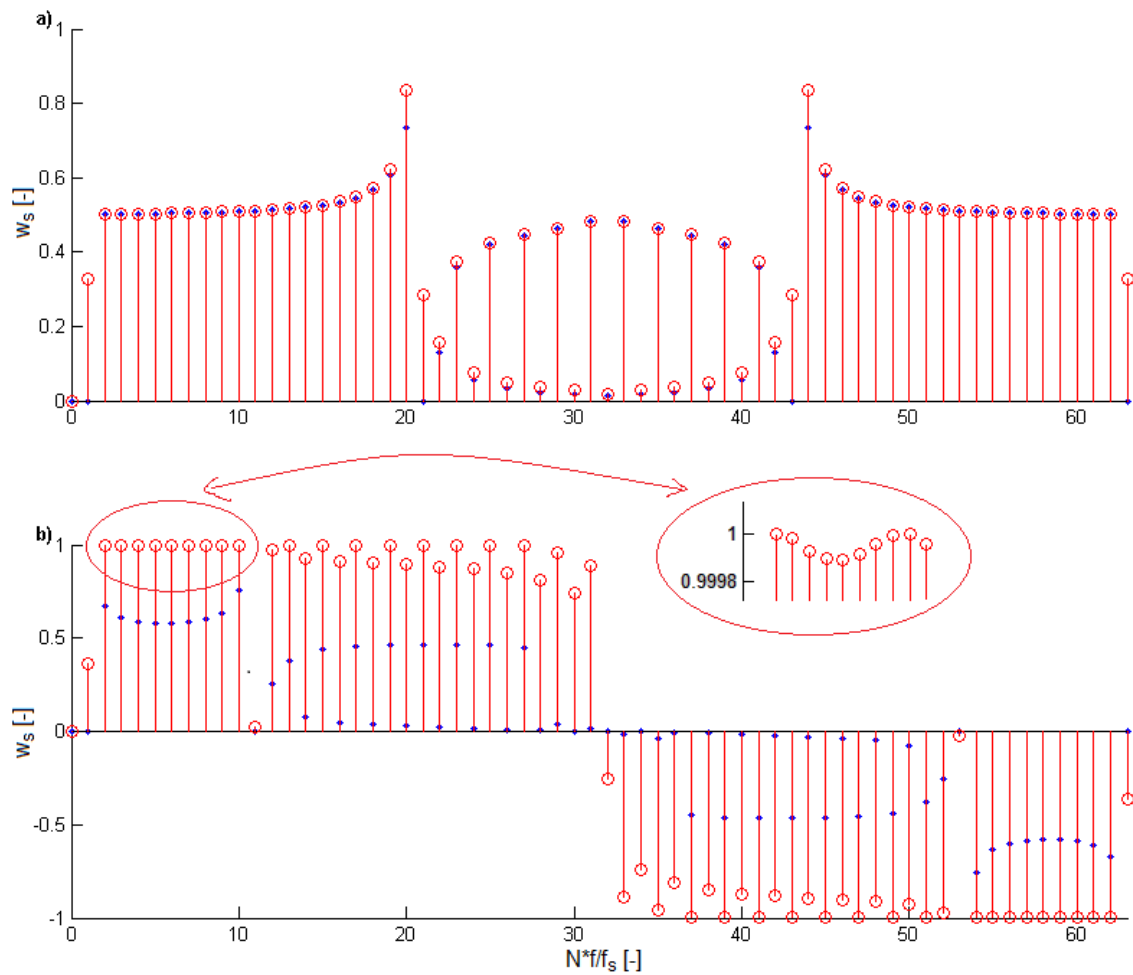
Obr.60a zobrazuje Fourierovo spektrum signálu tvořeného směsí dvou harmonických signálů, které nejsou ortogonální na bázi ani jedné použité transformace a tím vzniká ve spektru prosakování. Odlišné průběhy Zolotarevových spekter uvedených na Obr.60b jsou dány tím, že parametry analyzujících bazových polynomů DZT nelze zatím úplně přesně nastavit tak, jako je tomu pro ADZT a to kvůli výše zmíněným důvodům. Avšak z uvedených výsledků je patrné, že DZT (viz červený průběh) vykazuje velmi podobné vlastnosti a chování jako ADZT (modrý průběh). Je zde vidět potlačení spektrálního prosakování. Při optimálním nastavení analyzující báze se budou výsledky DZT stále více přibližovat k výsledkům ADZT, což vede na potvrzení hypotézy **H6**. Tato hypotéza nebyla doposud prokázána. Důsledkem jejího ověření je jednak nalezeny vztah mezi parametry ZP a AZP (rovnice 84), jednak potvrzení, že "mazání čar" ve spektru není důsledkem navrženého algoritmu ADZT, ale je vlastností spojenou s použitím ZP. Toto doposud nebylo zřejmé.

Potvrzení výpočtu DZT v časové oblasti bude využito v navazující disertační práci zabývající se návrhem optimálního nastavení parametrů ZP polynomů v časové oblasti.



Obrázek 60: Ověření výpočtu DZT spektra pomocí skalárního součinu analyzovaného signálu s bazovými polynomy DZT. Analyzovaný signál je složen ze dvou sinusových signálů délky  $N = 32$  s frekvencí  $f_1 = 10.5f_s/N$  a  $f_2 = 20.5f_s/N$ : Jednotlivé obrázky zobrazují DFT spektrum analyzovaného signálu (a), ADZT spektrum vypočtené vztahem (21) (b - modrý průběh), DZT spektrum vypočtené vztahem (81) za použití neaproximovaných Zolotarevových polynomů tvořící bázi DZT (b - červený) a rozdíl absolutních hodnot ADZT spekter.





Obrázek 61: Porovnání průběhů indexu nestacionarity  $k_0$  vypočtené ADZT (modrý průběh) a šířky laloku  $w_p$  stanovených pomocí korelační analýzy (červený průběh) a to pro reálnou (a) a imaginární (b) část spektra zvlášť.



## 11 Závěr

Hlavním cílem této práce byl systematický popis vlastností nové časově-frekvenční transformace založené na symetrických Zolotarevových polynomech prvního a druhého druhu, kterou je ADZT. Tato transformace byla navržena během doktorského studia Radimem Špetíkem a uvedena v jeho disertační práci, na kterou tato práce navazuje a doplňuje ji o doposud nikde nepublikovaný komplexní popis této transformace, jejího výpočtu a chování na vybraných typech signálů obsahující stacionární i nestacionární části. V práci je dále diskutováno optimální nastavení parametrů STADZT za pomoci logaritmické spektrální vzdálenosti Zolotarevova spektra od ideálního spektra analyzovaného signálu. Během práce byla rovněž ADZT a její krátkodobá verze STADZT porovnávána s vybranými spektrálními metodami a na základě těchto výsledků byly navrženy modifikace ADZT algoritmu vedoucí ke snížení počtu operací nebo k dosažení konstantního časového rozlišení. K analýze chování ADZT byly navrženy a využity nově navržené nástroje kterými jsou mapa průchodů algoritmem a sledování euklidovské normy matice  $\mathbf{Z}$ . V neposlední řadě je v práci ověřen princip výpočtu DZT, který využívá skalárního součinu signálu s bázovými funkcemi tvořenými neaproximovanými Zolotarevovými polynomy prvního a druhého druhu.

### 11.1 Splnění cílů práce

Jednotlivé cíle práce stanovené v kapitole 3 byly postupně splněny. Pomocí vhodně navržených postupů, kritérií a příkladů byly zevrubně analyzovány vlastnosti ADZT a popsáno její chování na typických příkladech. Byl též diskutován vliv nastavení parametrů ADZT a STADZT a byly rovněž navrženy optimální hodnoty těchto parametrů. Na základě porovnání výsledků STADZT s vybranými spektrálními metodami byly navrženy modifikace ADZT s ohledem na zlepšení jejich vlastností a výpočetní náročnost. Dále byl ověřen výpočet DZT v časové oblasti pomocí skalárního součinu bázových polynomů a signálu. Stále otevřenou otázkou nicméně zůstává stanovení optimálních parametrů ZP bez použití ADZT.

Všechny hypotézy stanovené na počátku výzkumu byly buď verifikovány nebo upřesněny, jak je uvedeno v následující tabulce Tab.12.

Tabulka 12: Přehled ověření, zpřesnění a vyvrácení stanovených hypotéz.

Hypotéza	Ověřeno	Upřesněno	Vyvráceno
H1	✓		
H2		✓	
H3	✓		
H4a:	✓		
H4b:	✓		
H4c:	✓		
H5			✓
H6	✓	✓	

Z provedené analýzy chování ADZT byly určeny typy signálů, které mohou být analyzovány pomocí ADZT a její krátkodobou verzí a zároveň i typy signálů, které nejsou příliš vhodné. Mezi vhodné signály patří:

- směs harmonických signálů, která je ortogonální na bázi ADZT (neobsahuje spektrální prosakování)
- směs harmonických signálů, která není ortogonální na bázi ADZT (obsahuje spektrální prosakování)
- signály obsahující sinusové nestacionární signály s postupně i náhle měnícími parametry (amplituda, frekvence a fáze)
- směs stacionárních a nestacionárních signálů (Model **M1**, **M2**, **M4**, **M5** a **M6**)
- signály (sinusový signál, jednotkový impuls) obsahující bílý šum (Model **M3**)

Mezi nevhodné signály patří:

- komplexní exponenciála (Model **M7**), popř. širokopásmové signály

## 11.2 Vlastní přínos práce

Vlastní přínos této práce lze spatřovat v systematické analýze ADZT vedoucí jednak k vymezení jejího použití a jednak k modifikacím. Dalšími částečnými přínosy je ověření, že "mazání" složek ve spektru není důsledkem navrženého algoritmu pro výpočet ADZT, ale vlastností DZT a ověření výpočtu DZT pomocí konvoluce signálu s bazovými vektory určenými ZP.

Jednotlivé položky formující přínos této práce na poli spektrální analýzy využívající symetrické Zolotarevovy polynomy prvního a druhého druhu jsou sepsány v následujících bodech:

- v úvodní části bylo uvedeno alternativní odvození ADZT pomocí minimalizace chyby aproximace signálu
- práce obsahuje poprvé úplný popis výpočtu optimální parametrů bazových funkcí ADZT potřebných k sestavení báze a výpočtu ADZT spektra
- s pomocí popisu sestavení **Z** matice je odůvodněna nevhodnost ADZT ke ztrátové kompresi dat
- v rámci popisu bazových polynomů ADZT byl popsán přechod od neaproximovaných Zolotarevových polynomů k jejich aproximovaným verzím

- k analýze chování ADZT byla navržen nový nástroj zobrazující způsob výpočtu do map. Byl navržen numericky vhodný postup vytváření těchto map.
- jako dalším novým nástrojem pro spektrální analýzu signálu se ukazuje vhodná euclidovská norma matice  $\mathbf{Z}$ , která zároveň slouží k porovnávání podobnosti ADZT a DFT
- bylo popsáno chování ADZT na modelových případech spektra obsahující pouze dvě spektrální složky bez prosakování a spektrální složky odpovídající prosakování. Popis chování na modelových případech spektra lze využít při analýze chování signálů se složitějším spektrálním obrazem.
- analýzou pulsování energie jednotlivých spektrálních složek Zolotarevova spektra bylo zjištěno, že toto pulsování přibližně reflektuje okamžitou obálku analyzovaného signálu, respektive její uzly a kmitny
- byl podrobně popsán postup, který umožní vysvětlit chování ADZT i bez teorie Zolotarevových polynomů, mezi šířkou pásma a časovou/frekvenční selektivitou ADZT
- bylo popsáno chování ADZT při spektrální analýze signálu s postupnou či náhlou změnou parametrů jako je frekvence, fáze nebo amplituda
- byla diskutována vhodnost a nevhodnost použití ADZT pro detekci signálů v šumu a její použití pro odstranění šumu ze signálu
- byla porovnána výpočetní náročnosti ADZT a DFT a nově navržených modifikací ADZT
- pro určení optimálního nastavení parametrů STADZT bylo použito kritérium hodnotící logaritmickou spektrální vzdálenost Zolotarevova spektra od ideálního spektra analyzovaného signálu
- byl proveden návrh optimálních parametrů STADZT po spektrální analýzu signálu
- ke snížení počtu operací a tím ke snížení celkové výpočetní náročnosti ADZT byla navržena modifikace výpočtu ADZT využívající fixaci šířky pásma bazových polynomů
- pro získání konstantního časového rozlišení ADZT byla navržena postupně modifikace ADZT algoritmu využívající symetričnosti a periodicity spektra reálných signálů
- bylo provedeno porovnání STADZT s vybranými spektrálními metodami a to jak na umělých signálech obsahující stacionární a nestacionární části, tak byla provedena i ilustrace chování na reálných signálech reprezentovaných ekg a řečí
- ověřením principu výpočtu DZT byla připravena půda pro navazující disertační práci zabývající se návrhem optimálních parametrů DZT. Byl navržen postup sestavení báze DZT využívající neaproximované Zolotarevovy polynomy a parametry šířky pásma  $m$  a normovaného indexu nestacionarity  $k_0$  získanými ADZT.

- též byl diskutován doposud neznámý vztah mezi bázovými polynomy DZT a ADZT

## Reference

- [1] R. ŠPETÍK, The Discrete Zolotarev Transform Czech Technical University in Prague, Faculty of Electrical Engineering, Prague, February 2009.
- [2] A. V. OPPENHEIM, R. W. SHAFER AND J. R. BUCK, *Discrete-time Signal Processing*, Prantice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [3] S. L. MURPLE, *Digital Spectral Analysis*, Prantice Hall Inc., New Jersey, 1987.
- [4] W. L. BRIGGS AND V. E. HENSON, *The DFT: An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform*, Society for Industrial Mathematics, Jan 1, 1987, ISBN 0-89871-342-0.
- [5] R. E. CROICHERE, *A Weighted Overlap-Add Method of Short-Time Fourier Analysis/Synthesis*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-28, No. 1, February 1980, pp. 99-102.
- [6] J. UHLIR, P. SOVKA A R. CMEJLA, *Úvod do číslicového zpracování signálů*, Ediční středisko ČVUT, Skriptum ČVUT FEL, Praha, 2003.
- [7] J. UHLIR, P. SOVKA, *Číslicové zpracování signálů*, Ediční středisko ČVUT, Monografie ČVUT FEL, Praha, 2002.
- [8] V. ČÍŽEK, *Diskrétní Fourierova transformace a její použití*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.
- [9] J. ŠRÁŠEK A Z. TICHÝ, *Základy aplikované matematiky II*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1986.
- [10] C. HEIL, D. F. WALNUT AND I. DAUBECHIES, *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, Princeton University Press, 2006, ISBN-13: 978-0691127057.
- [11] A. LUKIN, AND J. TODD, *Adaptive Time-Frequency Resolution for Analysis and Processing of Audio*, Audio Engineering Society 120th Convention, Paris, May 2006.
- [12] J. F. HARRIS, *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Transform*, Proceeding of the IEEE, 1978, vol. 66, no. 1, p. 51-83
- [13] GRUNWALD, P, *A Tutorial Introduction to the Minimum Description Length Principle*, Advances in Minimum Description Length: Theory and Applications, MIT Press, April 2005
- [14] D. RUDOY, P. BASU, AND P. J. WOLFE, *Superposition frames for adaptive time-frequency analysis and fast reconstruction*, IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 58, no. 5, May 2010, pp. 2581 - 2596.

- [15] D. RUDOY, P. BASU, T. F. QUATIERI, B. DUNN, AND P. J. WOLFE, *Adaptive short-time analysis-synthesis for speech enhancement*, IEEE International Conference ICASPP, Las Vegas, 2008, pp. 4905 - 4908, ISBN: 978-1-4244-1483-3.
- [16] V. KATKOVNIK, AND L. STANKOVIC, *Instantaneous Frequency Estimation Using the Wigner Distribution with Varying and Data-Driven Window Length*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 9, September 1998, pp. 2315-2325
- [17] V. KATKOVNIK, AND L. STANKOVIC, *Periodogram with varying and data-driven window length*, Signal Processing, vol. 67, issue 3, June 1998, pp 345-358
- [18] A. NAZIN, AND V. KATKOVNIK, *Minimax Lower Bound for Time-Varying Frequency Estimation of Harmonic Signal*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 12, December 1998, pp. 3235-3245
- [19] SOO-CHANG PEI, AND MING-HUNG YEH, *An Introduction to Discrete Finite Frames*, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 14, no. 6, November 1997, pp. 84-96
- [20] R. J. E. MERRY, *Wavelet Theory and Applications - A literature study*), Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering, Eindhoven, June, 2005.
- [21] S. C. PEI, M. H. YEH, AND C. C. TSENG, *Discrete Fractional Fourier Transform Based on Orthogonal Projections*, IEEE Transactions On Signal Processing, Vol. 47, No. 5, May 1999
- [22] V. A. NARAYANANA, AND K. M. M. PRABHUB, *The fractional Fourier transform: theory, implementation and error analysis*, Microprocessors and Microsystems, 27, pp. 511–521, 2003.
- [23] C. CANDAN, M. A. KUTAY, AND H. M. OZAKTAS, *The Discrete Fractional Fourier Transform*, IEEE Transactions On Signal Processing, Vol. 48, No. 5, May 2000
- [24] L. DEBNATH, *Recent development in the Wigner-Ville distribution and time-frequency signal analysis*, PINSA, 68, A, No. 1, pp. 35-56, January 2002.
- [25] P. J. CHI AND C. T. RUSSEL, *Use of the Wigner-Ville distribution in interpreting and identifying ULF waves in triaxial magnetic records*, Journal of Geophysical Research, Vol. 113, A01218, January 2008.
- [26] M. SZMAJDA, K. GÓRECKI AND J. MROCZKA, *Gabor transform, SPWVD, Gabor-Wigner transform and wavelet transform - tools for spectral quality monitoring*, Metrology and measurement systems, vol.27, no.3, pp.323-396, 2010, ISSN 0860-8229.
- [27] B. BOASHASH, *Time Frequency Signal Analysis and Processing, A Comprehensive Reference*, Elsevier Science, Amsterdam, 2003, ISBN: 978-0-0805-4305-5,



- [28] A. PAPANDREOU AND G. F. BOUDREAUX-BERTELS, *Generalization of the Choi-Williams Distribution and the Butterworth Distribution for Time-Frequency Analysis*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.41, no.1, pp.463, January 1993.
- [29] J. LISKA, *Zpracování signálů pro diagnostiku a jeho aplikace*, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra kybernetiky, Plzeň, 2010.
- [30] N. E. HUANG, Z. SHEN, S. R. LONG, M. C. WU, H. H. SHIH, Q. ZHENG, N.-C. YEN, C. C. TUNG, AND H. H. LIU, *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 454, pp. 903-995, 1998.
- [31] N. E. HUANG, Z. SHEN, AND S. R. LONG, *A new view of non-linear water waves: The Hilbert spectrum*, Annu. Rev. Fluid Mech., 31, 417-457, 1999.
- [32] N. E. HUANG, AND Z. SHEN, *Hilbert-Huang Transform and Its Applications*, World Scientific Publishing Co., Londo, 2005, ISSB: 981-256-376-8.
- [33] N. E. HUANG, M. C. WU, S. R. LONG, S. S. P. SHEN, W. QU, P. GLOERSEN, AND K. L. FAN, *A confidence limit for empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 459, pp. 2317-2345, 2003.
- [34] T. SCHLURMANN, *The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectra to Analyse Embedded Characteristic Oscillations of Extreme Waves*, University of Wuppertal, Hydraulic Engineering Section, Civil Engineering Department, Wuppertal, 2000
- [35] P. STOICA, AND R. L. MOSES, *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1997, ISSB: 978-0-132-58419-7.
- [36] B. G. QUINN AND E. J. HANNAN, *The Estimation and Tracking of Frequency*, Cambridge University Press, New York, 2001, ISSB: 978-1-107-41285-9.
- [37] S. HAYKIN, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1979, ISSB: 978-3-540-12386-6.
- [38] C. L. NIKIAS AND A. P. PETROPULU, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, PTR Prentice Hall, New Jersey, 1993, ISSB: 978-0-136-78210-0.
- [39] R. VÍCH, *Transformace Z a některá její použití*, SNTL Praha, Praha, 1983, ISSB: 978-0-136-78210-0.
- [40] M. VLČEK, AND R. UNBEHAUEN, *Zolotarev Polynomials and Optimal FIR Filters*, IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 47, no. 3, March 1999, pp. 717 - 730.
- [41] P. MÁŠA, P. SOVKA, M. VLČEK, AND R. ŠPETÍK, *Using ADZT for Signal Reconstruction*, In Circuit Theory and Design (ECCTD), European Conference on. Dresden: Technische Universität, 2013, pp. 1-4.

- [42] J. BROKEŠOVÁ, *Teoretické základy Fourierovy spektrální analýzy*, MFF UK, Praha, 2008.

# Seznam prací disertanta vztahujících se k disertaci

Není-li uvedeno jinak, jsou podíly spoluautorů považovány za shodné.

## Publikace v recenzovaných časopisech

- [A1] V. TUROŇ, *A study of parameters setting of the STADZT*, Acta Polytechnica. 2012, vol.52, no.5, p.106-111. ISSN: 1210-2709
- [A2] V. TUROŇ, J. JANÍK, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Porovnání dvou spektrálních metod pro analýzu akustických signálů*, Akustické listy. 2011, roč.17, č.4, s.26-30. ISSN: 1212-4702

## Ostatní publikace

- [A3] V. TUROŇ, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Comparison of selected methods for spectral analysis of non-stationary signals.*, In 2012 International Conference on Applied Electronics. Pilsen: University of West Bohemia, 2012, p. 317-321. ISSN: 1803-7232. ISBN: 978-80-234-0038-6.
- [A4] V. TUROŇ, J. JANÍK, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Study of ADZT properties for spectral analysis*, WSEAS - ISCGAV '11, Florence, August 2011
- [A5] J. JANÍK, V. TUROŇ, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *A way to a new multi-spectral transform*, WSEAS - ISCGAV '11, Florence, August 2011
- [A6] V. TUROŇ, *A study of parameters setting of the STAZT*, In POSTER 2012 - 16th International Student Conference on Electrical Engineering, Praha: Czech Technical University in Prague, 2012, p. 1-6, ISBN: 978-80-01-05043-9.
- [A7] V. TUROŇ, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *The Zolotarev transform*, Digital Technologies 2010, Zilina, November 2010, ISBN: 978-80-554-0304-5
- [A8] V. TUROŇ, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *The Zolotarev transform and selected application*, Technical Computing Bratislava 2010, Bratislava, October 2010, ISBN: 978-80-970519-0-7
- [A9] V. TUROŇ, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Vybrané adaptivní metody pro spektrální analýzu signálů*, In LETNÍ DOKTORANDSKÉ DNY 2012. Praha, 2012, s.20-23. ISBN: 978-80-01-05050-7.
- [A10] V. TUROŇ, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Zolotarevova transformace a spektrální analýza*, Analýza a zpracování řečových a biologických signálů - sborník prací 2010, Praha, December 2010, ISBN: 978-80-01-04680-7
- [A11] V. TUROŇ, *Proposal thesis*, Czech Technical University in Prague, Prague, 2011.

[A12] V. TUROŇ, R. ŠPETÍK, P. SOVKA, AND M. VLČEK, *Aproximovaná diskrétní Zolotarevova transformace*, Interní vědecká zpráva Z-1/2011, České vysoké učení technické v Praze, Praha, Srpen 2011

## Výzkumné projekty a granty

[A13] Řešitel interního grantu ČVUT SGS10/181/OHK3/2T/13, *Spektrální vlastnosti Zolotarevovy transformace*, 2010-2011

[A14] Člen řešitelského týmu grantu GAČR P102/11/1795, *Nové selektivní transformace pro číslicové zpracování nestacionárních signálů*, 2011-2013

K uvedeným pracím dosud nejsou zaznamenány žádné ohlasy uvedené v databázích. Byly zaznamenány pouze neformální žádosti o zaslání transformace.

Příspěvek [A6] byl na *Mezinárodní studentské konferenci POSTER 2012* vybrán porotou jako kvalitní a byl jsem vyzván k jeho publikaci v článku.

