



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Pole v reálném koaxiálním kabelu

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor: Bc. Michal Mašek

Vedoucí práce: prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.

Praha — 2015

Čestné prohlášení

„Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.“

.....
Místo, datum

.....
Podpis studenta

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu práce panu prof. Ing. Zbyňku Škvorovi, CSc. za jeho cenné rady a připomínky, trpělivost a ochotu při konzultacích mé práce. Dále patří poděkování rodině a přátelům za vyjádřenou podporu a vytváření příjemného prostředí nejen během zpracovávání diplomové práce, ale při celé době mého studia.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektromagnetického pole

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Mašek Michal**

Studijní program: Komunikace, multimédia a elektronika
Obor: Bezdrátové komunikace

Název tématu: **Pole v reálném koaxiálním kabelu**

Pokyny pro vypracování:


Vyšetřete elektromagnetické pole dominantního modu reálného koaxiálního vedení, a to od nejnižších frekvencí. Vytvořte numerický model takového vedení v programu Matlab. Vstupem modelu budou vlastnosti materiálů kabelu, rozměry a frekvence. Výstupem budou číselné hodnoty konstanty šíření, charakteristické impedance kabelu a grafická znázornění závislosti veličin pole (relevantních složek vektorů E , D , H , B , S a j) na vzdálenosti od osy vedení pro celý průřez kabelu i jeho blízké okolí.

Seznam odborné literatury:


- [1] Collin R. E.: Field Theory of Guided Waves, IEEE Press, Oxford 1991, ISBN 0-87942-237-8
- [2] Daywitt W. C.: The Propagation Constant of a Lossy Coaxial Line with a Thick Outer Conductor, IEEE Trans. On MTT 43(1995)4.

Vedoucí: prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.

Platnost zadání: LS 2015/2016


Prof. Ing. Pavel Pechač, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 30. 1. 2015

Abstrakt

Cílem této práce je vyjádřit rozložení dominantního vidu v reálném koaxiálním vedení. Nejprve jsou analytické vztahy odvozeny pro ztrátový deskový vlnovod a následně transformovány do cylindrického souřadného systému pro koaxiální vodič. Pro oba typy vedení je vytvořen numerický model v prostředí MATLAB. Výstupem práce jsou výsledné analytické vztahy a grafické znázornění rozložení elektromagnetického pole uvnitř vedení.

Klíčová slova

Koaxiální kabel, vlnovod, ztrátové vedení

Abstract

The aim of this work is to formulate the distribution of the dominant mode in real coaxial line. At first Analytical relationships are derived for lossy parallel-plate waveguide and subsequently transformed into cylindrical coordinate system for coaxial cable. Numerical model is created in MATLAB for both cases. The outcome of the work are the resulting analytic relations and graphic representation of electromagnetic field distribution inside the lines.

Key words

Coaxial cable, waveguide, lossy transmission line

Obsah

1. Úvod	1
2. Odvození vztahů	2
3. Deskový vlnovod	6
3.1. Specifikace prostředí	6
3.1.1. Dielektrikum	7
3.1.2. Vodivá deska	8
3.1.3. Vnější prostředí	8
3.2. Výpočet	9
3.3. Výsledky	10
4. Koaxiální vedení	15
4.1. Specifikace prostřední	15
4.1.1. Vnitřní vodič	18
4.1.2. Střední vrstvy	18
4.1.3. Vnější prostředí	19
4.1.4. Aproximace v kovech	20
4.2. Výpočet	21
4.3. Výsledky	23
5. Závěr	27
6. Přehled veličin	28
Literatura	29
A. Převod na fázory	30
B. Besselovy funkce	32
C. Obsah CD	34

Seznam obrázků

3.1. Rozložení základních parametrů a souřadného systému	6
3.2. Výsledky: vlnovod I	12
3.3. Výsledky: vlnovod II	13
3.4. Výsledky: vlnovod III	14
4.1. Průřez koaxiálním kabelem	15
4.2. Značení v cylindrické soustavě	16
4.3. Výsledky: koaxiální vedení I	25
4.4. Výsledky: koaxiální vedení II	26
B.1. Průběhy Besselových funkcí nultého a prvního řádu	32

Seznam tabulek

3.1. Tabulka použitých materiálů	10
3.2. Výsledky: vlnovod I	10
3.3. Výsledky: vlnovod II	11
4.1. Výsledky: koaxiální vedení I	23
4.2. Výsledky: koaxiální vedení II	24
6.1. Přehled veličin, jejich značení a jednotek	28
A.1. Tabulka symbolů pro FT	31

1. Úvod

Vlnovodné vedení se využívá pro přenos elektromagnetických vln především ve vysokofrekvenční technice. Může mít libovolný tvar průřezu, nejčastěji je možné se setkat s obdélníkovým vlnovodem, méně častý je kruhový průřez.

Princip přenosu energie spočívá v šíření elektromagnetické vlny formou vedené vlny. Rozměry vlnovodu jsou dány frekvencí vlny, kterou v něm chceme šířit. Se zvyšující se frekvencí se rozměry vlnovodu zmenšují. Výhodou vlnovodů jsou nízké ztráty přenášení vlny, malá vyzařovaná energie do okolí a především možnost přenášet velké výkony, až v řádech megawattů. To vše je vykoupeno vysokou cenou.

Použití vlnovodu na nízkých frekvencích by vyžadovalo jejich velké rozměry a vysokou hmotnost. Důkladný popis rozložení pole jak uvnitř, tak vně vlnovodu nám umožní simulovat použití vlnovodu jakýkoliv rozměrů na libovolné frekvenci.

Přechodem z kartézských souřadnic do cylindrických získáme možnost modelovat kruhový vlnovod. Přidáním další vodivé vrstvy do středu kruhového vlnovodu získáme možnost simulovat chování koaxiálního kabelu.

Vnitřní vodič koaxiálního kabelu je nejčastěji drát nebo lanko, tenká vrstva vnějšího vodiče pak bývá tvořena fólie nebo může být upletena z tenkých lanek. Vodiče jsou nejčastěji z mědi nebo hliníku a jsou oddělené dielektrikem, například polyetylenem.

Vnější vodič tvoří stínění kabelu, díky němuž jsou elektrická a magnetická pole vázaná pouze na prostor v dielektriku a nezasahují do okolního prostoru mimo kabel. Toto chování lze aplikovat pro použití kabelu na vysokých frekvencích, řádově do desítek gigahertzů. Na nižších frekvencích (např. desítky až stovky Hertz) pole pronikne i do vodičů a ovlivňuje hlavní parametry kabelu, např. impedanci či indukčnost. U velmi tenkého vnějšího vodiče může pole projít skrze něj a vyzářit se mimo vodič.

Analýzou pole základního vidu bezeztrátového koaxiálního kabelu se zabýval S. Shelkunoff [1] již v roce 1934, pro ztrátový koaxiální kabel s reálnými vodiči provedl v roce 1991 analýzu W. C. Daywitt [2]. Jeho práce uvažuje pouze případ nekonečně rozlehlého vnějšího vodiče. Analytické řešení pro popis TM vidu v koaxiálním kabelu s vnějším vodičem konečné tloušťky (nikoli několikanásobně silnější než hloubka vniku) nebylo doposud publikováno a je předmětem této diplomové práce.

2. Odvození vztahů

K vyřešení rozložení elektromagnetického pole v libovolném vlnovodu potřebujeme z Maxwellových rovnic [3, 4, 5] vyjádřit složky intenzit elektrického pole \mathbf{E} a magnetického pole \mathbf{H} . Směr šíření vlny je ve směru osy z . Odvození vztahů popsal Sophocles J. Orfanidis [6].

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J} \\ \nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathcal{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathcal{B} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

V homogenním, stacionárním, izotropním a lineárním poli za uvažování nulového vodivého proudu ($\mathcal{J} = 0$) můžeme první dvě Maxwellovy rovnice zavedením fázorů (viz příloha A) zjednodušit na:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pole uvnitř vlnovodu a v jeho blízkém okolí můžeme obecně zapsat jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y)e^{j\omega t - jk_z z} \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}(x, y)e^{j\omega t - jk_z z}\end{aligned}\tag{2.3}$$

kde k_z je konstanta šíření ve směru osy z .

Pro další úpravu je vhodné rozložit Maxwellovy rovnice do komponent, které jsou podélné ke směru šíření (ve směru osy z) a příčné ke směru šíření (ve směru osy x a y):

$$\mathbf{E}(x, y) = \underbrace{\mathbf{x}_0 E_x(x, y) + \mathbf{y}_0 E_y(x, y)}_{\text{příčné}} + \underbrace{\mathbf{z}_0 E_z(x, y)}_{\text{podélné}} = \mathbf{E}_T(x, y) + \mathbf{z}_0 E_z(x, y)\tag{2.4}$$

kde \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 a \mathbf{z}_0 jsou jednotkové vektory v příslušných směrech os.

Obdobně přepíšeme i operátor gradientu:

$$\nabla = \mathbf{x}_0 \partial x + \mathbf{y}_0 \partial y + \mathbf{z}_0 \partial z = \nabla_T + \mathbf{z}_0 \partial z = \nabla_T - \mathbf{z}_0 j k_z \quad (2.5)$$

Operátor ∂ značí derivaci podle příslušné osy, konkrétně ∂x podle osy x . Uvažujeme-li šíření vlny pouze ve směru osy z , můžeme napsat, že $\partial z = -j k_z$.

Dosadíme-li všechny tyto vztahy do (2.2) dostaneme:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} & (\nabla_T - jk_z\mathbf{z}_0) \times (\mathbf{E}_T + \mathbf{z}_0 E_z) &= -j\omega\mu(\mathbf{H}_T + \mathbf{z}_0 H_z) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E} & (\nabla_T - jk_z\mathbf{z}_0) \times (\mathbf{H}_T + \mathbf{z}_0 H_z) &= -j\omega\hat{\epsilon}(\mathbf{E}_T + \mathbf{z}_0 E_z) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & (\nabla_T - jk_z\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{E}_T + \mathbf{z}_0 E_z) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 & (\nabla_T - jk_z\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{H}_T + \mathbf{z}_0 H_z) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Permitivita $\hat{\epsilon}$ a permeabilita μ specifikuje dané prostředí, ve kterém se vlna šíří. Prozatím uvažujme bezeztrátové šíření, ztráty později zavedeme použitím komplexní permitivity $\hat{\epsilon} = \epsilon_0\epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega}$.

Vektorový součin nad bází x, y, z definujeme jako:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

V dalších vztazích můžeme využít elementární vztahy $\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_0 = 1$, $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{z}_0 = 0$, $\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{E}_T = 0$, $\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{H}_T = 0$, $\mathbf{z}_0 \cdot \nabla_T E_z = 0$ a:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T &= \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y) = \mathbf{y}_0 E_x - \mathbf{x}_0 E_y \\ \nabla_T \times \mathbf{E}_T &= (\mathbf{x}_0 \partial x + \mathbf{y}_0 \partial y) \times (\mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y) = \mathbf{z}_0 (E_y \partial x - E_x \partial y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Rozepsáním vztahů (2.6) na podélné a příčné složky za použití výše uvedených vztahů získáme:

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_z \times \mathbf{z}_0 - jk_z \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T &= -j\omega\mu \mathbf{H}_T \\
\nabla_T H_z \times \mathbf{z}_0 - jk_z \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_T &= j\omega\hat{\epsilon} \mathbf{E}_T \\
\nabla_T \times \mathbf{E}_T &= -j\omega\mu \mathbf{z}_0 H_z \\
\nabla_T \times \mathbf{H}_T &= j\omega\hat{\epsilon} \mathbf{z}_0 E_z \\
\nabla_T \cdot \mathbf{E}_T &= jk_z E_z \\
\nabla_T \cdot \mathbf{H}_T &= jk_z H_z
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Podle toho, zda některá nebo z intenzit E_z , H_z jsou nulové, můžeme určit, jestli se ve vlnu šíří vlna transverzálně elektromagnetická (TEM), transverzálně elektrická (TE), transverzálně magnetická (TM) a nebo hybridní.

$E_z = 0, H_z = 0$	TEM vlna
$E_z = 0, H_z \neq 0$	TE nebo H vlna
$E_z \neq 0, H_z = 0$	TM nebo E vlna
$E_z \neq 0, H_z \neq 0$	hybridní, HE nebo EH vlna

V případě TEM vlny, která je dominantní ve dvou vodičových vedeních (např. v koaxiálním kabelu), má pole pouze příčné složky a řešení rovnic (2.9) se zjednoduší na dvoudimenzionální problém. V ostatních případech, kdy je alespoň jedna z podélných složek E_z , H_z nenulová, je možné z podélných složek vyjádřit příčné složky \mathbf{E}_T , \mathbf{H}_T .

První dva vztahy z rovnice (2.9), ve kterých na pravé straně máme vyjádřené příčné složky intenzit, vynásobíme zleva \mathbf{z}_0 , a s využitím *BAC – CAB totožnosti*: $\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_T) = \mathbf{z}_0(\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{H}_T) - \mathbf{H}_T(\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_0) = -\mathbf{H}_T$, obdobně $\mathbf{z}_0 \times (\nabla_T H_z \times \mathbf{z}_0) = \nabla_T H_z$ získáme:

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_z + jk_z E_T &= -j\omega\mu (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_T) \\
\nabla_T H_z + jk_z H_T &= j\omega\hat{\epsilon} (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nyní, vezmeme-li první rovnici z (2.9) a druhou z (2.10), získáme soustavu o dvou lineárních rovnicích se dvěma neznámými \mathbf{H}_T a $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T$.

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_z \times \mathbf{z}_0 - jk_z \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T &= -j\omega\mu \mathbf{H}_T \\
\nabla_T H_z + jk_z \mathbf{H}_T &= j\omega\hat{\epsilon} (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Řešením této soustavy je:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T &= -\frac{jk_z}{k_T^2} (\mathbf{z}_0 \times \nabla_T E_z) - \frac{j\omega\mu}{k_T^2} \nabla_T H_z \\ \mathbf{H}_T &= -\frac{j\omega\hat{\epsilon}}{k_T^2} (\mathbf{z}_0 \times \nabla_T E_z) - \frac{jk_z}{k_T^2} \nabla_T H_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

kde k_T je příčná konstanta šíření definovaná jako $k_T^2 = \omega^2 \hat{\epsilon} \mu - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k^2 - k_z^2$. $k = \omega/c = \omega \sqrt{\mu \hat{\epsilon}}$ je konstante šíření vlny šířící se v uniformním prostředí s parametry μ a $\hat{\epsilon}$.

Pro vyjádření \mathbf{E}_T z první rovnice v (2.12) vynásobíme rovnici zleva výrazem \mathbf{z}_0 za využití $\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_T) = -\mathbf{E}_T$. Výsledné vztahy pro příčné složky pole \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T jsou:

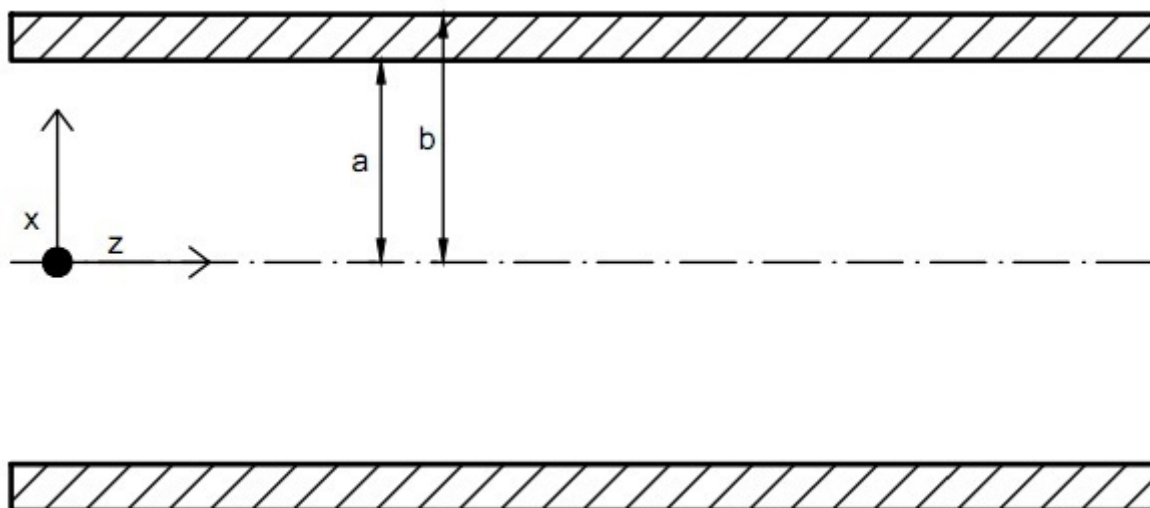
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= -\frac{j}{k_T^2} (k_z \nabla_T E_z - \omega\mu \mathbf{z}_0 \times \nabla_T H_z) \\ \mathbf{H}_T &= -\frac{j}{k_T^2} (k_z \nabla_T H_z + \omega\hat{\epsilon} \mathbf{z}_0 \times \nabla_T E_z) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jakmile jsou známé podélné složky pole E_z , H_z , lze z nich příčné složky \mathbf{E}_T , \mathbf{H}_T dopočítat dle vztahů (2.13). Pro komplexní řešení Maxwellových rovnic závislých na x , y , z a t je třeba ještě vynásobit tyto vztahy $e^{j\omega t - jk_z z}$.

Až doposud byly vztahy odvozovány obecně a nikde nebyl upřesněn tvar vlnovodu, ve kterém se vlna šíří. Rozdíl mezi deskovým vlnovodem počítaným v kartézských souřadnicích a kruhovým vlnovodem počítaným v cylindrických souřadnicích bude v interpretaci operátoru ∇_T .

3. Deskový vlnovod

Deskový vlnovod složený z dielektrické vrstvy mezi dvěma vodivými deskami je zobrazen na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1.: Rozložení základních parametrů a souřadného systému

3.1. Specifikace prostředí

Dosadíme-li do vztahů pro příčné složky pole \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T odvozené v (2.13) za operátor nabla $\nabla_T = \mathbf{x}_0\partial x + \mathbf{y}_0\partial y$ a při uvažování šíření TM vlny ($H_z = 0$), získáme:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= -\frac{j k_z}{k_T^2} (\mathbf{x}_0 E_z \partial x + \mathbf{y}_0 E_z \partial y) \\ \mathbf{H}_T &= \frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T^2} (\mathbf{x}_0 E_z \partial y + \mathbf{y}_0 E_z \partial x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Rozepsáním do složek ve směrech os x a y dostaneme:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j k_z}{k_T^2} E_z \partial x \\ E_y &= -\frac{j k_z}{k_T^2} E_z \partial y \\ H_x &= \frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T^2} E_z \partial y \\ H_y &= -\frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T^2} E_z \partial x \end{aligned} \quad (3.2)$$

V každém prostředí si vyjádříme intenzitu el. pole E_z a její derivace dosadíme do rovnic (3.2). Z těchto složek jsme poté schopni kompletně popsat pole v prostředí.

3.1.1. Dielektrikum

Uvažujeme harmonické buzení $E_z = A \cos(k_T x) + B \sin(k_T x)$. Pro vidy symetrické podle osy položíme $B = 0$. Ve vnitřní vrstvě tedy bude E_z :

$$E_z = E_1 \cos(k_T x) \quad (3.3)$$

kde $k_T = \sqrt{k_i^2 - k_z^2}$ je příčná konstanta, k_z je konstanta šíření ve směru osy z a $k_i = \sqrt{-j\omega\mu_i (j\omega\varepsilon_i + \sigma_i)}$ je konstanta šíření daná vlastnostmi i -tého prostředí.

Derivace rovnice (3.3) podle os x a y jsou:

$$\begin{aligned} E_z \partial x &= -E_1 k_T \sin(k_T x) \\ E_z \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Po dosazení do rovnic (3.2) získáme výsledné vztahy:

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \frac{j k_z}{k_T} \sin(k_T x) \\ H_y &= E_1 \frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T} \sin(k_T x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Složky E_y a H_x jsou nulové.

3.1.2. Vodivá deska

Ve vodivé desce je vztah pro intenzitu el. pole E_z :

$$E_z = E_{21} \cos(k_T x) + E_{22} \sin(k_T x) \quad (3.6)$$

Derivace podle os x a y jsou:

$$\begin{aligned} E_z \partial x &= E_{22} k_T \cos(k_T x) - E_{21} k_T \sin(k_T x) \\ E_z \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dosazením derivací do (3.2) získáme výsledné vztahy:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j k_z}{k_T} (E_{22} \cos(k_T x) - E_{21} \sin(k_T x)) \\ H_y &= -\frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T} (E_{22} \cos(k_T x) - E_{21} \sin(k_T x)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1.3. Vnější prostředí

Ve volném prostředí je vlna exponenciálně tlumena se vzdáleností:

$$E_z = E_3 e^{-j k_T x} \quad (3.9)$$

Derivace podle os x a y jsou:

$$\begin{aligned} E_z \partial x &= -j k_T E_3 e^{-j k_T x} \\ E_z \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dosazením derivací do (3.2) získáme výsledné vztahy:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{k_z}{k_T} E_3 e^{-j k_T x} \\ H_y &= -\frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_T} E_3 e^{-j k_T x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2. Výpočet

Nejprve je potřeba vypočítat komplexní konstanty E_1 , E_{21} , E_{22} a E_3 z rovnic (3.5), (3.8) a (3.11). Tyto rovnice si vyjádříme tak, aby na pravé straně zůstala jen neznámá konstanta a všechny prvky, kterými je amplituda násobena, zahrneme do funkce $\tilde{E}(x, k_z)$ pro rovnice s E_z a $\tilde{H}(x, k_z)$ pro rovnice s H_y ¹.

Pro každý přechod mezi prostředími můžeme sestavit celkem 3 rovnice (pro E_z , E_x , H_y). Pro celkově čtyři neznámé nám postačí dvě rovnice na každém přechodu. Výše získané funkce \tilde{E} a \tilde{H} poskládáme do matice $A(k_z)$ tak, aby splňovaly hraniční podmínky při přechodu z jednoho prostředí do druhého, že:

- sloupce odpovídají konstantám E_1 , E_{21} , E_{22} a E_3 ,
- 1. řádek odpovídá rovnicím pro E_z ve vzdálenosti $x = a$,
- 2. řádek odpovídá rovnicím pro E_z ve vzdálenosti $x = b$,
- 3. řádek odpovídá rovnicím pro H_y ve vzdálenosti $x = a$,
- 4. řádek odpovídá rovnicím pro H_y ve vzdálenosti $x = b$.

$$A(k_z) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(a, k_z) & -\tilde{E}_{21}(a, k_z) & -\tilde{E}_{22}(a, k_z) & 0 \\ 0 & \tilde{E}_{21}(b, k_z) & \tilde{E}_{22}(b, k_z) & -\tilde{E}_3(b, k_z) \\ \tilde{H}_1(a, k_z) & -\tilde{H}_{21}(a, k_z) & -\tilde{H}_{22}(a, k_z) & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{21}(b, k_z) & \tilde{H}_{22}(b, k_z) & -\tilde{H}_3(b, k_z) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Hledáme netriviální řešení soustavy rovnic $AX = 0$, kde X vektor hledaných konstant. Pro vyřešení je potřeba najít takovou hodnotu k_z , aby matice $A(k_z)$ byla singulární (měla nulový determinant). V tu chvíli totiž přestanou být řádky matice lineárně nezávislé (stanou se lineárně závislými), a když nahradíme první řádek této matice $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ a celou matici následně invertujeme, v prvním sloupci matice budou hodnoty odpovídající konstantám E_1 , E_{21} , E_{22} a E_3 .

Při znalosti konstanty šíření k_z a všech potřebných konstant E_1 , E_{21} , E_{22} a E_3 je možné dopočítat hodnotu intenzity el. pole E_x i mag. pole H_y pro libovolnou vzdálenost x za použití příslušné rovnice pro dané prostředí (3.5), (3.8) nebo (3.11).

Měrný útlum α můžeme určit z konstanty šíření $k_z = \beta - j\alpha$. Výsledný útlum vyjde v Neperech na metr.

¹Např. pro rovnici E_z z (3.6) si přepíšeme rovnici na $E_z = E_{21}\tilde{E}_{21}(x, k_z) + E_{22}\tilde{E}_{22}(x, k_z)$, z toho vyplývá, že $\tilde{E}_{21}(x, k_z) = \cos(k_T x)$ a $\tilde{E}_{22}(x, k_z) = \sin(k_T x)$.

3.3. Výsledky

S použitím dříve uvedených vztahů byl sestaven program v jazyku Matlab. Po ověření správnosti výpočtu je uvedeno několik vypočtených průběhů rozložení elektromagnetického pole vedené vlny. Seznam využitých materiálů ve výpočtech je uveden v tabulce 3.1.

Materiál	ε_r [-]	μ_r [-]	σ [S]
Vzduch	1	1	0
Měď	1	1	$5,88 \cdot 10^7$
Polypropylen (PP)	1,5	1	0
Polyetylen (PE)	2,4	1	0

Tabulka 3.1.: Tabulka použitých materiálů

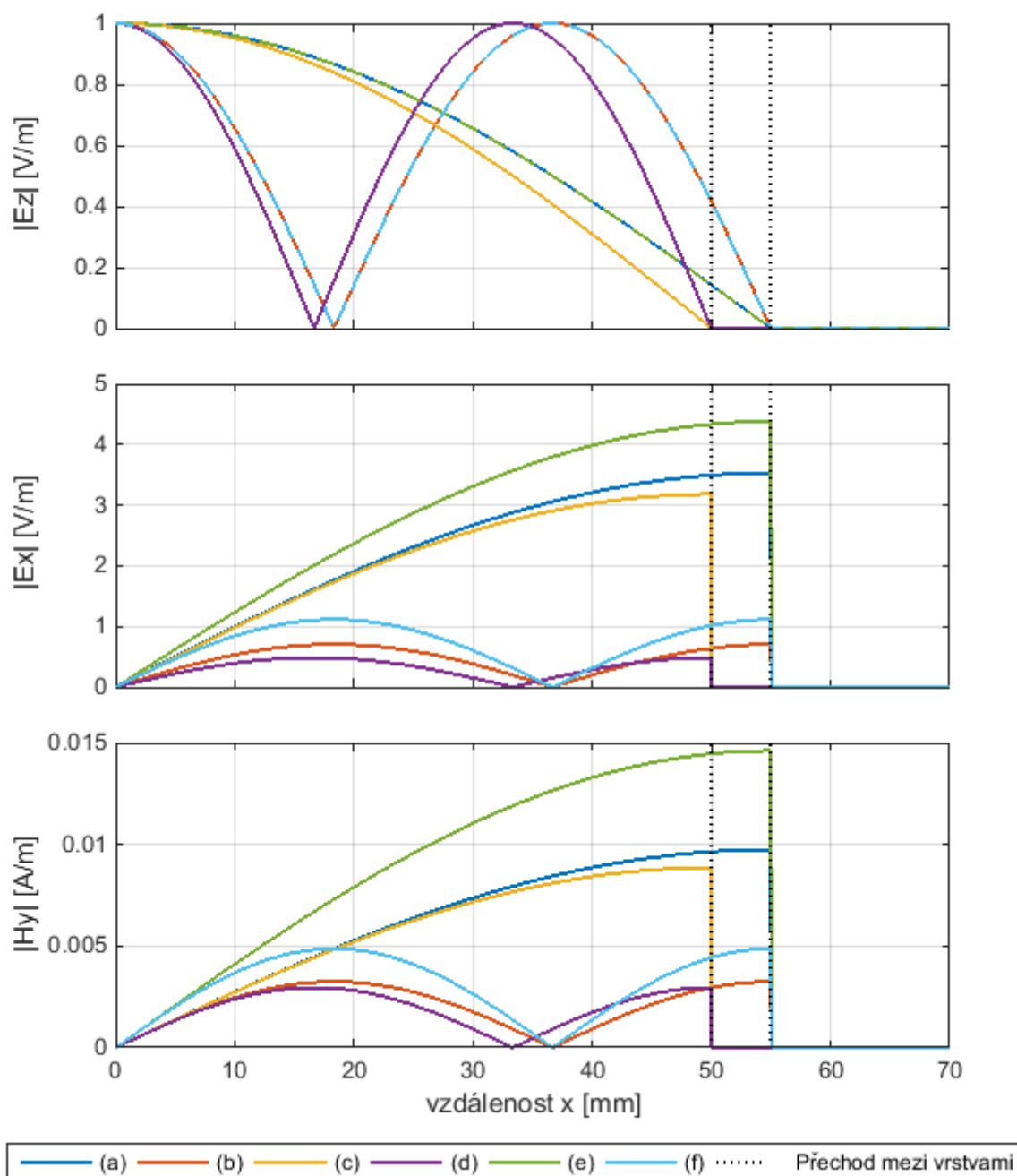
Rozměry vlnovodu jsou $a = 50$ mm a $b = 55$ mm, frekvence $f = 5$ GHz. Na této frekvenci se může ve vlnovodu šířit více módů vlny.

Mód	k_{T1}, k_{T2}, k_{T3} [1/m]	k_z [1/m]	α [dB/km]	křivka
Vzduch – Vzduch – Měď				
1. mód	$28,56 + 3,24 \cdot 10^{-3}j$ $28,56 + 3,24 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$100,82 - 0,92 \cdot 10^{-3}j$	7,96	obr. 3.2 (a)
2. mód	$85,68 + 1,47 \cdot 10^{-3}j$ $85,68 + 1,47 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$60,33 - 2,08 \cdot 10^{-3}j$	18,10	obr. 3.2 (b)
Vzduch – Měď – Vzduch				
1. mód	$31,42 + 4,87 \cdot 10^{-3}j$ $31,42 + 4,87 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$99,97 - 1,53 \cdot 10^{-3}j$	13,29	obr. 3.2 (c)
2. mód	$94,25 + 1,08 \cdot 10^{-3}j$ $94,25 + 1,08 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$45,81 - 2,21 \cdot 10^{-3}j$	19,23	obr. 3.2 (d)

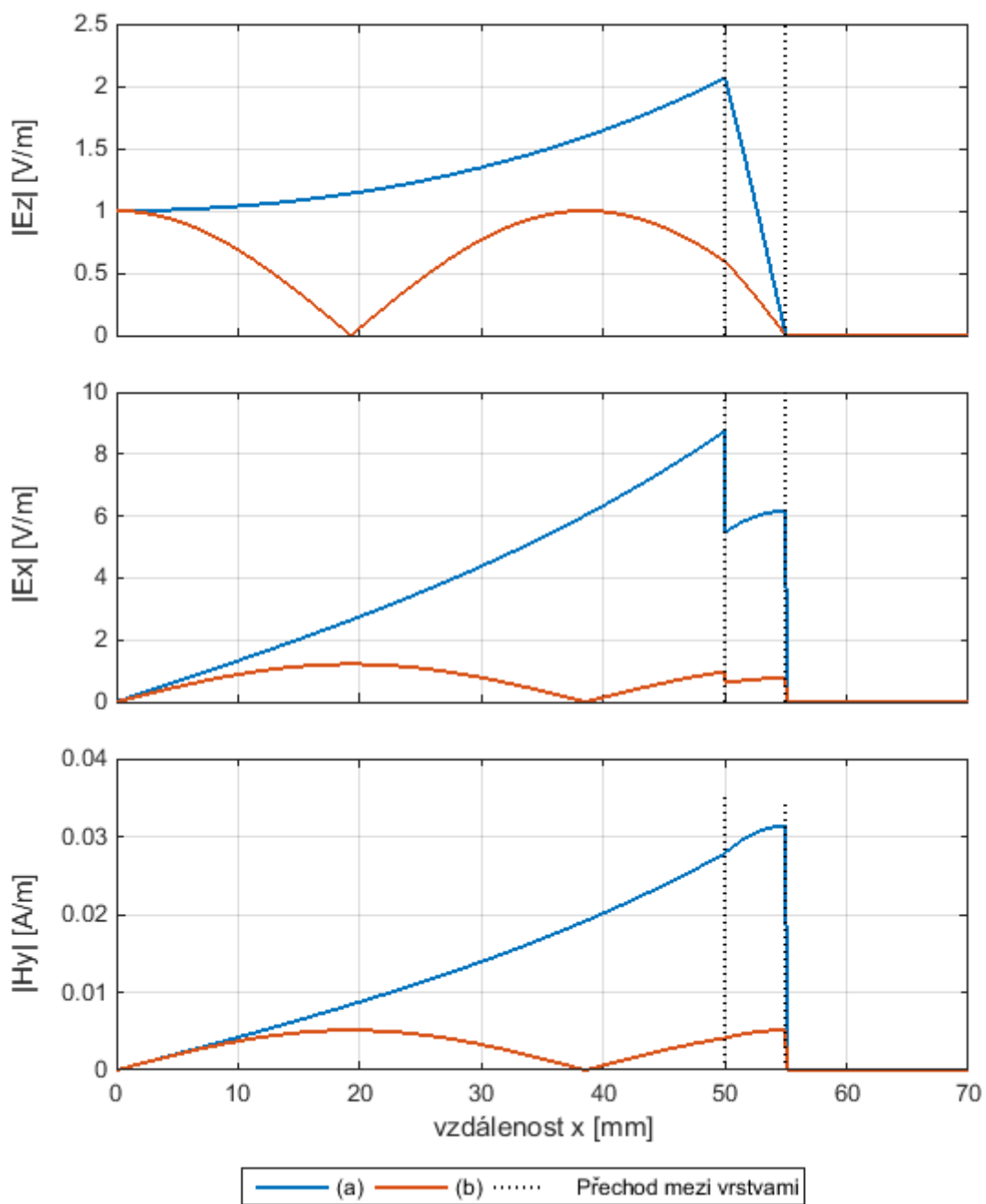
Tabulka 3.2.: Výsledné hodnoty ve vlnovodu - část I

Mód	k_{T1}, k_{T2}, k_{T3} [1/m]	k_z [1/m]	α [dB/km]	křivka
PP – PP – Měď				
1. mód	$28,57 + 4,47 \cdot 10^{-3}j$ $28,57 + 4,47 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$125,12 - 1,02 \cdot 10^{-3}j$	8,86	obr. 3.2 (e)
2. mód	$8,68 + 1,62 \cdot 10^{-3}j$ $85,68 + 1,62 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$95,55 - 1,45 \cdot 10^{-3}j$	12,61	obr. 3.2 (f)
PP – PE – Měď				
1. mód	$1,04 \cdot 10^{-2} + 27,73j$ $95,66 + 2,96 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$131,17 - 2,16 \cdot 10^{-3}j$	18,73	obr. 3.3 (a)
2. mód	$81,52 + 1,90 \cdot 10^{-3}j$ $128,57 + 1,21 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$99,13 - 1,57 \cdot 10^{-3}j$	13,61	obr. 3.3 (b)
PE – PP – Měď				
1. mód	$48,61 + 1,36 \cdot 10^{-3}j$ $7,62 \cdot 10^{-4} + 86,72j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$154,89 - 4,26 \cdot 10^{-4}j$	3,70	obr. 3.4 (a)
2. mód	$95,51 + 1,88 \cdot 10^{-3}j$ $6,52 \cdot 10^{-3} + 27,62j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$131,27 - 1,37 \cdot 10^{-3}j$	11,90	obr. 3.4 (b)
3. mód	$145,13 + 1,28 \cdot 10^{-3}j$ $105,73 + 1,76 \cdot 10^{-3}j$ $(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	$72,76 - 2,56 \cdot 10^{-3}j$	22,26	obr. 3.4 (c)

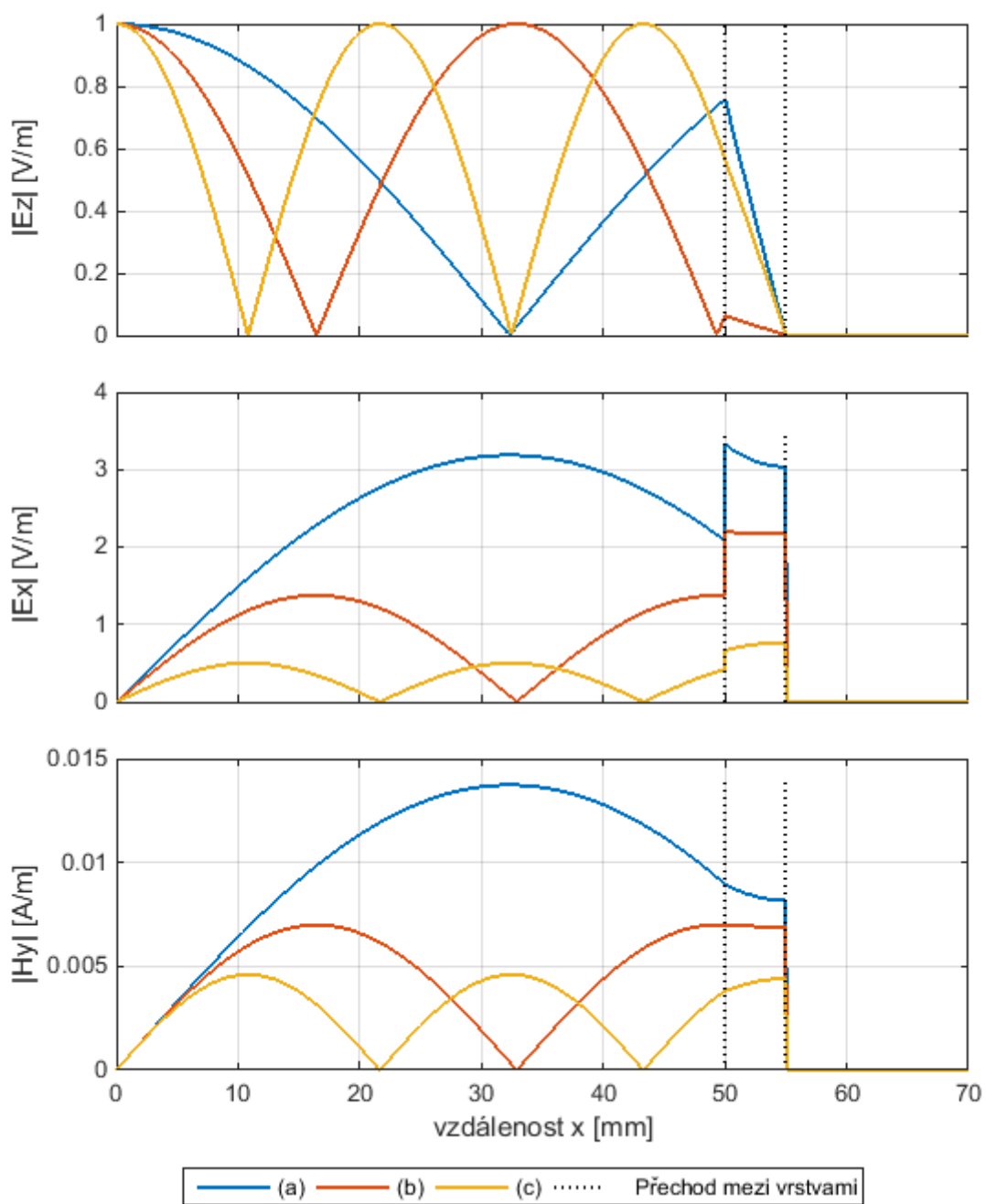
Tabulka 3.3.: Výsledné hodnoty ve vlnovodu - část II



Obrázek 3.2.: Výsledné rozložení intenzit el. a mag. pole ve vlnovodu - část I



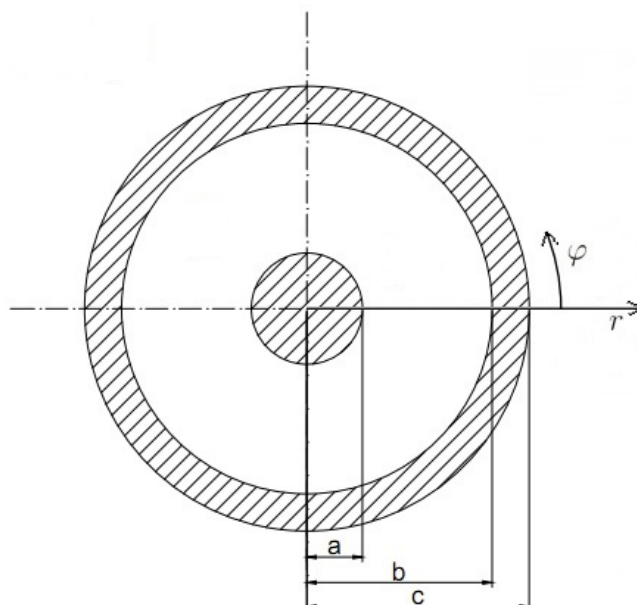
Obrázek 3.3.: Výsledné rozložení intenzit el. a mag. pole ve vlnovodu - část II



Obrázek 3.4.: Výsledné rozložení intenzit el. a mag. pole ve vlnovodu - část III

4. Koaxiální vedení

Koaxiální kabel složený z vnitřního a vnějšího vodiče s dielektrikem mezi nimi je zobrazen na obrázku 4.1.

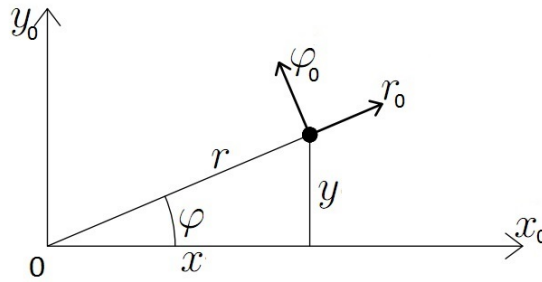


Obrázek 4.1.: Průřez koaxiálním kabelem

4.1. Specifikace prostředí

Vztahy mezi kartézskou a cylindrickou soustavou jsou naznačeny v obrázku 4.2. Z trojúhelníku v obrázku vyplývá, že $x = \cos \varphi$ a $y = \sin \varphi$. Následně gradient $\nabla_T = r_0 \partial r + \varphi_0 \frac{1}{r} \partial \varphi$. Po dosazení do vztahů pro příčné intenzity \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T odvozené v (2.13) získáme:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(r_0 E_z \partial r + \varphi_0 \frac{1}{r} E_z \partial \varphi - \varphi_0 \frac{\omega \mu}{k_z} H_z \partial r + r_0 \frac{\omega \mu}{k_z} \frac{1}{r} H_z \partial \varphi \right) \\ \mathbf{H}_T &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(r_0 H_z \partial r + \varphi_0 \frac{1}{r} H_z \partial \varphi + \varphi_0 \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_z} E_z \partial r - r_0 \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_z} \frac{1}{r} E_z \partial \varphi \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$



Obrázek 4.2.: Značení v cylindrické soustavě

Rozepsáním (4.1) do složek podle r a φ dostaneme vztahy:

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(E_z \partial r + \frac{\omega \mu}{k_z} \frac{1}{r} H_z \partial \varphi \right) \\
 E_\varphi &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(\frac{1}{r} E_z \partial \varphi - \frac{\omega \mu}{k_z} H_z \partial r \right) \\
 H_r &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(H_z \partial r - \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_z} \frac{1}{r} E_z \partial \varphi \right) \\
 H_\varphi &= \frac{-jk_z}{k_T^2} \left(\frac{1}{r} H_z \partial \varphi + \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_z} E_z \partial r \right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Obecný vztah [7] pro podélnou složku intenzity elektrického pole je:

$$E_z = E_{zT} e^{-jk_z z} \tag{4.3}$$

Nadále budeme uvažovat výpočet pole ve vzdálenosti $z = 0$, proto můžeme ze vztahů vynechat celou exponenciálu $e^{-jk_z z}$. Pro popis pole v jiné vzdálenosti je potřeba všechny následující vztahy touto exponenciálou opět vynásobit.

V cylindrické soustavě vlnová rovnice pro E_{zT} má tvar:

$$\frac{\partial^2 E_{zT}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{zT}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{zT}}{\partial \varphi^2} + k_T^2 E_{zT} = 0 \tag{4.4}$$

Obecný tvar řešení takové rovnice je:

$$E_{zT}(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \tag{4.5}$$

Dosadíme ho do (4.4) a celou rovnici vydělíme výrazem $R\Phi$. Získáme:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} + r^2 k_T^2 = 0 \tag{4.6}$$

Výraz R'' značí druhou derivaci $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$. Obdobně výrazy R' a Φ značí první derivaci. Sčítanec $\frac{\Phi''}{\Phi}$ musí být konstantou (není závislý na r ani φ). Volíme:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \text{ neboli } \frac{d^2\Phi}{d\varphi} + m^2\Phi = 0 \quad (4.7)$$

Řešením je:

$$\Phi = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi) \quad (4.8)$$

Volba funkce závisí na počátku odečítání úhlu φ v souřadné soustavě. Natočíme-li vhodně vlnovod (a řešenou vlnu), můžeme položit jednu z konstant (C nebo D) rovnu nule. Volíme $D = 0$. Tedy:

$$\Phi = C \cos(m\varphi) \quad (4.9)$$

Dosadíme-li (4.9) do (4.6), po vydělení r^2 a vynásobení R získáme:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k_x^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0 \quad (4.10)$$

Je to Besselova rovnice. Obecné řešení této rovnice je:

$$R = A J_m(k_x r) + B Y_m(k_x r) \quad (4.11)$$

J_m je Besselova funkce prvního druhu, m -tého řádu.

Y_m je Besselova funkce druhého druhu, m -tého řádu, tzv. Neumannova funkce.

Průběhy Besselových funkcí nultého a prvního řádu, tedy $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ a $Y_1(x)$, jsou zobrazeny v obrázku B.1.

Dalším fundamentálním řešením Besselovy rovnice je:

$$R = A H_0^{(1)}(k_T r) \quad (4.12)$$

$H_m^{(1)}$ je Hankelova funkce, m -tého řádu - viz (B.1).

Celkově tedy dosazením (4.9) a (4.11) do (4.3), získáme obecné řešení:

$$E_z = (A J_m(k_x r) + B Y_m(k_x r)) C \cos(m\varphi) \quad (4.13)$$

Z důvodu jednoznačnosti musí platit $E_{zT}(\varphi) = E_{zT}(\varphi + 2m\pi)$, m tedy musí být celé číslo. Volba m závisí na vybraném TM_{mn} vidu. Pro běžně využívaný dominantní vid TM_{01} volíme $m = 0$:

$$E_z = A J_0(k_x r) + B Y_0(k_x r) \quad (4.14)$$

U tohoto vidu je $H_z = 0$.

4.1.1. Vnitřní vodič

Ve vnitřním vodiči ještě vztahy pro podélnou intenzitu elektrického pole E_z (4.14) můžeme zjednodušit. Protože $Y_m|_{r \rightarrow 0} = \infty$, musí $B = 0$. Proto:

$$E_z = E_1 J_0(k_T r) \quad (4.15)$$

Derivace E_z (4.15) podle r a φ jsou:

$$E_z \partial r = -E_0 k_T J_1(k_T r) \quad (4.16)$$

$$E_z \partial \varphi = 0$$

Po dosazení derivací (4.16) do (4.2) získáme:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{jk_z}{k_T} E_1 J_1(k_T r) \\ E_\varphi &= H_r = 0 \\ H_\varphi &= \frac{j\omega \hat{\epsilon}}{k_T} E_1 J_1(k_T r) \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.1.2. Střední vrstvy

Pro všechny střední vrstvy platí stejné odvození. Střední vrstvou se rozumí všechna prostředí, kromě vnitřního vodiče a vnějšího prostředí (v tomto případě se jedná o vrstvu dielektrika a vnějšího vodiče). Intenzity el. pole podle (4.14) bude obsahovat oba členy.

Derivace E_z (4.14) podle r a φ jsou:

$$\begin{aligned} E_z \partial r &= -E_{n1} k_T J_1(k_T r) - E_{n2} k_T Y_1(k_T r) \\ E_z \partial \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde $n = \langle 2; N - 1 \rangle$ značí číslo vrstvy.

Dosazením derivací (4.18) do (4.2) získáme výsledné vztahy intenzit pro střední vrstvy:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{j k_z}{k_T} (E_{n1} J_1(k_T r) + E_{n2} Y_1(k_T r)) \\ E_\varphi &= H_r = 0 \\ H_\varphi &= \frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T} (E_{n1} J_1(k_T r) + E_{n2} Y_1(k_T r)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.1.3. Vnější prostředí

Ve vnějším prostředí mají podélné intenzity tvar:

$$E_z = E_N k_T H_0^{(1)}(k_T r) \quad (4.20)$$

Derivace intenzity (4.20) jsou:

$$\begin{aligned} E_z \partial r &= -E_0 k_T H_1^{(1)}(k_T r) \\ E_z \partial \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dosadíme-li derivace (4.21) do (4.2) dostaneme:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{j k_z}{k_T} E_N H_1^{(1)}(k_T r) \\ E_\varphi &= H_r = 0 \\ H_\varphi &= \frac{j \omega \hat{\epsilon}}{k_T} E_N H_1^{(1)}(k_T r) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.1.4. Aproximace v kovech

Protože v kovových vrstvách nabývá příčná konstanta šíření k_T velkých hodnot a $|k_{Tr}| \gg 1$, numerické řešení selhává. V matici $A(k_t)$ (viz kapitola 4.2) se vedle sebe střídají extrémně velká a malá čísla a nelze přesně spočítat její determinant. V kovu s tloušťkou několikanásobně větší, než je hloubka vniku, můžeme vlnu aproximovat rovinnou vlnou s exponenciálním průběhem. Výhodou exponenciály oproti Besselově funkci je možnost „posunutí nuly“ [3].

Ve vnitřním vodiči pak rovnice (4.15):

$$E_z = E_1 e^{jk_T(r-a)} \quad (4.23)$$

Po úpravě rovnice (4.17) nahradíme:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{k_z}{k_T} E_1 e^{jk_T(r-a)} \\ H_\varphi &= \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_T} E_1 e^{jk_T(r-a)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Obdobně postupujeme i u vnějšího vodiče (který je jednou ze středních vrstev). Vztahy (4.15) a (4.19) nahradíme:

$$E_z = E_{n1} e^{-jk_T(r-b)} + E_{n2} e^{jk_T(r-c)} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{k_z}{k_T} (-E_{n1} e^{-jk_T(r-b)} + E_{n2} e^{jk_T(r-c)}) \\ H_\varphi &= \frac{\omega \hat{\epsilon}}{k_T} (-E_{n1} e^{-jk_T(r-b)} + E_{n2} e^{jk_T(r-c)}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2. Výpočet

Výpočet probíhá obdobně jako v případě vlnovodu (viz kapitola 3.2 na str. 9) jen s tím rozdílem, že proměnných místo čtyř máme celkem šest: $E_1, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$ a E_4 z rovnic (4.17), (4.19) a (4.22).

Sestavíme opět matici $A(k_z)$ tak, aby byly splněny hraniční podmínky při přechodu z jednoho prostředí do druhého, že:

- sloupce odpovídají konstantám $E_1, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$ a E_4 ,
- 1. řádek odpovídá rovnicím pro E_z ve vzdálenosti $r = a$,
- 2. řádek odpovídá rovnicím pro E_z ve vzdálenosti $r = b$,
- 2. řádek odpovídá rovnicím pro E_z ve vzdálenosti $r = c$,
- 3. řádek odpovídá rovnicím pro H_φ ve vzdálenosti $r = a$,
- 4. řádek odpovídá rovnicím pro H_φ ve vzdálenosti $r = b$.
- 4. řádek odpovídá rovnicím pro H_φ ve vzdálenosti $r = c$.

$$A(k_z) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(a, k_z) & -\tilde{E}_{21}(a, k_z) & -\tilde{E}_{22}(a, k_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_{21}(b, k_z) & \tilde{E}_{22}(b, k_z) & -\tilde{E}_{31}(b, k_z) & -\tilde{E}_{32}(b, k_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{E}_{31}(c, k_z) & \tilde{E}_{32}(c, k_z) & -\tilde{E}_4(c, k_z) \\ \tilde{H}_1(a, k_z) & -\tilde{H}_{21}(a, k_z) & -\tilde{H}_{22}(a, k_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{21}(b, k_z) & \tilde{H}_{22}(b, k_z) & -\tilde{H}_{31}(b, k_z) & -\tilde{H}_{32}(b, k_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{31}(c, k_z) & \tilde{H}_{32}(c, k_z) & -\tilde{H}_4(c, k_z) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Po vypočítání E_z, E_r a H_φ můžeme vypočítat napětí a proud.

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \, dl \quad (4.28)$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \, dS \quad (4.29)$$

Impedance¹ vedení je pak dána:

$$Z = \frac{U}{I} \quad (4.30)$$

Pro výpočet proudu využijeme Ohmův zákon $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Po úpravě (4.29) získáme:

$$I = \sigma \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}_z r dr d\varphi \quad (4.31)$$

Celkový výkon přenášený elektromagnetickým polem podél směru vedení je dán:

$$P_T = \int_S S_z dS \quad (4.32)$$

Kde S_z je střední hodnota Poyntingova vektoru ve směru osy z :

$$S_z = \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*\} \quad (4.33)$$

¹Pro výpočet impedance byl vybrán proud ve vnitřním vodiči I_{IN} . Podle směru integrace napětí vychází jeho fáze. Volíme takový směr, aby $\Re\{Z\} > 0$.

4.3. Výsledky

Zde jsou uvedeny výsledné hodnoty a grafické výstupy z prostředí MATLAB. Použité materiály byly již popsány v tabulce 3.1.

Rozměry vlnovodu jsou $a = 1$ mm a $b = 1,5$ mm, $c = 1,6$ mm.

Konstanty šíření [1/m]		Elektrické veličiny		Přenášené výkony [W]	
Měď' – Vzduch – Měď' – Vzduch					
$f = 5$ GHz, obr. 4.3 (a)					
k_{T1}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	I_{IN} [A]	$(17,15 - 17,13j) \cdot 10^{-2}$	P_1	$-2,74 \cdot 10^{-11}$
k_{T2}	$5,47 + 1,96j$	I_{OUT} [A]	$(-17,15 + 17,16j) \cdot 10^{-2}$	P_2	93,41
k_{T3}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	U [V]	$(66,21 - 66,34j) \cdot 10^{-2}$	P_3	$1,24 \cdot 10^{-9}$
k_{T4}	$5,47 + 1,96j$	Z [Ω]	$3,87 - 5,47 \cdot 10^{-3}j$	P_4	$4,28 \cdot 10^{-87}$
k_z	$104,67 - 0,10j$	α [dB/m]	0,89	P_{celk}	93,41

Měď' – PP – Měď' – Vzduch
 $f = 5$ GHz, obr. 4.3 (b), obr. 4.4 (a)

k_{T1}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	I_{IN} [A]	$(17,15 - 17,13j) \cdot 10^{-2}$	P_1	$-3,29 \cdot 10^{-11}$
k_{T2}	$6,00 + 2,63j$	I_{OUT} [A]	$(-17,15 + 17,16j) \cdot 10^{-2}$	P_2	76,29
k_{T3}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	U [V]	$(54,08 - 54,18j) \cdot 10^{-2}$	P_3	$1,52 \cdot 10^{-9}$
k_{T4}	$0,21 + 73,90j$	Z [Ω]	$3,16 - 4,47 \cdot 10^{-3}j$	P_4	$1,57 \cdot 10^{-88}$
k_z	$128,23 - 0,13j$	α [dB/m]	1,07	P_{celk}	76,29

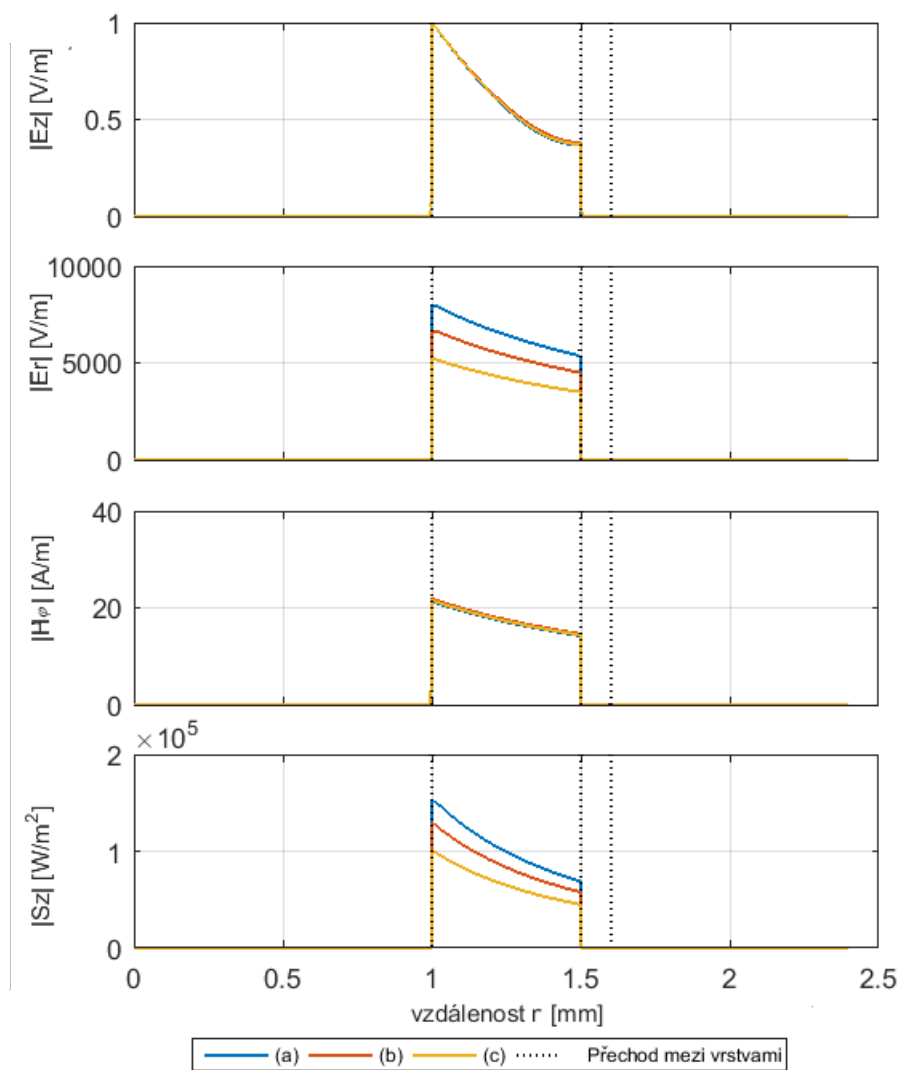
Měď' – PE – Měď' – Vzduch
 $f = 5$ GHz, obr. 4.3 (c)

k_{T1}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	I_{IN} [A]	$(17,15 - 17,13j) \cdot 10^{-2}$	P_1	$-4,15 \cdot 10^{-11}$
k_{T2}	$7,78 + 3,23j$	I_{OUT} [A]	$(-17,15 + 17,16j) \cdot 10^{-2}$	P_2	60,31
k_{T3}	$(1,08 - 1,08j) \cdot 10^6$	U [V]	$(42,75 - 42,83j) \cdot 10^{-2}$	P_3	$1,93 \cdot 10^{-9}$
k_{T4}	$0,20 + 123,79j$	Z [Ω]	$2,49 - 3,52 \cdot 10^{-3}j$	P_4	$1,16 \cdot 10^{-88}$
k_z	$162,19 - 0,16j$	α [dB/m]	1,40	P_{celk}	60,31

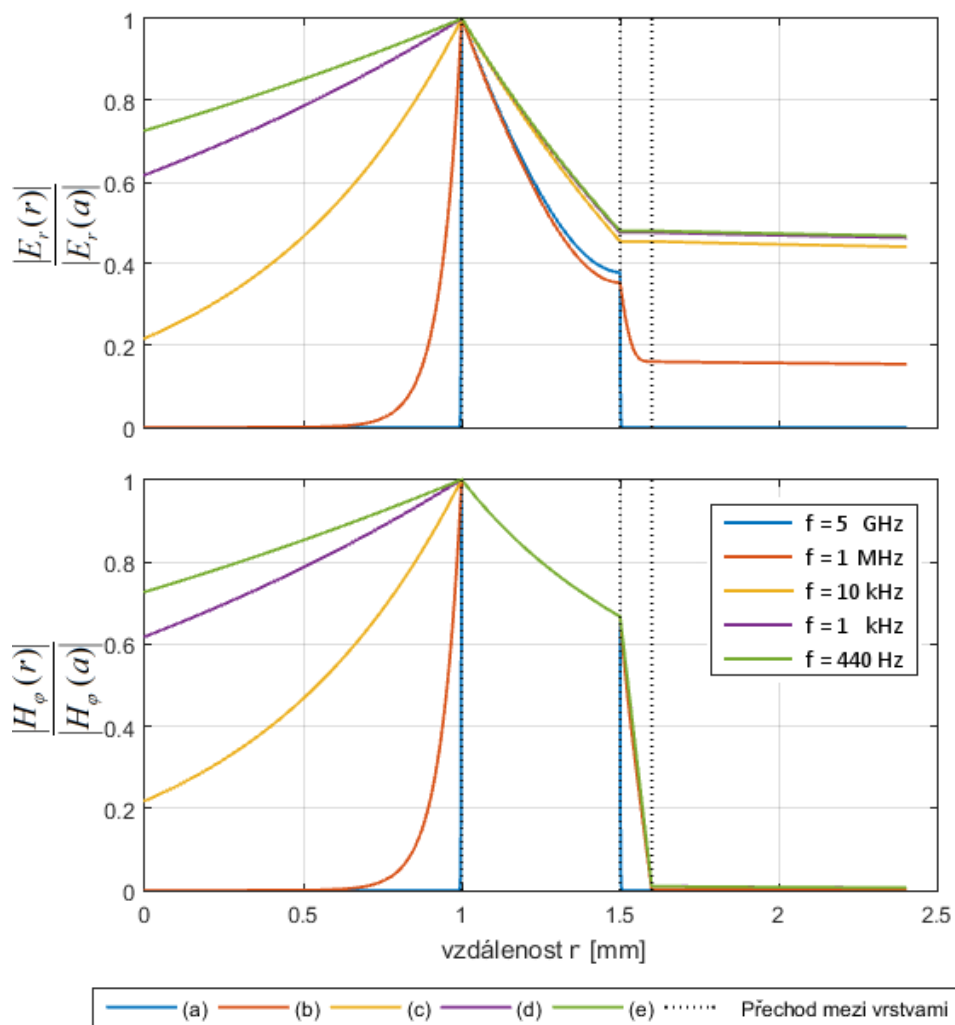
Tabulka 4.1.: Výsledné hodnoty v koaxiálním vedení - část I

Konstanty šíření [1/m]		Elektrické veličiny		Přenášené výkony [W]	
Měď – PP – Měď – Vzduch					
$f = 1 \text{ MHz}$, obr. 4.4 (b)					
k_{T1}	$(1,52 - 1,52j) \cdot 10^4$	I_{IN} [A]	$12,13 - 11,33j$	P_1	$-3,86 \cdot 10^{-9}$
k_{T2}	$(10,16 + 4,23j) \cdot 10^{-3}$	I_{OUT} [A]	$-12,39 + 12,57j$	P_2	$3,57 \cdot 10^5$
k_{T3}	$(1,52 - 1,52j) \cdot 10^4$	U [V]	$33,18 - 38,51j$	P_3	$2,09 \cdot 10^{-8}$
k_{T4}	$(3,54 + 12,13j) \cdot 10^{-3}$	Z [Ω]	$3,05 - 0,33j$	P_4	$2,71 \cdot 10^{-4}$
k_z	$(24,02 - 1,79j) \cdot 10^{-3}$	α [dB/m]	$15,51 \cdot 10^{-3}$	P_{celk}	$3,57 \cdot 10^5$
Měď – PP – Měď – Vzduch					
$f = 10 \text{ kHz}$, obr. 4.4 (c)					
k_{T1}	$(1,52 - 1,52j) \cdot 10^3$	I_{IN} [A]	$103,92 - 42,48j$	P_1	$-7,00 \cdot 10^{-7}$
k_{T2}	$(3,98 + 3,45j) \cdot 10^{-4}$	I_{OUT} [A]	$-123,40 + 123,42j$	P_2	$5,78 \cdot 10^7$
k_{T3}	$(1,52 - 1,52j) \cdot 10^3$	U [V]	$52,71 - 1,11 \cdot 10^3j$	P_3	$1,82 \cdot 10^{-7}$
k_{T4}	$(3,83 + 3,59j) \cdot 10^{-4}$	Z [Ω]	$4,17 - 8,96j$	P_4	$6,28 \cdot 10^{-2}$
k_z	$(3,89 - 3,54j) \cdot 10^{-4}$	α [dB/m]	$3,10 \cdot 10^{-3}$	P_{celk}	$5,78 \cdot 10^7$
Měď – PP – Měď – Vzduch					
$f = 1 \text{ kHz}$, obr. 4.4 (d)					
k_{T1}	$(4,82 - 4,82j) \cdot 10^2$	I_{IN} [A]	$155,64 - 23,20j$	P_1	$-4,66 \cdot 10^{-6}$
k_{T2}	$(1,16 + 1,09j) \cdot 10^{-4}$	I_{OUT} [A]	$-390,21 + 390,26j$	P_2	$1,64 \cdot 10^9$
k_{T3}	$(4,82 - 4,82j) \cdot 10^2$	U [V]	$-212,96 - 1,06 \cdot 10^4j$	P_3	$1,61 \cdot 10^{-6}$
k_{T4}	$(1,16 + 1,09j) \cdot 10^{-4}$	Z [Ω]	$8,60 - 66,88j$	P_4	$0,54$
k_z	$(1,10 - 1,15j) \cdot 10^{-4}$	α [dB/m]	$1,00 \cdot 10^{-3}$	P_{celk}	$1,64 \cdot 10^9$
Měď – PP – Měď – Vzduch					
$f = 440 \text{ Hz}$ „komorní a“, obr. 4.4 (e)					
k_{T1}	$(3,41 - 3,41j) \cdot 10^5$	I_{IN} [A]	$(54,22 - 54,06j) \cdot 10^{-2}$	P_1	$-7,98 \cdot 10^{-6}$
k_{T2}	$1,13 + 0,44j$	I_{OUT} [A]	$(-54,22 + 54,33j) \cdot 10^{-2}$	P_2	$5,60 \cdot 10^9$
k_{T3}	$(3,41 - 3,41j) \cdot 10^5$	U [V]	$(+170,23 - 171,27j) \cdot 10^{-2}$	P_3	$6,95 \cdot 10^{-6}$
k_{T4}	$0,07 + 7,34j$	Z [Ω]	$3,16 - 14,23 \cdot 10^{-3}j$	P_4	$1,18$
k_z	$12,79 - 38,93 \cdot 10^{-3}j$	α [dB/m]	$0,34$	P_{celk}	$5,60 \cdot 10^9$

Tabulka 4.2.: Výsledné hodnoty v koaxiálním vedení - část II



Obrázek 4.3.: Výsledné rozložení intenzit el. a mag. pole v koaxiálním vedení - část I



Obrázek 4.4.: Výsledné rozložení intenzit el. a mag. pole v koaxiálním vedení - část II

Naprostá většina výkonu je přenášena v dielektriku mezi vodiči. Na vysokých frekvencích je výkon vyzářený z vodiče P_4 nulový (numerické hodnoty řádově 10^{-88} lze za nulu považovat), na nižších frekvencích část výkonu proniká i mimo vodič, byť jde stále jen o velmi malý zlomek celkového přenášeného výkonu. Výkon ve vnitřním vodiči P_1 vychází záporný, což bude dáno pravděpodobně numerickou nepřesností výpočtu. Jeho velikost je ovšem, stejně tak jako výkonu ve vnějším vodiči P_3 , o více jak 10 řádu menší, než je výkon P_2 .

Vysoké hodnoty přenášeného výkonu jsou dány velkou intenzitou pole E_z mezi vodiči, která nám dobře poměrově zobrazuje rozložení pole, ale v reálném vodiči intenzita takových hodnot nedosahuje.

5. Závěr

V této práci byly z Maxwellových rovnic odvozeny analytické vztahy pro úplný popis elektromagnetického pole ve vlnovodu libovolného tvaru. Následně bylo pospáno chování transverzálně magnetické vlny v deskovém vlnovodu a koaxiálním vedení.

Tyto vztahy byly naprogramovány do prostředí MATLAB, kde byl vytvořen numerický model znázorňující rozložení pole ve vlnovodu dle zadaných vstupních parametrů.

Ze zveřejněných grafických výstupů deskového vlnovodu je zřejmé ověření známých skutečností: zkrácení vlnové délky v prostředí s větší relativní permitivitou $\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}}$ a nepropustnost elektromagnetické vlny do vodivých materiálů.

V koaxiálním vedení byla potvrzena nerovnost proudů $I_{IN} \neq I_{OUT}$, která je způsobena ztrátami ve vodiči. Pro koaxiální vedení s vnějším vodičem nekonečné tloušťky popsal tento jev už W.C. Daywitt v [2]. Na vysokých frekvencích je vlivem skin-efektu proud ve vodičích vytlačován směrem k povrchu vodiče, což se odráží na rozložení pole ve vodiči. Na nižších frekvencích šířená vlna prostupuje více do vodiče, což v důsledku může znamenat vyzáření části energie i mimo vedení.

6. Přehled veličin

Značka	Název veličiny	Jednotka
c	Rychlost světla	m/s
f	Frekvence	Hz
k	Konstanta šíření	1/m
\mathcal{B}, B	Magnetická indukce	T
\mathcal{D}, D	Elektrická indukce	C/m ²
\mathcal{E}, E	Intenzita elektrického pole	V/m
\mathcal{H}, H	Intenzita magnetického pole	A/m
I	Elektrický proud	A
\mathcal{J}, J	Hustota elektrického proudu	A/m ²
P	Elektrický výkon	W
S	Hustota výkonu (Poyntingův vektor)	W/m ²
U	Elektrické napětí	C
Z	Impedance	Ω
α	Činitel útlumu	Np/m dB/m
β	Činitel fázového natočení	rad/m
ε	Permitivita	F/m
λ	Vlnová délka	m
μ	Permeabilita	H/m
σ	Vodivost	S
ω	Úhlová rychlost	rad/s

Tabulka 6.1.: Přehled veličin, jejich značení a jednotek

Literatura

- [1] Shelkunoff, Sergei A.: *The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines*, Bell System Technical Journal, vol. XIII, 1934, str. 532 - 579.
- [2] Daywitt, William C.: *Exact Principal Mode Field for a Lossy Coaxial Line*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol 39, No. 8, 1991, str. 1313 - 1322.
- [3] Collin, Robert E.: *Field theory of guided waves*. Wiley-Interscience, New York 1991, ISBN: 0-87942-237-0.
- [4] Balanis, Constantine A.: *Advanced engineering electromagnetics*. Wiley, New York 1989, ISBN: 0-471-62194-3.
- [5] Harrington, Roger F.: *Time-harmonic electromagnetic fields*. IEEE Press, Wiley-Interscience, New York 2001, ISBN: 0-471-20806-X.
- [6] Orfanidis, Sophocles J.: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University 2008, dostupné online: www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa.
- [7] Novotný, Karel: *Vlny a vedení: přednášky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2005, ISBN: 80-01-03317-1.
- [8] Bartsch, Hans-Jochen: *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha 1996, ISBN: 80-204-0607-7.

A. Převod na fázory

S elektromagnetickým vlněním se setkáváme v elektromagnetickém poli, které je časově proměnné. Veličiny, které elektromagnetickou vlnu popisují se tedy mění i v čase. Chování vln popisují Maxwellovy rovnice:

Ampérov zákon celkového proudu:

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J} \quad (\text{A.1})$$

Faradayův indukční zákon:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Gaussův zákon elektrostatiky:

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \quad (\text{A.3})$$

Gaussův zákon magnetostatiky:

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Protože zkoumáme chování vlny v prostoru, kde nejsou žádné zdroje elektrického náboje ani proudu, platí $\rho = 0$ a $\mathcal{J} = 0$. Pomocí definice elektrické indukce $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$ a magnetické indukce $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$ se Maxwellovy rovnice (A.1), (A.2) dají přepsat do podoby:

$$\nabla \times \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Dvojice vztahů pro Fourierovy transformaci (A.9) a (A.10) umožňuje vektor z časové oblasti $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ převést do frekvenční oblasti na vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ a naopak. Identickou transformaci lze použít na všechny proměnné v Maxwellových rovnicích. Vzájemně odpovídající symboly jsou uvedeny v tabulce (A.1).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.10})$$

Značení v časové oblasti	\mathcal{E}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{B}	ρ	\mathcal{J}
Značení ve frekvenční oblasti	E	H	D	B	ρ	J

Tabulka A.1.: Tabulka symbolů pro FT

Po aplikaci FT na námi zjednodušené Maxwellovy rovnice (A.5) až (A.8) získáme vztahy:

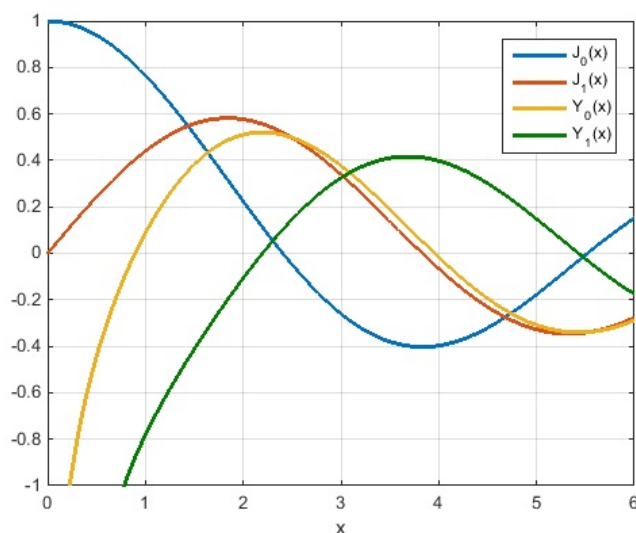
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{A.14})$$

B. Besselovy funkce



Obrázek B.1.: Průběhy Besselových funkcí nultého a prvního řádu

Hankelovy funkce

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + jY_m(x) \quad (\text{B.1})$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - jY_m(x)$$

Derivace besselových funkcí

$$J_0(x) \partial x = J_{-1}(x) = -J_1(x) \quad (\text{B.2})$$

$$J_0(\alpha x) \partial x = \alpha J_{-1}(\alpha x) = -\alpha J_1(\alpha x) \quad (\text{B.3})$$

$$Y_0(x) \partial x = Y_{-1}(x) = -Y_1(x) \quad (\text{B.4})$$

$$Y_0(\alpha x) \partial x = \alpha Y_{-1}(\alpha x) = -\alpha Y_1(\alpha x) \quad (\text{B.5})$$

Integrál besselových funkcí

$$\int x J_0(x) \partial x = x J_1(x) \quad (\text{B.6})$$

$$\int x J_0(\alpha x) \partial x = \frac{x J_1(\alpha x)}{\alpha} \quad (\text{B.7})$$

$$\int J_1(x) \partial x = -J_0(x) \quad (\text{B.8})$$

$$\int J_1(\alpha x) \partial x = -\frac{J_0(\alpha x)}{\alpha} \quad (\text{B.9})$$

$$\int x Y_0(x) \partial x = x Y_1(x) \quad (\text{B.10})$$

$$\int x Y_0(\alpha x) \partial x = \frac{x Y_1(\alpha x)}{\alpha} \quad (\text{B.11})$$

$$\int Y_1(x) \partial x = -Y_0(x) \quad (\text{B.12})$$








$$\int Y_1(\alpha x) \partial x = -\frac{Y_0(\alpha x)}{\alpha} \quad (\text{B.13})$$

C. Obsah CD

 **diplomova_prace.pdf** — Diplomová práce v elektronické podobě.








koax

@prostredi

-  **prostredi.m** — Definice třídy prostředí
-  **coeffs.m** — Funkce se vztahy \tilde{X}
-  **field.m** — Funkce pro výpočet intenzit pole ve vzdálenosti r
-  **find_kz.m** — Iterační funce pro nalezení k_z
-  **k_t.m** — Funkce pro výpočet příčné kosntanty šíření
-  **matA.m** — Funkce sestavující matici $A(k_z)$
-  **run.m** — Spouštěcí soubor, nastavení parametrů

vlnovod

@prostredi

-  **prostredi.m** — Definice třídy prostředí
-  **coeffs.m** — Funkce se vztahy \tilde{X}
-  **field.m** — Funkce pro výpočet intenzit pole ve vzdálenosti r
-  **find_kz.m** — Iterační funce pro nalezení k_z
-  **k_t.m** — Funkce pro výpočet příčné kosntanty šíření
-  **matA.m** — Funkce sestavující matici $A(k_z)$
-  **run.m** — Spouštěcí soubor, nastavení parametrů