České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra počítačů

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Zdeněk Straka**

Studijní program: Otevřená informatika
Obor: Umělá inteligence

Název tématu: **Tvorba modelu multisenzorní integrace pro reprezentaci peripersonálního prostoru pomocí metod strojového učení**

Pokyny pro vypracování:

1. Nastudujte problematiku použití metod strojového učení pro integraci informace z více senzorických modalit (multisensory integration).
2. Vyberte vhodnou metodu strojového učení pro integraci taktilních a vizuálních vstupů a vytvoření reprezentace peripersonálního prostoru.
3. Na vhodných vstupních datech naučte a otestujte vybraný algoritmus.
4. Interpretujte získané výsledky.
5. Diskutujte možnost použití vybrané metody pro reprezentaci peripersonálního prostoru humanoidního robota iCub, který je opatřen umělou kůží a kamerami pro stereovidění.

Seznam odborné literatury:

[1] Makin, Joseph G., Matthew R. Fellows, and Philip N. Sabes. "Learning multisensory integration and coordinate transformation via density estimation." PLoS Comput. Biol 9 (2013): e1003035.
[2] Roncone, A.; Hoffmann, M.; Pattacini, U. & Metta, G. (2015), "Learning peripersonal space representation through artificial skin for avoidance and reaching with whole body surface", in 'Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on', pp. 3366-3373.
[3] Lallee, Stephane, and Peter Ford Dominey. "Multi-modal convergence maps: from body schema and self-representation to mental imagery." Adaptive Behavior (2013): 1059712313488423.
[4] Ursino, Mauro, Cristiano Cuppini, and Elisa Magosso. "Neurocomputational approaches to modelling multisensory integration in the brain: a review." Neural Networks 60 (2014): 141-165.
[5] Magosso, Elisa, et al. "Visuotactile representation of peripersonal space: a neural network study." Neural computation 22.1 (2010): 190-243.

Vedoucí: Mgr. Matěj Hoffmann, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2016/2017

prof. Ing. Filip Železný, Ph.D.
vedoucí katedry

L.S.

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 13. 1. 2016

diplomová práce

Tvorba modelu multisenzorní integrace pro reprezentaci peripersonálního prostoru pomocí metod strojového učení

Zdeněk Straka

Květen 2016

Vedoucí práce: Mgr. Matěj Hoffmann, Ph.D.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, Katedra počítačů

Poděkování

V první řadě bych chtěl poděkovat vedoucímu této práce Mgr. Matějovi Hoffmannovi, Ph.D. za odbornou pomoc, vstřícnost a podporu. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a blízkým přátelům za podporu během celého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 23.5.2016 .....

Abstrakt

Cílem této práce je vytvořit model multisenzorní integrace se zaměřením na vizuální a taktilní modalitu, který je možné použít pro reprezentaci peripersonálního prostoru - prostoru těsně obklopujícího povrch těla. Model se učí bez učitele z dat senzorů vizuální a taktilní modality (umělá kůže), vytvořených ve virtuálním 2D prostoru. První část modelu se zaměřuje na prostorový aspekt problému: vizuální a taktilní modalita se v části prostoru překrývá a korelace stimulů z obou modalit v této části prostoru umožňují modelu naučit se souvislosti mezi stimuly z těchto modalit. První část je tvořena Omezeným Boltzmannovým strojem (RBM) a zajišťuje vizuo-taktilní integraci a kompaktnější reprezentaci stimulů. Druhou částí je Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj (CRBM), který přidává časovou dimenzi, a proto umožňuje učení se z přibližujících se stimulů k simulované kůži. Po naučení je možné predikovat ze stimulu v okolí kůže následující stimulaci kůže. Vstupem této CRBM je populace vizuo-taktilních multisenzorních neuronů, tvořících skrytou vrstvu zmíněné RBM. Model bude v budoucnu implementován do humanoidního robota s umělou kůží a tím rozšířen do 3D prostředí.

Klíčová slova

multisenzorní integrace; reprezentace peripersonálního prostoru; RBM; CRBM; strojové učení; učení bez učitele

Abstrakt

The goal of this thesis is to create a model of multisensory integration with focus on visual and tactile modalities, applied specifically to the problem of learning the representation of peripersonal space – the space immediately surrounding our bodies. The model is learned in an unsupervised way, using simulated data in a virtual 2D space perceived by visual and tactile sensors. The focus is first on the spatial aspects of the problem: the visual and tactile modalities overlap on the part of the hypothetical space that is covered by sensitive skin and the correlations thus induced allow the model to learn. The first part of the model is a Restricted Boltzmann Machine (RBM) and is used for visuo-tactile integration and compact representation of stimuli. The second part is a Conditional Restricted Boltzmann Machine (CRBM), which adds a temporal dimension and allows to learn from stimuli approaching the simulated skin and predict oncoming touch. The input of the CRBM is a population of multimodal (visuo-tactile) neurons that were formed in the hidden layer of the RBM. In the future, the model will be implemented on a humanoid robot with artificial skin and extended into a 3D environment.

Keywords

multisensory integration; representation of peripersonal space; RBM; CRBM; machine learning; unsupervised learning

Obsah

1 Úvod **1**

2 Multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru **3**
2.1 Neurobiologická motivace . . . 3
2.2 Význam pro robotiku . . . 4
2.3 Přehled existujících výpočetních modelů . . . 5
2.3.1 Biologicky inspirované modely . . . 5
2.3.2 Modely aplikované v robotice . . . 5
2.3.3 Bayesovské modely . . . 5

3 Omezený Boltzmannův stroj **7**
3.1 Energy based model . . . 7
3.2 Boltzmannův stroj . . . 8
3.2.1 Učení BM . . . 9
3.3 Omezený Boltzmannův stroj . . . 10
3.3.1 Vlastnosti RBM . . . 11
3.3.2 Učení RBM . . . 11
Gradient logaritmu věrohodnosti . . . 11
Gibbsovo vzorkování pro RBM . . . 12
Kontrastní divergence . . . 13
3.3.3 RBM s Poissonovými pozorovatelnými proměnnými . . . 14
3.4 Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj . . . 15
3.4.1 Učení CRBM . . . 16

4 Multisenzorní RBM **17**
4.1 Formulace úlohy . . . 17
4.2 Generování vstupních dat . . . 18
4.2.1 Generování konfigurace unimodálních neuronů při daném stimulu 18
4.2.2 Data pro učení a testování . . . 18
4.2.3 Volba parametrů pro generování dat . . . 19
4.3 Popis modelu . . . 20
4.4 Testování modelu . . . 20
4.4.1 Aktivace multisenzorních neuronů . . . 20
4.4.2 Dekódování konfigurace multisenzorních neuronů . . . 21
4.4.3 Princip testování . . . 22
4.4.4 Normální rozdělení polohy stimulu . . . 22
Odvození pro jednu modalitu . . . 23
Odvození pro dvě modality . . . 24
4.4.5 Testování optimalizovaného kritéria . . . 25
4.4.6 Interpretace střední hodnoty a kovarianční matice . . . 25
4.4.7 Okrajové jevy . . . 25
4.5 Experimenty . . . 27
4.5.1 Interpretace grafických znázornění . . . 27
4.5.2 Statistika hodnocení naučených multisenzorních RBM . . . 27
4.5.3 Reprezentace polohy stimulu neurony . . . 29
4.5.4 Vazba modalit . . . 31

4.5.5 Použití průměrování unimodálních neuronů a počet multisenzorních neuronů . . . 32
4.5.6 Délka učení a velikost trénovací množiny . . . 36
Stabilita učení . . . 37
Analýza naučených RBM . . . 38

5 Peripersonální CRBM **40**
5.1 Popis řešené úlohy . . . 40
5.2 Generování vstupních dat . . . 41
5.2.1 Generování trajektorií . . . 41
5.2.2 Generování trénovacích dvojic . . . 42
5.3 Popis modelu . . . 42
5.3.1 Učení . . . 42
5.3.2 Určení nejbližšího místa PPTM k danému vizuálnímu stimulu mimo PPTM . . . 43
5.4 Experimenty . . . 43
5.4.1 Testování . . . 43
5.4.2 Počet kroků Gibbsova vzorkování . . . 45
5.4.3 Stabilita učení . . . 46
5.4.4 Analýza peripersonální CRBM pro 100 multisenzorních neuronů 47
5.4.5 Analýza Peripersonální CRBM pro 200 multisenzorních neuronů 48
5.4.6 Peripersonální CRBM pro trajektorie odchýlené od kolmice k PPTM . . . 50

6 Diskuze **52**
6.1 Diskuze multisenzorní RBM . . . 52
6.1.1 RBM a multisenzorní integrace . . . 52
6.1.2 Bayesovsky optimální reprezentace . . . 53
6.1.3 Interpretace experimentů . . . 53
Vazba modalit . . . 53
Kombinace informací z obou modalit . . . 54
Průměrování odezvy unimodálních neuronů . . . 54
Počet multisenzorních neuronů . . . 54
6.2 Diskuze peripersonální CRBM . . . 55
6.2.1 Vliv vlastností trénovací množiny na učení . . . 56
6.2.2 Interpretace experimentů . . . 57
6.3 Použití pro reprezentaci peripersonálního prostoru humanoidního robota 57
Předzpracování dat . . . 57
6.3.1 Generování odezev unimodálních neuronů . . . 58
Vytvoření trénovací množiny . . . 58
Unimodální neurony nereprezentující normální rozdělení . . . 59
6.4 Vztah k ostatním modelům . . . 59

7 Závěr a budoucí výzkum **61**

Přílohy

A Appendix **63**
A.1 Příloha na CD . . . 63
A.2 Obrazové přílohy . . . 63

x

Zkratky

BM	Boltzmannův stroj (Boltzmann Machine)
CD	Kontrastní divergence (Contrastive Divergence)
CRBM	Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj (Conditional Restricted Boltzmann Machine)
EBM	Energy based model
KL	Kullback-Leibler divergence
MLE	Metoda maximální věrohodnosti (Maximum Likelihood Estimation)
MRF	Markovovské náhodné pole (Markov Random Field)
PPTM	Podprostor pokrytý taktilní modalitou ("kůží")
RBM	Omezený Boltzmannův stroj (Restricted Boltzmann Machine)

1 Úvod

Informace o okolním prostředí dostáváme z různých senzorických modalit. Ty je následně nutné vhodně integrovat a vytvořit jednotnou reprezentaci okolního světa, která nám umožní se v tomto světě orientovat a provádět akce nutné k přežití. Proces kombinování informací z různých senzorických modalit se nazývá multisenzorní integrace (nebo také multisenzorní fúze dat).

V této práci jsme se zaměřili na integraci taktilní a vizuální modality. V mozku lidí existují neurony, které integrují taktilní a vizuální informace z povrchu těla a jeho blízkého okolí. Tyto neurony zajišťují reprezentaci tzv. peripersonálního prostoru, který bezprostředně obklopuje tělo. Tento prostor má zvláštní důležitost, protože jeho narušení znamená zvýšené riziko srážky těla s předmětem z okolí. Taková srážka může vést k poškození vlastního těla nebo předmětu z okolí.

S vývojem robotiky je stále více běžné, že se roboti pohybují v méně kontrolovaném a méně předvídatelném prostředí. V takovém prostředí je velké riziko srážky části povrchu těla robota s předmětem z okolí. Proto lze očekávat, že reprezentace peripersonálního prostoru u robotů bude hrát čím dál důležitější roli.

Protože dosud bylo zcela výjimečné, že by povrch těla (či alespoň podstatná část) robotů byl pokryt taktilní modalitou, je výzkum vizuo-taktilní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru (která využívá taktilní modality) u robotů v začátcích. Humanoidní robot iCub [1] je nyní opatřen umělou kůží [2], a proto se nabízí vytvoření výpočetního modelu vizuo-taktilní multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru pro tuto robotickou platformu.

K tomuto účelu bylo rozhodnuto použít některou z metod strojového učení. To znamená, že k vytvoření modelu multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru dojde na základě učení z dat vytvořených stimulací robota. První výhoda tohoto přístupu je, že není nutné explicitně definovat přesné chování modelu (model se naučí "sám" z dat). Druhou výhodou je, že neurobiologické mechanismy multisenzorní integrace vykazují velkou plasticitu, a proto výpočetní model, který se učí z dat, může být užitečný také pro lepší pochopení těchto neurobiologických mechanismů učení. Nicméně tomuto aspektu se v této práci nevěnujeme.

Jako vhodné řešení se ukázal model postavený na Omezeném Boltzmannově stroji (RBM) a Podmíněném Omezeném Boltzmannově stroji (CRBM). Jedná se o hierarchický model, kde RBM zajišťuje multisenzorní integraci taktilních a vizuálních stimulů (dále označujeme jako multisenzorní RBM). Neurony skryté vrstvy tohoto RBM jsou pak vstupem CRBM, který zajišťuje reprezentaci peripersonálního prostoru (dále označujeme jako peripersonální CRBM).

Před implementací algoritmu do robota je běžné nejdříve důkladně otestovat a pochopit chování algoritmu na uměle vytvořených datech a až následně implementovat algoritmus do robota (zvláště pokud je potřeba velké množství dat pro učení). V této práci byl navržený model důkladně otestován na uměle vytvořených datech a na základě získaných výsledků byla provedena diskuze o vhodnosti použití modelu pro robota iCub. Implementace modelu do robota iCub je plánovaná jako pokračování této práce.

V druhé kapitole je popsána problematika multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru (přehled existujících výpočetních modelů, neurobiologická mo-

tivace, význam pro robotiku). Ve třetí kapitole je vyložena teorie RBM. V další kapitole je popsán a otestován model multisenzorní RBM. Pátá kapitola se zabývá peripersonální CRBM. V šesté kapitole je provedena diskuze získaných výsledků, vlastností použitého modelu a také je diskutována vhodnost modelu pro použití u robota iCub. Následuje závěr a popis plánovaného pokračování výzkumu.

2 Multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru

Tato kapitole se zabývá multisenzorní integrací s důrazem na integraci taktilní a vizuální modality. Stručně řečeno jedná se o problém, jak vhodně kombinovat informace z více modalit. S integrací taktilní a vizuální modality úzce souvisí reprezentace prostoru v blízkém okolí povrchu těla, který se odborně označuje jako peripersonální prostor.

Protože zvířata a lidé (zatím) zpravidla lépe zvládají interakci s komplexním a dynamickým prostředím než roboti, můžou být principy zpracování informace v mozku inspirací pro tvorbu algoritmů zpracování informace u robotů. Proto se v této kapitole nejdříve budeme zabývat neurobiologickou motivací tvorby výpočetního modelu multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru. Následně bude vysvětlen význam pro robotiku. Dále bude uveden přehled existujících výpočetních modelů multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru.

2.1 Neurobiologická motivace

Lidé a zvířata během svého života přijímají smyslovými orgány velké množství informací o okolním prostředí. Z těchto informací z různých smyslových orgánů je poté potřeba vytvořit jednotný obraz okolního prostředí. To znamená, že se informace z různých smyslových modalit musí vhodně kombinovat/integrovat. Tento proces se také označuje jako multisenzorní integrace a kvůli své velké důležitosti pro "správné" chování hraje v neurovědě zásadní roli [3, 4].

Nyní vysvětlíme pojem multisenzorní[1]. Neuron je multisenzorní jestliže (významně) reaguje na **unimodální** stimulaci[2] minimálně dvou smyslových modalit [4]. Příkladem může být vizuo-taktilní neuron, který reaguje na vizuální i taktilní stimulaci. Multisenzorní neurony zajišťují reprezentaci stimulů z různých modalit, které jsou způsobeny stejnou příčinou, jako jednu společnou událost. Příkladem může být aktivace vizuo-taktilního neuronu, který se aktivuje při pozorování (vizuální vjem) stimulace (např. prstem) určité části kůže (taktilní vjem). Neuron provádí multisenzorní integraci, pokud při současné stimulaci více modalit je jeho odezva výrazně větší, než při stimulaci těchto modalit jednotlivě. Typů integračního chování neuronů je více, např. při současné stimulaci více modalit může být odezva neuronu větší než suma odezev unimodálních stimulací. Tento typ integračního chování se označuje jako superaditivní [4]. Multisenzorní neurony byly pozorovány ve více odlišných částech mozku (pro přehled viz [4]), např. v "Superior Colliculus"[3] [5, 6, 7] nebo v temenním laloku [8, 9, 10].

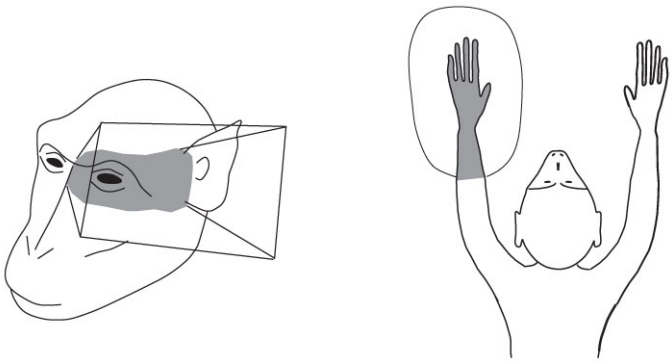
Specifickým případem multisenzorních neuronů jsou neurony reprezentující peripersonální prostor (prostor těsně obklopující povrch těla). Tyto neurony pálí při stimulaci povrchu těla (taktilní modality), ale i při pouhé přítomnosti stimulujícího objektu v blízkosti povrchu těla (vnímáno vizuální modalitou) [11]. Z toho je zřejmé, že vizuální

[1] Existuje ještě méně striktní definice pojmu multisenzorní, kterou ale v této práci nebudeme používat (viz [4]).

[2] Stimulována je v jeden okamžik pouze jedna modalita.

[3] Kvůli problematickému překladu slova "Superior Colliculus" ponechán latinský název.

receptivní pole těchto neuronů musí přesahovat povrch těla. To je znázorněno na Obr. 1. Tato vizuální receptivní pole se překrývají s taktilními receptivními poli (rozšiřují



Obrázek 1 Vizuo-taktilní multisenzorní neurony reprezentující peripersonální prostor.
Vizuo-taktilní multisenzorní neuron reaguje na taktilní stimulaci (dotek) určité části povrchu těla. Tyto taktilní receptivní pole jsou na obrázku znázorněna šedou barvou. Tento neuron reaguje také na vizuální stimulaci v blízkém okolí taktilních receptivních polí (na obrázku znázorněno jako ohraničená oblast prostoru kolem taktilních receptivních polí). Zdroj obrázku `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/c/c4/Coding_space_near_body.jpg` (licence CC BY-SA 3.0).

je mimo povrch těla) a pohybují se spolu s nimi v prostoru (jsou pevně "spojeny") [12], pravděpodobně na základě proprioceptivních informací o poloze dané části těla. Neurony reprezentující peripersonální prostor byly pozorovány např. v temenním laloku (u lidí [10], primátů [9, 13]). Vymezení peripersonálního prostoru je důležité např. pro zabránění poškození těla předměty z okolního prostředí, k pohybu v tomto prostředí či k manipulaci s předměty v okolí těla.

Důležité je také poznamenat, že schopnost integrace informace z různých modalit není vrozená, ale vyvíjí se během života [14, 15]. Plasticitu vykazuje také reprezentace peripersonálního prostoru [16, 17].

2.2 Význam pro robotiku

Roboti jsou často vybaveni více senzory, proto je potřeba řešit problém jak vhodně kombinovat informace z více modalit a vytvořit tak jednotný obraz okolního prostředí (obdobný problém jako u zvířat a lidí, viz 2.1). Tato problematika se v robotice označuje jako multisenzorní fúze dat (anglicky "multisensor data fusion") a je aktivní oblastí výzkumu v robotice [18]. V této práci se zaměříme na integraci informace taktilní a vizuální modality a s tím související reprezentaci peripersonálního prostoru.

Pokud robot ignoruje peripersonální prostor svého těla a zaměřuje se pouze na koncový člen ("chapadlo"), tak v proměnném a méně předvídatelném prostředí může dojít snadno ke střetu nějaké části jeho těla s předmětem z okolí. Pokud se bude jednat např. o střet s člověkem, může to mít tragické následky. Pro zabránění těchto střetů je proto nutné, aby si robot byl "vědom" celého povrchu svého těla a jeho blízkého okolí (peripersonálního prostoru).

Protože lze v budoucnu očekávat nasazení robotů v méně předvídatelném a více proměnném prostředí (např. prostředí, ve kterém se volně pohybují také lidé) než je dnes obvyklé, lze očekávat, že reprezentace peripersonálního prostoru bude hrát u robotů významnou roli.

2.3 Přehled existujících výpočetních modelů

Existuje celá řada výpočetních modelů multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru (pro přehled viz [4]).

2.3.1 Biologicky inspirované modely

Velkou skupinu tvoří biologicky inspirované modely. Jedná se o umělé neuronové sítě. Některé z těchto modelů se primárně snaží modelovat pozorované chování jednotlivých multisenzorních neuronů v mozku (např. [19, 20]). Další skupina těchto modelů se snaží modelovat neurofyziology pozorované chování (některé aspekty) celé skupiny multisenzorních neuronů (např. [21, 22]). Za zmínku stojí model, který se snaží přímo modelovat multisenzorní reprezentaci peripersonálního prostoru kolem ruky [23]. Tento model se skládá z populace vizuálních a taktilních unimodálních neuronů (pro levou i pravou ruku) a populace multisenzorních neuronů. Mezi unimodálními a multisenzorními neurony jsou dopředná i zpětná spojení. Aktivita neuronů je popsána diferenciální rovnicí prvního řádu.

2.3.2 Modely aplikované v robotice

Nyní se zaměříme na modely, které byly aplikovány v robotice. Některé z těchto modelů lze také zařadit mezi biologicky inspirované. V první řadě je důležité upozornit, že zatím je mezi robotickými platformami vzácné pokrytí celého (či alespoň podstatné části) povrchu těla taktilními senzory [24]. To je pravděpodobně příčina velmi omezeného počtu prací zabývajících se interakcí taktilní a vizuální modality u robotů. V jedné z těchto prací je představen model reprezentace peripersonálního prostoru, který je založen na asociaci mezi stimuly taktilní a vizuální modality [25]. Během učení dochází k modifikaci parametrů pravděpodobnostní funkce, která vzdálenosti od taxelu přiřazuje pravděpodobnost následné aktivace tohoto taxelu. Tento model byl úspěšně aplikován na humanoidním robotu. Zmíněný model byl dále rozšířen, aby bral v potaz také rychlost pohybu stimulujícího předmětu [24]. Další model, který pro reprezentaci peripersonálního prostoru využívá taktilní modality byl představen v [26]. Tento biologicky inspirovaný model slouží k reprezentaci peripersonálního prostoru obličeje. Jedná se o hierarchickou architekturu, která využívá SOM algotimus a Hebbovské učení. Během učení se robot opakovaně přibližuje rukou k obličeji. Peripersonální reprezentace zahrnuje taktilní, vizuální a proprioceptivní modalitu. Po naučení je možné předvídat kontakt přibližující se ruky s obličejem. V této práci probíhalo učení na robotovi v simulovaném prostředí. Dále existují další práce zabývající se peripersonálním prostorem, ale neberou již v potaz taktilní modalitu (např. [27, 28]), či hraje jen pomocnou roli (např. slouží jako "spoušť" pro asociaci vizuální a taktilní modality [29]).

2.3.3 Bayesovské modely

Bayesovské modely hrají dnes významnou roli ve výzkumu multisenzorní integrace (přehled viz [4]). Motivací těchto modelů je zjištění, že při celé řadě úloh, kdy mozek zpracovává neúplné informace, je rozhodování/konání blízko Bayesovsky optimálnímu rozhodování/konání (např. [30, 31, 32]). Jinak řečeno to také znamená, že mozek "spočítá" aposteriorní pravděpodobnost události/vjemu při daných neurčitých informacích (ze smyslových modalit) a na základě toho se (optimálně) rozhodne pro akci. Tyto modely proto řeší, jak se informace z různých modalit, s různou přesností, mají optimálně

kombinovat, aby vnímaný vjem byl co "nejpřesnější". Ilustrujme to nyní na případu integrace sluchové a vizuální modality. Mějme polohu stimulu $\boldsymbol{s}$ (např. poloha zvonícího telefonu). Označme reprezentaci tohoto stimulu ve vizuální modalitě symbolem $\boldsymbol{x}_{viz}$ a obdobně ve sluchové modalitě symbolem $\boldsymbol{x}_{sluch}$. Předpokládejme, že při dané poloze $\boldsymbol{s}$ stimulu jsou obě modality ($\boldsymbol{x}_{viz}$, $\boldsymbol{x}_{sluch}$) na sobě nezávislé. Bayesovský odhad polohy stimulu je možné určit, s použitím Bayesova pravidla, jako maximum aposteriorní pravděpodobnosti

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}_{viz}, \boldsymbol{x}_{sluch}) = \frac{p(\boldsymbol{x}_{viz}, \boldsymbol{x}_{sluch}|\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{s})}{p(\boldsymbol{x}_{viz}, \boldsymbol{x}_{sluch})} = \frac{p(\boldsymbol{x}_{viz}|\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{x}_{sluch}|\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{s})}{p(\boldsymbol{x}_{viz}, \boldsymbol{x}_{sluch})}. \tag{1}$$

Bayesovské modely jsou v souladu s behaviorálními studiemi, avšak stále není jasné jak jsou implementované na úrovni neuronů v nervové soustavě zvířat a lidí. Mějme populaci unimodálních neuronů velikosti N s konfigurací $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_N)$ (popisuje intenzitu pálení jednotlivých neuronů) a s Poissonovskými proměnnými (viz 3.3.3). Tato populace neuronů může, za předpokladu rovnoměrného rozdělení apriorní pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{s})$, kódovat normální rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ polohy stimulu $\boldsymbol{s}$ (viz (51)). V práci [33] bylo ukázáno, že pokud uvažujeme rovnoměrné rozdělení apriorní pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{s})$, tak populace neuronů s Poissonovskými proměnnými může provádět[4] Bayesovské odvozování jako lineární kombinaci konfigurací unimodálních neuronů. V navazující práci [34] bylo ukázáno, že pokud se k unimodálním populacím neuronů přidá populace kódující apriorní pravděpodobnost $p(\boldsymbol{s})$, tak je možné touto neuronovou sítí provádět Bayesovské odvozování i při obecnějším rozdělení pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{s})$ než je rovnoměrné.

[4]Předpokládá se, že škálování odezvy unimodálních neuronů závisí na věrohodnosti vnímaného stimulu. Dále se předpokládá stejný počet unimodálních neuronů ve všech modalitách a také, že neurony se stejným indexem (v různých modalitách) reagují na stejný stimul.

3 Omezený Boltzmannův stroj

Následující kapitola obsahuje stručný úvod do teorie Omezeného Boltzmannova stroje (RBM-Restricted Boltzmann Machine) a Podmíněného Omezeného Boltzmannova stroje (CRBM-Conditional Restricted Boltzmann Machine) s ohledem na potřeby této práce. RBM jsou používány jako generativní modely[1] mnoha rozdílných typů dat, např. digitálních obrazů [36] nebo uživatelského hodnocení filmů [37]. Dále se RBM používají jako stavební moduly "deep belief networks"[2] [36]. CRBM se používají pro modelování vícerozměrných časových řad [38], např. řeči [39]. Kapitola se snaží v logickém sledu ukázat cestu od obecnějších modelů až k RBM a jeho učícímu algoritmu. Tento algoritmus dnes hraje důležitou roli ve strojovém učení, zvláště v hlubokém učení[3] [40]. Kapitola začíná "Energy-Based Models"[4] (EBM), které tvoří teoretický základ RBM a CRBM. Následně jsou vyloženy Boltzmannovy stroje (BM-Boltzmann Machine), po kterých následuje jejich omezená varianta RBM. Na závěr jsou vyloženy CRBM. Pro detailnější popis problematiky RBM lze doporučit materiály [35, 40], pro CRBM [38]. Z těchto materiálů velká část této přehledové a teoretické kapitoly vychází.

3.1 Energy based model

EBM jsou statistické modely, které mají ke každé konfiguraci proměnných přiřazenou skalární veličinu nazývanou energie [41, 42]. Při odvozování (predikování nebo rozhodování) se nastaví a zafixují pozorované proměnné a hledá se konfigurace zbývajících proměnných, která minimalizuje energii. Při učení se hledá funkce energie, která přiřazuje nízkou hodnotu korektním konfiguracím zbývajících proměnných a vysokou hodnotu ostatním konfiguracím těchto proměnných [41]. EBM mohou definovat pravděpodobnostní funkci na náhodném vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)$ přes funkci energie E

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{-E(\boldsymbol{x})}}{Z}, \tag{2}$$

kde Z je normalizační člen

$$Z = \sum_{\boldsymbol{x}} e^{-E(\boldsymbol{x})}. \tag{3}$$

Pokud lze energii E vyjádřit jako součin funkce parametru modelu θ a funkce vstupu $E = \eta(\boldsymbol{\theta}) \cdot \phi(\boldsymbol{x})$, jedná se o "exponential family"[5] model [43].

V některých případech je vhodné zavést skryté proměnné $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, ..., H_n)$ pro zvýšení vyjadřovací síly modelu [40]. V takových případech je výhodné rozlišovat proměnné na pozorovatelné $\boldsymbol{x}$ (např. každá složka $\boldsymbol{x}$ může představovat jeden pixel digi-

[1] Generativní modely reprezentují pravděpodobnostní rozdělení vstupních vzorků. Cílem učení je modifikovat parametry modelu, aby reprezentované pravděpodobnostní rozdělení odpovídalo pravděpodobnostnímu rozdělení trénovací množiny [35].

[2] Kvůli problematickému překladu "deep belief networks" ponechán původní anglický název.

[3] Anglicky deep learning.

[4] Kvůli problematickému překladu "Energy-Based Models" ponechán původní anglický název.

[5] Kvůli problematickému překladu "exponential family" ponechán původní anglický název.

tálního obrazu) a skryté $\boldsymbol{h}$. Poté lze přepsat (2) a (3) jako

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \frac{e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}}{Z}, \tag{4}$$

$$Z = \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}, \tag{5}$$

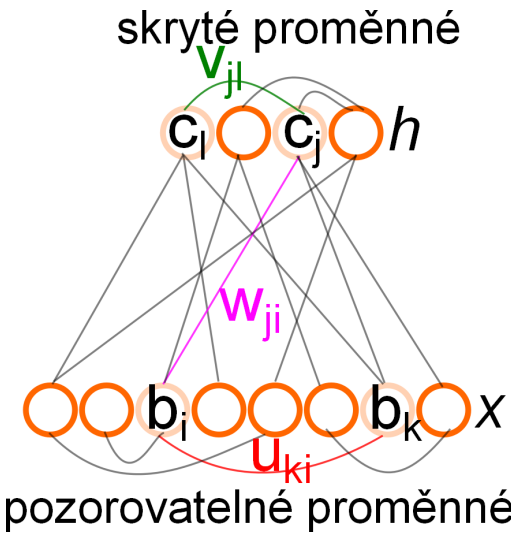
a vyjádřit pravděpodobnostní funkci na pozorovatelných proměnných jako

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \sum_{\boldsymbol{h}} \frac{e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}}{Z}. \tag{6}$$

Dále uvažovaná EBM jsou zároveň Markovovská náhodná pole (MRF-Markov random fields) [44]. Náhodné proměnné lze proto ztotožnit s vrcholy tohoto grafického modelu. Proto je možné aplikovat nástroje teorie grafických pravděpodobnostních modelů.

3.2 Boltzmannův stroj

BM je specifický typ EBM se skrytými proměnnými [45, 46, 47]. Skryté i pozorovatelné proměnné h_i, x_i nabývají binárních hodnot. Grafické znázornění je na Obr. 2. Energie



Obrázek 2 Architektura BM.
Pro přehlednost nejsou v obrázku některé hrany mezi proměnnými znázorněny.

je definována jako obecný polynom druhého stupně

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_i w_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l<k} x_k u_{kl} x_l - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l<k} h_k v_{kl} h_l - \sum_{j=1}^{m} b_j x_j - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i, \tag{7}$$

kde b_i je bias přiřazený pozorovatelné proměnné x_i, c_i je bias přiřazený skryté proměnné h_i a u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} představují váhy mezi příslušnými proměnnými (viz (7)). Matice $U = u_{ij}$ a $V = v_{ij}$ musí být symetrické. Parametry $u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, c_i, b_i$ budeme dále souhrnně označovat jako θ.

3.2.1 Učení BM

Učení bez učitele spočívá v naučení se (podstatných aspektů) neznámého pravděpodobnostního rozdělení q ze vzorků tohoto rozdělení. Předpokládejme daný graf BM. Učení pak spočívá ve vhodném nastavení parametrů θ. Uvažme nyní nastavení parametrů θ metodou maximální věrohodnosti (MLE – maximum likelihood estimation). Mějme množinu trénovacích dat $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_l\}$[6], o které předpokládáme, že jednotlivé vzorky byly získány nezávisle na sobě z neznámého pravděpodobnostního rozdělení q. MLE se snaží nastavit parametry θ, aby pravděpodobnost, že BM vygenerovala množinu S, byla co největší. Jinak řečeno snaží se maximalizovat funkci věrohodnosti. Funkce věrohodnosti $\mathcal{L} : \Theta \to \mathbb{R}$ při dané trénovací množině S mapuje parametry θ z Θ do $\mathcal{L}(\theta|S) = \prod_{i=1}^{l} p(\boldsymbol{x}_i|\theta)$. Při maximalizaci funkce věrohodnosti je výhodné maximalizovat logaritmus této funkce místo původní funkce (maximum se nezmění, protože logaritmus je monotonní funkce). Při následující úpravě bylo použito (6) a (5)

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(\theta|S) &= \ln \prod_{i=1}^{l} \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}_i) = \ln \prod_{i=1}^{l} p(\boldsymbol{x}_i|\theta) = \sum_{i=1}^{l} \ln p(\boldsymbol{x}_i|\theta) = \sum_{i=1}^{l} \ln \sum_{\boldsymbol{h}} \frac{e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})}}{Z} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \ln \frac{\sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})}}{\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}} = \sum_{i=1}^{l} [\ln \sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})} - \ln \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}].\end{aligned} \tag{8}$$

Protože pro BM není obecně možné najít maximum věrohodnosti analyticky, je nutné použít numerické aproximační metody. Dále budeme uvažovat metodu gradientního výstupu. Nyní vyjádříme gradient věrohodnosti při daném vzorku $\boldsymbol{x}_i$ vzhledem k θ. Na začátku budeme vycházet z vyjádření věrohodnosti pro vzorek $\boldsymbol{x}_i$ z (8) (jeden sčítanec z vnější sumy)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}_i)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\ln \sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})}) - \frac{\partial}{\partial \theta}(\ln \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}) \\ = -\frac{1}{\sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})}} \sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{h})} \frac{\partial E(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{h})}{\partial \theta} &+ \frac{1}{\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}} \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})} \frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial \theta} \\ &= -\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}_i) \frac{\partial E(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{h})}{\partial \theta} + \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) \frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial \theta},\end{aligned} \tag{9}$$

kde v posledním kroku bylo použito

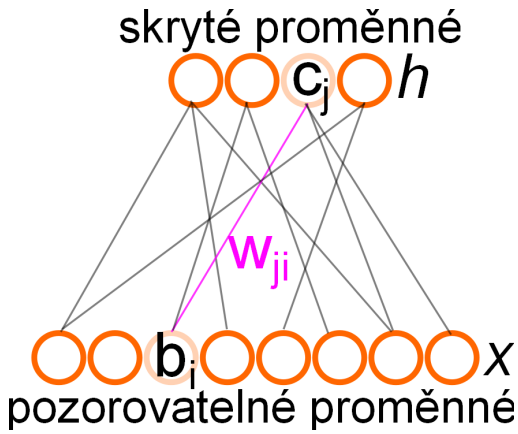
$$p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{p(\boldsymbol{x})} = \frac{\frac{1}{Z} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}}{\frac{1}{Z} \sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}} = \frac{e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}}{\sum_{\boldsymbol{h}} e^{-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}}. \tag{10}$$

První suma gradientu věrohodnosti z (9) jde přes všechna $\boldsymbol{h}$, kterých je exponenciálně mnoho vzhledem k počtu složek $\boldsymbol{h}$. Druhá suma jde dokonce navíc ještě přes všechna $\boldsymbol{x}$, kterých je také exponenciálně mnoho vzhledem k počtu složek $\boldsymbol{x}$. Sumy proto obsahují kvadrát exponenciálně mnoha sčítanců, není tedy možné gradient věrohodnosti takto spočítat. Tento problém lze (aproximativně) řešit použitím Gibbsova vzorkování (viz sekce 3.3.2) [47, 45]. Počítání gradientu věrohodnosti ale stále zůstane časově velmi náročné [40]. Proto je výhodné omezit se na BM, u kterých není přímá vazba mezi pozorovatelnými proměnnými mezi sebou, ani mezi skrytými proměnnými mezi sebou. To znamená, že x_i je nezávislé na x_j, pokud je dáno $\boldsymbol{h}$ a také, že h_i je nezávislé na h_j, pokud je dáno $\boldsymbol{x}$. Pro tento model (RBM) již existuje rychlý učící algoritmus a tento model bude popsán v následující podsekci.

[6] Čtenář by si měl povšimnout rozdílu mezi $\boldsymbol{x}_i$ a x_i. Symbol $\boldsymbol{x}_i$ značí i-tý vektor, kdežto symbol x_i značí i-tou složku vektoru.

3.3 Omezený Boltzmannův stroj

Grafické znázornění RBM je na Obr. 3 (srovnej s Obr. 2). Protože proměnné v jedné



Obrázek 3 Architektura RBM.
Pro přehlednost nejsou v obrázku některé hrany mezi pozorovatelnými a skrytými proměnnými znázorněny.

vrstvě spolu přímo neinteragují (proměnné jedné vrstvy jsou na sobě nezávislé, pokud je dána konfigurace druhé vrstvy) budou koeficienty z (7) $u_{kl} = 0$ a $v_{kl} = 0$ pro $\forall k, l$ a funkce energie bude mít jednodušší tvar

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_i w_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{m} b_j x_j - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i, \tag{11}$$

kde b_i je bias přiřazený pozorovatelné proměnné x_i, c_i je bias přiřazený skryté proměnné h_i a w_{ij} je váha přiřazená dvojici proměnných h_i a x_j (viz Obr. 3). Modely v tomto tvaru se nejdříve nazývaly jako "Harmonium"[7] [48].

Nyní provedeme faktorizaci a formálně ukážeme nezávislost proměnných v jedné vrstvě (skryté nebo pozorovatelné), pokud je daná konfigurace druhé vrstvy (pro přehlednost použijeme maticový zápis funkce energie (11)). Vyjdeme ze vztahu (10)

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}) &= \frac{e^{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}^T W\boldsymbol{x}}}{\sum_{\tilde{\boldsymbol{h}}} e^{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{h}}+\tilde{\boldsymbol{h}}^T W\boldsymbol{x}}} \\ &= \frac{\prod_i e^{c_i h_i + h_i W_i \boldsymbol{x}}}{\prod_i \sum_{\tilde{h_i}} e^{c_i \tilde{h_i} + \tilde{h_i} W_i \boldsymbol{x}}} \\ &= \prod_i \frac{e^{h_i(c_i + W_i\boldsymbol{x})}}{\sum_{\tilde{h_i}} e^{\tilde{h_i}(c_i + W_i\boldsymbol{x})}} \\ &= \prod_i p(h_i|\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{12}$$

Dále uvažujme (pokud nebude řečeno jinak) $x_i \in \{0, 1\}$ a $h_i \in \{0, 1\}$ pro $\forall i$. Poté z poslední rovnosti z (12) lze triviálně dostat

$$p(h_i = 1|\boldsymbol{x}) = \frac{e^{c_i + W_i\boldsymbol{x}}}{1 + e^{c_i + W_i\boldsymbol{x}}} = \sigma(\sum_{j=1}^{m} w_{ij} x_j + c_i), \tag{13}$$

[7] Kvůli problematickému překladu ponechán původní anglický název.

kde $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ je sigmoidální funkce.

Obdobně jako v (12) lze ukázat

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{h}) = \prod_i p(x_i|\boldsymbol{h}), \tag{14}$$

a

$$p(x_j = 1|\boldsymbol{h}) = \sigma(\sum_{i=1}^{n} w_{ij}h_i + b_j). \tag{15}$$

3.3.1 Vlastnosti RBM

- RBM je možné interpretovat jako stochastickou neuronovou síť (viz (13) a (15)), kde uzly (jednotky) představují neurony a hrany představují synaptická spojení.
- Existují pravděpodobnostní rozdělení, která RBM nedokáže efektivně reprezentovat a BM ano. Nicméně RBM může reprezentovat jakékoliv diskrétní pravděpodobnostní rozdělení, pokud má dostatek skrytých proměnných [49, 50].
- Každé pravděpodobnostní rozdělení na $\{0,1\}^m$ může být libovolně přesně modelováno pomocí RBM s m pozorovatelnými proměnnými a $k+1$ skrytými proměnnými, kde k je počet vzorků z rozdělení, které mají nenulovou pravděpodobnost pozorování [50].
- Skryté jednotky extrahují vhodné příznaky z pozorování. Tyto příznaky mohou být pak vstupem další RBM, která se dále snaží extrahovat příznaky ze svého vstupu a tím se vytváří vyšší úroveň reprezentace. Tímto způsobem vrstvené RBM se nazývají "deep belief networks"[8] [51, 52].

3.3.2 Učení RBM

Nejdříve ukážeme jak lze pro RBM ve srovnání s BM zjednodušit gradient věrohodnosti potřebný pro gradientní výstup. Následně ukážeme Gibbsovo vzorkování pro RBM a vysvětlíme, proč je výrazně rychlejší než Gibbsovo vzorkování pro BM. Poté bude vysvětlena metoda kontrastní divergence (CD-contrastive divergence), která umožňuje dostatečně rychlé učení RBM.

Gradient logaritmu věrohodnosti

Nejdříve vezmeme první člen z (9) a pro $\theta = w_{ij}$ provedeme následující úpravu

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x})\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial w_{ij}} &= \sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x})(-h_i x_j) = -\sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{k=1}^{n} p(h_k|\boldsymbol{x})h_i x_j \\
&= -\sum_{h_i}\sum_{\boldsymbol{h}_{-i}} p(h_i|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{h}_{-i}|\boldsymbol{x})h_i x_j = -\sum_{h_i} p(h_i|\boldsymbol{x})h_i x_j \sum_{\boldsymbol{h}_{-i}} p(\boldsymbol{h}_{-i}|\boldsymbol{x}) \\
&= -\sum_{h_i} p(h_i|\boldsymbol{x})h_i x_j = -p(h_i = 1|\boldsymbol{x})x_j = -\sigma(\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_j + c_i)x_j,
\end{aligned} \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{h}_{-i}$ představuje stav všech skrytých proměnných kromě h_i. Druhý člen z (9) lze upravit

$$\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial \theta} = \sum_{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x})\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial \theta}. \tag{17}$$

[8] Kvůli problematickému překladu ponechán původní anglický název.

S použitím (16) a (17) lze (9) pro $\theta = w_{ij}$ vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial w_{ij}} &= -\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}) \frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})}{\partial w_{ij}} + \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{h}} p(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{h}) \frac{\partial E(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{h})}{\partial w_{ij}} \\ &= p(h_i = 1|\boldsymbol{x}) x_j - \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}} p(\tilde{\boldsymbol{x}}) p(h_i = 1|\tilde{\boldsymbol{x}}) \tilde{x_j}.\end{aligned} \tag{18}$$

Analogicky lze gradient získat pro $\theta = b_j$ a $\theta = c_i$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial b_j} = x_j - \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}} p(\tilde{\boldsymbol{x}}) \tilde{x_j}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial c_i} = p(h_i = 1|\boldsymbol{x}) - \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}} p(\tilde{\boldsymbol{x}}) p(h_i = 1|\tilde{\boldsymbol{x}}), \tag{20}$$

kde symbol $\tilde{\boldsymbol{x}}$, přes který se sumuje v (18), (19), (20) přes všechny možné konfigurace pozorovatelných proměnných, byl zaveden pro odlišení od $\boldsymbol{x}$, které v uvedených výrazech představuje jednu pevně danou konfiguraci pozorovatelných proměnných. První člen v (18), (19), (20) lze při daném $\boldsymbol{x}$ přímo vyčíslit (uvažme (13)), druhý člen je však suma, která má stále exponenciálně (s počtem složek $\boldsymbol{x}$) mnoho členů. Řešením je aproximace těchto členů metodou CD, která využívá Gibbsova vzorkování.

Gibbsovo vzorkování pro RBM

Gibbsovo vzorkování [53, 54] patří mezi Monte Carlo metodu pro Markovovské řetězce[53]. Protože BM lze definovat jako MRF, lze tuto metodu použít i pro BM a RBM. Gibbsovo vzorkování se kromě učení používá také pro odvozování.

Protože skryté (pozorovatelné) proměnné jsou mezi sebou nezávislé, pokud je dána konfigurace pozorovatelných (skrytých) proměnných, lze v jednom mezikroku naráz navzorkovat všechny skryté (pozorovatelné) proměnné. V případě plně propojené BM lze v jednom mezikroku navzorkovat pouze jedinou proměnnou. Proto je Gibbsovo vzorkování pro RBM podstatně efektivnější než pro BM.

Ilustrujme k kroků Gibbsova vzorkování s počátečním vzorkem $\boldsymbol{x}^0$ z trénovací množiny (neznámé pravděpodobnostní rozdělení q)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}^0 &\sim p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^0), \\ \boldsymbol{x}^1 &\sim p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{h}^0), \\ \boldsymbol{h}^1 &\sim p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^1), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \boldsymbol{x}^k &\sim p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{h}^{k-1}).\end{aligned} \tag{21}$$

Vzorkování tedy probíhá tak, že nejdříve se na vstup (pozorovatelné proměnné) dá vzorek $\boldsymbol{x}^0$ z trénovací množiny. Následně se podle (13) navzorkuje $\boldsymbol{h}^0$. Poté se zafixuje $\boldsymbol{h}^0$ a podle (15) se navzorkuje $\boldsymbol{x}^1$, které v dalším kroku poslouží k navzorkování $\boldsymbol{h}^1$ a obdobně se postupuje, dokud se nevygeneruje $\boldsymbol{x}^k$.

Gibbsovo vzorkování vyžaduje dostatečně dlouhý Markovoský řetězec, aby dokonvergovalo do stacionárního stavu. To je pořád pro učení výpočetně příliš náročné. Řešením je použití metody kontrastní divergence.

Kontrastní divergence

CD [55, 56] se stala běžnou metodou pro trénování RBM [55, 57, 36, 52]. Základní myšlenka spočívá v nahrazení sumy přes všechna $\boldsymbol{x}$ v (18)(19)(20) pouze jediným sčítancem, který se získá provedením k-kroků Gibbsova vzorkování a dokonce i pro $k = 1$ lze často dostat dobré výsledky [56].

Gibbsův řetězec je inicializován vzorkem z trénovací množiny $\boldsymbol{x}^0$, následně se provede k kroků Gibbsova vzorkování, kde jeden krok se skládá z navzorkování $\boldsymbol{h}^t$ z $p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^t)$ a následně $\boldsymbol{x}^{t+1}$ z $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{h}^t)$ (viz (21)). Gradient logaritmu věrohodnosti podle θ (9) (CD lze použít i pro BM) se pak pro daný vzorek $\boldsymbol{x}^0$ z trénovací množiny aproximuje jako

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}^0)}{\partial \theta} \approx -\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^0)\frac{\partial E(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{h})}{\partial \theta} + \sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^k)\frac{\partial E(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{h})}{\partial \theta}, \tag{22}$$

pro RBM se gradienty logaritmu věrohodnosti (18)(19)(20) velmi zjednoduší (uvažme (13))

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}^0)}{\partial w_{ij}} \approx p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^0)x_j^0 - p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^k)x_j^k, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}^0)}{\partial b_j} \approx x_j^0 - x_j^k, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}^0)}{\partial c_i} \approx p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^0) - p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^k). \tag{25}$$

V praxi se při počítání gradientu nahrazuje $p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^0)$ z (23) a (25) již konkrétní navzorkovanou hodnotou h_i [58]. Nyní zapišme celý algoritmus (Algoritmus 1)

Algoritmus 1: Kontrastní divergence s k kroky

Vstup : parametry RBM w_{ij},b_j,c_i pro $\forall i, j$
vzorek $\boldsymbol{x}$ z trénovací množiny
parametr učení ϵ

Výstup: modifikované parametry RBM

```
x^0 := x
for t = 0, ..., k − 1 do
    for i = 1, ..., n do
        vzorkuj h_i^t ~ p(h_i|x^t)
    end
    for j = 1, ..., m do
        vzorkuj x_j^{t+1} ~ p(x_j|h^t)
    end
end
for i = 1, ..., n, j = 1, ..., m do
    w_ij := w_ij + ε(h_i^0 x_j^0 − p(h_i = 1|x^k) x_j^k)
    b_j = b_j + ε(x_j^0 − x_j^k)
    c_i = c_i + ε(h_i^0 − p(h_i = 1|x^k))
end
return w_ij,b_j,c_i pro ∀i, j
```

Inicializovat váhy RBM je možné (malými) hodnotami z Gaussovského rozdělení (střední hodnota nulová, směrodatná odchylka 0.01), bias skrytých jednotek inicializovat na nulu a bias pozorovatelných jednotek na $\log(\frac{p_i}{1-p_i})$, kde p_i je poměr trénovacích vzorků, které mají aktivovanou jednotku i [58]. Lze se ovšem setkat i s rozdílnými způsoby (např. [59]).

Algoritmus CD popsaný v Algoritmus 1 je základní verzí algoritmu. Pro lepší výkon (např. zrychlení) algoritmu je možné použít různé modifikace algoritmu [58], např. modifikace parametrů RBM se může provádět naráz pro celý balík[9] trénovacích dat nebo se používají metody pro zlepšení gradientního výstupu jako třeba "weight decay" nebo "momentum"[10].

Nyní si uvedeme důležitou větu pro CD

Věta 3.3.1 (Bengio a Delalleau [60]). *Mějme konvergentní Gibbsův řetězec*

$$\boldsymbol{x}^0 \Rightarrow \boldsymbol{h}^0 \Rightarrow \boldsymbol{x}^1 \Rightarrow \boldsymbol{h}^1 \Rightarrow \cdots$$

začínající v $\boldsymbol{x}^0$. *Gradient logaritmu věrohodnosti lze napsat jako*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\boldsymbol{x}^0) &= -\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^0)\frac{\partial E(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{h})}{\partial\theta} \\ +E_{p(\boldsymbol{x}^k|\boldsymbol{x}^0)}[\sum_{\boldsymbol{h}} p(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{x}^k)\frac{\partial E(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{h})}{\partial\theta}] &+ E_{p(\boldsymbol{x}^k|\boldsymbol{x}^0)}[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}^k)}{\partial\theta}], \end{aligned} \tag{26}$$

kde poslední člen jde k nule, když $k \to \infty$.

První dva členy (26) odpovídají střední hodnotě odhadu gradientu logaritmu věrohodnosti metodou CD (22). Pokud je třetí člen nenulový, tak odhad získaný metodou CD je vychýlený. Toto vychýlení zmizí, pokud $k \to \infty$. To odpovídá dokonvergování Markovovského řetězce do ustáleného stavu.

Metoda CD nemaximalizuje přímo věrohodnost dat, ale rozdíl dvou Kullback-Leibler (KL) divergencí[11] [55]

$$KL(q|p) - KL(p_k|p), \tag{27}$$

kde q je pravděpodobnostní rozdělení trénovacích dat, p_k je pravděpodobnostní rozdělení pozorovatelných proměnných po k krocích Markovova řetězce. Pokud Markovův řetězec dokonvergoval do ustáleného stavu, tak $p_k = p$ proto $KL(p_k|p) = 0$ a aproximační chyba CD zmizí.

3.3.3 RBM s Poissonovými pozorovatelnými proměnnými

Pro zvýšení reprezentační síly RBM může být výhodné místo binárních pozorovatelných proměnných (Bernoulliho rozdělení) uvažovat pozorovatelné proměnné, které mohou nabývat přirozených čísel (Poissonovo rozdělení). Skryté proměnné dále budeme uvažovat jako binární. Tento případ se od předchozího příliš neliší, je však nutné přeformulovat $p(x_j|\boldsymbol{h})$ (viz (15)) [59]

$$p(x_j|\boldsymbol{h}) = Pois[x_j|e^{\sum_{i=1}^n w_{ij}h_i+b_j}] = \frac{(e^{\sum_{i=1}^n w_{ij}h_i+b_j})^{x_j}}{x_j!}e^{(-e^{\sum_{i=1}^n w_{ij}h_i+b_j})}, \tag{28}$$

[9] Anglicky batch.

[10] Kvůli problematickému překladu ponechán původní anglický název.

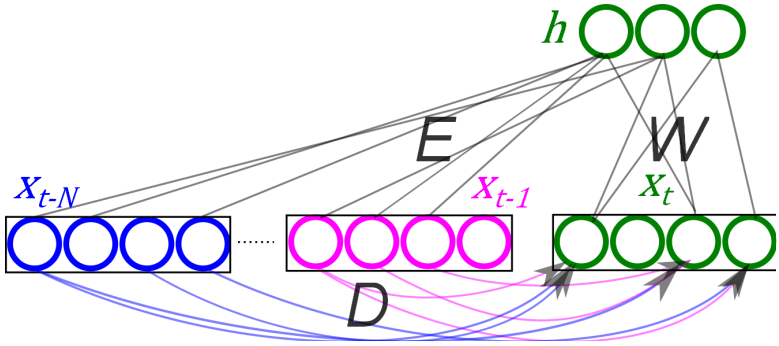
[11] KL je definovaná jako $KL(q|p) = \sum_{\boldsymbol{x}} q(\boldsymbol{x}) \ln \frac{q(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}$.

kde jediný parametr Poissonova rozdělení[12] je střední hodnota λ, která je určena jako $\lambda = e^{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}h_i + b_j}$. Skryté jednotky se beze změny vzorkují podle (13). K učení je možné použít CD [59] (viz Algoritmus 1).

3.4 Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj

RBM pracuje se statickými vzorky a nebere v potaz časový vývoj pozorovatelných proměnných. Proto neumožňuje modelovat časový vývoj pozorovatelných proměnných. Tento nedostatek odstraňuje Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj (CRBM) [38], který má na vstupu také stav pozorovatelných proměnných z minulých časových okamžiků.

Architektura CRBM je znázorněna na Obr. 4. Mezi pozorovatelnými proměnnými



Obrázek 4 CRBM.
Pro přehlednost nejsou v obrázku některé hrany znázorněny.

$\boldsymbol{x}_t$ pro čas t a pozorovatelnými jednotkami z minulosti $\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, ..., \boldsymbol{x}_{t-N}$ existuje vazba popsaná maticí $D = d_{ij}$ (viz Obr. 4), $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., N \cdot m\}$. Dále existuje vazba mezi skrytými jednotkami $\boldsymbol{h}$ a pozorovatelnými jednotkami z minulosti $\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, ..., \boldsymbol{x}_{t-N}$ popsaná maticí $E = e_{ij}, i \in \{1, 2, ..., n\}, j \in \{1, 2, ..., N \cdot m\}$. Počet minulých časových okamžiků N, pro které CRBM pracuje, se nazývá řád modelu. Dále pro přehlednost sloučíme všechny vektory $\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, ..., \boldsymbol{x}_{t-N}$ do vektoru $\boldsymbol{x}_{<t}$. Prvek k vektoru $\boldsymbol{x}_{<t}$ bude indexován jako $x_{k,<t}$ a vektoru $\boldsymbol{x}_t$ jako $x_{k,t}$.

Vliv $\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, ..., \boldsymbol{x}_{t-N}$ lze popsat jako dynamický bias $\hat{\boldsymbol{b}}$ pozorovatelných jednotek $\boldsymbol{x}_t$ pro čas t

$$\hat{b_j} = b_j + \sum_k d_{jk} x_{k,<t}, \tag{29}$$

a dynamický bias $\hat{\boldsymbol{c}}$ skrytých jednotek $\boldsymbol{h}$

$$\hat{c_i} = c_i + \sum_k e_{ik} x_{k,<t}. \tag{30}$$

Nyní lze $p(h_i = 1|\boldsymbol{x}_t)$ a $p(x_{j,t} = 1|\boldsymbol{h})$ (původně (13) a (15)) napsat jako

$$p(h_i = 1|\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{<t}) = \sigma(\sum_{j=1}^{m} w_{ij} x_{j,t} + \hat{c_i}), \tag{31}$$

$$p(x_{j,t} = 1|\boldsymbol{h}) = \sigma(\sum_{i=1}^{n} w_{ij} h_i + \hat{b_j}). \tag{32}$$

[12] $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Gibbsovo vzorkování se pro CRBM provádí analogicky jako pro RBM, jen se místo (13) a (15) v (21) využívá (31) a (32). Na CRBM lze nahlížet jako na RBM s dynamickým biasem pro oba typy jednotek, prostřednictvím kterých její chování ovlivňují minulé vzorky [38].

3.4.1 Učení CRBM

K učení CRBM lze použít modifikovanou verzi CD [38, 61][13]. Dále uvažujme CD s krokem $k = 1$. Modifikace vah $W = w_{i,j}$, statických biasů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ se nemění (viz Algortimus 1, jen se místo (13) a (15) využívá (31) a (32)). Hodnoty jednotek pro $\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, ..., \boldsymbol{x}_{t-N}$ se nevzorkují a zůstávají zafixované na vložené hodnotě. Modifikace vah $D = d_{ij}$ a $E = e_{ij}$ se v CD (s $k = 1$) algoritmu pro CRBM provádí

$$d_{ij} = d_{ij} + \epsilon((x^0_{i,t} - \hat{b}_i)x_{j,<t} - (x^1_{i,t} - \hat{b}_i)x_{j,<t}), \tag{33}$$

$$e_{ij} = e_{ij} + \epsilon(h^0_i x_{j,<t} - p(h_i = 1|\boldsymbol{x}^1_t, \boldsymbol{x}_{<t})x_{j,<t}). \tag{34}$$

[13] Zdrojové kódy k [61] jsou v současné době dostupné na `http://cs.nyu.edu/~gwtaylor/publications/nips2006mhmublv/code.html`.

4 Multisenzorní RBM

V této sekci představíme výpočetní model multisenzorní integrace realizovaný RBM. Multisenzorní RBM lze interpretovat jako stochastickou neuronovou síť a vychází z práce [59]. Zmíněný model bude v této práci použitý pro integraci informací z vizuální a taktilní modality a ke kompaktnější reprezentaci stimulů v peripersonálním prostoru. Nicméně tento model je daleko obecnější a je možné ho použít i pro integraci jiných modalit či dokonce pro transformaci souřadnic [59]. Protože použité kódování stimulů unimodálními neurony je velmi obecné a do značné míry nezávislé na použitých modalitách, mají některé výsledky obecnější platnost než jen pro integraci zvolených modalit. Kompaktnější reprezentace stimulů bude využívat peripersonální CRBM (viz Kapitola 5), která bude používat konfiguraci multisenzorních neuronů jako svůj vstup. Nejdříve úlohu zformulujeme jako "latent-variable density estimation"[1].

4.1 Formulace úlohy

Mějme informaci o poloze stimulu $\boldsymbol{s}$ z vizuální a taktilní modality (uvažujme pro jednoduchost společné souřadnice obou modalit). Nejdříve požadujeme, aby model byl (kvalitativně) schopen reprezentovat stimuly z vizuální a taktilní modality, způsobené stejnou příčinou, jako jednu společnou událost. Dále požadujeme, aby naučený model optimálně kombinoval (zašuměnou) informaci z obou modalit a kódoval odhad pozice stimulu i míru jistoty (věrohodnost) tohoto odhadu.

Vstupní populace neuronů

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{R}_{vis}, \boldsymbol{R}_{tact}] \tag{35}$$

kóduje polohu stimulu $\boldsymbol{s}$ (viz 4.2.1), přičemž $\boldsymbol{R}_{vis}$ představuje neurony vizuální modality a $\boldsymbol{R}_{tact}$ představuje neurony taktilní modality. Pokud je na základě stimulu $\boldsymbol{s}$ získána vstupní populace $\boldsymbol{r}$, je možné určit normální pravděpodobnostní rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ polohy stimulu $\boldsymbol{s}$ (viz (55)), které lze považovat za optimální aposteriorní rozdělení stimulu $\boldsymbol{s}$, a proto bude dále používáno jako "benchmark"[2]. Cílem učení pak je, aby

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}) = q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}), \tag{36}$$

kde $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v})$ je pravděpodobnostní rozložení polohy stimulu při dané (navzorkované podle (39) při daném $\boldsymbol{r}$) aktivitě multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}$ (jednotek skryté vrstvy RBM). Tedy aby multisenzorní neurony s konfigurací $\boldsymbol{v}$ reprezentovaly stejné pravděpodobnostní rozdělení polohy stimulu jako reprezentují unimodální neurony s konfigurací $\boldsymbol{r}$. Toto kritérium je ekvivalentní tomu, aby se veškerá informace o poloze stimulu $\boldsymbol{s}$ ze vstupních neuronů $\boldsymbol{r}$ (pro normální rozdělení střední hodnota a rozptyl) přenesla i do multisenzorních neuronů [59].

Problém lze formulovat jako "latent-variable density estimation", který lze řešit pomocí RBM. Cílem je naučit generativní model (RBM) reprezentovat pravděpodobnostní

[1] Kvůli problematickému překladu slova "latent-variable density estimation" ponechán původní anglický název.

[2] Kvůli problematickému překladu slova "benchmark" ponechán původní anglický název.

rozdělení vstupních dat (vstupní populace vizuálních a taktilních neuronů $\boldsymbol{R}$), kde během učení dochází k modifikaci parametrů modelu (parametry RBM). Aby RBM byla dobrým generativním modelem vstupních dat, neurony skryté vrstvy musejí umět reprezentovat společnou příčinu vizuálního i taktilního stimulu [59].

4.2 Generování vstupních dat

Nejdříve bude popsáno generování konfigurace (stav proměnných) $\boldsymbol{r}$ unimodálních neuronů při dané pozici stimulu $\boldsymbol{s}$. Z těchto konfigurací unimodálních neuronů je tvořena testovací a trénovací množina. Následně bude popsáno generování dat pro učení a testování multisenzorní RBM.

4.2.1 Generování konfigurace unimodálních neuronů při daném stimulu

Uvažujme nyní pouze jednu modalitu (např. vizuální) a dvourozměrný vstupní prostor. Mějme v tomto vstupním prostoru kartézský souřadný systém, ve kterém můžeme každé poloze stimulu přiřadit souřadnice $\boldsymbol{s} = (x, y)$. Dále nechť má každý unimodální neuron i přiřazený střed svého receptivního pole $\boldsymbol{s}_i = (x_i, y_i)$. Dále mějme náhodně generované zesílení g, pro které platí, že prvky aposteriorní kovarianční matice $Cov(\boldsymbol{S}|\boldsymbol{r})$ jsou nepřímo úměrné g, tedy čím je větší hodnota zesílení g tím je odhad polohy $\boldsymbol{s}$ věrohodnější [33]. Aktivace neuronů se vzorkují [59] z

$$p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}, g) = \prod_i Pois[r_i|gf_i(\boldsymbol{s})] = \prod_i \frac{1}{r_i!}(gf_i(\boldsymbol{s}))^{r_i} e^{-gf_i(\boldsymbol{s})}, \tag{37}$$

kde $f_i(\boldsymbol{s})$ (náležící neuronu i) je Gaussova funkce

$$f_i(\boldsymbol{s}) = e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*)^T \Sigma_t^{-1}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*)} \tag{38}$$

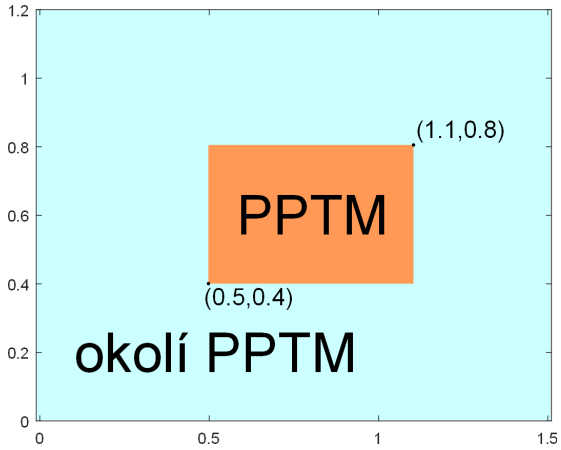
a Σ_t je pro náš případ diagonální (konstantní) matice, která určuje "šířku" Gaussovy funkce a určuje dosah receptivních polí unimodálních neuronů. V našem případě dokonce na diagonále Σ_t budou prvky o stejné hodnotě (receptivní pole je symetrické kolem středu). Tato hodnota závisí na vlastnostech senzorů, které snímají pozici stimulu (např. dosah receptivního pole taktilního senzoru) a ovlivňuje věrohodnost výsledného odhadu (51).

V případě více modalit se každá modalita navzorkuje zvlášť podle (37). Modality jsou na sobě při daném $\boldsymbol{s}$ nezávislé.

4.2.2 Data pro učení a testování

Pro analýzu chování multisenzorní RBM uvažujme dvourozměrný vstupní prostor o velikosti 1.5×1.2 jednotek (viz Obr. 5). Konkrétní rozměrovou interpretaci těchto jednotek nebudeme zatím stanovovat, protože to pro prováděné experimenty není důležité. Přibližně ve středu tohoto prostoru je podprostor pokrytý taktilní modalitou (PPTM). Tato část podprostoru je pokrytá taktilními senzory (viz Obr. 7), na které lze pohlížet jako na robotickou obdobu kůže. Celý vstupní prostor je ve vizuálním poli, což znamená, že receptivní pole vizuálních unimodálních neuronů pokrývají celý tento prostor (viz Obr. 6) .

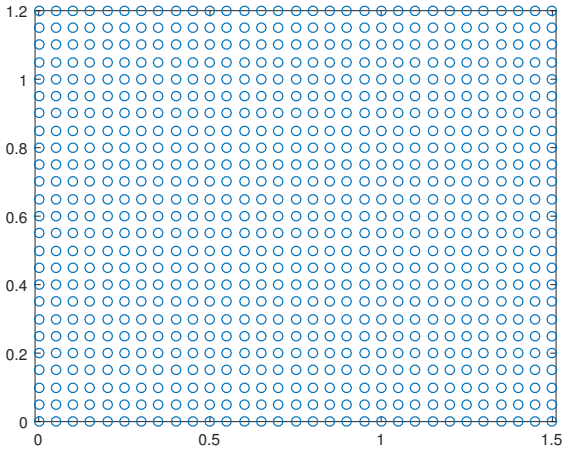
Dále uvažujeme společné souřadnice obou modalit. Souřadný systém vizuální modality je tedy pevně spojen se souřadným systémem taktilní modality. Transformaci souřadnic ze souřadného systému kamer do souřadného systému taktilní modality (např. ruky) v této práci neřešíme.



Obrázek 5 Vstupní prostor se znázorněným PPTM.
Celý znázorněný vstupní prostor pokrývají vizuální unimodální neurony (viz Obr. 6). Část prostoru náležící PPTM ("kůže") navíc pokrývají ještě taktilní unimodální neurony (viz Obr. 7).

Každý unimodální neuron má ve vstupním prostoru své receptivní pole, které má střed. Odezva neuronu se určí podle (37) a platí, že intenzita pálení neuronu závisí na vzdálenosti středu jeho receptivního pole od stimulu. Pokud je poloha stimulu $\boldsymbol{s}$ mimo PPTM, tak se taktilní neurony neaktivují $\boldsymbol{r}_{tact} = \mathbf{0}$.

Počet vizuálních unimodálních neuronů je $31 \times 25 = 775$ a středy receptivních polí neuronů jsou rovnoměrně rozloženy ve vstupním prostoru, tak jak je znázorněno na Obr. 6. Počet taktilních unimodálních neuronů je $13 \times 9 = 117$ a středy jejich receptivních



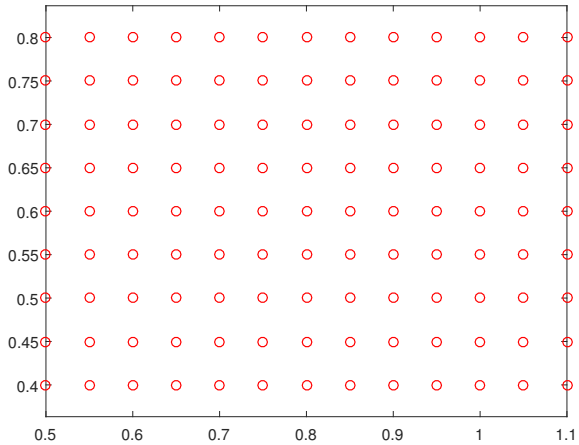
Obrázek 6 Středy receptivních polí vizuálních unimodálních neuronů.

polí jsou rovnoměrně rozloženy ve středu vstupního prostoru (viz Obr. 5) podle Obr. 7.

Ukázka aktivovaných unimodálních neuronů je na Obr. 8 (B,C,D,E).

4.2.3 Volba parametrů pro generování dat

Generování polohy stimulů $\boldsymbol{S}$ bylo rovnoměrné v celém vstupním prostoru. Hodnota zesílení g, je pro každý stimul a modalitu vygenerována z rovnoměrného rozdělení s



Obrázek 7 Středy receptivních polí taktilních unimodálních neuronů.

rozsahem hodnot od 12 do 18 [59]. Na hodnotě g závisí maximální intenzita pálení unimodálních neuronů (hodnoty složek $\boldsymbol{r}$).

Hodnota prvků na diagonále Σ_t (viz (38)) byla zvolena $\sigma^2 = 0.00125$. Při této hodnotě se aktivuje průměrně přibližně 10 unimodálních neuronů v každé aktivované modalitě (viz Obr. 8). Pokud by tento počet byl výrazně menší (σ^2 by byla menší) vedlo by to k větší důvěryhodnosti výsledného odhadu, ale předpokládalo by to také přesně vymezená (téměř nepřekrývající se) receptivní pole unimodálních neuronů (senzorů), což je předpoklad, který není u neuronů v mozku primátů splněn [62] a u robotů nemusí být také splněn.

4.3 Popis modelu

Modelem je RBM s Poissonovými pozorovatelnými proměnnými (viz 3.3.3). Vstupní populace neuronů s konfigurací $\boldsymbol{R}$ (viz (35)) kóduje polohu stimulu v obou modalitách. Neurony skryté vrstvy (s konfigurací $\boldsymbol{V}$)[3] nabývají pouze binárních hodnot. Architektura sítě, včetně znázorněné podoby vstupů, je na Obr. 8.

Trénování a výpočet aktivací neuronů tohoto modelu je podrobně popsáno v 3.3.3.

4.4 Testování modelu

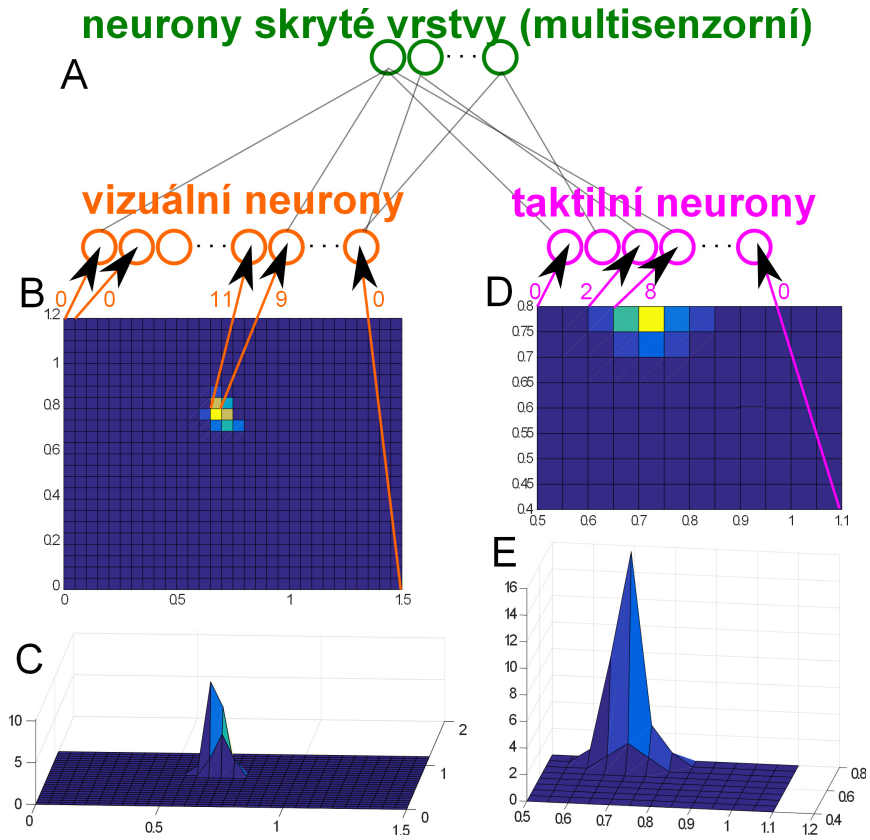
4.4.1 Aktivace multisenzorních neuronů

Mějme populaci vstupních unimodálních neuronů kódujících stejný stimul $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}_{vis}, \boldsymbol{r}_{tact}]$ v obou modalitách. Na základě tohoto stimulu je možné navzorkovat aktivitu multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}$, kde pravděpodobnost aktivací je určena vztahem (viz (13))

$$p(v_i = 1|\boldsymbol{r}) = \sigma(\sum_{j=1}^{m} w_{ij} r_j + c_i). \tag{39}$$

Nyní multisenzorní neurony kódují stejný stimul, ale protože jich je méně, tak se musí extrahovat důležité příznaky a vytvoří se vyšší úroveň reprezentace stimulu.

[3] V Kapitole 3 jsou proměnné, které odpovídají konfiguraci neuronů skryté vrstvy značeny jako $\boldsymbol{H}$. V této kapitole je použito stejné značení konfigurací neuronů jako v [59].



Obrázek 8 Multisenzorní RBM.
(**A**) Architektura multisenzorní RBM. Pro přehlednost nejsou v obrázku některé hrany znázorněny. Ukázka konfigurace $\boldsymbol{r}$ unimodálních neuronů (vstup RBM) je na **B**, **C** (vizuální neurony) a **D**, **E** (taktilní neurony). Korespondence mezi unimodálními neurony z **A** a neurony z **B** a **D** je znázorněna úsečkami zakončenými šipkami. Hodnoty u těchto šipek ilustrují hodnoty aktivací příslušných neuronů. (**B**) Na obrázku je vizuální vstupní prostor z pohledu shora. Hrany mřížky (průsečíky vertikálních a horizontálních čar, které odpovídají bodům z Obr. 6) představují středy receptivních polí unimodálních vizuálních neuronů. Každé hraně je pak přiřazena hodnota aktivace neuronu (viz pohled ze strany **C**) s tímto středem receptivního pole. (**C**) Vizuální vstupní prostor se znázorněnými aktivacemi neuronů při pohledu ze strany. (**D**, **E**) Obdoba **B**, **C** pro taktilní modalitu.

Pro zlepšení přesnosti se použije průměrování odezev $\boldsymbol{v}_i$ přes 15 vzorků [59]. To znamená, že při daném vstupu $\boldsymbol{r}$ se spočítá (podle (39)) a navzorkuje aktivita multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_i$ 15-krát a výsledná aktivita multisenzorních neuronů je jejich aritmetický průměr

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} \boldsymbol{v}_i. \tag{40}$$

4.4.2 Dekódování konfigurace multisenzorních neuronů

Pro dekódování informace z multisenzorních neuronů se tato informace nejdříve "převede" do unimodálních neuronů a tam se teprve interpretuje. Při vzorkování unimodálních neuronů, při dané konfiguraci multisenzorních neuronů, se použije vztah (viz (28))

$$p(r_j|\boldsymbol{v}) = \frac{(e^{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}v_i + b_j})^{r_j}}{r_j!} e^{(-e^{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}v_i + b_j})}. \tag{41}$$

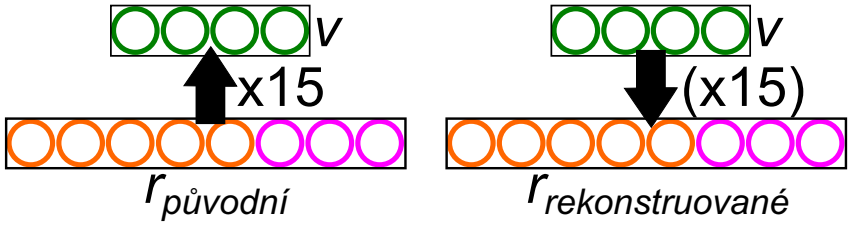
Pro zlepšení přesnosti bylo vyzkoušeno průměrování

$$\boldsymbol{r} = round(\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\boldsymbol{r}_i), \tag{42}$$

kde $\boldsymbol{r}_i, i \in \{1, 2, ..., 15\}$ jsou navzorkované podle (41) z $\boldsymbol{v}$. Toto průměrování se ukázalo jako velmi účinné. V 4.5.5 je porovnání výsledků RBM při použití tohoto průměrování a bez něj (tak jak je použito v [59]). Pokud nebude řečeno jinak, tak je použito toto průměrování.

4.4.3 Princip testování

Princip testování kvality reprezentace multisenzorními neurony je znázorněn a popsán na Obr. 9. Je důležité si uvědomit, že pokud by multisenzorní neurony nedokázaly



Obrázek 9 Princip testování multisenzorní RBM.
Populace vstupních neuronů kóduje vybraný stimul $\boldsymbol{r}_{původní}$. Podle (40) se určí odezva multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}$ (VLEVO). Poté se podle (41) nebo (42) (při použití průměrování) určí $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ (VPRAVO). Na závěr se porovná reprezentace stimulu $\boldsymbol{r}_{původní}$ a $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$.

dobře reprezentovat stimul z $\boldsymbol{r}_{původní}$ (viz Obr. 9), tak se bude $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ výrazně lišit, protože $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ je závislé výhradně na $\boldsymbol{v}$. Dále si ukážeme, že $\boldsymbol{r}_{původní}$ a $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ lze vyjádřit jako normální rozdělení polohy stimulu, což velmi usnadní jejich porovnání.

4.4.4 Normální rozdělení polohy stimulu

Protože při praktických úlohách postačuje omezená přesnost reprezentace polohy stimulů, lze aktivace dostatečného počtu unimodálních neuronů považovat za plnohodnotný způsob reprezentace polohy stimulů. Libovolnou pozici stimulu lze totiž dostatečně přesně reprezentovat konfigurací $\boldsymbol{r}$ unimodálních neuronů. Nicméně je zřejmé, že s klesajícím počtem unimodálních neuronů klesá přesnost vyjádření pozice stimulu[4].

Ukážeme, že z aktivace unimodálních neuronů $\boldsymbol{r}$ lze při použitém kódování stimulů, explicitně vyjádřit pravděpodobnostní rozložení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ pozice stimulu $\boldsymbol{s}$. Zajímavé je, že toto pravděpodobnostní rozložení je dokonce normální $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ [33, 59]. Protože se jedná o důležitý výsledek, který se bude dále hodně používat a v uvedeném zdroji není přímo odvozen pro námi uvažovaný případ (i když postup odvození se liší minimálně), tak bude nyní ukázán.

[4]Pro přesné vyjádření libovolné pozice stimulu $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2$ by bylo potřeba nespočetně mnoho unimodálních neuronů. Protože uvažované unimodální neurony mohou nabývat pouze spočetně mnoha hodnot, nelze s konečným počtem těchto neuronů přesně popsat všechny pozice stimulů $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2$, kterých je nespočetně.

Odvození pro jednu modalitu

Nejdříve mějme pouze jednou vstupní modalitu (např. taktilní), pak pro $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}, g)$ platí

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}, g) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{r}, g)} p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}, g) p(\boldsymbol{s}) p(g), \tag{43}$$

kde $\boldsymbol{s}$ je pozice stimulu, $\boldsymbol{r}$ je konfigurace vstupních neuronů a g je hodnota zesílení, které je nezávislé na poloze stimulu (viz 4.2.1) a $Z(\boldsymbol{r}, g)$ je normalizační konstanta.

Dále vyjdeme ze vztahu (37) pro určení konfigurace unimodálních neuronů při daném $\boldsymbol{s}$ a g a provedeme několik úprav

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}, g) &= \prod_i Pois[r_i|g f_i(\boldsymbol{s})] = \prod_i \frac{1}{r_i!} (g f_i(\boldsymbol{s}))^{r_i} e^{-g f_i(\boldsymbol{s})} \\ &= (\prod_i \frac{g^{r_i}}{r_i!}) e^{-\frac{1}{2} \sum_i (\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*)^T \Sigma_t^{-1} (\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*) r_i} e^{-g \sum_i f_i(\boldsymbol{s})} \\ &\approx (k(g) \prod_i \frac{g^{r_i}}{r_i!}) e^{-\frac{1}{2} \sum_i (\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*)^T \Sigma_t^{-1} (\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_i^*) r_i}, \end{aligned} \tag{44}$$

za předpokladu dostatečné hustoty rovnoměrně rozložených středů receptivních polí ve vstupním prostoru bylo $-g \sum_i f_i(\boldsymbol{s})$ aproximováno funkcí $k(g)$ nezávislé na $\boldsymbol{s}$[5]. Dále budeme uvedenou aproximaci $\approx$ značit jako rovnost, aby bylo zřejmé, že při dalších úpravách již neaproximujeme.

Zaveďme proměnnou nazvanou těžiště (podle fyzikální interpretace)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{\sum_i \boldsymbol{s}_i^* r_i}{\sum_i r_i} \tag{45}$$

a normalizovanou kovarianční matici

$$\bar{\Sigma}(\boldsymbol{r}) = \frac{\Sigma_t}{\sum_i r_i} \tag{46}$$

a provedeme následující úpravy exponentu posledního výrazu z (44)

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \sum_i (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_i^*)^T \Sigma_t^{-1} (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_i^*) r_i \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_i r_i \boldsymbol{s}^T \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{s} - 2\boldsymbol{s}^T \Sigma_t^{-1} \sum_i \boldsymbol{s}_i^* r_i + \sum_i \boldsymbol{s}_i^{*T} \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{s}_i^* r_i \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{s}^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{s} - 2\boldsymbol{s}^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}) + \sum_i \boldsymbol{s}_i^{*T} \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{s}_i^* r_i \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left((s - \psi(\boldsymbol{r}))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}) (s - \psi(\boldsymbol{r})) + C(\boldsymbol{r}) \right), \end{aligned} \tag{47}$$

kde $C(\boldsymbol{r})$ je nezávislé na $\boldsymbol{s}$. S pomocí (47) je možné (44) napsat jako

$$p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}, g) = \alpha(\boldsymbol{r}, g) e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})(s-\psi(\boldsymbol{r}))}, \tag{48}$$

[5] Funkce f_i je závislá na vzdálenosti $\boldsymbol{s}$ od středů receptivních polí $\boldsymbol{s}_i$. Proto pokud jsou středy rovnoměrně a hustě (ideálně spojitě) rozloženy ve vstupním prostoru (a $\boldsymbol{s}$ je dostatečně vzdálené od kraje vstupního prostoru), tak přesná hodnota pozice $\boldsymbol{s}$ nehraje roli.

kde $\alpha(\boldsymbol{r}, g)$ je funkce parametrů $\boldsymbol{r}$ a g (přesný tvar nepotřebujeme). Nyní můžeme pro jednu modalitu napsat (43) s pomocí (48) ($p(\boldsymbol{s})$ a $p(g)$ jsou rovnoměrná rozdělení) jako

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}, g) &= \frac{\alpha(\boldsymbol{r}, g)p(\boldsymbol{s})p(g)}{Z(\boldsymbol{r}, g)} e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})(s-\psi(\boldsymbol{r}))} \\ &= \beta(\boldsymbol{r}, g) e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})(s-\psi(\boldsymbol{r}))}. \end{aligned} \tag{49}$$

Odvozený vztah (49) vypadá téměř jako vzorec pro normální rozdělení se střední hodnotou $\psi(\boldsymbol{r})$ a kovarianční maticí $\bar{\Sigma}(\boldsymbol{r})$. Je potřeba ještě ověřit, že konstanta (vůči $\boldsymbol{s}$) $\beta(\boldsymbol{r}, g)$ má správnou hodnotu. Proto zintegrujeme přes celý vstupní prostor obě strany (49) a dostaneme

$$1 = \int_{\boldsymbol{S}} p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}, g) = \beta(\boldsymbol{r}, g) \int_{\boldsymbol{S}} e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})(s-\psi(\boldsymbol{r}))} = \beta(\boldsymbol{r}, g) h(\boldsymbol{r}) \tag{50}$$

a vidíme, že $\beta(\boldsymbol{r}, g)$ musí zajišťovat, aby se pravá strana (49) integrovala do jedničky a protože taková hodnota je pouze jedna, tak $\beta(\boldsymbol{r}, g)$ musí nabývat té správné. Dále je z (50) zřejmé, že hodnota $\beta(\boldsymbol{r}, g)$ nezávisí na g. Proto platí

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}, g) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}) = \mathcal{N}(\psi(\boldsymbol{r}), \bar{\Sigma}(\boldsymbol{r})), \tag{51}$$

kde význam $\psi(\boldsymbol{r})$ a $\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})$ je definován vztahy (45) a (46).

Odvození pro dvě modality

Nyní uvažujme dvě modality s konfigurací unimodálních neuronů $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ a připomeňme, že při daném stimulu $\boldsymbol{s}$ jsou na sobě $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ nezávislé a $p(\boldsymbol{s})$, $p(g_1)$ a $p(g_2)$ jsou rovnoměrná rozdělení. Pak lze psát

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) &= \frac{1}{Z(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2)} p(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2|\boldsymbol{s}, g_1, g_2) p(\boldsymbol{s}) p(g_1) p(g_2) \\ &= \frac{1}{Z(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2)} p(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{s}, g_1) p(\boldsymbol{r}_2|\boldsymbol{s}, g_2) p(\boldsymbol{s}) p(g_1) p(g_2) \\ &\overset{viz(48)}{=} \frac{p(\boldsymbol{s})p(g_1)p(g_2)}{Z(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2)} \alpha(\boldsymbol{r}_1, g_1)\alpha(\boldsymbol{r}_2, g_2) \\ & e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}_1))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)(s-\psi(\boldsymbol{r}_1))} e^{-\frac{1}{2}(s-\psi(\boldsymbol{r}_2))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)(s-\psi(\boldsymbol{r}_2))} \\ &= \gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) e^{-\frac{1}{2}\left((s-\psi(\boldsymbol{r}_1))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)(s-\psi(\boldsymbol{r}_1)) + (s-\psi(\boldsymbol{r}_2))^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)(s-\psi(\boldsymbol{r}_2))\right)} \\ &= \gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2))\boldsymbol{s} - 2\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2))\right)} \\ & e^{-\frac{1}{2}\left(\psi(\boldsymbol{r}_1)^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1) + \psi(\boldsymbol{r}_2)^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)} = \gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) \\ & e^{-\frac{1}{2}\left(\psi(\boldsymbol{r}_1)^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1) + \psi(\boldsymbol{r}_2)^T \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)} \\ & e^{\frac{1}{2}\left(\left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)^T \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\right)^{-1} \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)\right)} \\ & e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)^T \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\right)^{-1} \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)\right)} \\ & e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2))\boldsymbol{s} - 2\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2))\right)} \\ &= \delta(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2))\boldsymbol{s} - 2\boldsymbol{s}^T(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2))\right)} \\ & e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)^T \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\right)^{-1} \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)+\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)\right)\right)} \\ &= \delta(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}-\hat{\boldsymbol{s}}_{INTEG}(\boldsymbol{r}))^T \Sigma_{INTEG}^{-1}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{s}-\hat{\boldsymbol{s}}_{INTEG}(\boldsymbol{r}))}, \end{aligned} \tag{52}$$

kde[6]

$$\hat{\boldsymbol{s}}_{INTEG}(\boldsymbol{r}) = \Sigma_{INTEG}(\boldsymbol{r}) \left(\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1) + \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2) \right), \tag{53}$$

$$\Sigma^{-1}_{INTEG}(\boldsymbol{r}) = \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_1) + \bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_2). \tag{54}$$

Význam $\psi(\boldsymbol{r})$ a $\bar{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r})$ viz (45) a (46). Stejným argumentem jako v (50) se ukáže, že

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{s}}_{INTEG}(\boldsymbol{r}), \Sigma_{INTEG}(\boldsymbol{r})). \tag{55}$$

4.4.5 Testování optimalizovaného kritéria

Nyní lze ukázat, jak lze testovat splnění optimalizovaného kritéria (36). Z $\boldsymbol{r}_{\text{původní}}$ (viz Obr. 9) lze vyjádřit podle (55) normální pravděpodobnostní rozložení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{původní}})$ a z $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ lze vyjádřit normální rozdělení $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonstruované})$, protože $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ dekóduje stav $\boldsymbol{v}$ multisenzorních neuronů (viz statistika založená na tomto postupu na Obr. 14). Obě normální rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{původní}})$ a $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v})$ lze pak dobře porovnat, protože jsou normální (jen se dvěma parametry). Navíc kovarianční matice, která je diagonální, má na diagonále elementy o stejné hodnotě. Proto lze při porovnávání dvou kovariančních matic porovnávat pouze dvě hodnoty.

4.4.6 Interpretace střední hodnoty a kovarianční matice

Při určování polohy stimulu $\boldsymbol{s}$ (např. za účelem vykonání akce) je díky normalitě rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ možné vzít přímo střední hodnotu tohoto rozdělení, protože tato střední hodnota představuje pozici, na které se stimul nachází s největší pravděpodobností. Kovarianční matici lze interpretovat jako míru nejistoty odhadu skutečné pozice stimulu v jednom pokusu [59]. Takový odhad může být užitečný např. pokud se informace z multisenzorních (vizuo-taktilních) neuronů bude při dalším zpracování kombinovat s informací z dalších modalit a bude potřeba určit věrohodnost odhadů z těchto různých modalit pro výsledný odhad.

4.4.7 Okrajové jevy

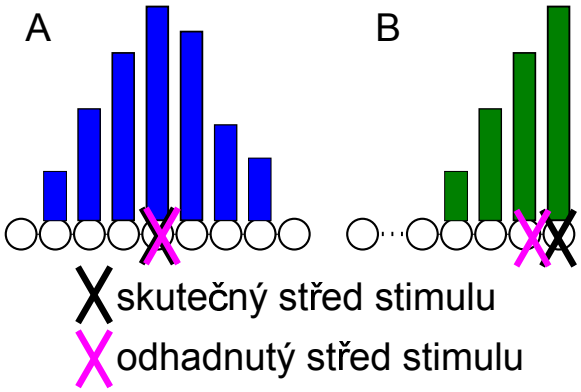
Na okrajích vstupního prostoru vizuální i taktilní modality dochází k několika jevům, které vedou ke zkreslení odhadu polohy stimulu i věrohodnosti odhadu. Tyto jevy souhrnně budeme označovat jako okrajové jevy.

První z nich vede ke zkreslení odhadnuté polohy stimulu vůči skutečné poloze[7] stimulu. Tento problém nyní demonstrujeme pro jednorozměrný případ s využitím Obr. 10.

Uvažujme jednorozměrnou populaci unimodálních neuronů (např. taktilních), kterou pro jednoduchost ztotožníme se senzory (jeden senzor=jeden neuron). Tyto senzory jsou na obrázku vyznačeny jako černá kolečka. V části obrázku **A** uvažujme stimul se středem vyznačeným černým křížkem. Tento stimul vyvolá aktivaci neuronů (modré sloupečky), přičemž čím blíže je senzor náležející neuronu ke středu stimulu, tím je větší aktivace neuronu (výška sloupečků znázorňuje míru aktivace). Odhad středu z aktivací neuronů lze interpretovat jako nalezení těžiště. Na tomto obrázku jsou aktivace téměř symetrické kolem středu stimulu, proto odhad těžiště (středu znázorněného fialovou

[6] Pokud by čtenáři nebyla zjevná poslední rovnost (52), lze doporučit roznásobení exponentu výsledného výrazu.

[7] Skutečnou polohou je zde myšlena poloha $\boldsymbol{s}$ na základě, které se generuje odezva unimodálních neuronů (viz (37)).

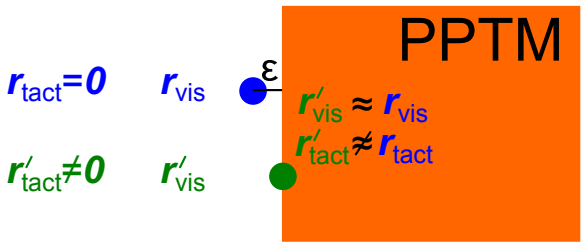


Obrázek 10 Demonstrace okrajového jevu 1.
Podrobné vysvětlení viz text v 4.4.7.

barvou) je velmi blízko skutečnému středu stimulu. V části obrázku **B** jsou aktivace a střed vyznačeny obdobně jako v **A**. Stimul v **B** je ale oproti **A** na okraji, a proto má oříznutou pravou část aktivací. Těžiště se proto posune vlevo a tím se se vzdálí odhad středu od skutečného středu. Okrajovým jevem je ovlivněna také věrohodnost odhadu, protože hodnota prvků kovarianční matice je závislá na součtu aktivací neuronů.

Dále taktilní unimodální neurony na krajích PPTM jsou méně stimulované. To je dáno tím, že mají menší receptivní pole (část receptivního pole, která by přesahovala PPTM, je odříznuta).

Nyní uvažme další případ. Pro vysvětlení tohoto případu použijeme Obr. 11. V horní



Obrázek 11 Demonstrace okrajového jevu 2.
Podrobné vysvětlení viz text v 4.4.7.

části obrázku máme stimul s polohou $\boldsymbol{s}$ (modré kolečko) ve vzdálenosti ϵ (velmi malé kladné číslo) vedle PPTM. V tomto případě se aktivují pouze vizuální unimodální neurony (konfigurace neuronů bude $\boldsymbol{r}_{vis} \neq \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{r}_{tact} = \mathbf{0}$). V dolní části obrázku uvažme, že se tento stimul posunul o ϵ směrem k PPTM a již se dotýká PPTM, a proto se aktivují také taktilní unimodální neurony ($\boldsymbol{r}'_{tact} \neq \mathbf{0}$). Odezva vizuálních neuronů se téměř nezmění ($\boldsymbol{r}'_{vis} \approx \boldsymbol{r}_{vis}$), ale odezva taktilních neuronů je zcela rozdílná ($\boldsymbol{r}'_{tact} \not\approx \boldsymbol{r}_{tact}$). Mějme situaci, že vizuální unimodální neurony kódují stimul na hraně PPTM, takže pro RBM není zjevné, jestli stimul leží již na PPTM nebo těsně vedle (taktilní neurony nejsou aktivované). Protože od RBM požadujeme vazbu modalit (viz 4.5.4), tak v případě, že se jedná o stimul na PPTM by $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ mělo obsahovat také aktivace taktilních unimodálních neuronů. Naopak pokud leží vizuální stimul těsně vedle PPTM, tak by v $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ měly být aktivované pouze vizuální neurony[8]. To je

[8] Pokud je stimul během učení těsně vedle PPTM a v $\boldsymbol{r}_{původní}$ jsou aktivované pouze vizuální neurony, pak optimálním chováním RBM je, aby $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ neobsahovalo žádné aktivace taktilních neuronů ($\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ bylo co nejpodobnější $\boldsymbol{r}_{původní}$).

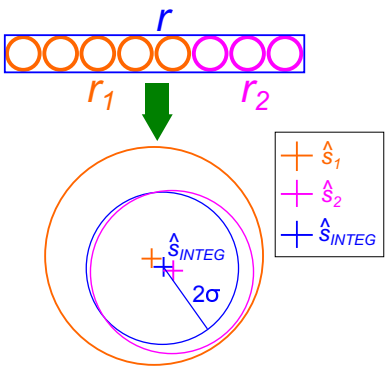
pro RBM složitá situace, protože při téměř stejných $\boldsymbol{r}_{původní}$ (na hraně PPTM a těsně mimo) je jednou optimální aktivovat v $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ taktilní neurony a podruhé nikoliv. Důsledkem toho může být slabá aktivace (která se podle (46) projeví velkou směrodatnou odchylkou odhadu polohy stimulu) taktilních neuronů v $\boldsymbol{r}_{rekonstruované}$ na okrajích PPTM, tak jak lze pozorovat na Obr. 20 a Obr. 21 vpravo.

Okrajových jevů je potřeba si být vědom při testování a v některých případech může být vhodné se vyhnout (nebo se na ně přímo zaměřit) oblastem, kde se tyto jevy projevují.

4.5 Experimenty

4.5.1 Interpretace grafických znázornění

Nyní bude ukázáno, jak interpretovat obrázky z této sekce. Nejdříve připomeňme, že při dané konfiguraci neuronů $\boldsymbol{r}$ lze vyjádřit $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ jako normální rozdělení. Obdobně lze vyjádřit $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1)$ a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_2)$ při daných konfiguracích jednotlivých modalit $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Na Obr. 12 je ukázáno grafické znázornění tohoto normálního rozdělení ve vstupním prostoru.



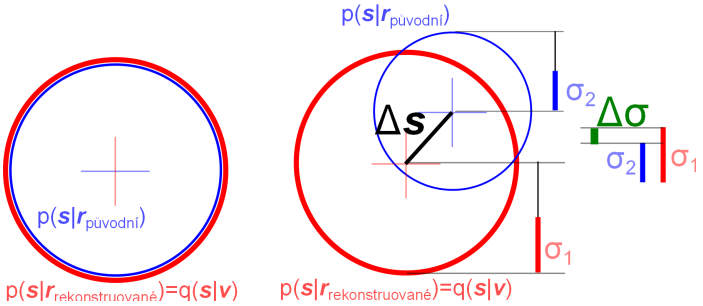
Obrázek 12 Grafické znázornění normálního rozdělení při dané konfiguraci unimodálních neuronů.
Při dané konfiguraci unimodálních neuronů $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ ($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ jsou jednotlivé modality) lze vyjádřit podle (55) $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ jako normální rozdělení se střední hodnotou $\hat{\boldsymbol{s}}_{INTEG}$ a směrodatnou odchylkou σ (kovarianční matice je diagonální a má navíc všechny prvky na diagonále stejné). Na obrázku je střední hodnota vyjádřena polohou středu modré kružnice. Poloměr této kružnice odpovídá 2σ, což znamená, že poloha stimulu by měla s pravděpodobností 95 procent ležet uvnitř této kružnice. Obdobně lze podle (51) vyjádřit $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1)$ (oranžová barva) a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_2)$ (fialová barva).

Cíl učení je detailněji popsán v 4.4.5 a graficky znázorněn na Obr. 13. Pro intuitivní představu o naučených modelech se kromě statistik bude používat popsané grafické znázornění normálního rozdělení.

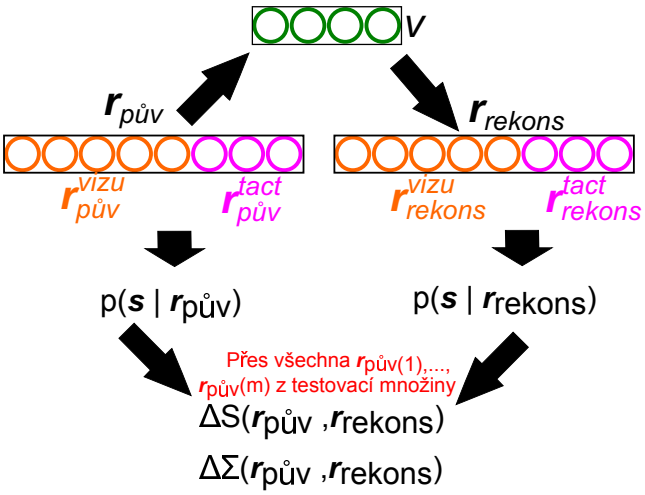
4.5.2 Statistika hodnocení naučených multisenzorních RBM

Pro porovnání různých multisenzorních RBM bude použita statistika, která vychází z porovnání $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{původní})$ a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonstruované})$ popsaném na Obr. 13. Popis vytvoření této statistiky je schématicky znázorněn na Obr. 14. Mějme testovací množinu (disjunktní s trénovací množinou)

$$T = \{\boldsymbol{r}_{pův}(1), \boldsymbol{r}_{pův}(2), ..., \boldsymbol{r}_{pův}(m)\} \tag{56}$$



Obrázek 13 Cíl učení a porovnání původní a rekonstruované reprezentace.
Význam kružnic je vysvětlen na Obr. 12. (**VLEVO**) Cílem učení je (viz 4.4.5), aby $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{původní}) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonstruované})\,(= q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}))$. Tedy aby rozdělení reprezentované unimodálními neurony $\boldsymbol{r}_{původní}$ bylo stejné jako rozdělení reprezentované multisenzorními neurony $\boldsymbol{v}$. (**VPRAVO**) Porovnání $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{původní})$ a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonstruované})$ (obě normální rozdělení) je možné pomocí vzdálenosti $\Delta\boldsymbol{s} = ||\hat{\boldsymbol{s}}_1 - \hat{\boldsymbol{s}}_2||$ středních hodnot $\hat{\boldsymbol{s}}_1, \hat{\boldsymbol{s}}_2$ obou rozdělení a absolutní hodnoty rozdílu směrodatných odchylek $\Delta\boldsymbol{\sigma} = |\sigma_1 - \sigma_2|$. Pokud se jedná o totožná rozdělení jsou obě hodnoty nulové (viz část obrázku VLEVO).



Obrázek 14 Schéma vytvoření testovací statistiky.
Pro popis vytvoření testovací statistiky viz 4.5.2.

konfigurací unimodálních neuronů, které reprezentují rozdělení

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{pův}(1)), p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{pův}(2)), ..., p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{pův}(m)). \tag{57}$$

Nyní lze navzorkovat multisenzorní neurony

$$\boldsymbol{v}(1), \boldsymbol{v}(2), ..., \boldsymbol{v}(m) \tag{58}$$

a dekódovat je jako

$$\boldsymbol{r}_{rekons}(1), \boldsymbol{r}_{rekonst}(2), ..., \boldsymbol{r}_{rekonst}(m) \tag{59}$$

(viz Obr. 9) a vyjádřit

$$p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekons}(1)), p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonst}(2)), p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonst}(m)). \tag{60}$$

Rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{pův}(i))$ porovnáme s $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekonst}(i))$ pro $\forall i$ tímto způsobem (viz Obr. 13)

$$\Delta\boldsymbol{s}(i) = ||\hat{\boldsymbol{s}}_1(i) - \hat{\boldsymbol{s}}_2(i)||, \tag{61}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(i) = |\sigma_1(i) - \sigma_2(i)| \tag{62}$$

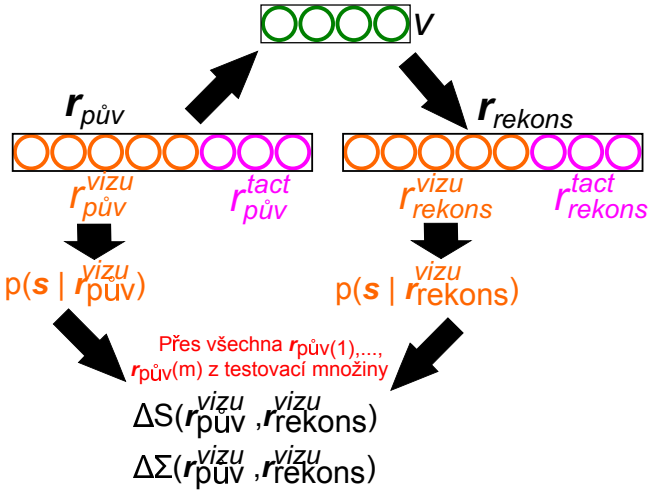
a získáme

$$\Delta\boldsymbol{S} = \{\Delta\boldsymbol{s}(1), \Delta\boldsymbol{s}(2), ..., \Delta\boldsymbol{s}(m)\}, \tag{63}$$

$$\Delta\Sigma = \{\Delta\sigma(1), \Delta\sigma(2), ..., \Delta\sigma(m)\}. \tag{64}$$

Nyní lze získat průměr a směrodatnou odchylku prvků z $\Delta\boldsymbol{S}$ a $\Delta\Sigma$. Průměr z $\Delta\boldsymbol{S}$ lze interpretovat jako průměrnou vzdálenost středů $\Delta\boldsymbol{s}$ a průměrnou hodnotu z $\Delta\Sigma$ jako průměrný rozdíl absolutních hodnot směrodatných odchylek porovnávaných normálních rozdělení (viz Obr. 13).

Popsaný způsob lze aplikovat na libovolná dvě rozdělení, reprezentovaná unimodálními neurony, např. pokud je stimul mimo PPTM, tak se budou porovnávat rozdělení pouze z vizuální části původní $\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}$ a rekonstruované $\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons}$ populace unimodálních neuronů (viz Obr. 15). Aby bylo jasné, jaká rozdělení porovnáváme, zavedeme pro značení statistik $\Delta\boldsymbol{S}$ a $\Delta\Sigma$ následující konvenci. Členy $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ v $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ a v $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ značí z jakých neuronů se vytváří porovnávaná rozdělení. Na Obr. 14 se vytváří z celých unimodálních populací, proto budou statistiky $\Delta\boldsymbol{S}$, $\Delta\Sigma$ označeny jako $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{pův}, \boldsymbol{r}_{rekons})$ a $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}_{pův}, \boldsymbol{r}_{rekons})$. Další ukázka této konvence (statistiky $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$, $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$) je na Obr. 15.



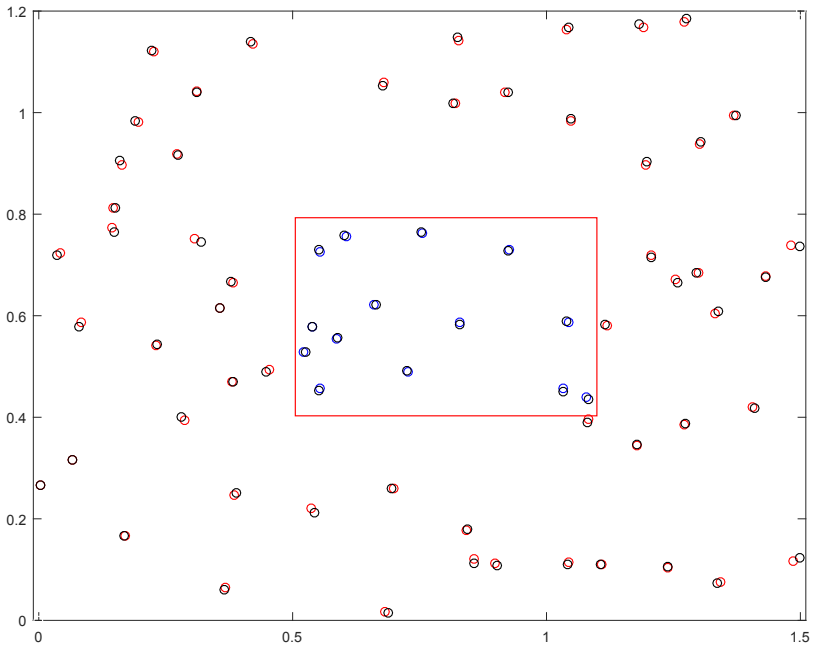
Obrázek 15 Ukázka konvence značení statistik $\Delta\boldsymbol{S}$ a $\Delta\Sigma$.
Statistiky se dělají z rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův})$ a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$, proto značení statistik bude $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$ a $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$.

Testovací množina reprezentuje stimulace rovnoměrně rozložené po celém vstupním prostoru. Velikost testovací množiny je 2000. Protože v oblastech mimo PPTM je možné využívat pouze vizuální modalitu, budou testovací statistiky udělány zvlášť pro oblast PPTM a mimo PPTM.

4.5.3 Reprezentace polohy stimulu neurony

Vstupní prostor a rozložení neuronů je popsáno v 4.2.2. Nyní je potřeba ověřit, zda kódování polohy stimulů neurony je dostatečně přesné. Podařilo se sice dokázat, že $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ je normální rozdělení (viz (55)), takže teoreticky jsme schopni určit odhad

polohy stimulu i věrohodnost tohoto odhadu (z kovarianční matice). Nicméně při odvození (viz 44) se použila aproximace, jejíž přesnost roste s hustotou unimodálních neuronů. Protože s větším počtem neuronů roste časová náročnost algoritmu, je nutné najít kompromis mezi požadovanou přesností (záleží na účelu použití) a počtem unimodálních neuronů. Nyní na Obr. 16 porovnáme skutečnou polohu stimulu, podle které se generovala konfigurace unimodálních neuronů $\boldsymbol{r}_{\text{pův}}$, s odhadnutou polohou stimulu z této konfigurace unimodálních neuronů (střední hodnota $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}})$). Z obrázku Obr.

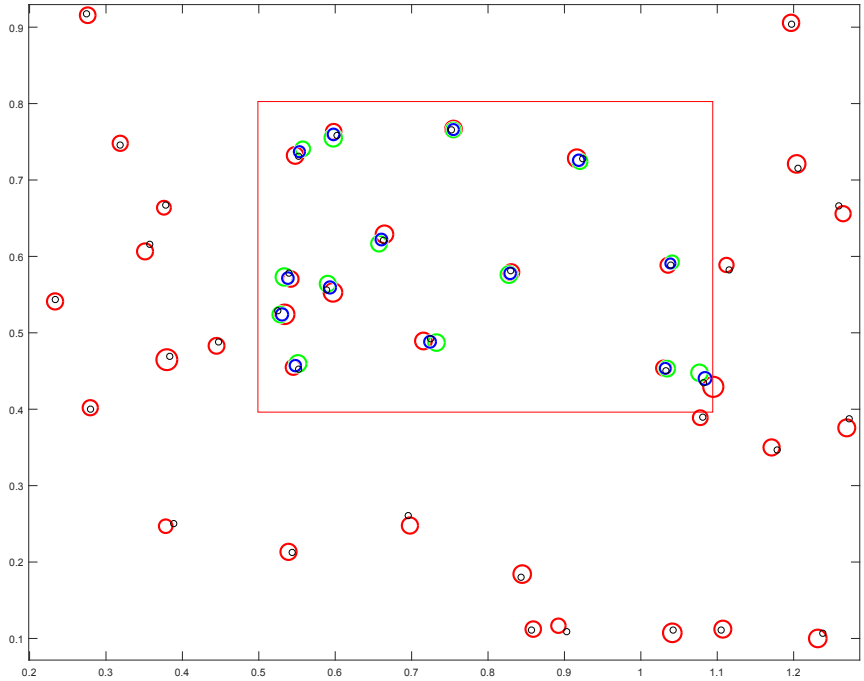


Obrázek 16 Porovnání skutečné polohy stimulu s polohou reprezentovanou unimodálními neurony.
Skutečná poloha stimulu, podle které se generovalo $\boldsymbol{r}_{\text{pův}}$, je vyznačena černými kolečky. Poloha reprezentovaná pouze vizuálními unimodálními neurony (střední hodnota $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{\text{pův}})$) je znázorněna červenými kolečky. Poloha získáná z vizuálních i taktilních unimodálních neuronů (střední hodnota $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}})$) je reprezentovaná modrými kolečky. Pro polohy stimulů na PPTM použijeme pro odhad polohy kombinaci informace z taktilních a vizuálních unimodálních neuronů (53). Pokud je stimul mimo PPTM nezbývá, než použít pouze informaci z vizuálních unimodálních neuronů (viz (45)). Vzájemně si odpovídají vždy ty polohy, které se vzájemně překrývají. Polohy stimulů byly náhodně vygenerovány z rovnoměrného rozdělení. Červený obdélník značí PPTM.

16 je vidět, že skutečná poloha (černé kolečko) poměrně dobře odpovídá poloze, kterou reprezentují unimodální neurony (červené nebo modré kolečko).

Nyní na Obr. 17 porovnáme rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{\text{pův}})$ a $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{tact}_{\text{pův}})$ získaná z obou unimodálních populací samostatně s rozdělením $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}})$ získaným z celé unimodální populace. Znázorníme i věrohodnosti odhadů jednotlivých rozdělení. Získání g_1 a g_2, které určují tyto věrohodnosti (viz 37), je popsáno v 4.2.3. Na Obr. 17 je vidět, že ve většině případů je skutečná poloha stimulů (malé černé kolečko) skutečně uvnitř koleček. Nicméně to bude o trochu méně často než v 95 procentech případů (jak by mělo teoreticky být). Tuto přesnost by mělo být možné zlepšit větší hustotou unimodálních neuronů (aby aproximace v (44) byla přesnější). To by na druhou stranu vedlo k delšímu učení. Dále si lze všimnout, že kombinace obou unimodálních populací (modrá kolečka) mají skutečně menší nejistotu (poloměr).

Je potřeba zdůraznit, že RBM, která pracuje nad unimodálními neurony, nemůže být



Obrázek 17 Porovnání reprezentací poloh stimulů unimodálními neurony. Význam velmi malých černých koleček je stejný jako v Obr. 16, tedy skutečná poloha stimulu. Význam ostatních koleček je popsán na Obr. 12. Červená (zelená) kolečka nyní reprezentují odhad (rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{\text{pův}})$ resp. $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{tact}_{\text{pův}})$) z vizuálních (taktilních) unimodálních neuronů (viz (51)). Modrá kolečka reprezentují kombinaci odhadů (rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}})$) z obou modalit (viz (55)). Oblast mimo PPTM obsahuje pouze odhad vizuálními unimodálními neurony. Testovací body byly generovány náhodně z rovnoměrného rozdělení (stejné body jako v Obr. 16). Červený obdélník značí PPTM.

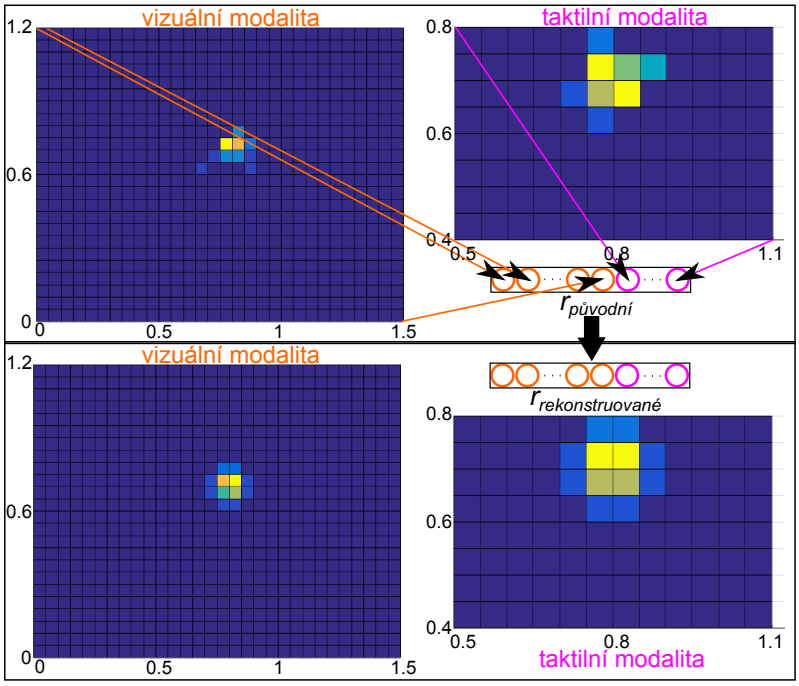
přesnější než je přesnost samotného kódování unimodálních stimulů. Proto je potřeba vždy ověřit, že hustota unimodálních neuronů je dostatečná pro kódování stimulů s požadovanou přesností.

4.5.4 Vazba modalit

V této podkapitole budeme zkoumat interakci obou modalit, proto se musíme omezit na PPTM. Dosud jsme uvažovali případ, kdy je stimul na vstupu reprezentován vizuální i taktilní unimodální populací neuronů. Poté jsme zjišťovali, zda multisenzorní neurony skutečně reprezentují stimul v obou modalitách tak, jak je ukázáno na Obr. 18.

Jak bylo uvedeno dříve (viz 4.4.3), je požadováno, aby $\boldsymbol{r}_{\text{původní}}$ a $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$ bylo co nejvíce podobné. To nám ale samo o sobě nezaručuje vazbu mezi oběma modalitami. V extrémním případě se multisenzorní RBM může naučit reprezentovat obě modality nezávisle na sobě. Proto je potřeba ověřit, že bude-li stimulovaná jen jedna modalita, bude dekódovaná reprezentace multisenzorními neurony pokrývat obě modality (viz Obr. 19). Pokud jsou skutečně pokryty obě modality tak, jako na Obr. 19, potom máme jistotu, že multisenzorní neurony "chápou" vazbu mezi oběma modalitami a stimul z obou modalit "vnímají" jako jednu událost.

Nyní se podívejme na výsledky pro různé počty multisenzorních neuronů. Ve všech případech byl počet trénovacích epoch 100 a velikost trénovací množiny byla 100 000 (reprezentované stimuly jsou rovnoměrně rozloženy ve vstupním prostoru). Počet neuronů skryté vrstvy byl 50, 100, 200, 400, 800. Nejdříve se podívejme na Obr. 20 pro



Obrázek 18 Ověření reprezentace obou modalit multisenzorními neurony. (**NAHOŘE**) je znázorněn původní vstup $\boldsymbol{r}_{původní}$. (**DOLE**) je rekonstruovaný vstup $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$. Šipka mezi $\boldsymbol{r}_{původní}$ a $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$ znázorňuje postup popsaný na Obr. 9.

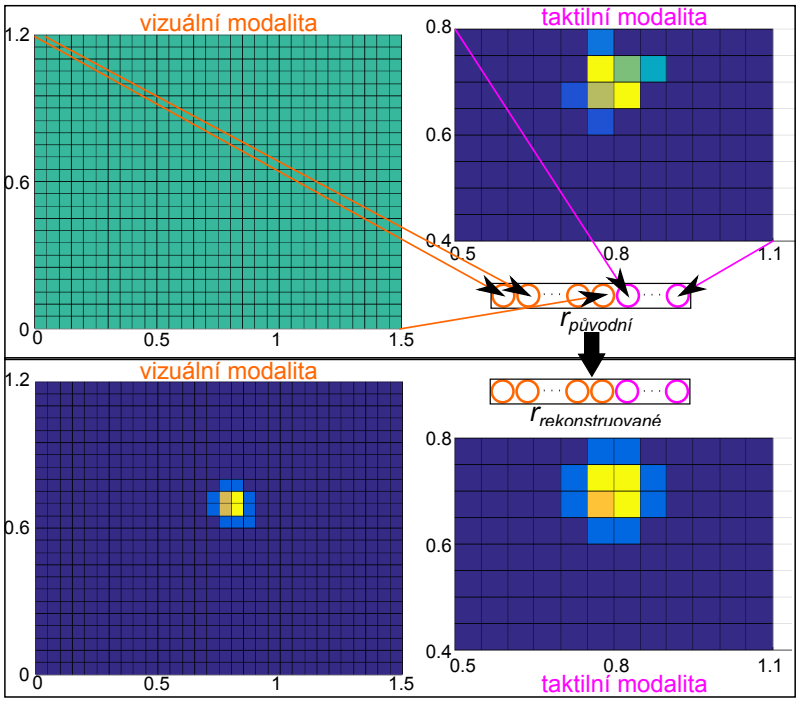
RBM se 100 multisenzorními neurony. Na tomto obrázku je vidět, že vazba mezi modalitami je poměrně dobrá. Obdobný výsledek byl dosažen s 50 a 200 multisenzorními neurony.

Zcela odlišná situace nastala při 400 a 800 multisenzorních neuronech. Podívejme se na Obr. 21. Ve srovnání s Obr. 20 je vidět, že vazba mezi oběma modalitami je výrazně slabší. V několika případech (pravá část) dokonce vizuální stimul nevyvolal žádnou odezvu v taktilních unimodálních neuronech. Takové případy lze vyložit tím způsobem, že multisenzorní neurony neobsahují vazbu mezi těmito vizuálními stimuly a odpovídajícími taktilními stimuly. Dále je patrný vliv okrajového jevu (viz 4.4.7). Situace pro 800 multisenzorních neuronů byla ještě horší. Tyto výsledky ukazují, že větší počet multisenzorních neuronů může být pro multisenzorní integraci nevyhovující.

4.5.5 Použití průměrování unimodálních neuronů a počet multisenzorních neuronů

V této podsekci bude provedeno srovnání výkonu naučených multisenzorních RBM při použití průměrování unimodálních neuronů (viz (42)) a bez použití tohoto průměrování. Dále budou porovnány naučené multisenzorní RBM s různým počtem multisenzorních neuronů. Parametry (počet trénovacích epoch atd.) experimentu jsou stejné jako v 4.5.4. Hodnocení bude provedeno zvlášť pro oblast mimo PPTM (kde se uplatňují pouze vizuální unimodální neurony) a pro oblast na PPTM. Podle zavedené konvence budou pro oblast na PPTM použity statistiky $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{pův}, \boldsymbol{r}_{rekons})$, $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}_{pův}, \boldsymbol{r}_{rekons})$ a pro oblast mimo PPTM $\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$, $\Delta\Sigma(\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}, \boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons})$ (viz 4.5.2).

Na Obr. 22 je znázorněna závislost $\Delta\boldsymbol{S}$ na počtu multisenzorních neuronů při použití průměrování (viz (42)) i bez použití průměrování unimodálních neuronů. V první řadě je zřejmé, že při použití průměrování jednotlivé hodnoty $\Delta\boldsymbol{S}$ velmi výrazně poklesly.



Obrázek 19 Ověření reprezentace obou modalit multisenzorními neurony při prázdném vizuálním vstupu.
(**NAHOŘE**) je znázorněn původní vstup $\boldsymbol{r}_{původní}$ s prázdným vizuálním vstupem. (**DOLE**) je rekonstruovaný vstup $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$. Šipka mezi $\boldsymbol{r}_{původní}$ a $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$ znázorňuje postup popsaný na Obr. 9. Rekonstruovaný vstup $\boldsymbol{r}_{rekonstruovaný}$ obsahuje doplněnou vizuální informaci.

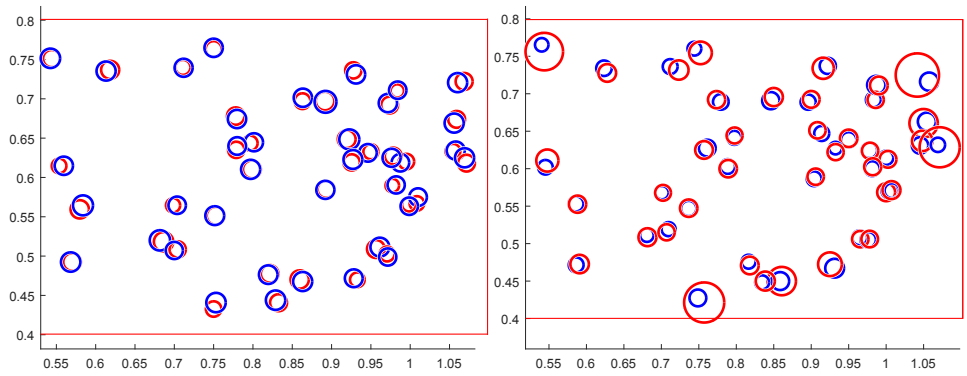
Dokonce přibližně platí, že nejmenší hodnota v grafu bez průměrování je větší, než největší hodnota v grafu s průměrováním. To je významný výsledek, protože díky tomu i RBM s menším počtem multisenzorních neuronů mají dobrou přesnost.

Dále je v grafu vidět, že se zvyšujícím počtem neuronů klesá $\Delta\boldsymbol{S}$ pro oblast na PPTM i mimo PPTM. Tento pokles se ale u 400 neuronů zastaví. Dále je zřejmé, že odhad je téměř vždy přesnější pro stimuly na PPTM, což je v souladu s tím, že multisenzorní RBM je přesnější, pokud má informaci z obou modalit. Výjimku tvoří 50 neuronů při použití průměrování[9]. To spolu s malým rozdílem hodnot u 100 multisenzorních neuronů nasvědčuje tomu, že při malém počtu multisenzorních neuronů se průměrováním snižuje přínos informace z obou modalit.

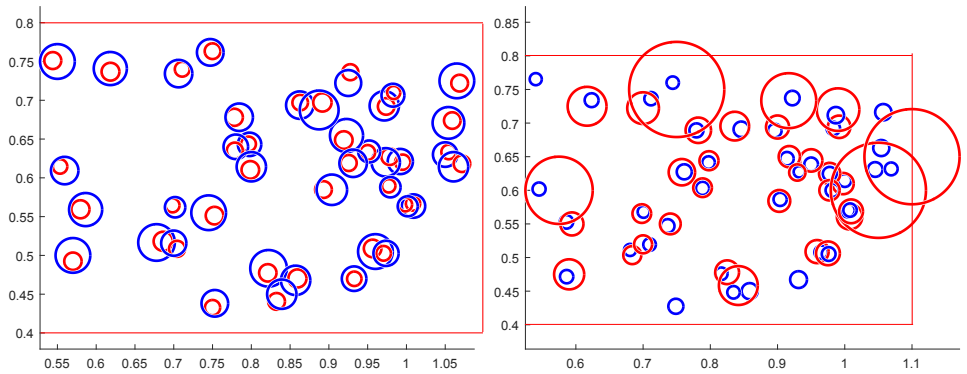
Na Obr. 23 je znázorněna závislost $\Delta\Sigma$ na počtu multisenzorních neuronů při použití průměrování (viz (42)) i bez použití průměrování unimodálních neuronů. Co se týče srovnání varianty s průměrováním a bez průměrování unimodálních neuronů, je vidět, že rozdíl mezi oběma variantami není tak velký jaký byl u $\Delta\boldsymbol{S}$. Přesto je vidět zlepšení při použití průměrování.

Následující porovnání je platné pro obě varianty. Lze pozorovat, že měřítko grafu je mnohem menší než u $\Delta\boldsymbol{S}$. Je tedy zřejmé, že multisenzorní neurony zvládnou poměrně přesně reprezentovat věrohodnost odhadu (kovarianční matici normálního roz-

[9] Pravděpodobně ovlivněno okrajovým jevem (viz 4.4.7), který se na malé oblasti PPTM může projevit výrazněji, protože okraj, na kterém se může okrajový jev projevit, zabírá velkou část tohoto prostoru. Při výběru testovacích stimulů z PPTM, ale bez okrajů PPTM (vzdálenost 0.1 od okraje PPTM) původní rozdíl 0.001 mezi hodnotami pro oblast na PPTM a mimo (rozdíl výšky modrého a žlutého sloupečku) poklesl na 0.0003.



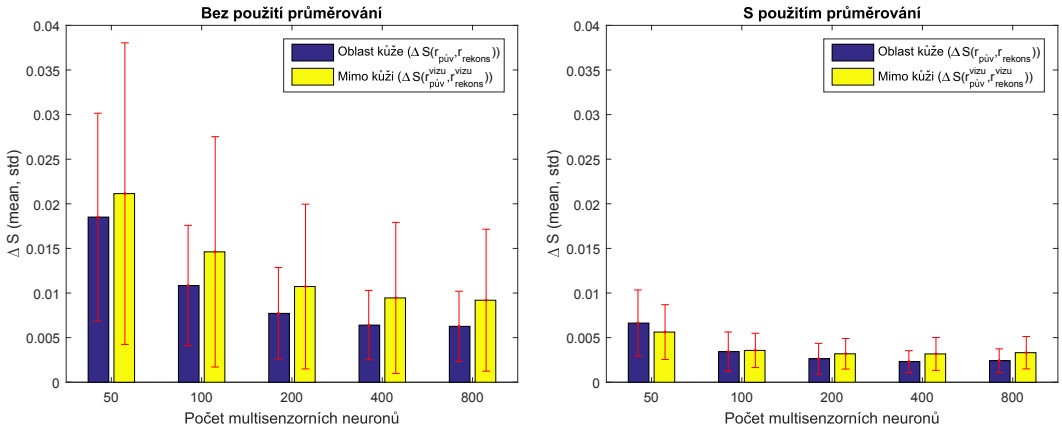
Obrázek 20 Prádný vstup jedné modality RBM se 100 multisenzorními neurony. Prostor ohraničený červenými čárami je PPTM. Barevná kolečka reprezentují normální rozdělení (viz Obr. 12). (**VLEVO**) Stimulované jsou pouze taktilní unimodální neurony (viz Obr. 19). Těmto stimulům přísluší červená kolečka, která reprezentují rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{takt}_{\text{pův}}(i))$. Stejně jako na Obr. 19 se určí $\boldsymbol{r}_{rekons}(i)$. Z toho lze určit rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons}(i))$ stimulů ve vizuální modalitě, která jsou znázorněna modrými kolečky. Protože se modrá a červená kolečka poměrně přesně překrývají, lze usoudit, že multisenzorní neurony obsahují vazbu obou modalit. (**VPRAVO**) Obdobná situace jako vlevo, jen stimulované jsou pouze vizuální unimodální neurony (vizuální stimuly mají opět modrou barvu). Multisenzorní neurony znovu obsahují vazbu mezi oběma modalitami, protože taktilní stimuly (červená barva) poměrně dobře odpovídají vizuálním stimulům. Zřejmá je velká směrodatná odchylka taktilních stimulů na okraji PPTM, která je vysvětlena v 4.4.7.



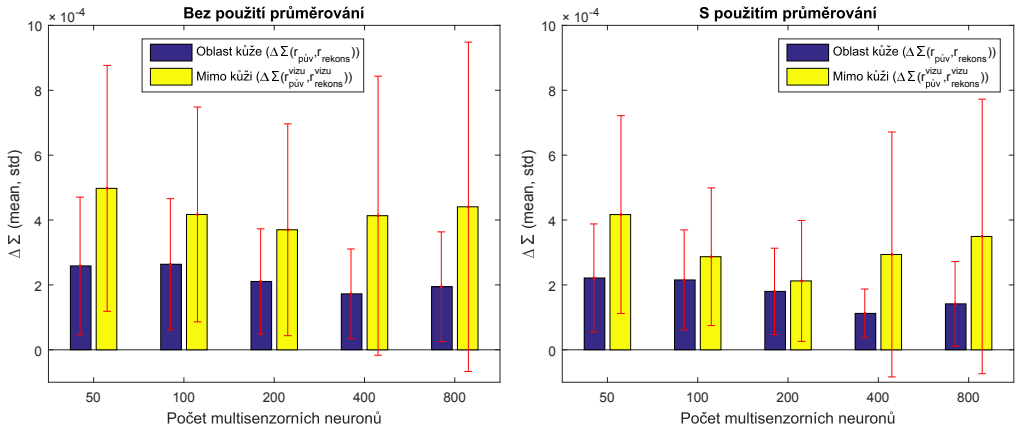
Obrázek 21 Prádný vstup jedné modality RBM se 400 multisenzorními neurony. Popis viz Obr. 20.

dělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}})$). Ve srovnání s $\Delta\boldsymbol{S}$ se $\Delta\Sigma$ od určitého počtu multisenzorních neuronů začíná zhoršovat. Pro oblast na PPTM je nejlepší hodnota $\Delta\Sigma$ pro 400 neuronů, pro 800 neuronů se hodnota zhorší. Pro oblast mimo PPTM je nejlepší hodnota pro 200 neuronů a pro více multisenzorních neuronů se zhoršuje. Důvod tohoto zhoršení popíšeme nejdříve intuitivně a následně ukážeme na datech. Nejdříve je potřeba si uvědomit, že σ (ze které vychází $\Delta\Sigma$) záleží na $\sum_i r_i$[10] (viz (46)). Tedy pokud unimodální neurony slabě pálí, tak zmíněná suma má malou hodnotu a σ nabývá velké hodnoty (viz (46)). To také znamená, že odhad polohy stimulu je méně věrohodný. V ideálním případě by zmíněná suma pro $\boldsymbol{r}_{rekons}$ měla nabývat stejné hodnoty jako pro $\boldsymbol{r}_{\text{pův}}$. To je nutná

[10] r_i jsou zde složky vektoru



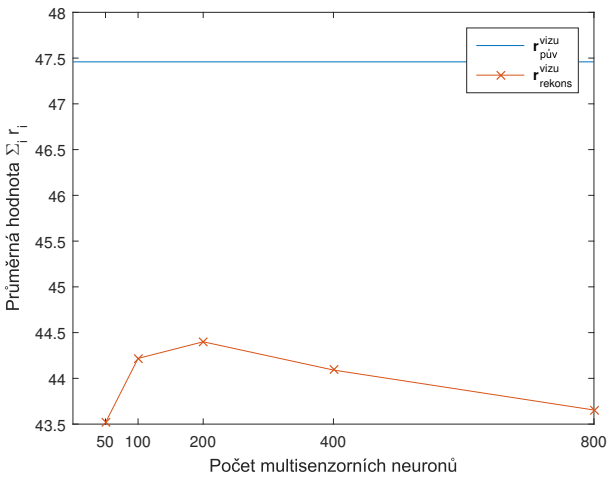
Obrázek 22 Statistika ΔS v závislosti na počtu multisenzorních neuronů. V grafu je vyznačena střední hodnota (mean) a směrodatná odchylka (std) $\Delta \boldsymbol{S}$ (viz 4.5.2). Statistika je udělána zvlášť pro oblast na PPTM a mimo PPTM (pouze vizuální modalita). Hodnoty bylo možné s požadovanou přesností získat z jednoho opakování (viz 4.5.6). (**VLEVO**) Bez použití průměrování unimodálních neuronů. (**VPRAVO**) S použitím průměrování unimodálních neuronů (viz (42)).



Obrázek 23 Statistika $\Delta\Sigma$ v závislosti na počtu multisenzorních neuronů. V grafu je vyznačena střední hodnota (mean) a směrodatná odchylka (std) $\Delta\Sigma$ (viz 4.5.2). Statistika je udělána zvlášť pro oblast na PPTM a mimo PPTM (pouze vizuální modalita). Hodnoty bylo možné s požadovanou přesností získat z jednoho opakování (viz 4.5.6). (**VLEVO**) Bez použití průměrování unimodálních neuronů. (**VPRAVO**) S použitím průměrování unimodálních neuronů (viz (42)).

podmínka pro $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{pův}) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekons})$ (rovnost směrodatných odchylek). Nicméně se ukazuje, že zmíněná suma je (statisticky) pro $\boldsymbol{r}_{pův}$ větší než pro $\boldsymbol{r}_{rekons}$, což je na jednu stranu v pořádku, protože rekonstruovaný odhad nemůže být věrohodnější než původní. Navíc se ukázalo, že tento nedostatek nelze řešit velkým počtem multisenzorních neuronů (naopak dochází ještě ke zhoršení). Kvantitativní analýza je popsána na Obr. 24. Tato analýza potvrzuje, že hodnoty v $\boldsymbol{r}_{rekons}$ jsou v průměru nižší než v $\boldsymbol{r}_{pův}$ a pro vysoký počet multisenzorních neuronů se tento rozdíl ještě zvětšuje. To vede k tomu, že $\Delta\sigma = |\sigma_{rekons} - \sigma_{pův}|$ je pro větší počet multisenzorních neuronů větší, a proto i $\Delta\Sigma$ bude nabývat vyšší hodnoty.

Lepší intuitivní představu o výsledcích z Obr. 22 a Obr. 23 dává Obr. 25. Nejdříve se zaměříme na vliv průměrování. Porovnáme-li **A** s **C** nebo **B** s **D** je vidět, že kroužky



Obrázek 24 Závislost součtu aktivací neuronů $\sum_i r_i$ na počtu multisenzorních neuronů.
Uvažujme podmnožinu testovací množiny $P = \{\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}(1), \boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}(2), ..., \boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}(k)\}$ kódující stimuly mimo PPTM a vzdálené alespoň 0.1 od krajů vstupního prostoru (pro eliminaci okrajového jevu viz 4.4.7). Pro každý z těchto stimulů spočítáme $\sum_i r_i$ a určíme průměrnou hodnotu těchto sum, která je přibližně 47.5. Nyní mějme RBM s 50 multisenzorními a k $\boldsymbol{r}^{vizu}_{pův}(i)$ určíme $\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons}(i)$ pro $\forall i$ a spočítáme pro každé $\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons}(i)$ sumu aktivací $\sum_i r_i$ a opět určíme průměrnou hodnotu, která je přibližně 43.5. Obdobně se bude postupovat pro 100, 200, 400, 800 multisenzorních neuronů. Získané hodnoty jsou zakresleny v grafu.

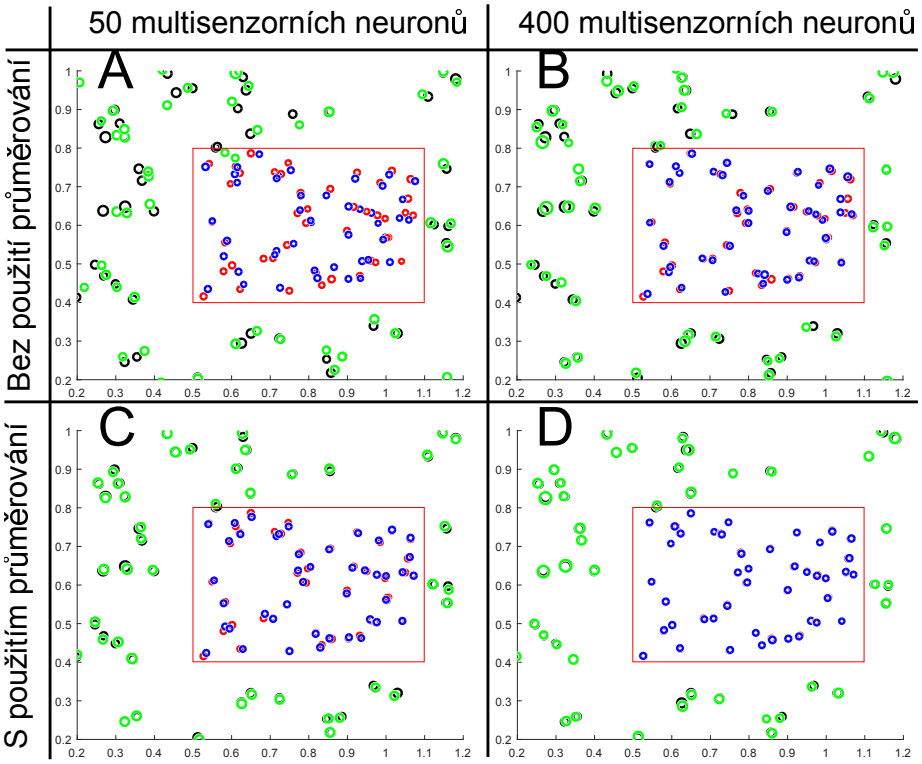
se pro **C** a **D** kvůli průměrování daleko více překrývají. Hlavně je vidět zlepšení ve vycentrování středů kroužků, což odráží statistika $\Delta\boldsymbol{S}$ (graf z Obr. 22). Proto odhad polohy stimulu (střední hodnota rozdělení) je při použití průměrování mnohem přesnější než bez použití průměrování unimodálních neuronů.

Nyní se zaměříme na vliv počtu multisenzorních neuronů. Stejně jako z grafu na Obr. 22 je vidět, že RBM se 400 multisenzorními neurony (**B**, **D**) je lépe naučena než RBM s 50 multisenzorními neurony (**A**, **C**)[11]. Na **B**, **D** se sobě příslušná rozdělení podstatně více překrývají, hlavně díky lepšímu vycentrování středů koleček (statistika $\Delta\boldsymbol{S}$). Rozdíl ve velikostech sobě si odpovídajících koleček se zdá být na všech obrázcích přibližně stejný, což je v souladu s tím, že statistika $\Delta\Sigma$ (Obr. 23) nabývá malých hodnot a hodnoty této statistiky se pro všechny varianty příliš neliší.

4.5.6 Délka učení a velikost trénovací množiny

V této podkapitole bude rozebrán vliv velikosti trénovací množiny a počtu trénovacích iterací na učení pro RBM s různými počty multisenzorních neuronů. Budeme mít RBM se 100, 200 a 400 multisenzorními neurony a každou z těchto RBM budeme trénovat na menší trénovací množině (10 000 prvků) a větší trénovací množině (100 000 prvků). To znamená, že jedna epocha na větší trénovací množině odpovídá počtem iterací deseti epochám na menší trénovací množině. Testovací statistiky jsou detailně popsány v 4.5.2. Pro eliminaci okrajového jevu jsou polohy testovacích stimulů vzdáleny alespoň 0.1 od okraje odpovídajícího vstupního prostoru (taktilního nebo vizuálního).

[11] Porovnáváme **A** s **B** (bez průměrování) a **C** s **D** (s průměrováním).

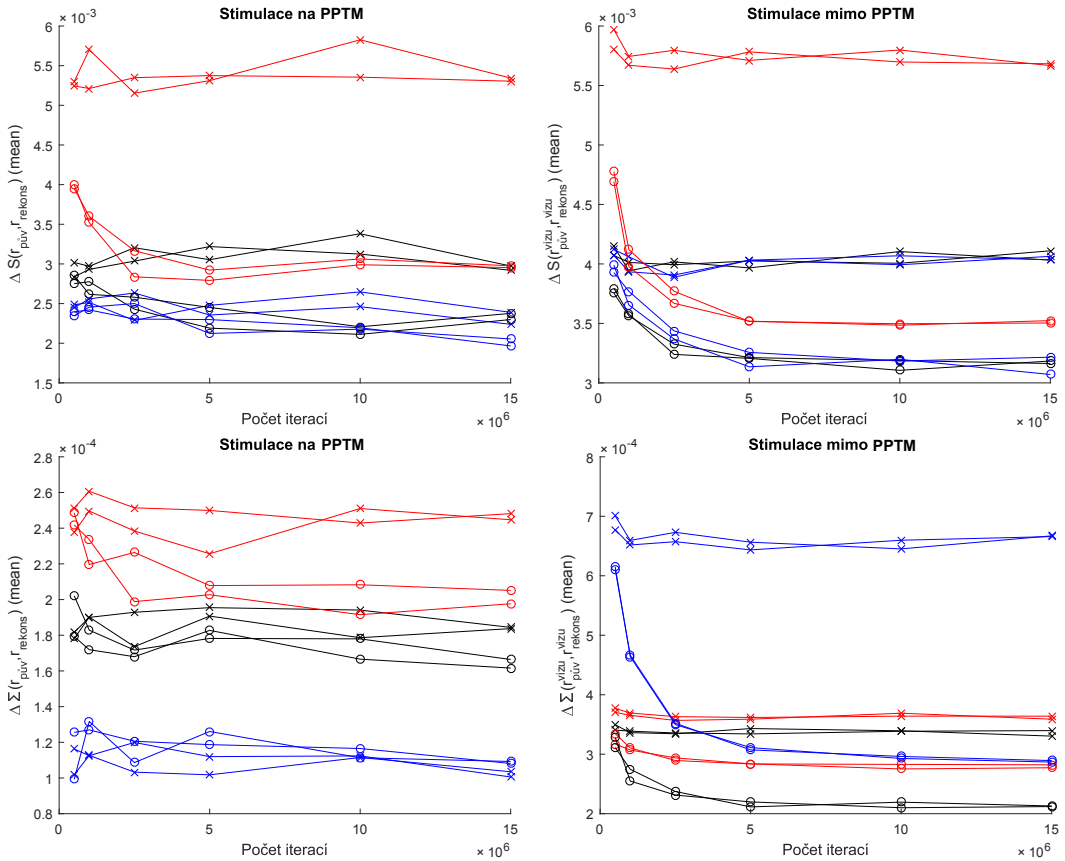


Obrázek 25 Porovnání naučené RBM s 50, 400 multisenzorními neurony při použití průměrování a bez použití průměrování unimodálních neuronů.
Barevná kolečka reprezentují normální rozdělení (viz Obr. 12). V oblasti na PPTM červená kolečka reprezentují rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{\text{pův}}(i))$ a jejich reprezentace $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_{rekons}(i))$ multisenzorními neurony jsou znázorněny modrými kolečky (viz Obr. 14). V oblasti mimo PPTM černá kolečka reprezentují $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{\text{pův}}(i))$ a jejich reprezentace $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}^{vizu}_{rekons}(i))$ multisenzorními neurony jsou znázorněny zelenými kolečky (viz Obr. 15). Sobě příslušející rozdělení (modrá a červená, nebo černá a zelená kolečka) se překrývají (u **A** to kvůli nepřesnosti neplatí). Čím lépe je RBM naučená, tím se sobě náležející kolečka více překrývají. (**A**) Multisenzorní RBM s 50 multisenzorními neurony bez použití průměrování unimodálních neuronů. (**B**) Multisenzorní RBM se 400 multisenzorními neurony bez použití průměrování unimodálních neuronů. (**C**) Multisenzorní RBM s 50 multisenzorními neurony s použitím průměrování unimodálních neuronů (viz (42)). (**D**) Multisenzorní RBM se 400 multisenzorními neurony s použitím průměrování unimodálních neuronů (viz (42)).

Stabilita učení

Během experimentů se ukázalo, že učení RBM je stabilní a různá opakování stejného experimentu (stejné parametry a trénovací množina) mají velmi podobné výsledky. Pro ilustraci se podívejme na Obr. 26 se šesti experimenty s RBM popsanými výše (100/200/400 neuronů, malá/velká trénovací množina), kde každý experiment je opakován dvakrát.

Z obrázku je vidět, že sobě si odpovídající RBM se liší minimálně. Na konci učení v Obr. 26 je rozdíl mezi oběma opakováními skutečně minimální. Porovnání RBM s různými parametry je proto možné udělat na základě jednotlivých experimentů s dostatečnou přesností. To je velmi důležité, protože trénování RBM je časově poměrně dost náročné (cca hodiny až dny) a provádět několik opakování jednoho experimentu by velmi zpomalilo práci a přínos pro porovnání RBM s různými parametry by byl minimální. Nicméně je potřeba zdůraznit, že pro některé účely může být požadována větší přesnost (např. testování na “benchmark” instanci), a proto může být nutné provést



Obrázek 26 Porovnání dvojic RBM naučených při stejných parametrech a stejné trénovací množině.
Křivky se stejnou barvou a znakem (**o** nebo **x**) představují dvě opakování stejného experimentu. Pro význam jednotlivých křivek viz. Obr. 27, kde jednotlivé křivky (barva, znak) a grafy mají stejný význam jako zde.

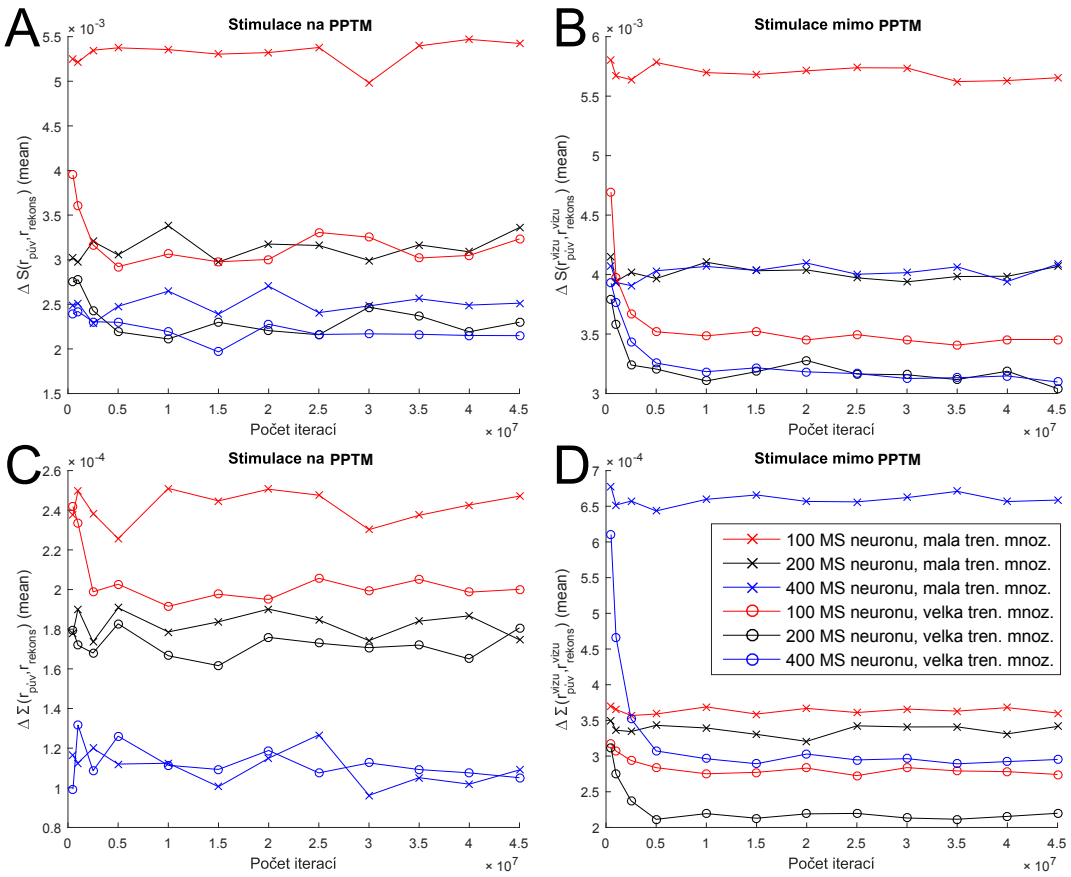
více opakování i přes velkou výpočetní náročnost.

Analýza naučených RBM

Na Obr. 27 je znázorněna závislost $\Delta \boldsymbol{S}$ a $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ na délce učení, počtu multisenzorních neuronů a velikosti trénovací množiny. Z grafů je vidět, že naučené RBM na menší trénovací množině mají obecně podstatně horší výsledky, než ty naučené na větší trénovací množině. Neplatí to u $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ pro 400 neuronů při stimulaci na PPTM. Vysvětlení může být takové, že i menší trénovací množina je dostatečně velká na to, aby se tato statistika dostala na velmi malou hodnotu, a proto větší trénovací množina nemá už význam. Zajímavý je také velký rozdíl $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ opět pro 400 neuronů při stimulaci mimo PPTM. Nicméně i tak jsou tyto hodnoty horší než u RBM se 100 a 200 neurony (podrobněji rozebráno v 4.5.5). Nejvíce citlivá na velikost trénovací množiny je RBM se 100 neurony, nejméně RBM s 200 neurony.

Pokud uvážíme, že menší trénovací množina je desetkrát menší než ta větší, tak dosažené výsledky na menší trénovacích množině pořád nejsou o tolik horší a lze si představit, že i tyto RBM bude možné pro některé praktické úlohy použít. Dále je vidět, že přesnost RBM je vyšší při stimulech na PPTM. To je výsledek, který je v souladu s tím, že by odhad při informacích z obou modalit měl být přesnější.

Co se týká délky učení, tak je vidět, že poměrně brzo hodnoty přestaly klesat a začaly



Obrázek 27 Závislost ΔS a $\Delta\Sigma$ na délce učení, počtu multisenzorních neuronů a velikosti trénovací množiny.
Statistiky ΔS a $\Delta\Sigma$ jsou popsány v 4.5.2. Statistika je udělána zvlášť pro oblast na PPTM (**A**, **C**) a mimo (pouze vizuální modalita) PPTM (**B**, **D**). Jednotlivé křivky představují vývoj dané statistiky v závislosti na počtu iterací. Každá křivka (barva, znak **o** nebo **x**) reprezentuje jednu RBM (viz popisek v **D**). Křivky se stejnou barvou náleží RBM se stejným počtem multisenzorních neuronů. Znak **x** značí trénovací množinu s 10 000 prvky (malá), znak **o** značí trénovací množinu se 100 000 prvky (velká). Statistika ΔS je na **A**, **B**. Statistika $\Delta\Sigma$ je na **C**, **D**.

oscilovat. Pozitivní je, že s rostoucím počtem iterací se neprojevilo nijak výrazně přeučení ("overfitting") a nedošlo k výraznému zhoršení (připomeňme, že testovací množina je oddělena od trénovací).

5 Peripersonální CRBM

V této kapitole představíme Podmíněný Omezený Boltzmannův stroj (CRBM) (viz 3.4) pro odhadování nejbližšího místa podprostoru pokrytého taktilní modalitou (PPTM) k danému vizuálnímu stimulu, který se nachází mimo PPTM. Důvodem zavedení je, že multisenzorní RBM neumožnuje zachytit časové souvislosti. Protože stimuly mimo PPTM a na PPTM nastávají v rozdílné časové okamžiky[1], bylo nutné pro naučení se peripersonálního prostoru přidat i časovou dimenzi. CRBM byl zvolen, protože se jedná o rozšíření RBM, které umožňuje zachytit i časové souvislosti.

Dále budeme uvažovat takové uměle generované trénovací množiny, aby bylo možné jednoduchým postupem vytvořit trénovací množiny s velmi podobnými vlastnostmi i stimulací reálného robota. Lze předpokládat, že pokud bychom chtěli zkoumat tento proces na datech, která se vytvoří přirozenou interakcí robota s prostředím[2], že by trénovací data byla podstatně komplikovanější. Tento scénář může být námětem pro budoucí výzkum.

Peripersonální CRBM pracuje nad multisenzorní RBM (viz Kapitola 4). To znamená, že multisenzorní neurony jsou vstupními neurony peripersonální CRBM.

5.1 Popis řešené úlohy

Cílem peripersonální CRBM je vytvořit vazbu mezi reprezentací povrchu těla (PPTM) a jeho okolím (tzv. peripersonální prostor). Tato vazba má své praktické opodstatnění (např. ochrana před poškozením těla předměty z okolí) a existují četné neurobiologické a kognitivní pozorování, potvrzující její existenci u primátů včetně lidí (viz 2.1).

Pokud je v blízkosti určité části PPTM přítomen stimul, peripersonální CRBM by měla zajistit aktivaci reprezentace této části PPTM tak jak je znázorněno na Obr. 28. To umožní např. zabránit kolizi této části těla s blízkým předmětem. Při trénování budeme uvažovat přímočaré trajektorie kolmé k PPTM.[3] Takové trajektorie přímo zajistí vazbu mezi stimulem mimo PPTM a jemu příslušejícím stimulem na nejbližší části PPTM (viz Obr. 28). Dále, abychom se přiblížili reálnější interakci agenta (zvířete/robota) s prostředím, bude kromě kolmých trajektorií vyzkoušena i varianta, kdy trajektorie budou odchýleny v rozmezí $(-10°, 10°)$ od kolmice[4] k PPTM.

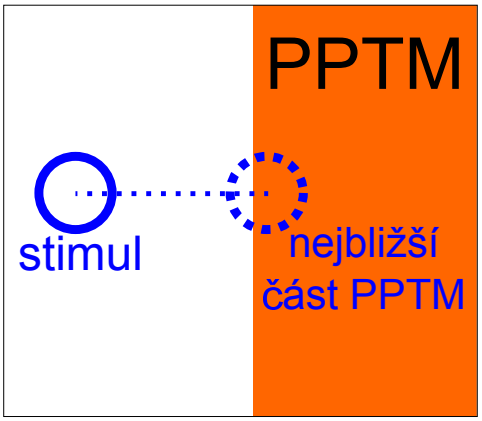
Cílem je naučit se z přímočarých trajektorií směřujících k PPTM vazbu mezi stimuly z této trajektorie a stimulem na konci této trajektorie (místo střetu trajektorie s PPTM).

[1] Předmět přibližující se k PPTM nejdříve vyvolá stimul v prostoru mimo PPTM. Teprve až za určitý čas poté dorazí k PPTM a vyvolá stimul i na PPTM.

[2] To může být užitečné i pro lepší pochopení vytváření peripersonálního prostoru v mozku mláďat primátů.

[3] Kolmost k danému místu PPTM je myšlena v běžném geometrickém významu. Ve 3D (2D) tedy jako normálový vektor tečné roviny (přímky) k danému místu na PPTM.

[4] Znaménko − zde značí, že odchylka může být v obou směrech od kolmice.



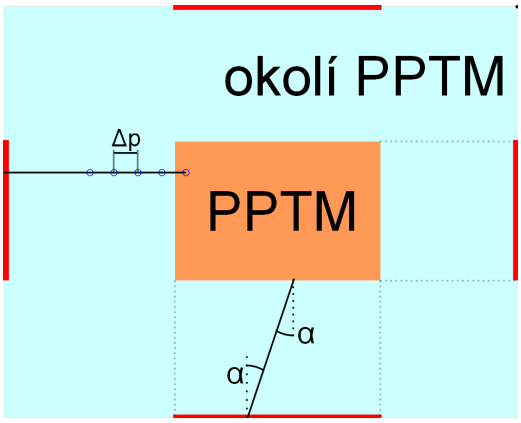
Obrázek 28 Popis řešené úlohy.
V blízkosti PPTM je vizuální stimul. Řešení úlohy spočívá v určení nejbližší části PPTM k tomuto stimulu.

5.2 Generování vstupních dat

Během vytváření trénovací množiny se generují jednotlivé trajektorie stimulů začínající v určité vzdálenosti od PPTM a končící vždy stimulací na PPTM. Z těchto trajektorií jsou diskrétně vzorkovány stimuly. Dále mějme pevně určenou velikost časového okna $m \in \mathbb{N}$, které určuje, kolik navzorkovaných stimulů předcházejících stimulu na PPTM (konec trajektorie) zahrneme do učení. Pokud velikost tohoto časového okna bude velmi malá, tak se vytvoří vazba pouze mezi velmi blízkým okolím PPTM a PPTM. Naopak pokud bude velikost časového okna příliš velká, tak se vytvoří vazba PPTM s velmi vzdáleným okolím PPTM. Při volbě velikosti časového okna je potřeba vzít v potaz rychlost pohybu stimulů a také požadovanou velikost okolí PPTM, pro které se má vytvořit vazba s PPTM. Velikost tohoto časového okna lze interpretovat jako velikost paměti stimulů předcházející stimul na PPTM. Připomeňme, že v této práci uvažujeme dvourozměrný vstupní prostor.

5.2.1 Generování trajektorií

Nyní popíšeme generování trajektorií. Trajektorie vždy začíná na okraji vstupního prostoru a musí končit na PPTM. Při popisu bude použit Obr. 29. Parametry generování



Obrázek 29 Generování trajektorií.
Viz popis v 5.2.1.

jsou maximální odchylka (úhel) α_{max} od kolmice na PPTM, maximální a minimální přírůstek Δp_{max}, Δp_{min} a velikost časového okna m. Nejdříve se z rovnoměrného rozdělení vybere začátek trajektorie (červené úsečky na okrajích vstupního prostoru). Poté se určí úhel α z rovnoměrného rozdělení z intervalu $(-\alpha_{max}, +\alpha_{max})$ a přírůstek dráhy Δs z rovnoměrného rozdělení z intervalu $(\Delta p_{min}, \Delta p_{max})$. Nyní se postupně generují body $\{\boldsymbol{s}(1), \boldsymbol{s}(2), ..., \boldsymbol{s}(l)\}$ na úsečce. Mezi těmito body je konstantní vzdálenost Δp. Po dosažení PPTM se vezme posledních m vygenerovaných bodů a ty se použijí k navzorkování odezev $\{\boldsymbol{r}(t-m+1), \boldsymbol{r}(t-m+2), ..., \boldsymbol{r}(t)\}$ unimodálních neuronů (viz (37)). Z těchto odezev unimodálních neuronů se následně navzorkují odezvy

$$\{\boldsymbol{v}(t-m+1), \boldsymbol{v}(t-m+2), ..., \boldsymbol{v}(t)\} \tag{65}$$

multisenzorních neuronů (viz (39)).

V průběhu pokusů se neměnily tyto parametry $\Delta p_{max} = 0.01$, $\Delta p_{min} = 0.005$, $m = 30$.

5.2.2 Generování trénovacích dvojic

Mějme danou trajektorii, ze které byly v časovém oknu velikosti m navzorkovány konfigurace multisenzorních neuronů $\{\boldsymbol{v}(t-m+1), \boldsymbol{v}(t-m+2), ..., \boldsymbol{v}(t)\}$, které reprezentují stimuly z trajektorie (trajektorie je zakončená stimulem na PPTM, který je reprezentován $\boldsymbol{v}(t)$). Do trénovací množiny se pak přidají tyto dvojice

$$\{(\boldsymbol{v}(t-m+1), \boldsymbol{v}(t)), (\boldsymbol{v}(t-m+2), \boldsymbol{v}(t)), ..., (\boldsymbol{v}(t-1), \boldsymbol{v}(t))\}, \tag{66}$$

kde první prvek dvojice lze také označit jako

$$\boldsymbol{v}_{outskin}(t-i), i \in \{1, .., m-1\} \tag{67}$$

a druhý prvek dvojice jako

$$\boldsymbol{v}_{inskin}(t). \tag{68}$$

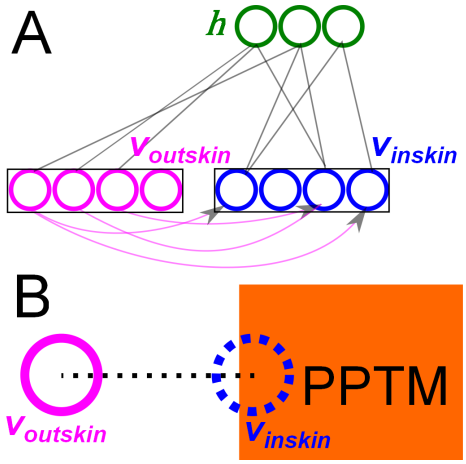
5.3 Popis modelu

Navržený model je CRBM, který je detailněji popsán v 3.4. Nejdříve se na Obr. 30 podíváme na detail architektury peripersonální CRBM. Jedná se o CRBM řádu jedna (viz 3.4), kde na vstupu pro minulý i současný stav jsou multisenzorní neurony (viz Obr. 30). Význam vstupů se zde nicméně od běžné CRBM liší. Vstupy pro CRBM řádu jedna jsou typicky $\boldsymbol{x}_{t-1}$ (minulý stav) a $\boldsymbol{x}_t$ (současný stav). Tedy minulý stav přímo předchází současnému stavu. V našem případě to tak být nemusí. Vstup pro minulý stav může být libovolný stimul z trajektorie, která je zakončena stimulem na PPTM (viz 5.3.1).

Experimentálně se osvědčilo volit počet skrytých neuronů CRBM (velikost $\boldsymbol{h}$) stejný jako je počet multisenzorních neuronů (velikost $\boldsymbol{v}_{inskin}$). Nicméně nelze konstatovat, že by tato volba byla obecně optimální.

5.3.1 Učení

Samotné učení CRBM algoritmem kontrastní divergence je detailněji popsáno v 3.4.1. Na Obr. 31 je znázorněna a popsána jedna trénovací iterace. Pro zvýšení efektivity je



Obrázek 30 Detail architektury peripersonální CRBM.
(**A**) Peripersonální CRBM je CRBM řádu jedna (viz 3.4). Na vstupu CRBM určeném pro minulý stav je konfigurace multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_{outskin}$ kódující stimul, který je mimo PPTM. Na vstupu CRBM pro současný stav je konfigurace multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_{inskin}$, která kóduje odhad očekávané polohy stimulu na PPTM. (**B**) Konfigurace multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_{outskin}$ a $\boldsymbol{v}_{inskin}$ kóduje stimuly znázorněné na tomto obrázku.

výhodné dvojice $(\boldsymbol{v}_{outskin}, \boldsymbol{v}_{inskin})$ navzorkovat před samotným učením CRBM[5]. Tím se vyhneme opakovanému vzorkování $(\boldsymbol{v}_{outskin}, \boldsymbol{v}_{inskin})$ z $(\boldsymbol{r}_{outskin}, \boldsymbol{r}_{inskin})$ při každé iteraci. Z trénovací množiny se dvojice $(\boldsymbol{v}_{outskin}, \boldsymbol{v}_{inskin})$ vybírají náhodně.

5.3.2 Určení nejbližšího místa PPTM k danému vizuálnímu stimulu mimo PPTM

Mějme naučenou peripersonální CRBM a vizuální stimul blízko PPTM. Na Obr. 32 je ukázáno, jak probíhá určení nejbližšího místa PPTM k danému vizuálnímu stimulu.

5.4 Experimenty

5.4.1 Testování

Nejdříve uvažujme pouze jeden prvek testovací množiny. Tento prvek je souřadnice $\boldsymbol{s}_{outskin} = (x, y)$ ve vstupním prostoru mimo PPTM. Na základě této souřadnice je možné navzorkovat $\boldsymbol{r}_{outskin}$. Poté je možné s multisenzorní RBM a peripersonální CRBM získat $\boldsymbol{r}_{inskin}$ (viz 5.3.2) a z toho dostat souřadnice $\boldsymbol{s}_{inskin}$[6] odhadnutého nejbližšího stimulu (viz (53)) na PPTM. Nyní určíme vzdálenost Δs bodu $\boldsymbol{s}_{inskin}$ od skutečně nejbližšího bodu PPTM $\boldsymbol{s}_{ref}$ k $\boldsymbol{s}_{outskin}$, tak jak je ukázáno na Obr. 33.

Nyní uvažujme testovací množinu $T = \{s_{outskin}(1), s_{outskin}(2), ..., s_{outskin}(n)\}$ velikosti n. Pro každý prvek této množiny je možné provést výše popsaný postup a získat

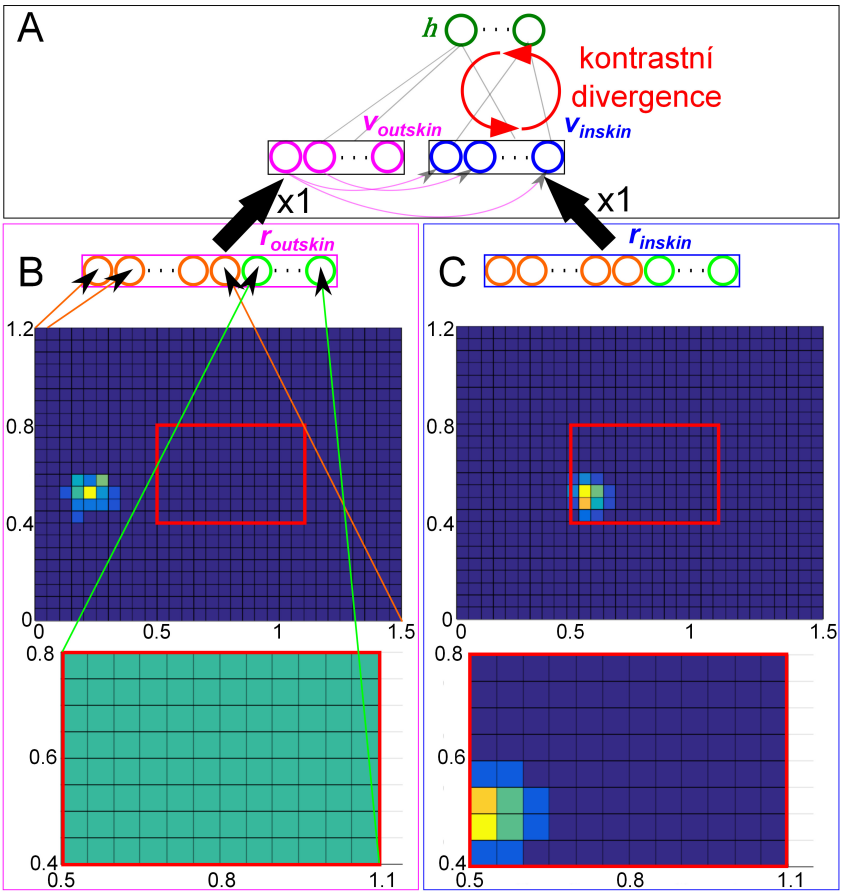
$$\Delta S = \{\Delta s(1), \Delta s(2), ..., \Delta s(n)\}. \tag{69}$$

Nyní je možné určit střední hodnotu a směrodatnou odchylku prvků z ΔS.

Pro testování byla zvolena testovací množina znázorněná na Obr. 34. Pokud nás bude zajímat, jak se odhad mění se vzdáleností od PPTM, rozdělíme testovací množinu na

[5] Na Obr. 31 je, kvůli názornosti, vzorkování $(\boldsymbol{v}_{outskin}, \boldsymbol{v}_{inskin})$ znázorněno při samotné trénovací iteraci.

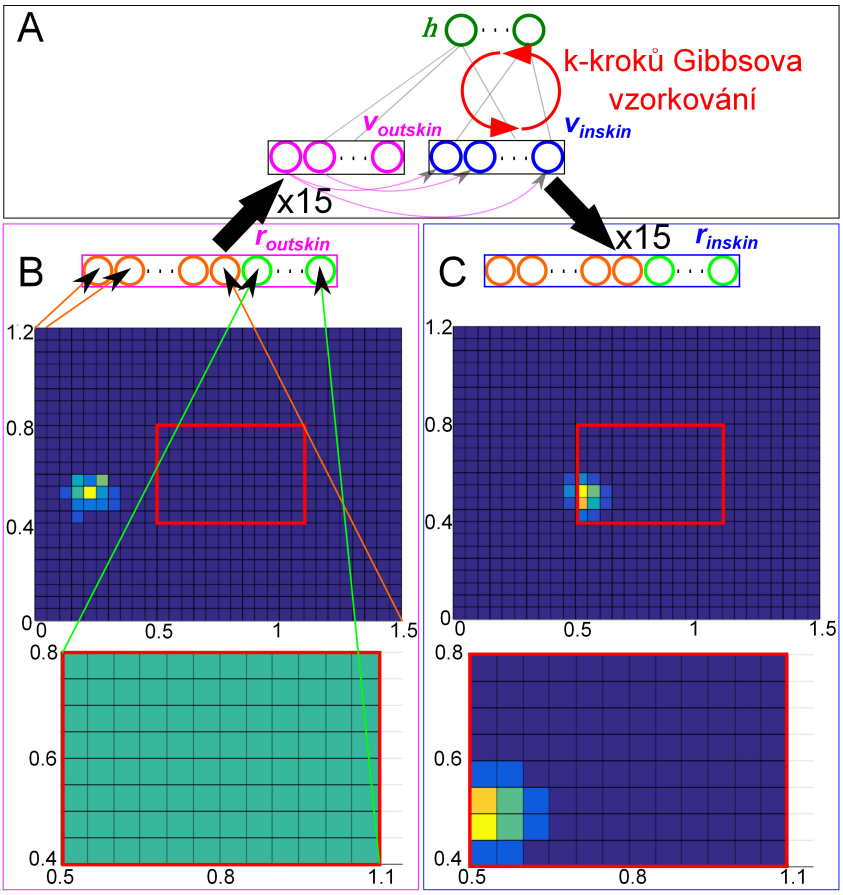
[6] K tomu použijeme vizuální i taktilní unimodální neurony.



Obrázek 31 Tok informace pro jednu trénovací iteraci.
Na **B**, **C** jsou znázorněny (popis viz Obr. 8) konfigurace unimodálních neuronů $\boldsymbol{r}_{outskin}$, $\boldsymbol{r}_{inskin}$. Červený obdélník představuje oblast, která je PPTM. S využitím již naučené multisenzorní RBM se získá konfigurace multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_{outskin}$ a $\boldsymbol{v}_{inskin}$ (bez průměrování, pouze jeden vzorek). Následně (viz **A**) se provede jedno kroková kontrastní divergence a modifikují se parametry CRBM.

podmnožiny podle vzdálenosti od PPTM, tak jak je znázorněno na Obr. 35. Pro každou hladinu pak můžeme spočítat ΔS či další ukazatele zvlášť. Zde je potřeba zdůraznit, že hladina 1 je vzdálená 0.35 od okraje PPTM. Protože velikost časového okna je $m = 30$ a $\Delta p_{max} = 0.01$, tak v trénovací množině je stimul nejdál ve vzdálenosti 0.3 (méně než 0.35) od PPTM. Tedy lze očekávat, že výsledky pro hladinu 1 budou horší, protože nejsou v trénovací množině. Horší výsledky lze očekávat i u hladiny 2, protože je na samé hraně oblasti, kde se vyskytují stimuly v trénovací množině. Nicméně protože stimul aktivuje více unimodálních neuronů, tak i u stimulů z hladiny 1 a 2 se aktivují unimodální neurony, které byly aktivovány v trénovací množině, a proto někdy odhad nemusí být až tak špatný. Hladina 1 a 2 byly do testovací množiny zařazeny pro lepší představu o chování modelu na hranici oblasti pokryté trénovacími stimuly.

Dále budeme sledovat, pro kolik prvků z testovací množiny se během Gibbsova vzorkování neobdržela žádná odezva unimodálních neuronů v některé modalitě ($\boldsymbol{r}^{vis}_{inskin} = \mathbf{0}$ nebo $\boldsymbol{r}^{tact}_{inskin} = \mathbf{0}$), a tudíž nelze určit polohu odhadnutého stimulu (k určení budeme používat obě unimodální populace). Toto číslo budeme označovat jako $nanNum$. Další údaj o kvalitě odhadnutého stimulu $\boldsymbol{r}_{inskin}$ je suma $\sum_i r_{i,inskin}$. Pokud je tato suma malé číslo (odezva unimodálních neuronů je slabá), lze očekávat, že odhad polohy stimulu na PPTM není dobře zrekonstruován a bude nepřesný. To je dáno tím, že tato



Obrázek 32 Určení nejbližšího místa PPTM k danému vizuálnímu stimulu. Na **B** máme znázorněnou unimodální populaci neuronů (popis viz Obr. 8) s konfigurací $\boldsymbol{r}_{outskin}$ kódující vizuální stimul v blízkosti PPTM (červený obdélník). Na **A** se s využitím naučené multisenzorní RBM získá konfigurace (viz (40)) multisenzorních neuronů $\boldsymbol{v}_{outskin}$. V této chvíli je $\boldsymbol{v}_{inskin} = \mathbf{0}$. Nyní se provede k-kroků Gibbsova vzorkování (viz 3.4), při kterém $\boldsymbol{v}_{outskin}$ zůstává zafixované. Po Gibbsově vzorkování by $\boldsymbol{v}_{inskin}$ mělo kódovat stimul, který lze interpretovat jako odhad nejbližšího místa PPTM ke stimulu z $\boldsymbol{v}_{outskin}$. Na **C** je znázorněná konfigurace $\boldsymbol{r}_{inskin}$, která se na závěr dekóduje (podle (42)) z konfigurace $\boldsymbol{v}_{inskin}$.

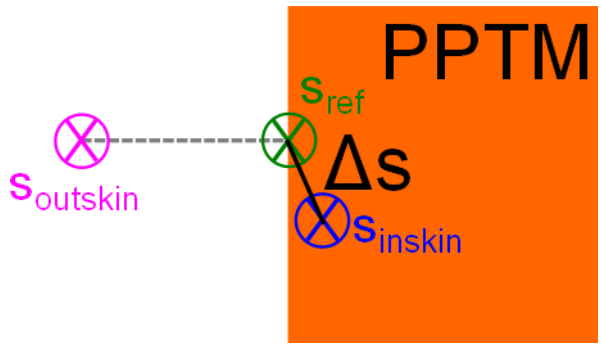
suma pro prvky trénovací množiny nabývá určité hodnoty a pokud je tato suma pro odhad výrazně menší, svědčí to o tom, že se rekonstrukce odhadu příliš nepodařila. CRBM je generativní model a pokud vygeneruje něco výrazně odlišného od prvků z trénovací množiny, lze očekávat, že to není v pořádku.

Protože Gibbsovo vzorkování je nedeterministické, budeme zpravidla provádět 10 opakování a výsledkem bude aritmetický průměr těchto opakování.

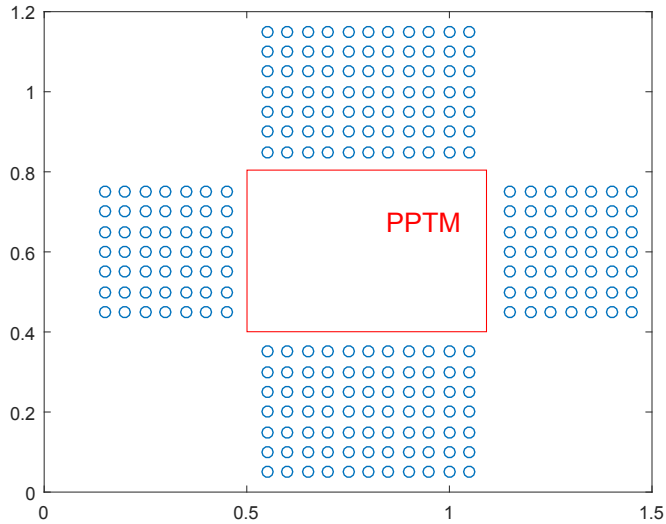
5.4.2 Počet kroků Gibbsova vzorkování

Dostatečný počet kroků Gibbsova vzorkování (viz 5.3.2) je pro rekonstrukci nejbližšího místa PPTM k vizuálnímu stimulu mimo PPTM zásadní. Důležité je však upozornit na to, že s počtem těchto kroků roste také lineárně čas zrekonstruování.

Mějme peripersonální CRBM se 100 skrytými a 100 vstupními neurony (podrobnější popis viz 5.4.4). Statistiky v závislosti na počtu kroků Gibbsova vzorkování jsou na Obr. 36. Z grafů je zřejmé, že s počtem kroků klesá střední hodnota ΔS i počet nevygenerovaných odhadů ($nanNum$). Na Obr. 37 je obdobný graf, jen pro CRBM s 200 skrytými



Obrázek 33 Znázornění vzdálenosti Δs.
Viz popis v 5.4.1.



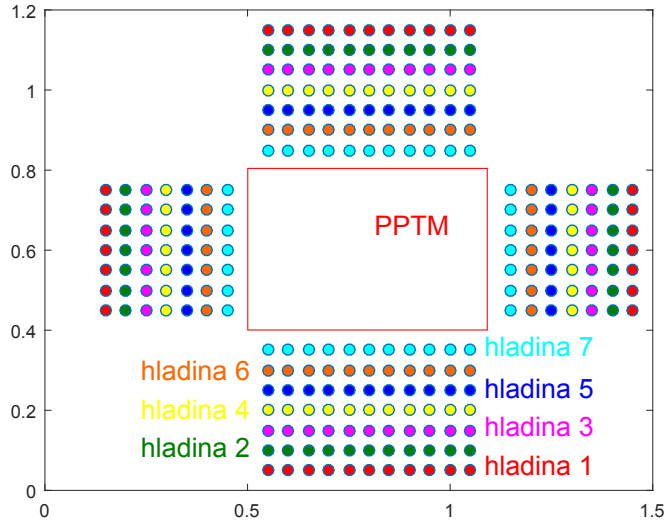
Obrázek 34 Znázornění testovací množiny.
Modrá kolečka představují souřadnice prvků testovací množiny.

i vstupními neurony (parametry viz 5.4.5). Oproti grafům z Obr. 36 jsou hodnoty pro jednotlivé počty kroků blíže u sebe.

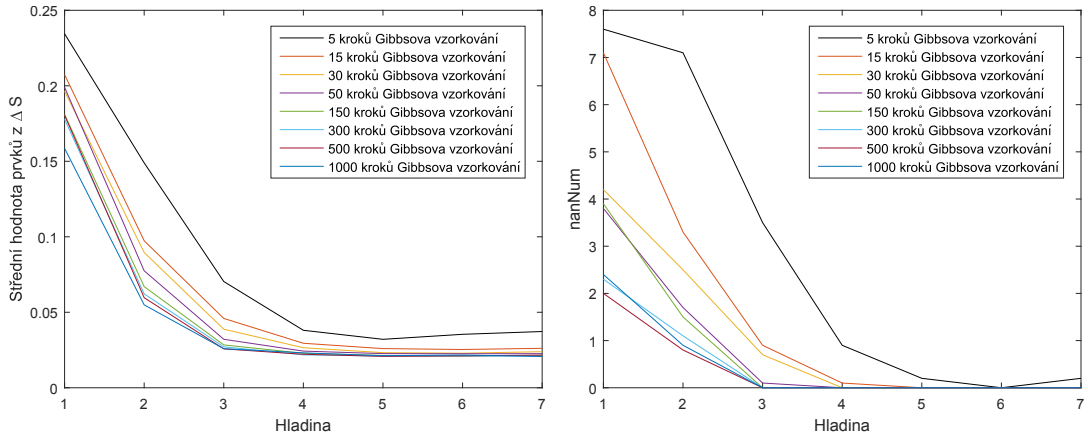
Dále jako kompromis mezi časovou náročností a přesností budeme používat 150 kroků Gibbsova vzorkování.

5.4.3 Stabilita učení

Učení peripersonálních CRBM je časově značně náročné (pro CRBM v této práci se doba učení pohybovala v řádu hodin až několika dnů), proto je problematické vícenásobné opakování učení při stejných parametrech pro věrohodnější statistiky. Proto bylo vhodné zjistit, jak moc se od sebe liší peripersonální CRBM naučené při stejných parametrech, aby bylo jasné, jak k získaným výsledkům z jednoho opakování přistupovat. Byl proveden experiment s peripersonální CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony (parametry viz 5.4.4), kdy bylo třikrát provedeno učení s totožnými parametry a trénovací množinou. Výsledky jsou v příloze A.2 (Obr. 42, 43, 44). Z těchto výsledků je vidět, že v raných fázích učení se výsledky poměrně dost liší, ale že s přibývajícím počtem epoch se tento rozdíl snižuje, až nakonec (1000 epoch) je rozdíl mezi jednotlivými opakování poměrně malý. Proto pro účely této práce, s ohledem na časovou náročnost učení a požadovanou přesnost, budeme pro získání statistik využívat výsledky jedné



Obrázek 35 Rozdělení testovací množiny na hladiny.
Body se stejnou barvou výplně náleží do stejné hladiny.



Obrázek 36 Statistiky - počet kroků Gibbsova vzorkování pro CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony.
Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od PPTM), viz 5.4.1. Počet kroků Gibbsova vzorkování je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

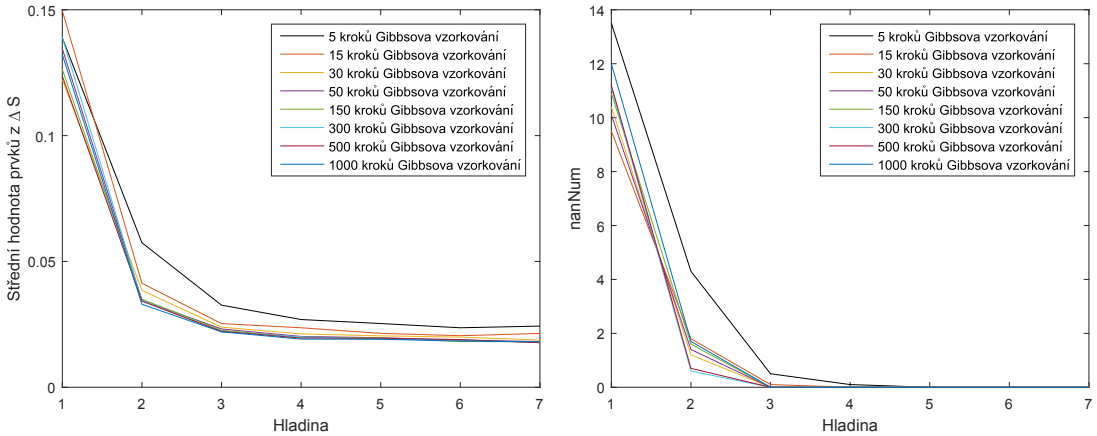
naučené peripersonální CRBM.

5.4.4 Analýza peripersonální CRBM pro 100 multisenzorních neuronů

V této podkapitole provedeme analýzu peripersonální CRBM pro 100 multisenzorních neuronů[7]. Tím pádem počet skrytých neuronů je také 100. Pokud nebude řečeno jinak, budeme uvažovat následující parametry CRBM a učení. Trénovací množina obsahovala 10 000 trajektorií kolmých k PPTM. Počet trénovacích epoch byl 1000.

Při následující analýze budeme využívat výsledky z Obr. 38. Na tomto obrázku v části **A** je vidět, že peripersonální CRBM poměrně dobře zvládá odhad nejbližšího místa PPTM ke stimulu mimo PPTM. K výrazné chybě došlo pouze v několika případech a navíc podle hodnoty sumy $\sum_i r_i$ bylo možné tyto případy rozpoznat (zelená barva).

[7]Tato multisenzorní RBM má 100 multisenzorních neuronů, počet trénovacích epoch byl 100 – další parametry učení jsou popsané v 4.5.4.



Obrázek 37 Statistiky - počet kroků Gibbsova vzorkování pro CRBM se 200 skrytými i vstupními neurony.
Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od PPTM), viz 5.4.1. Počet kroků Gibbsova vzorkování je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

Část těchto chybně odhadnutých stimulů náleží hladině 1 (viz Obr. 35), která je už za hranicí výskytu stimulů v trénovací množině. Zbylá část je z hladiny 2, která je na samotné hranici výskytu stimulů v trénovací množině (viz 5.4.1). Proto se tento výsledek dal očekávat.

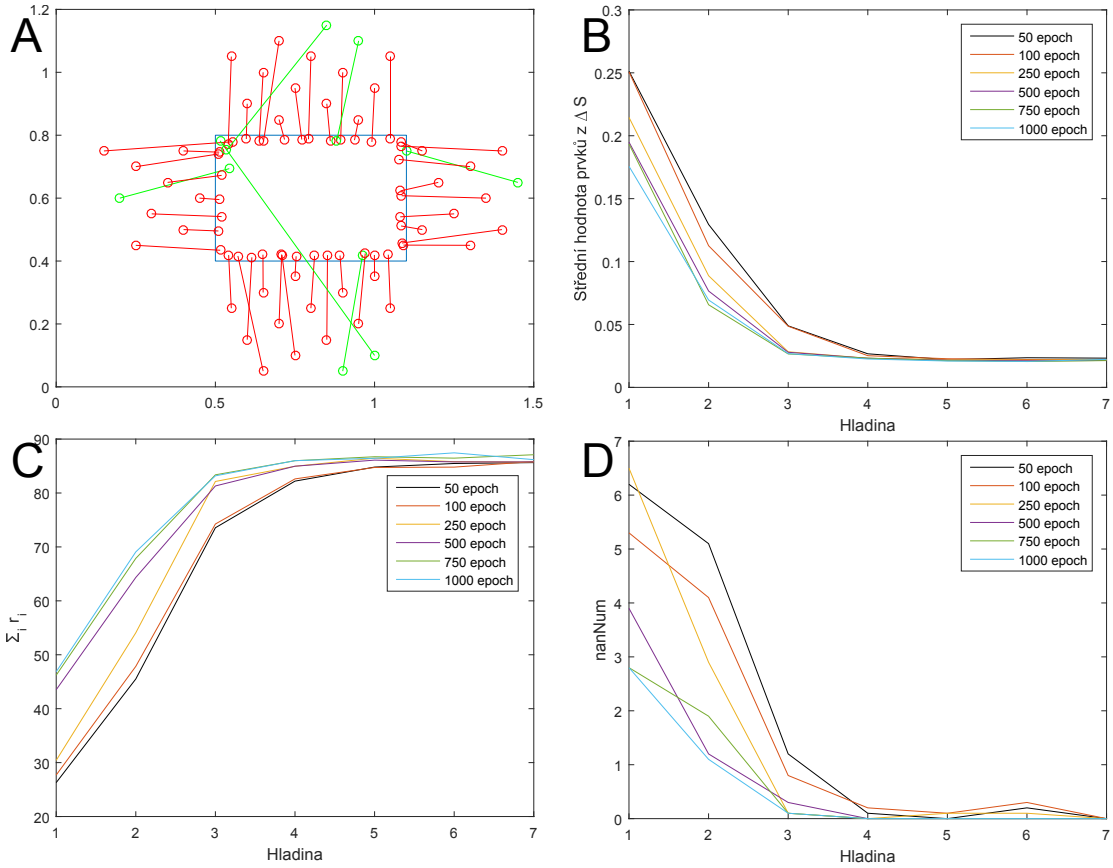
Ve zbylých částech obrázku (**B**, **C**, **D**) jsou statistiky pro jednotlivé hladiny. Z (**B**) je zřejmé, že pro body z hladin dále od PPTM jsou odhady nepřesné. Pro CRBM na konci učení (1000 epoch) se však pro hladinu 3 a víc tato hodnota ustálí, což bude dáno tím, že tyto hladiny jsou již v trénovací množině a pro CRBM jsou podstatné při učení "koaktivace" stimulů na PPTM a mimo PPTM, nikoliv vzdálenost. V části **C** je vidět, že $\sum_i r_i$ je menší pro hladiny 1 a 2, což souvisí s tím, že odhad pro tyto hladiny je méně přesný. Této vlastnosti $\sum_i r_i$ lze pak využít pro odhad věrohodnosti odhadnutého stimulu (viz zelené úsečky v části (**A**)). Pokud je tato suma nulová alespoň v jedné modalitě ($\sum_i r_i^{vis} = 0$ nebo $\sum_i r_i^{tact} = 0$) a odhad děláme z obou modalit, tak nelze udělat odhad. Počet těchto případů je znázorněn v části (**D**). Tento počet pro CRBM na konci učení (1000 epoch) je přibližně 3 z 252 testovacích bodů. Dále si z (**B**, **C**, **D**) lze všimnout, že k výraznému zlepšení CRBM docházelo hlavně prvních 500 epoch a dále bylo už méně výrazné.

Dále byla vyzkoušena menší trénovací množina. Velikost trénovací množiny byla 2000 (1/5 původní velikosti). Aby zůstal zachován celkový počet iterací, tak počet epoch byl zvýšen na 5000 (5 násobek původní velikosti). Výsledná peripersonální CRBM dosahuje podobných výsledků jako s původní (větší) trénovací množinou. Tedy 2000 trajektorií je dostatečný počet pro úspěšné naučení. Obdoba Obr. 38 pro tuto CRBM je v příloze A.2 na Obr. 45.

5.4.5 Analýza Peripersonální CRBM pro 200 multisenzorních neuronů

Nyní provedeme analýzu peripersonální CRBM pro 200 multisenzorních neuronů[8]. Tím pádem počet skrytých neuronů je také 200. Pokud nebude řečeno jinak, budeme uvažovat následující parametry CRBM a učení. Trénovací množina obsahovala 10 000 trajektorií kolmých k PPTM. Počet trénovacích epoch byl 1000.

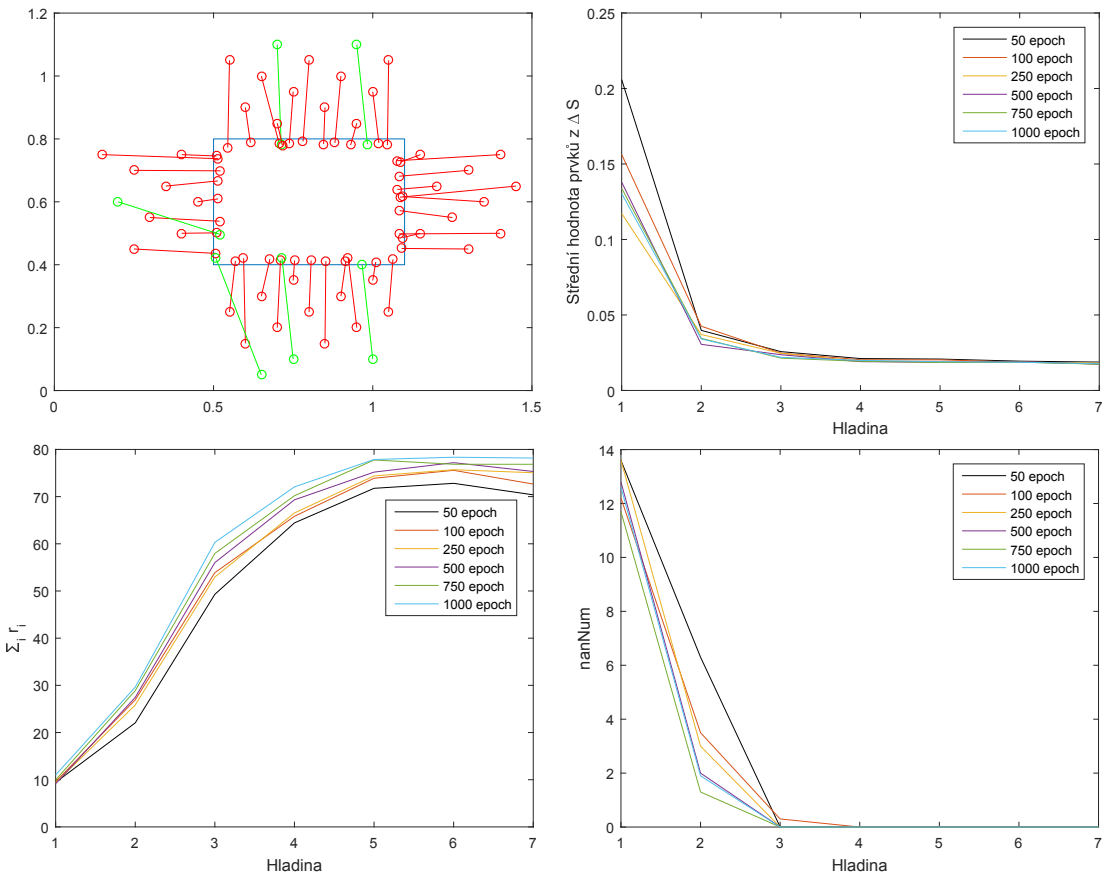
[8]Tato multisenzorní RBM má 200 multisenzorních neuronů, počet trénovacích epoch byl 100 - další parametry učení jsou popsané v 4.5.4



Obrázek 38 CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony.
(**A**) Malá kolečka mimo PPTM představují polohy stimulů mimo PPTM. Ke každému z těchto stimulů je přiřazen stimul odpovídající odhadu nejbližšího místa PPTM k danému stimulu mimo PPTM. Tyto dvojice jsou propojené úsečkami. Pokud je úsečka červená, znamená to, že $\sum_i r_i > 70$, tedy že odhad je věrohodný. V opačném případě je úsečka zelená. Tento graf je pro peripersonální CRBM na konci učení (1000 epoch). Zvolené testovací body jsou podmnožinou (každý pátý bod testovací množiny) testovací množiny z Obr. 34. (**B**, **C**, **D**) Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od PPTM, viz 5.4.1). Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

Při analýze této CRBM budeme využívat Obr. 39. Většina závěrů platných pro CRBM se 100 vstupními neurony (viz 5.4.4) je platná i zde, proto se zaměříme hlavně na to, v čem se tato CRBM od předchozí liší. Lze si všimnout, že statistika z (**B**) je na konci učení (1000 epoch) pro hladiny 1, 2, 3 o trochu menší než byla u CRBM se 100 neurony. Znázornění (**A**) stimulů mimo PPTM a jim náležejících odhadů se jeví přinejmenším stejně dobré jako u CRBM se 100 neurony. Velký rozdíl je vidět ve statistice $\sum_i r_i$, která zde má větší rozdíl mezi vzdálenějšími hladinami od PPTM a těmi bližšími. Proto v části obrázku (**A**) byla mez pro označení odhadu jako nevěrohodný (zelená barva) zvolena hodnota 20, oproti hodnotě 70 u CRBM se 100 neurony. Hodnoty statistiky z (**D**) jsou zde pro hladiny 1,2 větší, takže pro tyto vzdálené stimuly vygenerování jejich odhadu častěji selhalo. Takováto selhání lze však snadno detekovat a jedná se o oblast mimo (či na hraně) pokrytí trénovací množiny, takže by to v praxi nemělo působit problémy.

Oproti CRBM se 100 neurony byl vývoj učení rychlejší a např. rozdíl mezi hodnotami po 100 a 1000 epochách je zde podstatně menší než u CRBM se 100 neurony.

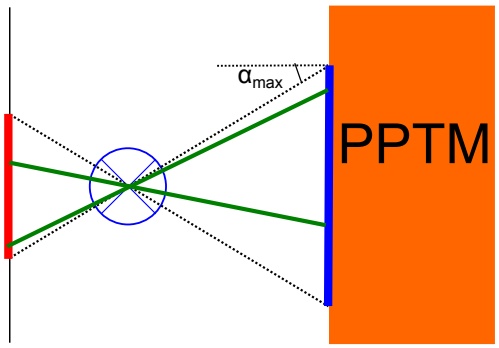


Obrázek 39 CRBM s 200 skrytými i vstupními neurony.
(**A**) Malá kolečka mimo PPTM představují polohy stimulů mimo PPTM. Ke každému z těchto stimulů je přiřazen stimul odpovídající odhadu nejbližšího místa PPTM k danému stimulu mimo PPTM. Tyto dvojice jsou propojené úsečkami. Pokud je úsečka červená, znamená to, že $\sum_i r_i > 20$, tedy že odhad je věrohodný. V opačném případě je úsečka zelená. Tento graf je pro peripersonální CRBM na konci učení (1000 epoch). Zvolené testovací body jsou podmnožinou (každý pátý bod testovací množiny) testovací množiny z Obr. 34.(**B**, **C**, **D**)Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od PPTM), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

5.4.6 Peripersonální CRBM pro trajektorie odchýlené od kolmice k PPTM

V této podsekci rozebereme chování peripersonální CRBM pro trajektorie odchýlené od kolmice k PPTM. Z principu při zmíněném způsobu generování trajektorií (viz 5.2.1) bude docházet k chybě odhadu nejbližšího místa, zvláště pokud α_{max} bude velké. Tento problém bude ilustrován s použitím Obr. 40.

Důležité je, že pokud předpokládáme rovnoměrné generování začátku trajektorie na okrajích vstupního prostoru a rovnoměrné generování úhlu $\alpha \in (-\alpha_{max}, +\alpha_{max})$ (viz 5.2), tak obě zelené trajektorie (a všechny ostatní trajektorie začínající v oblasti červené úsečky, protínající znázorněný stimul a končící v oblasti modré úsečky na PPTM) jsou stejně pravděpodobné. Je to dáno tím, že počátky obou trajektorií na červené úsečce jsou stejně pravděpodobné, stejně jako jejich úhly α (rovnoměrné rozdělení). Proto lze očekávat, že generativní model, jakým je CRBM, bude dělat při znázorněné poloze stimulu odhady (ideálně rovnoměrně) na celé modré úsečce. Dále je zřejmé, že čím bude stimul dále od PPTM, tím bude velikost modré úsečky větší a chyba odhadu od



Obrázek 40 Ilustrace problému při odhadu nejbližšího místa PPTM k danému vizuálnímu stimulu mimo PPTM při nenulovém α_{max}.
Na obrázku je znázorněná PPTM, pozice stimulu mimo PPTM (modré kolečko s křížkem), okraj vstupního prostoru (úsečka vlevo) a dvě rozdílné trajektorie stimulu (zelené přímky). Popis problému viz 5.4.6.

skutečně nejbližšího místa PPTM bude větší. Je tedy zřejmé, že pokud bude α_{max} velké a generování trajektorií bude rovnoměrné ve smyslu popsaném výše, tak nelze očekávat, že vygenerovaný odhad bude nejbližší místo PPTM k danému vizuálnímu stimulu mimo PPTM.

Byl proveden experiment s $\alpha_{max} = 10°$ (ostatní parametry učení viz 5.4.4 a 5.4.5). Výsledky (viz Obr. 46 a Obr. 47 z přílohy A.2) při této odchylce byly srovnatelné s předchozími výsledky (viz 5.4.4 a 5.4.5) při kolmých trajektoriích k PPTM. Z toho plyne, že pro úspěšné naučení není nutné požadovat striktně kolmé trajektorie k PPTM, což je důležitý výsledek z hlediska fungování modelu v ekologicky realističtějších podmínkách.

6 Diskuze

V této kapitole bude provedena diskuze vlastností představeného modelu a dosažených výsledků. Nejdříve bude provedena diskuze vztahující se k multisenzorní RBM. Poté bude diskutována peripersonální CRBM. Následně bude udělána diskuze o možnostech použití představeného modelu u humanoidního robota iCub. Na závěr bude diskutován vztah představeného modelu k ostatním výpočetním modelům multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru.

6.1 Diskuze multisenzorní RBM

Multisenzorní RBM se skládá z populace neuronů kódující stimuly v jednotlivých modalitách a z multisenzorních neuronů. V této práci jsme se zaměřili na taktilní a vizuální modalitu, ale použité kódování je velmi obecné, a proto by některé dosažené výsledky měly mít obecnější platnost. Taktilní a vizuální neurony v této práci kódují polohu stimulu.

6.1.1 RBM a multisenzorní integrace

Cílem učení je, aby multisenzorní neurony s konfigurací $\boldsymbol{v}$ reprezentovaly stejné pravděpodobnostní rozdělení polohy stimulu $\boldsymbol{s}$ jako unimodální neurony s konfigurací $\boldsymbol{r}$. Matematicky to znamená, že cílem je dosažení $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$. Pro dosažení tohoto cíle byl úspěšně použit algoritmus kontrastní divergence. Tento algoritmus se standardně používá pro trénování RBM jako generativního modelu. To znamená, že po naučení je možné RBM použít pro generování množiny s obdobnými statistickými vlastnostmi jako měla trénovací množina. Protože v trénovací množině nastávají taktilní a vizuální stimuly současně (v oblasti pokryté PPTM), tak RBM se jako generativní model musí naučit vazbu mezi těmito modalitami. Pokud by se tuto vazbu nenaučila, tak by mohla generovat taktilní a vizuální stimuly na PPTM samostatně, a to i přes to, že v trénovací množině takové stimuly nejsou. RBM je možno použít také k rekonstrukci částečně poškozeného vstupu (např. pokud bude na vstupu RBM obrázek a část tohoto obrázku bude chybět, tak rekonstrukce znamená vhodné doplnění chybějící části). Tohoto spolu s vazbou mezi modalitami je možné využít v situaci, kdy je stimul přítomen pouze v jedné modalitě a je potřeba zjistit polohu tohoto stimulu v druhé modalitě.

Dalším důvodem použití RBM je schopnost kompaktnější reprezentace informace ze vstupní populace neuronů multisenzorními neurony (neurony skryté vrstvy). Počet multisenzorních neuronů je totiž volen menší než je počet unimodálních neuronů. To znamená, že aby multisenzorní neurony mohly reprezentovat ekvivalentní informaci jako unimodální neurony, musí být schopné extrahovat vhodné příznaky z pozorování a tím vytvořit vyšší úroveň reprezentace. Tato vyšší úroveň reprezentace pak může být výhodná pro další zpracování informací (hierarchická extrakce příznaků je např. jednou z klíčových myšlenek "deep learningu"). V této práci kompaktnější reprezentaci multisenzorními neurony využívá peripersonální CRBM. Tím došlo také k výraznému zmenšení velikosti vstupních vektorů pro peripersonální CRBM (multisenzorních neuronů bylo mnohonásobně méně než unimodálních neuronů).

V neposlední řadě díky Poissonovským neuronům (neurony jejichž aktivita je vzorkována podle (37)) mohou unimodální neurony reprezentovat polohu stimulu jako normální rozdělení[1]. Multisenzorní neurony pak mohou reprezentovat Bayesovsky optimální kombinaci informací z obou modalit (viz 6.1.2).

6.1.2 Bayesovsky optimální reprezentace

Pokud by bylo možné získat naprosto přesnou informaci o okolním prostředí z individuálních senzorů/smyslových orgánů, nemělo by smysl informace z těchto senzorických modalit kombinovat. Protože ale často nelze přesnou informaci získat z jediné senzorické modality, má smysl informace z různých modalit kombinovat. Model z této práce zachycuje nepřesnost senzorických modalit tím, že populace neuronů reprezentují polohu stimulů jako normální pravděpodobnostní rozdělení (viz (51)). Důležité je zmínit, že multisenzorní neurony, které integrují informace z obou modalit, reprezentují Bayesovsky optimální (viz 2.3.3) kombinaci informací z obou modalit. To je dáno tím, že platí $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}) \approx p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ (důsledek optimalizovaného kritéria), kde $\boldsymbol{s}$ je poloha stimulu, $\boldsymbol{v}$ je konfigurace unimodálních neuronů a $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ jsou konfigurace unimodálních neuronů. Dokonce toto reprezentované rozdělení multisenzorními neurony $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v})$ je normální (viz (55)). Kvůli zmíněné Bayesovské optimalitě může být model užitečný i pro výzkum multisenzorního zpracování informací v mozku. Existuje totiž mnoho behaviorálních experimentů, které ukazují, že zpracování senzorních informací v mozku je Bayesovsky optimální (viz 2.3.3). Tato práce se však na tento aspekt nezaměřuje.

6.1.3 Interpretace experimentů

Vazba modalit

Vazba mezi modalitami byla testována v 4.5.4. Testování mohlo probíhat pouze pro stimuly v prostoru, který je pokryt oběma modalitami. Uvažujme, že na vstupu byla stimulována pouze jedna modalita. Na základě toho došlo k aktivaci multisenzorních neuronů. Nyní se zjišťovalo, zda aktivované multisenzorní neurony reprezentují i stimul v modalitě, která nebyla stimulována (podrobněji viz 4.5.4). Pokud je vazba mezi modalitami silná, multisenzorní neurony by měly být aktivované, jako kdyby byly stimulovány obě modality. Toho se podařilo dobře dosáhnout pro 50, 100 a 200 multisenzorních neuronů. Pro 400 a 800 multisenzorních neuronů byla vazba mezi oběma modalitami slabší. Hlavním problémem byla menší věrohodnost (větší směrodatná odchylka) zrekonstruovaných stimulů (v modalitě která nebyla stimulována). To přímo souvisí se slabší aktivací unimodálních neuronů (které dekódují stav multisenzorních neuronů, viz 4.4.2) modality, která nebyla stimulována.

Generativní model množiny se stimuly v obou modalitách musí obsahovat vazbu mezi modalitami, protože jinak by mohl generovat stimuly pouze v jedné modalitě a takové případy v trénovací množině vůbec nebyly. Protože RBM s více neurony ve skryté vrstvě (multisenzorní neurony) by měla být teoreticky lepším generativním modelem než RBM s méně neurony ve skryté vrstvě (viz 3.3.1), lze se domnívat, že slabší aktivace unimodálních neuronů modality, která nebyla stimulována, je dána velmi krátkým řetězcem Gibbsova vzorkování (multisenzorní neurony jsou rovnou vzorkovány na základě unimodálních neuronů), které používá navržený model multisenzorní RBM. Problém by proto mohlo vyřešit použití modelu, který používá delší řetězec Gibbsova vzorkování. To by

[1] To platí za předpokladu, že apriorní pravděpodobnost polohy stimulu $p(\boldsymbol{s})$ má rovnoměrné či normální (viz [59]) rozdělení.

na druhou stranu vedlo k delšímu času odvozování. Pro rychlé odvozování je výhodné používat méně multisenzorních neuronů, kde vazba mezi oběma modalitami je silnější. V neposlední řadě, slabší aktivace unimodálních neuronů modality, která nebyla stimulována ve srovnání s modalitou, která byla stimulována, může být požadované chování multisenzorní RBM.

Kombinace informací z obou modalit

Dále se i experimentálně potvrdilo, že pokud multisenzorní neurony využívají informace z obou modalit, tak přesněji reprezentují stimuly. To je patrné např. z Obr. 22, kde je vidět, že reprezentace stimulů na PPTM (obě modality) je přesnější než mimo PPTM (pouze vizuální modalita).

Průměrování odezvy unimodálních neuronů

Původní model z [59] používal průměrování pouze při vzorkování multisenzorních neuronů na základě stavu unimodálních neuronů. V této práci byl rozšířen o průměrování unimodálních neuronů (viz (42)) na základě stavu multisenzorních neuronů. Tato modifikace velmi výrazně zlepšila vlastnosti modelu. Statistika $\Delta\boldsymbol{S}$, která vyjadřuje jak moc se liší střední hodnoty reprezentované multisenzorními a unimodálními neurony, je při použití zmíněného průměrování několikanásobně menší (viz Obr. 22). Statistika $\Delta\Sigma$, která souvisí s rozdílem mezi směrodatnou odchylkou rozdělení reprezentovaného multisenzorními neurony a rozdělení reprezentovaného unimodálními neurony, se při použití průměrování také zlepšila (viz Obr. 23), nicméně zlepšení není tak výrazné jako u $\Delta\boldsymbol{S}$. Grafické znázornění, na kterém je vidět rozdíl při použití průměrování a bez použití průměrování je na Obr. 25. Je tedy vidět, že s použitím průměrování se podařilo v provedených experimentech dosáhnout $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}) \approx p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$, což bylo cílem učení.

Počet multisenzorních neuronů

Počet multisenzorních neuronů hraje zásadní roli při učení RBM. Při experimentech bylo vyzkoušeno 50, 100, 200, 400 a 800 multisenzorních neuronů (viz 4.5.5). Celkový počet unimodálních neuronů byl 892. To znamená, že ve všech případech byl počet multisenzorních neuronů menší než počet unimodálních neuronů. Pokud by to tak nebylo, RBM by nebyla nucena extrahovat vhodné příznaky z pozorování.

Teoreticky by větší počet multisenzorních neuronů měl vést k lepší reprezentaci stimulů, protože větší počet neuronů skryté vrstvy by měl vést k lepšímu generativnímu modelu (viz 3.3.1). Na druhou stranu čím menší počet multisenzorních neuronů, tím rychlejší odvozování (Gibbsovo vzorkování) a také RBM je nucena lépe extrahovat příznaky z pozorování. To může být výhodné, pokud jsou multisenzorní neurony vstupem další neuronové sítě.

Experimentálně se ukázalo, že od určitého počtu multisenzorních neuronů vede přidávání dalších multisenzorních neuronů spíše k horším výsledkům. U statistiky $\Delta\boldsymbol{S}$ přidávání dalších multisenzorních neuronů nevedlo ke zhoršení. RBM s 200 multisenzorními neurony měla o něco lepší tuto statistiku než RBM s 50 a 100 neurony. RBM se 400 multisenzorními neurony se však od RBM s 200 multisenzorními neurony liší ve statistice $\Delta\boldsymbol{S}$ jen nepatrně a přidání dalších 400 multisenzorních neuronů (RBM s 800 neurony) již nevedlo k žádnému zlepšení. Odlišná situace nastala u statistiky $\Delta\Sigma$, kde docházelo s přibývajícím počtem multisenzorních neuronů ke zhoršení. Podle Obr. 23 pro PPTM docházelo ke zlepšení s přibývajícím počtem multisenzorních neuronů

do počtu 400. Přidání dalších 400 multisenzorních neuronů (RBM s 800 multisenzorními neurony) již vedlo ke zhoršení. Pro oblast mimo PPTM byla situace obdobná jako pro PPTM, jen ke zlepšení docházelo do počtu 200 multisenzorních neuronů. Přidáváním dalších multisenzorních neuronů (400 a 800 neuronů) docházelo ke zhoršení statistiky. Ukázalo se, že od určitého počtu multisenzorních neuronů přidávání dalších vede k větší směrodatné odchylce reprezentovaného rozdělení multisenzorními neurony. To znamená, že multisenzorní neurony reprezentují stav unimodálních neuronů se slabšími aktivacemi, než jaké skutečně byly (viz Obr. 24). Jedná se o podobný problém se slabšími aktivacemi unimodálních neuronů, jako byl popsán v části zabývající se vazbou modalit (viz 6.1.3). Protože RBM s větším počtem neuronů skryté vrstvy by měl být lepším generativním modelem, nabízí se jako možné vysvětlení velmi krátký řetězec Gibbsova vzorkování, který používá představený model (podrobněji rozebráno v části zabývající se vazbou modalit 6.1.3).

Nyní rozebereme jaký počet multisenzorních neuronů z testovaných variant (50, 100, 200, 400, 800) se ukázal jako optimální. RBM s 50 a 800 multisenzorními neurony rovnou na základě již zmíněných (horších) výsledků (viz např. Obr. 23) pro další úvahy vyřadíme. Pro analýzu vhodného počtu multisenzorních neuronů byl využit graf z Obr. 27. Pokud by se ignorovala statistika $\Delta\Sigma$ pro oblast mimo PPTM (část **D** ve zmíněném grafu) a rychlost učení (rostoucí s počtem neuronů), tak by s mírným náskokem vyhrála RBM se 400 neurony, za ní RBM s 200 neurony a poslední by byla RBM se 100 neurony. Nicméně uvážíme-li i statistiku $\Delta\Sigma$ pro oblast mimo PPTM (část **D** ve zmíněném grafu), která je pro RBM se 400 neurony nejhorší (viz 4.5.5) a problémy této RBM s vazbou modalit (viz 4.5.4), tak se ukazuje, že 400 multisenzorních neuronů není vhodná volba počtu multisenzorních neuronů. Celkovým vítězem se proto stává RBM s 200 neurony. Pokud ovšem nebude požadována velká přesnost a naopak bude požadováno rychlé učení a rychlé fungování, tak může být i RBM se 100 multisenzorními neurony vhodnou volbou. Menší počet multisenzorních neuronů by měl vést také k lepší extrakci příznaků z pozorování, což může být výhodné, pokud multisenzorní neurony budou vstupem další neuronové sítě.

6.2 Diskuze peripersonální CRBM

Multisenzorní RBM je schopná zajistit vazbu modalit. To znamená, že pokud jsou obě modality stimulovány současně, tak se mezi nimi vytvoří vazba. To však nestačí k vytvoření peripersonálního prostoru, tedy vazby mezi okrajem PPTM a okolním prostorem. Stimuly na okraji PPTM a mimo něj nastávají totiž v rozdílné časové okamžiky, a protože RBM není schopná zachytit časové souvislosti, tak nemůže stačit k vytvoření reprezentace peripersonálního prostoru. Tento nedostatek RBM byl vyřešen použitím CRBM, což je rozšíření RBM, které již umožňuje zachytit také časové souvislosti. CRBM je schopna zachytit (časovou) vazbu mezi stimuly mimo PPTM a stimuly na jeho okraji. Díky tomu, pokud je v okolí PPTM přítomen stimulující objekt, je možné s využitím naučené CRBM predikovat stimulaci PPTM (a místo stimulace na něm).

Na peripersonální CRBM lze nahlížet jako na generativní model, který se ale od RBM liší tím, že má dynamický bias[2]. Hodnota tohoto dynamického biasu je v našem případě určena polohou stimulu mimo PPTM, ke kterému chceme predikovat nejbližší místo na PPTM. To znamená, že pokud zafixujeme stimul mimo PPTM, tak můžeme vygenerovat množinu stimulů na PPTM a tato vygenerovaná množina by měla mít obdobné pravděpodobnostní rozdělení jako měly stimuly na PPTM v trénovací množině,

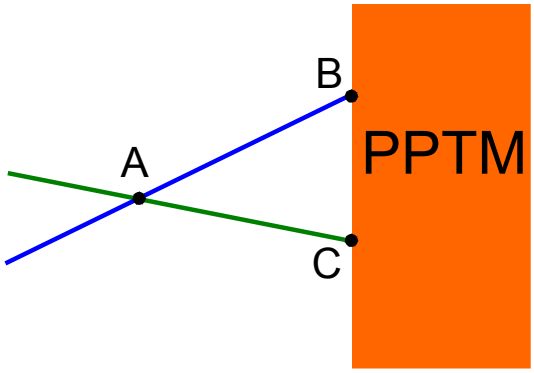
[2]Kvůli problematickému překladu ponechán původní anglický název.

způsobené stimulujícím objektem, který procházel (předtím, než došlo ke kontaktu s PPTM) přes polohu zafixovaného stimulu mimo PPTM.

6.2.1 Vliv vlastností trénovací množiny na učení

Při učení byly uvažovány hlavně trajektorie kolmé na povrch PPTM. Takové trajektorie zajistí vytvoření vazby mezi polohou stimulu mimo PPTM a nejbližším místem na něm. Pokud bude trénovací množina tvořena jinými než kolmými trajektoriemi, nebude již CRBM predikovat nejbližší místo PPTM ke stimulujícímu objektu.

Jak je popsáno výše, CRBM je generativní model, který je podmíněný polohou stimulujícího objektu mimo PPTM (ke kterému chceme udělat predikci na PPTM). K ilustraci následujícího problému použijeme Obr. 41. Uvažujme nyní libovolný bod mimo PPTM (který je ale v jeho bližším okolí) a označme ho jako A. Pokud přes tento bod



Obrázek 41 Ilustrace generování vzdálených odhadů.
Popis viz 6.2.1.

bude procházet vždy trajektorie, která skončí na PPTM v bodě B, tak by CRBM měla generovat vždy jako odhad k bodu A bod B. Pokud ovšem jednou trajektorie procházející přes bod A skončí v bodě B a podruhé v bodě C a tyto trajektorie se budou rovnoměrně střídat, tak CRBM by jako odhad k bodu A měla rovnoměrně generovat B a C, a to i tehdy, jsou-li B a C od sebe velmi vzdáleny. To znamená, že pokud trénovací množina bude obsahovat velmi rozdílné trajektorie procházející přes bod A a tyto trajektorie budou mít přibližně rovnoměrný výskyt, tak predikovaná místa na PPTM se budou výrazně lišit. Pro takovéto případy není představený model vhodným řešením. Nicméně s tímto problémem si asi těžko poradí jakýkoliv model, který nebere v potaz směr pohybu stimulujícího objektu (uvažuje pouze polohu) a učí se výhradně z časové souvislosti mezi stimulem, který odpovídá bodu z trajektorie (mimo PPTM) a stimulem, který odpovídá koncovému bodu této trajektorie (na PPTM).

Pokud ovšem bodem A bude "často" procházet jen několik trajektorií, které navíc budou končit blízko sebe, tak by představený model měl generovat dobré odhady stimulace na PPTM k bodu A. Důležité je poznamenat, že pokud se v trénovací množině budou s malým zastoupením vyskytovat vychýlené trajektorie ("outliers"), nemělo by to příliš vadit, protože CRBM je bude generovat s malou pravděpodobností. Tyto předpoklady by měly být dobře splněny při generování trénovací množiny na reálném robotovi instruovaným experimentátorem. Zda by tyto předpoklady byly také splněny při generování trénovací množiny přirozenou interakcí robota s okolním prostředím, nelze s jistotou předpovědět, ale lze spíše očekávat, že ne. Pro tento případ by byl spíše asi vhodný model, který bere v potaz i směr pohybu stimulujícího objektu.

V první části experimentů se předpokládaly trajektorie kolmé k PPTM. Druhá část experimentů byla provedena s odchylkou v rozmezí $(-10°, 10°)$ od kolmice k PPTM.

6.2.2 Interpretace experimentů

Nejdříve byly provedeny experimenty s peripersonálními CRBM se 100 (viz 5.4.4) a 200 (viz 5.4.5) multisenzorními neurony a kolmými trajektoriemi na PPTM v trénovací množině. V obou těchto případech se podařilo dosáhnout vysoké úspěšnosti odhadu nejbližšího místa PPTM k danému stimulu mimo PPTM (viz Obr. 38 a Obr. 39). Několik odhadů bylo poměrně nepřesných, ty však bylo možné rozpoznat na základě celkového součtu aktivací unimodálních neuronů odhadnutého stimulu. Zpravidla se jednalo o odhady ke stimulům, které ležely na hraně či za hranou oblasti, která byla pokryta stimuly z trénovací množiny (avšak aktivovaly některé unimodální neurony, které byly v trénovací množině také aktivovány), takže takový výsledek není překvapivý. Nicméně na základě celkového součtu stimulací bylo také několik odhadů chybně odhadnuto jako nepřesných. Zde je třeba najít vhodný práh celkového součtu stimulací pro klasifikování odhadu jako nepřesného. Pokud tento práh zvolíme jako malou hodnotu, pak často nerozpoznáme nepřesný odhad, naopak pokud zvolíme vysokou hodnotu prahu, pak často korektní odhad klasifikujeme jako nepřesný. Také se ukázalo, že vhodná volba tohoto prahu se může výrazně lišit pro CRBM s různým počtem multisenzorních neuronů (srovnej hodnotu 70 pro CRBM se 100 neurony s hodnotou 20 pro CRBM s 200 neurony).

Dále byl proveden experiment s peripersonální CRBM se 100 multisenzorními neurony a trajektoriemi s odchylkou v rozmezí $(-10°, 10°)$ od kolmice k PPTM (viz 5.4.6). Výsledky byly srovnatelné s předchozími výsledky s kolmými trajektoriemi k PPTM. To ukazuje robustnost peripersonální CRBM vůči menší odchylce trajektorií od kolmice k PPTM v trénovací množině.

6.3 Použití pro reprezentaci peripersonálního prostoru humanoidního robota

Navržený model multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru je motivován použitím na humanoidním robotovi iCub [1]. Tento robot je opatřen kamerami pro stereo vidění a hlavně většina jeho povrchu těla je pokryta umělou kůží [2].

Dosud jsme uvažovali uměle generovaná data ve dvourozměrném vstupním prostoru. Taková data se pochopitelně liší od dat generovaných na skutečném robotovi. Proto nyní provedeme porovnání obou situací a rozebereme očekávaný vliv jednotlivých odlišností na reprezentaci peripersonálního prostoru při použití navrženého modelu u robota iCub.

Předzpracování dat

Navržený model předpokládá předzpracovaná data ze senzorů. Konkrétně je nutné ze snímků z kamer získat polohu stimulujícího objektu a tu následně převést do souřadného systému části těla, pro kterou se vytváří reprezentace peripersonálního prostoru. Obdobně je potřeba získat polohu stimulujícího objektu ze senzorů umělé kůže. K těmto účelům je možné využít již implementované metody pro robota iCub (viz [25]).

6.3.1 Generování odezev unimodálních neuronů

Vstupní prostor pro uměle generovaná data byl dvourozměrný. Reálný robot se nachází ve trojrozměrném prostoru. To je zásadní rozdíl hlavně pro vizuální modalitu. Každému neuronu vizuální modality byl ve dvourozměrném prostoru přiřazen střed receptivního pole, takže tyto středy tvořily ve vstupním prostoru dvourozměrnou mřížku. Pro třírozměrný vstupní prostor stačí rozšířit vektor určující polohu středu o třetí souřadnici a dvourozměrnou mřížku nahradit trojrozměrnou. Stejně snadno je možné rozšířit matici Σ_t, která určuje "šířku" Gaussovy funkce pro trojrozměrný případ. Nyní je možné s využitím (37) generovat odezvu unimodálních neuronů.

Pro popis polohy na umělé kůži budeme také uvažovat tři souřadnice. Protože kůži robota iCub je možné po sundání rozvinout do roviny, bylo by možné polohu na této kůži popisovat pouze pomocí dvou souřadnic. Tímto rozvinutím se ale dostanou některé původně sousední části kůže daleko od sebe, a to by mohlo způsobit problémy při generování odezvy taktilních unimodálních neuronů z těchto dvourozměrných souřadnic. Jako středy receptivních polí taktilní modality je možné pro jednoduchost rovnou zvolit pozice taxelů[3], které jsou známé. Nyní je možné generovat odezvu unimodálních neuronů obdobně jako u vizuálních unimodálních neuronů.

Další možností by bylo jako unimodální neurony uvažovat rovnou taxely a aktivace taxelů rovnou převádět na aktivace neuronů (hodnoty $\{0, 1, 2, .., p\}$, kde p představuje maximální intenzitu stimulace). Poté by ale nebylo možné konfiguraci unimodálních neuronů interpretovat jako normální rozdělení, protože při odvození této vlastnosti (viz (51)) hrálo zásadní roli, že unimodální neurony byly Poissonovské (viz (37)).

Vytvoření trénovací množiny

K vytvoření trénovací množiny pro multisenzorní RBM stačí stimulovat umělou kůži a pohybovat stimulujícím objektem v okolí těla robota. Problematické může být zajištění rovnoměrného rozdělení stimulů na umělé kůži robota a v jeho okolí. Pokud se to nepodaří, nebude možné konfiguraci unimodálních neuronů interpretovat jako normální rozdělení (při odvození (51) to bylo předpokládáno).

Dalším důležitým aspektem je velikost trénovací množiny nutná pro naučení multisenzorní RBM. Proto provedeme hrubý odhad požadované velikosti trénovací množiny. RBM se dokázala naučit na trénovací množině s 10 000 prvky (i když o něco hůře než na desetkrát větší trénovací množině), to znamená, že každý unimodální neuron byl aktivován zhruba 11krát (počet unimodálních neuronů je 892). Předpokládejme u robota iCub řádově tisíce unimodálních neuronů. Dále předpokládejme vytvoření 20 stimulů za sekundu (20 Hz vzorkování, viz [25]). Vytvoření dostatečného počtu stimulů pro tisíc unimodálních neuronů zabere přibližně $(11 * 1000)/20 = 550$ sekund, což je jistě přijatelné. K tomuto času je potřeba přistupovat jako k hrubému dolnímu odhadu.

Vytvoření trénovací množiny pro reprezentaci peripersonálního prostoru bylo již z velké části rozepsáno v 6.2. Nyní rozebereme velikost časového okna. Touto velikostí je myšlen počet stimulů, které jsou navzorkovány před stimulací umělé kůže a následně jsou použity pro vytvoření vazby se stimulovaným místem na umělé kůži (viz 5.2). Jinak řečeno, kolik vizuálních stimulů si robot pamatuje před tím, než dojde ke stimulaci jeho umělé kůže. Tuto velikost je nutné volit s ohledem na frekvenci vzorkování, rychlost stimulujícího objektu a požadovanou velikost peripersonálního prostoru (viz 5.2). V práci [25][4] mají velikost časového okna 60 stimulů (3 sekundy při 20 Hz vzorkování).

[3] Základní element umělé kůže.

[4] V této práci je řešena také tvorba peripersonálního prostoru pro robota iCub.

Nyní obdobně jako pro multisenzorní integraci provedeme odhad velikosti trénovací množiny pro naučení peripersonální CRBM. Během učení se vytváří vazba mezi okrajem PPTM a okolním prostorem. Ve vstupním prostoru použitém při generování umělých dat uvažujme jako okraj PPTM dvě krajní řady unimodálních taktilních neuronů v mřížce. Těchto neuronů je 72. V 5.4.4 postačovalo k naučení peripersonální CRBM 2000 trajektorií. To znamená, že na jeden taktilní unimodální neuron z okraje připadalo $2000/72 \approx 28$ trajektorií. Pokud předpokládáme, že vytvoření jedné trajektorie zabere 10 sekund (upoutání pozornosti robota pro sledování objektu cca. 5 sekund, velikost časového okna 3 sekundy, ostatní 2 sekundy) , tak nasbírání trajektorií pro jeden unimodální neuron zabere $28 * 10 = 280$ sekund. Uvažujme nyní vytvoření reprezentace peripersonálního prostoru kolem předloktí robota iCub. Umělá kůže na předloktí robota iCub má 230 taxelů. Pokud budeme uvažovat jeden taktilní unimodální neuron pro deset taxelů[5] , tak vytvoření trénovací množiny bude trvat $280 * 23 = 6440$ sekund, což přibližně odpovídá necelým dvěma hodinám. To je přijatelná doba. Je důležité upozornit, že se jedná o velmi hrubý odhad.

Unimodální neurony nereprezentující normální rozdělení

V předchozích částech jsme narazili na případ, kdy unimodální neurony nebudou reprezentovat normální rozdělení polohy stimulu. Důvodem bylo porušení některého z předpokladů nutného pro normální rozdělení. Proto zde stručně rozebereme, zda je model i v takovém případě použitelný. RBM je obecný generativní model, pro který není podstatné, co přesně reprezentují neurony vstupní vrstvy. To znamená, že pokud unimodální neurony nebudou reprezentovat normální rozdělení, tak by to nemělo mít na fungování RBM žádný vliv. Pouze se bude lišit interpretace stavu unimodálních neuronů, protože je nebude možné interpretovat jako normální rozdělení. Stále však by měl model obsahovat vazbu mezi modalitami a mělo by být možné ho použít k vytvoření reprezentace peripersonálního prostoru.

6.4 Vztah k ostatním modelům

Nyní provedeme porovnání představeného modelu s ostatními výpočetními modely multisenzorní integrace a reprezentace peripersonálního prostoru (viz Kapitola 2). Souvislost se zmíněnými biologicky inspirovanými modely není příliš silná. Jednotky RBM je sice možné interpretovat jako neurony (viz 3.3.1), ale vlastnosti těchto neuronů jsou oproti neuronům u biologicky inspirovaných modelů rozdílné. Například k danému stimulu lze u biologicky inspirovaných modelů většinou přiřadit několik multisenzorních neuronů, o kterých je možné říct, že daný stimul reprezentují. Jinak řečeno jednotlivé multisenzorní neurony mají receptivní pole a reagují na stimuly přítomné v těchto receptivních polích. V představeném modelu je stimul reprezentován daleko větším počtem multisenzorních neuronů (např. polovinou multisenzorních neuronů).

Z modelů aplikovaných v robotice má k představenému modelu (přesněji k jeho části, která zajišťuje reprezentaci peripersonálního prostoru) nejblíže model reprezentace peripersonálního prostoru z [25]. Tento model se také učí z (časových) asociací mezi stimuly taktilní a vizuální modality. Zmíněný model přiřazuje vzdálenosti stimulujícího objektu od taxelu pravděpodobnost (budoucí) stimulace tohoto taxelu. To znamená, že tento model redukuje pozici stimulujícího objektu na vzdálenost vůči taxelům. Model z této

[5] Tento poměr vychází z [25], kde se nepracovalo s jednotlivými taxely, ale se skupinami taxelů po deseti.

diplomové práce tuto redukci neprovádí a predikci provádí na základě pozice stimulujícího objektu vůči taxelům. Model z uvedené práce má na rozdíl od modelu z této práce od začátku individuálně omezena vizuální receptivní pole přiřazená jednotlivým taxelům (omezení vizuálních receptivních polí není pro všech taxely stejné). Model z této práce taková individuální omezení nemá. Tato individuální omezení sice částečně omezují plasticitu reprezentace peripersonálního prostoru, na druhou stranu by uvedený model měl být o něco robustnější vůči komplikovanějším trénovacím trajektoriím.

Dále existuje určitý vztah tohoto modelu k Bayesovským modelům. Tento vztah je dán tím, že unimodální neurony reprezentují polohu stimulu jako normální rozdělení a multisenzorní neurony reprezentují Bayesovsky optimální kombinaci informací z obou modalit (podrobněji rozebráno v 6.1.2). Nicméně multisenzorní neurony neprovádí Bayesovské odvozování. Zjednodušeně řečeno multisenzorní neurony obsahují informaci, na jejímž základě je možné (po dekódování) provést Bayesovské odvozování, ale multisenzorní neurony toto odvozování samy neprovádějí (oproti např. modelu z [33]).

7 Závěr a budoucí výzkum

V této práci byl představen a otestován model multisenzorní integrace se zaměřením na vizuální a taktilní modalitu a související reprezentace peripersonálního prostoru. Tento model je motivován použitím na humanoidním robotovi iCub. Model se skládá ze dvou částí.

První část je tvořena Omezeným Boltzmannovým strojem (RBM) a zajišťuje multisenzorní integraci stimulů taktilní a vizuální modality a kompaktnější reprezentaci stimulů. Unimodální populace neuronů s konfiguracemi neuronů $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ reprezentují normální pravděpodobnostní rozdělení $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1)$, $p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_2)$ polohy $\boldsymbol{s}$ stimulů. Multisenzorní neurony s konfigurací $\boldsymbol{v}$ reprezentují normální pravděpodobnostní rozdělení $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v})$, pro které platí $q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{v}) \approx p(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, tedy multisenzorní neurony reprezentují optimální kombinaci informací z obou modalit. Tento RBM se také naučí prostorovou souvislost taktilních a vizuálních stimulů ("pochopí", které vizuální a taktilní stimuly nastávají současně). Protože se ale RBM není schopný naučit časové souvislosti, nebylo možné je zajistit ani mezi stimuly.

Druhá část je proto tvořena peripersonálním Podmíněným Omezeným Boltzmannovým strojem (CRBM). Tento CRBM má na svém vstupu multisenzorní neurony a umožňuje se naučit časovou souvislost stimulů. Uvažujme, že během učení se opakovaně vyskytl stimulující předmět v místě A, které leží mimo (např. 15 centimetrů od povrchu těla) podprostor pokrytý taktilní modalitou (PPTM), a krátce poté se tento předmět vyskytl v místě B, které leží na PPTM. CRBM se pak tuto časovou souvislost naučí a je schopen v přítomnosti stimulujícího předmětu v místě A předpovídat stimulaci v místě B na PPTM. Tato forma reprezentace peripersonálního prostoru může být užitečná v experimentální robotice. Pokud se robot bude pohybovat v komplexním a dynamickém prostředí, které je méně předvídatelné, tak je velmi důležité, aby si byl "vědom" celého povrchu svého těla a jeho blízkého okolí. Pak může sledovat, zda nehrozí střet nějaké části těla s překážkou z okolí. Sledování peripersonálního prostoru je také důležité pro přímou spolupráci robotů a lidí (např. u montážní linky), protože při ní hrozí poranění člověka robotem.

Silnou stránkou představeného modelu je to, že je postaven na RBM (CRBM je pouze modifikace RBM), který patří mezi silné nástroje strojového učení (viz Kapitola 3 pro přehled úspěšně řešených úloh). Dále velkou výhodou modelu je jeho modularita a univerzálnost. Jak je ukázáno v [59], tento model je kromě multisenzorní integrace možné použít také k transformaci mezi souřadnými systémy a je také možné jednotlivé "moduly" (RBM, které zpracovávají rozdílné vstupy) hierarchicky spojovat. V této diplomové práci navíc bylo ukázáno, že lze modulárně přidat CRBM a tím umožnit modelu zachytit také časovou souvislost (původní model z [59] zachycení časové souvislosti neumožňuje). To nasvědčuje tomu, že model z této práce bude možné dále rozšířit o zpracování dalších modalit a použít ho jako komplexní model zpracování senzorních informací. Schopnost učení tohoto modelu může být výhodná také při zkoumání některých neurobiologických procesů, protože některé neuromechanismy multisenzorní integrace vykazují velkou míru plasticity (viz 2.1). Použití robotické platformy pro tento výzkum má takovou výhodu, že je možné vytvořit podmínky učení, které by v případě živého subjektu zkoumání nebylo možné vytvořit (např. z etických důvodů).

Všechny výše uvedené vlastnosti představeného modelu byly úspěšně otestovány na uměle generovaných datech a podle provedené analýzy by mělo být možné tento model použít pro reprezentaci peripersonálního prostoru a multisenzorní integraci (taktilní a vizuální modality) u humanoidního robota iCub. Dalším plánovaným krokem výzkumu je proto implementace modelu na robotu iCub.

Jako další možné pokračování výzkumu se také nabízí celá řada možných rozšíření modelu. Uvedeme některé z nich. Představený model pro reprezentaci peripersonálního prostoru bere v potaz pouze polohu stimulujícího objektu a nikoliv směr pohybu. Proto by bylo dobré rozšířit model tak, aby bral v potaz i směr pohybu. Tím by došlo k výraznému posunu směrem k modelu, který by se naučil reprezentovat peripersonální prostor přirozenou interakcí s okolním prostředím.

Díky již zmíněné modularitě modelu se také nabízí přidání dalších modalit a vytvoření komplexního modelu zpracování senzorních informací. V první řadě by bylo dobré přidat propriocepci. Model také požaduje již předzpracovaná data ze senzorů. Například poloha stimulujícího předmětu se ze souřadného systému kamer musí předem transformovat do souřadného systému zkoumané části těla. Transformaci souřadnic by mělo být možné také provádět pomocí RBM (viz [59]). Dá se očekávat, že i (některé) další operace předzpracování by bylo možné provádět pomocí RBM (nezapomeňme, že RBM tvoří “deep belief networks”, které se úspěšně používají např. i ve strojovém učení z digitálních obrazů).

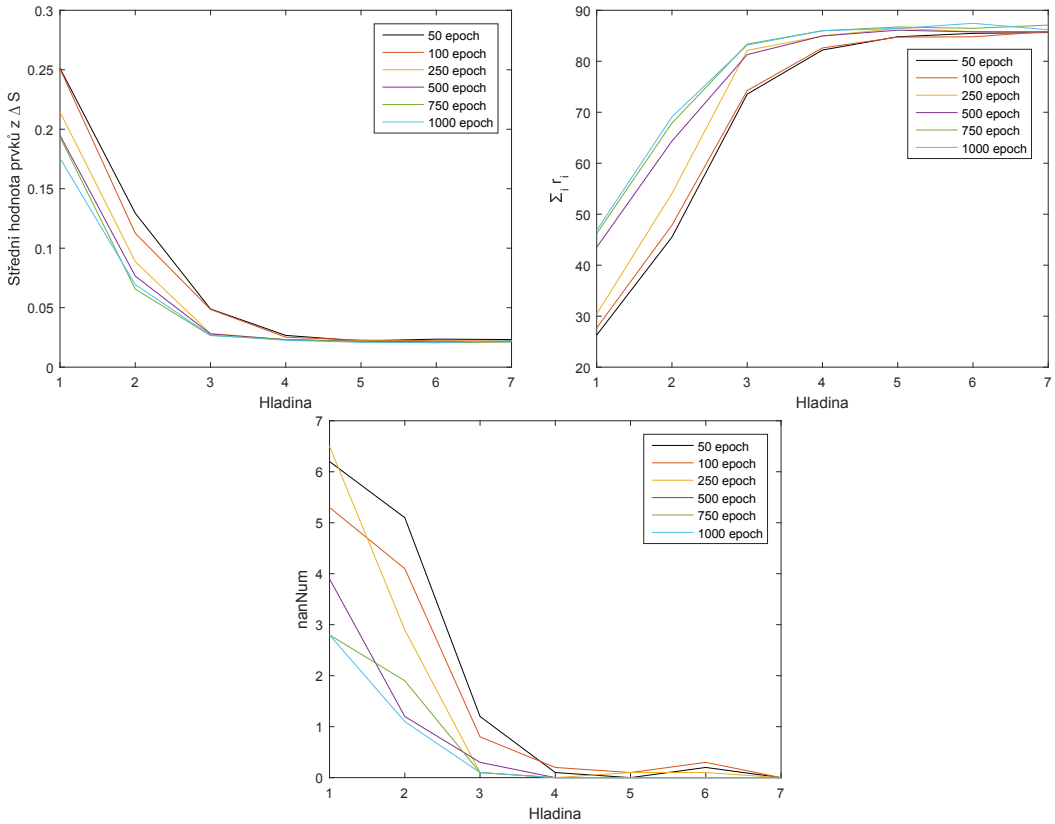
Příloha A

Appendix

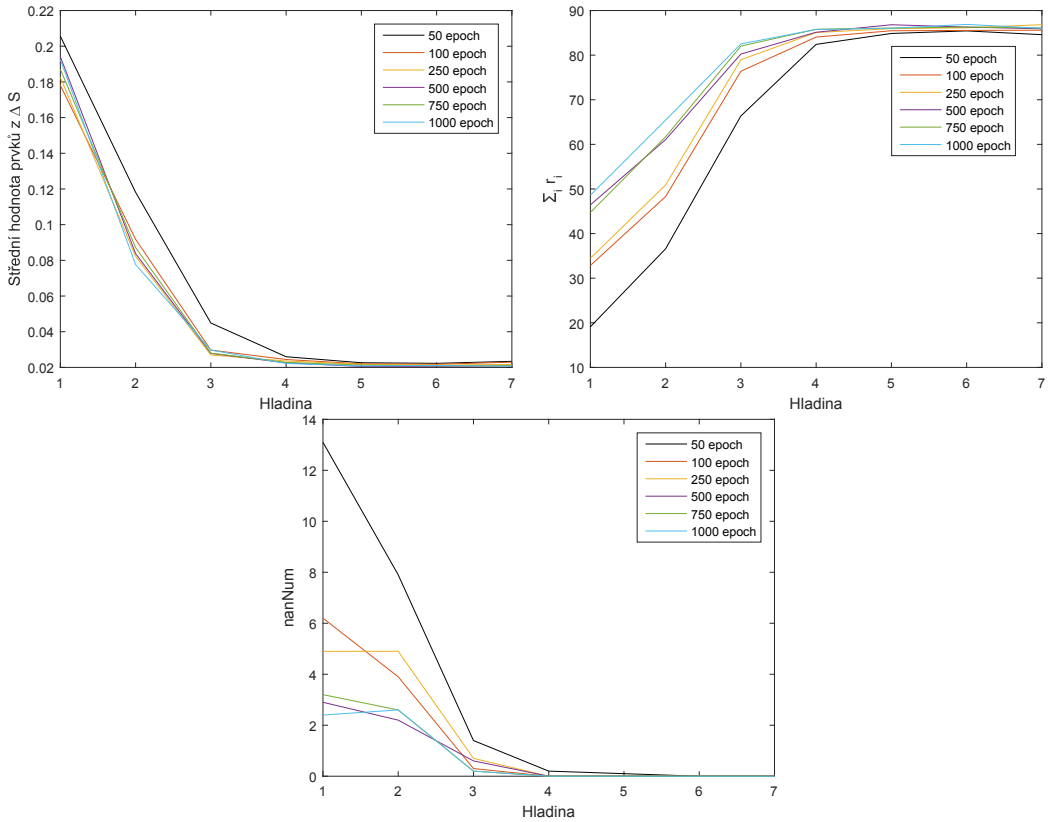
A.1 Příloha na CD

Na přiloženém CD jsou data (např. naučené modely) a funkce/skripty (jazyk Matlab) související s touto prací. Pro podrobný popis viz “README.txt” soubory v jednotlivých složkách. Složka “data” obsahuje data použité v této práci. Složka “MS_RBM” obsahuje skripty a funkce související s multisenzorní RBM. Složka “PPS_CRBM” obsahuje skripty a funkce související s peripersonální CRBM. Složka “ukazka” obsahuje skripty, které ilustrují použití důležitých funkcí pro tuto práci.

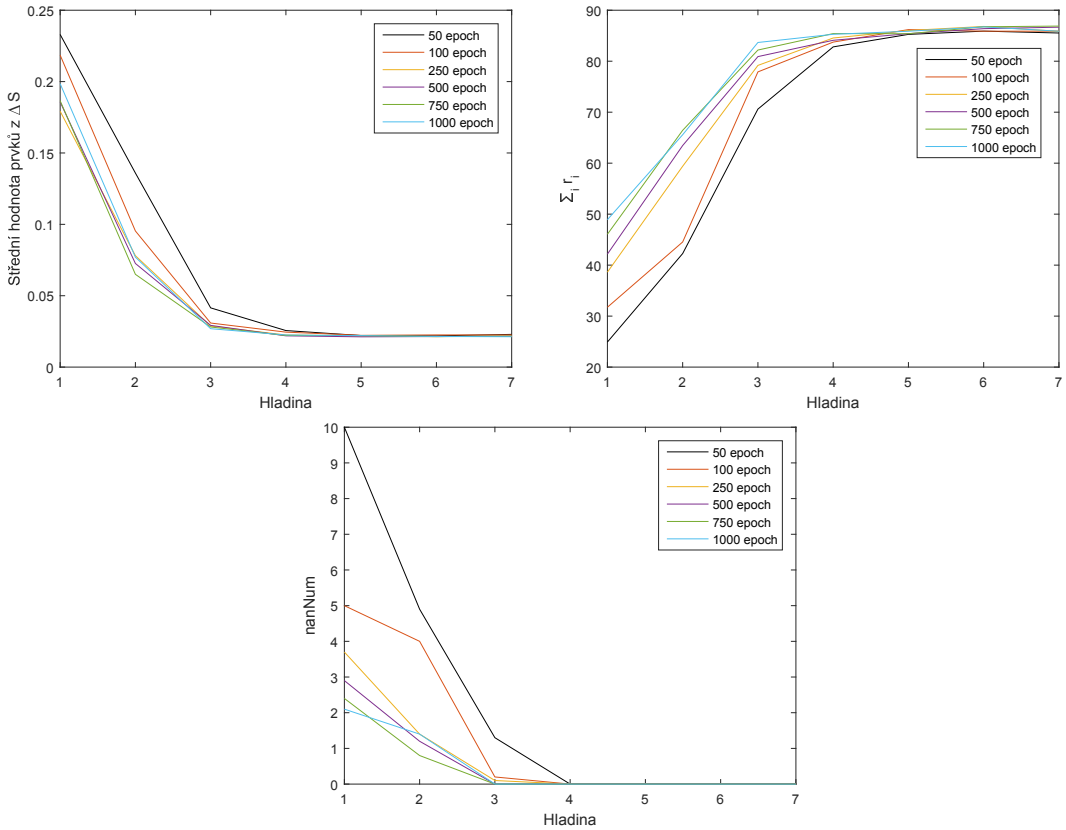
A.2 Obrazové přílohy



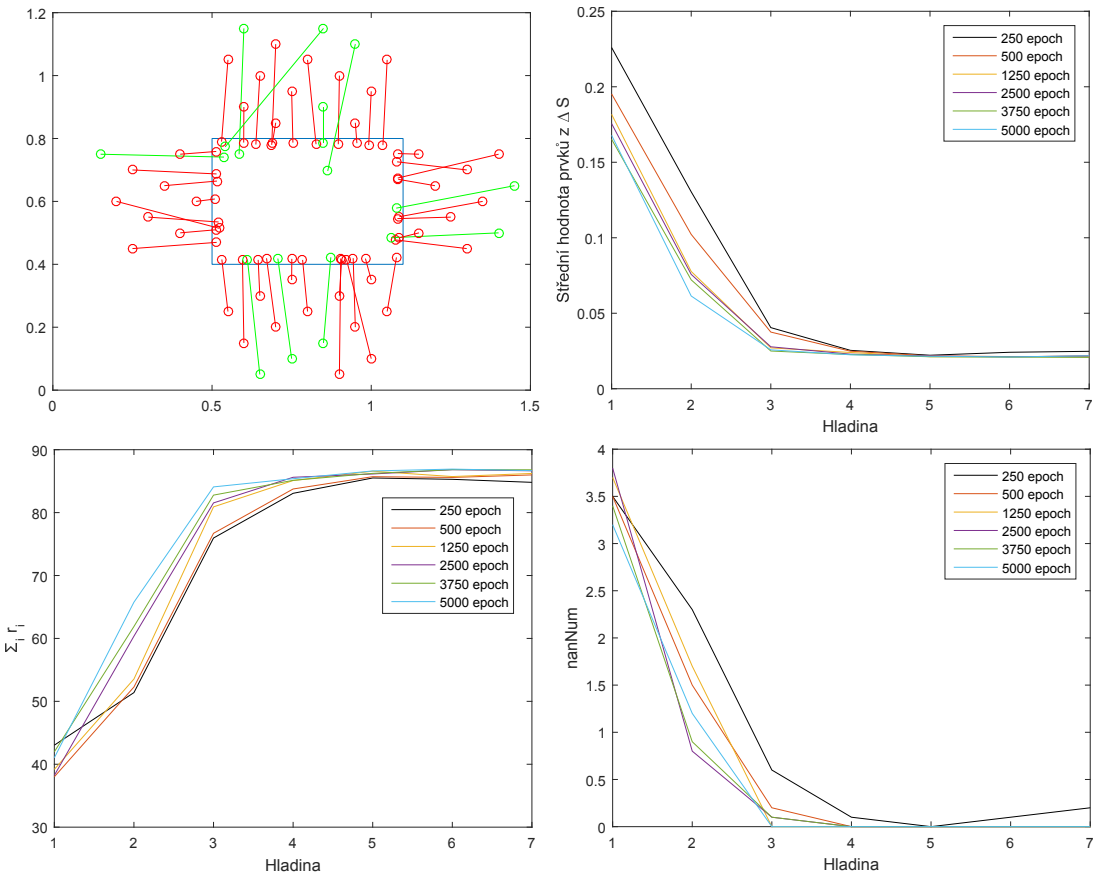
Obrázek 42 (Příloha k 5.4.3) Statistiky - počet trénovacích epoch pro CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony, opakování 0
Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.



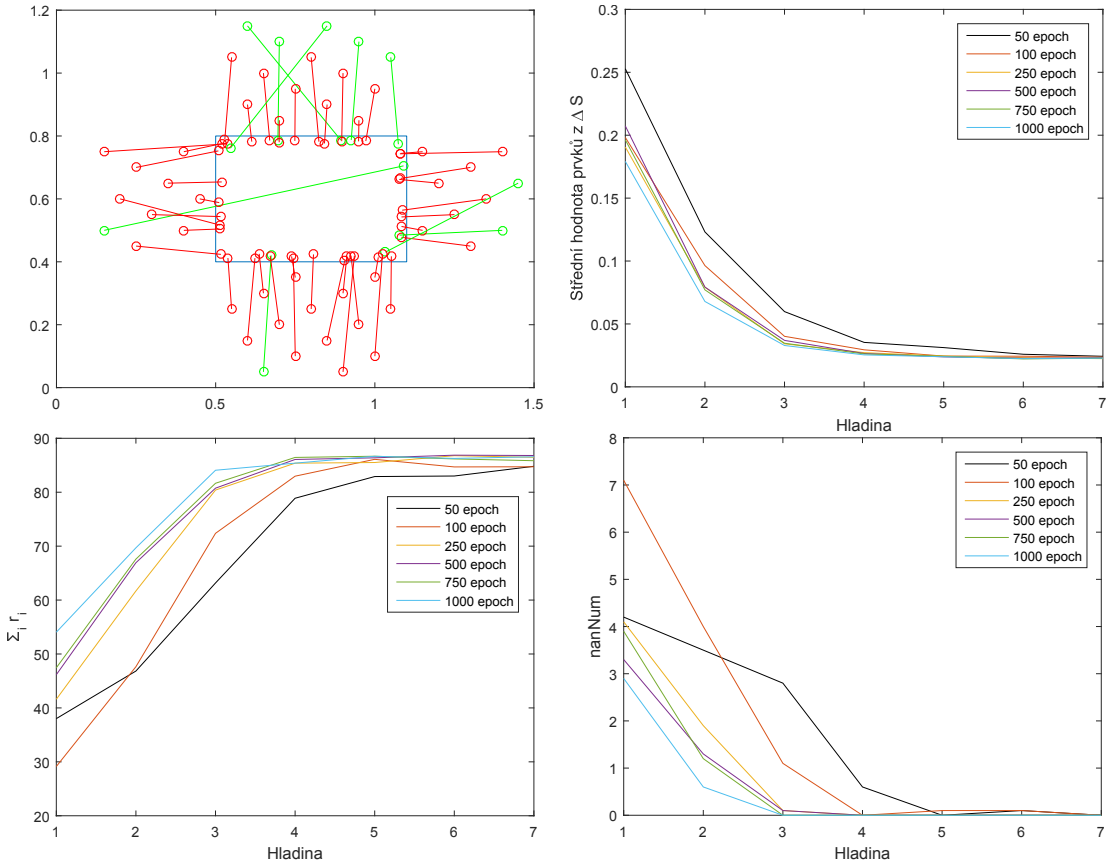
Obrázek 43 (Příloha k 5.4.3) Statistiky - počet trénovacích epoch pro CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony, opakování 1
Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.



Obrázek 44 (Příloha k 5.4.3) Statistiky - počet trénovacích epoch pro CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony, opakování 2
Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

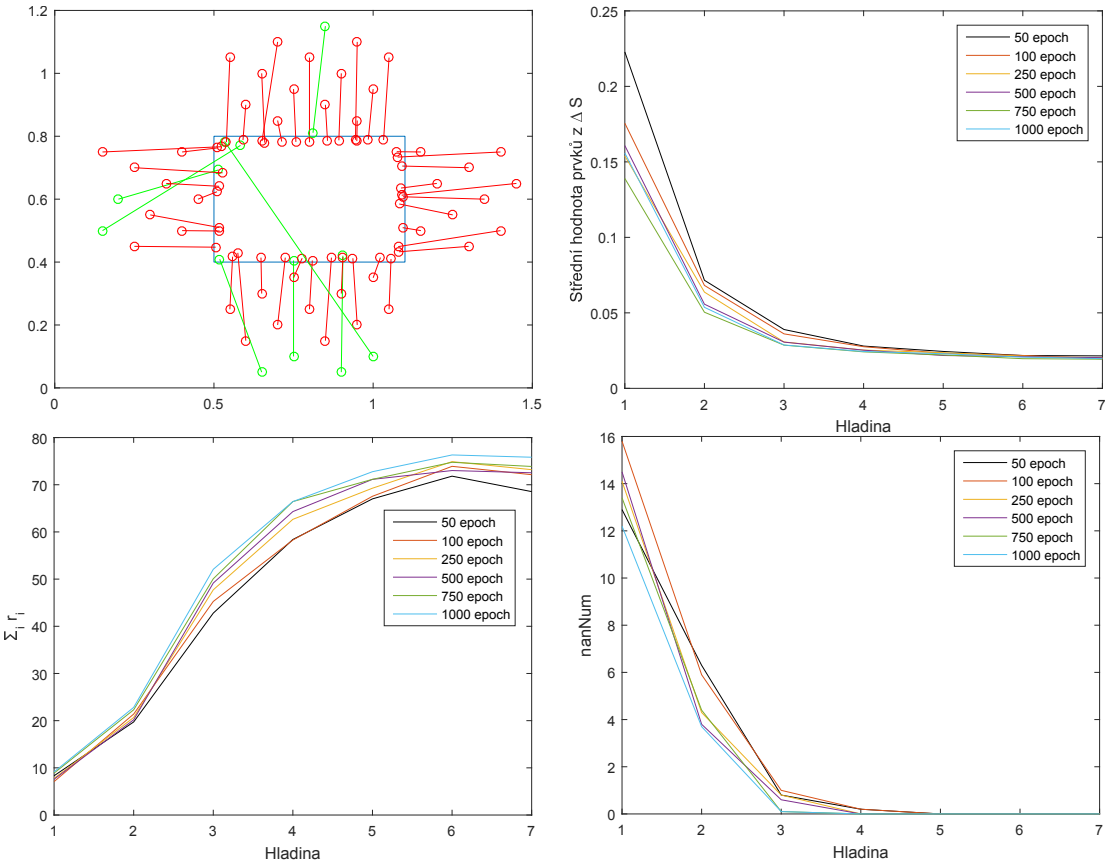


Obrázek 45 (Příloha k 5.4.4) CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony (menší trénovací množina)
(**A**) Malá kolečka mimo kůži představují polohy stimulů mimo povrch těla. Ke každému z těchto stimulů je přiřazen stimul odpovídající odhadu nejbližšího místa povrchu těla k danému stimulu mimo povrch. Tyto dvojice jsou propojené úsečkami. Pokud je úsečka červená, znamená to, že $\sum_i r_i > 70$, tedy že odhad je věrohodný. V opačném případě je úsečka zelená. Tento graf je pro peripersonální CRBM na konci učení (5000 epoch). Zvolené testovací body jsou podmnožinou (každý pátý bod testovací množiny) testovací množiny z Obr. 34.(**B**, **C**, **D**)Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.



Obrázek 46 (Příloha k 5.4.6) CRBM se 100 skrytými i vstupními neurony pro $\alpha_{max} = 10°$

(**A**) Malá kolečka mimo kůži představují polohy stimulů mimo povrch těla. Ke každému z těchto stimulů je přiřazen stimul odpovídající odhadu nejbližšího místa povrchu těla k danému stimulu mimo povrch. Tyto dvojice jsou propojené úsečkami. Pokud je úsečka červená, znamená to, že $\sum_i r_i > 70$, tedy že odhad je věrohodný. V opačném případě je úsečka zelená. Tento graf je pro peripersonální CRBM na konci učení (1000 epoch). Zvolené testovací body jsou podmnožinou (každý pátý bod testovací množiny) testovací množiny z Obr. 34. (**B**, **C**, **D**) Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.



Obrázek 47 (Příloha k 5.4.6) CRBM s 200 skrytými i vstupními neurony pro $\alpha_{max} = 10°$

(**A**) Malá kolečka mimo kůži představují polohy stimulů mimo povrch těla. Ke každému z těchto stimulů je přiřazen stimul odpovídající odhadu nejbližšího místa povrchu těla k danému stimulu mimo povrch. Tyto dvojice jsou propojené úsečkami. Pokud je úsečka červená, znamená to, že $\sum_i r_i > 70$, tedy že odhad je věrohodný. V opačném případě je úsečka zelená. Tento graf je pro peripersonální CRBM na konci učení (1000 epoch). Zvolené testovací body jsou podmnožinou (každý pátý bod testovací množiny) testovací množiny z Obr. 34. (**B**, **C**, **D**) Statistiky jsou udělány pro jednotlivé hladiny (vzdálenosti od kůže), viz 5.4.1. Počet trénovacích epoch je znázorněn (viz legenda) barevnými křivkami. Získané hodnoty jsou aritmetickým průměrem deseti opakování.

Literatura

[1] Giorgio Metta et al. “The iCub humanoid robot: An open-systems platform for research in cognitive development”. In: *Neural Networks* 23.8 (2010), s. 1125–1134.

[2] Perla Maiolino et al. “A flexible and robust large scale capacitive tactile system for robots”. In: *Sensors Journal, IEEE* 13.10 (2013), s. 3910–3917.

[3] Gemma Calvert, Charles Spence a Barry E Stein. *The handbook of multisensory processes*. MIT press, 2004.

[4] Mauro Ursino, Cristiano Cuppini a Elisa Magosso. “Neurocomputational approaches to modelling multisensory integration in the brain: a review”. In: *Neural Networks* 60 (2014), s. 141–165.

[5] Stephen B Edwards et al. “Sources of subcortical projections to the superior colliculus in the cat”. In: *Journal of Comparative Neurology* 184.2 (1979), s. 309–329.

[6] MF Huerta. “The mammalian superior colliculus: studies of its morphology and connections”. In: *Comparative neurology of the optic tectum* (1984), s. 687–773.

[7] MARK T Wallace, M ALEX Meredith a Barry E Stein. “Converging influences from visual, auditory, and somatosensory cortices onto output neurons of the superior colliculus”. In: *Journal of Neurophysiology* 69.6 (1993), s. 1797–1809.

[8] Marie Avillac, Suliann Ben Hamed a Jean-René Duhamel. “Multisensory integration in the ventral intraparietal area of the macaque monkey”. In: *The Journal of neuroscience* 27.8 (2007), s. 1922–1932.

[9] Carol L Colby, Jean-René Duhamel a Michael E Goldberg. “Ventral intraparietal area of the macaque: anatomic location and visual response properties”. In: *Journal of neurophysiology* 69.3 (1993), s. 902–914.

[10] Frank Bremmer et al. “Space coding in primate posterior parietal cortex”. In: *Neuroimage* 14.1 (2001), S46–S51.

[11] Justine Cléry et al. “Neuronal bases of peripersonal and extrapersonal spaces, their plasticity and their dynamics: knowns and unknowns”. In: *Neuropsychologia* 70 (2015), s. 313–326.

[12] Tamar R Makin, Nicholas P Holmes a H Henrik Ehrsson. “On the other hand: dummy hands and peripersonal space”. In: *Behavioural brain research* 191.1 (2008), s. 1–10.

[13] Jean-René Duhamel, Carol L Colby a Michael E Goldberg. “Ventral intraparietal area of the macaque: congruent visual and somatic response properties”. In: *Journal of neurophysiology* 79.1 (1998), s. 126–136.

[14] Mark T Wallace et al. “Visual experience is necessary for the development of multisensory integration”. In: *The Journal of neuroscience* 24.43 (2004), s. 9580–9584.

[15] Mark T Wallace a Barry E Stein. "Onset of cross-modal synthesis in the neonatal superior colliculus is gated by the development of cortical influences". In: *Journal of Neurophysiology* 83.6 (2000), s. 3578–3582.

[16] Alessandro Farnè a Elisabetta Làdavas. "Dynamic size-change of hand peripersonal space following tool use". In: *Neuroreport* 11.8 (2000), s. 1645–1649.

[17] Andrea Serino et al. "Can vision of the body ameliorate impaired somatosensory function?" In: *Neuropsychologia* 45.5 (2007), s. 1101–1107.

[18] Bahador Khaleghi et al. "Multisensor data fusion: A review of the state-of-the-art". In: *Information Fusion* 14.1 (2013), s. 28–44.

[19] Juan Carlos Alvarado et al. "A neural network model of multisensory integration also accounts for unisensory integration in superior colliculus". In: *Brain research* 1242 (2008), s. 13–23.

[20] KE Binns a TE Salt. "Importance of NMDA receptors for multimodal integration in the deep layers of the cat superior colliculus". In: *Journal of neurophysiology* 75.2 (1996), s. 920–930.

[21] Elisa Magosso et al. "A theoretical study of multisensory integration in the superior colliculus by a neural network model". In: *Neural Networks* 21.6 (2008), s. 817–829.

[22] Thomas J Anastasio a Paul E Patton. "A two-stage unsupervised learning algorithm reproduces multisensory enhancement in a neural network model of the corticotectal system". In: *The Journal of neuroscience* 23.17 (2003), s. 6713–6727.

[23] Elisa Magosso et al. "Visuotactile representation of peripersonal space: a neural network study". In: *Neural computation* 22.1 (2010), s. 190–243.

[24] Alessandro Roncone et al. "Peripersonal Space and Margin of Safety around the Body: Learning Visuo-tactile Associations in a Humanoid Robot with Artificial Skin". In: *Under review* (2016).

[25] Alessandro Roncone et al. "Learning peripersonal space representation through artificial skin for avoidance and reaching with whole body surface". In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on.* IEEE. 2015, s. 3366–3373.

[26] Sawa Fuke, Masaki Ogino a Minoru Asada. "Acquisition of the head-centered peri-personal spatial representation found in vip neuron". In: *Autonomous Mental Development, IEEE Transactions on* 1.2 (2009), s. 131–140.

[27] Marco Antonelli et al. "Plastic representation of the reachable space for a humanoid robot". In: *From Animals to Animats 12.* Springer, 2012, s. 167–176.

[28] Eris Chinellato et al. "Implicit sensorimotor mapping of the peripersonal space by gazing and reaching". In: *Autonomous Mental Development, IEEE Transactions on* 3.1 (2011), s. 43–53.

[29] Masayuki Hikita et al. "Visual attention by saliency leads cross-modal body representation". In: *Development and Learning, 2008. ICDL 2008. 7th IEEE International Conference on.* IEEE. 2008, s. 157–162.

[30] Peter W Battaglia, Robert A Jacobs a Richard N Aslin. "Bayesian integration of visual and auditory signals for spatial localization". In: *JOSA A* 20.7 (2003), s. 1391–1397.

[31] David Alais a David Burr. "The ventriloquist effect results from near-optimal bimodal integration". In: *Current biology* 14.3 (2004), s. 257–262.

[32] Ladan Shams, Wei Ji Ma a Ulrik Beierholm. "Sound-induced flash illusion as an optimal percept". In: *Neuroreport* 16.17 (2005), s. 1923–1927.

[33] Wei Ji Ma et al. "Bayesian inference with probabilistic population codes". In: *Nature neuroscience* 9.11 (2006), s. 1432–1438.

[34] Alexandre Pouget et al. "Probabilistic brains: knowns and unknowns". In: *Nature neuroscience* 16.9 (2013), s. 1170–1178.

[35] Asja Fischer a Christian Igel. "An introduction to restricted Boltzmann machines". In: *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*. Springer, 2012, s. 14–36.

[36] Geoffrey E Hinton, Simon Osindero a Yee-Whye Teh. "A fast learning algorithm for deep belief nets". In: *Neural computation* 18.7 (2006), s. 1527–1554.

[37] Ruslan Salakhutdinov, Andriy Mnih a Geoffrey Hinton. "Restricted Boltzmann machines for collaborative filtering". In: *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning*. ACM. 2007, s. 791–798.

[38] Graham William Taylor. "Composable, distributed-state models for high-dimensional time series". Dis. University of Toronto, 2009.

[39] Abdel-rahman Mohamed a Geoffrey E Hinton. "Phone recognition using Restricted Boltzmann Machines." In: *ICASSP*. 2010, s. 4354–4357.

[40] Yoshua Bengio. "Learning deep architectures for AI". In: *Foundations and trends® in Machine Learning* 2.1 (2009), s. 1–127.

[41] Yann LeCun et al. "A tutorial on energy-based learning". In: *Predicting structured data* 1 (2006),

[42] Yann LeCun a Fu Jie Huang. "Loss Functions for Discriminative Training of Energy-Based Models." In: *AISTATS*. 2005.

[43] Lawrence D Brown. "Fundamentals of statistical exponential families with applications in statistical decision theory". In: *Lecture Notes-monograph series* 9 (1986), s. i–279.

[44] Christopher M Bishop. "Pattern Recognition". In: *Machine Learning* (2006).

[45] Geoffrey E Hinton a Terrence J Sejnowski. "Learning and releaming in Boltzmann machines". In: *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition* 1 (1986), s. 282–317.

[46] Geoffrey E Hinton, Terrence J Sejnowski a David H Ackley. *Boltzmann machines: Constraint satisfaction networks that learn*. Carnegie-Mellon University, Department of Computer Science Pittsburgh, PA, 1984.

[47] David H Ackley, Geoffrey E Hinton a Terrence J Sejnowski. "A learning algorithm for Boltzmann machines". In: *Cognitive science* 9.1 (1985), s. 147–169.

[48] Paul Smolensky. *Information processing in dynamical systems: Foundations of harmony theory*. Tech. zpr. DTIC Document, 1986.

[49] Yoav Freund a David Haussler. *Unsupervised learning of distributions of binary vectors using two layer networks*. 1994.

[50] Nicolas Le Roux a Yoshua Bengio. “Representational power of restricted Boltzmann machines and deep belief networks”. In: *Neural computation* 20.6 (2008), s. 1631–1649.

[51] Geoffrey E Hinton a Ruslan R Salakhutdinov. “Reducing the dimensionality of data with neural networks”. In: *Science* 313.5786 (2006), s. 504–507.

[52] Geoffrey E Hinton. “Learning multiple layers of representation”. In: *Trends in cognitive sciences* 11.10 (2007), s. 428–434.

[53] Christophe Andrieu et al. “An introduction to MCMC for machine learning”. In: *Machine learning* 50.1-2 (2003), s. 5–43.

[54] Stuart Geman a Donald Geman. “Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images”. In: *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* 6 (1984), s. 721–741.

[55] Geoffrey E Hinton. “Training products of experts by minimizing contrastive divergence”. In: *Neural computation* 14.8 (2002), s. 1771–1800.

[56] Miguel A Carreira-Perpinan a Geoffrey Hinton. “On Contrastive Divergence Learning.” In: *AISTATS*. Sv. 10. Citeseer. 2005, s. 33–40.

[57] Yoshua Bengio et al. “Greedy layer-wise training of deep networks”. In: *Advances in neural information processing systems* 19 (2007), s. 153.

[58] Geoffrey Hinton. “A practical guide to training restricted Boltzmann machines”. In: *Momentum* 9.1 (2010), s. 926.

[59] Joseph G Makin, Matthew R Fellows a Philip N Sabes. “Learning multisensory integration and coordinate transformation via density estimation”. In: *PLoS Comput Biol* 9.4 (2013), e1003035.

[60] Yoshua Bengio a Olivier Delalleau. “Justifying and generalizing contrastive divergence”. In: *Neural computation* 21.6 (2009), s. 1601–1621.

[61] Graham W Taylor, Geoffrey E Hinton a Sam T Roweis. “Modeling human motion using binary latent variables”. In: *Advances in neural information processing systems*. 2006, s. 1345–1352.

[62] Eric R Kandel, James H Schwartz, Thomas M Jessell et al. *Principles of neural science*. Sv. 4. McGraw-hill New York, 2000.