

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA DOPRAVNÍ

Bc. Ondřej Vašíček
Využití gravitačního manévru

Diplomová práce

2016



K621..... Ústav letecké dopravy

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení studenta (včetně titulů):

Bc. Ondřej Vašíček

Kód studijního programu a studijní obor studenta:

N 3710 – PL – Provoz a řízení letecké dopravy

Název tématu (česky): **Využití gravitačního manévru**

Název tématu (anglicky): Gravity Assist Utilization

Zásady pro vypracování

Při zpracování diplomové práce se řiďte osnovou uvedenou v následujících bodech:

- Teorie gravitačního manévru
- Historické využití gravitačního manévru
- Použití vlivu Měsíce pro změnu orbity okolo země
- Použití gravitačního manévru u nevyužívaných satelitů
- Konkrétní návrh manévru pro satelit GSA Galileo

Rozsah grafických prací: dle pokynů vedoucího diplomové práce

Rozsah průvodní zprávy: minimálně 55 stran textu (včetně obrázků, grafů a tabulek, které jsou součástí průvodní zprávy)

Seznam odborné literatury: Space mission analysis and design

<http://www.esa.int/ESA>

GNSS - Global Navigation Satellite Systems : GPS, GLONASS, Galileo and more / Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger, Elmar Wasle

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Vladislav Capoušek, Ph.D.

Ing. Bc. Jakub Hospodka, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce:

31. července 2014

(datum prvního zadání této práce, které musí být nejpozději 10 měsíců před datem prvního předpokládaného odevzdání této práce vyplývajícího ze standardní doby studia)

Datum odevzdání diplomové práce:

1. června 2016

a) datum prvního předpokládaného odevzdání práce vyplývající ze standardní doby studia a z doporučeného časového plánu studia

b) v případě odkladu odevzdání práce následující datum odevzdání práce vyplývající z doporučeného časového plánu studia



doc. Ing. Stanislav Szabo, Ph.D. MBA

prof. Dr. Ing. Miroslav Svítek, dr. h. c.

vedoucí

děkan fakulty

Ústavu letecké dopravy

Potvrzuji převzetí zadání diplomové práce.

Bc. Ondřej Vašíček

jméno a podpis studenta

V Praze dne..... 30. prosince 2015

Prohlášení

Nemám závažný důvod proti užívání tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 30. května 2016



Abstrakt

Autor: Bc. Ondřej Vašíček

Název práce: Využití gravitačního manévru

Škola: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní

Rok vydání: 2016

Diplomová práce se zabývá možnostmi využití Měsíce pro změnu oběžné dráhy družic geocentrického systému. Jsou navrženy 3 možné postupy umožňující využití urychlení o Měsíc nebo změnu inklinace vzhledem k zemskému rovníku a je zhodnocen jejich přínos. Práce také popisuje doplňující funkci do programu Matlab, umožňující simulaci pohybu družice v systému Země-Měsíc na základě jejich gravitačního působení a vyhodnocující změnu jejich orbitálních elementů v čase. V poslední kapitole je probrána možnost využití těchto manévru na družice Galileo 5 a 6, umístěné chybou nosné rakety na nevhodné oběžné dráhy.

Klíčová slova: gravitační manévr, nebeská mechanika, Měsíc, družice, změna trajektorie

Abstract

Author: Bc. Ondřej Vašíček

Title: Gravity Assist Utilization

School: Czech Technical University in Prague, Faculty of Transportation Sciences

Publication Year: 2016

This master's thesis evaluates the possibility of using the Moon in orbit change maneuvers around the Earth. Three procedures are proposed enabling gravity assist by the Moon to accelerate the satellites or to change their inclination to the equator; its profitability is evaluated. The thesis also describes included Matlab function, allowing simulation of satellite movement in isolated Earth-Moon system, based only on gravitational pulls from these objects and evaluating the effect on orbital elements of said satellites. Last chapter deals with the possibility of using these maneuvers with Galileo 5 and 6 satellites that were placed in incorrect orbits after carrier rocket anomaly.

Key Words: gravity assist, celestial mechanics, Moon, satellite, trajectory change

Obsah

Seznam použitých zkratk a symbolů	9
1 Úvod	10
2 Teorie gravitačního manévru	11
2.1 Analogie jedoucího vlaku.....	11
2.1.1 Zákon zachování hybnosti	13
2.1.2 Zákon zachování energie.....	13
2.2 Gravitační manévr v rovině.....	14
2.2.1 Pohyb po hyperbole	14
2.2.2 Stanovení úhlu pootočení β	16
2.2.3 Uvážení pohybu pomocného tělesa	17
3 Historické využití gravitačního manévru	19
3.1 Mariner 10	19
3.2 Voyager 1 a 2.....	19
3.3 Ulysses	20
3.4 Rosseta.....	21
3.5 Solar Probe Plus	21
4 Použití vlivu Měsíce pro změnu orbity okolo země.....	22
4.1 Charakteristiky Měsíce	22
4.1.1 Fyzikální charakteristiky	22
4.1.2 Orbitální charakteristiky.....	23
4.2 Urychlení	24
4.2.1 Urychlení přechodovou dráhou na úroveň oběhu Měsíce	24
4.2.2 Urychlení při únikové rychlosti.....	30
4.3 Změna inklinace	35
4.3.1 Změna inklinace zvýšením apogea	35
4.3.2 Využití Měsíce pro změnu inklinace	36
5 Použití gravitačního manévru u satelitů.....	40
5.1 Elementy dráhy	40

5.1.1 Dvouřádkové elementy dráhy.....	43
5.1.2 Stavový vektor kosmického tělesa	45
5.2 Perturbace (odchyly).....	46
5.2.1 Jevy ovlivňující stabilitu oběžných drah.....	46
6 Návrh programu v aplikaci Matlab	49
6.1 Omezený problém tří těles	49
6.2 Aplikace progress do programu Matlab	52
6.2.1 Funkce tle využívaná aplikací progress.....	61
6.3 Použití programu	65
6.3.1 Aplikace urychlení na přechodovou dráhu do úrovně Měsíce	65
6.3.2 Aplikace urychlení při únikové rychlosti	67
6.3.3 Aplikace změny inklinace	69
7 Konkrétní návrh manévru pro satelit GSA Galileo	71
8 Závěr	74
Zdroje	75
Přílohy	I

Seznam použitých zkratek a symbolů

a	hlavní poloosa, zrychlení
b	poloměr zaměření
e	excentricita
F	excentrická anomálie
g	gravitační zrychlení
i	inklinace
m	hmotnost
M	hmotnost (většího objektu), střední anomálie
n	střední denní pohyb
r	vzdálenost, poloha
SOI	gravitační sféra vlivu
t	čas
T	perioda, čas oběhu
TLE	Dvouřádkové elementy dráhy
u	relativní rychlost
U	rychlost pomocného tělesa (Měsíce)
v, v_{∞}	rychlost, hyperbolická přebytková rychlost
α, α'	počáteční, konečný úhel natočení vektoru rychlosti
β	úhel pootočení gravitačním manévrem
γ	úhel vypuštění družice
θ, ν	pravá anomálie, natočení asymptot
κ	gravitační konstanta
μ	gravitační parametr
ϕ	letový úhel
ω	argument šířky pericentra, úhlová rychlost
Ω	délka vzestupného uzlu

1 Úvod

Problematika kosmických letů představuje obrovský potenciál zkoumání, u kterého se dá očekávat, že se bude do budoucna ještě více rozrůstat. Podstatnou část pak představuje nebeská mechanika, zabývající se pohybem jednotlivých kosmických těles a určováním jejich drah. Historický vývoj v tomto odvětví přinesl mnoho zásadních pokroků, mezi něž nepochybně patří využívání ostatních těles pro ovlivnění trajektorie objektu, kterým se zabýváme. Tyto gravitační manévry představují prostředky, jak dosáhnout výkonnosti často daleko přesahující možnosti samostatné družice. Hlavní pozornost je pak zaměřena na využití velkých nebeských těles, které mají obrovský potenciál tyto družice ovlivňovat., tedy planet. V této práci se však zaměříme na o něco skromnější, ale o to nám bližší, cíl – Měsíc.

Druhá kapitola představuje úvod do problematiky gravitačních manévru, jejich základní předpoklady využití a také jejich zákonitosti. To vše doplníme vzorci, které nás budou doprovázet dále v práci. Další kapitola popisuje mise, které těchto manévru využily nebo teprve využijí při svém putování Sluneční soustavou tak, aby byly schopné dosáhnout svých stanovených cílů, které by častokrát nebyly jinak proveditelné. Čtvrtá kapitola tvoří první hlavní část práce, na jejíž začátku se stručně seznámíme s vlastnostmi a parametry Měsíce. Poté již následuje návrh jednotlivých manévru pro urychlení či změnu inklinace s pomocí gravitačního vlivu Měsíce a jejich zhodnocení. Pokusíme se zaměřit na to, jak jsou tyto manévry z hlediska nebeské mechaniky proveditelné a pokud ano, jak mohou být prospěšné. V páté kapitole se seznámíme se způsoby popisu polohy satelitů tak, abychom s nimi následně dokázali pracovat, respektive je správně umístit do prostoru, což je základní předpoklad pro zhodnocení vlivu Měsíce na jejich trajektorii. Seznámíme se také s jevy, které v reálu tuto polohu ovlivňují. Zde se práce odchyluje od původně zadaného názvu kapitoly, kdy autorovi přišlo zbytečné se zaměřit pouze na nevyužívané satelity. Následující šestá kapitola nás provádí návrhem funkce do programu Matlab, která byla za účelem simulace a ověření vypočítaných hodnot vytvořena. Funkce samotná má však potenciál větší, neboť se dá využívat pro základní simulaci působení dynamických sil na objekt pohybující se v soustavě Země-Měsíc, tedy mimo zjednodušené modely beroucí v potaz vždy pohyb družice vzhledem k jednomu centrálnímu objektu. V druhé části této kapitoly tedy vkládáme teoreticky navržené manévry ze čtvrté kapitoly a porovnáváme je s výstupy simulace. Sedmá kapitola představovala zhodnocení potenciálu využití těchto manévru na dvou satelitech Galileo, které byly v době zadání práce vlivem anomálie nosné rakety umístěny na nevhodnou oběžnou dráhu. Ta byla již opravena, takže se v kapitole zaměříme spíše na vyhodnocení, jestli bylo použití Měsíce pro změnu této oběžné dráhy ve chvíli před její opravou možné.

2 Teorie gravitačního manévru

Pokud se potřebujeme ve vesmíru dostat od jednoho tělesa k druhému, musíme vyslanému objektu udělit na počátku určitou rychlost, která nám zajistí, že se družice v idealizovaném případě pohybem podle Keplerových zákonů dostane až k cíli. A obecně čím dále je uvažovaný cíl, tím více družici budeme muset urychlit. Rychlost zpravidla získáme použitím raketových motorů, které fungují na principu akce a reakce – motor urychlí palivo v opačném směru, než je zamýšlený směr družice. Opět obecně můžeme konstatovat, že na cestu ke vzdáleným planetám, jako je Uran nebo Neptun, budeme potřebovat, v závislosti na efektivitě pohonu, velké množství paliva. Tímto se můžeme dostat k omezení, že mise tohoto rázu by byla extrémně finančně nákladná (pokud ne rovnou fyzikálně nemožná z důvodu potřeby vynést obrovské množství paliva do vesmíru). Naštěstí existuje metoda, která umožňuje si potřebnou rychlost „vypůjčit“ od vhodných objektů ve vesmíru.

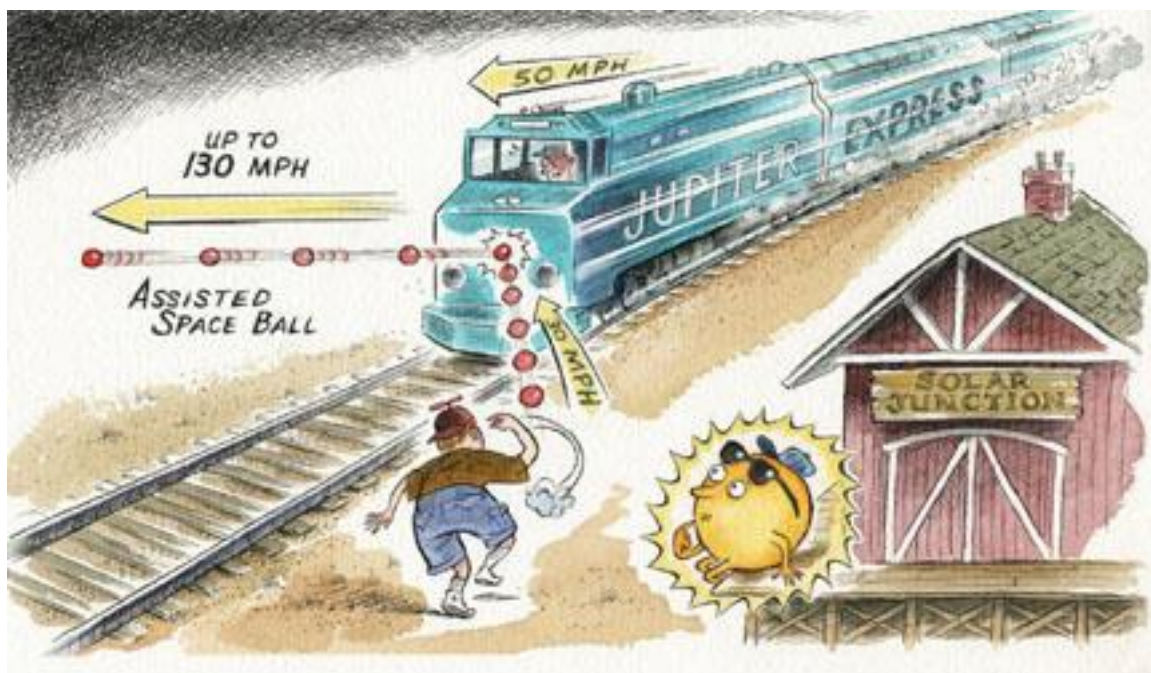
Tato metoda, nazývaná gravitační manévr, nebo také gravitační prak, je manévrem běžně používaným při meziplanetárních letech ke vnějším planetám Sluneční soustavy. Principiálně umožňuje využití pohybu a gravitačního působení pomocných těles (planet) ke změně vlastní dráhy a rychlosti vzhledem k referenčnímu tělesu (Slunci). K podrobnějšímu vysvětlení se dostaneme později v této kapitole, nejprve se však podívejme na jednoduchou analogii tohoto jevu.

2.1 Analogie jedoucího vlaku

Představme si situaci, kde jsme na železničních kolejích, a naproti nám stojí nehybný vlak. V ruce máme míč, který hodíme směrem k tomuto vlaku rychlostí 30 mil za hodinu, a ten se od něj odrazí. Pokud jsme míč hodili přímo a odraz byl elastický (čili se při něm neztratila žádná energie utlumením tohoto odrazu), míč se k nám bude vracet opačným směrem, ale stejnou rychlostí, jakou byl hozen – 30 mil za hodinu.

Nyní situaci upravme tak, že vlak bude v pohybu a bude se k nám přibližovat vlastní rychlostí 50 mil za hodinu. Míč opět hodíme stejným směrem a rychlostí. Jakou rychlostí se k nám míč vrátí? V tomto případě je již situace komplikovanější, a abychom ji správně pochopili, musíme si uvědomit, že v systému existují dvě inerciální soustavy – naše, kde stojíme na pevném bodě na kolejích a strojvedoucího, který sedí v kabině vlaku a pohybuje se naším směrem rychlostí 50 mil za hodinu. Z našeho pohledu míč letí k vlaku rychlostí 30 mil za hodinu. Pro strojvedoucího, který je sám v pohybu, se však míč přibližuje rychlostí 80 mil za hodinu (vzájemná rychlost přibližování se míče a vlaku). Pokud by vlak stál, míč by se z pohledu strojvedoucího odrazil stejnou rychlostí, jakou se k vlaku přiblížil – 80 mil za hodinu. To samé však platí i v případě, kdy se vlak pohybuje rovnoměrně přímočaře (čili pořád stejnou rychlostí),

neboť pokud by strojvedoucí neměl informaci o okolním prostoru a viděl jen přibližující se míč, nedokázal by stejně sám o sobě určit, jestli vlak stojí, nebo jestli je právě v rovnoměrně přímočarém pohybu. Po odrazu se tedy míč vzdaluje od vlaku rychlostí 80 mil za hodinu a samotný vlak se stále pohybuje stejným směrem vlastní rychlostí 50 mil za hodinu. Pokud se opět vrátíme do naší inerciální soustavy, zjistíme, že míč se k nám přibližuje tedy součtem těchto dvou rychlostí – 130 mil za hodinu. Část z toho tvoří původní rychlost míče (30m/h), která má však opačný směr a část je urychlení nárazem od vlaku (100m/h). Celou situaci můžeme přehledně vidět na obrázku 1.



Obrázek 1 - Analogie gravitačního praku [1]

Analogicky k této situaci platí, že kdyby vlak couval rychlostí 10 mil za hodinu, pro strojvedoucího by se míč přibližoval rychlostí 20m/h a touto rychlostí by se také odrazil. Od nás se však strojvedoucí stále vzdaluje, takže z našeho pohledu je výsledná rychlost míče 10 mil za hodinu naším směrem. Když se prozatím omezíme na tyto zjednodušené situace, vyjde nám vztah pro výslednou velikost rychlosti následovně:

$$v_k = v_p + 2U \quad (2.1)$$

kde v_k představuje výslednou rychlost míče, v_p rychlost počáteční a U je rychlost tělesa, které využíváme pro urychlení/zpomalení.

Jenže odkud se tato rychlost vzala? Obecně víme, že musí platit 2 hlavní fyzikální zákony zachování – hybnosti a energie a že rychlost nemůže vzniknout jen tak. Pojdme si tedy rozebrat, jak tyto zákonitosti do této situace zapadají.

2.1.1 Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hybnosti říká, že celková hybnost izolované soustavy se nemění. To znamená, že pokud jeden objekt v soustavě hybnost získá, druhý ji musí zákonitě ve stejné míře ztratit. V našem případě izolovanou soustavu tvoří míček a vlak. Podle zákona zachování tedy celková hybnost systému před a po nárazu zůstane stejná. Označme si tedy proměnné indexy p-počáteční stav a k-konečný stav a dejme do rovnováhy obě chvíle:

$$v_p m + U_p M = v_k m + U_k M \quad \rightarrow \quad \Delta U = \frac{m}{M} (v_k - v_p) \quad (2.2)$$

Písmena M a m vyjadřují hmotnost vlaku, respektive míče. Odhadem se může rozměrově jednat o stovky tun u vlaku a půl kila u míče. Pokud tedy vezmeme poměr hmotností m/M z pravé rovnice a dosadíme za něj tyto hodnoty, vyjde nám číslo tak malé, že ho můžeme považovat za nulu. Bez ohledu na změnu rychlosti míče nám pak vychází změna rychlosti vlaku nulová.

Získaná rychlost tedy vychází převzetím hybnosti vlaku, nicméně tato ztráta hybnosti je u vlaku tak malá, že se dá reálně zanedbat.

Nakonec přece jen dává smysl, že drobná míčuda nijak prakticky neovlivní masivní rozjetý vlak. Pokud bychom proti němu pustili například auto, pochopitelně by to tak již neplatilo a poměr hmotností by se zanedbat nedal.

U gravitačního praku, kde je rozdíl hmotností ještě markantnější (hmotnost celé planety oproti několikatonové družici), to platí o to více. NASA uvedla, že například družice Voyager zpomalila Jupiter při svém gravitačním manévru o přibližně 30 centimetrů za 10^{18} let. [2]

2.1.2 Zákon zachování energie

V předchozím případě jsme si ukázali, že energie, která je původcem našeho zrychlení, skutečně pochází z hybnosti pomocného tělesa, i když my na něj máme jen nepatrný vliv. Musíme však poznamenat, že i když tento vliv vzniká interakcí s pomocným tělesem, jeho skutečné následky jsme schopni posoudit, pouze když se na situaci podíváme z jiné referenční roviny. V samotném systému se objekt vzdaluje stejnou rychlostí, jako se přibližoval, tak jak nám to udává zákon zachování energie. Zde již naše analogie z vlakem poněkud pokulhává, ale stále můžeme poznamenat, že kinetická energie na cestě k vlaku je po elastické srážce stejná, jako na cestě od vlaku.

Při skutečném gravitačním manévru musíme brát v úvahu, že družice má kromě kinetické energie (rychlosti) i energii potenciální (výšku). Jelikož se směrem k centrálnímu tělesu pohybuje přibližně po hyperbole, jak se dostává blíže k pericentru, její rychlost roste

a maximum dosahuje právě v bodě největšího sblížení – a to se získáním kinetické energie v přímé úměře ke ztrátě potenciální energie. Poté se opět postupně vzdálí až do bodu, kdy tento systém opustí se stejnou rychlostí, jako do něho vstoupila. Pokud tedy nebudeme uvažovat ostatní vlivy (například ztráta energie zbrzděním o atmosféru), družice je vzhledem k centrálnímu tělesu v rámci inerciální soustavy energeticky konzervativní – svou energii nepředává, pouze ji mění z jednoho druhu na jiný. To zároveň znamená, že jev gravitačního praku je umožněn jen při změně referenčního pohledu – v izolované soustavě není možné hybnost tělesa tímto způsobem převzít.

V nebeské mechanice udává tento poměr mezi rychlostí a vzdáleností tělesa (čili zachování orbitální energie) pro keplerovské oběžné dráhy tzv. vis-viva rovnice,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.3)$$

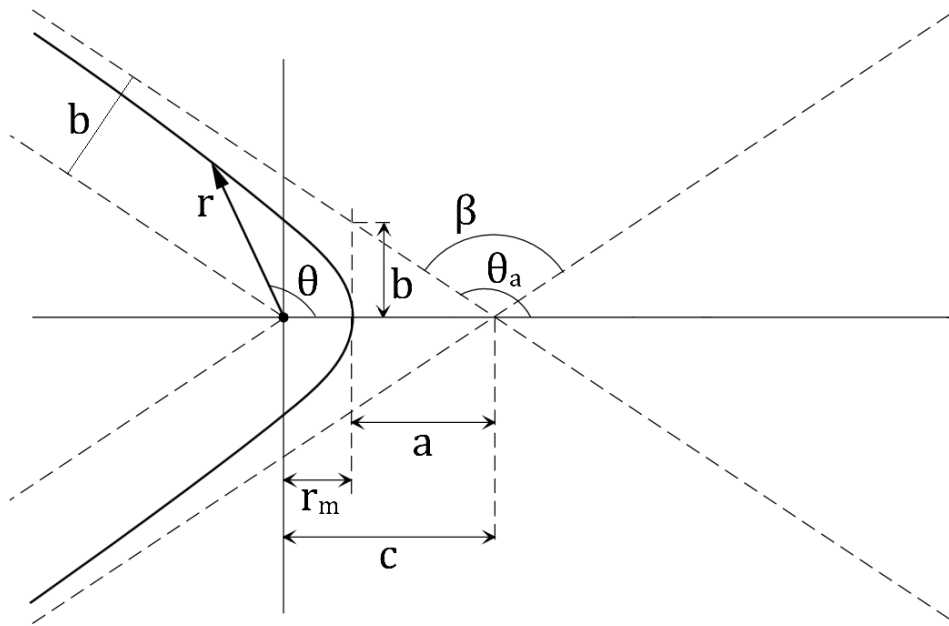
kde v je rychlost tělesa v rámci inerciální soustavy, r je jeho vzdálenost od ohniska, a je hlavní poloosa kuželosečky (pro hyperbolu je konvenčně zapisována se znaménkem mínus) a μ je gravitační parametr systému (součin gravitační konstanty a hmotnosti systému).

2.2 Gravitační manévr v rovině

Abychom vůbec mohli začít pracovat s tím, jak se kosmické těleso chová díky efektu gravitačního praku, musíme si nejprve říci, jak se bude tato družice pohybovat v referenční soustavě použitého tělesa pro manévr. Do tohoto systému se dostaneme urychlením naší družice z originální dráhy na vhodnou trajektorii střetnutí. V praxi to znamená, že ve chvíli, kdy těleso vstoupí do gravitačního vlivu pomocného objektu, jeho relativní rychlost vůči němu bude vždy vyšší než je úniková rychlost od tohoto objektu a podle keplerovské nebeské mechaniky se tedy v závislosti na tomto tělese bude vždy pohybovat po hyperbolické dráze. Přejít mezi hyperbolickou a eliptickou dráhou tvoří parabola, která odpovídá situaci, při které by při opuštění/vstupu do sféry vlivu centrálního tělesa měla družice nulovou rychlost.

2.2.1 Pohyb po hyperbole

Hyperbolická dráha tedy představuje trajektorii, kdy kosmická družice překročila pro dané centrální těleso únikovou rychlost (parametr excentricity > 1) – je to křivka, která není v rámci inerciální soustavy uzavřená. Podívejme se na příklad takové hyperboly na obrázku 2, kde jednotlivé důležité prvky představují:



Obrázek 2 - hyperbolická dráha

r – radiální vzdálenost obíhajícího tělesa od centrálního tělesa (které je umístěné v ohnisku)

r_m – minimální vzdálenost od centrálního tělesa, čili pericentrum hyperboly

θ – úhel v polárních souřadnicích, určující polohu obíhajícího tělesa od průchodu pericentrem

a – hlavní poloosu hyperboly

b – vedlejší poloosu hyperboly, neboli také poloměr zaměření

θ_a – úhel natočení asymptot vzhledem k ose symetrie (přímky apsid)

β – úhel pootočení jedné asymptoty vzhledem k druhé

Obecná rovnice hyperboly má tvar [3],

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.4)$$

ve které figuruje i již zmiňovaný parametr excentricity e , který získáme dosazením polohy r o velikosti největšího přiblížení (r_m) a odpovídajícího úhlu $\theta = 0^\circ$. Poté nám pro e vychází následující vztah (a analogický vztah s použitím logických vztahů na obrázku 2):

$$e = 1 + \frac{r_m}{a} \quad \left(e = \frac{c}{a} \right) \quad (2.5)$$

Velikost hlavní poloosy a je určena energií (rychlostí) objektu při vstupu do gravitačního vlivu centrálního tělesa (pro obecnou hyperbolu v nekonečnu) a jeho celkovým gravitačním potenciálem (silou). Vzorec získáme právě dosazením nekonečné hodnoty r do rovnice zachování orbitální energie (2.3), jak byla definována v kapitole o zákonu zachování energie.

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{\infty} - \frac{1}{a} \right) \rightarrow a = \frac{\mu}{v_{\infty}^2} \quad (2.6)$$

Rychlost v_{∞} se nazývá přebyteková hyperbolická rychlost a představuje rychlost (a tedy také kinetickou energii), kterou má těleso v nekonečné vzdálenosti. V nekonečnu je vektor této rychlosti totožný se směrem asymptoty, a jelikož v našem případě řešíme trajektorii jen na hranici gravitačního vlivu použitého centrálního tělesa, stanovíme důležitý předpoklad, že při vstupu do této sféry zaujímá kosmické těleso přesně tento směr a rychlost.

Samotný tvar hyperboly je stanoven dvěma parametry – excentricitou a délkou velké poloosy.

2.2.2 Stanovení úhlu pootočení β

S použitím předpokladu z předchozí kapitoly víme, že těleso vstoupí do sféry vlivu centrálního tělesa ve směru jedné z asymptot, proletí v pericentru tohoto tělesa a opět odletí ve směru druhé asymptoty. To znamená, že úhel, o jaký jsou asymptoty vůči sobě natočeny, je zároveň úhlem pootočení dráhy naší družice. Z dříve stanoveného vztahu pro hyperbolu také můžeme odvodit úhel, který svírají asymptoty s přímkou apsid, kdy opět využijeme dosazení polohy r v nekonečnu.

$$1 + e \cos \theta = \frac{a(e^2 - 1)}{\infty} \rightarrow \theta_a \equiv \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right) \quad (2.7)$$

Úhel polohy tělesa v polárním systému je totožný s úhlem natočení asymptot, neboť vektor polohy r je v nekonečnu rovnoběžný s přímkou odletové asymptoty, i když jeho počátek je na přímce apsid v ohnisku – čili posunutý o parametr c , jak je opět zřetelně vidět na obrázku 2. Při návrhu gravitačního manévru víme, jak nízko nad ohniskem hyperboly chceme proletět (r_m – které musí být větší než je poloměr použitého tělesa + bezpečnostní přídavek) a víme, jakou rychlost vzhledem k centrálnímu tělesu máme. Poupravením předchozího vztahu o přepočítání úhlů a dosazením rovnic tak, aby úhel záležel jen na známých parametrech, dostáváme finální rovnici pro určení úhlu pootočení:

$$\beta = 2 \sin^{-1} \left(-\frac{1}{1 + \frac{r_m v_\infty^2}{\mu}} \right) \quad (2.8)$$

Ta zároveň při zadání nejmenšího přípustného r_m udává maximální úhel stočení, jaký je pro danou rychlost a gravitační parametr (těleso) možný.

2.2.3 Uvážení pohybu pomocného tělesa

Všechny výpočty a předpoklady byly doposud odvozované pouze vzhledem k obíhanému tělesu v klidu. Pro gravitační urychlení je však stále podstatný přechod mezi dvěma referenčními systémy a předání hybnosti pohybujícím se hmotným tělesem. Pro jednoduchost uvažujme družici obíhající po eliptické dráze okolo Slunce, jejíž trajektorie je taková, že se v jednu chvíli přiblíží ke vzorové planetě na kruhové dráze, která ovlivní její pohyb. Tuto gravitační sféru vlivu (sphere of influence = SOI), o které stále mluvíme, kdy dominantní působící síla přechází z jednoho tělesa na druhé, definujeme jejím poloměrem následovně:

$$r_{soi} = a \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.9)$$

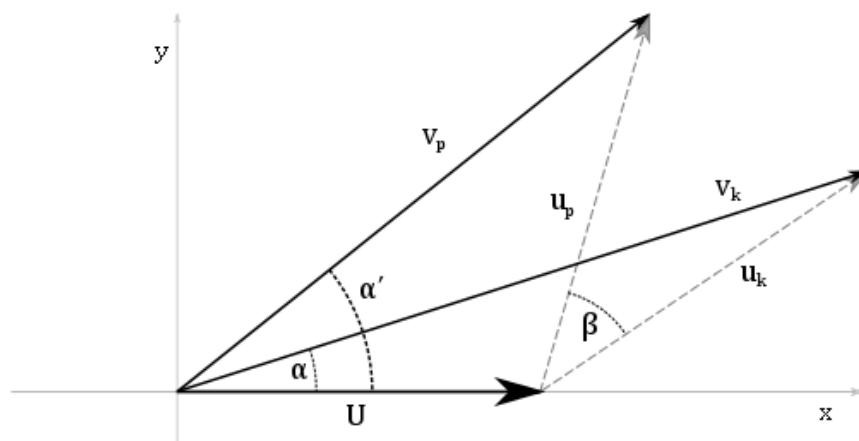
kde a je hlavní poloosa oběžné dráhy menšího tělesa vůči většímu a m/M je podíl hmotnosti menšího a většího tělesa (např. právě planety a Slunce).

Na této hranici provedeme přepočty rychlostí z referenčního systému souřadnic Slunce do soustavy planety. Pokud si stanovíme použité rychlosti jako:

- v_p – počáteční vektor rychlosti družice vzhledem k Slunci
- v_k – konečný vektor rychlosti družice vzhledem k Slunci
- u_p – počáteční vektor rychlosti družice vzhledem k planetě
- u_k – konečný vektor rychlosti družice vzhledem k planetě
- U – vektor rychlosti planety vzhledem k Slunci

a provedeme jednoduchý vektorový součet, jak je znázorněn na obrázku 3, vyjde nám rychlost vzhledem k planetě jednoduše jako:

$$u_p = v_p - U \quad (2.10)$$



Obrázek 3 - součet vektorů rychlostí gravitačního manévru

V souladu se závěry z předchozích kapitol proběhne družice okolo planety a v závislosti na konkrétní rychlosti, radiusvektoru pericentra a gravitačním parametru stočí svoji trajektorii o úhel β . Jak již bylo několikrát zdůrazněno, velikost rychlosti se tímto manévrem v systému souřadnic planety nezmění. To je také vidět na obrázku 3, kde evidentně $u_p = u_k$. Vektorový přepočítání zpět na rychlost vzhledem ke Slunci je analogický k přepočtu do souřadnic planety, nicméně za použití jednoduché trigonometrie jsme schopni v_k vyjádřit kvantitativně jako [2]:

$$v_k = \sqrt{v_p^2 + 2U \left(U(1 - \cos \beta) + v_p(\cos(\alpha' - \beta) - \cos \alpha') \right)} \quad (2.11)$$

Konečný úhel natočení α vektoru rychlosti v_k vzhledem k dráze planety v systému souřadnic Slunce je pak [2]:

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{U \sin \beta + v_p \sin(\alpha' - \beta)}{v_k} \quad (2.12)$$

Obecně, bez ohledu na úhel příletu k využití planetě, pak platí, že čím více je tento úhel menší (a tím pádem čím blíže je vektor rychlosti po urychlení k vektoru rychlosti planety), tím výraznější zvýšení rychlosti se nám povede z gravitačního manévru získat. Při konkrétním návrhu budeme často postupovat opačným směrem, než jakým jsme si rovnice odvozovali. To znamená, že při vyslání družice na trajektorii střetu s pomocným tělesem budeme vědět rychlost a úhel, jaký bude při vstupu do sféry vlivu družice svírat s dráhou planety, jejíž rychlost známe pochopitelně také. Pro daný úhel pootočení β (určený nejnižším přiblížením) nám pak vychází pro výsledný úhel α škála rychlostí, se kterými můžeme pracovat dále. Pochopitelně není nutnost vždy využít ten úhel β , který odpovídá nejnižšímu pericentru, ale můžeme výstup ovlivnit i průletem ve větší vzdálenosti (s tím efektem, že čím dále to bude, tím nižší úhel β dokáže být).

3 Historické využití gravitačního manévru

Dobývání vesmíru je ekonomicky a současně technologicky náročný proces. Jak jsme již zmiňovali, obzvláště cesty k vnějším planetám kladou vysoké nároky na úpravy rychlosti, potřebné pro změnu trajektorie pro dosažení těchto kosmických těles. Nicméně i cesty k planetám bližším Slunci mohou vyžadovat velkou dávku náročných manévru, obzvláště pokud se chystáme skončit na oběžné dráze kolem nich. To jsou důvody, které vedou inženýry k návrhům alternativních drah, které tyto nároky na změnu rychlosti obvykle na úkor času snižují, což vede buď ke zlevňování daných misí, nebo naopak umožňuje provedení misí, které by jinak nebyly možné. V této kapitole se podíváme na výběr nejzajímavějších nebo nejzásadnějších misí, které přesně za těmito účely využili gravitačního urychlení pomocí jiného kosmického tělesa.

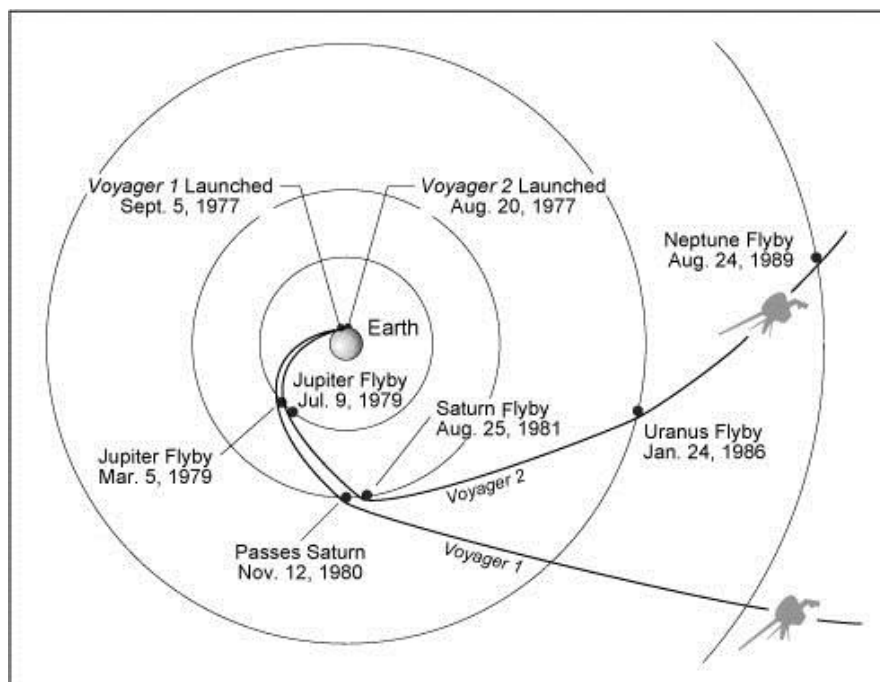
3.1 Mariner 10

Americká sonda Mariner 10 byla prvním lidským přístrojem, který využil gravitačního manévru okolo jiné planety pro změnu své orbity. Jejím cílem bylo prozkoumání planety Merkur. Odstartovala 3. listopadu 1973 z floridského mysu Caneveral a po dvou zážezích na oběžné dráze Země se vydala na tříměsíční cestu k Venuši. K té dorazila 5. února 1974 s pericentrem ve vzdálenosti 5768 kilometrů nad povrchem planety. Jelikož se jednalo o první využití tohoto manévru, cílem letu bylo mimo shromáždění dat o Merkuru a Venuši i získání zkušeností s trajektoriemi využívajícími gravitačního praku s pomocí více těles pro použití v dalších misích. Z tohoto důvodu, a také protože potřebný koridor pro správné urychlení k Merkuru byl pouze 200 km široký, měla družice nadstandardní rezervy paliva. Po úspěšném manévru, který snížil heliocentrickou rychlost Marineru z 37 km/s na 32,3 km/s, se sonda vydala na dráhu k Merkuru, okolo kterého provedla první oblet 29. března 1974 ve vzdálenosti 704 km nad jeho povrchem. Poté následovaly ještě další dva oblety Merkuru, 21. září 1974 a 16. března 1975, načež bylo se sondou ukončeno rádiové spojení z důvodu vyčerpání zásob paliva. Zvláštností mise bylo mimo jiné i použití solárních panelů pro kontrolu orientace vlivem tlaku solárního záření. [4]

3.2 Voyager 1 a 2

Zřejmě nejznámější přístroje, které využily unikátního postavení planet k nevídanému průzkumu Solární soustavy, byly sesterské sondy Voyager 1 a 2. Jednalo se o přístroje odvozené z předchozího programu Mariner, které měly primárně za úkol prozkoumání Jupiteru a Saturnu, včetně jeho měsíce Titanu. Hlavní sonda Voyager 1 odstartovala 5. září a k Jupiteru se přiblížila na vzdálenost 349000 km 5. března 1979. Urychlením o tuto planetu se vydala na cestu k Saturnu a Titanu, k nimž se nejbližší přiblížila 12. listopadu 1980. Následně byla urychlena na hyperbolickou trajektorii vedoucí k opuštění SOI Slunce. V současné době se

jedná o nejvzdálenější lidský objekt s odstupem přes 134 astronomických jednotek od Země, i když prvním objektem, který opustil Sluneční soustavu, byl Pioneer 10. Voyager 2, ačkoliv startoval o dva týdny před jeho sesterskou sondou, představoval záložní stroj pro případ poruchy prvního jmenovaného. Přestože startoval jako první 20. srpna 1977, k Jupiteru se dostal vlivem méně excentrické prvotní dráhy až po Voyageru 1 průletem 9. července 1979 ve výšce 570000 km nad ním. Urychlení o Saturn proběhlo 25. srpna 1981, a jelikož mise první sondy byla úspěšná, mohl být Voyager 2 přesměrován na dráhu protínající nejprve 24. ledna 1986 orbitu Uranu, o něž se urychlením vydal až k Neptunu, nad kterým proletěl ve výšce pouhých 4951 km 25. srpna 1989. Jako jediná sonda do této doby tak navštívila všechny vnější planety Sluneční soustavy. Obě mise byly velice úspěšné, přinášející nové informace o vnějších planetách a i jejich nově objevených měsících. Fascinující je, že do této chvíle stále fungují a posílají na Zemi zpět data o vesmíru v prostoru za vnějšími planetami Sluneční soustavy.[5] Trajektorie obou sond Voyager jsou vyobrazeny na obrázku 4.



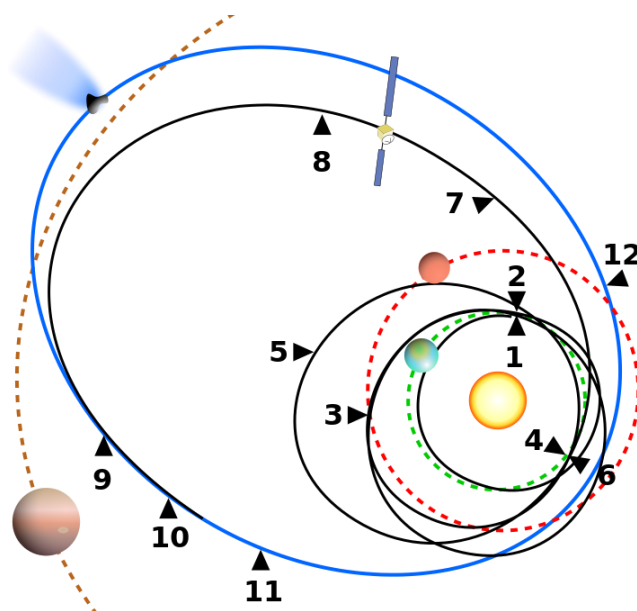
Obrázek 4 - dráhy sond Voyager 1 a 2 [6]

3.3 Ulysses

Ulysses byla unikátní sonda, mající za úkol prozkoumat polární oblasti Slunce. Místo toho, aby byla přímo usazena na velice inklinální trajektorii, což by představovalo manévry s obrovskými nároky na změnu rychlosti, byla urychlena pouze k Jupiteru, o který provedla gravitační manévry s výstupem do nové, k rovině ekliptiky téměř pravouhlé ($80,2^\circ$), trajektorie. Manévry se uskutečnil 8. února 1992 a usadil sondu na nové dráze s periodou cca. 6 let. Kromě zkoumání samotného Slunce se sonda přiblížila i k několika kometám, u nichž nejčastěji proletěla jejich ohony. [7]

3.4 Rosseta

Nedávným příspěvkem Evropské kosmické agentury byla sonda Rosseta, s modulem pro přistání Philae, jejíž misí bylo jako první vstoupit na orbitu a pokusit se o přistání na kometě 67P/Čurjumov-Gerasimenko. Její trajektorii vidíme na obrázku 5. Vypuštěna byla 2. března 2004 z Francouzské Guyany (na obrázku bod 1) a cesta ke kometě byla umožněna pomocí tří urychlení o planetu Zemi (2,4 a 6) a jednoho o Mars (3) ve výšce pouhých 250 km. Na své cestě proletěla zároveň poblíž dvou asteroidů, 2867 Šteins (5) a 21 Lutetia (7), kterých využila k jejich prozkoumání. Poté zahájila fázi dočasné hibernace (8 až 9). Na vlastní orbitu komety vstoupila 10. září 2014 s pericentrem pouhých 29 km (10). 12. listopadu pak vypustila přistávací modul, který s částečným úspěchem na kometě přistál (11). Kontakt s modulem byl bohužel kvůli špatnému vychýlení solárních panelů vůči Slunci zanedlouho ztracen, nicméně samotná sonda poskytuje data o chování komety doposud, s plánovaným dopadem na kometu, umožňujícím získ dalších dat, v září 2016 (12). [8]



Obrázek 5 - trajektorie sondy Rosseta [9]

3.5 Solar Probe Plus

Tato sonda je budoucím projektem, vypuštění se v této chvíli plánuje na 31. července 2018. Jejím úkolem by bylo přiblížit se až do vzdálenosti cca. 6000000 km nad středem Slunce, blíže než jakýkoliv jiný lidmi vyrobený stroj. Snížení perihelia na tuto úroveň bude vyžadovat sérii gravitačních praků, které družici postupně zpomalí. Využívaným tělesem bude Venuše, okolo které sonda proletí v období od 27. září 2018 až 31. října 2024 celkem sedmkrát. Pokud se mise zdaří, bude se v bodě nejbližšího přiblížení sonda pohybovat rychlostí přes 200 km/s, což by z ní udělalo nejrychleji se pohybující lidmi vytvořený objekt. Specifika mise kladou vysoké nároky na konstrukci tělesa, neboť v blízkosti Slunce bude vystavena velkým intenzitám solárního záření. [10]

4 Použití vlivu Měsíce pro změnu orbity okolo Země

Měsíc je jediným přirozeným satelitem planety Země a zároveň jediným mimozemským tělesem, na kterém stanul člověk (a to pouze v letech 1969-1972). Původ vzniku Měsíce není zcela jasný, nicméně za pravděpodobné se považuje zformování satelitu ze zbytků srážky Země s jiným vesmírným tělesem. Když se bavíme o možnosti ovlivnění dráhy družice vlivem pohybu a gravitace Měsíce, v úvahu připadají hlavně 2 manévry. Těmi jsou urychlení (tedy gravitační prak) a změna inklinace. V této kapitole si obě možnosti rozebereme, nejdříve se však musíme seznámit s vlastnostmi našeho pomocného objektu.

4.1 Charakteristiky Měsíce

Základní vlastnosti Měsíce můžeme rozdělit do dvou hlavních kategorií – fyzikální a orbitální charakteristiky. Zatímco fyzikální charakteristiky popisují primárně Měsíc samotný, ve druhé kategorii najdeme především popis toho, jak se měsíc pohybuje vzhledem k Zemi.

4.1.1 Fyzikální charakteristiky

Základní fyzikální charakteristiky Měsíce jsou již dlouhou dobu známé a můžeme je získat například na stránkách datového archivu vědeckých vesmírných misí amerického národního úřadu pro letectví a kosmonautiku [11]. Přehledně jsou vypsány na následující tabulce 1.

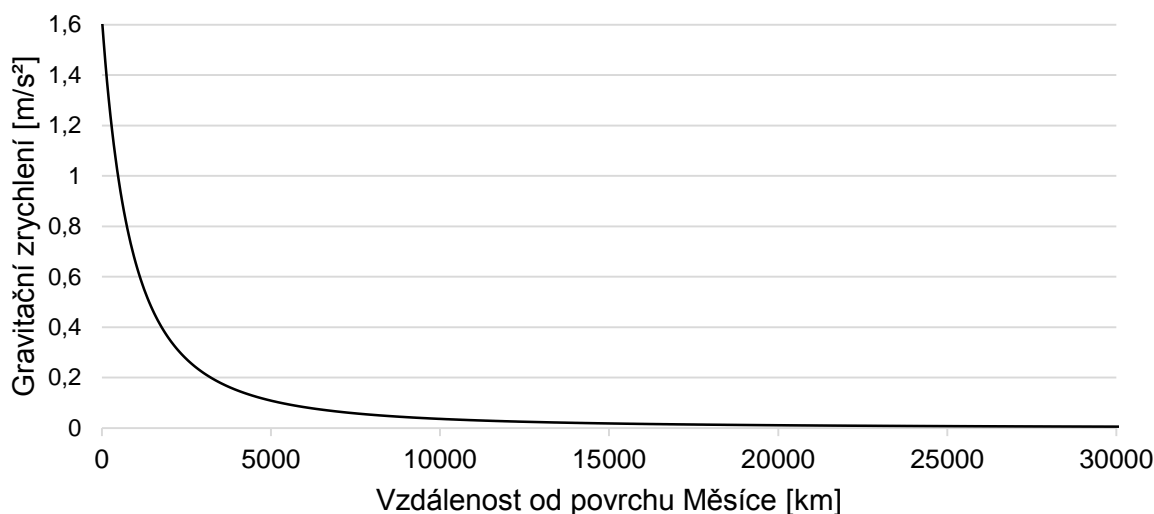
Tabulka 1 - Fyzikální charakteristiky Měsíce

Hmotnost	7346x10 ¹⁹ kg
Rovňkový poloměr	1738,1 km
Polární poloměr	1736,0 km
Střední poloměr	1737,4 km
Gravitace na povrchu	1,62 m/s ²
Gravitační parametr	4900 km ³ /s ²

Z tabulky je patrné, že Měsíc je podobně jako Země přes póly plošší, prostým výpočtem odpovídá jeho zploštění hodnotě 0,0012 (Země má 0,003). Jako nejvyšší bod Měsíce byl v roce 2010 zjištěn vrchol sahající 10,375 km nad střední poloměr, čili do vzdálenosti cca. 1747.8 km nad středem [12]. Použitím Newtonova gravitačního zákona zbaveného závislosti na hmotnosti druhého objektu (4.1) jsme schopni získat závislost gravitačního zrychlení na vzdálenosti od střední hodnoty povrchu Měsíce. Tato závislost je až do vzdálenosti 30000 km od povrchu vidět na obrázku 6.

$$g_m = \kappa * \frac{m_M}{r_M^2} \quad (4.1)$$

kde g_m vyjadřuje gravitační zrychlení, κ gravitační konstantu ($\sim 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$), m_M hmotnost Měsíce a r_M vzdálenost od jeho středu. Výpočtem ($\mu = \kappa * m$) také získáváme přesnější vyjádření gravitačního parametru, který odpovídá hodnotě $4902,78 \text{ km}^3/\text{s}^2$.



Obrázek 6 - graf závislosti gravitačního zrychlení na vzdálenosti od povrchu Měsíce

Pomocí rovnice (2.9) stanovené v kapitole 2.2.3 jsme schopni vypočítat gravitační sféru vlivu Měsíce, která sahá přibližně do vzdálenosti 66180 km od jeho středu. Jen pro zajímavost, pokud uvažíme dráhu měsíce jako kruhovou, gravitační zrychlení způsobené Měsícem je na tomto rozhraní $\sim 0,0011 \text{ m/s}^2$ a od Země $\sim 0,0039 \text{ m/s}^2$.

4.1.2 Orbitální charakteristiky

Při pohledu na orbitální charakteristiky Měsíce se pochopitelně snažíme zaměřit na vztahy k centrálnímu tělesu, které Měsíc obíhá – tedy Zemi. Ve skutečnosti však tento systém musíme vnímat jako dvojici vesmírných těles, které obíhají okolo jejich hmotného středu – barycentra. To se nachází přibližně 4670 km od středu Země – barycentrum je tedy umístěno ještě pod povrchem naší planety. Měsíc se pak pohybuje po eliptické dráze s hlavní poloosou 384400 km. Nejbližše Zemi se přitom Měsíc dostane na vzdálenost 363300 km (perigeum) a nejdále 405500 km (apogeum). Tyto hodnoty představují střední hodnotu perigea a apogea, neboť oběžná dráha Měsíce se v průběhu let mění. Odpovídající excentricita elipsy má hodnotu 0,0549 a doba oběhu je 27,3217 siderického dne (dne vzhledem ke hvězdám). Pokud vezmeme v potaz, že Země se za tento čas posune po své oběžné dráze okolo Slunce o určitý úsek a že na Zemi sledujeme čas přechodem Slunce přes určitou polohu vzhledem k Zemi, vyjde nám hodnota oběhu v pozemském čase na přibližně 29 a půl dne. Pro nás je také důležité zmínit parametr, který zásadně ovlivňuje potenciál případného gravitačního manévru: orbitální rychlost se pohybuje od 0,964 do 1,076 km/h, se střední hodnotou 1,022 km/s.[11]

Rovina oběhu Měsíce se lépe definuje vzhledem k rovině ekliptiky Země (rovině oběhu okolo Slunce) – k ní svírá úhel 5.145° . V místě, kdy se měsíc dostane nad ekliptiku, se říká vzestupný uzel a v bodě vstupu do její spodní části říkáme sestupný uzel. Přímka, určená těmito dvěma body, však není neměnná a postupně se otáčí po směru hodinových ručiček, přibližně jednou za 18,6 let. Když uvážíme, že sama Země je nakloněna k ekliptice o úhel $23,5^\circ$ a směr tohoto sklopení se s časem nemění, zjistíme, že sklon dráhy Měsíce je k zemskému rovníku také proměnný. Konkrétně se pohybuje v průběhu let mezi hodnotami $18,28^\circ$ až 28.58° . [11]

4.2 Urychlení

Abychom mohli provést gravitační manévry, tak jak jsme si ho popsali v kapitole 2.2, musíme se nejprve k Měsíci přiblížit. To se dá v zásadě udělat dvěma způsoby, manévrem urychlovacím a manévrem zpomalovacím. Manévry urychlovací se okolo Měsíce obtáčí tak, že jejich výsledná trajektorie míří po směru pohybu Měsíce, zpomalovací manévry tuto dráhu vychylují proti jeho směru. Nejjednodušším způsobem, jak se do blízkosti Měsíce dostat, je zřejmě Hohmannova přechodová dráha, jakožto trajektorie, která spojuje dvě kruhové oběžné dráhy půleliptickou křivkou, dotýkající se tečnou v nejnižším bodě spodní a v nejvyšším horní oběžné dráhy. Obecně se jedná o dvouimpulzní manévry, vyžadující nejprve urychlení v perigeu a následné druhotné zrychlení pro zakulacení dráhy v apogeu. V našem případě budeme aplikovat pouze první manévry, jelikož druhý bude nahrazen právě gravitačním prakem ve vlivu Měsíce. V následujících případech budeme počítat se zjednodušujícími předpoklady, že spodní kruhová dráha je již koplanární s oběžnou dráhou Měsíce (nachází se ve stejné rovině), kterou budeme považovat také za kruhovou, s poloměrem odpovídajícím délce velké poloosy. Případy budeme také řešit prozatím jen analyticky za pomoci aproximace složených kuželoseček, tedy ve chvíli, kdy se dostaneme do gravitační sféry Měsíce, budeme počítat jen s jeho působením. V tu chvíli považujeme jeho dráhu za přímočarou.

K této problematice budeme přistupovat dvěma typy manévru. První bude urychlení do vzdálenosti odpovídající přibližně jeho oběžné dráze, tedy urychlení s co nejmenšími nároky na prvotní změnu rychlosti. Manévry provedeme tak, že ve chvíli dosažení apogea se zároveň dostaneme do SOI Měsíce. V tuto dobu bude zároveň rychlost vzhledem k Zemi nejmenší. Při druhém způsobu provedeme prvotní impulzní manévry tak, že se už od počátku bude nacházet na únikové trajektorii z geocentrického systému. Takto budeme vstupovat do SOI Měsíce pod úhlem přibližně kolmým k jeho trajektorii oběhu. Rychlost vstupu do této sféry bude v tomto případě pochopitelně vyšší.

4.2.1 Urychlení přechodovou dráhou na úroveň oběhu Měsíce

Představme si družici obíhající okolo Země po kruhové dráze koplanární s ekliptikou Měsíce. Její oběžná rychlost odpovídá první kosmické rychlosti pro daný poloměr. Pokud si stanovíme,

že její výška nad povrchem Země bude např. 200 km, rychlost oběhu spodní dráhy v_{sd} se rovná za využití rovnice vis-viva (2.3):

$$v_{sd} = v_{1k} = \sqrt{\frac{\mu_Z}{r_{sd}}} = \sqrt{\frac{398600}{6571}} = 7,7885 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.2)$$

kde μ_Z je gravitační konstanta Země převedená na kilometry ($398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ [11]) a r_{sd} představuje vzdálenost od středu Země pro výšku 200 km nad povrchem, pokud použijeme střední hodnotu poloměru Země.[11] Hodnota poloměru r kruhové dráhy zároveň odpovídá vzdálenosti perigea Hohmannovy přechodové dráhy. Zároveň, jelikož je dráha kruhová, jednoduše vypočteme dobu oběhu spodní dráhy T_{sd} pomocí jejího obvodu:

$$T_{sd} = \frac{2\pi r}{v_{sd}} = \frac{41286,81}{7,7885} = 5301 \text{ s} \quad (4.3)$$

Abychom se dostali k Měsíci v požadované poloze, musíme družici urychlit z kruhové dráhy na eliptickou přechodovou dráhu. Zvolme si prozatím toto místo jako pozici apogea r_{apd} ve vzdálenosti 379000 km, tedy přibližně o 5400 km méně než je poloměr oběhu Měsíce. Polovina součtu této hodnoty a vzdálenosti perigea vyjadřuje velikost velké poloosy přechodové dráhy, která má v tomto případě délku 192785,5 km. Tím dostáváme bod v prostoru, do kterého se chceme dostat, nicméně musíme zajistit, že Měsíc bude v této poloze v námi požadované chvíli také. Ve výsledku to znamená, že musíme provést manévr urychlení s dostatečným předstihem, během kterého se Měsíc do této polohy přesune. Ten zjistíme rovnicí odvozenou ze třetího Keplerova zákona, který udává vztah mezi poloosami a časy oběhů dvou různých drah: [13]

$$T_{pd} = \sqrt{\frac{a_{pd}^3}{r_{sd}^3} * T_{sd}^2} = \sqrt{\frac{192785,5^3}{6571^3} * 5301^2} = 842407 \text{ s} \quad (4.4)$$

kde T_{pd} představuje periodu oběhu přechodové dráhy a a_{pd} její hlavní poloosu. Jelikož uvažujeme jen cestu z perigea do apogea, čas T_{pd} potřebujeme jen poloviční. Ten odpovídá přibližně době přeletu 5 dní. Tato doba nám v případě Hohmannova transferu zároveň udává úhel, jaký musí vektor polohy družice a vektor polohy Měsíce svírat v době manévru, aby se přesně dostihli. Za předpokladu, kdy doba oběhu Měsíce odpovídá té stanovené v kapitole 4.1.2, rovnice vychází:

$$\gamma_{pd} = 180^\circ - \frac{T_{pd} * 180^\circ}{T_M} = 180 - \frac{842407 * 180}{86400 * 27,3217} = 115.8^\circ \quad (4.5)$$

kde T_M značí dobu oběhu Měsíce v sekundách. Úhel γ_{pd} představuje polohu, kdy se Měsíc a družice potkají na stejné úrovni, tedy na přímce apsid přechodové dráhy, dávno po vstupu do SOI Měsíce. Jak jsme již zmínili, v našem zájmu je umístit družici tak, aby ve chvíli dosažení apogea do této sféry teprve vstoupila, to znamená, že úhel γ_{pd} musíme opravit ještě o hodnotu, o kterou se Měsíc posune za dobu přesunu odpovídající vzdálenosti SOI γ_{SOI} . Tu aproximujeme pomocí podílu vzdálenosti SOI na celkové dráze oběhu Měsíce.

$$\gamma_{SOI} = \frac{r_{SOI} * 360^\circ}{2\pi r_M} = \frac{66180 * 360}{2\pi * 384400} \cong 10^\circ \quad (4.6)$$

kde r_{SOI} představuje poloměr gravitační sféry vlivu Měsíce a r_M poloměr dráhy jeho oběhu. Pokud budeme s našimi manévry mířit vždy do vzdálenosti apogea blízké dráze oběhu Měsíce, budeme považovat tuto hodnotu za konstantní. Ve výsledku to znamená, že manévr urychlení musíme provést později, jelikož chceme, aby družice už na místě byla, když ji Měsíc dostihne. Když už víme, v jakém bodě musíme manévr provést, abychom se setkali s Měsícem na požadovaném místě, nic nám nebrání vypočítat, jakou změnu rychlosti bude samotný manévr potřebovat. K té dospějeme opět pomocí rovnice vis-viva (2.3), takže:

$$\Delta v = \sqrt{\mu_Z \left(\frac{2}{r_{sd}} - \frac{1}{a_{pd}} \right)} - v_{sd} = 3,1318 \text{ km. s}^{-1} \quad (4.7)$$

Stejným způsobem odvodíme rychlost, jakou bude mít družice v apogeu přechodové dráhy:

$$v_{apd} = \sqrt{\mu_Z \left(\frac{2}{r_{apd}} - \frac{1}{a_{pd}} \right)} = 0,1893 \text{ km. s}^{-1} \quad (4.8)$$

Nyní už tedy vstupujeme do SOI Měsíce a samotného gravitačního manévru. Způsobem vstupu, jaký jsme zvolili, jsme docílili toho, že z praktického hlediska se nepřibližuje ani tak družice k Měsíci, jakožto Měsíc k družici, vzhledem k jeho rychlosti oběhu přibližně 1 km/s. Pochopitelně na výsledném manévru to nic nemění, neboť pohyb v relativním rámu Měsíce by byl v obou případech stejný. Jak víme, pohyb družice zde bude odpovídat hyperbole, jejíž přebyteková rychlost v_∞ (rychlost v nekonečnu) odpovídá rozdílu rychlosti Měsíce U_M a družice v_{apd} v referenční soustavě Země, tzn.:

$$u_{rel} = v_\infty = U_M - v_{apd} = 0,8327 \text{ km. s}^{-1} \quad (4.9)$$

Vstupní úhel α' se rovná 180° , protože v době vstupu do SOI Měsíce (v apogeu) se družice pohybovala rovnoběžně s jeho dráhou oběhu, i když s odstupem ve vzdálenosti 5400 km a relativně proti jejímu směru. Pro stanovení úhlu pootočení β podle rovnice (2.8) nám tak chybí jediný parametr – vzdálenost periselenia r_{ps} . Ten si tentokrát nemůžeme sami zadat, jelikož je závislý na samotných dimenzích dráhy a musíme se k němu propracovat přes jednotlivé parametry hyperboly. Pomocí rovnice (2.6) vypočítáme hlavní poloosu hyperboly:

$$a_h = -\frac{\mu_M}{u_{rel}^2} = -\frac{4902,78}{0,8327^2} = -7071 \text{ km} \quad (4.10)$$

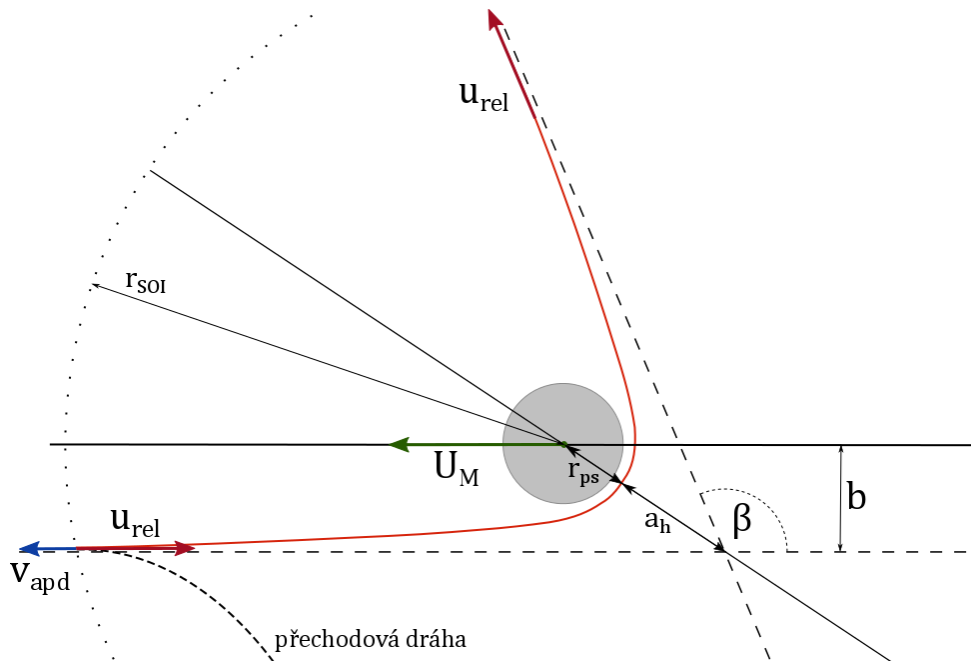
a pomocí dosaženého odstupu, který zároveň tvoří parametr poloměr zaměření b (vedlejší poloosa hyperboly) získáme hodnotu excentricity pomocí vzorce: [13]

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a_h^2}} = \sqrt{1 + \frac{5400^2}{7071^2}} = 1.2582 \quad (4.11)$$

Odtud již dostáváme vzorcem (2.5) výsledný vztah, který pro námi stanovený příklad odpovídá hodnotě periselenia:

$$r_{ps} = -a_h(e - 1) = 7071 * (1.2582 - 1) = 1826 \text{ km} \quad (4.12)$$

Pokud uvážíme nejvyšší bod Měsíce, který je vzdálený 1748 km od jeho středu, naše družice proletí nad povrchem Měsíce s rezervou 78 km. Celá situace (ne v měřítku) je přehledně znázorněna na obrázku 7.



Obrázek 7 - Urychlení přechodovou dráhou na úrovni Měsíce

V tuto chvíli známe všechny potřebné proměnné, které vstupují do rovnice pro výpočet pootočení v soustavě Měsíce β (2.8) a následně do rovnic výsledné rychlosti v_k (2.11) a konečného úhlu natočení vektoru výsledné rychlosti ke dráze Měsíce α (2.12). Pro uvedený příklad hodnoty vycházejí:

$$\beta = 105,3^\circ \quad v_k = 1,7787 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad \alpha = 41,4^\circ$$

Prostou trigonometrií na základě výsledného úhlu dráhy k trajektorii Měsíce a velikosti jeho SOI můžeme odhadnout, že při jeho opuštění bude družice přibližně 44000 km za Měsíční orbitou. Když uvážíme fakt, že úniková rychlost ze soustavy závisí jen na vzdálenosti od centrálního tělesa a jeho gravitačním parametru, můžeme na základě tohoto vztahu a předchozího odhadu stanovit, jestli gravitační manévry družici urychlil dostatečně pro opuštění vlivu Země: [13]

$$v_{\text{únik}} = \sqrt{\frac{2\mu_Z}{r}} = \sqrt{\frac{2 * 398600}{428400}} = 1,3641 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.13)$$

Jelikož $v_k > v_{\text{únik}}$, družice skutečně soustavu Země opustí a přejde do heliocentrické soustavy. Na základě další rovnice [13] vyjadřující vztah těchto rychlostí k hyperbolické přebytkové rychlosti můžeme vypočítat, jakou rychlost bude mít družice při opuštění SOI Země:

$$v_\infty = \sqrt{v_k^2 - v_{\text{únik}}^2} = \sqrt{1,7787^2 - 1,3641^2} = 1,1415 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.14)$$

S použitím stejného vztahu dojdeme k závěru, že k získání stejné hyperbolické přebytkové rychlosti na původní kruhové dráze s poloměrem 6571 km by bylo potřeba družici urychlit o 3,2851 km/s. Rozdíl této rychlosti a rychlosti urychlení přechodové dráhy nám dává velikost změny rychlosti, kterou jsme ušetřili využitím gravitačního praku:

$$\boxed{\Delta v_{\text{zisk}} = 153,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \quad (4.15)$$

Další příklady tohoto manévru v závislosti na stanovené vzdálenosti apogea jsou zobrazeny v tabulce 2. Zde si můžeme všimnout, že až do poloměru zaměření 5300 km by byla hodnota periselenia nižší, než je vzdálenost povrchu Měsíce. Družice by tedy do Měsíce v těchto případech narazila. Za pozornost stojí první případ, který znázorňuje maximální možnost urychlení, kdyby celá hmotnost Měsíce byla koncentrována do nekonečně malého bodu. Hodnota výsledné rychlosti přesně odpovídá vztahu (2.1). Všechny uvedené případy počítají se vzdáleností apogea nižší, než je vzdálenost oběhu Měsíce – tím dostaneme vždy manévry družici urychlující. Opačným směrem by byly hodnoty analogické s tím rozdílem, že bychom proletěli před Měsícem a gravitační manévry družici zpomalil.

Tabulka 2 - Parametry gravitačních manévrů pro různé vzdálenosti apogea

Parametry kosmických těles				Parametry počáteční kruhové dráhy a vstupu do SOI Měsíce							
Poloosa dráhy Měsíce [km]	Gravitační parametr Země [km ³ /s ²]	Gravitační parametr Měsíce [km ³ /s ²]	Čas oběhu Měsíce [s]	Rychlost v apogeu [km/s]	Relativní rychlost [km/s]	Poloměr zaměření [km]	Excentricita [1]	Vzdálenost periselenia [km]	Pootočení o Měsíc β [°]	Konečná rychlost [km/s]	Konečný úhel α [°]
384400	398600	4902,78	2360595	0,1867	0,8353	0	1,0000	0	180,0	2,2307	0,0
382400	194486	3,1327	0,1877	0,8343	2000	278	1,0395	278	148,3	2,1474	17,2
380400	193486	3,1322	0,1886	0,8334	4000	1054	1,1494	1054	120,9	1,9447	32,3
379400	192986	3,1319	0,1891	0,8329	5000	1590	1,2249	1590	109,4	1,8263	38,7
379300	192936	3,1319	0,1892	0,8328	5100	1648	1,2331	1648	108,4	1,8144	39,3
379200	192886	3,1319	0,1892	0,8328	5200	1706	1,2414	1706	107,3	1,8025	39,9
379150	192861	3,1319	0,1893	0,8327	5250	1736	1,2456	1736	106,8	1,7965	40,2
379100	192836	3,1319	0,1893	0,8327	5300	1766	1,2498	1766	106,3	1,7906	40,5
379050	192811	3,1318	0,1893	0,8327	5350	1796	1,2540	1796	105,8	1,7846	40,8
379000	192786	3,1318	0,1893	0,8327	5400	1826	1,2582	1826	105,3	1,7787	41,1
378900	192736	3,1318	0,1894	0,8326	5500	1887	1,2668	1887	104,3	1,7668	41,6
378800	192686	3,1318	0,1894	0,8326	5600	1948	1,2755	1948	103,3	1,7550	42,2
378700	192636	3,1318	0,1895	0,8325	5700	2011	1,2842	2011	102,3	1,7432	42,8
378600	192586	3,1317	0,1895	0,8325	5800	2074	1,2931	2074	101,3	1,7314	43,3
378500	192536	3,1317	0,1896	0,8324	5900	2137	1,3020	2137	100,4	1,7197	43,9
378000	192286	3,1316	0,1898	0,8322	6400	2464	1,3480	2464	95,8	1,6620	46,5
377500	192036	3,1315	0,1901	0,8319	6900	2805	1,3960	2805	91,5	1,6059	49,0

4.2.2 Urychlení při únikové rychlosti

Při cestách k různorodým kosmickým tělesům nám málokdy bude stačit prostor gravitační sféry vlivu Země a budeme ji muset opustit. Manévr k tomu potřebný urychlí družici do takové míry, kdy překročí lokální únikovou rychlost, závislou jen na místní vzdálenosti od středu Země, jak jsme si již vyjádřili pomocí rovnice (4.13). Tímto manévrem se dostáváme na hyperbolickou dráhu, kde rychlost, kterou budeme po opuštění SOI Země mít, je závislá na konkrétní rychlosti manévru podle vztahu (4.14). Uvážíme-li družici, pro kterou platí stejné počáteční předpoklady jako v minulé kapitole (kruhová dráha 200 km nad středním poloměrem Země, koplanární s dráhou Měsíce), vychází nám její oběžná a úniková rychlost jako:

$$v_{ob\dot{e}h} = 7,7885 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_{\dot{u}nik} = 11,0146 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pokud družici zrychlíme impulzním manévrem o rychlosti $\Delta v = 3,4524 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, dostáváme se s lokální rychlostí perigea 11,2409 km/h na hyperbolickou dráhu, pro kterou vychází hyperbolická přebyteková rychlost:

$$v_{\infty} = \sqrt{11,2409^2 - 11,0146^2} = 2,2443 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

což je přímo rychlost použitelná (po součtu s rychlostí Země při změně referenční soustavy) pro úpravu trajektorie v heliocentrickém systému. Nyní si představme situaci, že se po cestě od Země družice dostane do blízkosti Měsíce a využije jeho gravitace k dalšímu urychlení. Abychom se k hodnotě této získané rychlosti dopracovali, musíme postupovat odlišným způsobem, než jaký jsme použili v kapitole 4.2.1. Prvotním cílem pro nás bude zjistit parametry dané hyperboly, po které zemskou soustavu opouštíme. Délku hlavní poloosy zjistíme pomocí rovnice vis-viva (2.3) při dosazení hodnot rychlosti a vzdálenosti perigea hyperboly (tedy rychlost po urychlení a poloměr kruhové dráhy) a hodnotu excentricity odvodíme pomocí získané délky hlavní poloosy z rovnice (2.5). Na základě těchto dvou parametrů vypočítáme poloměr zaměření (4.11) a pomocí excentricity odvodíme úhel, který svírají asymptoty s přímkou apsid (2.7). Pro rozebíraný případ mají tyto parametry hodnoty:

$$a_h = -79136 \text{ km} \quad e = 1,0830 \quad b = 32912 \text{ km} \quad \theta_a = 157,4^\circ$$

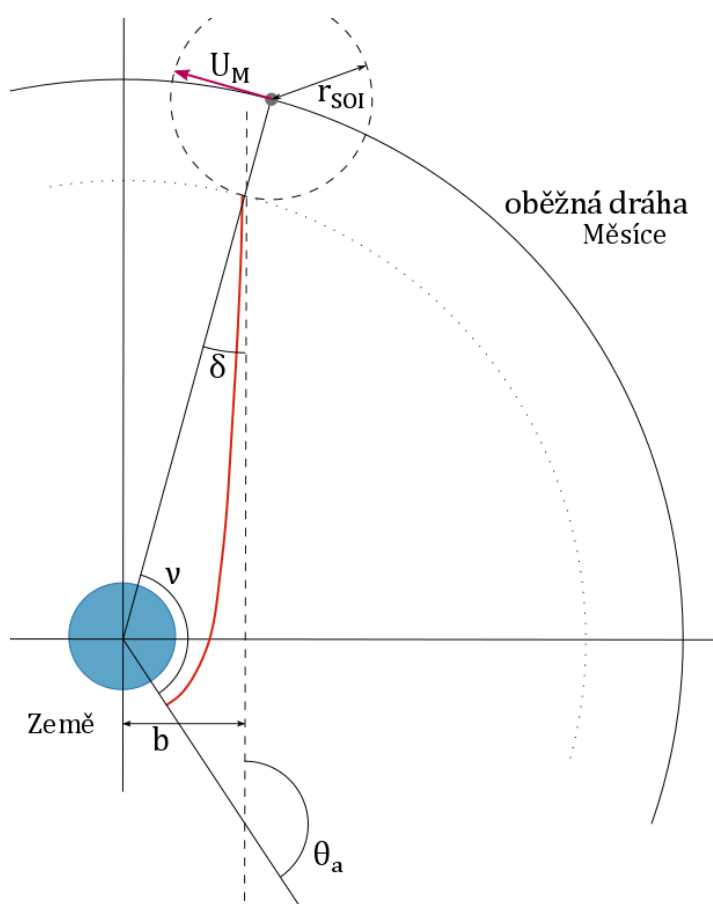
Daný stav je názorně vykreslen na obrázku 8. Vidíme, že po prvotním manévru se družice nekonečně přibližuje k určené asymptotě. Ta je kolmo vzdálena o parametr b vzhledem k přímce rovnoběžné s touto asymptotou, ale procházející ohniskem – středem Země. Pojdme si definovat pomocnou kružnici (na obrázku je znázorněna tečkovaně), jejíž hranu vytváří spojnice bodů gravitační sféry vlivu Měsíce nejbližších Zemi, tak jak okolo ní obíhá. V určitý okamžik družice hranici danou touto kružnicí překoná, a pokud manévr urychlení správně načasujeme, bude to ve stejný okamžik, kdy skutečně do SOI Měsíce vstoupí. Toto nám

umožňuje na základě našich předpokladů určit vzdálenost družice od středu Země v době vstupu do SOI Měsíce jako:

$$r_{vstupu} = r_M - r_{SOI} = 384400 - 66180 = 318220 \text{ km} \quad (4.16)$$

kde r_M představuje dohodnutý poloměr oběhu kruhové dráhy Měsíce. Následně můžeme určit opět za pomoci jednoduchých goniometrických funkcí a podobnosti trojúhelníků vstupní úhel do SOI Měsíce:

$$\alpha' = 90^\circ - \delta = 90 - \sin^{-1} \frac{b}{r_{vstupu}} = 84,1^\circ \quad (4.17)$$



Obrázek 8 - Schéma hyperbolické dráhy

Dosažením vzdálenosti družice při překročení pomocné kružnice definované poloměrem r_{vstupu} do rovnice (2.3) vypočítáme její skutečnou rychlost v tomto bodě a složením tohoto vektoru rychlosti s vektorem rychlosti Měsíce U_M na základě známého úhlu vstupu α' a pravidla kosinové věty vypočítáme i velikost relativní rychlosti vůči Měsíci. Jejich hodnoty jsou:

$$v_p = 2,7463 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u_{rel} = 2,8295 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

V této chvíli přecházíme s výpočtem do soustavy Měsíce. Pokud zanedbáme vliv rotace vektoru rychlosti Měsíce a budeme ho považovat stále za konstantní, jediným zbývajícím potřebným parametrem je výška periselenia, kterou si tentokrát sami zvolíme s dostatečným přídavkem jako $r_{ps} = 1800 \text{ km}$, protože výsledná poloha Měsíce je v zásadě dána časem (a tedy polohou) vypuštění družice. Dosavadní známé parametry nyní jednoduše dosadíme do rovnic (2.8), (2.11) a (2.12) a získáme požadované výstupy gravitačního manévru, které pro tento případ vycházejí:

$$\beta = 29,4^\circ \quad v_k = 3,2370 \text{ km. s}^{-1} \quad \alpha = 57,9^\circ$$

Analogickým postupem k tomu použitému v kapitole o manévru přechodové dráhy odvodíme vzdálenost od Země v ten moment, na jejímž základě určíme únikovou rychlost a tedy i výslednou hyperbolickou přebytkovou rychlost:

$$v_{\text{únik}} = 1,3453 \text{ km. s}^{-1} \quad v_\infty = 2,9442 \text{ km. s}^{-1}$$

Pokud bychom chtěli mít takovou přebytkovou hyperbolickou rychlost již po počátečním manévru, jeho urychlení na původní kruhové dráze by muselo být $\Delta v = 3,6128 \text{ km. s}^{-1}$, což nám udává v porovnání s námi provedeným manévrem hodnotu ušetřené rychlosti:

$$\Delta v_{\text{zisk}} = 160,4 \text{ m. s}^{-1}$$

Jen pro zajímavost, tento ukázkový příklad byl navržen tak, aby přebytková hyperbolická rychlost po proběhnutí gravitačního praku měla hodnotu přesně potřebnou k dosažení Marsu pomocí Hohmannovy přechodové dráhy, tedy obecně nejméně náročným manévrem co se změny rychlosti týče.

Doposud jsme v tomto případě automaticky předpokládali, že družice dosáhne periselenia ve stanovené výšce bez toho, abychom tento fakt čímkoliv podložili. Pojdme se nyní tedy zaměřit na výpočet polohy vypuštění družice, která konečnou vzdálenost přiblížení k Měsíci ovlivňuje. Celý manévr od impulzního urychlení do dosažení periselenia můžeme rozdělit na dvě části, hyperbolickou dráhu do okamžiku vstupu do SOI Měsíce a hyperbolickou dráhu od tohoto bodu do pericentra. Parametry první hyperboly jsou nám již známé a víme, že v nekonečnu by se družice přibližovala blízko k úhlu natočení asymptoty. Ačkoliv pro předchozí výpočty jsme mohli polohu družice považovat jako velmi blízkou této asymptotě určené poloměrem zaměření b , skutečná poloha družice určená pravou anomálií ν má hodnotu o něco menší. Za využití obecné rovnice hyperboly (2.4) a známého bodu vstupu do SOI Měsíce můžeme vypočítat pravou anomálii jako:

$$v_1 = \cos^{-1} \left(\frac{(e^2 - 1) * a_h}{r_{vstupu} * e} - \frac{1}{e} \right) = 152,1^\circ \quad (4.18)$$

Tu převedeme na hyperbolickou excentrickou anomálii F , která je prostředkem pro odvození času, který potřebuje družice pro dosažení bodu vstupu do SOI Měsíce: [13]

$$F_1 = \cosh^{-1} \frac{e + \cos v}{1 + e * \cos v} = 2,2152 \text{ rad} \quad (4.19)$$

$$t_1 = \frac{e * \sinh F - F}{\sqrt{\mu / -a_h^3}} = 94773 \text{ s}$$

Obdobným způsobem budeme postupovat pro určení času přeletu od vstupu do SOI Měsíce až do stanoveného bodu největšího sblížení. Pro délku hlavní poloosy a excentricitu urychlovací hyperboly odvodíme vztahy závislé na známých parametrech, [13]

$$a_h = -\frac{\mu_M}{u_{rel}^2} = -612 \text{ km} \quad e = 1 - \frac{r_{ps}}{a_h} = 3,9393 \quad (4.20)$$

pro které dosazením do rovnic (4.18) a (4.19) dostáváme následující hodnoty pravé anomálie, hyperbolické excentrické anomálie a času:

$$v_2 = 102,7^\circ \quad F_2 = 4,0138 \text{ rad} \quad t_2 = 22722 \text{ s}$$

Konečně spojením těchto dvou manévřů, resp. jejich časů t_1 a t_2 dostáváme dobu, kterou bude družice potřebovat pro přelet od počátku urychlení do periselenia. Vztažením této doby k celkové době oběhu Měsíce získáme poměr pokryté dráhy, který vyjádřený ve stupních udává hodnotu posunu Měsíce po dobu letu družice. Úhel svírající vektor polohy Měsíce a vektor polohy družice při počátečních podmínkách následně odhadneme pomocí hodnoty pravé anomálie družice v geocentrickém systému jako:

$$\gamma = v_1 - \frac{(t_1 + t_2) * 360}{T_M} = 134,2^\circ \quad (4.21)$$

Výsledné hodnoty pro jiné manévry v závislosti na jejich počátečním urychlení jsou přehledně zobrazeny v následující tabulce 3. Můžeme si všimnout, že čím rychleji se družice při oběhu Měsíce pohybuje, tím menší schopnost má Měsíc její trajektorii stočit, což v konečném důsledku znamená, že i získaná rychlost je menší.

Tabulka 3 – Parametry gravitačních manévřů pro různé velikosti počáteční změny rychlosti

Parametry kosmických těles				Parametry počáteční dráhy			Parametry urychlení				
Poloosa dráhy [km]	Gravitační parametr Země [km ³ /s ²]	Gravitační parametr Měsíce [km ³ /s ²]	Rychlost oběhu Měsíce [km/s]	Čas oběhu Měsíce [s]	Poloměr oběhu [km]	Rychlost oběhu [km/s]	Úniková rychlost [km/s]	Vzdálenost periselenia [km]	Poloměr pomocné kružnice [km]		
384400	398600	4902,78	1,022	2360595	6571	7,7885	11,0146	1800	318220		
Δv manévru [km/s]	Excentricita [1]	Úhel vstupu α' [°]	Počáteční rychlost [km/s]	Relativní rychlost [km/s]	Pootočení o Měsíc β [°]	Konečná rychlost [km/s]	Konečný úhel α [°]	Výsledná V_{∞} [km/s]	Původní V_{∞} [km/s]	Ušetřené Δv [m/s]	Úhel vypuštění [°]
4,9500	1,6750	87,6	6,5919	6,6290	6,7	6,7107	81,1	6,5773	6,3991	90,4	115,9
4,8500	1,6332	87,6	6,3966	6,4350	7,1	6,5220	80,6	6,3847	6,1976	92,8	116,7
4,7500	1,5917	87,5	6,1966	6,2366	7,5	6,3296	80,1	6,1880	5,9911	95,3	117,5
4,6500	1,5505	87,5	5,9917	6,0333	8,0	6,1331	79,6	5,9868	5,7789	97,9	118,4
4,5500	1,5097	87,4	5,7812	5,8246	8,5	5,9321	79,0	5,7806	5,5604	100,8	119,4
4,4500	1,4692	87,3	5,5646	5,6099	9,1	5,7262	78,4	5,5691	5,3348	103,9	120,4
4,3500	1,4290	87,2	5,3411	5,3885	9,8	5,5149	77,6	5,3515	5,1012	107,3	121,4
4,2500	1,3891	87,1	5,1098	5,1594	10,7	5,2976	76,7	5,1272	4,8584	111,0	122,5
4,1500	1,3496	86,9	4,8695	4,9218	11,6	5,0737	75,7	4,8954	4,6051	115,0	123,7
4,0500	1,3104	86,8	4,6189	4,6741	12,7	4,8425	74,5	4,6552	4,3393	119,4	125,0
3,9500	1,2715	86,6	4,3562	4,4147	14,1	4,6029	73,1	4,4052	4,0585	124,3	126,3
3,8500	1,2330	86,3	4,0791	4,1413	15,8	4,3539	71,3	4,1441	3,7595	129,9	127,7
3,7500	1,1948	86,0	3,7843	3,8509	17,9	4,0941	69,2	3,8698	3,4374	136,1	129,2
3,6500	1,1569	85,6	3,4675	3,5391	20,6	3,8218	66,4	3,5798	3,0852	143,2	130,8
3,5500	1,1194	85,0	3,1218	3,1992	24,3	3,5347	62,8	3,2704	2,6908	151,3	132,5
3,4524	1,0830	84,1	2,7463	2,8295	29,4	3,2370	57,9	2,9442	2,2443	160,4	134,2
3,3500	1,0453	82,0	2,2914	2,3759	38,0	2,9000	50,0	2,5647	1,6569	170,7	135,8

4.3 Změna inklinace

Úprava inklinace patří obecně co do velikosti rychlosti úpravného manévru mezi nejnáročnější manévry na oběžné dráze. To je pochopitelné, jelikož pokud chceme zachovat ostatní parametry dráhy nezměněné, musíme současný vektor rychlosti pouze pootočit o daný úhel změny inklinace, který bude pro kruhové dráhy dán rozdílem počátečního a konečného vektoru rychlosti, nebo také vzorcem: [14]

$$\Delta v_i = 2v * \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (4.22)$$

kde v představuje počáteční oběžnou rychlost a Δi požadovanou změnu inklinace. Je tedy zřejmé, že čím větší oběžnou rychlost budeme mít, tím náročnější pro nás změna inklinace bude.

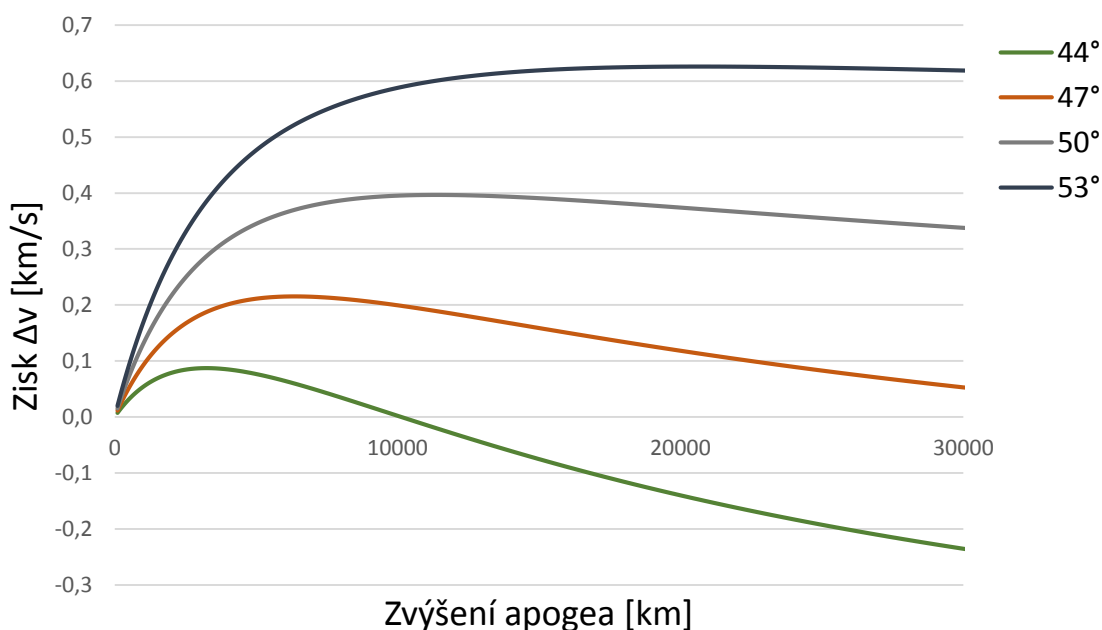
4.3.1 Změna inklinace zvýšením apogea

Tohoto poznatku bývá využíváno pro úpravy inklinace postupnými manévry, kdy je nejprve družice urychlena na excentrickou dráhu, v jejíž apogeu je využito menší rychlosti pro změnu inklinace a posléze se v perigeu opět zpomalí na kruhovou dráhu. Tímto způsobem jsme schopni zmenšit požadovanou rychlost manévru oproti přímé změně inklinace v závislosti na konkrétním úhlu její změny tak, jak nám to ukazuje tabulka 4, jejíž hodnoty odpovídají počáteční dráze s poloměrem $r = 6571 \text{ km}$ která byla vypočítána na základě vzorců probraných v předchozích kapitolách.

Tabulka 4 - Hodnoty ušetření rychlosti při provedení série manévru

Zisk Δv v závislosti na požadované změně inklinace při zvýšení apogea [km/s]									
Zvýšení apogea [km] / Inklinace [°]	10	30	40	45	50	55	60	70	90
10	-0,0044	-0,0013	0,0002	0,0009	0,0016	0,0023	0,0030	0,0043	0,0066
100	-0,0434	-0,0132	0,0014	0,0085	0,0155	0,0224	0,0291	0,0421	0,0655
1000	-0,4030	-0,1304	0,0017	0,0662	0,1296	0,1918	0,2525	0,3693	0,5813
2500	-0,9002	-0,3123	-0,0274	0,1119	0,2487	0,3827	0,5137	0,7657	1,2230
5000	-1,5292	-0,5703	-0,1055	0,1217	0,3447	0,5633	0,7770	1,1880	1,9339
10000	-2,3508	-0,9457	-0,2647	0,0682	0,3950	0,7153	1,0284	1,6306	2,7236
20000	-3,2153	-1,3787	-0,4885	-0,0535	0,3738	0,7924	1,2017	1,9889	3,4175
50000	-4,1279	-1,8697	-0,7752	-0,2403	0,2851	0,7998	1,3030	2,2709	4,0275
100000	-4,5602	-2,1125	-0,9262	-0,3463	0,2231	0,7810	1,3264	2,3755	4,2795
200000	-4,8125	-2,2569	-1,0183	-0,4129	0,1816	0,7641	1,3336	2,4289	4,4168
377829	-4,9412	-2,3313	-1,0664	-0,4481	0,1590	0,7539	1,3355	2,4541	4,4843
700000	-5,0106	-2,3716	-1,0926	-0,4675	0,1465	0,7480	1,3361	2,4672	4,5199
924000	-5,0307	-2,3833	-1,1002	-0,4731	0,1428	0,7462	1,3362	2,4708	4,5301

V ní si můžeme všimnout, že pro malé změny inklinace ($\sim 10\text{-}40^\circ$) je spíše nevýhodné jakkoliv zvyšovat apogeum, jelikož i při jeho malé změně pro nás bude výhodnější změnit inklinaci přímo a s dalším zvyšováním apogea se rychlost ztracená sérií manévrů bude také zvyšovat. Při střední změně inklinace ($\sim 40\text{-}60^\circ$) již pozorujeme, že série manévrů s úpravou výšky apogea začíná být do dané vzdálenosti výhodnější, než přímá změna. Po určité vzdálenosti však převládá náročnost změny rychlosti pro dostání se do vzdálenosti apogea nad výhodností změny inklinace v něm (i když v porovnání s přímou změnou inklinace může být manévr stále výhodnější), čímž dostáváme pro danou požadovanou změnu inklinace přesnou vzdálenost, kdy je manévr nejvýhodnější. Pro úhly blížící se 90° se pak zdá, že čím dále apogeum je, tím výhodněji se inklinace dá změnit (i když na konci již s malými přírůstky). To je pochopitelné, neboť u velice excentrických drah je náročnost na podstatné zvýšení apogea již relativně malá. Omezením zde však je samotný poloměr SOI Země, v rámci kterého se musíme pohybovat, abychom zůstali stále na stejné dráze a nevstoupili s družicí do heliocentrického systému. Na obrázku 9 můžeme vidět vykreslení průběhu závislosti ušetřené změny rychlosti pro dané střední změny úhlů na použitém zvýšení apogea.



Obrázek 9 - vykreslení závislosti zisku rychlosti na vzdálenosti apogea pro dané úhly

4.3.2 Využití Měsíce pro změnu inklinace

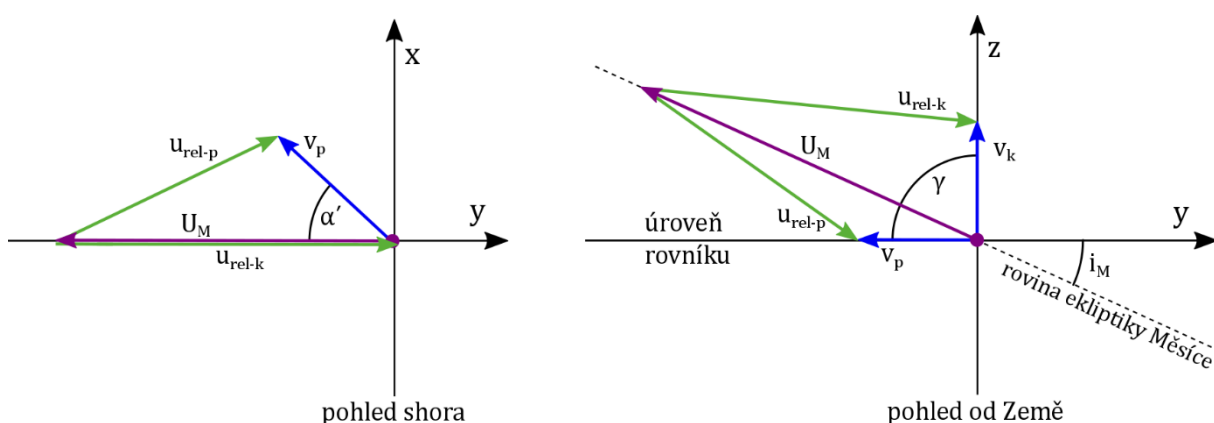
Na to, abychom mohli použít Měsíc pro změnu inklinace, musíme si jasně určit případy, kdy je tento způsob použitelný. Vycházet budeme z potřeby zvýšit apogeum na úroveň oběžné dráhy Měsíce a samotný původní proces zbavíme vlastního manévru změny inklinace – prozatím budeme předpokládat, že Měsíc bude schopný tuto změnu provést díky své gravitaci.

Tabulka 5 - Výhodnost urychlení o Měsíc v závislosti na úhlu

Změna inklinace [°]	10	20	30	40	47,44	48,83	50	60	70	80	90
Změna inklinace o Měsíc urychlením na jeho úroveň	-4,9087	-3,5614	-2,2347	-0,9386	0	0,1723	0,3168	1,5222	2,6683	3,7464	4,7483
Změna inklinace manévrem na hraně SOI Země	-5,0307	-3,6968	-2,3833	-1,1002	-0,1711	0	0,1428	1,3362	2,4708	3,5382	4,5301

Na tabulce 5 v prvním řádku můžeme vidět již manévry, které s tímto předpokladem počítají. Opět pro malé úhly se nevyplatí družici urychlovat do této vzdálenosti, i když na samotnou změnu inklinace počítáme s nulovým požadavkem na změnu rychlosti. Zlomovým bodem je, když námi požadovaná změna inklinace přesáhne úroveň 47,44°, od té chvíle je manévr okolo Měsíce výhodnější. Pro porovnání uvádíme i manévr na hranici SOI Země (čili teoretické místo nejmenší rychlosti), který manévr změny inklinace obsahuje. Můžeme si všimnout, že manévr okolo Měsíce má pro každý okamžik výhodnější zisk Δv , nic nám tedy nebrání pokusit se tento manévr navrhnout.

Uvažovat budeme opět družici na kruhové dráze s poloměrem $r = 6571 \text{ km}$, která se však tentokrát nebude nacházet ve stejné rovině, jako je ekliptika Měsíce. Místo toho bude obíhat v geocentrickém systému s nulovou inklinací, tedy neustále v rovině zemského rovníku. Jak víme, inklinace roviny Měsíce se v geocentrické soustavě v průběhu času mění, pro tento příklad si tedy stanovíme její hodnotu na $i_M = 25,7768^\circ$. Jako poslední si stanovíme, velikost inklinace z použitelných hodnot, například rovnou úpravu o pravý úhel -90° . Při tomto manévru na rozdíl od předchozích budeme požadovat, abychom prolétnutím okolo Měsíce nezískali žádnou rychlost navíc, respektive aby pravá výstupní rychlost byla přibližně stejná velikosti rychlosti v apogeum elipsy definované perigeem ve vzdálenosti 6571 km a apogeem ve vzdálenosti Měsíce – 384400 km. Pomocí dosazení vzdáleností do rovnice (2.3) víme, že to odpovídá hodnotě $v_k = 0,1867 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Podívejme se na obrázek 10, kde si vyjádříme rozklad rychlostí tak, aby odpovídal situaci v prostoru. Ten je určen tak, že od Země k Měsíci směřuje osa x, osa y se nachází v rovině rovníku a osa z představuje severní směr. Střed souřadnic si



Obrázek 10 - pomocné souřadnice manévru změny inklinace

představme v Měsíci, jehož oběžnou dráhu považujeme v této soustavě za přímku nacházející se v rovině definované osami y a z. V této rovině se nachází také vektor konečné rychlosti v_k , a to pod požadovaným úhlem změny inklinace γ od osy y. Rozkladem vektoru na jednotlivé složky dostáváme pomocí goniometrických vzorců hodnoty:

$$v_{kx} = 0 \quad v_{ky} = -\cos \gamma * v_k \quad v_{kz} = \sin \gamma * v_k \quad (4.23)$$

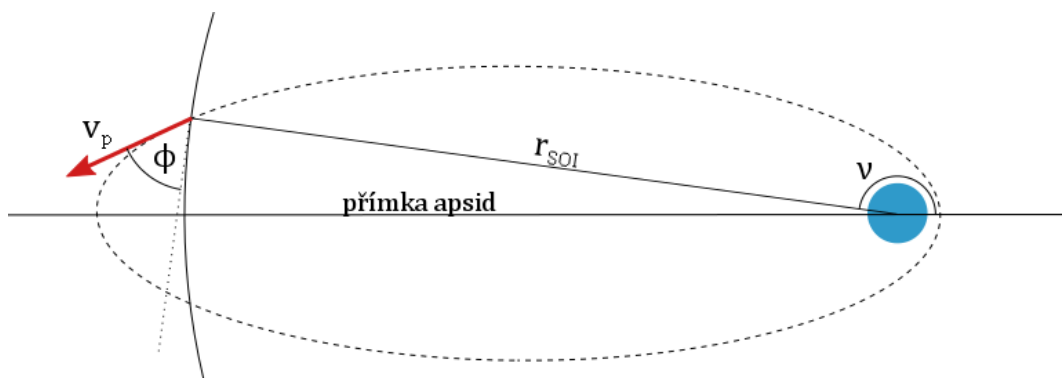
Analogicky k tomu vyjádříme i složky rychlosti Měsíce v této soustavě, jelikož samotná rovina ekliptiky je k dráze nakloněna dříve stanoveným úhlem i_M .

$$U_{Mx} = 0 \quad U_{My} = -\cos i_M * U_M \quad U_{Mz} = \sin i_M * U_M \quad (4.24)$$

Složky relativní rychlosti vůči Měsíci při opuštění jeho SOI jsou pak vypočítány rozdílem těchto dvou rychlostí a její celková velikost vzorcem:

$$u_{rel-k} = \sqrt{(v_{ky} - U_{My})^2 + (v_{kz} - U_{Mz})^2} = 0,9557 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.25)$$

Z pohledu Země na obrázku 10 je zřejmé, že při požadované výstupní rychlosti v_k nemohou mít počáteční a konečný vektor relativní rychlosti vůči Měsíci rozdílné velikosti. Taková situace je při manévru bez přídavného zažehnutí motoru nereálná, jak víme ze zákona zachování energie, a proto tento poměr musíme někde vyrovnat. To uděláme upravením velikosti vstupní rychlosti a úhlu jejího vstupu α' . Na obrázku 10 je opět vidět, jak přidáním třetího rozměru ve směru osy x protáhneme počáteční relativní rychlost tak, aby svou velikostí odpovídala té konečné. Zvolení počáteční rychlosti a úhlu vstupu nicméně není libovolné, ale vychází z parametrů elipsy použité k přiblížení do vstupu SOI Měsíce. Při elipse s apogee přesně na úrovni oběžné dráhy Měsíce je tedy rychlost stejná jako ta konečná a vstupní úhel α' je nulový. V tomto případě nám pochopitelně relativní rychlosti nesedí, protože se pořád nacházíme v rovině y-z. Úpravou prvotního manévru do vyšší vzdálenosti apogea docílíme toho, že ve vzdálenosti r_{SOI} vstoupíme s vyšší rychlostí a pod daným úhlem (obrázek 11).



Obrázek 11 - Odvození vstupní rychlosti a úhlu z protáhnuté elipsy

Velikost letového úhlu ϕ v bodě vstupu do SOI Měsíce zjistíme na základě parametrů excentricity a pravé anomálie ν pro vzdálenost r_{SOI} konkrétní elipsy, jíž jsme stanovili zvýšením apogea, podle vzorce: [14]

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{e * \sin \nu}{1 + e * \cos \nu} \right) \quad (4.26)$$

Pomocí rovnice vis-viva (2.3) poté určíme také rychlost v_p v tomto bodě. Dále rovnicemi analogickými k (4.23) vypočítáme podle obrázku 10 jednotlivé složky počáteční rychlosti, jejichž upravením o rychlost Měsíce získáme relativní rychlost vzhledem k Měsíci ve vstupním bodě do gravitačního praku a opět rovnicí analogickou k (4.25) vypočítáme její velikost. V závislosti na různých hodnotách zvýšení apogea tak dostáváme proměnné reálné rychlosti, letové úhly a samozřejmě hlavně relativní rychlosti. V tabulce 6 vidíme tyto různé údaje v závislosti na odlišných vzdálenostech apogea, přičemž zvýrazněný řádek ukazuje hodnoty, pro které přibližně platí rovnost velikosti počáteční a konečné relativní rychlosti tak, že jejich pootočením dostaneme právě námi požadovanou výstupní rychlost.

Tabulka 6 - vstupní parametry do SOI Měsíce v závislosti na vzdálenosti apogea

Vzdálenost apogea [km]	Pož. rychlost navíc [km/s]	Pravá anomálie [°]	Letový úhel [°]	v_p [km/s]	u_{rel-px} [km/s]	u_{rel-py} [km/s]	u_{rel-pz} [km/s]	u_p [km/s]
384400	0,0000	180,0	0,0	0,1867	0,0000	0,7336	-0,4444	0,8577
400000	0,0036	177,0	56,3	0,3363	0,2797	0,7335	-0,4444	0,9021
421780	0,0081	175,5	66,1	0,4613	0,4218	0,7335	-0,4444	0,9557
700000	0,0416	169,9	78,9	0,9724	0,9542	0,7329	-0,4444	1,2826
924000	0,0540	168,5	80,2	1,1033	1,0872	0,7327	-0,4444	1,3843

Hodnotu tohoto pootočení stanovíme pomocí skalárního součinu obou relativních vektorů, tzn. vektorů u_{rel-p} a u_{rel-k} jako (ve vzorcí jsou indexy zjednodušeně):

$$\beta = \cos^{-1} \frac{(u_{px} * u_{kx}) + (u_{py} * u_{ky}) + (u_{pz} * u_{kz})}{u_{rel}^2} = 30,2^\circ \quad (4.27)$$

kteřou s použitím rovnice (2.8) přepočítáme na základě skutečnosti, že $v_\infty = u_{rel}$ na požadovanou výšku periselenia $r_{ps} = 15250 \text{ km}$. K té zbývá už jen dopočítat dobu vypuštění, které je analogické k výpočtu v předchozí kapitole. Výsledná úspora potřebné změny rychlosti pak vychází z té určené v tabulce 5, tedy o $4,783 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ oproti změně v prvotní výšce, ale především úspoře oproti změně inklinace na hranici SOI Země, opravené o potřebný manévr.

$$\Delta v_{zisk} = 210,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

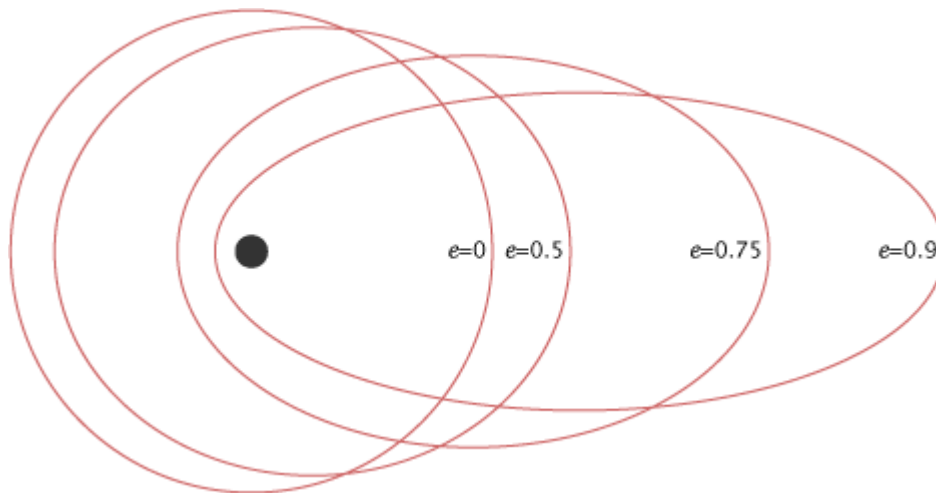
5 Použití gravitačního manévru u satelitů

Určení pozice objektu na Zemi a v malé vzdálenosti od ní je relativně snadné pomocí zeměpisné šířky a délky, případně výšky nad povrchem. A ačkoliv je teoreticky možné tento systém použít i pro objekty na oběžné dráze okolo Země, setkáváme se s problémem, kdy referenční osy této soustavy se vzhledem k okolnímu vesmíru s časem mění. V případě obecného popisu tedy musíme využít systém jiný. Na rozdíl od Země, kde je vztažná soustava pevně určena geograficky, ve vesmíru se setkáváme s problémem stanovení referenčního bodu, ke kterému bychom tuto soustavu mohli vztáhnout. Tato situace byla vyřešena definováním tzv. jarního bodu, určeného směrem průsečnice roviny zemského rovníku s rovinou ekliptiky v čase jarní rovnodennosti ke Slunci. Takto definovaný systém se však vlivem nebeských pohybů (např. orientace zemské osy) také mění. Proto, když využíváme systém souřadnic určený směrem k jarnímu bodu, musíme vždy zmínit také dané ekvinokcium (období, ze kterého jsme směr k jarnímu bodu použili).

5.1 Elementy dráhy

Podle zobecněného 1. Keplerova zákona víme, že tělesa se pohybují po elipsách, kde hlavní objekt je umístěn v jednom ze dvou ohnisek. Rovina těchto elips vždy prochází středem centrálního objektu. Pokud chceme tedy definovat polohu a trajektorii obíhajícího tělesa vzhledem k objektu v ohnisku, musíme postupně určit referenční rovinu, bod a čas, vzhledem ke kterým následně určíme 6 orbitálních prvků: velkou poloosu dráhy a , excentricitu e , inklinaci i , délku vzestupného uzlu Ω , argument šířky pericentra ω a pravou anomálii v .

Excentricita e stanovuje, o jaký typ kuželosečky se jedná, obecně určující jejich tvar. Kružnice ($e = 0$) a parabola ($e = 1$) jsou idealizované případy, se kterými se vlivem rušivých vlivů ve vesmíru nemůžeme po delší dobu setkat. Hyperbola ($e > 1$) představuje stav, kdy těleso překročilo únikovou rychlost a je tedy na trajektorii pro opuštění gravitačního vlivu centrálního tělesa – z tohoto důvodu nás v tuto chvíli nezajímá, neboť řešíme jen oběžné dráhy. Prakticky jediné hodnoty excentricity vycházejí tedy na elipsu ($0 < e < 1$), kde její konkrétní velikost stanoví „protáhnutí“ tvaru od stavu podobnému kružnici při hodnotě blízké nule až do stavu, kdy další protažení by mělo za následek rozpojení dráhy při hodnotě $e = 1$. Konkrétní vliv excentricity na protažení elipsy můžeme jasně vidět na obrázku 12. Samotná excentricita však nestačí pro určení keplerovské trajektorie, neboť udává pouze tvar. Pro stanovení její velikosti potřebujeme znát ještě jeden parametr, kterým je velká poloosa dráhy a . Ta jednoduše představuje polovinu vzdálenosti mezi polohami, kdy je objekt nejdále (apoapsida) a nejbližší (periapsida) od centrálního tělesa. Alternativně lze určit hodnotu velké poloosy pomocí 2. Keplerova zákona jako dobu oběhu/střední denní pohyb.



Obrázek 12 - Vliv excentricity na tvar elipsy [15]

I když máme určenu pomocí excentricity a velké poloosy konkrétní elipsu, musíme ji ještě správně umístit do prostoru stanoveného systému souřadnic. Zde přichází na řadu právě určení referenčního směru a roviny. Jako první zmíněný využijeme nejčastěji jarní bod, který je použitelný prakticky u všech těles. U referenční roviny je to komplikovanější, protože je často výhodné ji zvolit na základě konkrétní situace. V případě geocentrického systému budeme volit praktickou rovinu zemského rovníku, ale můžeme referenční rovinu například určit také jako rovinu ekliptiky.

Rovina dráhy a referenční rovina nemusí být totožné, mohou být vůči sobě nakloněny. Průnikem obou rovin vzniká čára, které říkáme uzlová přímka. Pokud těleso obíhá po trajektorii nakloněné k referenční rovině, bod, kde vstoupilo z části pod referenční rovinou do části nad ní, nazýváme vzestupný uzel. Analogicky bodu na opačné straně uzlové přímky říkáme sestupný uzel. Konečně úhel mezi referenční rovinou a trajektorií obíhajícího tělesa ve vzestupném uzlu je inklinace i a její hodnota se pohybuje od 0° do 180° (při pohledu shora při nulové inklinaci se družice pohybuje proti směru hodinových ručiček v referenční rovině, v případě inklinace o hodnotě 180° je její pohyb opačný – v téže rovině, ale po směru hodinových ručiček).

I když už víme, pod jakým úhlem je naše trajektorie nakloněna, potřebujeme zjistit i směr, jakým se naklonila. Dobrým identifikátorem tohoto pootočení je zmiňovaná uzlová přímka, která se nachází v referenční rovině. Jako počátek použijeme směr k jarnímu bodu, od něhož počítáme vzdálenost k vzestupnému uzlu. Tato hodnota udává druhý parametr pootočení elipsy v prostoru, kterému říkáme délka vzestupného uzlu Ω . V ideální případě, kdy je rovina trajektorie shodná s referenční rovinou, postrádá tento parametr smysl (při hodnotě inklinace 0° nebo 180° neexistuje vzestupný ani sestupný uzel).

V tuto chvíli máme stanovenou jak samotnou elipsu, tak i rovinu v prostoru, na které se nachází. Posledním prvkem umístění trajektorie je její natočení již v této rovině. Tomu říkáme argument šířky pericentra ω a získáme ho podobně, jako jsme odečetli délku vzestupného uzlu, s tím rozdílem, že se pohybujeme po rovině trajektorie a jako počáteční bod si stanovíme právě vzestupný uzel. Logicky úhel bereme proti směru hodinových ručiček k nejnižšímu bodu na oběžné dráze, čili pericentru.

Teprve nyní víme přesně, jak je v dané chvíli trajektorie položena v prostoru a jaký má tvar. Dalším krokem je umístění družice na specifické místo na této dráze pro specifický okamžik. Nejjednodušší popis je pomocí pravé anomálie ν . Jedná se o úhlový údaj polohy družice na oběžné dráze vzhledem k centrálnímu tělesu, kde nula je určena průchodem v pericentru. Při popisu Keplerovských elementů dráhy využijeme však častěji ne tak zjevnou střední anomálii M , která udává úhel polohy imaginární družice na imaginární kružnici, jejíž poloměr je shodný s poloosou naší elipsy (doba oběhu po kružnici a elipse je stejná, na kružnici se však imaginární družice pohybuje rovnoměrně díky neměnné rychlosti). Nula se nachází opět při průchodu pericentrem.

Pro daný časový okamžik můžeme tedy elementy dráhy rozdělit do následujících 3 logických skupin; pro jasnou představu jsou pak všechny zobrazeny na obrázku 13.

a) 2 elementy dráhy určující tvar a velikost trajektorie družice

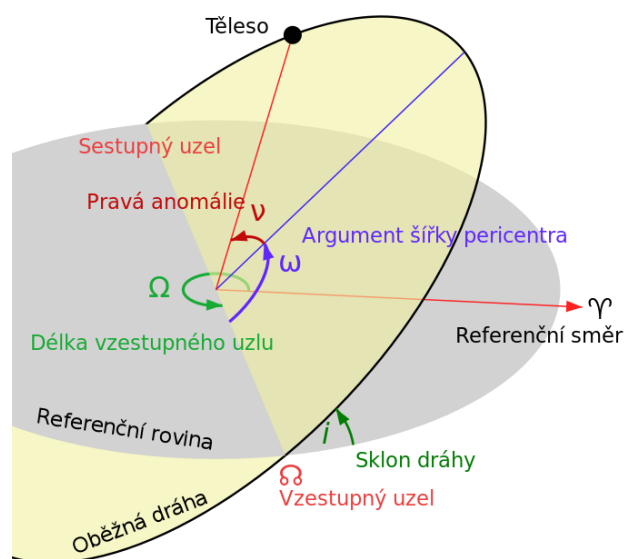
e – excentricita a – velká poloosa dráhy

b) 3 elementy dráhy určující pootočení vzhledem ke stanovené referenční soustavě souřadnic

i – inklinace Ω – délka vzestupného uzlu ω – argument šířky pericentra

c) 1 element polohy družice na dráze

ν – pravá anomálie



Obrázek 13 - Elementy dráhy [16]

5.1.1 Dvouřádkové elementy dráhy

Severoamerické velitelství protivzdušné obrany (NORAD) spravuje databázi všech objektů na oběžné dráze Země. Pro jednoduchost byl za tímto účelem navržen formát uchování informací o parametrech těchto drah nazvaný Dvouřádkový element dráhy (TLE – Two-line element set). Jedná se o dvou až třířádkový soubor informací, který pro konkrétní čas přesně určuje nejen již probrané elementy dráhy, ale i další prvky ovlivňující pohyb daného kosmického tělesa v okolí Země. Formát byl standardizován na dva hlavní řádky o délce 69 znaků obsahující jen číslice, velká písmena, tečky, mezery a znaky plus a minus. K němu je možné přidat ještě nultý řádek, který obsahuje obecný název objektu, kterého se TLE týká. Jeho rozsah je 24 polí, a jelikož je název spjatý s ostatními identifikátory na prvním řádku, často bývá vynecháván a jsou publikovány jen zbylé dva řádky. Veřejně jsou tyto informace k dispozici například na webové adrese space-track.org. V této kapitole si jednotlivé položky vysvětlíme se zaměřením na prvky udávající hlavních 6 elementů dráhy. [17][18]

ISS (ZARYA)

```
1 25544U 98067A 08264.51782528 -.00002182 00000-0 -11606-4 0 2927
2 25544 51.6416 247.4627 0006703 130.5360 325.0288 15.72125391563537
```

Prvky prvního řádku

1 – číslo řádku o 1 poli

25544 – katalogové číslo satelitu o 5 polích; každé umělé družici obíhající okolo země je přiřazeno jedno katalogové číslo NORAD podle pořadí vstupu na oběžnou dráhu – např. vrchní stupeň rakety, která vynesla Sputnik 1, měl číslo 00001 [19]

U – klasifikace o 1 poli; nejčastěji se zde setkáme právě s označením U – neklasifikováno (Unclassified), jiné označení bychom našli u utajených dat

98067A – mezinárodní označení o 8 polích; stejně jako katalogové číslo koresponduje s konkrétním satelitem, kde první dvě čísla udávají rok vypuštění, třetí až páté číslo startu v daném roce a poslední tři pozice obsahují jedno až tři písmena abecedy udávající konkrétní objekt ze zmíněného startu

08264.51782528 – epocha o 14 polích; epochou rozumíme čas, ke kterému se údaje uvedené v TLE vážou – první dvoučíslí představuje rok, zbytek označuje pořadí dne toho roku (za tečkou následuje čas vyjádřený jako podíl dne)

-.00002182 – balistický koeficient o 10 polích; hodnota představuje denní změnu v počtu oběhů za den vydělenou dvěma (neboli první derivace středního denního pohybu)

00000-0 – druhá derivace středního denního pohybu dělená šesti o 8 polích; Číslo se čte jako by před ním byla nula a desetinná tečka, první znak je vyhrazen pro znaménko, poslední dva znaky jsou dekadický exponent se znaménkem (prakticky vždy minus). Obvykle je ale celé toto pole nulové jako v příkladu. [18]

-11606-4 – brzdný koeficient o 8 polích; udávaný v jednotkách inverzní hodnoty zemského poloměru, kde poslední 2 pole vyjadřují hodnotu mocniny o základu 10 – označuje vliv odporu atmosféry na dráhu družice

0 – typ efemeridy o 1 poli; všechny publikované TLE mají v tomto poli 0, interně se používá pro označení orbitálního modelu použitého pro generaci těchto dat [17]

292 – pořadí vydaného TLE o 3 polích; udává o kolikátá data vydaná pro tento objekt se jedná – v případě vyššího počtu než 999 se začíná opět od jedničky

7 – kontrolní součet o 1 poli; poslední číslo prostého součtu všech znaků v prvním řádku, kde písmena, mezery, tečky a plusy se počítají jako nula a mínusy jako 1 [17]

Prvky druhého řádku

2 – číslo řádku o 1 poli

25544 – katalogové číslo satelitu o 5 polích; stejné jako v prvním řádku

51.6416 – inklinace i o 8 polích; udávaná ve stupních až na 4. desetinné místo

247.4627 – délka výstupního uzlu Ω o 8 polích; udávaná ve stupních až na 4. desetinné místo

0006703 – excentricita e o 7 polích; představuje velikost excentricity na jejím 1 až 7 desetinném místě (před tímto číslem by se nacházela zřejmá desetinná čárka)

130.5360 – argument šířky perigea ω o 8 polích; udávaný ve stupních až na 4. desetinné místo

325.0288 – střední anomálie M o 8 polích; udávaná ve stupních až na 4. desetinné místo

15.72125391 – střední pohyb o 11 polích; počet oběhů družice za jeden den

56353 – počet oběhů od vypuštění družice v daném čase o 5 polích; oběh se započítává při průchodu výstupním uzlem – prvotní oběh po startu před prvním průchodem vzestupným uzlem se označí jako 0

7 – kontrolní součet o 1 poli; stejné jako v prvním řádku

Můžeme se všimnout, že dvouřádkové elementy dráhy nám pro danou epochu explicitně udávají přímo hodnoty inklinace, délky vzestupného uzlu, excentricity, argumentu pericentra a střední anomálie. Jediný parametr, který není přímo zobrazen, je velká poloosa dráhy. Tu však jednoduše získáme odvozením vzorce z druhého Keplerova zákona:

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{86400}{2n\pi} \right)^2} \quad (5.1)$$

kde n je střední pohyb získaný z druhého řádku TLE a μ je gravitační parametr centrálního tělesa).[20]

5.1.2 Stavový vektor kosmického tělesa

Jednou z dalších praktických možností, jak popsat těleso ve vesmíru je použitím vektorového vyjádření. Pro jasný popis nám konkrétně budou stačit vektory dva – vektor polohy \mathbf{r} a vektor rychlosti \mathbf{v} , spolu s informací o čase, pro který dané vektory platí.

Vektor polohy \mathbf{r} udává umístění družice vzhledem ke středu inerciální kartézské vztažné soustavy ve třech směrech, která bývá pro případ Země určena následovně:

- a) střed souřadnic je umístěn ve středu Země
- b) osa Z je rovnoběžná s osou rotace Země a kladný směr míří na sever, rovina tvořená osami X a Y je totožná s rovinou zemského rovníku
- c) kladný směr osy X směřuje k jarnímu bodu

Takto určený systém nazýváme rovníkovými souřadnicemi 2. druhu a jako takové jsou prakticky v čase neměnné. A pokud ve směru hlavních os X, Y a Z definujeme jednotkové vektory $\hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ a $\hat{\mathbf{K}}$, vektor rychlosti \mathbf{r} zapíšeme jako: [13]

$$\mathbf{r} = X\hat{\mathbf{I}} + Y\hat{\mathbf{J}} + Z\hat{\mathbf{K}} \quad (5.2)$$

Vektor rychlosti \mathbf{v} popisuje směr a velikost změny polohy v čase a zápis pomocí jednotkových vektorů vypadá následně:

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{I}} + v_y\hat{\mathbf{J}} + v_z\hat{\mathbf{K}} \quad (5.3)$$

Tyto tři informace (\mathbf{r} , \mathbf{v} a čas) nám samy o sobě nevyovídají, jak přesně vypadá trajektorie zkoumaného tělesa, ani nám zásadně neprozradí, jakou cestou bude toto těleso pokračovat dále. Z tohoto pohledu se zdá použití orbitálních elementů dráhy více vyovídající. S použitím vektorů jsme však schopni takové informace získat, když do prostoru vložíme působíště všech

možných sil, které daný objekt ovlivňují. To nám následně umožní jednodušší numerické výpočty v závislosti na čase, které dokáží zahrnout rozruchy i od těch nejmenších vlivů.

5.2 Perturbace (odchyly)

Keplerovy zákony jasně definují, jakým způsobem se budou vůči sobě pohybovat dvě vesmírná tělesa – víme, že jejich trajektorie bude tvořena pro danou situaci pravděpodobně úseky kuželosečky. Situace se však komplikuje, když přidáme do systému těleso třetí – tento případ již není reálně analyticky řešitelný. Jistě, za předpokladu, že jedno z hlavních těles je zásadně menší než druhé, jsme schopni řešení aproximovat a výsledné trajektorie „složit“ z částí kuželoseček vždy jen vzhledem k tomu tělesu, které na nás má zásadní vliv. Ale zde již musí principiálně dojít k zanedbání části působících sil, čili zkrácenému popisu vůči skutečnosti.

5.2.1 Jevy ovlivňující stabilitu oběžných drah

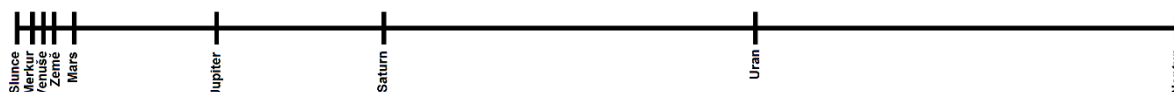
Vesmír je komplexní prostor a takových vlivů, které odchylojí trajektorii od idealizovaného stavu části kuželosečky, je vícero. Obecně můžeme tyto odchylyky shrnout do následujících hlavních kategorií: gravitační vliv jiných těles, odpor atmosféry a nehomogenita gravitačního pole.

Vliv gravitace těles Sluneční soustavy

Gravitační síla, kterou na sebe působí všechna tělesa, je určena Newtonovým gravitačním zákonem jako násobek hmotností těchto těles, vydělený druhou mocninou jejich vzdálenosti a upravený o gravitační konstantu. Pro posouzení vlivu na těleso je pro nás výhodnější použít rovnici pro gravitační zrychlení, která se zbavuje závislosti na hmotnosti pro posuzované těleso. Jeho tvar je:

$$g = \frac{\mu}{r^2} \quad (5.4)$$

kde g je gravitační zrychlení způsobené vlivem tělesa o gravitačním parametru μ , které je vzdálené o hodnotu r .



Obrázek 14 - Poměr vzdálenosti planet

Pro konkrétní představu velikosti těchto působících sil si uveďme modelový příklad. Mějme imaginární stav Sluneční soustavy, kde Slunce, všechny planety i Měsíc jsou postavené

v jedné lince, pro každý objekt v odpovídající vzdálenosti o velikosti délky hlavní poloosy. Měsíc je umístěn také ve vzdálenosti své hlavní poloosy a to od Země směrem k Marsu. Představu poměru vzdáleností planet a Slunce můžeme vidět na obrázku 14. Jestliže umístíme družici do polohy 200 km nad Zemský povrch mezi Zemí a Měsíc, výsledné hodnoty působícího gravitačního zrychlení v závislosti na objektu původu můžeme vidět na tabulce 7.

Tabulka 7 - Gravitační zrychlení působící na družici v 200km nad Zemí

Působíště gravitace	Vzdálenost působíště [km]	Gravitační parametr [m ³ .s ⁻²]	Gravitační zrychlení [μm.s ⁻²]
Slunce	149 606 578	1.327x10 ³⁰	5929.50
Merkur	91 696 578	2.203x10 ¹³	0.00262
Venuše	41 396 578	3.249x10 ¹⁴	0.18956
Země	6 578	3.986x10 ¹⁴	9211970
Měsíc	377 822	4.903x10 ¹²	34.3453
Mars	78 313 422	4.283x10 ¹³	0.00698
Jupiter	628 963 422	1.267x10 ¹⁷	0.32024
Saturn	1 283 923 422	3.793x10 ¹⁶	0.02301
Uran	2 722 853 422	5.794x10 ¹⁵	0.00078
Neptun	4 345 453 422	6.835x10 ¹⁵	0.00036

Očekávaně hraje dominantní postavení gravitační vliv Země se zrychlením 9,21 m.s⁻², z ostatních těles má pak nejvýraznější roli Slunce, a to drobných 0,064% síly zemského pole. Měsíc má na družici v této výšce ve srovnání s gravitačním vlivem Země jen 0,00037% vliv. Ostatní planety, s výjimkou Jupiteru a Venuše, nedosahují ani hodnoty desetiny mikrometru za sekundu.

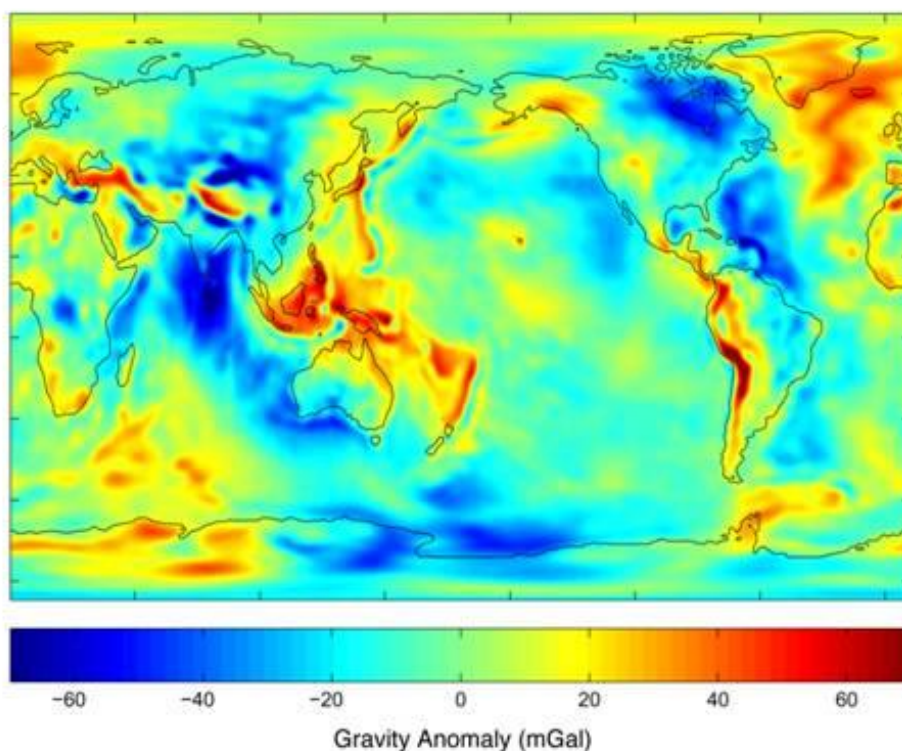
Zbytkový odpor atmosféry

Zemská atmosféra je plynným obalem Země, udržovaným na místě gravitačním působením. A ačkoliv je podle dohody vše nad Kármánovou hranicí (100 km) považováno za kosmický prostor, přítomnost atmosféry jsme schopni pocítit i nad ní a jsou to právě tělesa na nízké oběžné dráze Země (LEO), která s jejím vlivem musí dopředu počítat. Určit přesně její horní hranici je obtížné, obzvláště také proto, že je proměnná v závislosti na síle slunečního záření – při vyšší aktivitě se atmosféra rozpíná a její hustší vrstvy nalezneme ve vyšších polohách, než v období slunečního klidu. Srážky družice s molekulami vzduchu mají za následek zpomalování satelitu a tedy i následné snižování výšky perigea, což vede ke stále se zvyšující

magnitudě tohoto efektu. Z toho důvodu je obecně nutné družice na oběžných drahách udržovat opravnými manévry, jejichž četnost se může pohybovat od vícero oprav za jeden měsíc po korekční zážeh jednou za několik let.

Nehomogenní gravitační pole

V používaných rovnicích pro výpočet gravitačního zrychlení běžně používáme jen vzdálenost od středu Země, kam koncentrujeme celou její hmotnost. Takto by to ale platilo jen za předpokladu, že by Země byla dokonalá koule s homogenním rozložením hmoty. Tak tomu však není. Tvar Země se spíše podobá rotačnímu elipsoidu s polárním zploštěním, kde poloměr podél osy rotace je přibližně o 20 km kratší, než poloměr v rovině rovníku. Máme-li být přesnější, popisujeme tvar Země jako geoid (ekvipotenciální plochu, která je dána směrem lokální tíhové kolmice). Rozložení hmoty v rámci planety je velice různorodé s gravitačními anomáliemi, které ovlivňují skutečnou velikost tíhového zrychlení v závislosti na poloze. Zjišťování a zpřesňování rozložení těchto anomálií mělo za úkol již několik vesmírných misí. Na obrázku 15 je například ukázka model geoidu získaného na základě 111 dní mise GRACE.



Obrázek 15 - Gravitační anomálie zachycené družicemi GRACE [21]

Hlavní následky z nesymetrického gravitačního pole na oběžné dráhy na LEO, a to hlavně díky polárnímu zploštění, jdou dva: regrese uzlové přímky a precese přímky apsid. Nemusí se však nezbytně jednat o negativní jevy, neboť například regrese uzlové přímky je u polárních oběžných drah využívána pro heliosynchronní dráhy (dráhy, které se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí, jako obíhá Země kolem Slunce – neustále udržují stejnou polohu vůči Slunci).

6 Návrh programu v aplikaci Matlab

Doposud jsme celou problematiku řešili skládáním jednotlivých kuželoseček keplerovských drah. Situace tedy představovaly vždy problém dvou těles, každého se svou hmotností a gravitačním působením (Země a družice, Měsíce a družice). To bylo vhodné pro prvotní zhodnocení, ale abychom přesně dokázali posoudit vliv Měsíce na oběžné dráhy, je vhodnější využít systému, kde jeho vliv, ať je jakkoliv malý, nebude zanedbán. Pro jednoduchost budeme však stále pracovat s aproximací reálného systému, kde budeme uvažovat hlavně s těmito předpoklady:

1. Oběžnou dráhu Měsíce budeme brát jako kruhovou s poloosou 384400 km a adekvátní konstantní rychlostí oběhu.
2. Gravitační pole Země i Měsíce budeme považovat za homogenní.
3. Odchyly z ostatních vlivů (gravitace ostatních planet, odpor atmosféry, atd.) zanedbáme.

Jak jsme si již řekli, pokud pracujeme se systémem 3 objektů, analytické řešení je velice obtížné. Situaci si však můžeme zjednodušit za předpokladu, kdy třetí objekt má tak malou hmotnost, že na pohyb zbylých dvou kosmickým těles nemá téměř žádný vliv a může se reálně zanedbat. To je přesně náš případ a vzniklé soustavě říkáme omezený problém tří těles. Odvození pro nás zásadních vztahů si probereme v následující podkapitole.

6.1 Omezený problém tří těles

Mějme kartézskou soustavu souřadnic s osami x , y , z , kde jednotka na všech osách odpovídá 1 km. Rovina definovaná osami x a y představuje rovinu ekliptiky Měsíce, na kterou je kolmá osa z . Na ose x se nachází dva objekty, Země a Měsíc, s konstantní vzdáleností jejich středů $r_{ZM} = 384400$, každý o vlastní hmotnosti $m_Z = 5.9724 \times 10^{24}$ a $m_M = 0.07346 \times 10^{24}$ [11]. Jejich společné těžiště (barycentrum) udává počátek os souřadnic. Hmotnost celého systému je dána součtem obou těles, tzn. $m = m_Z + m_M$. Abychom dostali vzdálenost Země a Měsíce od počátku souřadnic, vypočteme podíl hmotnosti daného tělesa na hmotnosti celého systému a následně vynásobíme vzdáleností obou těles r_{ZM} . Aby rovnováha platila, menší z těles musí být pochopitelně ve větší vzdálenosti a obráceně, podle následujících vzorců:

$$x_Z = \frac{m_M}{m} * r_{ZM} \cong 4670,64 \quad x_M = \frac{m_Z}{m} * r_{ZM} \cong 379729,36 \quad (6.1)$$

To odpovídá údajům o barycentru, jak jsme si je uvedli v kapitole o orbitálních charakteristikách Měsíce. Měsíc tedy umístíme po směru kladné osy x do vzdálenosti x_M , střed Země bude v záporných hodnotách na ose x , tedy v bodě kdy $x = -x_Z$.

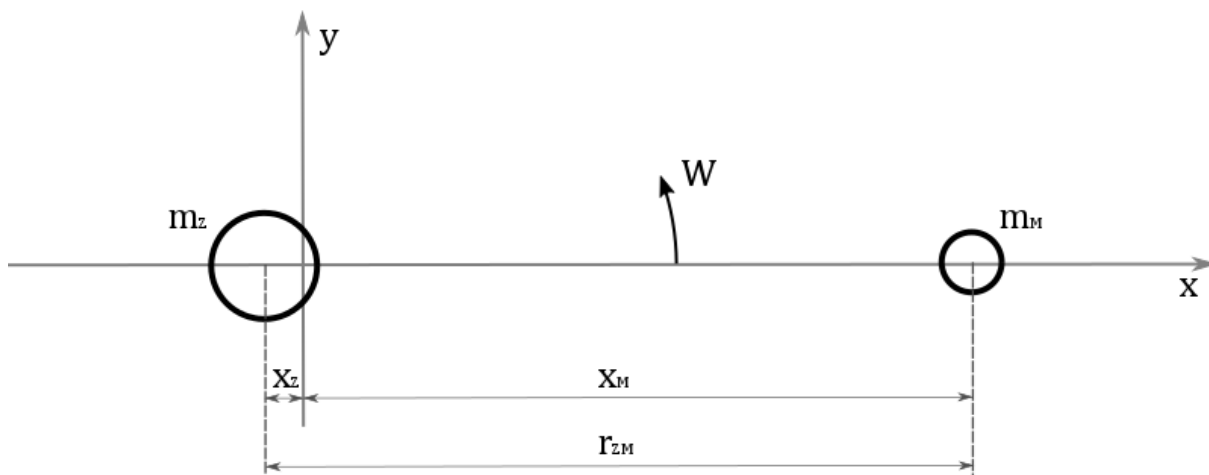
Takto stanovená soustava pochopitelně není stacionární, ale otáčí se konstantní úhlovou rychlostí proti směru hodinových ručiček (ve směru oběhu Měsíce) kolem osy z. Tato úhlová rychlost odpovídá za podmínek 1-3. stanovených v předchozí části pevné úhlové rychlosti oběhu Měsíce a Země kolem barycentra. Za použití vztahů pro obecnou úhlovou rychlost a dobu oběhu kruhové dráhy:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = 2\pi * \sqrt{r^3/\mu} \quad (6.2)$$

kde doba oběhu T závisí jen na vzdálenosti obou těles r_{ZM} a gravitačním parametru μ systému, který získáme vynásobením hmotnosti systému m gravitační konstantou κ (a upravením o rozměr jednotek). Poté jsme schopni odvodit vztah pro úhlovou rychlost rotace systému W :

$$W = \sqrt{\frac{\kappa * m}{r_{ZM}^3}} \cong 2,6653 \times 10^{-6} \text{ rad. s}^{-1} \quad (6.3)$$

Při prostorovém vyjádření má vektor rotace systému směr kladné osy z a velikost W . Přehledně je takto stanovená soustava souřadnic pohledem z kladného směru osy z (směru vektoru rotace systému) vyobrazena na následujícím obrázku 16. Vzdálenosti a poměry velikostí objektů nejsou v měřítku.



Obrázek 16 - Systém Země-Měsíc omezeného problému tří těles

Ve chvíli, kdy začneme do systému uvažovat družici, musíme si její pohyb rozdělit na několik složek. Vzhledem k relativnímu pohybu ve stanoveném systému je její popis primitivní, vyjádřený klasickými vektory polohy, rychlosti a zrychlení.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{rel} &= x\hat{\mathbf{I}} + y\hat{\mathbf{J}} + z\hat{\mathbf{K}} \\
\mathbf{v}_{rel} &= v_x\hat{\mathbf{I}} + v_y\hat{\mathbf{J}} + v_z\hat{\mathbf{K}} \\
\mathbf{a}_{rel} &= a_x\hat{\mathbf{I}} + a_y\hat{\mathbf{J}} + a_z\hat{\mathbf{K}}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Ty však kvůli rotaci referenčního rámu neodpovídají pevnému systému, musíme proto do rovnic aplikovat i vliv otáčení kolem osy z. V případě vektoru polohy je vliv minimální, pro získání stavu ve stacionárním systému ho stačí upravit rotační maticí o konkrétní úhel posunutí kolem osy z (případně změnou počátku). Při zjišťování rychlosti se nám již projeví dvě komponenty, samotná rychlost družice a rychlost způsobená konstantní úhlovou rychlostí, které musíme započítat a výsledný vektor rychlosti tak je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel} \tag{6.5}$$

kde \mathbf{W} představuje vektor úhlové rychlosti. Vektor akcelerace pak začleňuje v našem případě komponenty rovnou tří, a to odstředivé zrychlení (první závorka), coriolisovo zrychlení (druhá závorka) a samotné relativní zrychlení. Tímto získáváme kompletní vektorové vyjádření akcelerace a dosazením jednotlivých složek a pronásobením i kvantitativní vyjádření pomocí jednotkových vektorů $\hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ a $\hat{\mathbf{K}}$. [13] Zde je jasně vidět, že ve směru osy z nedochází k žádnému ovlivnění rotací systému a jediné zrychlení představuje právě skutečné zrychlení a_z .

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= [\mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r})] + [2\mathbf{W} \times \mathbf{v}_{rel}] + \mathbf{a}_{rel} \\
\mathbf{a} &= (a_x - 2Wv_x - W^2x)\hat{\mathbf{I}} + (a_y + 2Wv_y - W^2y)\hat{\mathbf{J}} + a_z\hat{\mathbf{K}}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Tímto jsme se dostali do stavu, kdy sice víme, jakým vším zrychlením bude rotující systém na družici působit, nicméně stále nevíme, jako hodnotu bude tato akcelerace mít. Při našich stanovených předpokladech budou jediné síly pocházet od Měsíce a Země, konkrétně vlivem gravitačního pole. Pokud se podíváme na rovnici Newtonova gravitačního zákona zredukovaného na působící gravitační zrychlení (4.1), vyjde nám hodnota gravitačního zrychlení působícího na družici v daném bodě od obou těles následovně:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Z + \mathbf{a}_M = -\frac{\kappa * m_Z}{r_Z^3} * \mathbf{r}_Z - \frac{\kappa * m_M}{r_M^3} * \mathbf{r}_M \tag{6.7}$$

kde \mathbf{r}_Z a \mathbf{r}_M představují polohový vektor (tedy přímý směr) od středů relevantních těles, tzn. obecný vektor polohy \mathbf{r}_{rel} posunutý v rámci souřadnice x o hodnotu $-x_Z$, resp. x_M . Členy r_Z a r_M vystihují velikost těchto vektorů (tedy pravou vzdálenost). Třetí mocnina místo druhé ve jmenovateli je nutná úprava pro zachování správné hodnoty při násobení vektory polohy a mínus před každým zrychlením vyjadřuje, že směr zrychlení je opačný oproti směru vektorů

polohy. Konečně sloučením rovnic (6.6) a (6.7) a sdružením vztahů pro jednotlivé osy získáváme vztahy pro gravitační zrychlení ve směru os x, y a z: [13]

$$\begin{aligned}
 a_x &= 2W * v_y + W^2 * x - \frac{\kappa * m_Z * (x + x_Z)}{r_Z^3} - \frac{\kappa * m_M * (x - x_M)}{r_M^3} \\
 a_y &= -2W * v_x + W^2 * y - \frac{\kappa * m_Z * y}{r_Z^3} - \frac{\kappa * m_M * y}{r_M^3} \\
 a_z &= -\frac{\kappa * m_Z * z}{r_Z^3} - \frac{\kappa * m_M * z}{r_M^3}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Tyto vztahy budou představovat stěžejní část našeho programu, neboť při použití počátečního známého stavového vektoru budeme schopni integrací pomocí vhodného programu zjistit propagaci družice v prostoru a čase a to včetně gravitačních manévrů vzhledem k Měsíci.

6.2 Aplikace progress do programu Matlab

Funkce `progress` představuje kód napsaný v programu Matlab od společnosti MathWorks, umožňující simulaci pohybu kosmického tělesa v trojrozměrném prostoru systému Země-Měsíc na základě jejich gravitačního působení. Funkce `progress` využívá řadu podfunkcí, které jsou její součástí, a také se odkazuje na funkce stojící externě, jmenovitě funkce `tle`, `coe_from_sv` a `rkf45`. Tyto funkce a podfunkce budou probrány samostatně v podkapitolách této části.

Cílem programu je co nejpřesněji vložení oběžné dráhy konkrétního satelitu do používaného systému souřadnic, a to získkem z publikovaných elementů dráhy, např. z internetové databáze www.space-track.org [22]. Následuje vložení manévru upravujícího rychlost a směr v konkrétním bodě na oběžné dráze. Posléze je program schopný provést numerickou integraci na základě rovnic zrychlení od Měsíce a Země a stanovit trajektorii družice po požadovaný zadaný čas. V každém bodě je funkce schopná vyhodnotit aktuální elementy dráhy, gravitační zrychlení Měsíce a Země a v případě dostatečného přiblížení k Měsíci i urychlení/zpomalení získané gravitačním prakem. Pro správné vyhodnocení počáteční polohy vůči Měsíci je nutné uvést orbitální elementy z doby mezi 1. lednem 1980 a 31. prosincem 2019.

Jak již bylo řečeno, vstupní data tvoří údaje z elementů dráhy, které jsme schopni vyhledat na stránce Space-Track, například pomocí katalogového čísla NORAD a nebo mezinárodním označením. Stránka poskytuje nejen aktuální data, nýbrž i údaje publikované v minulosti. Konkrétně využijeme 7 položek: z prvního řádku to je epocha, kterou rozdělíme na dvě číslice označující rok epochy a zbylých 14 znaků vyjadřující den a jeho frakci. Z druhého řádku postupně odečteme inklinaci, délku výstupního uzlu, excentricitu, argument šířky perigea a denní pohyb. Střední anomálie jako aktuální poloha satelitu nás konkrétně nezajímá, naším

cílem je pouze umístění specifické oběžné dráhy do prostoru a k tomu předchozí parametry stačí. Parametr pravé anomálie však můžeme použít pro určení polohy impulzního manévru ve specifickém bodě oběžné dráhy. Vstupní údaje umožňují zadat změnu rychlosti ve 3 směrech družice: prográdni/retrográdni (ve směru/proti směru současného vektoru rychlosti), normální/anti-normální (směr kolmý na rovinu určenou vektorem polohy a rychlosti, kladný směr je určen pravidlem pravé ruky) a radiální/anti-radiální (směr kolmý na rovinu určenou vektorem rychlosti a předchozí normálou, kladný směr míří vždy do středu orbity). Všechny rychlosti se zadávají v kilometrech za sekundu. Posledním vstupním parametrem jsou dva časy. Čas t_0 určuje prodlevu mezi časem určeným zadanou epochou a začátkem simulace pohybu družice, pokud by byla požadována (například z důvodu příznivější polohy Měsíce), proměnná $time$ stanovuje již dobu, po kterou bude pohyb družice simulován. Čas je zadáván v sekundách, nicméně můžeme také použít pohodlnější a přehlednější násobky operátorů `days`, `hours`, `minutes` (dnů, hodin a minut).

Jako příklad využijeme ruského komunikačního satelitu s velice excentrickou orbitální dráhou Molniya 1-86, katalogové číslo NORAD 22671, který byl vypuštěn 26. května 1993 z ruského kosmodromu v Plesecku. Jeho dvouřádkové elementy dráhy ze dne 1. ledna 2010 s označenými použitými prvky jsou:

```
1 22671U 93035A 10001.15974518 -.00000136 +00000-0 +32163-3 0 9999
2 22671 062.0800 112.4276 7372839 271.9257 013.4184 02.03222871 122048
```

Vstupní data, v případě vynechání jakéhokoliv upravujícího manévru a době simulace 3 dny s nulovou prodlevou počátku, budou pro funkci `progress` vypadat následovně:

```
%-----
%vstupní data získaná z publikovaných elementů dráhy TLE
eyear=10; %rok epochy
eday=001.15974518; %den epochy
incl=062.0800; %inklinace
asc=112.4276; %úhel od jarního bodu
e=.7372839; %excentricita
arg=271.9257; %argument perigea
mm=02.03222871; %mean motion - střední pohyb v otáčkách za den
%-----
%vstupní data pro manévr změny rychlosti
ta=0; %pravá anomálie
addp=0; %přídavek prográdni/retrográdni(-) rychlosti v km/s
addn=0; %přídavek normální/antinormální(-) rychlosti v km/s
addr=0; %přídavek radiální/antiradiální(-) rychlosti v km/s
%-----
%časová vstupní data
t0=0*days; %čas od spuštění systému do vypuštění družice
time=3*days; %čas simulace
%-----
```

Dalším krokem je zvolení požadovaných výstupů. Jejich volba probíhá označením adekvátní proměnné hodnotou 1 nebo 0, odpovídající volbě ano nebo ne. Kdybychom nechali označené všechny, v závislosti na dráze se nám může zobrazit nepřehledný shluk grafů a obrázců. Proto, vždy v závislosti na požadovaném výstupu, jsme schopni zvolit buď jednotlivé části, nebo jejich libovolnou kombinaci. Na výběr máme z 5 možností:

```
%-----
%volby výstupů
po=0; %počáteční obrazce polohy
fo=0; %výsledné dráhy
ed=0; %elementy dráhy
pz=0; %zrychlení Měsíce a Země
gm=1; %rychlost a gravitační manévr
%-----
```

po=1; zobrazí počáteční stav v geocentrické i programové soustavě souřadnic

fo=1; vykreslí dráhu vzhledem k otáčející se soustavě Země-Měsíc a stacionární soustavě

ed=1; zobrazí časový průběh elementů dráhy a dráhu vzhledem ke geocentrické soustavě souřadnic

pz=1; vykreslí gravitační působení Měsíce a Země v čase a graf podílu zrychlení Měsíce na celkovém zrychlení

gm=1; vykreslí průběh skutečné rychlosti v čase a v případě vstupu do gravitační sféry vlivu Měsíce i parametry gravitačního manévru

Tyto údaje představují jediný vstup do programu ze strany uživatele pro daný systém, ostatní procesy již řeší sama funkce bez potřeby jakéhokoliv dalšího nastavení. V následujících řádcích definujeme konstanty použitých objektů, tak jak jsme si je stanovili v kapitole 4.1, v podmínkách 1-3 na počátku kapitoly 6 a v teorii omezeného problému 3 těles, vždy převedené na používaný rozměr základní jednotky délky – km. Další na řadě je odkaz na první využívanou externí funkci `t1e`, které poskytneme počáteční zadané údaje a získáváme klasický stavový vektor kosmického tělesa pro funkční soustavu souřadnic (vektory `pos` a `vel`) a vektor `fpa` popisující natočení systému vzhledem ke geocentrické vztažné soustavě, potřebný pro zpětné vyhodnocení elementů dráhy. Přesný postup funkce `t1e` je uvedený v kapitole 6.2.1.

```
%odkaz na program t1e pro zisk vektoru polohy, rychlosti a natočení systému
[pos, vel, fpa]=t1e(eyear, eday, incl, asc, e, arg, mm, ta, addp, addn, addr, po);
```

Stavové vektory polohy a rychlosti jsou dále vloženy do šestiřádkového sloupcového vektoru počátečních podmínek `f0`, který tvoří spolu s počátečním časem simulace, dobou simulace a podfunkcí `rates`, obsahující rovnice působícího zrychlení, vstupy do funkce `rkf45`. Ta

představuje upravený algoritmus (například oproti funkci `ode45`, která je standartní součástí programu Matlab) pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic s variabilním časovým krokem metodou Runge-Kutta-Fehlberg. Tato funkce byla navržena profesorem Howard D. Curtisem z univerzity letectví Embry-Riddle ve městě Daytona Beach amerického státu Florida a byla poskytnuta jako příloha v jeho knize „*Orbital mechanics for engineering students*“ [13]. Jelikož funkce představuje pouze numerické řešení integrace daného zrychlení a počáteční polohy a rychlosti na stavový vektor v dalším kroku, její detailnější popis přesahuje zaměření této práce a spokojíme se proto s konstatováním, že jako výstup dostáváme sloupcový a n řádkový vektor časů t a korespondující šestisloupcovou a n řádkovou matici udávající stavový vektor polohy a rychlosti f pro ten daný čas, kde n představuje počet kroků, v jakých funkce `rkf45` trajektorii vyhodnotila.

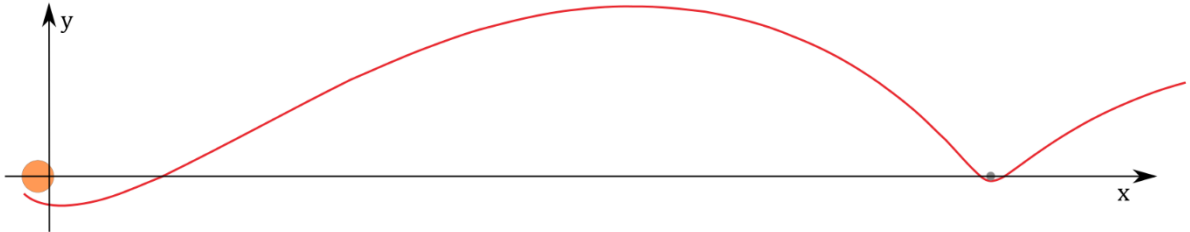
```
%funkce integrující data z podfunkce rates, výstup je vektor polohy
%a rychlosti pro daný bod v čase
tf=t0+time;
[t,f] = rkf45(@rates, [t0 tf], f0);
```

Podfunkce `rates` představuje vložení správných podmínek pro integraci funkcí `rkf45`, čili primárně stanovení 3 složek vektoru zrychlení pro danou počáteční polohu a rychlost, jak jsme si ho odvodili v předchozí kapitole. Dále definuje aktuální proměnné používané v rovnicích pro výpočet zrychlení jako složky daného stavového vektoru f sdružujícího vektor polohy a rychlosti a vypočítává současnou vzdálenost od středu Země a Měsíce, opět pro použití v rovnicích pro zjištění aktuální hodnoty a_x , a_y a a_z .

```
function dfdt = rates(~,f)
x = f(1);
y = f(2);
z = f(3);
vx = f(4);
vy = f(5);
vz = f(6);
rZ = norm([x - xZ, y, z]);
rM = norm([x - xM, y, z]);
ax = 2*W*vy + W^2*x - muZ*(x - xZ)/rZ^3 - muM*(x - xM)/rM^3;
ay = -2*W*vx + W^2*y - (muZ/rZ^3 + muM/rM^3)*y;
az = -(muZ/rZ^3 + muM/rM^3)*z;
dfdt = [vx; vy; vz; ax; ay; az];
end
```

V tuto chvíli máme stanoveny body, které definují trajektorii družice v soustavě, kde jsou Měsíc a Země umístěny na pevných pozicích podél osy x , tak jak jsme si to stanovili v předchozí kapitole a jak je vidět například na ukázkovém obrázku 17 (pro tento příklad jsme jako počáteční trajektorii vybrali urychlenou dráhu v rovině oběhu Měsíce). Ta nám sice perfektně ukazuje aktuální vzdálenosti družice od Měsíce a Země, takže přehledně víme, jak jsme se například k Měsíci přiblížili, nicméně zkrácením otáčení této soustavy vůbec nereprezentuje

skutečnou trajektorii družice (a tím pádem ani nepřipomíná jakoukoliv svojí částí úsek keplerovské dráhy). Co vidět pochopitelně je, i když zkresleně, je vliv Měsíce na tuto trajektorii, kdy při dostatečném přiblížení dochází k jejímu zakřivení směrem právě k Měsíci.



Obrázek 17 - Ukázková trajektorie dráhy v systému souřadnic Země-Měsíc

Proto, abychom mohli tuto trajektorii zobrazit i ve stacionárním systému, musíme si jej nejprve nastavit. Na rozdíl od otočné soustavy, kde zůstává Měsíc i Země na stejném místě, ve stacionárním systému jsou obě tělesa v pohybu vzhledem ke společnému barycentru, a to konstantní úhlovou rychlostí W , tak jak jsme ji vypočítali v rovnici (6.3). Počátek zůstává stejný, tudíž v čase $t=0$ protínají středy obou těles opět osu x . Za použití vektoru časů t jsme poté schopni pro každý další krok pomocí prosté goniometrie (tělesa se pohybují jen po souřadnicích x a y po kruhové dráze, vždy ve vzdálenosti x_M a x_Z) stanovit konkrétní polohu jak Měsíce, tak Země.

```
%souřadnice pohybu Měsíce      %souřadnice pohybu Země
l1 = xM*cos(W*t);              e1 = -xZ*sin(W*t-pi/2);
l2 = xM*sin(W*t);              e2 = -xZ*sin(W*t+pi);
l3 = 0*t;
```

V tuto chvíli se již zaměříme na transformaci souřadnic dráhy z otočného systému do systému stacionárního, který řeší odkaz na podfunkci `newxyz`. Zde si stanovíme algoritmus, který každý řádek matice f (tedy stav pro jeden diskretní čas) převede do stacionárního systému. Docílíme toho stanovením rotační matice `axisrot`, která pootočí vektor polohy a rychlosti okolo osy z vždy o úhel pootočení systému, který je funkcí daného času t . Tato operace je u vektoru polohy dostatečná, nicméně u vektoru rychlosti by nám pouze přemístila její relativní hodnotu vzhledem k otočnému systému. Pro získání skutečné rychlosti v novém rámu musíme nejprve převést relativní rychlost na pravou vůči barycentru, a až poté její vektor vynásobit rotační maticí. Toho docílíme součtem vektoru relativní rychlosti a vektoru zdánlivé rychlosti vyvolané rotací rámu, čili vektorovým součinem vektoru úhlové rychlosti systému a vektoru polohy (6.5).

```
function newxyz
for i=1:length(t) %přepoččet na nové souřadnice

    %matice rotace otočného systému na systém s pevnými osami
    axisrot=( [cos(W*t(i)) sin(W*t(i)) 0; -sin(W*t(i)) cos(W*t(i)) 0; 0 0 1]);
```



```

%vektorový součin pro přepočet relativní na reálnou rychlost
cp=cross(Wv, ([x(i) y(i) z(i)]));
%vektory polohy a rychlosti v systému s pevnými osami
newpos=axisrot'*[x(i) y(i) z(i)]';
newvel=axisrot'*[vx(i)+cp(1) vy(i)+cp(2) vz(i)+cp(3)]';

%nové souřadnice
xn(i)=newpos(1);
yn(i)=newpos(2);
zn(i)=newpos(3);
vxn(i)=newvel(1);
vyn(i)=newvel(2);
vzn(i)=newvel(3);

end
end

```

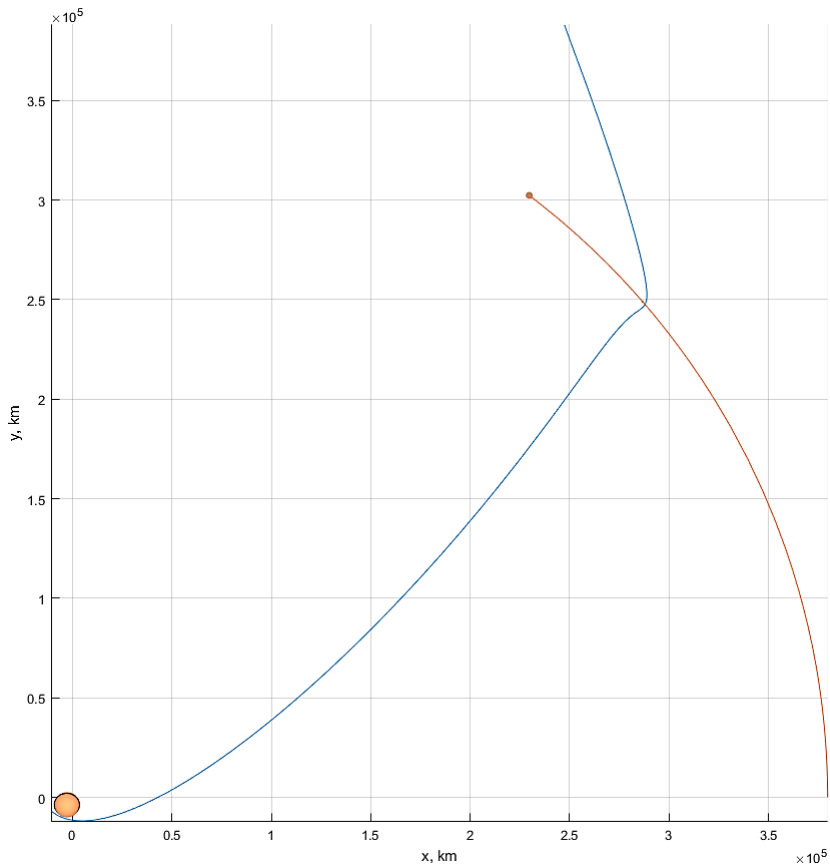
Výsledné složky následně poskládáme do stavové matice f_n , popisující polohu a rychlost družice pro všechny vyhodnocené diskrétní časy t ve stacionárním systému.

```

%vektory polohy a rychlosti pro pevný systém
fn=([xn' yn' zn' vxn' vyn' vzn']);

```

Nyní můžeme vzít všechna získaná data, a nechat Matlab vykreslit jak skutečnou dráhu, tak trajektorii Měsíce, Měsíc a Zemi na konci jejich dráhy, případně obraz Měsíce ve chvíli jeho největšího sblížení s družicí a dostaneme výstup zobrazený na obrázku 18. Tato trajektorie v reálném systému odpovídá trajektorii rotačního systému, jak jsme ji viděli na obrázku 17.



Obrázek 18 - Příklad výsledné trajektorie družice ve stacionárním systému

Tyto dva prostorové obrazce (ačkoliv jsou zde zobrazeny pro přehlednost jen v rovině), tedy průběh trajektorie ve stacionárním a rotačním systému, tvoří hlavní grafický výstup funkce `progress`.

Dalším krokem, a co do významu dat zřejmě tím nejpodstatnějším, je podfunkce `elements`. Ta ve své první části převezme stavovou matici `fn`, pro kterou je počátek souřadnic stanovený v barycentru, a upraví její první dva sloupce (souřadnice x a y vektoru polohy) o polohu Země odpovídající danému časovému kroku. Tímto jsme přesunuli střed souřadnic do středu Země. Následně aplikuje rotační matice `s1r`, `s2r` a `s3r`, které za pomoci hodnot získaných výstupním vektorem `fpa` z funkce `t1e` pootočí všechny reálné souřadnice stacionárního programového referenčního rámu opět do geocentrické soustavy. Tyto rotační matice mají podobu:

```
%rotační matice natočení systému pro převod na geocentrický systém
s1r=( [cosd(fpa(2)) 0 -sind(fpa(2));0 1 0;sind(fpa(2)) 0 cosd(fpa(2))] );
s2r=( [cosd(-fpa(1)) sind(-fpa(1)) 0;-sind(-fpa(1)) cosd(-fpa(1)) 0;0 0 1] );
s3r=( [1 0 0;0 cosd(-fpa(3)) sind(-fpa(3));0 -sind(-fpa(3)) cosd(-fpa(3))] );
```

a představují pootočení vztažné soustavy o 3 Eulerovy úhly. Na jejich konkrétní odvození se zaměříme při podrobnějším popisu funkce `t1e` v příští kapitole. Nová poloha určená stavovou maticí `fe` v soustavě podle univerzální definice geocentrické soustavy (jak jsme si ji popsali v kapitole 5.1.2) nám umožní snadnější výpočet elementů dráhy na základě stavového vektoru polohy a rychlosti popsaného v této soustavě. Tím se ostatně přesně zabývá funkce `coe_from_sv`, která je opět navržena profesorem Howard D. Curtisem a zveřejněna jako příloha v jeho knize „*Orbital mechanics for engineering students*“ [13]. Ta postupně odvozuje jednotlivé proměnné, ze kterých je na konci možné vypočítat vlastní orbitální elementy. Funkce samotná je napsána velice efektivně a pro naše potřeby se dokonale hodí, takže není potřeba ji nijak upravovat.

```
%převod reálných souřadnic do standartních geocentrických souřadnic
for s=1:length(t)

    epos=(s2r*s1r)*s3r*([fn(s,1)-e1(s) fn(s,2)-e2(s) fn(s,3)])';
    evel=(s2r*s1r)*s3r*([fn(s,4) fn(s,5) fn(s,6)])';

    fe(s,1)=epos(1);
    fe(s,2)=epos(2);
    fe(s,3)=epos(3);
    fe(s,4)=evel(1);
    fe(s,5)=evel(2);
    fe(s,6)=evel(3);

    coe(s,:)=coe_from_sv([fe(s,1) fe(s,2) fe(s,3)],...
                        [fe(s,4) fe(s,5) fe(s,6)],mu);
end
```

Proměnná `mu`, vložená jako poslední vstupní hodnota funkce `coe_from_sv`, představuje gravitační parametr celého systému, tedy násobek gravitační konstanty κ a součtu hmotností

obou těles m . Proměnná coe je maticí obsahující pro každý hodnocený časový okamžik t současné elementy dráhy. Při označení správné volby na začátku programu si je můžeme nechat vykreslit v grafech, ukazujících jejich změnu v průběhu doby simulace, nechat si vykreslit trajektorii družice v geocentrickém systému a v konzoli Matlabu získat textový výstup porovnávající počáteční (zadané, nicméně nezohledňující počáteční manévr) elementy dráhy s těmi konečnými. Podívejme se, jak by takový textový výstup vypadal pro příklad, který jsme použili u obrázků 17 a 18.

```
Konečné (počáteční) parametry dráhy:
Inklinace = 25.4284° (25.78°)
Délka vzestupného uzlu = 347.876° (349°)
Excentricita = 2.16763 (0)
Argument perigea = 186.127° (0°)
Velká poloosa = -292242km (9100.56km)
```

Tady je vidět, že v tomto případě by Měsíc urychlil družici až na hyperbolickou dráhu (excentricita větší než jedna a negativní poloosa), která by tedy měla výslednou rychlost větší, než je potřebná pro opuštění sféry vlivu Země (2. kosmická rychlost).

U této podfunkce je nakonec důležité poznamenat, že jako relativně spolehlivé vyhodnocení elementů dráhy musí být brány jen údaje, které nejsou pod akutním vlivem gravitace Měsíce, neboť po dobu pohybu v jeho gravitační sféře vlivu budou tyto údaje díky způsobu jejich získávání zkreslené. Při vyhodnocování, jak nám Měsíc ovlivnil trajektorii, tedy musíme zvolit dostatečný časový okamžik, abychom se adekvátně vzdálili. Tyto časové údaje nám poskytnou právě další podfunkce.

Podfunkce `gravitass` umožňuje nalezení polohy vstupu do sféry vlivu Měsíce porovnáním vzdálenosti od středu Měsíce $n-1$ kroku se vzdáleností v n -tém kroku. Pokud je vzdálenost v prvním kroku větší než hodnota sféry vlivu (jak jsme si ji vypočítali v kapitole 4.1.1) a v druhém kroku menší, algoritmus zaznamená aktuální vektor rychlosti jako rychlost v nekonečnu při vstupu do gravitačního manévru. My tím zároveň zjistíme i čas vstupu, protože ten odpovídá také n -tému řádku sloupcového vektoru časů t . Analogicky k tomuto jsme schopni zjistit výstupní čas a vektor rychlosti. Při použití skalárního součinu u těchto vektorů dokážeme jednoduše získat úhel, který mezi sebou svírají. Tento úhel spolu s rozdílem velikostí vstupního a výstupního vektoru rychlosti udává základní parametry každého gravitačního manévru: pootočení trajektorie a změnu rychlosti. V souladu s teorií z kapitoly 2.2.3 (a obrázkem 3) se tento úhel pootočení rovná rozdílu úhlů α a α' . V dané situaci ale tento rozdíl poskytuje lépe interpretovatelnou hodnotu, než úhly vztažené k, v případě Měsíce, relativně rychle se měnícím vektorem rychlosti jeho oběhu.

```

%algoritmus nálezu vstupu do a výstupu z soi Měsíce
GAc=0;
for u=2:length(t)
    if moon_d(u-1)>msoi && moon_d(u)<=msoi

        ventry=[fn(u,4) fn(u,5) fn(u,6)];
        ventryn=norm(ventry);

        GAc=GAc+1;
        fprintf('\n Rychlost při vstupu do %g. gravitačního manévru v',GAc)
        fprintf(' čase %g dne je %g km/s.',t(u)/days,ventryn)
    end
    if moon_d(u-1)<=msoi && moon_d(u)>msoi

        vexit=[fn(u,4) fn(u,5) fn(u,6)];
        vexitn=norm(vexit);

        %určení úhlu pootočení mezi vstupním a výstupním vektorem rychlosti
        dalfa=acos(dot(ventry,vexit)/(ventryn*vexitn))*(180/pi);

        fprintf('\n Rychlost při výstupu z %g. gravitačního manévru v',GAc)
        fprintf(' čase %g dne je %g km/s.\n',t(u)/days,vexitn)
        fprintf(' Úhel pootočení vektoru rychlosti je %.4g°',dalfa)
        fprintf(' a změna rychlosti je %g km/s.\n',vexitn-ventryn)
    end
end
end

```

Algoritmus využívá již dříve vygenerovaného sloupcového vektoru moon_d vzdáleností od středu Měsíce pro každý čas t, který posuzuje s hodnotou sféry vlivu msoi. Můžeme si také všimnout, že při vstupu/výstupu algoritmus rovnou vypisuje zjištěné hodnoty do konzole, kdy úhel pootočení a rozdíl rychlostí je možné zjistit pochopitelně až při opuštění gravitační sféry vlivu Měsíce. Pokud se podíváme opět na gravitační manévry družice, kterou jsme používali i k předchozím prezentacím funkcí programu, vyjde nám textový výstup podfunkce gravitass následovně:

```

Rychlost při vstupu do 1. gravitačního manévru v čase 2.53982 dne je 0.811763 km/s.
Rychlost při výstupu z 1. gravitačního manévru v čase 3.78404 dne je 1.79902 km/s.
Úhel pootočení vektoru rychlosti je 56.06° a změna rychlosti je 0.987259 km/s.

```

Spolu s tím podfunkce gravitass vykresluje i graf průběhu změny okamžité rychlosti v čase.

Poslední doplňující podfunkcí je moonforce, která využívá rovnice (4.1) pro stanovení gravitačního zrychlení působícího na družici v každém bodě jak od Měsíce, tak od Země.

```

for i=1:length(t)
    am(i)=(muM*1000)/(moon_d(i)^2); %gravitační zrychlení k Měsíci
    ae(i)=(muZ*1000)/(earth_d(i)^2); %gravitační zrychlení k Zemi
    amae(i)=am(i)/(ae(i)+am(i)); %podíl zrychlení Měsíce na celkovém zrychlení
end

```

Její výstup vykresluje jak graf samostatných zrychlení v čase, tak zrychlení pocházející z vlivu Měsíce jako podíl na celkovém zrychlení působícího na družici.

6.2.1 Funkce tle využívaná aplikací progress

Funkci `tle` používáme pro vytvoření počátečního stavu, se kterým je schopná pracovat hlavní funkce `progress`, tedy stavový vektor polohy a rychlosti správně umístěný do prostoru jejich systémových souřadnic odpovídajících zadané epoše. Vycházíme ze základních elementů dráhy, které ale implicitně neposkytují hlavní parametry, jak bychom je dokázali přímo použít na umístění orbity do prostoru. Jak víme, tvar elipsy je definitivně určený její excentricitou a délkou hlavní poloosy. Excentricitu explicitně vyjádřenou máme, ale hlavní poloosu musíme dopočítat pomocí vzorce vycházejícího z třetího Keplerova zákona: [13]

$$a = \sqrt[3]{\mu_Z * \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \quad (6.9)$$

kde μ_Z představuje gravitační parametr Země a T je perioda oběhu. Ta se v publikovaných elementech dráhy schovává pod údajem denního pohybu – počtu oběhů za jeden den. Pokud tedy vydělíme počet sekund za den (86400) touto hodnotou, dostáváme dobu trvání jednoho oběhu v sekundách, tedy periodu T . Pomocí těchto hodnot již máme spoustu možností kvantitativně vyjádřit hodnotu radiusvektoru perigea a rychlosti v perigeu rovnicemi: [13]

$$r_p = a * (1 - e) \quad v_p = \sqrt{\frac{\mu_Z}{a} * \frac{(1 + e)}{(1 - e)}} \quad (6.10)$$

Představme si nyní rovinu s osami x a y , kde směr osy x je totožný se směrem k jarnímu bodu, tak jak jsme si to definovali u standardní geocentrické soustavy souřadnic. Pokud umístíme družici do vzdálenosti r_p v kladném směru na osu x a rychlost určíme jako v_p v kladném směru osy y , dostaneme prvotní stavové vektory perigea, které by odpovídaly nulovým hodnotám tří úhlů pootočení: inklinaci, délce výstupního uzlu a argumentu perigea. Než však začneme systém natáčet, využijeme umístění pouze v rovině a opravíme tyto vektory o hodnotu pravé anomálie poupravenou rovnicí perifokálního rámu. [13] To nám posune vektor polohy a rychlosti do požadovaného místa na elipse odpovídajícího úhlu pravé anomálie. V programu Matlab bude tento prvotní vektor polohy a rychlosti vypadat následovně:

```
%výpočet vektoru polohy a rychlosti pro bod elipsy daný pravou anomálií  
pfpos=( (rp*vp)^2/(mu*(1+ex*cosd(ta))))*[cosd(ta) sind(ta) 0];  
pfvel=(mu/(rp*vp))*[-sind(ta) ex+cosd(ta) 0];
```

Zde μ představuje gravitační parametr Země, ex je hodnota excentricity a ta je pravá anomálie vyjádřená v úhlech, tak jak byla zadána na vstupu funkce `progress`. Výsledek nám již dává trojrozměrný vektor polohy `pfpos` a vektor rychlosti `pfvel`, který ale stále musíme pootočit do správné polohy vzhledem k Zemi. To uděláme za pomoci tří navazujících rotačních

matic, každé aplikující pootočení v jednom směru o zadaný úhel. Jak jsme si již řekli, na počátku jsme uvažovali s pozicí družice na ose x, tedy s nulovou hodnotou délky vzestupného uzlu, která se měří od jarního bodu. Použitím zadané hodnoty této délky pro pootočení družice proti směru hodinových ručiček se dostáváme do nového výstupního bodu uzlové přímky. Vhodným vynásobením matice rotace délky vzestupného uzlu `ascrot` a matice rotace inklinace `incrot` docílíme toho, že uzlovou přímku můžeme použít jako novou imaginární osu x (skutečná zůstává pochopitelně ve směru jarního bodu). Této imaginární osy využijeme právě u matice `incrot`, která aplikuje úhel inklinace a pootočí vektor polohy a rychlosti proti směru hodinových ručiček právě okolo imaginární osy x. Tím dojde na rozdíl od předchozí úpravy již ke změně roviny oběhu družice. Poslední operací je aplikace rotace argumentu perigea `argrot`. Ta musí pootočit vektor polohy a rychlosti v rámci nové roviny oběhu, čehož docílíme opět za využití imaginární polohy osy z, která je na tuto rovinu oběhu kolmá a okolo které dojde k pootočení proti směru hodinových ručiček o úhel argumentu perigea.

```
%matice rotace pro upravení polohy vzhledem k úhlu od jarního bodu
ascrot=([cosd(as) sind(as) 0; -sind(as) cosd(as) 0; 0 0 1]);
%matice rotace pro upravení polohy vzhledem k inklinaci
incrot=([1 0 0; 0 cosd(in) sind(in); 0 -sind(in) cosd(in)]);
%matice rotace pro upravení polohy vzhledem k argumentu perigea
argrot=([cosd(ar) sind(ar) 0; -sind(ar) cosd(ar) 0; 0 0 1]);

%vektor polohy vypočtený z elementů dráhy neupravený o pootočení systému
epos=(argrot*incrot*ascrot)'*pfpos';
%vektor rychlosti vypočtený z elementů dráhy neupravený o pootočení systému
evel=(argrot*incrot*ascrot)'*pfvel';
```

Parametry `as`, `in` a `ar` představují zadané hodnoty délky vzestupného uzlu, inklinace a argumentu perigea. Vektory polohy a rychlosti `epos` a `evel` již přesně vyjadřují polohu družice v rámci geocentrické soustavy.

Pro to, abychom mohli správně natočit orbitu z geocentrického systému do toho používaného programem `progress`, musíme nejprve získat vhodná data polohy Měsíce pro danou dobu. K tomu využijeme webové rozhraní systému Horizons od skupiny Solar Systems Dynamics, NASA, který poskytuje přesná data efemerid kosmických těles. [23] Jako sledované těleso zvolíme Měsíc, jako referenční bod střed Země a požadovaná data budeme chtít v období od 1. ledna 1980 00:00 do 15. ledna 2020 00:00, vždy s hodinovým intervalem zaznamenávajícím aktuální polohu v daný čas. Formát těchto dat může být různý, my volíme z důvodu jednoduchosti použití rovníkových souřadnic 2. druhu, konkrétně hodnoty rektascenze (jakožto úhlu od jarního bodu měřeného podél rovníku na východ) a deklinace (úhlu od rovníku kolmo směrem k pólům, kde směr k severnímu pólu je kladný). Nastavíme si, že tyto výstupy chceme mít vyjádřeny ve stupních a datový soubor má mít formát csv (comma seperated values). Takto je uložíme do textového souboru `radec.txt`, na který se budeme následně v podfunkci

odkazovat. Ve výsledku budou data v tomto souboru například pro první 4 hodiny vypadat takto:

```
Hodnoty rektascenze a deklinace Měsíce od 1.1.1980 do 15.1.2020
-----
83.09512,18.56954,
83.67240,18.61383,
84.24957,18.65632,
84.82663,18.69704,
```

Načtení dat z tohoto souboru je první věc, kterou udělá podfunkce `getparameters`, na kterou se odkazujeme právě kvůli získání úhlů natočení používaného systému souřadnic. Po aplikaci vylučovacích mechanismů, aby byl uživatel upozorněn, když by chtěl zvolit epochu z jiné doby, než kterou program pokrývá, podfunkce odečte správné pořadí hodiny a jí přiřadí aktuální hodnotu rektascenze a deklinace. Odvození rotačních matic systému na základě těchto údajů je poté velice podobné těm k otáčení o úhly orbitálních elementů, s tím rozdílem, že nyní se snažíme Měsíc umístit do polohy ve směru kladné osy x (takže vlastně natáčíme geocentrickou rovinu definovanou rovníkem). Nejprve využijeme hodnoty deklinace a Země pootočíme kolem osy y o daný úhel pomocí rotační matice `sys1rot`. Směr otáčení je po směru hodinových ručiček pro kladnou hodnotu deklinace a proti směru hodinových ručiček pro zápornou. Tím získáme na severní nebo jižní polokouli malý kruh definovaný hodnotou deklinace, kde se Měsíc může pro daný moment nacházet. Posléze aplikujeme pootočení o rektascenzi rotační maticí `sys2rot` okolo imaginární osy z (pootočené vlivem deklinace), která je osou rotace Země a pootočíme systém po směru hodinových ručiček. Tímto se přímka polohy měsíce, určená rektascenzí a deklinací, dostala do stavu identického směru, jaký má osa x. To, že se Měsíc v dané chvíli nachází na ose x a ostatní jeho souřadnice jsou nulové, samozřejmě neznamená, že dráha jeho rotace bude nutně svázána s rovinou, kde všechny hodnoty souřadnice z jsou nula. Musíme tedy odvodit úhel posledního pootočení definovaný sklonem roviny rotace Měsíce k systému souřadnic (aby se dráha stočila do takového stavu, jaký má tvar ve funkci `progress`).

Toho docílíme vytvořením pomocného vektoru, který získáme odkázáním se na hodnoty rektascenze a deklinace pro den odpovídající přibližně posunu Měsíce o 90° , čili cca. 7 dní. Na tento pomocný vektor aplikujeme stejný postup pootočení systému, takže spolu s polohou Měsíce na ose x bude jasně definovat rovinu jeho rotace. Samotný úhel, o který je pak potřeba systém natočit, je daný funkcí tangens podílu souřadnice z a souřadnice y pomocného vektoru.

```
%souřadnice pomocného vektoru polohy Měsíce 7 dní (~90°) po předchozí poloze
%tento vektor a vektor polohy Měsíce jasně určují rovinu oběhu měsíce
xm2=cosd(getRA(addition+7*24))*cosd(getDEC(addition+7*24))*r12;
ym2=sind(getRA(addition+7*24))*cosd(getDEC(addition+7*24))*r12;
zm2=sind(getDEC(addition+7*24))*r12;
```

```

%rotační matice pro převod pomocného vektoru do systému s Měsícem na ose x
sys1rot=[cosd(DEC) 0 -sind(DEC); 0 1 0; sind(DEC) 0 cosd(DEC)];
sys2rot=[cosd(-RA) sind(-RA) 0; -sind(-RA) cosd(-RA) 0; 0 0 1];
%rotace pomocného vektoru určujícího rovinu oběhu Měsíce
npos=(sys2rot*sys1rot)'*([xm2 ym2 zm2]');
%výpočet úhlu mezi osou y a rovinou rotace Měsíce
rot=atand(npos(3)/npos(2));

```

Proměnné `getRA` a `getDEC` jsou sloupcovými vektory hodnot rektascenze a deklinace pro celé stanovené období, proměnná `addition` je hodnotou pořadí dne od 1. ledna 1980, `r12` představuje vzdálenost Měsíce od středu Země pro poskytnutí rozměru pomocnému vektoru a `rot` je poslední úhel použitý v rotační matici `sys3rot`:

```

%matice rotace systému pro úpravu o natočení roviny oběhu Měsíce
sys3rot=[1 0 0; 0 cosd(-rot) sind(-rot); 0 -sind(-rot) cosd(-rot)];

```

Aplikací těchto 3 systémových rotačních matic na vektor polohy a rychlosti získaný z elementů dráhy dostáváme téměř polohu použitelnou ve funkci `progress.m`.

```

%výsledný vektor polohy a rychlosti při umístění Měsíce na ose x
tpos=(sys3rot'*(sys2rot*sys1rot)'*([epos(1) epos(2) epos(3)]))';
tmvel=(sys3rot'*(sys2rot*sys1rot)'*([evel(1) evel(2) evel(3)]))';

```

Ještě nám ale zbývají dva kroky, kde prvním je upravení rychlosti tak, jak byla zadána na vstupu funkce `progress`. Postup je jednoduchý, spočívá ve stanovení jednotkových vektorů (směr daného vektoru vydělený jeho velikostí) tří hlavních směrů (prográdní, normální, radiální), neboť k nim opačné směry se získají jejich zápornou hodnotou. Prográdní směr je určen samotným vektorem rychlosti. Normální směr je kolmý na rovinu rotace a zjistíme ho vektorovým součinem vektoru polohy a vektoru rychlosti, čímž si zařídíme i pomocí pravidla pravé ruky správné znaménko. Radiální vektor je kolmý na oba dva předchozí vektory, takže ho získáme opět jejich vektorovým součinem. Jeho kladný směr míří vždy dovnitř dané kuželosečky. Nakonec tyto jednotkové vektory vynásobíme adekvátními zadanými přídávky a přičteme k předchozímu vektoru rychlosti `tmvel`. Tyto směrové přídávky se samozřejmě nemusejí aplikovat postupně a ve výsledku nám jejich součet udává vektor manévru změny oběžné dráhy, jehož náročnost co do změny velikosti rychlosti se spolu s původní velikostí rychlosti vypíše do konzole.

Posledním krokem je upravení skutečného vektoru polohy a rychlosti vůči Zemi v počátku souřadnic o její polohu ve funkci `progress`, čili posunutí o hodnotu `xz`. Dále je nutné vypočítat relativní vektor rychlosti, tedy ten pravý opravit o rychlost způsobenou rotací systému. Postup je analogický k tomu, jak jsme ho již odvodili při popisu podfunkcí `progress`, takže není nutné ho zde znovu vypisovat. Po průchodu úpravami o relativní polohu a rychlost mají již výsledné vektory správný tvar a spolu s vektorem natočení systému, což je třírozměrný vektor sdružující informaci o rektascenzi, deklinaci a pootočení roviny ekliptiky Měsíce, tvoří finální výstup funkce `tle`.

6.3 Použití programu

Pro demonstraci použití programu využijeme navržené manévry v kapitole 4, jelikož nám konkrétně předvedou nejen práci programu jako takového, ale zároveň nám umožní srovnání jeho výsledků s vypočítanými výsledky. Tím budeme moci porovnat rozdíly mezi výpočtem metodou složených kuželoseček, které berou v potaz pohyb vždy vzhledem k jednomu tělesu, zatímco program na základě navržených rovnic zrychlení počítá s působením obou současně.

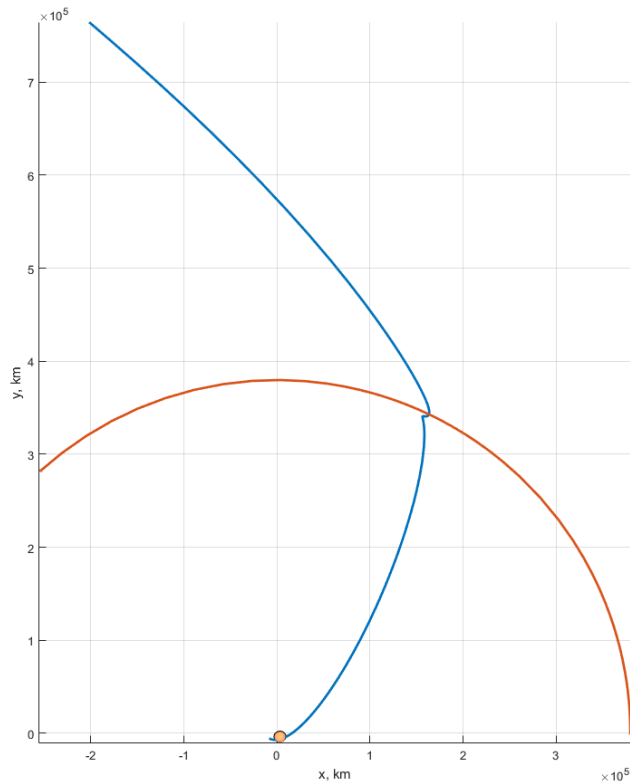
6.3.1 Aplikace urychlení na přechodovou dráhu do úrovně Měsíce

Jako první porovnáme urychlení na přechodovou dráhu, jejíž apogeum je v blízkosti Měsíce a ve kterém dojde ke vstupu do jeho SOI. V kapitole 4.2.1 jsme vypočítali, že z prvotní kruhové dráhy ve vzdálenosti 6571 km potřebujeme pro urychlení do apogea ve vzdálenosti 379000 km (hlavní poloosa je 192,786 km) zvýšit rychlost o 3,1318 km/s a potřebujeme jej provést v poloze 125,8° před Měsícem. To bude odpovídat výsledné výšce nad Měsícem 78 km. Urychlením jsme se poté dostali na únikovou trajektorii s přebytečnou hyperbolickou rychlostí 1,1415 km/s.

Jelikož tento příklad pracuje s počáteční oběžnou dráhou družice v rovině Měsíce, musíme si tento systém tak nastavit (úhlem od jarního bodu a inklinací korespondující s nakloněním dráhy Měsíce pro danou epochu). Zároveň musíme přepočítat počáteční poloměr dráhy na počet oběhů za den podle rovnice (5.1). Poté se již modifikací úhlu vypuštění a počáteční úpravy rychlosti snažíme získat stejné vstupní hodnoty gravitačního manévru, tedy výšku pericentra a vstupní rychlost. Tyto hodnoty vycházejí relativně dobře pro následující vstup funkce `progress`:

```
%-----  
%vstupní data získaná z publikovaných elementů dráhy TLE  
eyear=10; %rok epochy  
eday=005; %den epochy  
incl=25.7868; %inklinace  
asc=348.56578; %úhel od jarního bodu  
e=0; %excentricita  
arg=11.43422; %argument perigea  
mm=16.29881154; %mean motion - střední pohyb v otáčkách za den  
%-----  
%vstupní data pro manévr změny rychlosti  
ta=49; %pravá anomálie  
addp=3.13711; %přídavek prográdní/retrográdní(-) rychlosti v km/s  
addn=0; %přídavek normální/antinormální(-) rychlosti v km/s  
addr=0; %přídavek radiální/antiradiální(-) rychlosti v km/s  
%-----  
%časová vstupní data  
t0=0*days; %čas od spuštění systému do vypuštění družice  
time=10*days; %čas simulace  
%-----
```

Trajektorie dráhy v pevném systému je vykreslena na obrázku 19. Další grafické výstupy zobrazující změnu rychlosti a pohyb v rotačním systému jsou v přílohách 1 a 2.



Obrázek 19 - pevná soustava Země-Měsíc-družice

Textový výstup funkce `progress` pro tento příklad je následující:

Počáteční délka rektascenze (úhel od jarního bodu) Měsíce je 162.45° a deklinace je 2.95° .

Inklinace roviny Měsíce k rovině rovníku je 25.7768° .

Počáteční rychlost družice je 7.78849 km/s.
Delta v prvotního manévru je 3.13711 km/s.

Konečné (počáteční) elementy dráhy:
 Inklinace = 25.7878° (25.7868°)
 Délka vzestupného uzlu = 348.569° (348.566°)
 Excentricita = 1.12185 (0)
 Argument perigea = 175.878° (11.4342°)
 Velká poloosa = $-2.34045e+06$ km (6570.99 km)

Rychlost při vstupu do 1. gravitačního manévru v čase 4.19803 dne je 0.192222 km/s.

Rychlost při výstupu z 1. gravitačního manévru v čase 5.79707 dne je 1.41301 km/s.

Úhel pootočení vektoru rychlosti je 25.19° a změna rychlosti je 1.22079 km/s.

Nová dráha je hyperbolická s přebytkovou hyperbolickou rychlostí 0.522032 km/s.

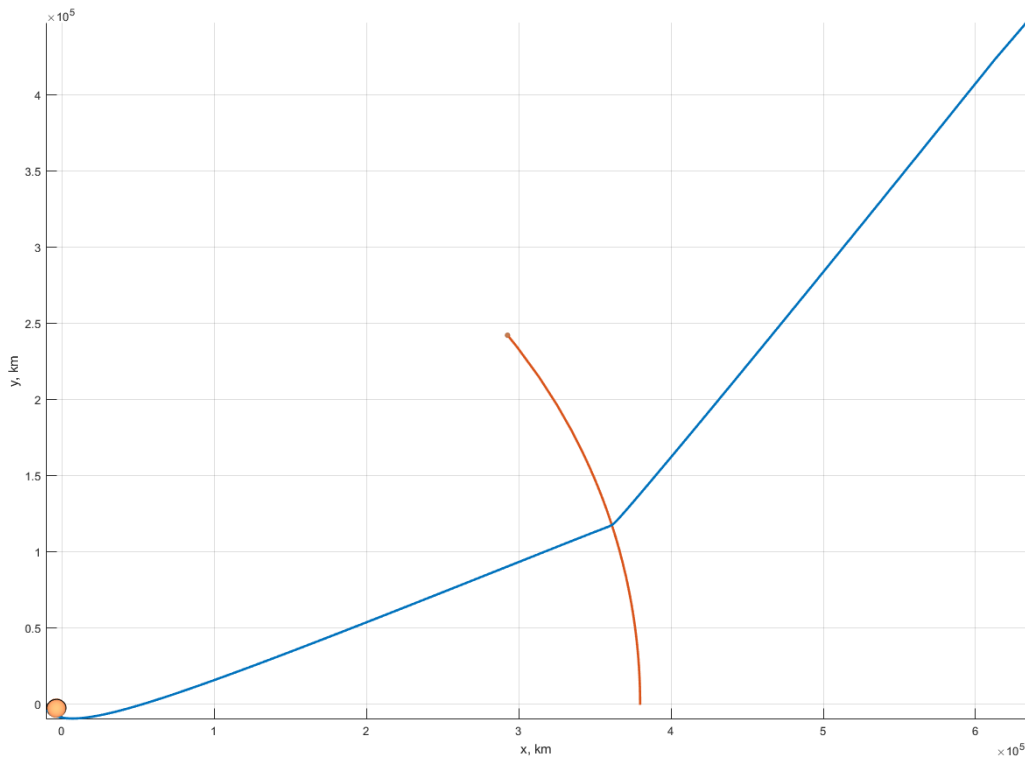
Minimální výška nad Měsícem je 73.7072 km v čase = 4.90739 dne.

Porovnáním těchto výstupů vidíme, že reálný ideální úhel vypuštění je 131° , což představuje rozdíl $5,2^\circ$. Počáteční rychlost urychlení je $3,1371 \text{ km/s}$, tedy hodnota o $5,3 \text{ m/s}$ vyšší než je ta teoreticky vypočítaná. To je dáno převážně vlivem polohy Měsíce, který na nás působí, i když nepatrně, už od nízké oběžné dráhy Země. Největší rozdíl dostáváme v hodnotě přebytkové hyperbolické rychlosti, jejíž velikost vychází na $0,5220 \text{ km/s}$, tedy o celých $619,5 \text{ m/s}$ pomalejší. Pokud bychom chtěli tuto hyperbolickou rychlost získat přímým urychlením z nízké oběžné dráhy, potřebovali bychom podle vzorce (4.14) rychlost $3,2385 \text{ km/s}$. To sice stále vzhledem k našemu počátečnímu urychlení představuje úsporu $101,4 \text{ m/s}$, nicméně konečná přebytková hyperbolická rychlost je výrazně menší, a to přímo ovlivňuje potenciál dalšího putování Sluneční soustavou. V konečném důsledku se však nedalo očekávat, že pouhým urychlením na úroveň Měsíce budeme dosahovat výslednou přebytkovou hyperbolickou rychlostí jakéhokoliv potenciálu dosažení například některých planet. Tento předpoklad se dá ale použít u dalšího použitého manévru.

6.3.2 Aplikace urychlení při únikové rychlosti

V druhém příkladu se nachází naše počáteční dráha opět v rovině Měsíce, závislé vstupní údaje to budou podobně jako u minulého příkladu reflektovat. Úhel vypuštění byl vypočítán na $134,2^\circ$ a počáteční urychlení přidalo družici rychlost o velikosti $3,4525 \text{ km/s}$, což odpovídá hyperbolické excentrické rychlosti $2,2443 \text{ km/s}$. Po prolétnutí okolo Měsíce ve výšce 52 km byla družice urychlena a její hyperbolická přebytková rychlost díky tomu stoupla na $2,9442 \text{ km/s}$. Na vstup do programu tentokrát vložíme napevno daný počáteční přídavek rychlosti a budeme pouze měnit úhel vypuštění tak, abychom okolo Měsíce proletěli ve stejné vzdálenosti periselenia. Tím můžeme sledovat, jaký rozdíl bude mezi vypočítanými a nasimulovanými hodnotami hyperbolické přebytkové rychlosti a jaké ušetřené rychlosti na počátečním manévru to odpovídá. Vstup do tohoto příkladu tedy vypadá následovně:

```
%-----
%vstupní data získaná z publikovaných elementů dráhy TLE
eyear=10; %rok epochy
eday=005; %den epochy
incl=25.7868; %inklinace
asc=348.56578; %úhel od jarního bodu
e=0; %excentricita
arg=11.43422; %argument perigea
mm=16.29881154; %mean motion - střední pohyb v otáčkách za den
%-----
%vstupní data pro manévr změny rychlosti
ta=26.474; %pravá anomálie
addp=3.4525; %přídavek prográdní/retrográdní(-) rychlosti v km/s
addn=0; %přídavek normální/antinormální(-) rychlosti v km/s
addr=0; %přídavek radiální/antiradiální(-) rychlosti v km/s
%-----
%časová vstupní data
t0=0*days; %čas od spuštění systému do vypuštění družice
time=3*days; %čas simulace
%-----
```



Obrázek 20 - pevná soustava Země-Měsíc-družice

Na obrázku 21 je opět vidět její trajektorie v pevném systému, zde je jasně zřetelný poznatek vycházející z rovnice (2.8) a tabulky 3, a to že čím rychleji se družice při střetnutí s Měsícem pohybuje, tím menší na ní má vliv a sílu změnit její trajektorii, tedy i předat část rychlosti. Pohled na rotační soustavu a změnu rychlosti v čase je v přílohách 3 a 4. Textový výstup tohoto příkladu vypadá takto:

Počáteční délka rektascenze (úhel od jarního bodu) Měsíce je 162.45° a deklinace je 2.95° .
Inklinace roviny Měsíce k rovině rovníku je 25.7768° .

Počáteční rychlost družice je 7.78849 km/s.
Delta v prvotního manévru je 3.4525 km/s.

Dráha je hyperbolická. Počáteční přebytková hyperbolická rychlost je 2.24471 km/s.

Konečné (počáteční) elementy dráhy:
Inklinace = 25.8038° (25.7868°)
Délka vzestupného uzlu = 348.573° (348.566°)
Excentricita = 4.55575 (0)
Argument perigea = 122.33° (11.4342°)
Velká poloosa = -51622.8 km (6570.99 km)

Rychlost při vstupu do 1. gravitačního manévru v čase 1.13845 dne je 2.71805 km/s.
Rychlost při výstupu z 1. gravitačního manévru v čase 1.73082 dne je 3.10326 km/s.

Úhel pootočení vektoru rychlosti je 28.67° a změna rychlosti je 0.385205 km/s.
Nová dráha je hyperbolická s přebytkovou hyperbolickou rychlostí 2.81579 km/s.

Minimální výška nad Měsícem je 50.3132 km v čase = 1.38516 dne.

Ten nám zároveň potvrzuje počáteční výpočet velikosti přebytkové hyperbolické rychlosti bez potkání Měsíce. Z ostatních parametrů především sledujeme, že úhel vypuštění je poměrně odlišný, kdy správnou hodnotu periselenia potkáme přibližně při vypuštění $153,5^\circ$, což je o celých $19,3^\circ$ rozdílná hodnota. Hlavní je však výsledná hyperbolická přebytková rychlost, která je při velikosti $2,8158$ km/s o $128,4$ m/s menší. Jestliže teoreticky vypočítané urychlení ušetřilo na počátečním manévru $140,4$ m/s, pro nasimulovanou dráhu to je $127,8$ m/s a to při nižší výsledné hyperbolické přebytkové rychlosti. Relativní shodu můžeme vidět ve vychýlení vektorů rychlosti o úhel β , který teoreticky vychází na $29,4^\circ$ a program vyhodnotil toto pootočení vektoru rychlosti jako $28,7^\circ$.

6.3.3 Aplikace změny inklinace

Tento příklad představuje zřejmě nejzajímavější a nejkomplicovanější manévr z těchto tří simulovaných, neboť se už nepohybujeme pouze v rovině, ale přímo v prostoru. V kapitole 4.3.2 jsme vypočítali, že pro získání správného sklonu vstupu se potřebujeme urychlit na protaženou elipsu rychlostí $3,1412$ km/s. O Měsíc se otočíme o výsledných 90° , přičemž nad ním proletíme ve vzdálenosti od centra 15250 km. To nám zajistí relativně minimální urychlení, takže zpět k Zemi se vrátíme v přibližně stejné výšce perigea, v jaké jsme ji opouštěli. Jak víme z předchozího příkladu, kvůli působení Měsíce po celé dráze letu budeme již při prvotním urychlení potřebovat vyšší rychlost, než jakou jsme si vypočítali v odpovídající kapitole. Konkrétní vstup tohoto příkladu do funkce `progress` vypadá takto:

```
%-----  
%vstupní data získaná z publikovaných elementů dráhy TLE  
eyear=10; %rok epochy  
eday=016.1; %den epochy  
incl=0; %inklinace  
asc=168; %úhel od jarního bodu  
e=0; %excentricita  
arg=10; %argument perigea  
mm=16.29881154; %mean motion - střední pohyb v otáčkách za den  
%-----  
%vstupní data pro manévr změny rychlosti  
ta=0; %pravá anomálie  
addp=3.154; %přídavek prográdní/retrográdní(-) rychlosti v km/s  
addn=0; %přídavek normální/antinormální(-) rychlosti v km/s  
addr=0; %přídavek radiální/antiradiální(-) rychlosti v km/s  
%-----  
%časová vstupní data  
t0=0*days; %čas od spuštění systému do vypuštění družice  
time=10*days; %čas simulace  
%-----
```

Tímto získáme trajektorii, jak je zobrazena na obrázku 21. Zde je kvůli komplikovanosti zobrazení prostorového manévru situace již trochu nepřehledná, pro její pohodlný průzkum však stačí vložit vstupní data uvedená výše do funkce `progress`. Další grafické výstupy najdeme v přílohách 5 a 6. Textový výstup má v tomto případě takovouto podobu:

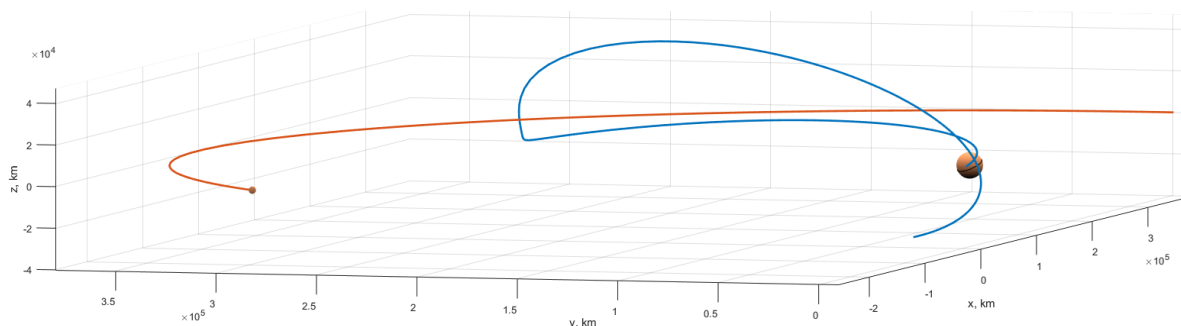
Počáteční délka rektascenze (úhel od jarního bodu) Měsíce je 306.181° a deklinace je -18° .
Inklinace roviny Měsíce k rovině rovníku je 25.7768° .

Počáteční rychlost družice je 7.78849 km/s.
Delta v prvotního manévru je 3.154 km/s.

Konečné (počáteční) elementy dráhy:
Inklinace = 90.8713° (0°)
Délka vzestupného uzlu = 349.795° (168°)
Excentricita = 0.966897 (0)
Argument perigea = 180.187° (12°)
Velká poloosa = 208294 km (6570.99 km)

Rychlost při vstupu do 1. gravitačního manévru v čase 2.94539 dne je 0.67238 km/s.
Rychlost při výstupu z 1. gravitačního manévru v čase 4.40303 dne je 0.167217 km/s.
Úhel pootočení vektoru rychlosti je 100° a změna rychlosti je -0.505163 km/s.

Minimální výška nad Měsícem je 16771.1 km v čase = 3.54551 dne.



Obrázek 21 - pevná soustava Země-Měsíc-družice

V první řadě si můžeme všimnout, že nová inklinace se velice přiblížila té požadované. Odchyłka 0.87° stupně nehraje zásadní roli, neboť pro její opravení v apogeju bude potřeba minimální, nicméně velice delikátní změna rychlosti. Oproti teoretickému příkladu jsme proletěli ve vzdálenosti od Měsíce vyšší, 16771 km v porovnání s vypočítanými 15250 km. Samotná změna inklinace tedy nevyžadovala žádný manévru, nicméně vyšším počátečním urychlením a adekvátním manévrem na opětovné zakulacení dráhy po změně inklinace dostáváme snížení ušetřené rychlosti, které odpovídá $12,8$ m/s při cestě k Měsíci a adekvátnímu na cestě zpět. Výsledné ušetření tedy vychází na $184,5$ m/s oproti změně inklinace urychlením na hranici SOI Země a provedením vlastního manévru změny inklinace tam.

7 Konkrétní návrh manévru pro satelit GSA Galileo

Dne 22. srpna 2014 byly za pomoci rakety Soyuz ST-B vyneseny první dva satelity navigačního systému Galileo s plnou schopností provozu FOC (Full operational capability, jímž předcházely ještě satelity s omezenou funkcí určené pro testování systému), které měly být součástí jeho hlavního uskupení v jedné ze tří oběžných rovin, čítajících v konečném stádiu celkem 30 družic. Satelity nesoucí obecný název Galileo 5 a Galileo 6 mají mezinárodní označení 2014-050A a 2014-050B a jejich katalogové číslo NORAD je 40128 a 40129. Vinou letové anomálie způsobené chybným fungováním polohových trysek vrchního stupně Fregat-M, který vedl k provedení zážehu s odchýlením o 35,3° od nominálního směru, byly družice umístěny na chybnou oběžnou dráhu. [24] Pokud chceme získat prvotní elementy dráhy, můžeme se podívat na jejich nejstarší publikované záznamy TLE, které podle internetové databáze Space-Track [22] jsou:

```

1 40128U 14050A 14234.81063098 -.00000033 00000-0 00000+0 0 9990
2 40128 049.6797 087.6359 2328174 024.4963 345.1356 02.04724969 02

1 40129U 14050B 14234.81061878 -.00000033 00000-0 00000+0 0 9995
2 40129 049.6850 087.6369 2330599 024.6476 345.0486 02.04929679 07

```

Vložením relevantních dat do funkce `progress` programu Matlab a dopočítáním perigea a apogea alternací vzorce (4.12) dostáváme počáteční orbitální charakteristiky, které porovnáme s publikovanými hodnotami požadovaných drah [24] v tabulce 8.

Tabulka 8 - orbitální elementy družic Galileo

Parametr	Galileo 5			Galileo 6		
	Nominální hodnoty	Stav podle TLE	Rozdíl	Nominální hodnoty	Stav podle TLE	Rozdíl
Inklinace [°]	55,12	49,68	-5,44	55,12	49,69	-5,44
Délka vzestupného uzlu [°]	100,66	87,64	-13,02	100,66	87,65	-13,01
Excentricita [1]	0,00027	0,23282	0,23255	0,00056	0,23306	0,23250
Argument perigea [°]	-	24,50	-	-	24,65	-
Délka velké poloosy [km]	29912,3	26199,2	-3713,1	29887,7	26181,7	-3706,0
Vzdálenost apogea [km]	29920,4	32298,8	2378,5	29904,4	32283,6	2379,2
Vzdálenost perigea [km]	29904,2	20099,6	-9804,7	29871,0	20079,8	-9791,2

Jak můžeme vidět, družice jsou na téměř identické velice excentrické dráze, se vzdáleností apogea vyšší a vzdáleností perigea nižší, než je nominální dráha. Inklinace je zároveň o 5

stupňů nižší a délka výstupního uzlu rovnou o 13° . Abychom mohli se satelitem cokoliv provést, musíme si stanovit, jaký rozpočet změny rychlosti družice mají. Ten není původně určen pro zásadní změnu oběžné dráhy, ale spíše pro udržování družice na stanoveném místě opravováním působících perturbací, případně pro nutný úhybný manévr při kolizní dráze s jiným objektem atd. Hodnota této rychlosti pro celou dobu mise satelitů Galileo je 170 m/s.[24]

Pokud chceme uvažovat jakoukoliv možnost změny orbitálních charakteristik pomocí vlivu Měsíce, musíme se dostat do jeho blízkosti. Nízký argument perigea předběžně validuje možnost protnutí dráhy Měsíce při urychlení družice v něm. Pomocí rovnice (2.3) vypočteme ze vzdálenosti perigea rychlost družice v tomto bodě. Ta vychází na 4,945 km/s. Prozatím uvažujme, že využijeme celý rozpočet družice pro urychlení k Měsíci. V případě impulzního manévru dostáváme v pericentru rychlost 5115 km/s. Pokud tuto hodnotu spolu se vzdáleností pericentra vložíme opět do rovnice vis-viva (2.3), získáme novou délku hlavní poloosy: 29517 km, která odpovídá hodnotě apogea 38934 km. Z tohoto pohledu je jasné, že i při použití celé dostupné změny rychlosti při cestě tam není možné se k Měsíci přiblížit tak, aby mohl mít zásadní vliv na změnu orbitálních elementů. Ve skutečnosti je rychlost nedostatečná i pro zakulacení trajektorie v požadované výšce. Použitím celého rozpočtu prográdním zážehem v apogeu dostáváme vzdálenost perigea: 24084 km.

Abychom alespoň zhodnotili vliv samotného Měsíce na družici, použijeme funkci `progress` pro simulaci dvou případů, jednoho v neopravené trajektorii (bílé řádky) a druhého v trajektorii zvyšující apogeum pro získání potenciálně vyššího vlivu gravitace Měsíce (oranžové řádky). Průběh budeme sledovat vždy po jednom oběhu Měsíce okolo Země (27,3217 dne), po dobu 10 oběhů. Porovnání obou výsledků je pak vidět v tabulce 9, kde hodnoty vyjadřují změnu oproti počátečnímu stavu.

Tabulka 9 - změny elementů dráhy během 10 oběhů Měsíce

Parametr	Počáteční hodnoty	1. oběh	2. oběh	3. oběh	4. oběh	5. oběh	6. oběh	7. oběh	8. oběh	9. oběh	10. oběh
Inklinace [°]	49,685	0,014	0,040	0,065	0,085	0,100	0,111	0,118	0,119	0,122	0,135
	49,685	0,019	0,038	0,058	0,076	0,090	0,100	0,110	0,118	0,125	0,132
Délka výstupního uzlu [°]	87,637	-0,010	-0,036	-0,075	-0,123	-0,173	-0,223	-0,269	-0,310	-0,340	-0,365
	87,637	-0,043	-0,080	-0,110	-0,137	-0,162	-0,188	-0,214	-0,242	-0,271	-0,302
Excentricita [1]	0,30323	0,00568	0,01891	0,02501	0,02699	0,02599	0,02289	0,01822	0,01099	-0,00238	0,00338
	0,21808	0,00247	0,00779	0,01347	0,01685	0,01951	0,02322	0,02477	0,02619	0,02640	0,02518
Argument perigea [°]	24,647	3,216	3,177	2,111	1,101	0,266	-0,326	-0,648	-1,004	0,544	4,065
	24,647	-1,701	-2,711	-2,555	-1,726	-1,203	-0,799	0,030	0,949	2,006	3,126
Délka velké poloosy [km]	28818,3	-158,50	43,00	214,30	316,70	395,60	454,50	467,80	280,20	-128,30	-163,30
	25680,1	55,40	117,40	214,20	318,70	334,00	268,90	254,20	208,10	160,70	110,50

Sledujeme, že výsledné hodnoty inklinace a délky výstupního uzlu jsou prakticky pro tuto situaci srovnatelné. Excentricitu je komplikované srovnávat, jelikož jsme ji změnili manévrem

urychlení, nicméně její změna u nové dráhy přichází rychleji a potom je utlumena, zatímco u neupravené dráhy se začíná výrazněji měnit až k 10. oběhu. Argument perigea víceméně chaoticky osciluje, nicméně procentuálně jsou jeho změny největší. To nehraje v našem případě žádnou zásadní roli, protože v požadované kruhové dráze je tento element irelevantní. Nová délka hlavní poloosy také vykazuje oscilující chování, přičemž u nové dráhy se zdá její amplituda v řádech desítek kilometrů vyšší. Obecně tedy můžeme dojít k závěru, že dosažení cílené změny elementů dráhy pomocí daného rozpočtu změny rychlosti jakékoliv z obou družic Galileo pomocí vlivu Měsíce je nereálné.

Od doby zadání této práce byly oběžné dráhy obou družic upraveny zvýšením jejich perigea přibližně do vzdálenosti 23600 km, vzhledem k použití menšího podílu dostupné kapacity změny rychlosti (160m/s), a to hlavně z důvodu umožnění palubním sensorům, pracujícím na základě sledování Země, bezproblémový provoz při zachování rezervy pro nutné budoucí úpravy orbity. Nestandardní dráha sice nedokáže plnit původní účel v plném rozsahu, ale alespoň bude sloužit pro zhodnocení schopnosti družic Galileo FOC mimo jejich navrhované dráhy.[24]

8 Závěr

Při zhodnocení práce se musíme podívat především na výsledky 4. kapitoly. V té jsme vypočítali, že použitím gravitačního manévru jsme v určitých případech skutečně schopni zmírnit nároky na požadovanou změnu rychlosti. V případě urychlení na úroveň Měsíce je manévř vhodný spíše pro plánované dráhy se vzdálenější orbitou okolo Země, než je ta Měsíce, kdy urychlení o Měsíc dokáže původní excentrickou dráhu zakulatit bez dalších nároků na vykonané manévry. Při větším urychlení na hyperbolickou dráhu se výsledný zisk rychlosti oproti přímému urychlení z nízké oběžné dráhy Země pohybuje přibližně mezi 100 a 200 m/s. Při úmyslu opuštění Zemské SOI jsme zjistili, že navržením manévru potkání Měsíce na této dráze jsme schopni také získat určitou část rychlosti navíc, která se ale zmenšuje se zvyšováním rychlosti průletu a pohybuje se opět přibližně od 200 m/s až k nule při nulovém potočení dráhy vlivem Měsíce při velké rychlosti. Otázkou zůstává zhodnocení výhodnosti tohoto ušetření v porovnání se zkomplikováním trajektorie a tím pádem i vyššími nároky na přesnost, vzhledem k tomu, že výsledná hodnota zisku rychlosti představuje jen zlomek v porovnání s nutným urychlením na únikovou dráhu z nízké oběžné dráhy (cca. 3,2 km/s). Jako nejvíce použitelný vychází manévř změny inklinace, kdy v porovnání se změnou inklinace urychlením do velké vzdálenosti a provedením úpravného manévru v ní jsme schopni eliminací tohoto manévru ušetřit v závislosti na požadované změně inklinace opět rychlost v oblasti blízké 200 m/s. Pravdou nicméně zůstává, že družice plánující takto velkou změnu inklinace by potřebovala obrovské zásoby paliva, jímž se pochopitelně běžné družice nevybavují, neboť v případě potřeby tuto inklinaci změnit by bylo spíše na zvážení vypuštění nové družice přímo na dráhu s novou inklinací.

Navržený program umožňuje simulaci těchto manévřů v idealizovaných podmínkách, nicméně vzhledem k uvažování gravitace obou těles současně nám dává reálnější představu o pohybu umístěné družice. Simulací předchozích vypočtených příkladů jsme zjistili, že tímto působením je skutečná rychlost urychlení k Měsíci vyšší a výsledné urychlení také nedosahuje tak velkých hodnot, což v důsledku vede k dalšímu snížení ušetřené rychlosti. Toto zjištění potvrzuje skutečnost, kdy při reálných misích je změny trajektorie pomocí Měsíce využíváno jen zřídka.

V poslední řadě jsme zhodnotili reálnost využití těchto manévřů na změnu orbity nevhodně umístěných družic Galileo na oběžné dráze a došli jsme k závěru, že žádným způsobem by nebyly v této situaci použitelné.

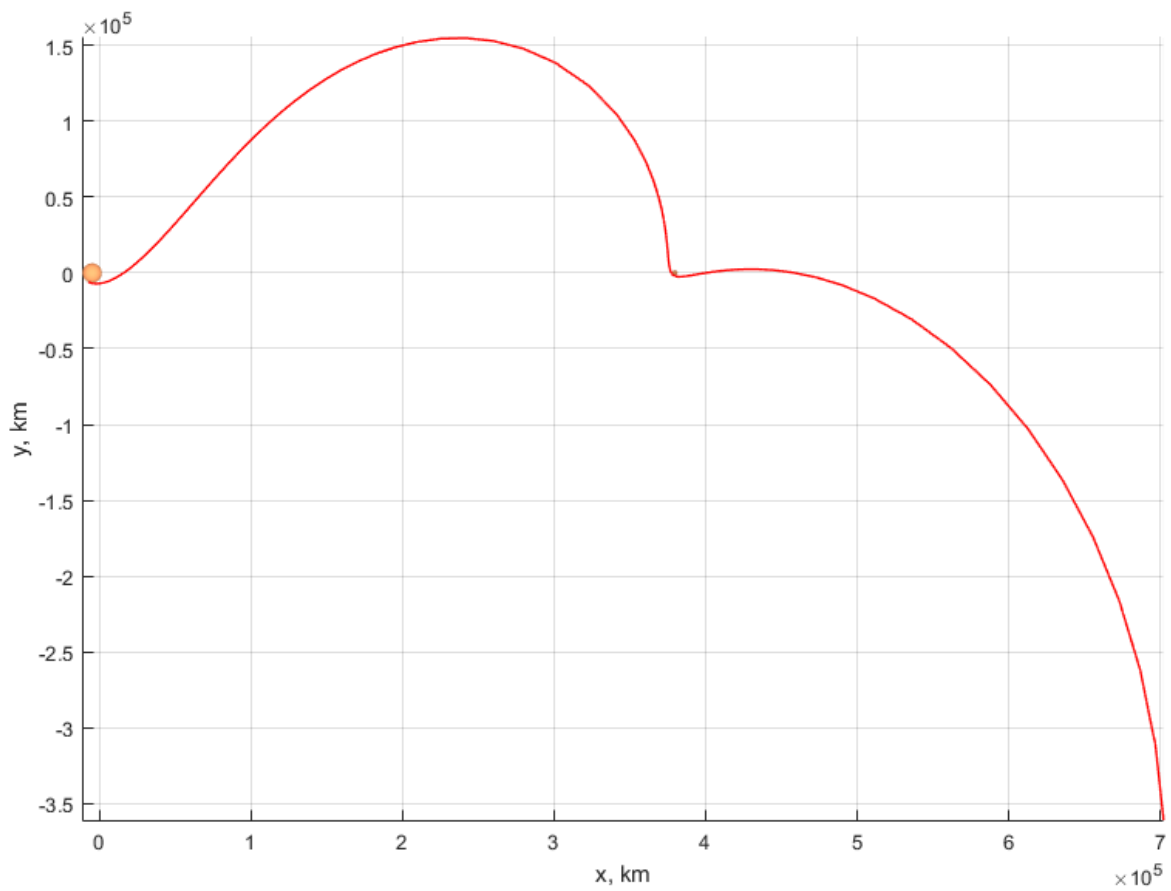
Zdroje

- [1] cartoon. *Jet Propulsion Laboratory* [online]. NASA/JPL-Caltech, 2010. [vid. 27.4.2016].
Dostupné z: <http://solarsystem.nasa.gov/basics/grav/primer.php>
- [2] JOHNSON, R.C. *The slingshot effect* [online]. Durham: University of Durham, 2003,
[vid. 27.4.2016]. Dostupné z: <http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/Psling/sling.pdf>
- [3] LUTZE, FREDERICK H. *Astromechanics Two-Body Problem* [online]. VirginiaTech, 2016
[vid. 2.5.2016]. Dostupné z:
<http://www.dept.aoe.vt.edu/~lutze/AOE4134/5OrbitCharacteristics.pdf>
- [4] Mariner 10. *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016
[vid. 25.5.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Mariner_10
- [5] Voyager 2. *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016
[vid. 25.5.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Voyager_2
- [6] Voyager-1-and-2-flight-paths. *Michel Baudin's Blog* [online]. Michel Baudin, 2013.
[vid. 25.5.2016]. Dostupné z: <http://michelbaudin.com/tag/orbit-chart/>
- [7] Ulysses (spacecraft). *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016
[vid. 25.5.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Ulysses_%28spacecraft%29
- [8] Rosetta (spacecraft). *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016
[vid. 26.5.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Rosetta_%28spacecraft%29
- [9] Trajectoire-Rosetta. *Wikipedia* [online]. Kulandru mor, 2014. [vid. 25.5.2016]. Dostupné z:
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trajectoire-Rosetta.svg>
- [10] Solar Probe Plus. *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016
[vid. 26.5.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_Probe_Plus
- [11] Moon Fact Sheet. *NASA Space Science Data Coordinated Archive* [online]. Greenbelt
(Maryland): NASA, 2016 [vid. 25.4.2016]. Dostupné z:
<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html>
- [12] Highest Point on the Moon. *NASA* [online]. Washington, D.C: NASA, 2010
[vid. 8.5.2016]. Dostupné z:
http://www.nasa.gov/mission_pages/LRO/multimedia/lroimages/lroc-20101027-highest.html
- [13] CURTIS, Howard D. *Orbital mechanics for engineering students*. 2nd ed. Amsterdam:
Butterworth-Heinemann, c2010. ISBN 18-561-7954-0.

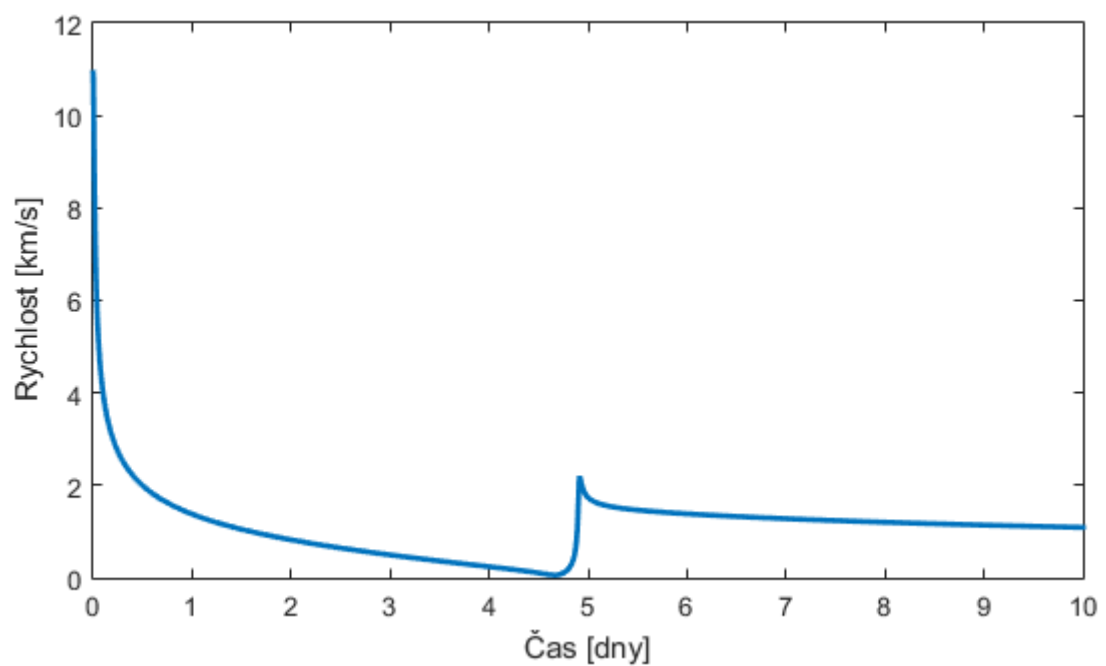
- [14] *Orbital Mechanics* [online]. Robert A. Braeunig, 2013 [vid. 24.5.2016]. Dostupné z: <http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm#maneuver>
- [15] Ellipse diagram. *the Earth Observatory* [online]. Washington, D.C: NASA, 2016. [vid. 24.4.2016]. Dostupné z: <http://www.earthobservatory.nasa.gov/Features/OrbitsCatalog/page1.php>
- [16] Orbit1 cs. *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2011. [vid. 24.4.2016]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Orbit1_cs.svg
- [17] Frequently Asked Questions: Two-Line Element Set Format. *Celestrak* [online]. Colorado Springs: Celestrak, 2014 [vid. 24.4.2016]. Dostupné z: <https://www.celestrak.com/columns/v04n03/#FAQ01>
- [18] Dvouřádkové elementy dráhy. In: *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016 [vid. 24.4.2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Dvouřádkové_elementy_dráhy
- [19] Satellite Catalog Number. *Wikipedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2016 [vid. 24.4.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Satellite_Catalog_Number
- [20] Earth Fact Sheet. *NASA Space Science Data Coordinated Archive* [online]. Greenbelt (Maryland): NASA, 2016 [vid. 25.4.2016]. Dostupné z: <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [21] 03_07_GRACE. *Gravity Recovery and Climate Experiment* [online]. The University of Texas, 2005. [vid. 25.4.2016]. Dostupné z: http://www.csr.utexas.edu/grace/gallery/gravity/03_07_GRACE.html
- [22] TLE Search. *Space-Track* [online]. Scitor, 2016 [vid. 17.5.2016]. Dostupné z: <https://www.space-track.org/#/tle>
- [23] HORIZONS Web-Interface. *HORIZONS System* [online]. NASA/JPL-Caltech, 2016 [vid. 19.5.2016]. Dostupné z: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>
- [24] NAVARRO-REYES, Daniel, Rubén CASTRO a Pere Ramos BOSCH. Galileo First FOC Launch: Recovery Mission Design. *International Symposium on Space Flight Dynamics* [online]. 2015, s. 18 [vid. 26.5.2016]. Dostupné z: http://issfd.org/2015/files/downloads/papers/057_Navarro-Reyes.pdf

Přílohy

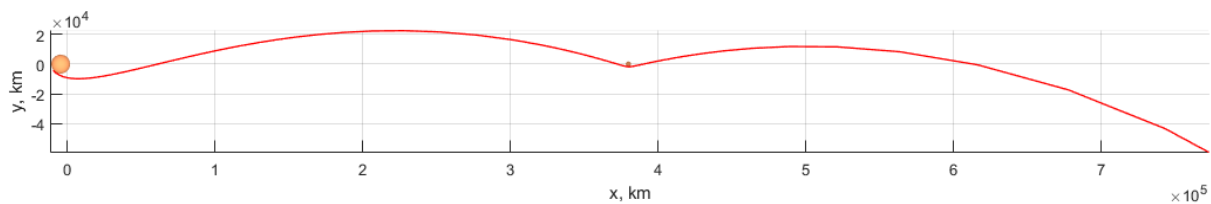
Příloha 1 – Rotační soustava Země-Měsíc-družice pro první příklad urychlení



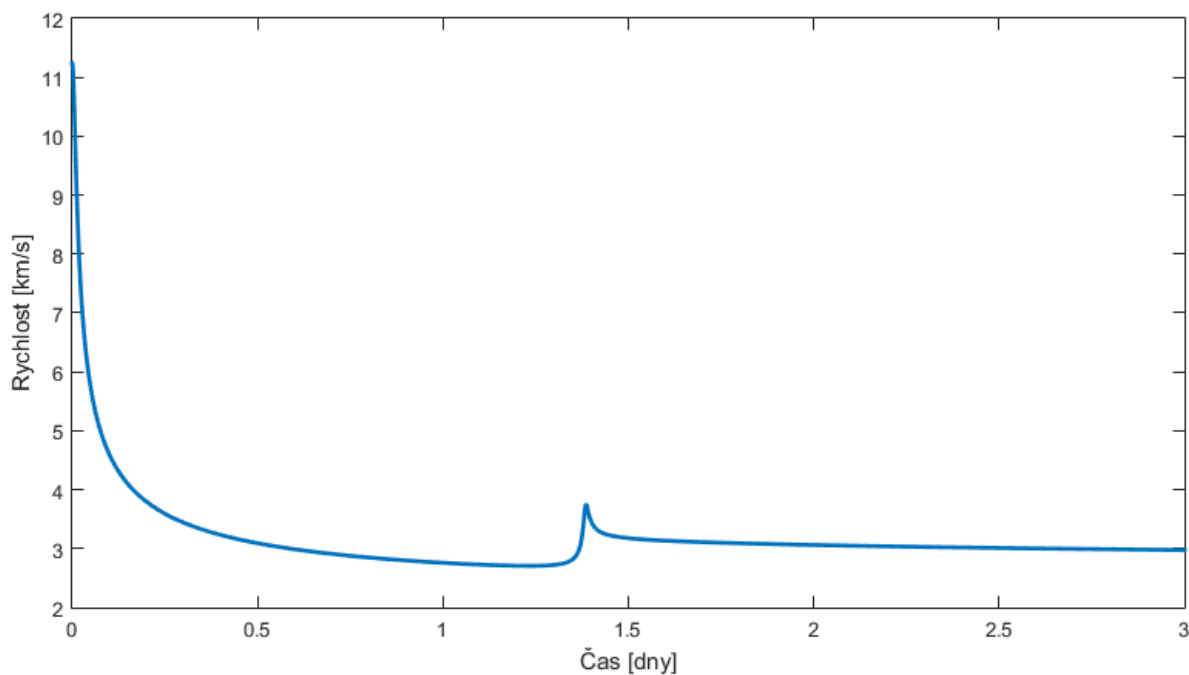
Příloha 2 – Změna rychlosti v čase pro první příklad urychlení



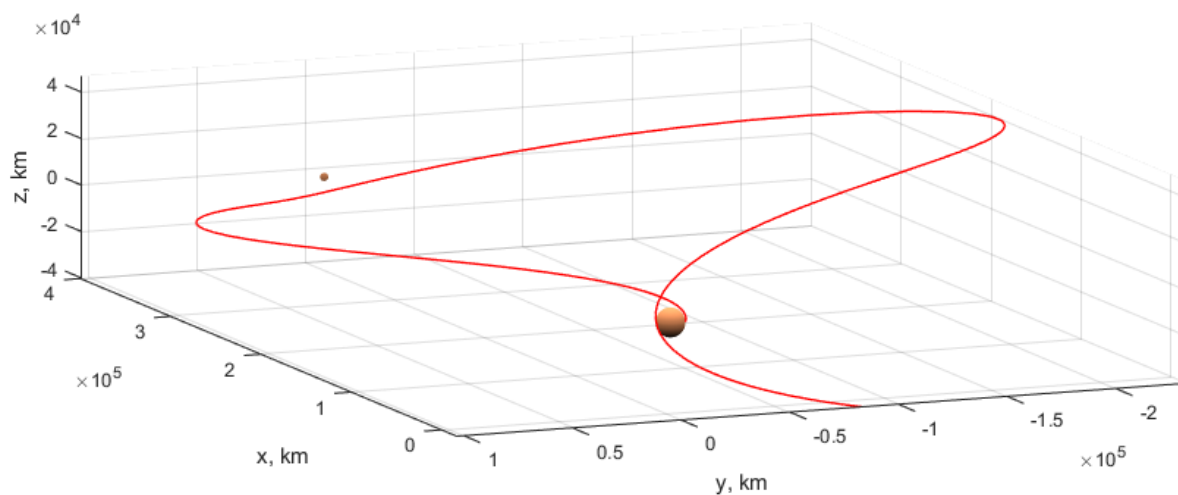
Příloha 3 – Rotační soustava Země-Měsíc-družíce pro druhý příklad urychlení



Příloha 4 – Změna rychlosti v čase pro druhý příklad urychlení



Příloha 5 – Rotační soustava Země-Měsíc-družíce pro příklad změny inklinace



Příloha 6 – Změna rychlosti v čase pro příklad změny inklinace

