

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Bakalářská práce

2016

Petr Pelikán



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA Elektrotechnická

Katedra elektroenergetiky

Název bakalářské práce:

**Srovnání různých modelů válcového
indukčního ohřevu**

**Comparison of Different Models of a
Cylindrical Induction Heating**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management

Studijní obor: Aplikovaná elektrotechnika

Autor bakalářské práce: Petr Pelikán

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Lubomír Musálek

Praha 2016

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektroenergetiky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Petr Pelikán**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management
Obor: Aplikovaná elektrotechnika

Název tématu: **Srovnání různých modelů válcového indukčního ohřevu**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s principem indukčního ohřevu.
2. Vytvořte elektromagnetický model válcového indukčního ohřevu v SW Wolfram Mathematica.
3. Vytvořte model indukčního ohřevu v SW Agros 2D.
4. Zhodnoťte výsledky obou metod.

Seznam odborné literatury:

- [1] LANGER, Emil. Teorie indukčního a dielektrického tepla. 2., přeprac. a dopln. vyd. Praha: Academia, 1979, 319 s.
- [2] HRADÍLEK, Zdeněk, Ilona LÁZNIČKOVÁ a Vladimír KRÁL. Elektrotepelná technika. Vyd. 1. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2011, 264 s. ISBN 978-80-01-04938-9.
- [3] RADA, Josef. Elektrotepelná technika: vysokoškolská příručka pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1985, 344 s.
- [4] www.agros2d.org
- [5] www.wolfram.com

Vedoucí: Ing. Lubomír Musálek

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2017/2018

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Müller, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 18. 4. 2016

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze 25.5.2016

.....

Petr Pelikán

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu Ing. Lubomíru Musálkovi za cenné rady a pomoc při vedení práce. Také bych rád poděkoval Ing. Zdeňku Novákovi za pomoc při vytváření modelu v softwaru Wolfram Mathematica. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině za podporu nejen během psaní této práce, ale i během celého bakalářského studia.

Název bakalářské práce:

Srovnání různých modelů válcového indukčního ohřevu

Abstrakt:

Předkládaná práce se zabývá srovnáním dvou modelů elektrického indukčního ohřevu vodivého válcového předmětu. Modely byly vytvořeny pomocí software Wolfram Mathematica a Agros2D.

Náplní teoretické části práce je popis jednotlivých typů elektrotopelných zařízení s důrazem na indukční ohřev. Podrobněji je kromě fyzikálního popisu indukčního ohřevu popsán také princip a způsoby šíření tepla. Protože tato práce srovnává různé výpočetní metody, je celá kapitola věnována problematice sdružených úloh a metodám jejich řešení pomocí softwarových prostředků. Také se zde krátce věnují popisu numerických metod, zejména metodě konečných prvků využívanou programem Agros2D.

Hlavní částí této práce je praktická část zabývající se vytvářením a srovnáním vytvořených modelů. Cílem je stanovit rozdíly obou výpočetních metod a posoudit jejich použitelnost při řešení praktických úloh z inženýrské praxe.

Klíčová slova:

indukční ohřev, elektrické teplo, elektromagnetismus, metoda konečných prvků, sdružené problémy, Agros2D, Wolfram Mathematica

Bachelor's Thesis Title:

Comparison of Different Models of a Cylindrical Induction Heating

Abstract:

This thesis deals with comparison between two models of cylindrical induction heating of a conductive object. Models were programmed using software Wolfram Mathematica and Agros2D.

The theoretical part starts with a short description of different types of electrical heating devices mainly about induction heating. The thesis goes deeper into the physical theory of induction heating and the theory of heat transfer. Since this thesis goal is to compare two computing methods, one entire chapter is describing coupled problems and ways of solving them. I also briefly describe numerical methods mainly finite element method that is used in the software Agros2D.

The main part of this thesis are the models and their comparison between each other. The aim is to set differences between both of them and to evaluate their possible application in solving problems in electrical engineering.

Key words:

Induction heat, electric heat, electromagnetism, finite element method, coupled problems, Agros2D, Wolfram Mathematica

Obsah

Seznam symbolů a zkratk.....	1
Přehled rozlišení jednotlivých druhů veličin.....	2
1 Úvod.....	3
2 Druhy elektrických ohřevů	4
2.1 Odporový ohřev	4
2.1.1 Přímý odporový ohřev	4
2.1.2 Nepřímý odporový ohřev.....	5
2.2 Indukční ohřev	5
2.3 Dielektrický ohřev.....	6
2.4 Vhodné typy ohřevů pro vodivé válcové těleso	6
3 Teorie indukčního ohřevu	8
3.1 Základní pojmy vícedimenzionální analýzy	8
3.1.1 Válcová soustava	8
3.1.2 Gradient	9
3.1.3 Divergence.....	9
3.1.4 Rotace	9
3.1.5 Operátor „nabla“ a Laplaceův operátor	10
3.2 Odvození vlnových rovnic pro šíření elektromagnetického vlnění.....	10
3.3 Elektromagnetické vlnění ve válcových útvarech.....	12
4 Šíření tepla	14
4.1 Šíření tepla sáláním (radiací)	14
4.1.1 Princip sálání	14
4.1.2 Zákony sálání.....	14
4.2 Šíření tepla prouděním (konvekci).....	16
4.3 Šíření tepla vedením.....	17
5 Sdružené problémy a metody jejich řešení	18
5.1 Sdružené problémy a jejich řešení	18
5.1.1 Silně sdružená úloha	18
5.1.2 Kvazi sdružená úloha.....	18
5.1.3 Slabě sdružená úloha	19
5.2 Software Wolfram Mathematica.....	20
5.3 Numerické metody	20
5.3.1 Metoda konečných prvků (MKP)	21
6 Praktická část	22
6.1 Parametry výpočtu	22

6.2 Model ve Wolfram Mathematica	23
6.3 Řešení v Agros2D	24
6.4 Srovnání obou metod	26
6.4.1 Náročnost implementace výpočtu.....	26
6.4.2 Výsledky ve Wolfram Mathematica	27
6.4.3 Výsledky v Agros2D	28
6.4.4 Srovnání obou výpočetních metod.....	29
6.4.5 Závěrečné zhodnocení obou metod	32
7 Závěr	33
Seznam použité literatury.....	34
Seznam obrázků	35
Seznam tabulek	36
Seznam příloh	37

Seznam symbolů a zkratek

t	čas	s
P	činný výkon	W
l	délka	m
D	elektrická indukce	C·m ²
R	elektrický odpor	Ω
I	elektrický proud	A
ε	emisivita	-
ρ	hustota	kg·m ⁻³
q	hustota tepelného toku	W·m ⁻²
n	index lomu	-
E	intenzita elektrického pole	V·m ⁻¹
H	intenzita magnetického pole	A·m ⁻¹
M	intenzita vyzařování	W·m ⁻²
γ	konduktivita	S·m ⁻¹
B	magnetická indukce	T
c	měrná tepelná kapacita	J·kg ⁻¹ ·K
V	objem	m ³
μ ₀	permeabilita vakua	H·m ⁻¹
ε ₀	permitivita vakua	F·m ⁻¹
S	plocha	m ²
μ _r	relativní permeabilita prostředí	-
ε _r	relativní permitivita prostředí	-
ρ	rezistivita	Ω·m ⁻¹
v	rychlost	m·s ⁻¹
α	součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého	W·m ⁻² ·K ⁻¹
λ	součinitel tepelné vodivosti	W·m ⁻¹ ·K ⁻¹
σ	Stefan-Boltzmannova konstanta	W·m ⁻² ·K ⁻⁴
Q	teplo	J
σ	teplo vyvíjené v jednotce objemu	W·m ⁻³
α	teplotní činitel elektrického odporu	K ⁻¹
T	termodynamická teplota	K
ω	úhlová rychlost	rad·s ⁻¹
λ	vlnová délka	m
d	vzdálenost	m
tg(δ)	ztrátový činitel	-

Přehled rozlišení jednotlivých druhů veličin

skalární veličina	normální kurzíva (např. E)
vektorová veličina	tučná kurzíva (např. \mathbf{H})
fázor vektorové veličiny	Tučná kurzíva (např. $\hat{\mathbf{E}}$)

Tabulka 1: Přehled druhů veličin

1 Úvod

V současné době máme k dispozici řadu způsobů ohřevu těles pomocí elektrické energie. Indukční ohřev představuje jeden z nich. Jedná se o velmi efektivní metodu, která umožňuje ohřívat těleso, aniž by toto těleso muselo být přímo protékáno elektrickým proudem. Princip vychází z teorie elektromagnetického pole. Působením proměnného elektromagnetického pole se v ohřívaném objektu indukují vířivé proudy a jejich ztráty způsobují ohřev tělesa. Těleso je takto možno ohřát na velmi vysoké teploty. Indukční ohřev proto lze využít ke kalení nebo žíhání těles.

Tato vypracovaná práce se zabývá možnostmi matematického výpočtu elektrického indukčního ohřevu. Ohřívaným tělesem je vodivý ocelový válec o poloměru 10 centimetrů a délce 1 metr. Hlavním cílem je vytvořit a srovnat matematické modely vytvořené pomocí dvou počítačových programů – Agros2D a Wolfram Mathematica. Tyto dva výpočetní programy využívají různých metod výpočtu a samozřejmě výstupem obou metod jsou rozdílné výsledky.

Výpočetní program Agros2D umožňuje výpočet libovolných silových polí prostřednictvím nakreslení 2D geometrie a nastavení podmínek výpočtu. Tento počítačový software využívá numerické metody konečných prvků. Agros2D je freeware a je již připravený pro použití bez nutnosti implementovat rovnice do počítače.

Oproti tomu výpočet v programu Wolfram Mathematica vychází přímo ze základních kamenů elektromagnetismu – Maxwellových rovnic. Ty je nutné do programu zadat a následně je pomocí programu vyřešit pro danou aplikaci. Tato metoda je náročnější, ale vede obvykle k přesnějším výsledkům.

Předkládaná práce přináší srovnání dvou metod výpočtu indukčního ohřevu válcových těles prostřednictvím dvou výpočetních programů a dvou rozdílných způsobů výpočtu. Cílem je srovnat nejen přesnost výsledků obou metod, ale také zhodnotit náročnost implementace těchto metod a možnost aplikace těchto metod v inženýrské praxi.

2 Druhy elektrických ohřevů

Tato kapitola se zabývá přehledem typů elektrických ohřevů. Popisuje jejich základní fyzikální principy i některé možné aplikace. V poslední části této kapitoly se věnuji stručnému popisu vhodnosti různých typů ohřevů pro vodivé válcové těleso. V této kapitole vycházím ze zdrojů [6], [7], [8] a [10].

2.1 Odporový ohřev

Základním principem odporového ohřevu je Jouleův zákon. Elektrická energie se mění na tepelnou při průchodu elektrického proudu vodičem. Rozlišujeme dva způsoby ohřevu. Při přímém ohřevu vzniká teplo přímým průchodem elektrického proudu vsázkou nebo elektrolytem, který ji obklopuje. Při ohřevu nepřímém vzniká teplo v topných člancích uvnitř pece. Teplo je pak přenášeno do vsázky prostřednictvím zejména sálání a proudění.

2.1.1 Přímý odporový ohřev

Princip a fyzikální teorie přímého ohřevu se opírá o Joulův zákon. „*Prochází-li vodičem o odporu R po dobu t proud I , vzniká ve vodiči teplo Q .*“ [6]

$$Q = R \cdot I^2 \cdot t = P \cdot t \quad (2.1)$$

, kde Q [J] je teplo vzniklé průchodem elektrického proudu,

R [Ω] elektrický odpor,

I [A] efektivní hodnota elektrického proudu,

t [s] čas,

P [W] činný výkon.

Elektrický odpor vodiče se vypočte pomocí následujícího vzorce.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (2.2)$$

, kde R [Ω] elektrický odpor,

ρ [$\Omega \cdot \text{m}^{-1}$] rezistivita,

l [m] délka vodiče,

S [mm^2] průřez vodiče.

Odpor vodiče je závislý na oteplení ΔT a na teplotním činiteli odporu α :

$$R_{\theta} = R \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (2.3)$$

, kde R_{θ} [Ω] elektrický odpor při teplotě θ ,

R [Ω] elektrický odpor při teplotě 20 °C,

α [K^{-1}] teplotní činitel elektrického odporu,

ΔT [K] oteplení.

Při výpočtech a návrhu elektrotepelných odporových zařízení se projevují nelineární závislosti fyzikálních veličin ohřivaných látek na teplotě například rezistivita nebo tepelná vodivost.

Tepelnou bilanci ohřevu můžeme vyjádřit následujícím vztahem:

$$Q = Q_u + Q_z \quad (2.4)$$

, kde Q [J] teplo vzniklé průchodem proudu,

Q_u [J] užitečné teplo potřebné k ohřevu vsázky,

Q_z [J] tepelné ztráty.

Přímá odporová elektrotepelná zařízení můžeme rozdělit do dvou hlavních skupin podle skupenství ohřivané vsázky: pevné a kapalné.

Pro odporový ohřev pevného skupenství jsou vhodné dlouhé předměty, například různé dráty, pasy, tyče apod.. Tento typ ohřevu má vysokou rychlost i účinnost. Další možnou aplikací je takzvaná Achesonova pec na výrobu grafitu a karbidu křemíku. „*Grafit se vyrábí z uhlíku tzv. grafitací – chemickým procesem probíhajícím při teplotě kolem 2500 °C, při němž se amorfní uhlík strukturálně mění v grafit s vynikajícími fyzikálními, chemickými i mechanickými vlastnostmi.*“ [10] Vsázka je umístěna v zásypové směsi uvnitř peci. Na krajích pece jsou grafitové bloky pro přívod proudu z transformátoru.

Odporová zařízení pro ohřev tekuté vsázky se používají například při výrobě hliníku, sodíku a hořčíku termickou elektrolýzou. Další možnou aplikací jsou elektrodové solné lázně. Ty se používají především k ohřevu ocelových součástek určených ke kalení. Výhodou tohoto ohřevu je rychlý a rovnoměrný ohřev materiálu. Poslední aplikací, která bude zmíněna, je elektrodový ohřev vody. Střídavý elektrický proud prochází přímo ohřivanou vodou, aby nedocházelo k vývinu výbušných plynů a korozi. Elektrická vodivost vody je závislá na teplotě a složení, a proto se pro vyšší výkony voda chemicky upravuje. Tento faktor působí při návrhu těchto zařízení problémy.

2.1.2 Nepřímý odporový ohřev

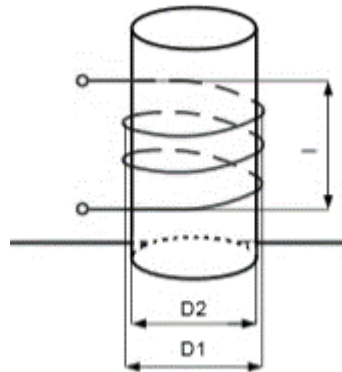
V těchto zařízeních dochází ke vzniku tepla v topných člancích. Do ohřivaného materiálu je teplo přenášeno zejména prouděním a sáláním. Tato zařízení se dělí podle teploty, atmosféry, použití v provozu a dle toho, zda se ohřivaný materiál při ohřevu pohybuje. V průběžné odporové peci se ohřivaný materiál pohybuje oblastmi s různou teplotou ohřevu, což umožňuje aplikaci tam, kde je třeba zpracovávat výrobky sériově.

2.2 Indukční ohřev

Tento způsob ohřevu se používá pouze pro vodivé materiály. Ve vodivé vsázce se indukují vířivé proudy, které ohřívají předmět. Teplo je do materiálu dopravováno pomocí elektromagnetického pole. Ohřivaný objekt je jako jediný horký a není s ničím mechanicky svázán. Toto je největší výhoda indukčního ohřevu. Princip indukčního ohřevu je vidět na obrázku číslo 1.

Indukční ohřev se využívá zejména v kelímkových a kanálkových pecích. V kelímkové indukční peci se nejčastěji vyrábí nejkvalitnější oceli. Tyto peci jsou konstruovány pro veliké rozsahy hmotností (až 100 tun). Indukční kanálkové pece fungují jako transformátory. Primární vinutí je připojeno k síti a sekundární vinutí tvoří kanálek vyplněný roztaveným kovem. „*Elektrické indukční kanálkové pece se používají na tavení barevných kovů, zejména mědi a jejích slitin, hliníku a jeho slitin, případně k přehřívání litiny roztavené předtím, například v kuplovně.*“ [6]

Teoretické základy indukčního ohřevu jsou založeny na Maxwellových rovnicích a z nich odvozených obecných rovnicích pro šíření elektromagnetického vlnění v obecném prostředí. Této teorii se blíže věnuje kapitola 3.



Obrázek 1: Princip indukčního ohřevu [8]

2.3 Dielektrický ohřev

Dielektrický ohřev je podobný ohřevu indukčnímu s tím rozdílem, že se zde uplatňuje hlavně elektrická složka elektromagnetického vlnění. Proto se tímto ohřevem ohřívají izolanty a místo principu induktoru se využívá kapacitor. Tepelný výkon se určí pomocí vzorce:

$$P = E_{ef}^2 \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \operatorname{tg}(\delta) \cdot S \cdot d \quad (2.5)$$

, kde P [J] tepelný výkon,

E_{ef} [$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$] intenzita elektrického pole,

ω [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$] úhlová rychlost,

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permitivita vakua,

ε_r [-] relativní permitivita prostředí,

$\operatorname{tg}(\delta)$ [-] ztrátový činitel,

S [m^2] plocha deskového kondenzátoru,

d [m] vzdálenost desek kondenzátoru.

Dielektrický ohřev je využit zejména v mikrovlnných troubách, ale i například ke svařování plastů, výrobě překližek nebo k sušení dřeva a papíru při výrobě nábytku.

2.4 Vhodné typy ohřevů pro vodivé válcové těleso

V této bakalářské práci se zabývám ohřevem vodivého válcového tělesa. Z důvodu vodivosti není vůbec vhodné použít dielektrický ohřev. Vodivá tělesa mají oproti dielektrikům zanedbatelnou relativní permitivitu prostředí. Z rovnice 2.5 vidíme, že abychom ohřivanému tělesu dodali požadovaný tepelný výkon P , je třeba mít vysoké hodnoty materiálových parametrů $\operatorname{tg}(\delta)$ a ε_r . Pokud by tyto hodnoty nebyly vysoké, je jediná možnost, a to zvýšení frekvence, která by v případě ohřevu vodiče se zanedbatelnou relativní permitivitou prostředí byla obrovská.

Pro ohřev vodiče také není vhodný nepřímý odporový ohřev. Důvodem není fyzikální nemožnost či obtíž, ale neefektivnost ve srovnání s přímým odporovým a indukčním ohřevem.

Přímý odporový ohřev je pro válcová tělesa vhodný pro dosažení nižších výkonů a teplot. Nevýhodou je však spojení přírodních vodičů a ohřívaného tělesa. Při vyšších teplotách může dojít k nežádoucímu ohřevu přírodních vodičů a k jejich deformaci vlivem teploty.

Nejvýhodnější metodou pro ohřev válcového vodivého tělesa je dle mého názoru indukční ohřev. Napájená část je totiž oddělena od ohřívaného objektu a je tedy chladnější než ohříváný objekt. To umožňuje ohřát předmět až na teploty blíží se 1000 stupňů Celsia. Je také možné velmi snadno pomocí změny napájecí frekvence nebo proudu regulovat rozložení teploty v ohřívaném objektu.

3 Teorie indukčního ohřevu

Teoretický podklad indukčního ohřevu tvoří Maxwellovy rovnice. Z těchto rovnic vyplývá vlnový charakter elektromagnetického pole. V této kapitole jsou odvozeny obecné vlnové rovnice šíření elektromagnetického vlnění v prostředí. Pro odvození je využitý matematický aparát vícedimenzionální analýzy, kterému zde věnuji celou podkapitulu. Hlavním zdrojem pro matematický aparát byly texty [4], [5] a [9]. Následně jsou vlnové rovnice zjednodušeny pro vodivé prostředí a aplikovány na válcovou symetrii. Pro fyzikální odvození rovnic popisujících indukční ohřev byly použity zdroje [6], [7] a [10].

3.1 Základní pojmy vícedimenzionální analýzy

Pro popis fyzikálních dějů v elektromagnetickém poli využíváme operátorů vícedimenzionální analýzy. V následující podkapitole jsou tyto operátory blíže popsány a aplikovány na válcovou soustavu.

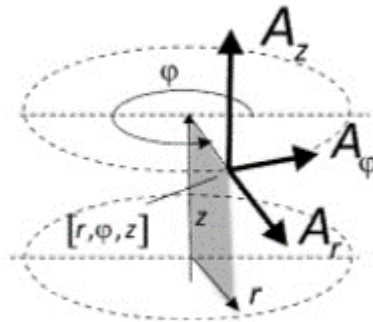
3.1.1 Válcová soustava

Pro popsání magnetického pole ve válcové symetrii je velmi vhodné užití válcových souřadnic. Každý bod ve válcové soustavě je popsán třemi souřadnicemi: r , φ a z . Souřadnice φ je úhel v obloukové míře. Následující tři rovnice popisují vztah mezi pravoúhlými a válcovými souřadnicemi:

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad (3.1)$$

$$y = r \cdot \sin\varphi \quad (3.2)$$

$$z = z \quad (3.3)$$



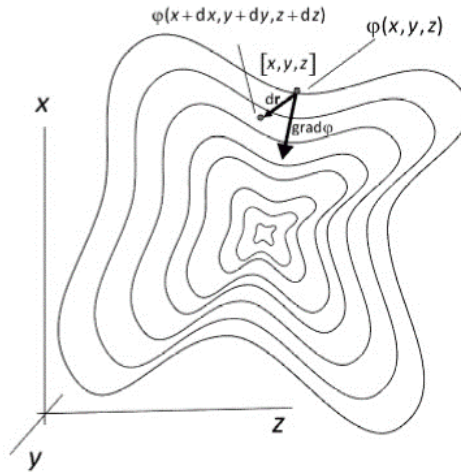
Obrázek 2: Válcové souřadnice [9]

Na obrázku vidíme vektor se složkami $[A_r, A_\varphi, A_z]$. Složka vektoru A_φ má v daném místě tečný směr ke kružnici vedené po obvodu válce.

3.1.2 Gradient

Gradient funkce je prvním ze tří základních operátorů, který při popisu elektromagnetického vlnění využijeme. Převádí skalární funkci na vektorovou. Gradient funkce posléze svým směrem udává směr největšího přírůstku funkce. Absolutní hodnota gradientu je velikost změny skalární funkce na jednotku délky při postupu ve směru gradientu. Gradient ve válcové soustavě vypočteme takto:

$$\text{grad } f(r, \varphi, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$



Obrázek 3: Gradient funkce [9]

3.1.3 Divergence

„Divergenci je možné slovně popsat jako „objemovou hustotu výtoku“, je to část celkového toku, který vytéká z jednotky objemu.“ [9]

$$\text{div } \mathbf{X} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (3.5)$$

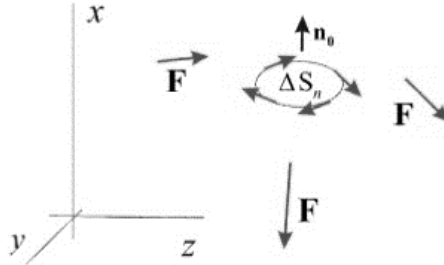
Plošný integrál v čitateli zlomku je celkový tok určitého média, který proteče zadanou plochou. Vektorová funkce \mathbf{X} je tudíž plošnou hustotou protékajícího média. Ve vzorci (3.5) je tato úvaha aplikována na malý objem ΔV .

3.1.4 Rotace

Aplikací operátoru rotace na vektorovou funkci dostaneme opět vektorovou funkci. Její absolutní hodnota je cirkulace po uzavřené dráze okolo elementární plochy (natočené ve směru, ve kterém je cirkulace největší možná) dělená velikostí této elementární plochy. Jak uvádí zjednodušeně doc. Pankrác: „Rotaci lze intuitivně chápat jako „plošnou hustotu cirkulace“ [9].

Matematicky rotaci zapíšeme takto:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{F} dl}{\Delta S_n} \mathbf{n}_0 \quad (3.6)$$



Obrázek 4: Rotace funkce [9]

3.1.5 Operátor „nabla“ a Laplaceův operátor

V technické literatuře se kromě zápisu operátorů pomocí zkratk používá také symbolického operátoru nabla. V kartézské soustavě je operátor nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

V obecných souřadnicích (nejen kartézských) zapíšeme gradient, divergenci a rotaci takto:

$$\text{grad } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} \quad (3.8)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.10)$$

Pro odvození válcového elektromagnetického vlnění se také využije takzvaný Laplaceův operátor:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad} \quad (3.11)$$

Vyjádření Laplaceova operátoru v kartézských a válcových souřadnicích je uvedeno později jako rovnice číslo (3.28) a (3.29).

3.2 Odvození vlnových rovnic pro šíření elektromagnetického vlnění

Pro odvození vlnových rovnic vyjdeme ze dvou Maxwellových rovnic. První z nich je zobecněný Ampérův zákon celkového proudu a druhou je Faradayův indukční zákon. Obě tyto rovnice jsou v diferenciálním tvaru:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.13)$$

, kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ permeabilita vakua,

μ_r [-] relativní permeabilita prostředí,

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permitivita vakua,

\mathbf{H} [$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$] vektor intenzity magnetického pole,

\mathbf{E} [$\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$] vektor intenzity elektrického pole,

γ [$\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$] konduktivita.

Zobecněný Ampérův zákon celkového proudu vyjadřuje, že je změna magnetického složky v prostoru a čase svázána s časovou změnou elektrické složky. Faradayův indukční zákon je analogický ke zobecněnému Ampérovu zákonu. Říká, že časové a prostorové změny elektrické složky elektromagnetického pole se váží ke změnám v magnetické složce elektromagnetického pole. Tyto dvě rovnice tvoří soustavu parciálních diferenciálních rovnic.

Nejprve se provede rotace rovnice (3.12) a následně vytkneme konstanty před operátor rotace:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot}(\gamma \cdot \mathbf{E}) + \text{rot}\left(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \gamma \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{E})}{\partial t} \quad (3.14)$$

V dalším kroku dosadíme za $\text{rot } \mathbf{E}$ z rovnice (3.13):

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

Poté využijeme toho, že dvakrát použitý operátor rotace lze zapsat pomocí jiných operátorů:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} \quad (3.16)$$

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

K další úpravě využijeme Maxwellovu rovnici o charakteru magnetického pole s ohledem na jeho zdroje. Také využijeme tzv. materiálový vztah zabývající se magnetizací magnetika:

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.18)$$

, kde \mathbf{B} [T] je vektor magnetické indukce.

Pomocí tohoto vztahu dostaneme výsledný vztah pro magnetickou složku:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

Podobně, jako se odvozuje magnetická složka elektromagnetického vlnění, se odvodí i elektrická:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{H})}{\partial t} \quad (3.20)$$

Za rotaci intenzity magnetického pole dosadíme rovnici (3.12):

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Opět využijí jiný zápis rotace rotace:

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

K další úpravě využijeme Maxwellovu rovnici o charakteru elektrického pole s ohledem na jeho zdroje. Také využijeme vztah pro polarizaci dielektrika:

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (3.23)$$

, kde \mathbf{D} [$\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$] vektor elektrické indukce,

ρ [$\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota nábojů.

Vztah upravíme do této podoby:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \quad (3.24)$$

Poté dosadíme vztah (3.24) do rovnice (3.22) a upravíme za předpokladu, že ε_r je konstantní:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \quad (3.25)$$

Výsledné rovnice (3.19) a (3.25) jsou obecnými rovnicemi šíření elektromagnetického vlnění v prostředí s danými konstantními parametry. Pro případ, kterému se tato práce dále věnuje, je možné tyto rovnice ještě zjednodušit. Ve vodivém prostředí zanedbáváme ε_r . Také nebudeme uvažovat volné náboje $\rho = 0$. Rovnice šíření elektromagnetického vlnění ve vodivém prostředí tedy budou:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.26)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.27)$$

3.3 Elektromagnetické vlnění ve válcových útvech

V předchozích bodech byly odvozeny obecné rovnice šíření elektromagnetického vlnění ve vodivém prostředí. Nyní rovnice (3.26) a (3.27) upravíme pro případ válcového tělesa. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že těleso je nekonečně dlouhé. Jev tedy bude záviset pouze na poloměru r .

V podkapitole 3.1.1 jsou popsány válcové souřadnice, s nimiž budeme dále pracovat. Také využijeme operátoru nabla a Laplaceova operátoru, které se v rovnicích (3.26) a (3.27) vyskytují. Nejprve vyjádříme Laplaceův operátor v kartézské soustavě a následně do něj dosadíme rovnice definující válcové souřadnice (3.1), (3.2) a (3.3):

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \quad (3.28)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \quad (3.29)$$

Protože jev bude záviset pouze na souřadnici r , bude tedy konstantní pro φ a z :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.30)$$

Pak platí:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \quad (3.31)$$

Tento výraz dosadíme do rovnic pro šíření elektromagnetického vlnění ve vodivém prostředí (3.26) a (3.27):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.33)$$

Posledním krokem bude dosazení vztahů pro harmonický průběh \mathbf{H} a \mathbf{E} :

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{H}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial r} = j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \hat{\mathbf{H}} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial r} = j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \hat{\mathbf{H}} \quad (3.35)$$

Tyto rovnice (3.34) a (3.35) jsou Besselovy rovnice pro harmonický průběh. Jejich obecné řešení lze zapsat takto:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) \quad (3.36)$$

, kde C_1, C_2 integrační konstanty,

$J_n(x)$ Besselova funkce 1. druhu, n-tého řádu s argumentem x ,

$N_n(x)$ Besselova funkce 2. druhu (Neumannova), n-tého řádu s argumentem x .

4 Šíření tepla

Při ohřevu materiálu dochází k šíření tepla z chladnějších míst na místa teplejší. Rozlišujeme celkem tři způsoby šíření tepla. Tyto způsoby jsou blíže popsány v této kapitole. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu byly texty [6], [7] a [10].

4.1 Šíření tepla sáláním (radiací)

Sálání nebo také radiace je způsob šíření tepla, který se uplatňuje u všech existujících těles. Teplo se šíří jako elektromagnetické vlnění prostorem a při dopadu na jiné těleso je část tepla pohlcena, část odražena a část prostoupí skrze těleso. Příkladem sálání je šíření tepla ze Slunce na Zemi.

4.1.1 Princip sálání

Všechna tělesa o vyšší teplotě než 0 Kelvinů vyzařují tepelnou energii. Jde o elektromagnetické vlnění, které se šíří přímo a všemi směry. Vlnění se řídí zákony optiky. Při dopadu na povrch tělesa je část energie pohlcena, část odražena a část projde skrz těleso.

Pro popis sálání definujeme tři vlastnosti materiálu: poměrnou pohltivost, poměrnou odrazivost a poměrnou propustnost. Tyto veličiny je možné vypočítat z následujících vzorců:

$$A = \frac{\text{Energie pohlcená}}{\text{Energie dopadlá}} \quad (4.1)$$

$$B = \frac{\text{Energie odražená}}{\text{Energie dopadlá}} \quad (4.2)$$

$$C = \frac{\text{Energie prošlá}}{\text{Energie dopadlá}} \quad (4.3)$$

Je jasné, že platí následující rovnice:

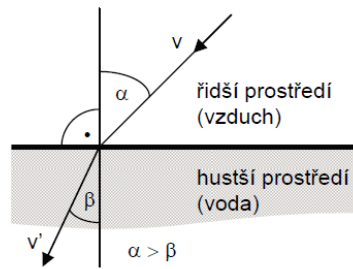
$$A + B + C = 1 \quad (4.4)$$

Pro absolutně černé těleso platí, že $A = 1$, tudíž pohlcuje veškerou dopadající energii. Absolutně bílé těleso naopak veškerou energii odrazí (platí, že $B = 1$). Absolutně průzračné těleso ($C = 1$) veškerou energii propustí. Všechna tělesa, jejichž vlastnosti nedosahují těchto hodnot, označujeme jako šedá.

4.1.2 Zákony sálání

Sálání se řídí řadou fyzikálních zákonů. Následující odstavce je velmi krátce popisují pomocí vzorců nebo slovního popisu.

- Snellův zákon



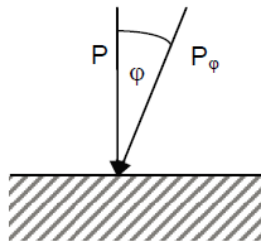
Obrázek 5: Snellův zákon

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v'} = n \quad (4.5)$$

, kde n [-] je index lomu,

v a v' [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] jsou rychlosti šíření v daných prostředích.

- Lambertův zákon



Obrázek 6: Lambertův zákon [10]

„Zákon Lambertův říká, že výkonově se uplatňuje pouze kolmá složka záření.“ [6]

$$P = P_{\varphi} \cdot \cos \varphi \quad (4.6)$$

, kde φ je úhel dopadu záření

P_{φ} je energie ve směru úhlu φ .

- Stefan-Boltzmannův zákon

Tento zákon říká, že intenzita vyzařování absolutně černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině teploty:

$$M = \sigma \cdot T^4 \quad (4.7)$$

, kde M [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$] je intenzita vyzařování,

T [K] termodynamická teplota,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ Stefan-Boltzmannova konstanta.

- Planckův zákon

Planckův zákon popisuje závislost spektrální intenzity záření absolutně černého tělesa na jeho teplotě. Rovnice udává výkon vyzařovaný z jednotky plochy, ale pouze pro jednu vlnovou

délku. Celkový vyzářený výkon se určí jako součet všech výkonů od všech vlnových délek integrálem. Integrací a sloučením konstant dostaneme rovnici 4.7.

- Wienův zákon

Maximální spektrální zářivost se s růstem teploty posouvá směrem ke kratším vlnovým délkám. Wienův zákon umožňuje určit vlnovou délku, při níž je záření maximální:

$$\lambda_m = \frac{2892}{T} \quad (4.8)$$

, kde λ_m [m] je vlnová délka při které je záření maximální.

- Kirchhoffův zákon

Pomocí Kirchhoffova zákona se odvozuje veličina zvaná emisivita. Ta je definována jako poměr intenzity vyzařování reálného tělesa k intenzitě vyzařování absolutně černého tělesa.

Pro přenos tepla sáláním z tělesa 1 na těleso 2 lze použít následující rovnici:

$$P_{T_{1 \rightarrow 2}} = \varepsilon_1 S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.9)$$

, kde ε_1 [-] je emisivita tělesa 1.

4.2 Šíření tepla prouděním (konvekcí)

K tomuto způsobu šíření tepla dochází pouze u plynných a kapalných látek. Při šíření tepla konvekcí dochází k přenosu hmoty, na kterou je vázané teplo. Nejde tedy o způsob šíření tepla v pravém slova smyslu. Existují dva typy konvekce: přirozená a nucená. Přirozenou i nucenou konvekci způsobuje gradient teploty. V případě nucené konvekce je pohyb částic navíc iniciován vnějším působením, například ventilátorem. V reálném prostředí se navíc na přenosu tepla podílí také difúze. Výsledný přenos tepla je proto difúzně-konvekční a je dán součtem tepla přeneseného oběma způsoby:

$$q_{v,k} = q_v + q_k = -\lambda \cdot \text{grad } T + v \cdot \rho \cdot c \cdot T \quad (4.10)$$

, kde q hustota tepelného toku [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$],

λ součinitel tepelné vodivosti [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$],

T termodynamická teplota [K],

ρ hustota [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],

c měrná tepelná kapacita [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$],

v rychlost proudění [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$].

Příspěvek obou složek je závislý na řadě faktorů a jeho výpočet je velmi složitý. Z toho důvodu se v praxi počítá se zjednodušeným vztahem:

$$q_k = \alpha \cdot (T_p - T_i) = \alpha \cdot \Delta T \quad (4.11)$$

, kde α součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$].

Součinitel přestupu tepla je závislý například na typu proudění (laminární nebo turbulentní), vlastnostech kapaliny a obtékaného tělesa. Pro některé obvyklé případy jsou v [6] uvedeny číselné hodnoty.

4.3 Šíření tepla vedením

Pro řešení případu ohřevu tělesa bude třeba využít obecné diferenciální rovnice pro šíření tepla v pevném tělese. Prostřednictvím analogie teplotního a elektrického pole lze totiž řešit pouze případy v ustáleném stavu. Odvození této rovnice je uvedeno například v [10]. V diferenciálním tvaru vypadá rovnice takto:

$$\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} \theta) - \alpha \cdot (\theta - \theta_o) \frac{\partial A_o}{\partial V} + \sigma = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.12)$$

, kde θ teplota v daném bodě a čase [K],

λ součinitel tepelné vodivosti [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$],

c měrná tepelná kapacita [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$],

α součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$],

A_o plocha, kterou vytéká teplo z objemu V [m^2],

V objem, z kterého vytéká teplo [m^3],

σ teplo vyvíjené v jednotce objemu [$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$],

ρ hustota [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$].

5 Sdružené problémy a metody jejich řešení

Tato kapitola popisuje problematiku zabývající se společným působením více fyzikálních polí. Dále se zde věnují problematice matematického výpočtu těchto úloh. Také krátce popisují software, který budu v praktické části práce využívat. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu byl text [3]. Bližší informace o metodách výpočtu jsem čerpal z [2]. Také jsem využíval oficiální stránky obou použitých výpočetních programů [1] a [11].

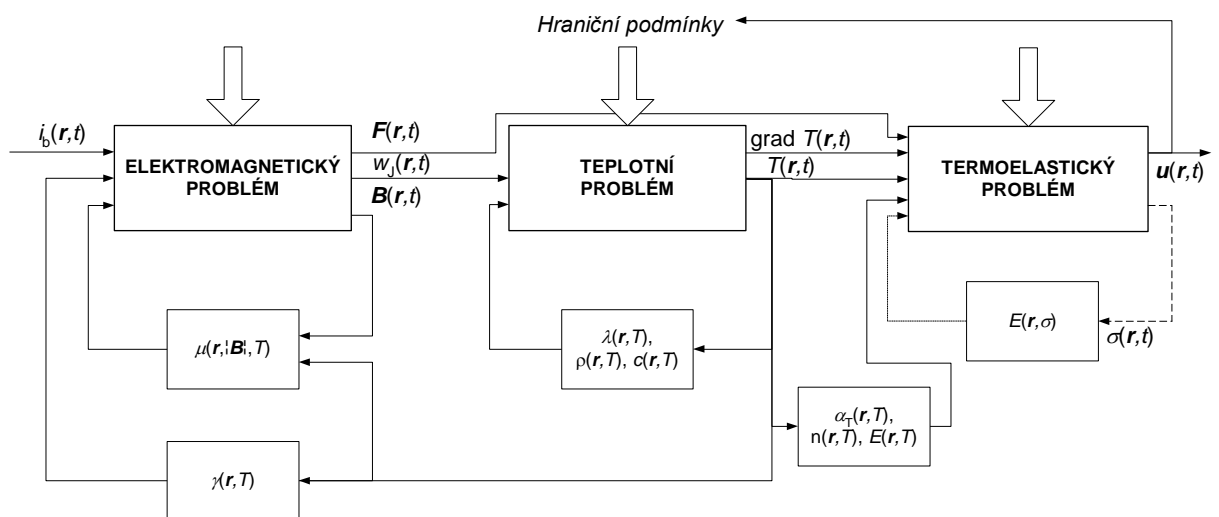
5.1 Sdružené problémy a jejich řešení

Při fyzikálním popisu světa se setkáváme s interakcí více fyzikálních polí najednou. Tyto případy nazýváme sdružené problémy (coupled problems). V bakalářské práci se věnuji indukčnímu ohřevu, který lze popsat jako sdružení elektromagnetického a tepelného pole. Podrobnější popis fyzikálních vlastností těchto polí je v kapitolách 3 a 4. Dalším příkladem může být sjednocení elektromagnetického pole s polem mechanickým při namáhání elektrických vodičů protékaných elektrickým proudem.

Pro řešení sdružených úloh existují tři algoritmy dle stupně sdruženosti. SW Agros2D, který budu v této práci využívat, pracuje se slabým sdružením, proto se mu budu v této části nejvíce věnovat.

5.1.1 Silně sdružená úloha

U silně sdružené úlohy dochází k neustálému ovlivňování všech sdružených polí. Výpočet probíhá v časových hladinách. V každé hladině se nejprve provede výpočet všech sdružených polí. Poté dojde ke korekci materiálových vlastností, které se působením ostatních polí mění. Výpočet probíhá, dokud nedojde k dosažení zadaného času, ustálenému stavu polí nebo naplnění jiné ukončovací podmínky. Na následujícím obrázku je uveden příklad úlohy se silným sdružením elektromagnetického, tepelného a termoelastického pole.

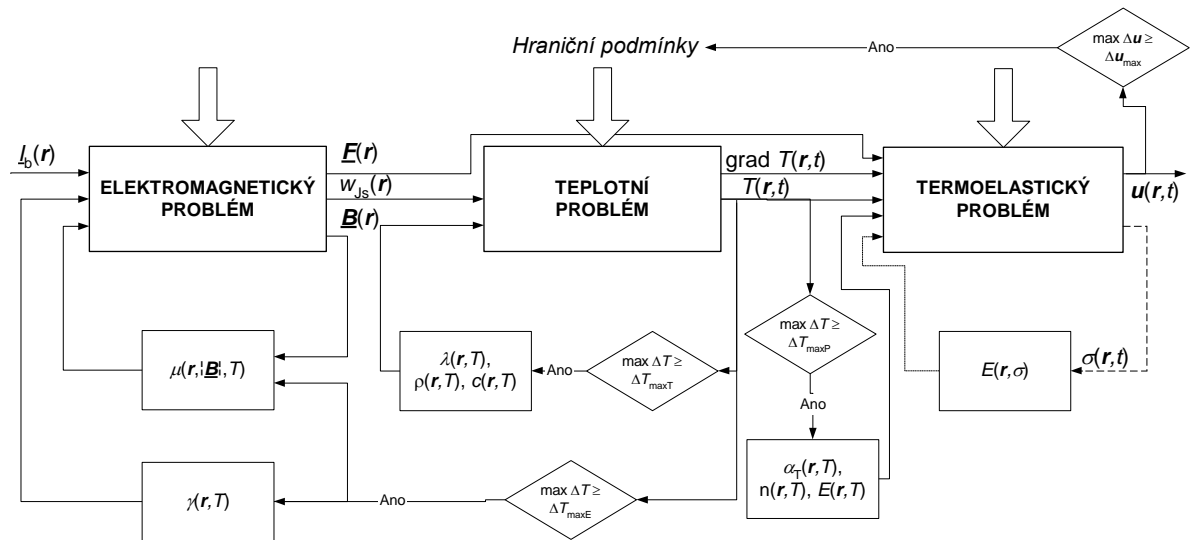


Obrázek 7: Algoritmus řešení silně sdružené úlohy [3]

5.1.2 Kvazi sdružená úloha

V případě tohoto typu sdružené úlohy dochází ke zjednodušení algoritmu silně sdružené úlohy. Uvažuje se, že elektromagnetické pole je po připojení zdroje téměř ihned ustálené.

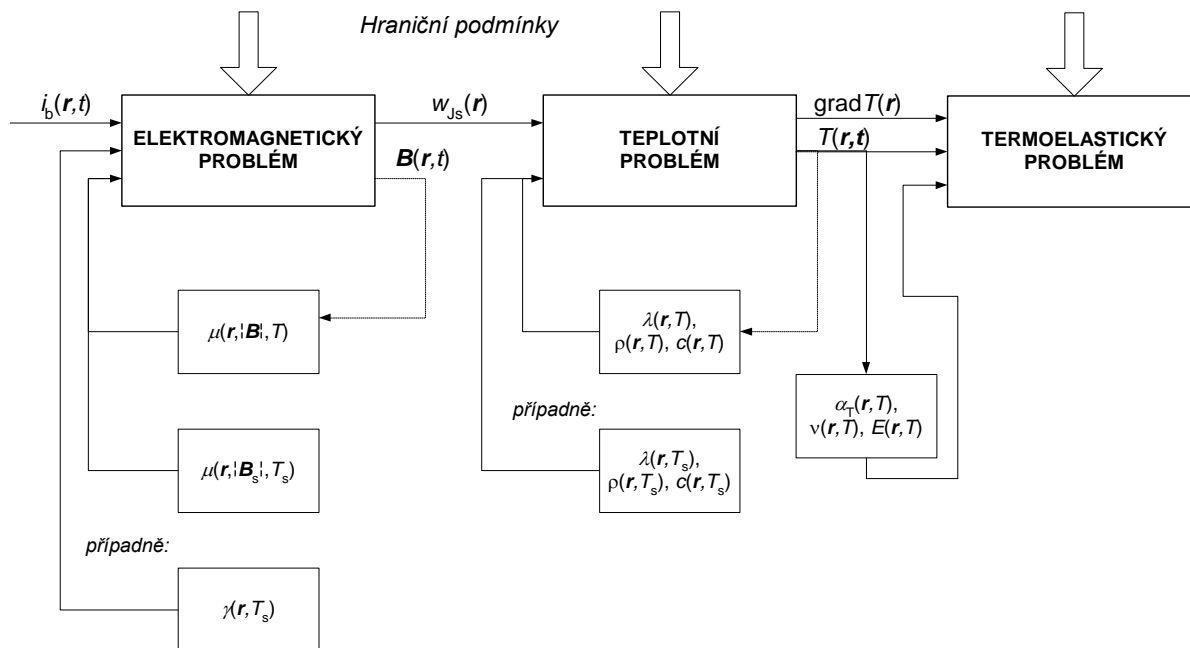
V jednotlivých časových hladinách se řeší tedy pouze jiná nestacionární pole vycházející z elektromagnetického pole. Elektromagnetické pole je ovšem nutno korigovat ve stanovených časových hladinách dle změn vlastností sdružených polí. Jako příklad algoritmu je uveden upravený příklad z předchozí podkapitoly.



Obrázek 8: Algoritmus řešení kvazi sdružené úlohy [3]

5.1.3 Slabě sdružená úloha

Jak jsem již zmínil, slabě sdružení se využívá v softwaru Agros2D, který jsem v této práci využil. Slabě sdružená úloha je nejjednodušším typem sdružené úlohy. Postupuje se tak, že se nejprve vyřeší elektromagnetické pole a v návaznosti na něj další sdružená pole. Ovlivňování polí mezi sebou je velmi slabé. Vezmeme-li si příklad z předchozích kapitol a aplikujeme na něj slabě sdružení, pak bude postup výpočtu této úlohy vypadat takto: vypočte se elektromagnetické pole, z hodnoty Joulových ztrát se určí teplotní pole a na základě jeho rozložení určíme termoelastický posuv. Tento postup je uveden také na následujícím obrázku.



Obrázek 9: Algoritmus řešení slabě sdružené úlohy [3]

5.2 Software Wolfram Mathematica

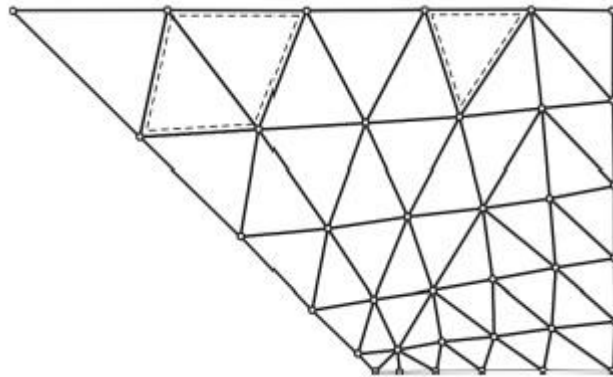
Jak již bylo uvedeno v kapitole 3, vychází výpočet indukčního ohřevu z Maxwellových rovnic. Tato soustava je analyticky řešitelná, nicméně dlouhá léta byl tento způsob řešení nevhodný pro praktickou aplikaci. S rozvojem počítačové techniky vznikla možnost provádět složité analytické výpočty prostřednictvím speciálního software. Jedním z prvních průkopníků byl americký vědec Stephen Wolfram, který založil společnost Wolfram Research. Produktem této společnosti je počítačový algebraický software Wolfram Mathematica. V tomto programu je možné numericky nebo analyticky řešit lineární i nelineární diferenciální a integrální rovnice pomocí jednoduchých symbolických příkazů. Ve svém modelu využívám nejprve analytické řešení Maxwellových rovnic a následně pro vyřešení tepelného pole využívám numerické metody řešení diferenciálních rovnic. V následující kapitole bude uveden a podrobněji okomentován kód v tomto software.

5.3 Numerické metody

Numerické metody jsou metody, které poskytují řešení na určité definované oblasti a dávají číselné řešení v přesně určených bodech těchto oblastí. Toto řešení bývá méně přesné než analytické metody. Numerické metody sestavují systém algebraických rovnic a následně jej řeší. Můžeme je rozdělit na derivační, integrační, kombinované a speciální (např. metoda Monte Carlo). V softwaru Agros2D je využívána jedna z diferenciálních metod a to metoda konečných prvků, proto se v této kapitole budu věnovat výhradně jí.

5.3.1 Metoda konečných prvků (MKP)

Tato metoda je v praxi velmi často využívaná. Využívá ji software Agros2D, který budu využívat k výpočtu indukčního ohřevu. Metoda byla vynalezena již v 50. letech. V oblasti, v níž se počítá pole, se zavádějí nerovnoměrně rozložené uzly a ty tak sledují okraje hraniční plochy. V místech předpokládané velké změny pole se síť zhušťuje. Příklad sítě můžeme vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 10: Příklad uzlů a sítě [2]

Následně se sestaví soustava rovnic pro neznámé veličiny v jednotlivých uzlech. Koeficienty matice soustavy a vektoru pravých stran jsou určeny jako integrály přes elementární plochy, v jejichž vrcholech jsou uzly. Útvary se nazývají konečné prvky.

Dále je třeba si popsat jednotlivé kroky postupu výpočtu. Nejprve se musí vygenerovat síť podobná té na obrázku 10. Pro 3D síť jde o velmi komplikovanou a náročnou úlohu, proto se u symetrických těles využívá 2D modelování. Následně proběhne aproximace potenciálu prvků co nejmenším stupněm aproximace (obvykle lineární nebo kvadratická). Po ní dojde k sestavení soustavy rovnic pro hodnoty v uzlech. Soustava je následně vyřešena. Na závěr se vypočtou další požadované veličiny a zpracují se výsledky do grafické podoby.

6 Praktická část

V praktické části jsou nejprve nadefinovány parametry použité při výpočtu indukčního ohřevu válcového tělesa. Následně je popsán způsob implementace výpočtu v obou srovnávaných počítačových programech – Agros2D a Wolfram Mathematica. Poté navazuje část věnující se srovnání obou výpočetních metod a to nejen z hlediska výsledků, ale i z hlediska náročnosti implementace. V poslední části se věnuji zhodnocení obou metod a především vysvětlení rozdílů mezi výsledky obou metod.

6.1 Parametry výpočtu

Nejprve, než jsem přistoupil k vlastnímu řešení problému, řekl jsem si, jaké parametry bude mít ohříváný materiál, jeho okolí a vlastní induktor. Po úspěšném vytvoření obou modelů jsem si stanovil, jaké parametry se budou měnit, abych mohl porovnat výsledky obou výpočetních metod za různých podmínek.

Ohříváný materiál bude ocelový válec a pro zjednodušení bude ohříván induktorem s jedním závitem. V následující tabulce jsou uvedeny parametry, které budou pro všechny porovnávané výpočty konstantní. Data jsou v tabulce řazena abecedně a seřazena logicky podle fyzikálního významu.

Geometrické rozměry válce			
Název	Značka	Velikost	Jednotka
délka	l	1	m
poloměr	r	0,1	m
Elektromagnetické veličiny			
Název	Značka	Velikost	Jednotka
permeabilita vakua	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
konduktivita mědi	γ_{Cu}	$56 \cdot 10^6$	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
konduktivita oceli	γ_{Fe}	$7 \cdot 10^6$	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
relativní permeabilita mědi	μ_{rCu}	0,999	-
relativní permeabilita oceli	μ_{rFe}	8000	-
Tepelné veličiny			
Název	Značka	Velikost	Jednotka
Emisivita povrchu válce	ε	0,8	-
Hustota oceli	ρ_{Fe}	7800	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Měrná tepelná kapacita oceli	c_{pFe}	469	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Součinitel přestupu tepla z oceli do vzduchu	α_{Fe}	5	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Součinitel tepelné vodivosti oceli	λ_{Fe}	50	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Tabulka 2: Zvolené parametry výpočtu

Výpočty indukčního ohřevu jsem provedl pro parametry v tabulce 2 a následně jsem je srovnal z hlediska výsledných fyzikálních veličin. Porovnávané veličiny jsou činný výkon a teplota na povrchu válce. Samozřejmě jsem také pozoroval vývoj sledovaných veličin v časové oblasti. Mezi výpočty jsem měnil intenzitu magnetického pole a frekvenci.

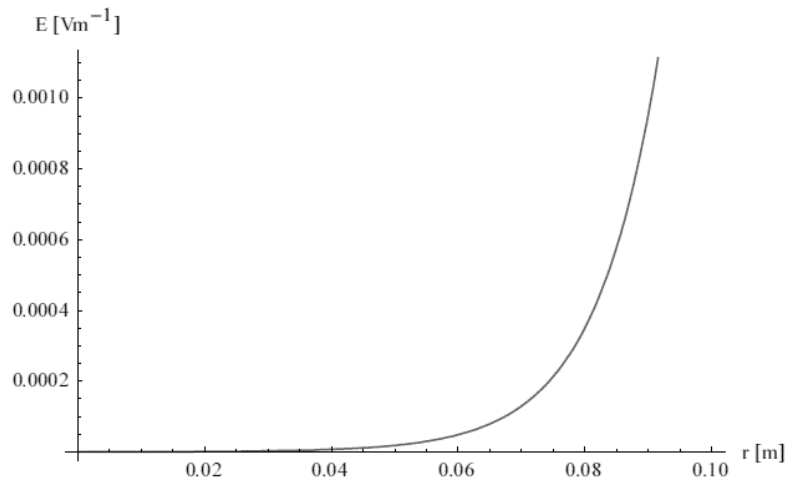
6.2 Model v software Wolfram Mathematica

Pro výpočty v cylindrickém systému jsem si musel pomocí příkazu SetCoordinates nastavit válcové souřadnice. Model v tomto softwaru vycházel z Maxwellových rovnic ve fázorovém tvaru. Vycházel jsem tedy z rovnic (3.12) a (3.13) upravených do komplexní oblasti:

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} = \gamma \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}} = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \hat{\mathbf{H}} \quad (6.2)$$

Tyto rovnice jsem pomocí příkazu Solve vyřešil a dostal jsem rovnice pro intenzitu elektrického a magnetického pole. Řešení bylo shodné s rovnicí (3.36), která je uvedena na konci třetí kapitoly. Následně jsem musel dopočítat konstanty výsledných rovnic. Jedna z nich je rovna nule, neboť není možné, aby intenzita elektrického pole rostla k nekonečnu. Druhou konstantu jsem poté určil jednoduše jako podíl intenzity magnetického pole na povrchu ohřívaného válce a výsledné Besselovy funkce. Nakonec jsem dostal výslednou intenzitu elektrického i magnetického pole uvnitř válce. Ty jsem si vynesl v závislosti na poloměru do grafů. Pro ukázkou přikládám graf rozložení intenzity elektrického pole uvnitř válce. Graf rozložení magnetického pole se liší pouze hodnotami na svislé ose.



Obrázek 11: Průběh intenzity elektrického pole uvnitř válce

V následujícím kroku jsem musel z elektromagnetických veličin určit, která část výkonu se změní na teplo. Nejprve bylo nutné spočítat teplo vytvořené v jednotce objemu pomocí následujícího vzorce:

$$\sigma = \operatorname{Re}[\gamma \cdot \hat{\mathbf{E}}] \quad (6.3)$$

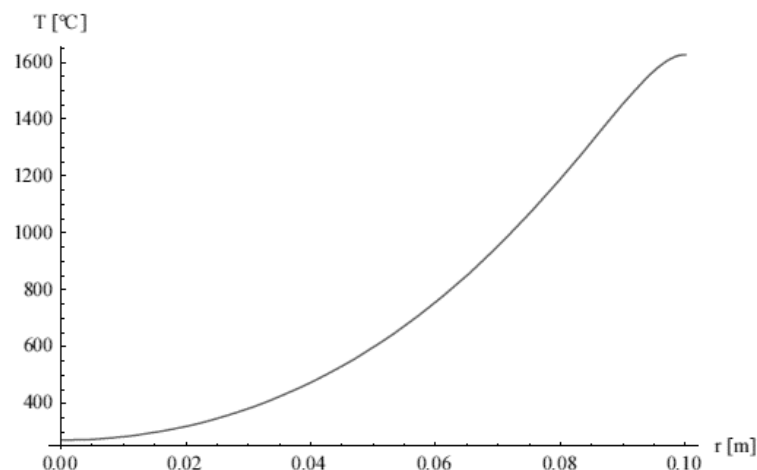
Výslednou hodnotu jsem dosadil do Fourier-Kirchhoffovy rovnice. Tento vztah je uveden jako vztah (4.13) na závěr čtvrté kapitoly. Do vztahu jsem dosadil stanovené tepelné materiálové vlastnosti a také jsem stanovil dobu ohřevu a počáteční teplotu ohřívaného materiálu. Také jsem nadeřinoval okrajovou podmínku na povrchu válce tak, aby byl uvažován přestup tepla z ohřívaného objektu do okolního vzduchu a šíření tepla sáláním na okolní objekty.

Výsledné řešení tepelného pole jsem provedl pomocí příkazu NDSolve, což je funkce, která numericky řeší diferenciální rovnice. Výsledky jsem vynesl do 3D grafu, který ukazuje závislost teploty na poloměru a čase. Pro lepší přehlednost jsem ještě vynesl graf závislosti teploty na poloměru na konci ohřevu. Také jsem vytvořil tzv. DensityPlot, kterým jsem dosáhl zobrazení rozložení teploty uvnitř válce v závislosti na poloměru a délce válce.

Tepelný výkon elektrického indukčního ohřevu jsem vypočetl pomocí jednoduchého vzorce. Vzhledem k tomu, že rozdíl teploty na povrchu a uvnitř vzhledem k vypočteným hodnotám teplot je zanedbatelný, mohu pro zjednodušení výpočtu říci, že ve všech místech válce je teplota stejně velká. Výsledný výpočet vypadá takto:

$$P = \pi \cdot (r_{max}^2 - r_{min}^2) \cdot l \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_{povrch} - T_{vzduch}) \cdot \frac{1}{t_{ohrev}} \quad (6.4)$$

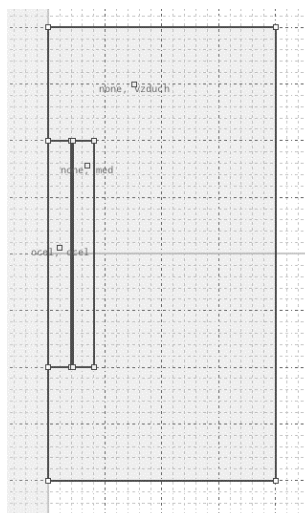
Jako příklad výsledných grafů uvádím výsledné rozložení teploty uvnitř válce po uplynutí doby zadané do programu. V grafu je jasně vidět, že teplota je největší na povrchu válce a nejnižší uprostřed válce. Tento výsledek je naprosto v souladu s očekávaným výsledkem, neboť intenzita elektrického a magnetického pole je směrem dovnitř válce utlumována.



Obrázek 12: Průběh teploty uvnitř válce na konci doby ohřevu

6.3 Model v software Agros2D

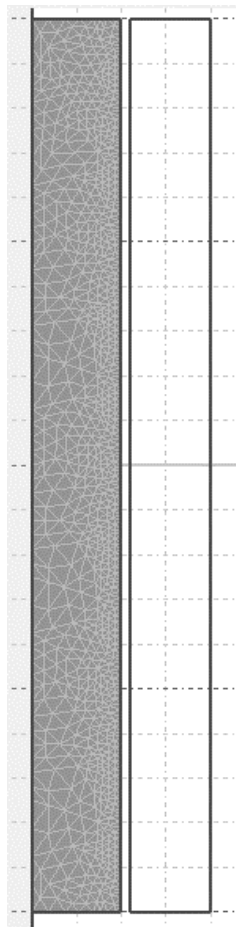
Jak jsem již uvedl v předchozí kapitole, SW Agros2D využívá numerické metody. Jako první krok při implementaci řešení je nutné vytvořit geometrii. Ta je uvedena na obrázku 13. Pro mnou řešený problém jsem vytvořil řez polovinou válce a vedle něj jsem v malé vzdálenosti vytvořil induktor s jedním závitem. Induktor je velmi blízko ohřivaného objektu. Pro všechny oblasti jsem nastavil okrajové podmínky a materiálové vlastnosti. Nastavil jsem také okrajové podmínky na povrchu válce pro přestup tepla do okolí a pro šíření tepla sáláním.



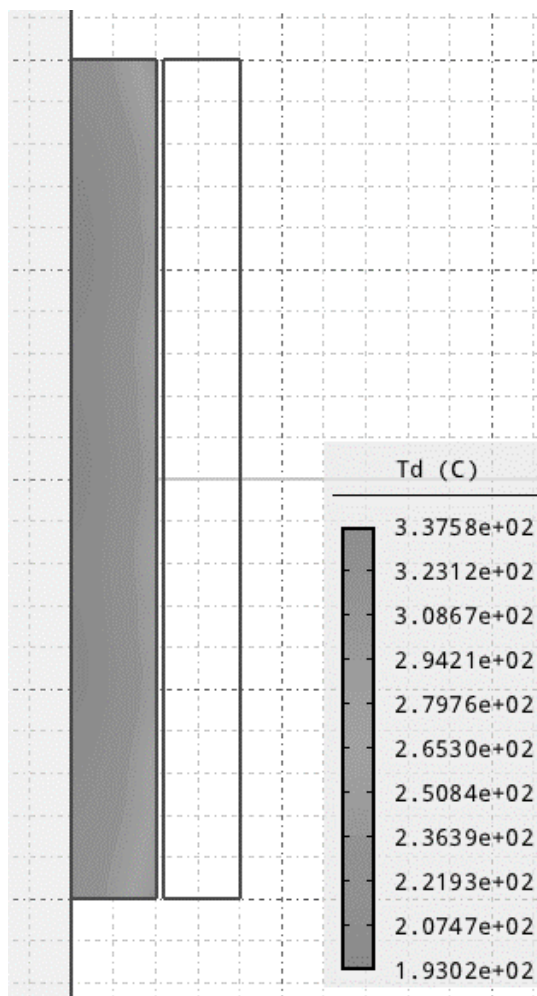
Obrázek 13: Geometrie vytvořená v SW Agros2D

Po nastavení všech parametrů ohřevu SW Agros2D vytvoří síť bodů, ve kterých se budou počítat elektromagnetické a tepelné veličiny. Výsledné rozložení fyzikálních vlastností vznikne jako interpolace mezi jednotlivými body sítě. Na níže uvedených obrázcích ukazují, jak může vypadat část vytvořené sítě pro tento případ a jak může vypadat výsledný výstup SW Agros2D. Na výsledném 2D grafu můžeme vidět rozložení teplot uvnitř válce. V Agros 2D jsou nejnižší teploty vyobrazeny modrou barvou a ta se postupně mění přes žlutou a oranžovou ke tmavě červené barvě, která znázorňuje nejvyšší teploty. Rozložení teplot je velmi zajímavé a odpovídá interpolacím mezi jednotlivými body vygenerované sítě. Vzhledem k tomu, že síť je nerovnoměrná, dostáváme i nerovnoměrné rozložení teplot uvnitř válce.

Je také samozřejmě možné si vytvořit grafy podobné obrázkům 11 nebo 12, což jsem využil pro zkoumání rovnoměrnosti rozložení teploty uvnitř válce. Tento graf zde neuvádím, protože jsem již uvedl téměř totožný graf v předchozí podkapitole.



Obrázek 14: Vytvořená síť uvnitř válce



Obrázek 15: Výsledný 2D graf rozložení teplot

6.4 Srovnání obou metod

V této části zhodnocuji výsledky obou použitých metod výpočtu elektrického indukčního ohřevu. Pro srovnání jsem si zvolil více kritérií. Prvním kritériem, kterému jsem se věnoval, byla náročnost implementace řešení v počítačových výpočetních programech. Zbylá kritéria byla fyzikálního rázu a vycházela přímo z výsledků obou výpočtů. Porovnával jsem činný výkon přeměněný na teplo a teplotu ohřevu na povrchu válce. Mezi výpočty jsem měnil frekvenci proudu v induktoru a intenzitu magnetického pole na povrchu válce tak, abych vyzkoušel, jak se budou výpočetní programy chovat při různých podmínkách.

6.4.1 Náročnost implementace výpočtu

Jak jsem již uvedl výše, nejprve jsem zhodnotil náročnost implementace výpočtu indukčního ohřevu v obou softwarových programech. Implementace v programu Wolfram Mathematica vyžaduje znalost fyzikálního principu indukčního ohřevu i potřebných funkcí programu jako je například DSolve, který slouží k výpočtu diferenciálních rovnic. Také je třeba znát syntax programu v tomto softwaru. Při implementaci je třeba nejprve vyřešit elektromagnetické pole uvnitř válce a následně vytvořit tepelný model.

Oproti tomu implementace v programu Agros2D nabízí úplný model včetně konvekce i sálání tepla z válce do okolí. Pro vytvoření modelu stačí vytvořit 2D geometrii ohřívaného objektu, nastavit materiálové podmínky a nastavit čas a frekvenci proudu v induktoru. Následně pak program

sám vytvoří síť konečných prvků a vypočte všechny potřebné parametry. Následně je možné si nechat programem zobrazit libovolné fyzikální veličiny související s ohřevem v daných časových okamžicích. Je také možné si zvolit formu vykreslení výsledků například 2D a 3D graf rozložení fyzikálních veličin i klasické grafy rozložení teplot v určitém místě válce v závislosti na poloměru válce.

Mám-li se vyjádřit, která metoda se mi jeví náročnější z hlediska vytvoření modelu, pak je to jednoznačně řešení v softwaru Wolfram Mathematica. Toto řešení je časově náročné a vyžaduje fyzikální základy elektromagnetismu i sdílení tepla. Jsem ale toho názoru, že pro výuku studentů vysoké školy se hodí dokonale, neboť je na něm vidět, jakým způsobem dochází k ohřevu válce. Dále umožňuje ověření teoreticky odvozených rovnic. Pro použití v praxi se hodí pouze pro jednoduchou geometrii, případně pro případy, kdy nemáme důvěru v dostupný software a chceme mít kontrolu nad všemi kroky výpočtu. Vytvořený program bude fungovat pouze pro jednu geometrii a indukční ohřev.

Software Agros2D se mi jeví jako vynikající nástroj pro inženýrskou praxi. Umožňuje totiž ve velmi rychlém čase vytvořit a vyřešit zadaný problém a to nejen problém elektrotepelný jako v tomto případě. Velmi se mi také líbí možnost vytvoření vlastní knihovny používaných materiálů a nastavení jejich vlastností. Agros2D je multifunkčním nástrojem, který není vhodný jen pro výpočty ohřevů těles, ale pro výpočty jiných fyzikálních polí.

Nevýhodou řešení v programu Wolfram Mathematica je také to, že vytvořený model je použitelný pouze pro válcové objekty. Čas strávený vytvářením tohoto jednoúčelového modelu je také mnohem vyšší než u Agros2D. Model v Agros2D je sice také jednoúčelový, ale čas na jeho vytvoření není tak vysoký.

6.4.2 Výsledky ve Wolfram Mathematica

Nejprve jsem se věnoval výpočtu v programu Wolfram Mathematica. Vytvořil jsem funkční elektromagnetický a tepelný model, jak je blíže popsáno v podkapitole 6.2. Tento model jsem vyzkoušel pro různé frekvence, intenzity magnetického pole a materiálové parametry. Následně jsem se rozhodl použít parametry výpočtu uvedené v podkapitole 6.1. Také jsem se rozhodl, jaké parametry a v jakém rozsahu budu měnit.

Nejprve jsem měnil intenzitu magnetického pole na povrchu válce od $1\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ do $30\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ po 7 200 sekundách ohřevu pro síťovou frekvenci. Výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce číslo 2. Následně jsem simuloval ohřev pro různé doby ohřevu při intenzitě magnetického pole $25\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ a frekvenci 50 Hz. Výsledky jsou uvedeny v tabulce číslo 3. Poslední tabulka číslo 4 zahrnuje výsledky v softwaru Wolfram Mathematica při $25\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ po 7 200 sekundách pro různé frekvence elektrického proudu v induktoru.

$H_0\text{ [A}\cdot\text{m}^{-1}]$	P [kW]	T [°C]
1 000	0.6	58.0
5 000	2.8	198.0
10 000	5.1	340.6
15 000	6.8	447.3
20 000	8.1	526.6
25 000	9.1	587.8
30 000	9.9	637.4

Tabulka 3: Výsledky ve Wolfram Mathematica po 7 200 sekundách při 50 Hz

t [s]	P [kW]	T [°C]
600	9.1	127.4
1 200	9.1	215.1
2 400	9.1	365.5
3 600	9.1	472.5
4 800	9.1	536.8
6 000	9.1	570.9
7 200	9.1	587.8
9 400	9.1	599.2

Tabulka 4: Výsledky ve Wolfram Mathematica při 50 Hz a 25 000 A·m⁻¹

f [Hz]	P [kW]	T [°C]
50	9.1	587.8
150	9.8	634.2
500	10.9	702.3
1 500	11.5	740.6

Tabulka 5: Výsledky ve Wolfram Mathematica po 7 200 sekundách při 25 000 A·m⁻¹

6.4.3 Výsledky v Agros2D

Podobně jako v programu Wolfram Mathematic jsem i tady nejprve vytvořil model a vyzkoušel jej pro různé parametry výpočtu. Následně jsem provedl výpočty pro stejné vstupní hodnoty, jako v předchozím bodě. Hodnoty z obou výpočetních programů se od sebe liší. Tyto odlišnosti budou blíže okomentovány v následující podkapitole. Vzhledem k tomu, že rozdíly obou hodnot nejsou zásadně velké, můžeme říci, že oba modely byly v obou počítačových programech vytvořeny správně. V následující podkapitole 6.4.4. se budu rozdílnosti těchto výsledků blíže věnovat a v podkapitole 6.4.5 se pokusím nastínit možné důvody jejich odlišnosti.

H ₀ [A·m ⁻¹]	P [kW]	T [°C]
1 000	0.0	21.0
5 000	0.4	44.9
10 000	1.7	119.5
15 000	3.9	243.9
20 000	6.9	418.1
25 000	10.8	642.1
30 000	15.5	915.8

Tabulka 6: Výsledky v Agros2D po 7 200 sekundách při 50 Hz

t [s]	P [kW]	T [°C]
600	10.7	82.6
1 200	10.7	137.9
2 400	10.7	246.6
3 600	10.7	351.7
4 800	10.7	451.6
6 000	10.7	547.9
7 200	10.7	642.1
9 400	10.7	802.4

Tabulka 7: Výsledky v Agros2D při 50 Hz a 25 000 A·m⁻¹

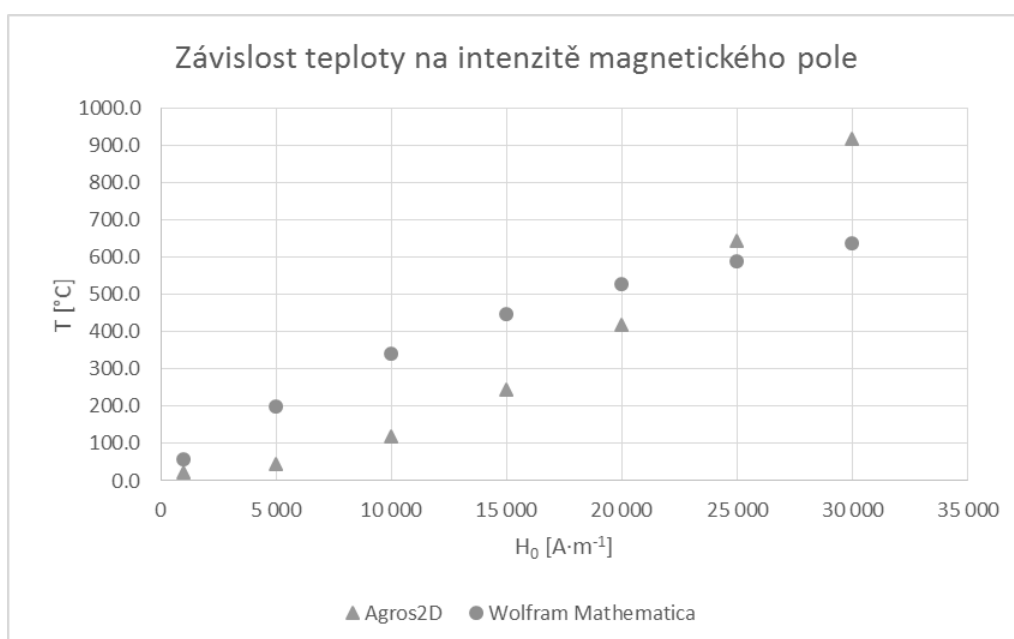
f [Hz]	P [kW]	T [°C]
50	10.8	642.1
150	13.4	773.2
500	14.2	827.1
1 500	14.6	846.1

Tabulka 8: Výsledky v Agros2D po 7 200 sekundách při 25 000 A·m⁻¹

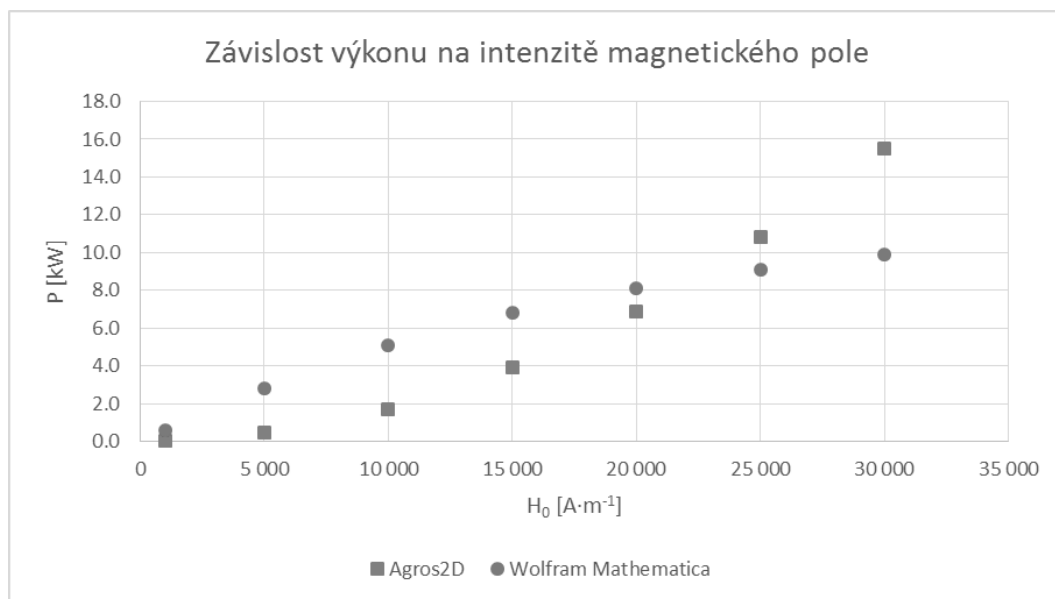
6.4.4 Srovnání obou výpočetních metod

Výsledky obou výpočetních metod jsem se rozhodl srovnat graficky a to tak, že jsem vynesl do grafů závislost výsledků výpočtu na jednom zvoleném parametru. S výjimkou jednoho případu vždy uvádím závislosti jak pro teplotu, tak pro výkon ohřevu.

V následujících grafech můžeme vidět závislosti teploty a výkonu na intenzitě magnetického pole na povrchu ohřivaného válce. Můžeme pozorovat, že obě veličiny mají téměř totožné průběhy. Nárůst teploty s intenzitou magnetického pole je pomalejší v Agros2D, ale následně dosahuje vyšších hodnot. Pro intenzitu magnetického pole 25 000 A·m⁻¹ jsou si oba výsledky velmi podobné. Z toho důvodu jsem se rozhodl pro tuto hodnotu udělat i další simulace za proměnné frekvence a různé doby ohřevu.



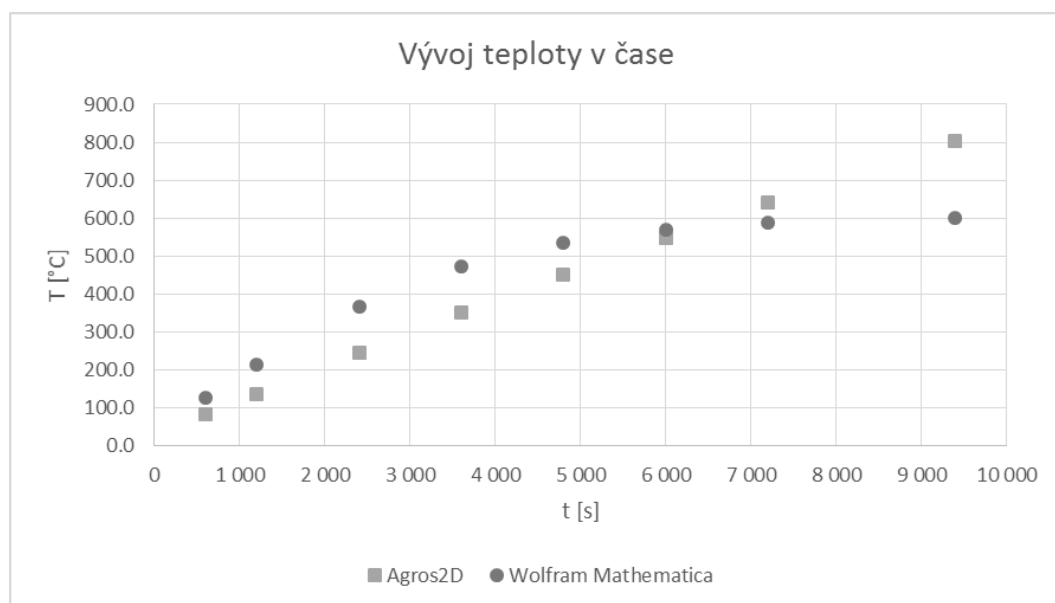
Obrázek 16: Závislost teploty ohřevu na intenzitě magnetického pole



Obrázek 17: Závislost výkonu ohřevu na intenzitě magnetického pole

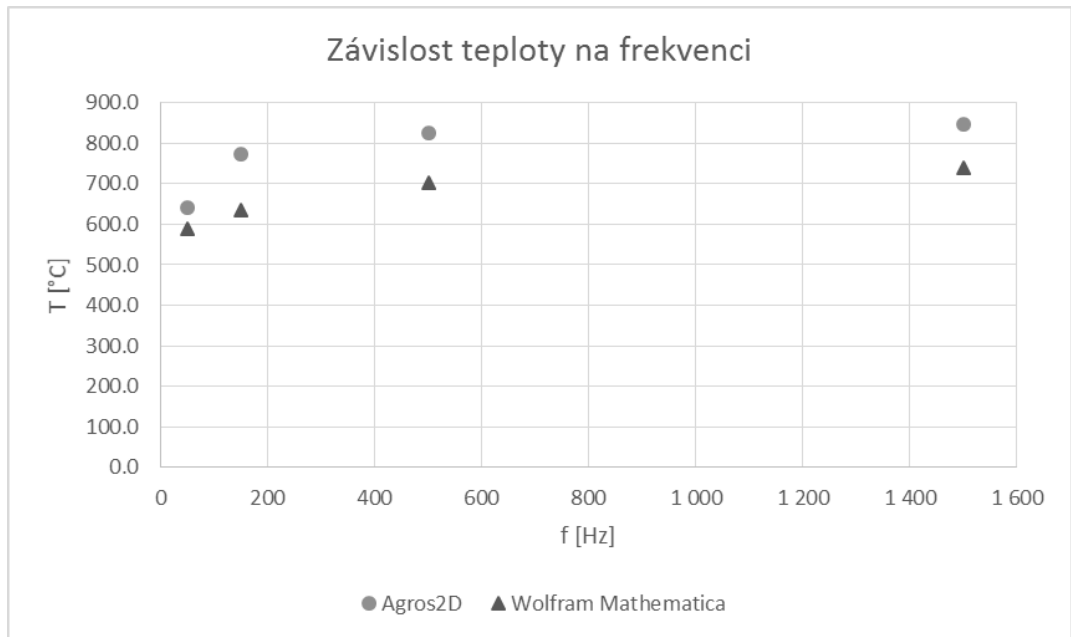
Druhé srovnání jsem provedl pro proměnnou dobu ohřevu při 25 000 A·m⁻¹ a 50 Hz. Vzhledem k tomu, že se parametry ohřevu s časem neměnily, můžeme říci, že by měl být výkon po celou dobu ohřevu konstantní. Oba výpočty tuto domněnku potvrdily. Pro všechny časy ohřevu mi tudíž vyšly stejné hodnoty výkonů. Z toho důvodu je nebudu vynášet do grafů.

S rostoucí dobou ohřevu rostla samozřejmě teplota na povrchu ohřívaného válce. Na níže uvedeném grafu můžeme vidět výsledky dosažené pomocí obou metod. Zcela logicky s rostoucím časem roste také teplota ohřívaného objektu. Rozdíl výsledků obou metod se s časem mění podobně jako závislosti teploty ohřevu na intenzitě magnetického pole. Nárůst teploty v Agros2D je mnohem rychlejší než v software Wolfram Mathematica, kde se nárůst zpomaluje s rostoucí dobou ohřevu. Wolfram Mathematica tak lépe znázorňuje fyzikální realitu, kdy dochází postupem času k ustálení teploty ohřevu.

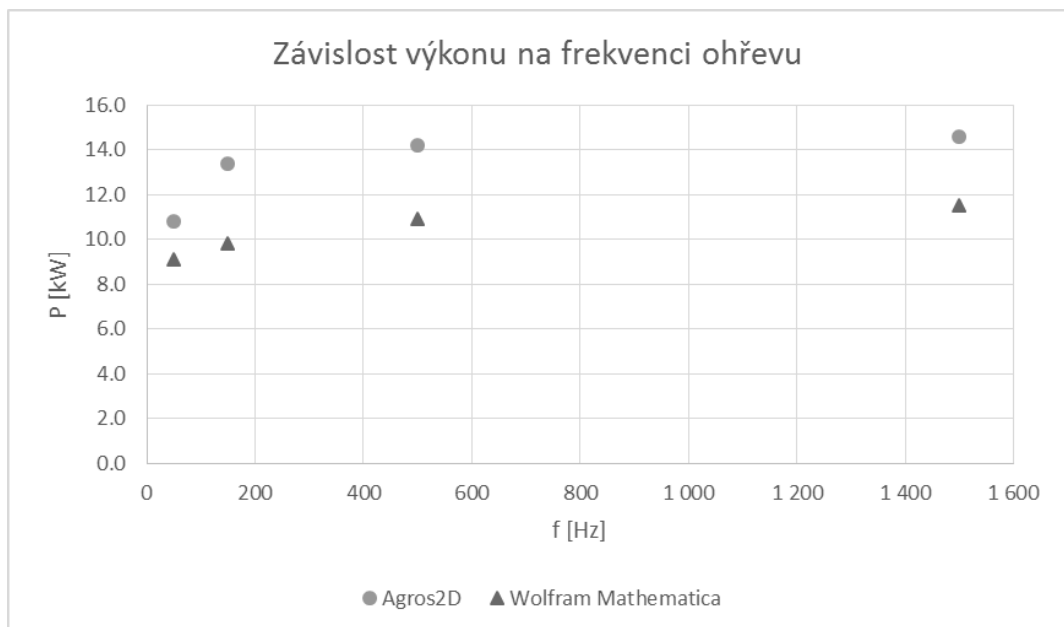


Obrázek 18: Vývoj teploty elektrického indukčního ohřevu v čase

Poslední srovnání obou způsobů výpočtu jsem provedl pro ohřev trvající 7200 sekund při intenzitě magnetického pole $25\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$. Pro jednotlivé výpočty jsem volil proměnlivé frekvence. Jako v předchozích případech jsem i zde dosáhl velmi podobných výsledků. Výsledné teploty a výkon ohřevu jsou vyneseny v dále uvedených grafech. Na těchto grafech můžeme pozorovat mírný nárůst teploty i výkonu ohřevu s frekvencí. Nárůst obou veličin se ale s rostoucí frekvencí zpomaluje a nakonec dosahujeme téměř konstantní teploty i výkonu. Za povšimnutí také stojí, že výsledky v programu Wolfram Mathematica jsou nižší než v Agrosu. Tyto odlišnosti lze vysvětlit nižší přesností výpočtu v Agros2D.



Obrázek 19: Závislost teploty ohřevu na frekvenci



Obrázek 20: Závislost výkonu ohřevu na frekvenci

6.4.5 Závěrečné zhodnocení obou metod

Jako poslední část srovnání výsledků obou metod se pokusím krátce shrnout, jakých výsledků jsem dosáhl s oběma metodami. Z hlediska implementace se mi jako lepší jeví Agros2D, ve kterém se může lépe a rychleji vytvořit fungující model. Výpočet pomocí Wolfram Mathematica je mnohem náročnější na implementaci, a také je použitelný pouze pro daný případ na rozdíl od Agros2D, který je použitelný pro libovolnou geometrii. V případě využití programu pro opakované výpočty válcového indukčního ohřevu se rozdíl v náročnosti implementace stírají.

Rozdíly výsledků dosažených pomocí obou metod si vysvětlují rozdílností numerické metody výpočtu v Agros2D a mnou vytvořenou metodou výpočtu v programu Wolfram Mathematica. Za přesnější považuji výsledky v software Wolfram Mathematica, neboť mám možnost vidět do všech kroků výpočtu. V softwaru Agros2D již využívám předpřipravené výpočetní prostředky a jakýkoliv zásah do nich je téměř vyloučen.

Je důležité říci, že u simulace v softwaru Agros2D závisí výsledky značným způsobem na vygenerované síti. Pro rozdílné sítě se mohou výsledky lišit, což vysvětluje odlišné výsledky obou metod. Navíc numerické metody pracují s určitou mírou přesnosti vůči řešení pomocí analytických metod. Agros2D také hůře reprezentuje fyzikální realitu ohřevu, neboť s rostoucím časem i intenzitou magnetického pole nedochází k ustálení teploty a výkonu ohřevu.

Řešení v programu Wolfram Mathematica ale bohužel nepočítá s válcem jako s celkem, ale pouze vyšetřuje chování v řezu podle poloměru. Výkon i teplota v polovině délky válce jsou tedy nižší než v Agros2D, protože okrajová podmínka platí pro okolí vyšetřovaného řezu, a tudíž dochází k ochlazování vlivem konvekce a sálání. Oproti tomu v Agros2D je vliv sálání pouze na jedné straně, a tak jsou tyto hodnoty vyšší než v software Wolfram Mathematica.

Na závěr chci říci, že jsou výsledky obou metod srovnatelné a ekvivalentní pro použití při výpočtu indukčního ohřevu válcových těles. Pro použití na nesymetrická tělesa se složitější geometrií je ovšem mnohem vhodnější použít Agros2D i za cenu nižší přesnosti.

7 Závěr

Předkládaná práce se zabývala srovnáním dvou modelů elektrického indukčního ohřevu válcových těles. Tyto modely byly vytvořeny v programech Wolfram Mathematica a Agros2D. Cílem práce bylo srovnat výsledky obou metod výpočtu a zhodnotit je.

V první kapitole byly popsány různé typy elektrotepelných zařízení a jejich základní principy. V následujících kapitolách se práce zabývala teorií elektromagnetického pole popisující indukční ohřev a teorií sdílení tepla sáláním, konvekcí a vedením. Poslední kapitola teoretické části se věnuje sdruženým problémům v elektrotechnice a metodám jejich řešení. Zvláštní pozornost je věnována numerickým metodám, které využívá používaný software Agros2D.

Klíčovou částí práce je tvorba obou modelů a vyhodnocení jejich výsledků. Nejprve jsem popsal, jakým způsobem jsem vytvořil modely v obou počítačových programech a uvedl jsem příklady grafických výstupů obou metod. Po úspěšném dokončení obou modelů a jejich otestování při různých parametrech jsem se rozhodl zvolit, které parametry budu pro srovnávací část práce považovat za konstantní a které budu měnit. Zde by byl možný prostor pro další porovnávání obou modelů například pro různou relativní permeabilitu prostředí nebo pro různý poloměr ohřívaného objektu.

Srovnáním výsledků obou metod jsem došel k závěru, že obě metody dosahují srovnatelných výsledků. Výsledky v Agros2D jsou ale méně přesné, což je dáno použitím numerické metody konečných prvků místo výpočtu funkcí reprezentujících průběh fyzikálních veličin v závislosti na čase a poloměru válce. Také je třeba vzít v úvahu, že výsledky Agros2D méně reprezentují fyzikální realitu tím, že k ustálení teploty ohřevu dochází mnohem později než v programu Wolfram Mathematica.

Pro použití na výpočty ohřevu symetrických těles nebo těles s jednodušší geometrií je Wolfram Mathematica ideálním nástrojem s vysokou přesností. Pro složitější geometrii by ale bylo velmi obtížné vytvořit v ní model a proto je pro složitější případy postačující méně přesný model v Agros2D.

Na úplný konec je třeba říci, že dosažené výsledky předkládané bakalářské práce jsou více než uspokojivé. Výsledné zhodnocení obou metod vytváří potenciál pro další rozvoj práce praktickým návrhem zařízení pro indukční ohřev válcových předmětů. Výsledky této práce se tedy dají využít jako podklad pro další činnost. Cíle této bakalářské práce tedy byly splněny.

Seznam použité literatury

- [1] *Agros2D - Application for solutions of physical fields* [online]. 2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: <http://www.agros2d.org/>
- [2] DĚDKOVÁ, Jarmila a Tomáš KRÍŽ. *Modelování elektromagnetických polí (MEMM): přednášky: počítačová cvičení*. Vyd. 1. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav teoretické a experimentální elektrotechniky, 2012. ISBN 978-80-214-4401-0.
- [3] DOLEŽEL, Ivo, P. KARBAN a Pavel ŠOLIN. *Integral methods in low-frequency electromagnetics*. Hoboken, N.J.: Wiley, c2009. ISBN 04-701-9550-9.
- [4] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005, c1997, 201 s. ISBN 8001033570.
- [5] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005, c1997, 139 s. ISBN 8001033562.
- [6] HRADÍLEK, Zdeněk, Ilona LÁZNIČKOVÁ a Vladimír KRÁL. *Elektrotepelná technika*. Vyd. 1. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2011, 264 s. ISBN 9788001049389.
- [7] LANGER, Emil. *Teorie indukčního a dielektrického tepla*. 2., přepracované a dop. vyd. Praha: Academia, 1979.
- [8] MACH, Pavel. *Přednáška z předmětu Výkonové součástky a technologie: Indukční ohřev*. 2015.
- [9] PANKRÁC, Vítězslav. *Pomocné texty k přednáškám z teorie elektromagnetického pole*. 2016.
- [10] RADA, Josef. *Elektrotepelná technika: vysokoškolská příručka pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1985, 344 s.
- [11] *Wolfram: Computation Meets Knowledge* [online]. 2016 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: www.wolfram.com

Seznam obrázků

Obrázek 1: Princip indukčního ohřevu [8].....	6
Obrázek 2: Válcové souřadnice [9].....	8
Obrázek 3: Gradient funkce [9].....	9
Obrázek 4: Rotace funkce [9]	10
Obrázek 5: Snellův zákon	15
Obrázek 6: Lambertův zákon [10]	15
Obrázek 7: Algoritmus řešení silně sdružené úlohy [3].....	18
Obrázek 8: Algoritmus řešení kvazi sdružené úlohy [3].....	19
Obrázek 9: Algoritmus řešení slabě sdružené úlohy [3]	20
Obrázek 10: Příklad uzlů a sítě [2].....	21
Obrázek 11: Průběh intenzity elektrického pole uvnitř válce	23
Obrázek 12: Průběh teploty uvnitř válce na konci doby ohřevu	24
Obrázek 13: Geometrie vytvořená v SW Agros2D.....	24
Obrázek 14: Vytvořená síť uvnitř válce.....	25
Obrázek 15: Výsledný 2D graf rozložení teplot.....	26
Obrázek 16: Závislost teploty ohřevu na intenzitě magnetického pole.....	29
Obrázek 17: Závislost výkonu ohřevu na intenzitě magnetického pole.....	30
Obrázek 18: Vývoj teploty elektrického indukčního ohřevu v čase	30
Obrázek 19: Závislost teploty ohřevu na frekvenci	31
Obrázek 20: Závislost výkonu ohřevu na frekvenci.....	31

Seznam tabulek

Tabulka 1: Přehled druhů veličin	2
Tabulka 2: Zvolené parametry výpočtu	22
Tabulka 3: Výsledky ve Wolfram Mathematica po 7 200 sekundách při 50 Hz	27
Tabulka 4: Výsledky ve Wolfram Mathematica při 50 Hz a 25 000 A·m ⁻¹	28
Tabulka 5: Výsledky ve Wolfram Mathematica po 7 200 sekundách při 25 000 A·m ⁻¹	28
Tabulka 6: Výsledky v Agros2D po 7 200 sekundách při 50 Hz	28
Tabulka 7: Výsledky v Agros2D při 50 Hz a 25 000 A·m ⁻¹	29
Tabulka 8: Výsledky v Agros2D po 7 200 sekundách při 25 000 A·m ⁻¹	29

Seznam příloh

Příloha 1: Kód v programu Wolfram Mathematica	38
Příloha 2: Kód v programu Agros2D v jazyce Python.....	41
Příloha 3: Seznam přidružených souborů k práci.....	44

Příloha 1: Kód v programu Wolfram Mathematica

Následující příloha je okomentovaný model vytvořený v programu Wolfram Mathematica.

(*Nastavit souradnice a zadat vektory E a H*)

```
Remove["Global`*"]
```

```
Needs["VectorAnalysis`"];
```

```
SetCoordinates[Cylindrical[r,fi,z]];
```

```
Evector = {0,Efi[r],0};
```

```
Hvector = {0,0,Hh[r]};
```

(*Zadam Maxwellovy rovnice a podminky*)

```
dospars= {μ-> 8000*4Pi*10^-7, ω-> 2*π*50,γ->5.6*10^6,ε->8.884*10^-9};
```

(*Polomer valce, minimum nemuze byt nula kvuli deleni nulou*)

```
rmin = 10^-4;
```

```
rmax=0.1;
```

```
delka=1;
```

(*Maxwellovy rovnice*)

```
equation1 =Thread[Curl[Hvector]==γ*Evector ][[2]];
```

```
equation2 =Thread[Curl[Evector]==-μ*I*ω*Hvector ][[3]];
```

(*Analyticke reseni Maxwellovych rovnic bez podminek*)

```
solve1=DSolve[{equation1,equation2},{Efi[r],Hh[r]},r];
```

(*Z okrajove podminky lze urcit C*)

(*Efi(rmin) -> 0 => C[2]=0*)

```
solve2=solve1/.C[2]->0;
```

(*Polozim Hh[rmax] = Hh z reseni Maxwellek*)

```
equation3=H0==Hh[r]/.solve2[[1]]/.r->rmax;
```

(*Vypoctena konstanta*)

```
c1=Solve[equation3,C[1]][[1]]/.dospars;
```

(*Vlozim C[1] do vysledku a dostanu vysledne E a H*)

```
finalsolve=solve2/.c1/.dospars;
```

(*Intenzita magnetickeho pole na okraji valce*)

magnetickepole=25000;

(*Dosadim do vysledku magneticke pole na okraji valce*)

ecko=Efi[r]/.finalsolve[[1]]/.H0->magnetickepole;

hacko=Hz[r]/.finalsolve[[1]]/.H0->magnetickepole;

(*Vynesene grafy E a H uvnitr valce*)

Plot[Abs[ecko],{r,rmin,rmax}, AxesLabel->{"r [m]", "E [Vm⁻¹]"}, PlotRange->All]

Plot[Abs[hacko],{r,rmin,rmax}, PlotRange->Full, AxesLabel->{"r [m]", "H [Am⁻¹]"}]

(*Vypoctu teplo vyvinute v jednotce objemu*)

QV=Re[γ*ecko]/.dospars;

(*Zadane materialove parametry valce*)

λ=50;

ρ=7800;

cp=469;

(*Soucinitel prestupu tepla*)

alfa=5;

(*Pocatecni teploty*)

Tvzduch=20;

Tsteny=Tvzduch;

(*Emisivita povrchu valce a Stefan-Boltzmannova konstanta*)

ε=0.8;

σ=5.67*10⁻⁸;

(*Fourier-Kirchhoffova rovnice*)

FK=ρ*cp*D[T[r,t],t]==Div[λ*Grad[T[r,t]]]+Abs[QV];

(*Doba ohrevu*)

tmax=7200;

(*Podminky na okrajich valce, pocatecni teplota*)

okraj11=D[T[r,t],r]==0/.r->rmin;

okraj21=-λ*D[T[r,t],r]==Tanh[1t]*((alfa*(T[r,t]-Tvzduch)+ε*σ*((T[r,t]+273)⁴-
(Tsteny+273)⁴))/r->rmax;


```
pocatecniT=T[r,0]==Tvzduch;
```

```
(*Reseni Fourier-Kirchhoffovy rovnice*)
```

```
tecko=NDSolve[{FK,okraj11,okraj21,pocatecniT},T,{r,rmin,rmax},{t,0,tmax},MaxStepSize->{Abs[rmin-rmax]/500,Automatic}][[1]]
```

```
(*Vyneseny vysledek ve 3D grafu*)
```

```
Plot3D[T[r,t]/.tecko,{r,rmin,rmax},{t,0,tmax},PlotRange->All,AxesLabel->{"r [m]","t [s]","T [°C]"}]
```

```
(*Graf rozlozeni teploty uvnitr valce*)
```

```
Plot[T[r,tmax]/.tecko,{r,rmin,rmax},AxesLabel->{"r [m]","T [°C]"}]
```

```
(*Vypise teplotu na povrchu valce*)
```

```
teplotapovrch=T[rmax,tmax]/.tecko
```

```
(*Vypocet tepelneho vykonu ohrevu*)
```

```
vykon=Pi*(rmax^2-rmin^2)*delka*rho*cp*(teplotapovrch-Tvzduch)*1/tmax
```

Příloha 2: Kód v programu Agros2D v jazyce Python

V této příloze se nachází kód modelu vytvořeného softwarem Agros2D. Kód je zapsán v programovacím jazyce Python.

```
1.     import agros2d as a2d

2.     # problem
3.     problem = a2d.problem(clear = True)
4.     problem.coordinate_type = "axisymmetric"
5.     problem.mesh_type = "triangle"
6.     problem.frequency = 150
7.     problem.time_step_method = "adaptive_numsteps"
8.     problem.time_method_order = 2
9.     problem.time_total = 7200
10.    problem.time_steps = 10

11.    # fields
12.    # heat
13.    heat = a2d.field("heat")
14.    heat.analysis_type = "transient"
15.    heat.matrix_solver = "mumps"
16.    heat.transient_initial_condition = 293.15
17.    heat.number_of_refinements = 1
18.    heat.polynomial_order = 2
19.    heat.adaptivity_type = "disabled"
20.    heat.solver = "linear"

21.    # boundaries
22.    heat.add_boundary("vnitřek válce", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
23.    "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 0,
24.    "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
25.    "heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
26.    heat.add_boundary("povrch válce", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
27.    "heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 5,
28.    "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
29.    "heat_radiation_emissivity" : 0.8, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})

30.    # materials
31.    heat.add_material("ocel", {"heat_velocity_x" : 0,
32.    "heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0,
33.    "heat_conductivity" : 50, "heat_volume_heat" : 0, "heat_density" : 7800,
34.    "heat_specific_heat" : 469})

35.    # magnetic
36.    magnetic = a2d.field("magnetic")
37.    magnetic.analysis_type = "harmonic"
38.    magnetic.matrix_solver = "mumps"
39.    magnetic.transient_time_skip = 0
40.    magnetic.number_of_refinements = 1
41.    magnetic.polynomial_order = 2
42.    magnetic.adaptivity_type = "disabled"
```

```

43. magnetic.solver = "linear"

44. # boundaries
45. magnetic.add_boundary("A=0", "magnetic_potential", {"magnetic_potential_real" : 0,
46. "magnetic_potential_imag" : 0})

47. # materials
48. magnetic.add_material("vzduch", {"magnetic_permeability" : 1,
49. "magnetic_conductivity" : 0,
50. "magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
51. "magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0,
52. "magnetic_current_density_external_real" : 0,
53. "magnetic_current_density_external_imag" : 0,
54. "magnetic_total_current_prescribed" : 0, "magnetic_total_current_real" : 0,
55. "magnetic_total_current_imag" : 0})
56. magnetic.add_material("ocel", {"magnetic_permeability" : 8000,
57. "magnetic_conductivity" : 5.6e6,
58. "magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
59. "magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0,
60. "magnetic_current_density_external_real" : 0,
61. "magnetic_current_density_external_imag" : 0,
62. "magnetic_total_current_prescribed" : 0, "magnetic_total_current_real" : 0,
63. "magnetic_total_current_imag" : 0})
64. magnetic.add_material("med", {"magnetic_permeability" : 0.999,
65. "magnetic_conductivity" : 56e6,
66. "magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
67. "magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0,
68. "magnetic_current_density_external_real" : 0,
69. "magnetic_current_density_external_imag" : 0,
70. "magnetic_total_current_prescribed" : 1, "magnetic_total_current_real" : 25000,
71. "magnetic_total_current_imag" : 0})

72. # geometry
73. geometry = a2d.geometry
74. geometry.add_edge(0, -0.5, 0, 0.5, boundaries = {"heat" : "vnitřek válce",
75. "magnetic" : "A=0"})
76. geometry.add_edge(0, 0.5, 0.1, 0.5, boundaries = {"heat" : "povrch válce"})
77. geometry.add_edge(0.1, 0.5, 0.1, -0.5, boundaries = {"heat" : "povrch válce"})
78. geometry.add_edge(0.1, -0.5, 0, -0.5, boundaries = {"heat" : "povrch válce"})
79. geometry.add_edge(0, 0.5, 0, 1, boundaries = {"magnetic" : "A=0"})
80. geometry.add_edge(0, 1, 1, 1, boundaries = {"magnetic" : "A=0"})
81. geometry.add_edge(1, 1, 1, -1, boundaries = {"magnetic" : "A=0"})
82. geometry.add_edge(1, -1, 0, -1, boundaries = {"magnetic" : "A=0"})
83. geometry.add_edge(0, -1, 0, -0.5, boundaries = {"magnetic" : "A=0"})
84. geometry.add_edge(0.13, -0.5, 0.2, -0.5)
85. geometry.add_edge(0.2, -0.5, 0.2, 0.5)
86. geometry.add_edge(0.2, 0.5, 0.13, 0.5)
87. geometry.add_edge(0.13, 0.5, 0.13, -0.5)

88. geometry.add_label(0.37796, 0.746812, materials =
89. {"heat" : "none", "magnetic" : "vzduch"})
90. geometry.add_label(0.05, 0.0255009, materials = {"heat" : "ocel", "magnetic" : "ocel"})

```

```
91. geometry.add_label(0.17, 0.3898, materials = {"heat" : "none", "magnetic" : "med"})
92. a2d.view.zoom_best_fit()
```

Příloha 3: Seznam přidružených souborů k práci

K této bakalářské práci jsou přiloženy následující soubory:

- Bakalářská práce ve formátu .pdf
- Model indukčního ohřevu vytvořený v programu Wolfram Mathematica
- Model indukčního ohřevu vytvořený v programu Agros2D
- Model indukčního ohřevu vytvořený v programu Agros2D zapsaný jako skript v jazyce Python