

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

Fakulta elektrotechnická  
Katedra kybernetiky

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ondřej Benedikt

## Steinerův bod a jeho fuzzy zobecnění

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Mirko Navara, DrSc.

**Studijní program:** Otevřená informatika

**Obor:** Informatika a počítačové vědy

Praha  
květen 2016

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Student:** Ondřej B e n e d i k t

**Studijní program:** Otevřená informatika (bakalářský)

**Obor:** Informatika a počítačové vědy

**Název tématu:** Steinerův bod a jeho fuzzy zobecnění

### Pokyny pro vypracování:

Steinerův bod (centroid) je jedním z indikátorů polohy (nikoli nutně konvexního) objektu. Ve srovnání s obvykle používaným těžištěm má některé zajímavé výhody (je invariantní vůči více geometrickým transformacím).

1. Seznamte se s pojmem Steinerova bodu a jeho zobecněním pro konvexní fuzzy množiny, jakož i s možností volby vah při jeho výpočtu [1].
2. Ukažte na typickém rovinném útvaru (např. půlkruh, trojúhelník), zda a jak se mění Steinerův bod fuzzy množiny vzniklé rozostřením některým z typických způsobů (konvoluce s rozdělením normálním nebo rovnoměrným na kruhu apod.).
3. Zhodnoťte, co říkají dosažené výsledky pro volbu vah při výpočtu Steinerova bodu konvexní fuzzy množiny (která je ponechána jako otevřený problém v [1]).

### Seznam odborné literatury:

- [1] Vetterlein, T., Navara, M.: Defuzzification using Steiner points. Fuzzy Sets Syst. 157 (2006), 1455–1462.
- [2] Hamhalter, J., Tišer, J.: Integrální počet funkcí více proměnných. Skriptum ČVUT, Praha, 2005.
- [3] Rektorys, K.: Co je a k čemu je vyšší matematika. Academia Praha 2001, 156 s., ISBN 8020008837

**Vedoucí bakalářské práce:** prof. Ing. Mirko Navara, DrSc.

**Platnost zadání:** do konce letního semestru 2016/2017

L.S.

prof. Dr. Ing. Jan Kybic  
**vedoucí katedry**

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.  
**děkan**

V Praze dne 14. 12. 2015

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne .....

Podpis autora

## **Anotace**

Steinerův bod je jedním z význačných bodů pojících se s uzavřenými konvexními množinami. V nedávné době byla jeho definice rozšířena také na konvexní fuzzy množiny. V této práci se zabýváme výpočtem Steinerova bodu pro některé konkrétní modelové příklady fuzzy množin, speciálně pak problematikou volby vah při jeho výpočtu.

## **Klíčová slova**

Steinerův bod, Fuzzy množiny, Defuzzifikace, Konvoluce, Konvexní množiny

## **Annotation**

Steiner point is one of the important points associated with closed bounded convex sets. Its definition has been extended to convex fuzzy sets recently. This work deals with the calculation of the Steiner point of several model examples of fuzzy sets. Specifically we deal with the problem of weights selection, which arises during the calculation.

## **Keywords**

Steiner point, Fuzzy sets, Defuzzification, Convolution, Convex sets

## **Poděkování**

Velmi děkuji vedoucímu své práce, kterým je pan prof. Ing. Mirko Navara, DrSc., za jeho čas, vstřícnost a ochotu, cenné rady a odborný dohled, který mi věnoval.

# Obsah

---

<b>1</b>	<b>Slovo úvodem</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Základy fuzzy množin</b>	<b>2</b>
2.1	Motivace zavedení fuzzy množin . . . . .	2
2.2	Z historie fuzzy množin a logiky . . . . .	3
2.3	Základní pojmy . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Steinerův bod</b>	<b>7</b>
3.1	Historie Steinerova bodu . . . . .	7
3.2	Steinerův bod konvexní množiny a jeho vlastnosti . . . . .	7
3.3	Steinerův bod fuzzy množiny . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Fuzzifikace</b>	<b>10</b>
4.1	Konvoluce . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Výpočet Steinerova bodu fuzzy množiny</b>	<b>13</b>
5.1	Poznámky k výpočtu Steinerova bodu fuzzy množiny . . . . .	13
5.2	Poznámky o numerickém a analytickém řešení . . . . .	14
5.3	Výběr numerické integrační metody . . . . .	16
5.3.1	Lichoběžníková metoda . . . . .	16
5.3.2	Simpsonova metoda . . . . .	17
5.3.3	Rombergova metoda . . . . .	17
5.3.4	Test Simpsonovy a Rombergovy metody . . . . .	18
5.4	Poznámky o odhadu chyby . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Demonstrace na konkrétních případech</b>	<b>28</b>
6.1	Model 1 – konvoluce s kruhovým jádrem . . . . .	29
6.1.1	Fuzzifikace . . . . .	29
6.1.2	Steinerův bod . . . . .	32
6.2	Model 2 – konvoluce s gaussovským jádrem . . . . .	36
6.2.1	Fuzzifikace . . . . .	36
6.2.2	Steinerův bod . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>Zdroje</b>	<b>43</b>

<b>Přílohy</b>	<b>45</b>
A	Příklad: Rozdíl mezi fuzzy a klasickou množinou . . . . . 45
B	Příklad: Konvoluce dvou funkcí . . . . . 48
C	Vizualizace konvoluce pro kruhové jádro . . . . . 50
D	Vizualizace konvoluce pro gaussovské jádro . . . . . 52
E	Poloha Steinerova bodu půlkruhu . . . . . 54
F	Steinerův bod a kruhové jádro . . . . . 56
F.1	Výsledky Rombergovy metody . . . . . 56
F.2	Vybrané hladiny a jejich Steinerovy body . . . . . 57
F.3	Odhady pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku . . . . . 58
G	Steinerův bod a gaussovské jádro . . . . . 60
G.1	Výsledky Rombergovy metody . . . . . 60
G.2	Vybrané hladiny a jejich Steinerovy body . . . . . 61
G.3	Odhady pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku . . . . . 62
H	Obsah CD . . . . . 64

# 1 Slovo úvodem

---

S každou uzavřenou konvexní množinou v  $\mathbb{R}^n$  je spjatý bod nazývaný Steinerův bod. Ačkoliv byl popsán již v první polovině 19. století, některé jeho vlastnosti byly objeveny až v druhé polovině století dvacátého. I když je Steinerův bod v praxi často opomíjen, ve srovnání s obvykle používaným těžištěm má zajímavé výhody – je například invariantní vůči více geometrickým transformacím. Může tak být s úspěchem využit v celé řadě aplikací jako charakteristika polohy objektu.

Od klasických množin můžeme udělat krok k fuzzy množinám. Ty nám umožňují reprezentovat určitou „vágnost“ informace. Samotná teorie fuzzy množin je relativně mladá. Rozvíjí se od roku 1965, kdy byly v Zadehově článku „Fuzzy Sets“ popsány její základy. V nedávné době byla definice Steinerova bodu zobecněna i na konvexní fuzzy množiny. Steinerův bod pak může být chápán jako jedna číselná charakteristika dané fuzzy množiny (její „střed“). V tomto smyslu může být Steinerův bod použit v procesu defuzzifikace (mapování fuzzy množin na konkrétní čísla).

Při zobecnění definice Steinerova bodu na fuzzy množiny ale přicházíme o jednoznačnost. Při výpočtu vzniká možnost volby vah. Tuto volbu se pokusíme zhodnotit pro některé typické modelové případy.

Struktura této práce je následující. Nejprve uvedeme některé základní pojmy týkající se fuzzy množin (kapitola 2). Poté definujeme Steinerův bod uzavřené konvexní množiny a uvedeme zobecnění pro fuzzy množiny (kapitola 3). Následovat budou teoretické poznámky o fuzzifikaci (kapitola 4) a výpočtu Steinerova bodu fuzzy množiny (kapitola 5). Nakonec zvolíme jeden konkrétní rovinný útvar, ten „rozmažeme“, čímž získáme fuzzy množinu, a zhodnotíme volbu vah při výpočtu Steinerova bodu této fuzzy množiny (kapitola 6).



## 2 Základy fuzzy množin

---

### 2.1 Motivace zavedení fuzzy množin

Klasická teorie množin se rozvíjí od druhé poloviny 19. století, kdy matematik Georg Cantor vybudoval její základy. Ačkoliv tato teorie poskytla matematice formalismus použitelný k řešení řady úloh a problémů, stále se vyskytují situace, které nejsou tímto přístupem postihnutečné.

V klasické teorii množin existuje pro danou množinu *pravidlo*, díky kterému můžeme rozhodnout, jestli nějaký objekt do množiny patří, či nikoliv. Vezměme si ale například množinu housenek a množinu motýlů. Motýl určitě nepatří do množiny housenek, stejně tak housenku bychom zřejmě neřadili do množiny motýlů. Housenka se ale zakuklí a po čase se z ní stane motýl. Je zakuklená housenka stále housenkou nebo je už motýlem?

S podobným problémem se potýká i takzvaný „paradox hromady“. Hromadou nazveme velké množství zrněk písku. Jestliže jedno zrno odebereme, nic zásadního se nezmění, takže zbytek budeme stále nazývat hromadou. Takto bychom ale mohli zrnka odebírat až do chvíle, kdy by žádné nezbylo. To bychom určitě hromadou nenazvali. Kdy ale přestala být hromada hromadou? Používat klasickou dvouhodnotovou funkci příslušnosti „je“ / „není“ ani v tomto případě není vhodné.

Třetí příklad je opět z každodenního života. Klasicky najdeme v koupelně jeden kohoutek na teplou a druhý na studenou vodu. Je přirozené, že když otočíme prvním, poteče *teplá* voda, když druhým, poteče *studená* voda. Když ale otočíme oběma, nepoteče ani *teplá* ani *studená*, poteče něco mezi, co v termínech klasické teorie množin příliš dobře popsat neumíme.

Vymezovat, kde končí housenka a začíná motýl, co je a co není hromada, nebo je-li voda teplá či studená, v termínech klasické teorie množin by bylo příliš striktní. S těmito problémy se ale můžeme vyrovnat, pokud popíšeme naše množiny v termínech fuzzy množin.

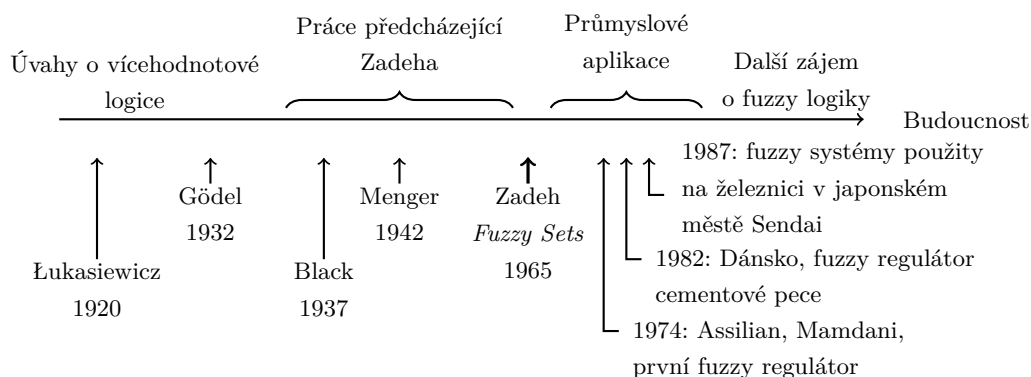
Prvky fuzzy množin mají takzvaný stupeň příslušnosti. Prvek se stupněm příslušnosti 1 patří do dané množiny zcela, zatímco prvek se stupněm příslušnosti 0 do ní nepatří vůbec. Housenka chvíli po zakuklení může mít stupeň příslušnosti k množině motýlů 0.1 (což neznamená, že její stupeň příslušnosti k množině housenek musí být 0.9). Podobně lze řešit i dilemata s pískem a vodou.

## 2.2 Z historie fuzzy množin a logiky

Počátky fuzzy množin se datují do roku 1965, kdy Lotfi A. Zadeh, tehdy profesor na Kalifornské univerzitě v Berkeley, publikoval svůj článek „Fuzzy Sets“. Podobné myšlenky se však v odborné literatuře objevily již dříve. Jmenujme například amerického filosofa Maxe Blacka, který již v roce 1937 navrhl takzvané „profily konzistence“ (consistency profiles; předchůdce funkce příslušnosti).

Myšlenka fuzzy množin a fuzzy logiky nebyla nejprve v akademickém prostředí přijata příliš dobře. Citujme profesora Williama Kahana, Zadehova kolegu z Berkeley: „*Fuzzy theory is wrong, wrong, and pernicious. What we need is more logical thinking, not less. [...] Fuzzy logic is the cocaine of science.*“ (*Fuzzy teorie je špatná, špatná, a zhoubná. Co potřebujeme, je myslet více logicky, ne méně. [...] Fuzzy logika je drogou vědy.*) [1]

I proto byl rozvoj této disciplíny na začátku pomalý. To však neplatilo na východě Asie, zejména v Japonsku, kde koncept fuzzy logiky přijali a implementovali do svých produktů. Úspěchy v aplikacích na počátku 80. let pak vyvolaly další podporu výzkumu a vývoje, stejně jako i zájem o nové výsledky.



Obrázek 2.1: Časová osa vývoje fuzzy množin a logiky

## 2.3 Základní pojmy

Zde zavedeme některé základní pojmy, se kterými se lze běžně setkat při práci s fuzzy množinami. Předpokládáme pevně zvolenou univerzální množinu  $X$ . Množinu všech fuzzy podmnožin univerza  $X$  budeme značit  $\mathcal{F}(X)$ . V této sekci vycházíme z [2].

### Charakteristická funkce

Klasickou (crisp) množinu  $A$  můžeme popsat její **charakteristickou funkcí**

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

Množina  $A$  je svou charakteristickou funkcí jednoznačně určena:

$$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\} = \{x \in X \mid \chi_A(x) > 0\}.$$

Podobně můžeme za pomoci (zobecněné) charakteristické funkce (též. **funkce příslušnosti**) popsat i fuzzy množinu. Předpis se pak změní do tvaru  $\chi_A: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ . Hodnota  $\chi_A(x)$  pro prvek  $x \in X$  říká, do jaké míry je prvek  $x$  členem množiny  $A$ .

## Řezy

Fuzzy množinu lze také alternativně popsat pomocí **řezů**.

**Definice 2.1:** Nechť  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , pak definujeme  $\alpha$ -**hladinu** ( $\alpha$ -level) fuzzy množiny  $A$  jako

$$\chi_A^{-1}(\alpha) = \{x \in X \mid \chi_A(x) = \alpha\}.$$

Ke každému  $\alpha \in [0, 1]$  přiřazujeme  $\alpha$ -**řez** ( $\alpha$ -cut)

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \chi_A^{-1}([\alpha, 1]) = \{x \in X \mid \chi_A(x) \geq \alpha\}. \quad (2.1)$$

Použijeme-li v předchozím vztahu ostrou nerovnost, hovoříme o **ostrých řezech**. ▲

**Definice 2.2:** **Systém řezů** množiny  $A$  je zobrazení  $\mathcal{R}_A: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , kde  $\mathcal{P}(X)$  je potenční množina  $X$ . ▲

**Věta (o systému řezů):**

1. Nechť  $M$  je systém řezů fuzzy množiny  $A \in \mathcal{F}(X)$ , pak  $M$  splňuje podmínky

$$M(0) = X, \quad (R1)$$

$$0 \leq \alpha \leq \beta \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta), \quad (R2)$$

$$0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{0 \leq \alpha < \beta} M(\alpha). \quad (R3)$$

2. Naopak, každé zobrazení  $M: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  splňující podmínky (R1), (R2) a (R3) je systémem řezů nějaké fuzzy množiny  $A$ . ▲

**Důkaz** je možné nalézt v [2].

Díky předchozí větě můžeme říct, že každá fuzzy množina je jednoznačně určena svým systémem řezů. Popisu fuzzy množiny pomocí systému řezů říkáme **horizontální reprezentace**, zatímco popis za pomoci funkce příslušnosti se nazývá **vertikální reprezentace**. Převod z vertikální do horizontální reprezentace lze provést pomocí (2.1). Z horizontální do vertikální reprezentace převádíme takto:

$$\chi_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle \mid x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\}.$$

## Konvexita

Jednou z důležitých vlastností množin je **konvexita**. Pro klasické množiny se zavádí následovně:

**Definice 2.3:** Necht  $L$  je lineární prostor. Množina  $A \subseteq L$  se nazývá konvexní, jestliže

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in (0, 1): \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

▲

To lze přepsat pomocí funkce příslušnosti jako

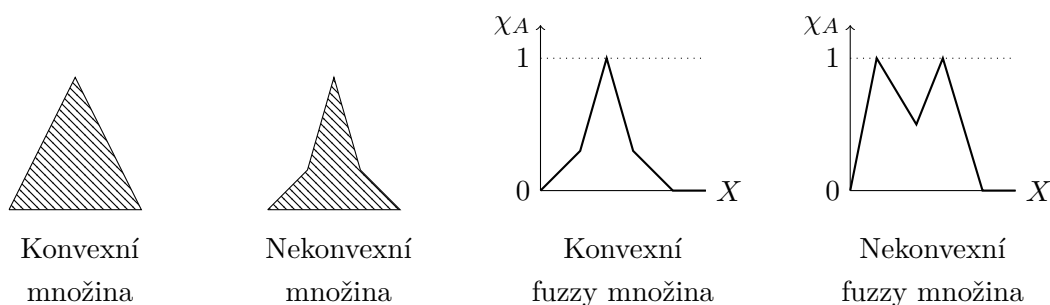
$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in (0, 1): \quad \min(\chi_A(x), \chi_A(y)) \leq \chi_A(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Díky tomu můžeme definici zobecnit i na fuzzy množiny.

**Definice 2.4:** Necht  $X$  je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru. Fuzzy množina  $A \in \mathcal{F}(X)$  se nazývá konvexní, jestliže

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in (0, 1): \quad \min(\chi_A(x), \chi_A(y)) \leq \chi_A(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

▲



Obrázek 2.2: Příklady konvexních a nekonvexních množin

**Poznámka:** Konvexní fuzzy množiny poznáme podle toho, že všechny jejich řezy jsou konvexní množiny.

△

## Další často používané pojmy

Uvedme ve stručnosti ještě několik základních pojmů.

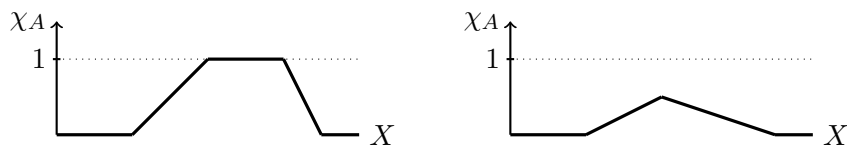
- **Obor pravdivostních hodnot (range):**

$$\text{Range}(A) = \{\alpha \in [0, 1] \mid (\exists x \in X : \chi_A(x) = \alpha)\}$$

- **Výška (height):**

$$h(A) = \sup \text{Range}(A)$$

Je-li výška fuzzy množiny  $A$  rovna 1, nazýváme množinu  $A$  **normální** fuzzy množinou, v opačném případě jí říkáme **subnormální**.



Obrázek 2.3: Normální (vlevo) a subnormální (vpravo) fuzzy množina

- **Nosič** (support):

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \chi_A(x) > 0\}$$

Má-li fuzzy množina konečný nosič, nazývá se **konečná**.

- **Jádro** (core):

$$\text{Core}(A) = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\}$$

➡ V příloze A uvádíme příklad, na kterém jsou definované pojmy ilustrovány a který ukazuje rozdíl mezi klasickou a fuzzy reprezentací.

## 3 Steinerův bod

---

### 3.1 Historie Steinerova bodu

Informace o historii Steinerova bodu byly převzaty z [3] a [4]. Struktura je inspirována článkem [5].

V první polovině 19. století se švýcarský matematik Jakob Steiner zabýval mimo jiné geometrií. V roce 1826 popsal jeden význačný bod spojený s geometrií trojúhelníka. Tento bod byl později sestrojen a pojmenován jako „Steinerův bod“ (Joseph Neuberg, „Sur le Point de Steiner“, 1886).

Dnes bychom pod pojmem „Steinerův bod“ ovšem našli několik různých bodů [6]. Jeden z nich popsal Ross Honsberger v roce 1965 ve svém článku *Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean geometry*. Píše, že *Steinerův bod trojúhelníka je geometrické těžiště systému získané vážením každého vrcholu velikostí k němu příslušného vnějšího úhlu*. „Steinerův bod“ (jak ho pojmenoval Neuberg) ale takovou vlastnost nemá. Bod popisovaný Honsbergerem je známý také jako *Steiner curvature centroid*. Dále v této práci myslíme pojmem Steinerův bod právě *Steiner curvature centroid*.

Následující odstavec byl částečně převzat a upraven z článku [5].

Od druhé poloviny 19. století byl Steinerův bod podroben dalšímu zkoumání; byly objeveny některé zajímavé vlastnosti, které shrneme v sekci 3.2. Díky Steinerovu bodu můžeme například analyzovat některé vlastnosti obrázku [7]. Může nám také pomoci v rozpoznávání [8]. Jestliže jsou dva objekty podobné, ale mají různé Steinerovy body, lze je tak rozlišit [9]. Při sledování pohybu objektů najde Steinerův bod také své uplatnění. Jednou z vlastností tohoto bodu je totiž invariance vůči posunu, otočení a rovnoměrnému růstu do všech směrů (na rozdíl třeba od těžiště). V posledních letech byl pojem Steinerova bodu rozšířen i na fuzzy množiny, kde se používá v procesu „defuzzifikace“. Tím se budeme zabývat dále v této práci.

### 3.2 Steinerův bod konvexní množiny a jeho vlastnosti

Definice Steinerova bodu byla rozšířena z mnohostěnů na všechny neprázdné kompaktní konvexní podmnožiny  $\mathbb{R}^n$  [10].

Nechť  $\mathbb{R}^n$  je  $n$ -dimenzionální eukleidovský prostor nad tělesem reálných čísel, kde  $n \geq 2$ . Nechť  $\mathcal{K}^n$  je množina neprázdných kompaktních konvexních podmnožin  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{K}^n$  má lineární strukturu (sčítání dvou podmnožin a násobení podmnožiny kladnou reálnou konstantou je definováno bod po bodu).

Následující větu dokázali Shepard (pro případ  $n = 2$ ) [11] a Schneider (pro  $n \geq 3$ ) [12]. Věta charakterizuje Steinerův bod vlastnostmi „adice“ (S1), „komutace“ (S2) a „spojitosti“ (S3).

**Věta:** Předpokládejme, že  $s: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  má následující vlastnosti:

(S1) Pro všechna  $A, B \in \mathcal{K}^n$ ,  $s(A + B) = s(A) + s(B)$ .

(S2) Pro  $A \in \mathcal{K}^n$  a isometrii  $\tau$ , skládající se z rotací a posunutí, platí  $s(\tau A) = \tau s(A)$ .

(S3) Funkce  $s$  je spojitá.

Pak existuje právě jedna taková funkce  $s$ . Bod  $s(A)$  nazýváme Steinerovým bodem množiny  $A \in \mathcal{K}^n$ .

▲

Vlastnosti (S1)–(S3) jsou popsány v [13].

**Výpočet:** Steinerův bod množiny  $A \in \mathcal{K}^n$  lze (dle [13]) vypočítat jako

$$s(A) = \frac{1}{V(B^n)} \int_{S^{n-1}} h_A(e) \cdot e \, d\lambda(e), \quad (3.1)$$

$$\text{kde } \begin{cases} V(B^n) & \text{je objem jednotkové } n\text{-rozměrné koule} \\ S^{n-1} & \text{je sféra v } n\text{-rozměrném prostoru} \\ e \in S^{n-1} & \text{probíhá všechny jednotkové vektory v prostoru } \mathbb{R}^n \\ \lambda & \text{je Lebesgueova míra na } S^{n-1} \\ h_A & \text{je opěrná funkce (support function) množiny } A \end{cases}$$

Opěrná funkce  $h_A$  je definována jako:

$$h_A(\mathbf{x}) = \max\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle \mid \mathbf{p} \in A\}, \quad (3.2)$$

kde  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$  je skalární součin  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$ .

### 3.3 Steinerův bod fuzzy množiny

Tradičně se vychází z prostoru  $\mathcal{E}^n$  fuzzy množin nad  $\mathbb{R}^n$  definovaným Diamondem a Klottemem v [14]. Prostor  $\mathcal{E}^n$  obsahuje z definice všechny funkce  $\bar{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  takové, že

- (i) existuje  $x \in \mathbb{R}^n$  tak, že  $\bar{u}(x) = 1$
- (ii) nosič  $\bar{u}$  je omezený
- (iii)  $\bar{u}$  je shora polospojité (upper semicontinuous)
- (iv)  $\bar{u}$  je fuzzy konvexní

Pro podrobnosti odkazujeme čtenáře do [14].

V [5] popisují autoři přechod z  $\mathcal{E}^n$  do  $\mathcal{K}^n$ . Pro nějaké dané  $\bar{u} \in \mathcal{E}^n$ , definují  $u: (0, 1) \rightarrow \mathcal{R}^n$  jako

$$u(\alpha) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{u}(x) \geq \alpha\} & (\alpha\text{-řez}) \text{ pro } \alpha \in (0, 1), \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{u}(x) > 0\} & (\text{nosič}) \text{ pro } \alpha = 0. \end{cases}$$

Funkce  $u$  mapuje interval  $[0, 1]$  na neprázdné kompaktní konvexní podmnožiny  $\mathbb{R}^n$ , tj. do  $\mathcal{K}^n$ . Označíme  $\mathcal{F}^n$  množinu funkcí z intervalu  $[0, 1]$  do  $\mathcal{K}^n$  takových, že jsou klesající, zleva spojité na  $(0, 1]$  a spojité v 0. Mapování  $\bar{u} \mapsto u$  definuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi  $\mathcal{E}^n$  a  $\mathcal{F}^n$ . Dále se tedy můžeme omezit na  $\mathcal{F}^n$ . Fuzzy množiny zde jednoznačně reprezentujeme prvky  $\mathcal{F}^n$ .

Nyní definujeme Steinerův bod analogicky k definici z kapitoly 3.2. Navíc explicitně požadujeme, aby Steinerův bod fuzzy množiny byl prvkem jejího nosiče (vlastnost (SF0)).

**Definice 3.1:** Předpokládejme, že funkce  $S: \mathcal{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňuje následující vlastnosti:

- (SF0) Pro všechna  $u \in \mathcal{F}^n$  platí, že  $S(u) \in u(0)$ .
- (SF1) Pro všechna  $u, v \in \mathcal{F}^n$ ,  $S(u + v) = S(u) + S(v)$ .
- (SF2) Pro  $u \in \mathcal{F}^n$  a isometrii  $\tau$ , skládající se z rotací a posunů, platí  $S(\tau u) = \tau S(u)$ .
- (SF3) Funkce  $S$  je spojitá.

Pak funkční hodnotu  $S(A)$  nazveme Steinerovým bodem fuzzy množiny  $A \in \mathcal{F}^n$ .

▲

Je třeba si uvědomit, že pro fixní  $\alpha$  bude funkce  $S: \mathcal{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , zobrazující každou fuzzy množinu na Steinerův bod jejího  $\alpha$ -řezu, splňovat vlastnosti (SF0)–(SF3). To ukazuje, že Steinerův bod fuzzy množin není definován jednoznačně [5].



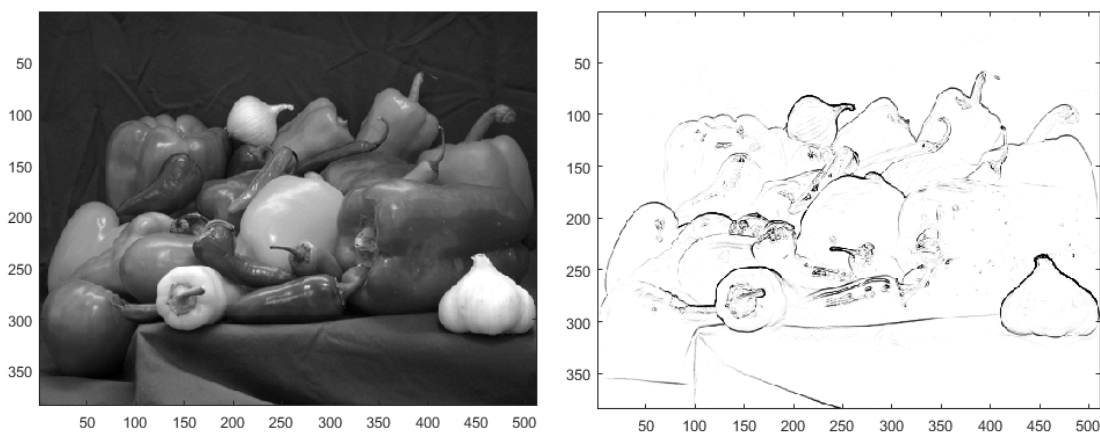
## 4 Fuzzifikace

---

V této části se budeme věnovat přechodu od klasických množin k fuzzy množinám. Fuzzifikace je proces, při kterém se každému prvku referenční množiny přiřadí jeho stupeň příslušnosti k fuzzy množině. Abychom definovali fuzzy množinu, stačí definovat její funkci příslušnosti.

Jednou z možností jak fuzzifikovat je užití funkce příslušnosti, kterou definuje sám uživatel na základě svých zkušeností (použito například v příloze A). V tomto směru nabízí často počítačové algebraické systémy již předpřipravené základní typy funkcí příslušnosti. Jsou jimi například trojúhelníková, lichoběžníková a sigmoidální funkce příslušnosti, dále funkce příslušnosti založená na gaussovské distribuční funkci a jiné.

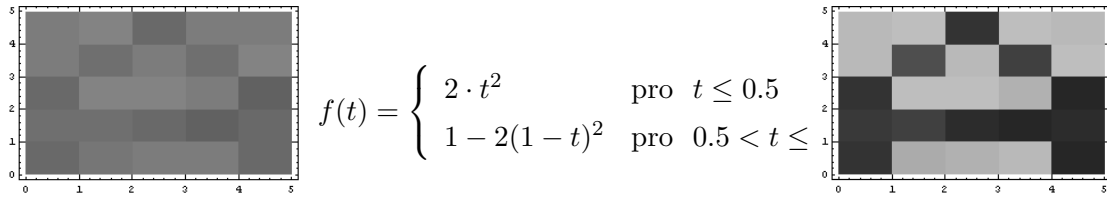
Takové funkce příslušnosti jsou dobře použitelné v celé řadě aplikací, jmenovitě například při konstrukci fuzzy regulátorů. Problémem je nutnost „expertního nadhledu“. Funkce by měly být definovány ve vztahu k řešenému problému tak, aby dobře zachytily reálnou situaci.



Obrázek 4.1: Dokumentace Matlabu (viz [15]) ukazuje využití fuzzy inferenčního systému při detekci hran obrázku; vlevo je původní obrázek, vpravo detekované hrany.

Zajímavé aplikace nachází fuzzy logika ve zpracování obrazu. Obrázek v odstínech šedi lze totiž chápat jako diskrétní fuzzy množinu, kde stupeň příslušnosti každého pixelu odpovídá jeho stupni šedi (po normalizaci).

Pro účely této práce chceme přejít od klasické dvoudimenzionální množiny k fuzzy množině. Pro tento účel použijeme **konvoluci**.



Obrázek 4.2: Příklad převzatý z [16]; na černobílý obrázek (vlevo), jehož pixelům je přiřazen stupeň příslušnosti odpovídající stupni šedi, byla opakovaně aplikována funkce  $f$ . Obrázek získaný z nových stupňů příslušnosti (vpravo) je kontrastnější (potenciálně vhodnější pro další strojové rozpoznávání).

## 4.1 Konvoluce

Obsah sekce byl inspirován článkem [17].

Konvoluce je matematická operace aplikovaná pro dvě funkce  $f$ ,  $g$ . Tradičně se značí hvězdičkou (\*). Výsledkem konvoluce  $(f * g)$  je opět funkce, kterou lze považovat za vstupní funkci  $f$  modifikovanou o vlastnosti **konvolučního jádra**  $g$ .

Konvolučního vztahu se široce využívá v oblasti zpracování signálů, ale také v teorii pravděpodobnosti, statistice, počítačovém vidění a jiných technických oborech.

Jelikož v této práci pracujeme s množinami v prostoru  $\mathbb{R}^2$ , zavedeme konvoluci dvoudimenzionálních funkcí. Pro prostory jiné dimenze by integrál vypadal obdobně.

**Definice 4.1:** Necht  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité funkce. Konvoluci  $(f * g)$  jakožto funkci z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$  definujeme následujícím integrálem:

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot g(x - u, y - v) du dv. \quad (4.1)$$

▲

Jedna z vlastností konvoluce je **komutativita**. Platí, že  $(f * g) = (g * f)$ .

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} (f * g)(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot g(x - u, y - v) du dv \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{l} k = x - u \\ l = y - v \\ dk = -du \\ dl = -dv \end{array} \right] \rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \int_{\infty}^{-\infty} f(x - k, y - l) \cdot g(k, l) (-1) dk (-1) dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, l) \cdot f(x - k, y - l) dk dl = (g * f)(x, y) \end{aligned}$$

□

Funkce  $g$  je konvolučním jádrem. Dále ji budeme značit jako  $K_i$  (kernel function), kde index  $i$  specifikuje, o jaké jádro se jedná, případně jen  $K$ , pokud není volba konkrétního jádra v daném případě důležitá.

Dále v textu budeme pracovat s poměrně specifickou konvolucí. Jako funkci  $f$  volíme charakteristickou funkci  $\chi_A$  nějaké klasické množiny  $A$ . Její funkční hodnotou je buďto 0 nebo 1. To nám umožňuje integrál z definice (4.1) zjednodušit.

Můžeme integrovat jen tam, kde jsou funkční hodnoty  $\chi_A$  nenulové.

$$(\chi_A * K)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(u, v) \cdot K(x - u, y - v) \, du \, dv = \iint_A 1 \cdot K(x - u, y - v) \, du \, dv.$$

Dostáváme tedy vztah

$$(\chi_A * K)(x, y) = \iint_A K(x - u, y - v) \, du \, dv. \quad (4.2)$$

## 5 Výpočet Steinerova bodu fuzzy množiny

---

### 5.1 Poznámky k výpočtu Steinerova bodu fuzzy množiny

Mějme fuzzy množinu  $\mathcal{C} \in \mathcal{F}^n$ , která vznikla „rozmazáním“ klasické množiny  $C$ . Chceme spočítat její Steinerův bod  $S(\mathcal{C})$ . Ten ale není, jak jsme naznačili v sekci 3.3, definován jednoznačně.

V článku [5] uvádí autoři následující stěžejní větu:

**Věta:** Nechť funkce  $S: \mathcal{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňuje (SF0)–(SF3). Pak existuje rostoucí funkce  $\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  s hodnotami  $\mu(0) = 0$  a  $\mu(1) = 1$  tak, že pro všechna  $u \in \mathcal{F}^n$  platí

$$S(u) = \int_{[0,1]} s(u(\alpha)) \, d\mu(\alpha).$$

▲

Jakýkoliv Steinerův bod fuzzy množiny  $u$  je tedy vlastně váženým průměrem Steinerových bodů řezů této množiny. Umíme-li spočítat Steinerovy body řezů  $s(\mathcal{R}_C(\alpha))$  pro různá  $\alpha$ , můžeme pomocí nich určit také  $S(\mathcal{C})$ .

Řekněme, že známe  $\alpha$ -řezy fuzzy množiny  $\mathcal{C}$  a jsme schopni vypočítat jejich Steinerovy body. Zbývá rozhodnout – jaké váhy Steinerových bodů jednotlivých řezů zvolit, aby byl výsledný  $S(\mathcal{C})$  „co nejlepší“.

Váhy chceme volit tak, aby vzdálenost mezi  $S(\mathcal{C})$  a  $s(C)$  byla co nejmenší.

Motivace je následující. Steinerův bod může sloužit jako charakteristika polohy daného objektu. S úspěchem může být použit například při sledování pohybu objektů. Pozorujeme-li objekt  $C$  (například na sekvenci snímků), můžeme jeho polohu přibližně charakterizovat pomocí Steinerova bodu  $s(C)$  (a ušetřit tak paměť a výpočetní čas). Pokud ale vlivem okolností pozorujeme v nějakém okamžiku objekt  $C$  „rozmazaně“ (například rozmazaný snímek), je žádoucí, aby se charakteristika polohy „rozmazaného“ objektu  $\mathcal{C}$  výrazně nelišila od polohy původního  $C$ .

Úlohu výpočtu Steinerova bodu fuzzy množiny  $\mathcal{C}$  rozdělíme na dílčí části. Je třeba:

1. určit  $\alpha$ -řezy fuzzy množiny  $\mathcal{R}_C(\alpha)$ ,
2. vypočítat jejich Steinerovy body  $s(\mathcal{R}_C(\alpha))$ ,
3. zvolit váhy  $w_\alpha$ .

Steinerův bod  $S(\mathcal{C})$  pak získáme jako

$$S(\mathcal{C}) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \cdot s(\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\alpha)).$$

V první dílčí úloze hledáme  $\alpha$ -řezy. V některých případech bychom je mohli vypočítat analyticky z předpisu fuzzy množiny. Mohlo by se ale stát, že to nepůjde. Pak by bylo nutné  $\alpha$ -řez najít alespoň přibližně – numericky.

V druhé dílčí úloze počítáme Steinerovy body nalezených řezů. K analytickému řešení bychom potřebovali přesný popis řezu, pro který bychom hledali hodnoty opěrné funkce ve všech směrech. Následně by bylo možné určit polohu Steinerova bodu řezu přímo pomocí integrálu (3.1).

V případě, že bychom měli  $\alpha$ -řez aproximovaný pouze numericky pomocí konečného počtu bodů, nezbylo by nám nic jiného, než přejít k numerické integraci.

Volba vah nakonec závisí na polohách Steinerových bodů jednotlivých řezů.

## 5.2 Poznámky o numerickém a analytickém řešení

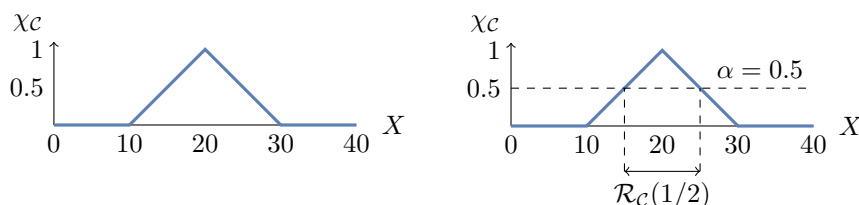
Při řešení matematických úloh se často potýkáme s otázkou, zda úlohu řešit analyticky či numericky. Oba řečené přístupy mají své výhody i nevýhody.

Analytické řešení je ideál, kterého bychom rádi dosáhli. Matematický model představující řešený problém je postupně zpracováván a upravován pomocí známých vztahů až do výsledné podoby, která vypovídá o jeho chování a vlastnostech.

Představme si jednoduchý příklad.

**Příklad:** Mějme fuzzy množinu  $\mathcal{C}$  definovanou funkcí příslušnosti  $\chi_{\mathcal{C}}$

$$\chi_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x - 1 & \text{pro } 10 \leq x < 20, \\ -\frac{1}{10}x + 3 & \text{pro } 20 \leq x < 30, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$



Obrázek 5.1: Funkce příslušnosti  $\chi_{\mathcal{C}}$  a 0.5-řez  $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(1/2)$

Se znalostí funkce  $\chi_{\mathcal{C}}$  můžeme jednoduše vypočítat libovolný  $\alpha$ -řez pro  $\alpha \in (0, 1]$ . Například pro  $\alpha = 1/2$  dostáváme  $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(1/2) = [15, 25]$ , obecně pak  $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\alpha) = [10(\alpha+1), 10(3-\alpha)]$ . ■

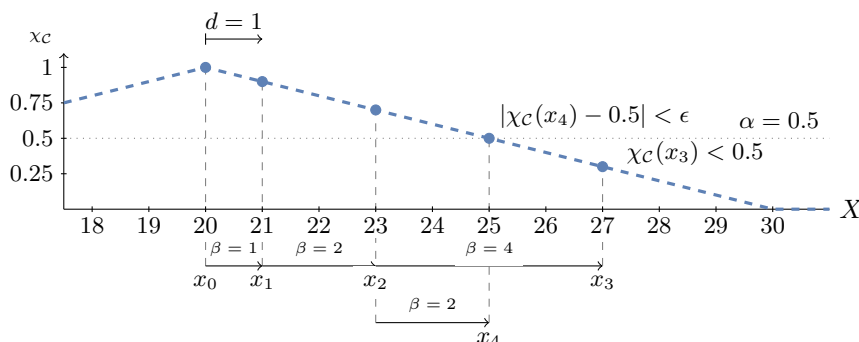
Ne vždy je však možné řešit úlohu analyticky. Klasickým příkladem je neurčitý integrál  $\int e^{-t^2} dt$ , jehož výsledek nelze zapsat ve formě výrazu obsahujícího pouze konstanty, proměnné, základní operace typu sčítání / odčítání / násobení / dělení a elementární funkce. Podobně nelze analyticky řešit množství diferenciálních rovnic a další problémy.

V některých případech analytické řešení sice existuje, ale čas potřebný k jeho dosažení je příliš dlouhý. Někdy ani přesné řešení nepotřebujeme, ale stačí nám jeho odhad. V takových případech přistupujeme k numerickému řešení.

Numerická matematika se začala hojně rozvíjet s rozvojem počítačů, neboť numerické řešení často obsahuje mnoho iterativně opakovaných výpočtů. Výstupem bývá číslo (sada čísel) představující přibližné řešení (k tomu je požadován odhad chyby, bez kterého by numerické řešení nemělo žádnou výpovědní hodnotu).

**Příklad (pokračování):** Může se stát, že předpis  $\chi_C$  neznáme. Víme jen, že  $\chi_C(x)$  nabývá maxima pro argument  $x = 20$ , který označme jako  $M$ . Dále víme, že pro všechny směrové vektory  $d$  platí, že hodnoty  $\chi_C(M + \beta \cdot d)$  jsou nerostoucí pro zvětšující se  $\beta \in (0, \infty)$ .

Body na  $\alpha$ -hladině (tj. na hranici  $\alpha$ -řezu) pak můžeme najít numericky – jednodimenzionálním sestupným prohledáváním ve vybraných směrech  $d$  (ukázka na obrázku 5.2). V jedné dimenzi s tím nemáme problém, protože existují jen dva směry  $d = \pm 1$ . Již ve dvou dimenzích je ale směrů nekonečně mnoho – je nutné z nich vybrat jen konečný počet.



Obrázek 5.2: Ukázka vyhledávání bodu na  $\alpha$ -hladině pro směr  $d = 1$ , hladinu  $\alpha = 0.5$  a  $\epsilon = 0.1$ ;  $x_i$  jsou odhady v  $i$ -tém kroku, přitom  $x_0 = M$ . Koefficient  $\beta$  se zvětšuje, dokud jsou hodnoty  $\chi_C(x_i) > \alpha$ , jakmile tuto hranici překročí, sníží se. Hledání iterativně pokračuje, až dokud je  $|\chi_C(x_i) - \alpha| > \epsilon$ .

V kapitole 6 se budeme věnovat dvěma konkrétním modelovým příkladům. Nejprve fuzzi-fikujeme vybranou klasickou množinu. Pro funkci příslušnosti vzniklé fuzzy množiny uvidíme, že v případě konvoluce s kruhovým jádrem bude analytické řešení možné, ale bude si žádat netriviální rozbor. Naopak v případě konvoluce s gaussovským jádrem dojdeme k integrálu, který je obecně těžko řešitelný a žádá si numerické řešení.

Nehledáme ale jen hodnotu konvoluce v jediném bodě, požadujeme celou hladinu (vrstevnici konvoluční funkce), respektive její Steinerův bod. Pro další postup jsme zvolili numerické řešení. Jednou z jeho výhod je flexibilita – v případě dalšího testování by bylo možné aplikovat stejný postup na různé množiny  $A$  a různá konvoluční jádra  $K$ .

### 5.3 Výběr numerické integrační metody

V této sekci vycházíme z [18].

V úloze numerické integrace se snažíme odhadnout integrál  $I$ ,

$$I = \int_a^b f(t) dt,$$

na základě hodnot funkce  $f$  v konečně mnoha uzlových bodech  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ .

Pro výpočet Steinerova bodu konvexní množiny integrujeme dle (3.1) opěrnou funkci  $h_A(e)$  (násobenou směrovým vektorem  $e$ ) přes jednotkovou kružnici. Výpočet lze rozdělit a jednotlivé souřadnice Steinerova bodu počítat zvlášť.

Místo toho, abychom integrovali přes celou kružnici, nahradíme si ji  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) body, které budou sloužit jako uzlové body pro metody numerické integrace. V těchto zvolených bodech vyhodnotíme opěrnou funkci  $h_A(e)$ . Specifikem integrace po kružnici je, že první uzlový bod je zároveň posledním uzlovým bodem.

Při volbě numerické integrační metody máme mnoho možností. Jako rozumný kompromis výpočetní síly a složitosti se v řadě aplikací jeví metody Simpsonova a Rombergova. Ty v následujících odstavcích popíšeme. Krátce zmíníme i lichoběžníkovou metodu numerické integrace, která se s úspěchem používá jako součást Rombergovy metody.

#### 5.3.1 Lichoběžníková metoda

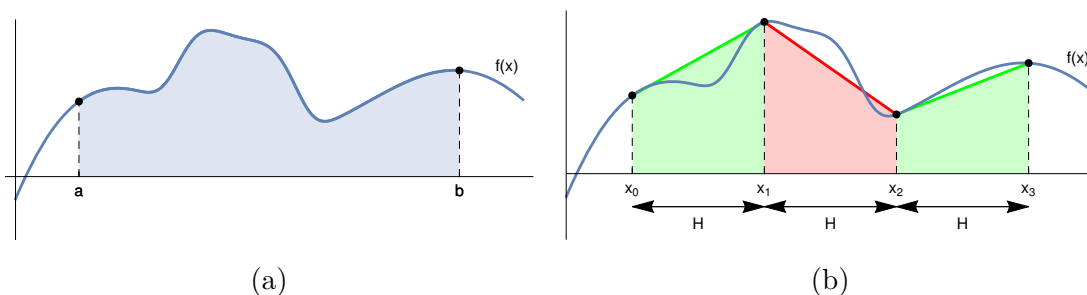
V lichoběžníkové metodě je integrační obor rozdělen na  $N$  intervalů stejné délky. V krajních bodech intervalů jsou zvoleny uzlové body, ve kterých je vyhodnocena funkce  $f$ . Funkční hodnoty v sousedních uzlových bodech jsou proloženy přímkou. Výsledek numerické integrace je pak plocha pod touto přímkou na daném intervalu, tj. plocha lichoběžníka.

Výsledek numerické integrace lichoběžníkové metody  $L$  můžeme psát jako

$$\int_a^b f(t) dt \approx L = \sum_{j=0}^{k-1} H \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}.$$

Při integraci na kružnici je první uzlový bod zároveň posledním uzlovým bodem, tj.  $x_0 = x_{k-1}$ . Integrační vzorec se tak zjednoduší na

$$L = H \sum_{j=0}^{k-2} f(x_j).$$



Obrázek 5.3: Ilustrace lichoběžníkové numerické integrační metody pro  $N = 3$ ; na obrázku (a) je funkce  $f$ , kterou chceme integrovat na intervalu  $[a, b]$ . Interval dělíme na 3 části, na kterých funkci  $f$  nahradíme přímkou, kterou integrujeme – obrázek (b).

### 5.3.2 Simpsonova metoda

V Simpsonově metodě je integrační obor funkce  $f$  také rozdělen na  $N$  stejně dlouhých intervalů. Na každém intervalu je funkce  $f$  vyhodnocena v jeho krajních bodech a (na rozdíl od lichoběžníkové metody) v jeho středu. Těmito body je proložen kvadratický aproximační polynom. Integrál z  $f$  je na každém intervalu aproximován integrálem z příslušného kvadratického polynomu. Odvození metody lze najít například v [18].

Výslednou aproximaci  $S$  lze počítat jako

$$\int_a^b f(t) dt \approx S = \frac{H}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{k-2}) + f(x_{k-1})),$$

kde  $H$  je délka intervalu (vzdálenost  $x_i$  a  $x_{i+2}$ ) a body  $(x_0, x_{k-1})$  jsou krajní body integračního oboru. Body  $(x_0, x_2, \dots, x_{k-1})$  jsou krajní body jednotlivých intervalů a body  $(x_1, x_3, \dots, x_{k-2})$  jsou středy příslušných intervalů. Je třeba si všimnout, že v tomto případě musí být  $k$  liché (tedy  $(k-1)$  sudé).

Integrujeme-li na kružnici, lze výpočet zjednodušit do tvaru

$$S = \frac{H}{3} (f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4) + \dots + 2f(x_{k-2})).$$

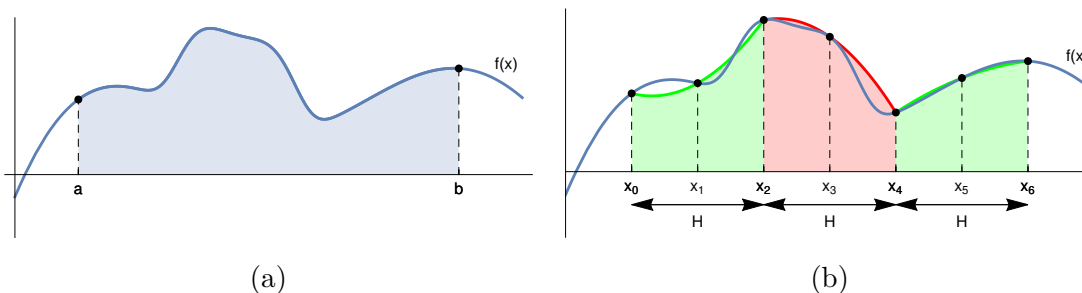
### 5.3.3 Rombergova metoda

Rombergova metoda využívá opakované Richardsonovy extrapolace. Tradičně používá odhady integrálu získané lichoběžníkovou metodou numerické integrace pro poloviční kroky  $(H, H/2, H/4, \dots)$ . Teorii o Rombergově metodě a Richardsonově extrapolaci je možné najít v [18].

Dílní výsledky Rombergovy metody lze uspořádat do tabulky  $T$ . V prvním sloupci se objeví výsledky lichoběžníkové metody  $L$  pro délku kroku  $\frac{H}{2^j}$ :

$$T_{i,1} = L\left(\frac{H}{2^j}\right).$$





Obrázek 5.4: Ilustrace Simpsonovy numerické integrační metody pro  $N = 3$ ; na obrázku (a) je funkce  $f$ , kterou chceme integrovat na intervalu  $[a, b]$ . Interval dělíme na 3 části, na kterých funkci  $f$  nahradíme kvadratickým aproximačním polynomem – obrázek (b).

Odhady  $T_{i,1}$  mají chybu 2. řádu. Ve druhém sloupci budou výsledky prvního sloupce zpřesněné Richardsonovou extrapolací (chyba 4. řádu)

$$T_{i,2} = T_{i,1} + \frac{T_{i,1} - T_{i-1,1}}{4 - 1}.$$

Ve sloupci  $j \geq 2$  budou pak hodnoty

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}.$$

Pro přehlednost uvádíme tabulku 5.1.

Počet uzlových bodů	
$k$	$T_{1,1} = L(H)$
$2k$	$T_{2,2} = L(H/2)$ $T_{2,2}$
$4k$	$T_{3,3} = L(H/4)$ $T_{3,2}$ $T_{3,3}$
$8k$	$T_{4,4} = L(H/8)$ $T_{4,2}$ $T_{4,3}$ $T_{4,4}$
$\vdots$	$\dots$
Řád chyby:	2      4      6      8 $\dots$

Tabulka 5.1: Schéma Rombergovy metody

Jako výsledek vezmeme hodnotu  $T_{i,i}$ . Její chyba je řádu  $2i$ . Chyba se odhaduje jako  $|T_{i,i-1} - T_{i-1,i-1}|$  nebo  $|T_{i,i} - T_{i-1,i-1}|$ .

### 5.3.4 Test Simpsonovy a Rombergovy metody

Provedeme několik testů pro obě metody. V nich budeme počítat polohu Steinerova bodu  $s(A)$  nerozostřeného půlkruhu  $A$ . Ten, jak víme (viz příloha E), vychází pro půlkruh se středem v bodě  $(0,0)$  a jednotkovým poloměrem analyticky jako  $s(A) = (0, 1/\pi)$ . V numerických testech budeme sledovat vzdálenost numerického řešení od analytického. Pro

výpočet Steinerova bodu řezů fuzzy množiny pak vybereme metodu, která se osvědčí nejlépe.

### • Test 1

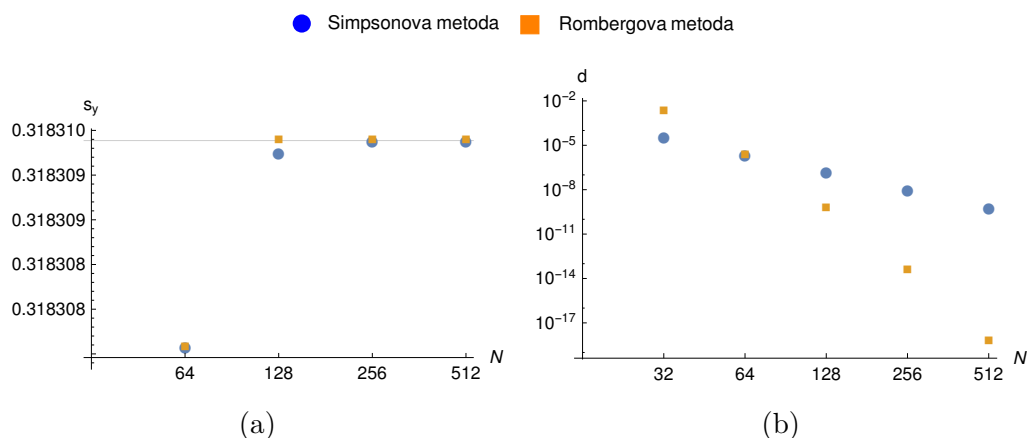
V prvním testu pouze nahradíme klasickou integraci numerickou integrací. Hodnoty opěrné funkce dosadíme pro uzlové body přesně dle vztahu (5.1).

Hodnoty opěrné funkce jsou

$$h_A((e_x, e_y)) = \begin{cases} R & \text{pro } y \geq 0, \\ R \cdot |e_x| & \text{pro } y < 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

kde  $R$  je poloměr množiny  $A$  (v našem případě  $R = 1$ ).

Numericky integrujeme pro  $N \in \{32, 64, 128, 256, 512\}$  uzlových bodů.



Obrázek 5.5: Srovnání Simpsonovy a Rombergovy metody v závislosti na počtu uzlových bodů  $N$ ; graf (a) pro odhad  $y$ -ové souřadnice  $s_y$  Steinerova bodu množiny  $A$ , graf (b) pro absolutní hodnotu vzdálenosti odhadu od přesného řešení  $d$  (v logaritmickém měřítku).

Pro 64 bodů jsou výsledky Simpsonovy a Rombergovy metody stejné. Pro více uzlových bodů konverguje Rombergova metoda rychleji. Řádový odhad chyby uvádíme v tabulce 5.2.

Počet bodů $N$ :	32	64	128	256	512
Simpsonova metoda	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-10}$
Rombergova metoda	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-19}$

Tabulka 5.2: Řádová chyba Simpsonovy a Rombergovy metody pro  $N$  uzlových bodů v 1. testu

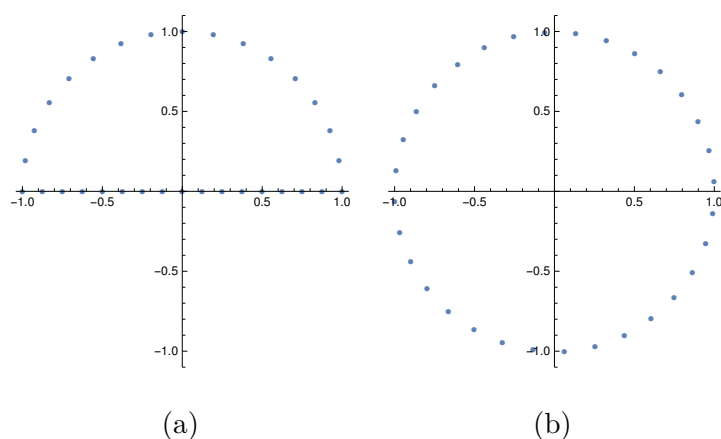
- **Test 2**

Ve druhém testu připouštíme, že naše znalost množiny  $A$  nemusí být úplná. Nahradíme ji  $2^i$  body  $B$  ležícími na hranici  $A$ .

Množinu  $B$  generujeme pomocí  $n = 2^i$  bodů tak, že  $\frac{n+2}{2}$  bodů dělí rovnoměrně oblouk  $A$  na  $\frac{n}{2}$  částí stejné délky a  $\frac{n-2}{2}$  bodů dělí úsečku danou body  $(\pm 1, 0)$  na  $\frac{n}{2}$  intervalů stejné délky (viz obrázek 5.6 (a)).

Maximalizaci skalárního součinu z výpočtu opěrné funkce (3.2) nahradíme maximalizací přes  $B$ . Bod z množiny  $A$  maximalizující (3.2) leží na hranici  $A$ ; nemusí ležet přímo v  $B$ , ale s větším počtem bodů v  $B$  se mu budeme přibližovat.

Hodnoty opěrné funkce tedy odhadujeme pomocí  $2^i$  bodů, nedosazujeme je již přesně. Očekáváme, že se to negativně projeví na rychlosti konvergence.



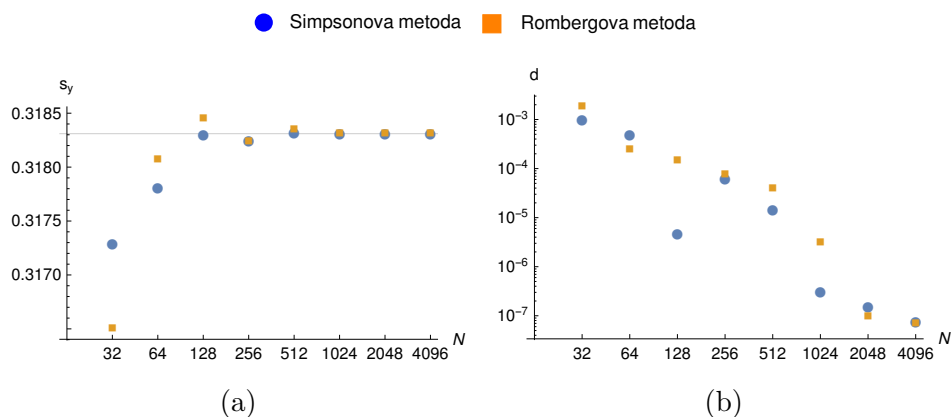
Obrázek 5.6: Náhrada množiny  $A$  pomocí 32 hraničních bodů (a), 32 směrů numerické integrace po kružnici (b)

Volíme stejný počet bodů aproximujících  $A$  jako uzlových bodů integrace. Uzlové body integrace (tj. body na jednotkové kružnici) volíme záměrně tak, aby se v horní polorovině ( $y \geq 0$ ) neshodovaly s body v  $B$  (výpočet hodnot opěrné funkce tak nebude v dané oblasti přesný).

Uzlové body integrace volíme z množiny

$$\left\{ (\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi)) \mid t = \frac{2\pi}{N} \cdot i, i \in \{0, 1, \dots, (N-1)\} \right\},$$

kde  $N$  je počet uzlových bodů a  $\varphi$  volíme jako  $\varphi = (\pi/\sqrt{2})$ . Výsledné závislosti uvidíme v grafech na obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: Odhad souřadnice  $s_y$  Steinerova bodu (a) a absolutní hodnota vzdálenosti od přesného řešení  $d$  (v logaritmickém měřítku) (b) v testu 2

Řádový odhad chyby uvádíme v tabulce 5.3.

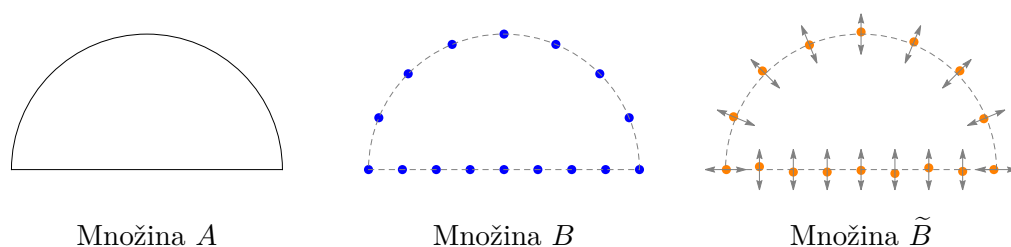
$N$ :	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$S$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-8}$
$R$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$

Tabulka 5.3: Řádová chyba Simpsonovy ( $S$ ) a Rombergovy ( $R$ ) metody pro  $N$  bodů v 2. testu

Výsledky obou metod jsou v tomto testu srovnatelné. Rychlost konvergence je však výrazně pomalejší než v prvním testu. To je způsobeno tím, že dosazujeme pouze odhady pro opěrnou funkci (namísto přesných hodnot jako v 1. testu).

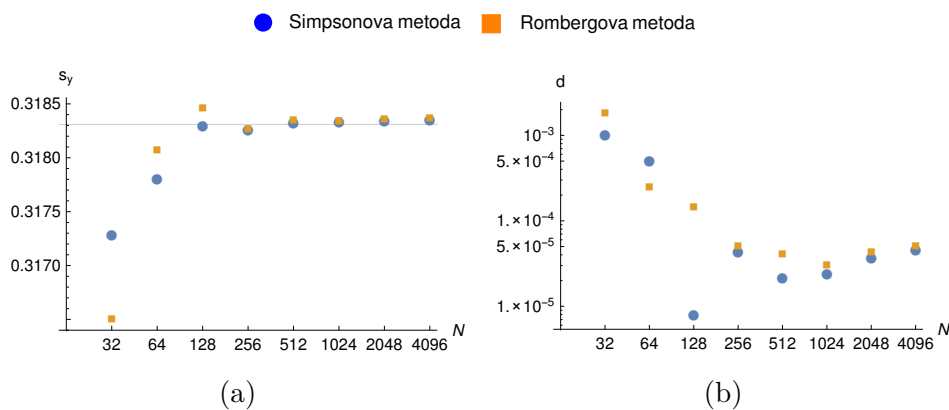
### • Test 3

Při numerickém hledání  $\alpha$ -hladině fuzzy množiny budeme iterativně získávat body na dané hladině v daných směrech. Ty budou nalezeny s nějakou chybou.



Obrázek 5.8: Přejít od množiny  $A$  k množině  $\tilde{B}$

Ve třetím testu tuto chybu simulujeme tak, že body z  $B$  vychýlíme o malé náhodné číslo, získáme tak  $\tilde{B}$ , viz obrázek 5.8. Dále uvádíme průměrný výsledek numerického výpočtu z 20 různých náhodně vychýlených  $\tilde{B}$ .



Obrázek 5.9: Odhad souřadnice  $s_y$  Steinerova bodu (a) a absolutní hodnota vzdálenosti od přesného řešení  $d$  (v logaritmickém měřítku) (b) v testu 3 pro maximální výchylku bodů  $10^{-4}$

Uzlové body integrace byly zvoleny stejně jako ve druhém testu. Body z  $B$  byly (podle rovnoměrného rozdělení) náhodně vychýleny (tak, jak je naznačeno na obrázku 5.8) s maximální výchylkou  $10^{-4}$  jednotek. Řádovou chybu metod uvádíme v tabulce 5.4.

$N$ :	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$S$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
$R$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 5.4: Řádová chyba Simpsonovy ( $S$ ) a Rombergovy ( $R$ ) metody pro  $N$  bodů ve 3. testu pro maximální výchylku bodů  $10^{-4}$

Výsledky obou metod jsou v tomto testu opět srovnatelné. Kvůli zkreslení množiny  $A$  nemůžeme očekávat menší chybu  $d$  než je maximální výchylka bodů (v testu  $10^{-4}$ ). Skutečně v tabulce 5.4 vidíme, že ani pro velká  $N$  chyba již více neklesá. Je proto třeba body na  $\alpha$ -hladině najít s velkou přesností.

V testech vyšlo, že pro výpočet klasického Steinerova bodu množiny  $A$ :

- Rombergova metoda konverguje rychleji, pokud jsou hodnoty integrované funkce  $h_A$  přesné
- Rombergova a Simpsonova metoda jsou srovnatelné v případě, že hodnoty  $h_A$  přesné nejsou

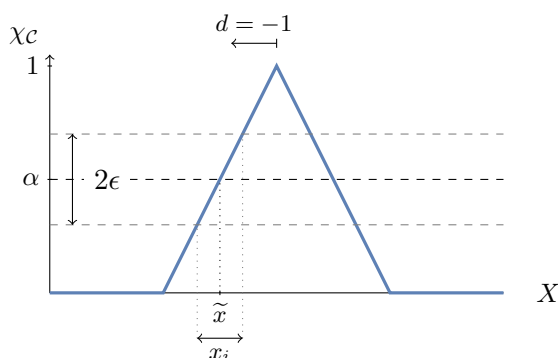
Pro numerickou integraci použijeme Rombergovu metodu.

## 5.4 Poznámky o odhadu chyby

V průběhu numerického výpočtu zjednodušíme původní model, díky čemuž vzniká chyba, kterou je třeba odhadnout.

Prvního zjednodušení se dopouštíme, když  $\alpha$ -řez fuzzy množiny  $\mathcal{C}$  nahrazujeme  $k$  body na  $\alpha$ -hladině, které hledáme iterativně – obecně nebudou nalezeny přesně. Volíme práh  $\epsilon > 0$  tak, že  $|\chi_{\mathcal{C}}(x_i) - \chi_{\mathcal{C}}(\tilde{x})| < \epsilon$ , kde  $x_i$  je bod na  $\alpha$ -hladině nalezený iterativně a  $\tilde{x}$  je přesná hodnota, ke které se chceme přiblížit.

Tuto chybu zanedbáváme, neboť  $\epsilon$  můžeme volit velmi malé (pro  $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow x_i \rightarrow \tilde{x}$ ). To bude potřeba zejména v oblastech, kde bude funkce  $\chi_{\mathcal{C}}$  růst velmi pomalu.



Obrázek 5.10: Bod ležící na  $\alpha$ -hladině  $\tilde{x}$  a interval ve kterém může ležet jeho aproximace  $x_i$  při volbě přesnosti  $\epsilon$ .

Další nepřesnost je způsobena tím, že hodnoty opěrné funkce, které při výpočtu Steinerova bodu integrujeme, neznáme přesně – odhadujeme je pouze pomocí  $N$  bodů na  $\alpha$ -hladině. Hrubý odhad intervalu pro souřadnici Steinerova bodu naznačíme na následujícím příkladě. Úvahy provedeme pro  $y$ -ovou souřadnici Steinerova bodu  $s_y(\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\alpha))$  (pro  $x$ -ovou by se dalo postupovat analogicky).

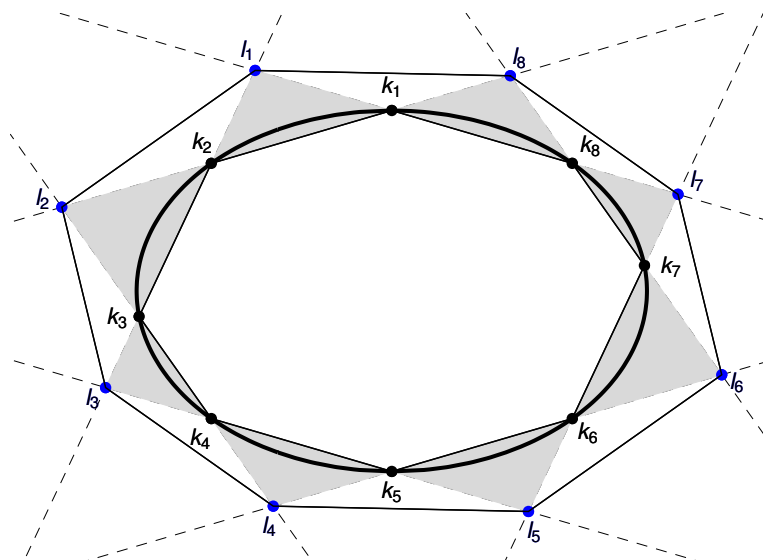
**Příklad:** Předpokládejme, že všechny  $\alpha$ -řezy fuzzy množiny  $\mathcal{C}$  tvoří konvexní množiny. Vybrali jsme jeden konkrétní  $\alpha$ -řez  $R$ . K dispozici máme konečný počet bodů  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , na jeho hranici (řekněme, že byly nalezeny se zanedbatelnou chybou). Chceme odhadnout interval, na kterém by se mohla nacházet hodnota  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu vybraného řezu  $s_y(R)$ .

Body  $k_i$  tvoří vrcholy mnohoúhelníku  $M$ , který je vepsaný řezu  $R$ . Hodnoty opěrné funkce  $h_R$  ve vybraném směru  $e$  odhadujeme pomocí následující aproximace

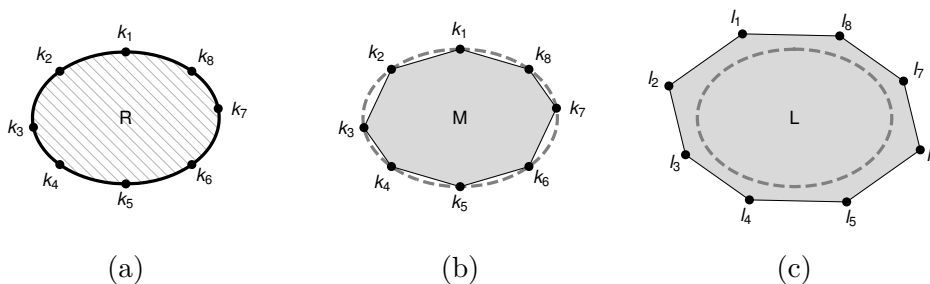
$$\max\{\langle e, p \rangle \mid p \in R\} \approx \max\{\langle e, p \rangle \mid p \in M\} = \max\{\langle e, p \rangle \mid p \in V(M)\},$$

přičemž  $V(M)$  jsou vrcholy mnohoúhelníku  $M$ .

Sestrojíme mnohoúhelník  $L$ , který bude nadmnožinou řezu  $R$ . Budeme postupovat tak, že vezmeme vždy 4 různé po sobě následující vrcholy mnohoúhelníku  $M$ . První dva proložíme přímkou, druhé dva proložíme přímkou a najdeme průsečík obou přímek (viz obrázek 5.11).



Obrázek 5.11: Proložení vybraných vrcholů  $M$  přímkami a nalezení jejich průsečíků; modře jsou znázorněny vrcholy  $L$ , černě vrcholy  $M$ ; šedě je vymezena oblast, ve které se mohou nacházet body na  $\alpha$ -hladině  $\mathcal{C}$



Obrázek 5.12: Ilustrace řezu  $R$  s vybranými osmi body  $k_i$  na jeho hranici (a); mnohoúhelník  $M$  vepsaný řezu  $R$  (b); mnohoúhelník  $L$  (c)

**Poznámka:** Vrcholy  $k_i$  jsme číslovali sestupně po směru hodinových ručiček. Řekněme, že funkce  $Pred(k_i)$  vrátí index vrcholu předcházejícího  $k_i$  (před vrcholem  $k_1$  je vrchol s maximálním indexem  $k_{max}$ ), podobně funkce  $Anc(k_i)$  vrátí index vrcholu následujícího po  $k_i$  (po vrcholu s maximálním indexem následuje první vrchol  $k_1$ ). Nakonec  $This(k_i)$  vrátí  $i$ . Dále označme  $l_i$  vrchol mnohoúhelníku  $L$ , který vznikl průsečíkem přímek daných body  $(k_i, k_{Pred(k_i)})$  a  $(k_{Anc(k_i)}, k_{Anc(Anc(k_i))})$ .

△

**Poznámka:** Bylo by žádoucí namísto mnohoúhelníku  $L$  sestrojit mnohoúhelník opsaný řezu  $R$ . Ten by vznikl, kdybychom  $l_i$  volili jako průsečík tečen v bodech  $k_i, k_{i+1}$ . Postup by byl ale komplikovanější – vyžadoval by výpočet tečny, tedy derivace funkce popisující hranici.

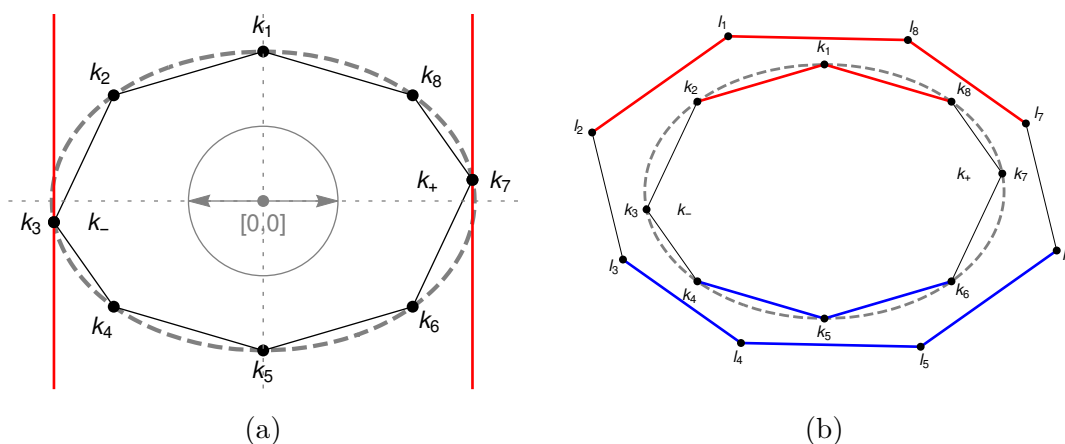
△

Při výpočtu souřadnice Steinerova bodu integrujeme po jednotkové kružnici se středem v počátku hodnoty opěrné funkce v daných směrech násobené příslušnou souřadnicí směrového vektoru. Abychom získali horní a spodní odhad pro hledanou souřadnici, můžeme některé body  $k_i$  zaměnit za vrcholy mnohoúhelníku  $L$ , a tím potenciálně zvětšit hodnoty opěrné funkce v některých směrech.

Uvažujme následující situaci:

Mezi body  $k_i$  najdeme body  $k_+$  a  $k_-$  tak, že  $k_+$  má maximální kolmý průmět do směru  $(1,0)$  a  $k_-$  má maximální kolmý průmět do směru  $(-1,0)$  (viz obrázek 5.13 (a)). Následně z hranice  $M$  odebereme úsečky dané dvojicemi bodů  $(k_+, k_{Pred(k_+)})$ ,  $(k_+, k_{Anc(k_+)})$  a  $(k_-, k_{Pred(k_-)})$ ,  $(k_-, k_{Anc(k_-)})$ . Tím se nám hranice  $M$  rozpadne na „spodní“ a „horní“ část (viz obrázek 5.13 (b)). Podobně z hranice  $L$  odebereme úsečky dané body  $(l_{Pred(k_+)}, l_{This(k_+)})$  a  $(l_{Pred(k_-)}, l_{This(k_-)})$ . Tím ji rovněž rozdělíme na dvě části.

Slovní popis není zcela intuitivní, proto raději odkážeme čtenáře na obrázek 5.13 (b).

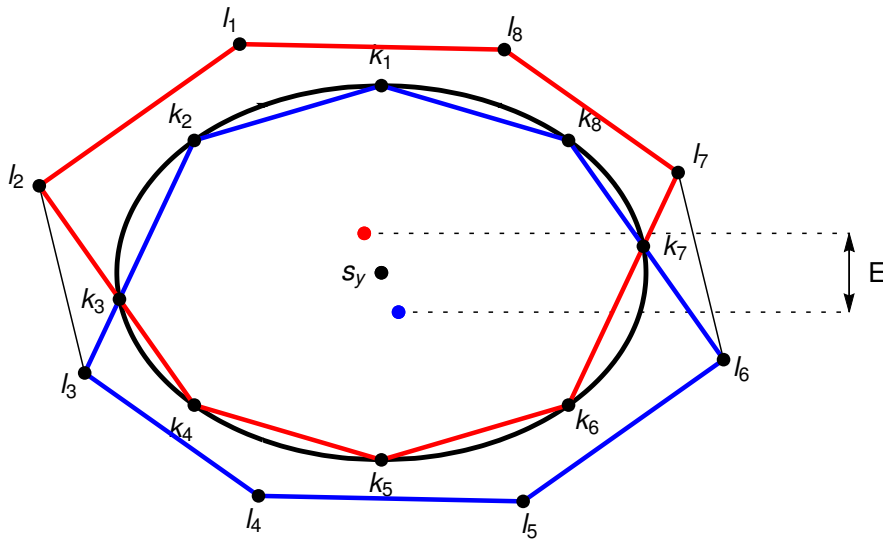
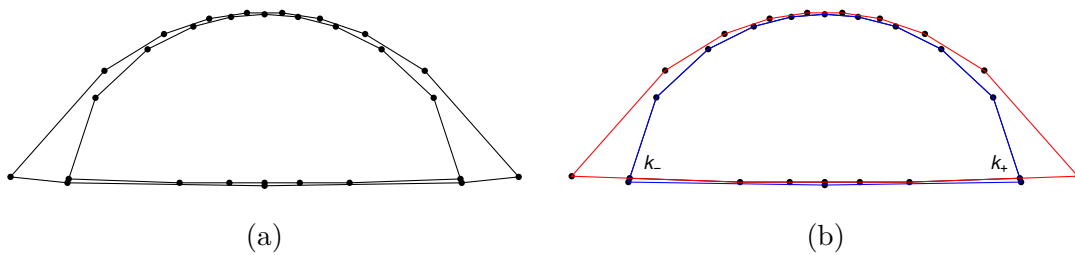


Obrázek 5.13: Vrcholy  $k_-$ ,  $k_+$  mnohoúhelníku  $M$  s maximálními kolnými průměty do směrů  $(-1,0)$  a  $(1,0)$  (a); dělení hranic  $M$  a  $L$  na část „horní“ (červeně) a „spodní“ (modře) (b)

Spojíme-li „horní“ část  $L$  se „spodní“ částí  $M$ , dostaneme jeden konvexní mnohoúhelník. Ten bychom chtěli použít pro horní odhad  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu  $R$ . Obdobně pro „horní“ část  $M$  a „spodní“ část  $L$  dostaneme druhý mnohoúhelník, který bychom rádi použili pro spodní odhad – viz obrázek 5.14. To si můžeme dovolit, pokud bude naše množina „celá zaoblená“ a body v  $M$  budou rozloženy dostatečně rovnoměrně. Pro velký počet bodů  $k_i$  se bude mnohoúhelník  $L$  lišit jen málo od původního vepsaného mnohoúhelníku  $M$ , tam problém nečekáme, při menším počtu bodů bychom ale mohli narazit na situaci podobnou té na obrázku 5.15.

Obrázek 5.15 je relevantní k našim modelovým případům (je to vlastně 16 bodů vybraných z půlkruhu rozmazaného konvolucí s kruhovým jádrem o malém poloměru). Je problema-

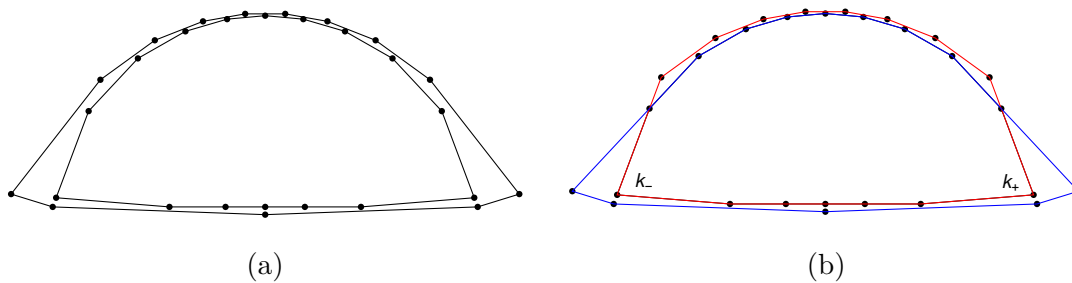


Obrázek 5.14: Mnohoúhelníky sestrojené „nad“ a „pod“  $k_+$  a  $k_-$ Obrázek 5.15: Problematický případ – (a) mnohoúhelníky  $M$  a  $L$ , (b) „horní“ a „spodní“ mnohoúhelník

tický kvůli spodní části, kde leží body  $M$  na úsečce. Kdybychom počítali  $y$ -ovou souřadnici  $s_y(R)$  pomocí červeného mnohoúhelníku, nedostali bychom větší hodnotu než při výpočtu pomocí původních  $k_i$  (vepsaný mnohoúhelník). Je tomu tak kvůli krajním bodům, které vyšly poměrně daleko (kvůli malému počtu  $k_i$ ) od původní množiny. Při integraci v horní polorovině se sice projeví nárůst v hodnotách opěrné funkce, ty jsou ale při výpočtu souřadnice Steinerova bodu násobeny  $y$ -ovou souřadnicí příslušných jednotkových vektorů – ta je v daných směrech blízká nule. Na druhou stranu při integraci v dolní polorovině bude nárůst hodnot opěrné funkce zdatelný i ve směrech, které nemají  $y$ -ovou souřadnici blízkou nule (právě problematické krajní body figurují v odhadech opěrné funkce). Tím bude  $y$ -ová souřadnice Steinerova bodu výrazně vychýlena směrem dolů.

Abychom se této nepříjemnosti vyhnuli, namísto bodu  $k_+$  vybereme takového jeho nejbližšího následníka, jehož  $x$ -ová souřadnice bude menší (nebo rovna)  $x$ -ové souřadnici původního  $k_+$  (obdobně pro  $k_-$ , akorát vybíráme předka). Tím pro červený mnohoúhelník docílíme toho, že při integraci se v záporné polorovině hodnota oproti integraci s použitím bodů  $k_i$  nezvýší. Ilustrace je na obrázku 5.16.

Není to univerzální řešení problému, ale pro náš případ (rozmazání půlkruhu konvolucí s vybranými jádry) bude postačovat. Co bychom rádi ukázali na konkrétních výsledcích je to, že odhady pro „horní“ a „spodní“ mnohoúhelník a náš odhad pomocí bodů  $k_i$  se budou s větším počtem bodů přibližovat (tedy potenciální chyba bude klesat).



Obrázek 5.16: Problematický případ s jiným výběrem dělicích bodů – (a) mnohoúhelníky  $M$  a  $L$ , (b) „horní“ a „spodní“ mnohoúhelník

—

## 6 Demonstrace na konkrétních případech

---

V této kapitole přecházíme od teorie k praxi. Vybereme jednu klasickou množinu  $A$ , tu rozmažeme pomocí konvoluce s kruhovým jádrem (model 1) a gaussovským jádrem (model 2). Na takto vzniklých fuzzy množinách vybereme několik  $\alpha$ -hladin. Ty aproximujeme pomocí  $2^i$  bodů a numericky vypočteme jejich Steinerovy body. Následně budeme diskutovat polohu Steinerova bodu celé fuzzy množiny.

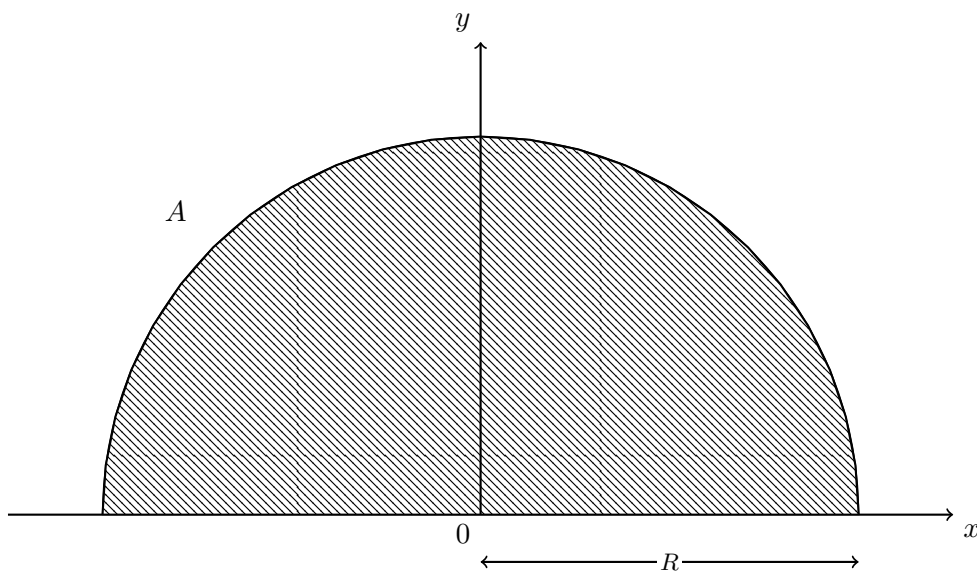
Jako množinu  $A$  chceme takovou konvexní množinu, která není středově symetrická (Steinerův bod by ležel triviálně ve středu symetrie). Přírozenými kandidáty jsou díky jednoduchosti půlkruh a trojúhelník (případně další mnohoúhelníky). Pro účely této práce jsme vybrali půlkruh.

**Definice 6.1:** Množinu  $A$  definujeme pomocí funkce příslušnosti  $\chi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jako

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro výpočty volíme bez újmy na obecnosti jednotkový poloměr  $R = 1$  množiny  $A$ .

▲



Obrázek 6.1: Ilustrace množiny  $A$

## 6.1 Model 1 – konvoluce s kruhovým jádrem

V prvním modelovém příkladu fuzzifikujeme množinu  $A$  pomocí konvoluce s funkcí příslušnosti na kruhu, kterou značíme  $K_K$ . Takto můžeme simulovat rozostření způsobené clonou fotoaparátu. Ve zpracování obrazu se dá takovéto konvoluce využít k simulaci bokeh (estetické kvality částí snímků, nacházejících se mimo rovinu ostrosti) [19].

### 6.1.1 Fuzzifikace

#### Definice kruhového jádra

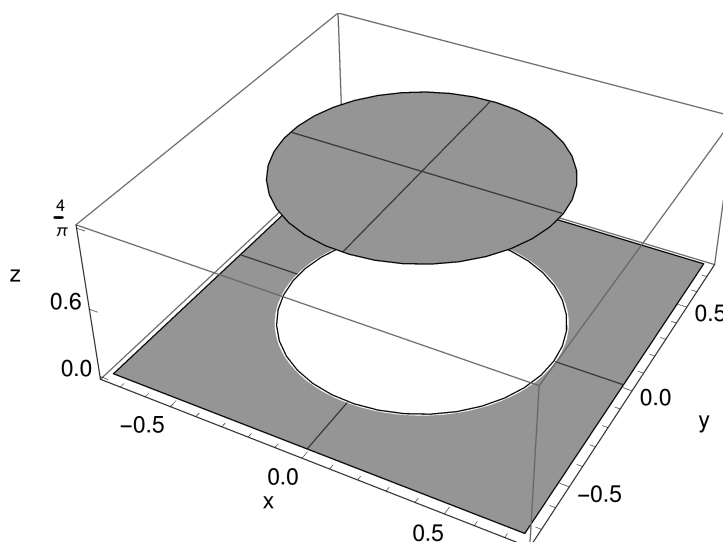
Konvoluční kruhové jádro  $K_K$  popíšeme jako funkci souřadnic  $(x, y)$ . Výpočty konvoluce budeme provádět pro různé hodnoty poloměru  $r$ . Funkce  $K_K$  je vlastně hustota rovnoměrného rozdělení na kruhu.

**Definice 6.2:** Kruhové konvoluční jádro  $K_K(x, y)$  definujeme jako

$$K_K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{pro } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $r \in \mathbb{R}$  je nějaká pevně zvolená konstanta. ▲

Dále budeme používat značení  $k((x, y), l)$  pro kruh  $k$  se středem  $(x, y)$  a poloměrem  $l$ .



Obrázek 6.2: Ilustrace kruhového jádra  $K_K$  s poloměrem  $r = 0.5$

#### Rozbor

Konvoluci  $(\chi_A * K_K)$  budeme počítat ze vztahu (4.2). Jelikož je funkce  $K_K(x, y)$  symetrická podle os  $x$  a  $y$ , můžeme upravit její argument.

$$\begin{aligned}
 K_K(x-u, y-v) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi r^2} \text{ pro } (x-u)^2 + (y-v)^2 \leq r^2, \\ 0 \text{ jinak,} \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi r^2} \text{ pro } (u-x)^2 + (v-y)^2 \leq r^2, \\ 0 \text{ jinak,} \end{array} \right\} = \\
 &= K_K(u-x, v-y).
 \end{aligned}$$

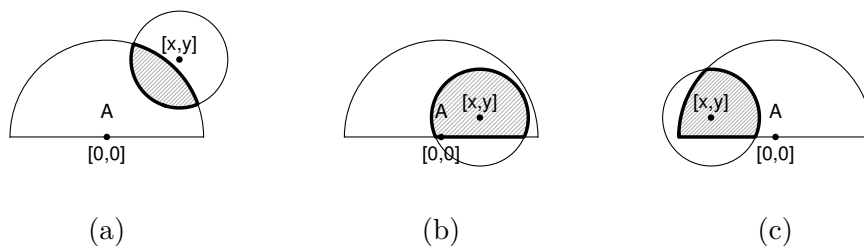
Konvoluci  $(\chi_A * K_K)(x, y)$  počítáme tedy jako

$$(\chi_A * K_K)(x, y) = \iint_A K_K(u-x, v-y) \, du \, dv. \quad (6.1)$$

Výraz na pravé straně rovnice (6.1) má názornou geometrickou reprezentaci. Kruh  $k((x, y), r)$  představuje jádro  $K_K$  s posunutým středem do bodu  $(x, y)$ . Jelikož  $u$  a  $v$  probíhají přes množinu  $A$ , bude integrand  $K_K(u-x, v-y)$  nenulový pouze tam, kde je průnik půlkruhu  $A$  s kruhem  $k((x, y), r)$  neprázdný.

$$(\chi_A * K_K)(x, y) = \iint_A K_K(u-x, v-y) \, du \, dv = \iint_{(u,v) \in A \cap k((u-x, v-y), r)} \frac{1}{\pi r^2} \, du \, dv.$$

Hodnota konvoluce  $(\chi_A * K_K)$  v bodě  $(x, y)$  bude rovna ploše průniku  $A$  s kruhem  $k((x, y), r)$  násobené hodnotou  $\frac{1}{\pi r^2}$ .



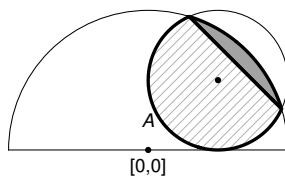
Obrázek 6.3: Průniky množiny  $A$  s kruhem  $k((x, y), r)$ ,  $r = 0.5$ , pro různé hodnoty  $(x, y)$ ; šrafovaně naznačena oblast průniku, jejíž plochu hledáme.

### Výpočet konvoluce v libovolném bodě

Omezíme se na jádro  $K_K$  s poloměrem  $r \leq 0.5$ . Tato volba nám umožní jednoduše určit maximum  $(\chi_A * K_K)$  (kterého funkce nabývá alespoň v bodě  $(0, 0.5)$ ). Taková volba poloměru může být opodstatněná, nechceme-li dovolit, aby bylo rozmazání vůči pozorovanému objektu „příliš velké“. Navíc přirozeně vede na normální fuzzy množiny.

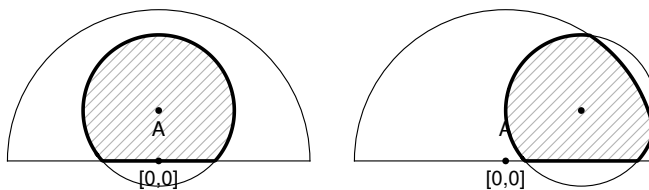
Při hledání průniku  $A$  s kruhem  $k((x, y), r)$ ,  $r \leq \frac{1}{2}$ , narazíme na několik případů. Pro účely rozboru rozdělíme hranici množiny  $A$  na *hraniční úsečku*  $A$  (úsečka s krajními body  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$ ) a *hraniční oblouk*  $A$  (hranice  $A$  bez hraniční úsečky).

- (a) V případě, že má hraniční množina kruhu  $k((x, y), r)$  dva průsečíky s hraničním obloukem  $A$  (případně jeden průsečík s hraničním obloukem a další průsečík v krajním bodě hraniční úsečky  $A$ ), sčítáme jednoduše plochy kruhových úsečí.



Obrázek 6.4: Průnik kruhu  $k((x, y), r)$  s množinou  $A$  pro případ (a), rozdělen na kruhové úseče

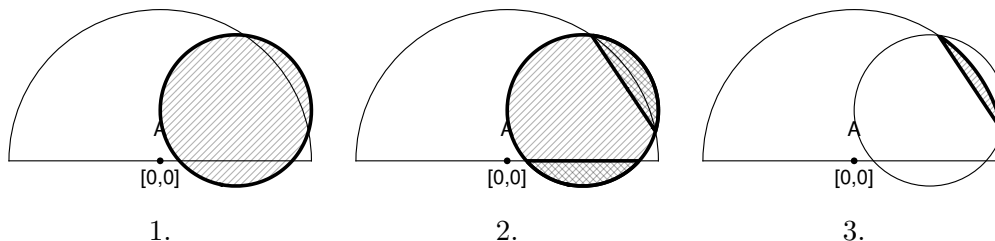
- (b) V případě, že hraniční množina kruhu  $k((x, y), r)$  má dva průsečíky s hraniční úsečkou  $A$ , opět obsah plochy dostaneme pomocí ploch kruhových úsečí.



Obrázek 6.5: Průniky kruhu  $k((x, y), r)$  s množinou  $A$  pro případ (b)

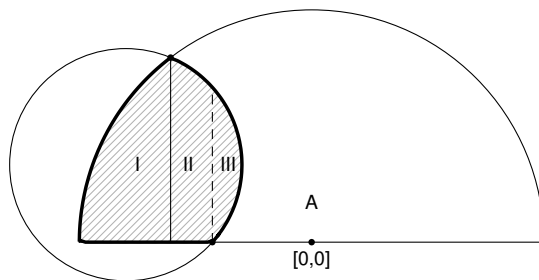
Mohlo by se stát, že hranice kruhu  $k((x, y), r)$  má průsečíky i s hraničním obloukem  $A$ , jak je tomu například na obrázku 6.5. I tak lze ale plochu počítat pomocí úsečí.

Dle obrázku 6.6 stačí vzít plochu celého kruhu (1.), odečíst úseče  $k((x, y), r)$  (2.) a přičíst úseč  $A$  (3.).



Obrázek 6.6: Plocha průniku pomocí úsečí

- (c) Složitější situace nastává v případě právě jednoho průsečíku s hraničním obloukem  $A$  a právě jednoho průsečíku s hraniční úsečkou  $A$ .

Obrázek 6.7: Průnik kruhu  $k((x, y), r)$  s množinou  $A$  pro případ (c)

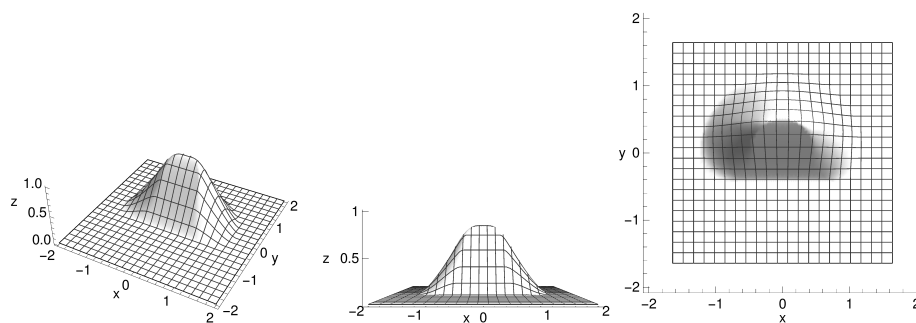
Průnik z obrázku 6.7 jsme rozdělili na dílčí oblasti. Celkovou plochu průniku pak získáme součtem dílčích ploch vypočtených:

- pro oblast I jako polovinu plochy příslušné kruhové úseče,
- pro oblast II pomocí integrálu (meze lze odvodit z průsečíků hranice  $k((x, y), r)$  s hranicí  $A$ ),
- pro oblast III jako plochu příslušné kruhové úseče.

Vidíme, že hodnotu konvoluce  $(\chi_A * K_K)$  v libovolném bodě  $(x, y)$  můžeme počítat analyticky. Pro konvoluční jádro  $K_K$  s poloměrem  $r > 0.5$  by si situace žádala další rozbor.

### Vizualizace

Následuje graf konvoluce  $(\chi_A * K_K)$ . V sekci 6.1.2 budeme s touto konvolucí dále pracovat, vybereme některé hladiny a určíme jejich Steinerovy body.

Obrázek 6.8: Konvoluce  $(\chi_A * K_K)$  pro  $r = \frac{1}{2}$ 

► Další grafy pro jiné poloměry jádra  $K_K$  nalezne čtenář v příloze C.

### 6.1.2 Steinerův bod

Nyní přistoupíme k výpočtu Steinerova bodu fuzzy množiny  $\chi_A * K_K$ . Vzhledem k symetrii množiny  $A$  dle osy  $y$  a vzhledem ke středové symetrii jádra  $K_K$  je funkce  $(\chi_A * K_K)$  opět symetrická dle osy  $y$ . Proto bude  $x$ -ová souřadnice Steinerova bodu pro všechny řezy nulová.

Z rozboru konvoluce je patrné, že pro jádra  $K_K$  s poloměrem  $r \leq 1/2$  bude maximum  $(\mu_A * K_K)$  alespoň v bodě  $M = (0, 1/2)$ . Dále je vidět, že pro všechny směry  $d$  platí, že

hodnoty  $(\mu_A * K_K)(M + \beta \cdot d)$  se budou zmenšovat pro rostoucí  $\beta > 0$  (hodnoty ve zvolených bodech se počítají jako plocha průniku  $A$  s kruhem – v bodě  $M$  je to celá plocha kruhu – pokud střed kruhu posouváme po polopřímce vedoucí z  $M$  ve směru  $d$ , bude se plocha průniku zmenšovat, až dokud nebude průnik prázdný a tedy jeho plocha nulová).

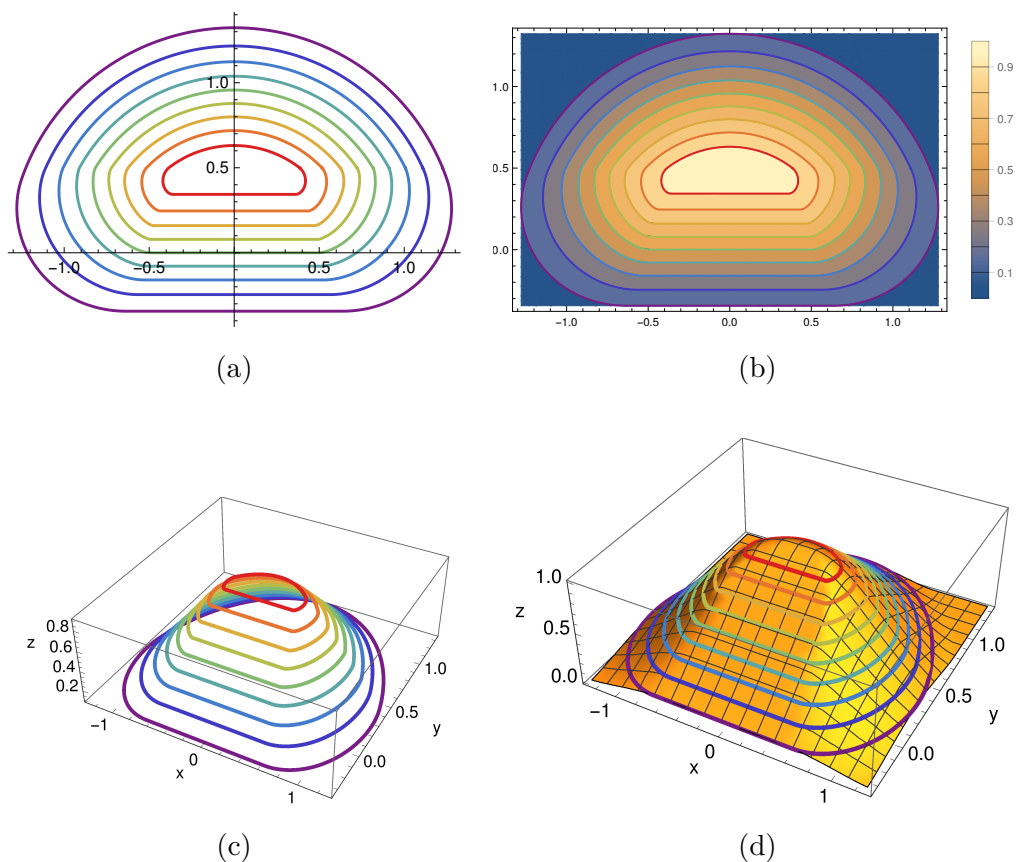
Díky těmto pozorováním můžeme postupovat zcela analogicky k rozboru z kapitoly 5.

1. Najdeme body na vybraných  $\alpha$ -hladinách.
2. Z těchto bodů odhadneme  $y$ -ovou souřadnici Steinerova bodu pro vybrané  $\alpha$ -řezy.
3. Budeme diskutovat volbu vah  $w_\alpha$ .

Volíme poloměr jádra  $r = 1/2$ . Dále volíme  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ .

### Hledání bodů na $\alpha$ -hladině

Při vyhledávání bodů v jednotlivých směrech byla tolerance  $\epsilon > 0$  nastavena maximálně na  $10^{-10}$  (tj. stupeň příslušnosti v nalezeném bodě se od hledaného  $\alpha$  liší maximálně o  $\epsilon$ ). Z počátečního bodu  $M = (0, 1/2)$  bylo iterativně (stejně jako je naznačeno na příkladu v sekci 5.2) nalezeno 2048 bodů na každé ze zvolených  $\alpha$ -hladin. Směry hledání  $d$  byly voleny rovnoměrně. Následují vizualizace nalezených bodů.



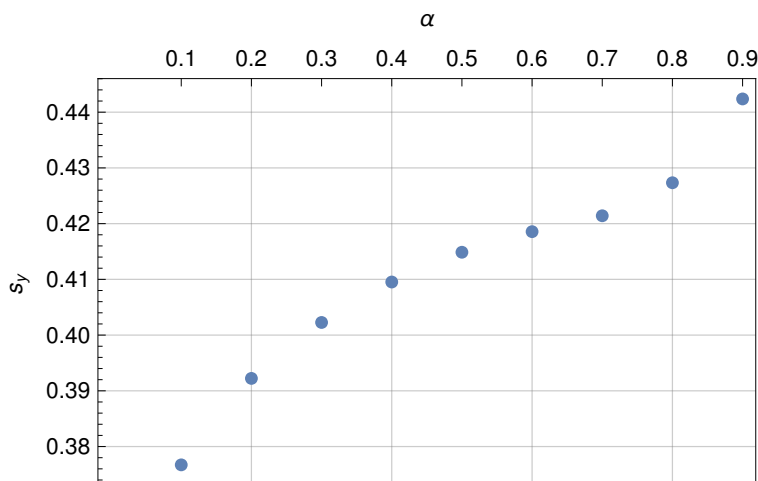
Obrázek 6.9: Nalezené body pro vybrané  $\alpha$ -hladiny (a), vrstevnice fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$  (b), nalezené body ve 3D projekci (c) a funkce  $(\chi_A * K_K)$  (d)



### Souřadnice Steinerových bodů vybraných řezů

Z nalezených bodů byla odhadnuta poloha  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu vybraných řezů. K odhadu byla použita Rombergova metoda pro 32 – 2048 uzlových bodů. Uzlové body integrace byly voleny rovnoměrně na jednotkové kružnici se středem v počátku. Pro  $i$  uzlových bodů byl k odhadu opěrné funkce použit stejný počet bodů z  $\alpha$  hladiny (rozmístěných rovnoměrně v  $i$  směrech okolo bodu  $M = (0, 1/2)$ ).

Výsledné souřadnice uvádíme formou grafu na obrázku 6.10.



Obrázek 6.10: Závislost odhadu  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu  $\alpha$  řezu na volbě  $\alpha$

- ➔ Tabulku výsledků Rombergovy metody pro vybraná  $\alpha$  nalezne čtenář v příloze F.1.
- ➔ Obrázky nalezených bodů na  $\alpha$  hladině (které ohraničují  $\alpha$ -řez) s vyznačeným odhadem Steinerova bodu nalezne čtenář v příloze F.2.
- ➔ Grafy odhadů  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu vybraných řezů pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku jsou v příloze F.3.

### Volba vah

Zbývá jen otázka, jaké váhy Steinerových bodů jednotlivých řezů volit, abychom se co nejvíce přiblížili Steinerovu bodu nerozostřené množiny, jehož hodnota vychází v našem případě jako  $s(A) = (0, 1/\pi) \approx (0, 0.3183099)$ .

Při pohledu na obrázek 6.10 (případně do přílohy F.1) zjišťujeme, že všechny vypočtené  $y$ -ové souřadnice Steinerových bodů vybraných  $\alpha$ -řezů vychází výrazně vyšší, než je hodnota  $1/\pi$ . Nejbližše vyšla hodnota pro nejnižší propočtený řez ( $\alpha = 0.1$ ), ostatní hodnoty se pak s rostoucím  $\alpha$  dále oddalují.

Propočítáme proto ještě několik nižších hladin – konkrétně pro  $\alpha \in \{10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}\}$ . Výsledné diagonály Rombergových tabulek vytvořených pro 32 – 2048 bodů uvádíme ve sloupcích tabulky 6.1.

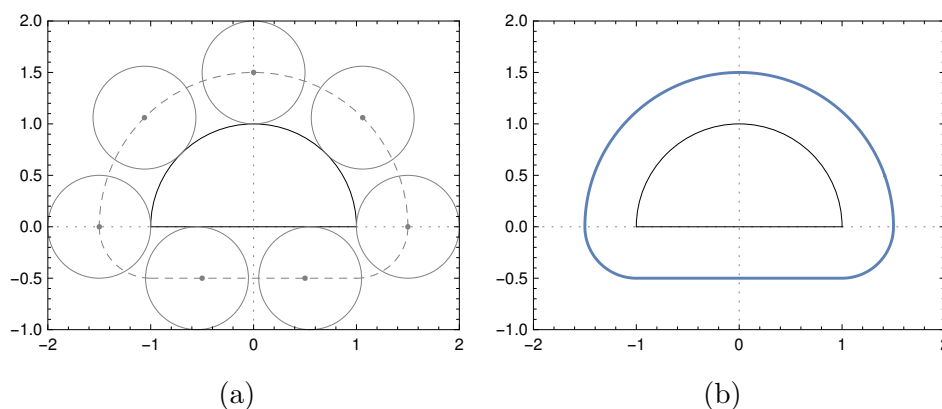
Hladina $\alpha$ :	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$
Bodů: 32	0.333680	0.326095	0.325123
Bodů: 64	0.327301	0.319543	0.318425
Bodů: 128	0.327778	0.319485	0.318375
Bodů: 256	0.327685	0.319476	0.318348
Bodů: 512	0.327678	0.319480	0.318351
Bodů: 1024	0.327681	0.319480	0.318352
Bodů: 2048	0.327681	0.319480	0.318352

Tabulka 6.1: Odhady  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu  $\alpha$ -řezů pro  $\alpha \in \{10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}\}$

Je patrné, že mezi vypočtenými odhady se vzdálenost od  $s(A)$  snižuje s klesajícím  $\alpha$ .

Vraťme se k úvahám, co vlastně jednotlivé body na vybrané  $\alpha$ -hladině představují. Z rozboru v kapitole 6.1.1 plyne, že jsou to středy posunutého kruhového jádra nalezené tak, že průnik s množinou  $A$  je právě  $\alpha$ . Kdybychom vzali ostrou 0-hladinu, dostaneme množinu takových bodů, že když do nich umístíme střed zvoleného kruhového jádra, hranice kruhu se bude dotýkat množiny  $A$  v právě jednom bodě a plocha průniku bude nulová (naznačeno na obrázku 6.11). To je ale přesně hranice množiny, která vznikne tak, že množinu  $A$  zvětšíme ve všech směrech o konstantu rovnou hodnotě  $r$ . Steinerův bod je ale vůči takovému „uniformnímu růstu“ invariantní [5].

Steinerův bod 0-řezu má tedy stejnou polohu jako  $s(A)$ . Pro všechny ostatní řezy vzdálenost od  $s(A)$  roste. Dle našeho kritéria bychom tedy měli zvolit váhu  $w_\alpha$  nulovou pro všechny řezy kromě ostrého 0-řezu, pro který by byla jednotková.



Obrázek 6.11: Čárkovně naznačena 0-hladina fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$  pro poloměr jádra  $r = 1/2$  (a) a 2048 nalezených bodů na  $10^{-8}$ -hladině (b)

## 6.2 Model 2 – konvoluce s gaussovským jádrem

### 6.2.1 Fuzzifikace

Konvoluce s gaussovským jádrem se využívá k vyhlazování obrázků. Dobré uplatnění najde v odstranění šumu (a detailů). Ve zpracování obrazu se používá diskretizovaná verze, neboť obrázek je uložen jako matice jednotlivých pixelů. Je proto třeba najít diskrétní aproximaci gaussovského jádra, které je obecně nenulové na celém definičním oboru. Prakticky ale již ve vzdálenosti trojnásobku směrodatné odchylky od střední hodnoty je hodnota gaussovské distribuční funkce blízka nule [20].

#### Definice gaussovského jádra

V tomto modelovém příkladu volíme Gaussovské jádro spojité.

**Definice 6.3:** Gaussovské jádro  $K_G$  (tj. funkci hustoty normálního rozdělení) definujeme jako

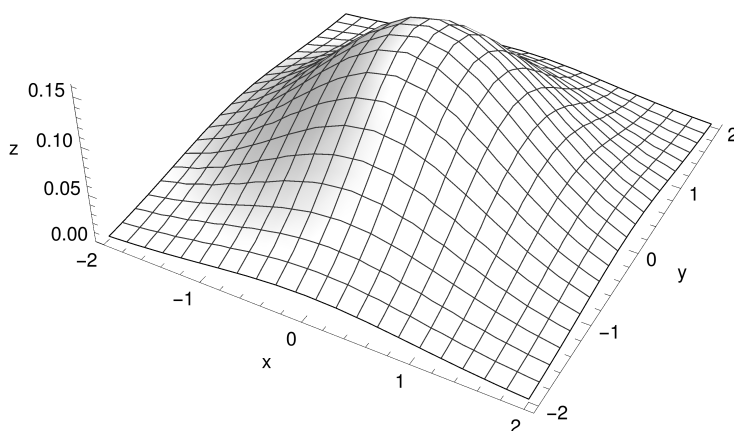
$$K_G(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)},$$

kde  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^2$  je střední hodnota a  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kovarianční matice. Matice  $\Sigma$  je pozitivně definitní, řádu 2. Výraz  $|\Sigma|$  značí determinant matice  $\Sigma$ .

▲

**Poznámka:** Střední hodnota  $\mu$ , stejně jako  $\mathbf{x} = (x, y)$  aj. jsou zapsány jako sloupcové vektory. V následujícím textu však používáme pro přehlednost značení bez transpozice např.  $\mu = (a, b)$ . Pouze při práci s funkcí hustoty normálního rozdělení budeme transpozice explicitně zapisovat (jako například v předchozí definici  $K_G$ ).

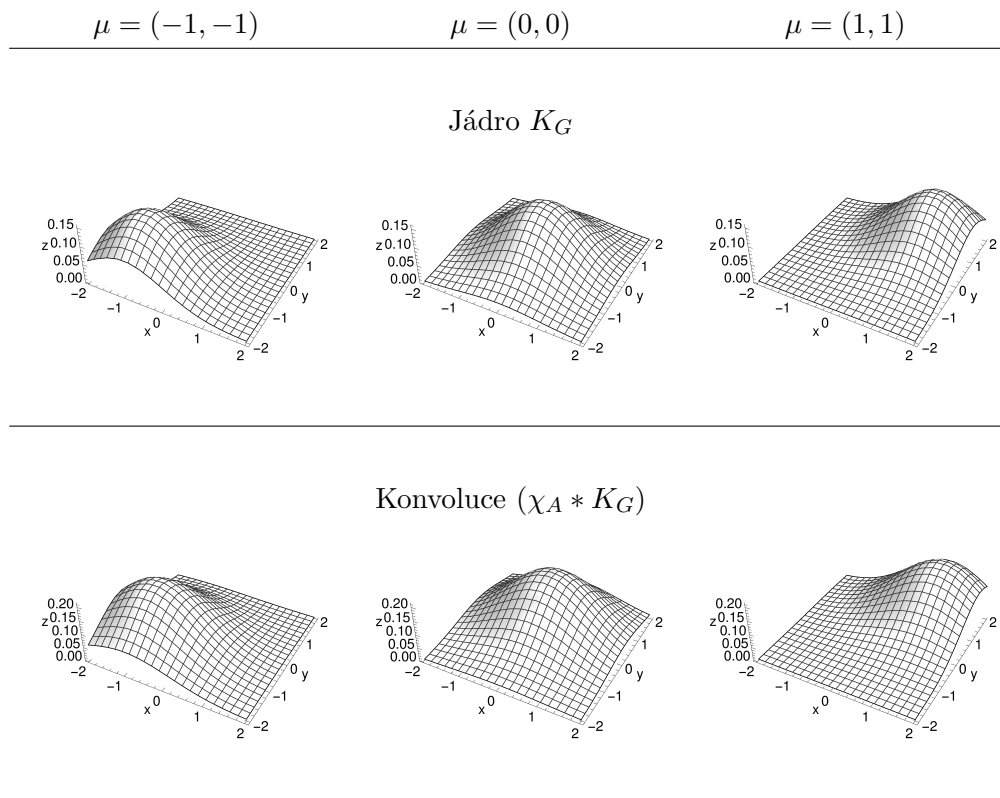
△



Obrázek 6.12: Konvoluční jádro  $K_G$  pro  $\mu = (0, 0)$  a jednotkovou matici  $\Sigma$

## Rozbor

Parametr  $\mu$  má vliv pouze na posun výsledné konvoluce. Volíme ho proto bez újmy na obecnosti jako  $\mu = (0, 0)$ . Zbývá volba parametru  $\Sigma$ . Pro vizualizaci konvoluce zvolíme pro představu různé hodnoty. Pro výpočet hladin pak pracujeme s násobky jednotkové matice  $I$  (konkrétně s 0.5 násobkem).



Obrázek 6.13: Ilustrace vlivu  $\mu$  na konvoluci  $(\chi_A * K_G)$

Při volbě  $\mu = (0, 0)$  můžeme pro funkci konvolučního jádra  $K_G$  psát

$$\begin{aligned}
 K_G((x, y)) &= c \cdot e^{-\frac{1}{2}(x,y)\Sigma^{-1}(x,y)^T} \\
 &= c \cdot e^{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \\
 &= c \cdot e^{-\frac{1}{2}(ax^2+bx+cx+dy^2)} \\
 &= c \cdot e^{-\frac{1}{2}(a(-x)^2+b(-x)(-y)+c(-x)(-y)+d(-y)^2)} , \\
 &= c \cdot e^{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -x & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}} \\
 &= c \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x,-y)\Sigma^{-1}(-x,-y)^T} \\
 &= K_G((-x, -y))
 \end{aligned}$$

kde  $c$  je normalizační člen,  $c = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|\Sigma|}}$ .

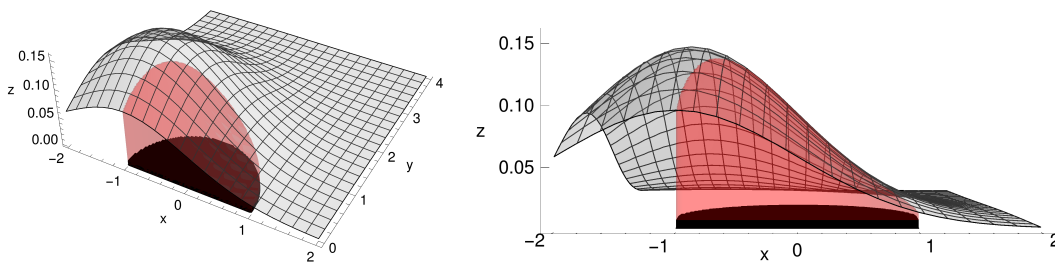
Konvoluci  $(\chi_A * K_K)(x, y)$  počítáme tedy dle (4.2) jako

$$(\chi_A * K_G)(x, y) = \iint_A K_G(x - u, y - v) \, du \, dv = \iint_A K_G(u - x, v - y) \, du \, dv. \quad (6.2)$$

### Výpočet konvoluce v libovolném bodě

Stejně jako v případě prvního modelu vypočteme dle (6.2) hodnotu konvoluce v daném bodě jako integrál z posunutého konvolučního jádra přes množinu  $A$ . Jelikož je ale  $K_G$  (na rozdíl od  $K_K$ ) obecně nenulové na celé množině  $\mathbb{R}^2$ , situaci si dalším rozбором případů nijak neulehčíme.

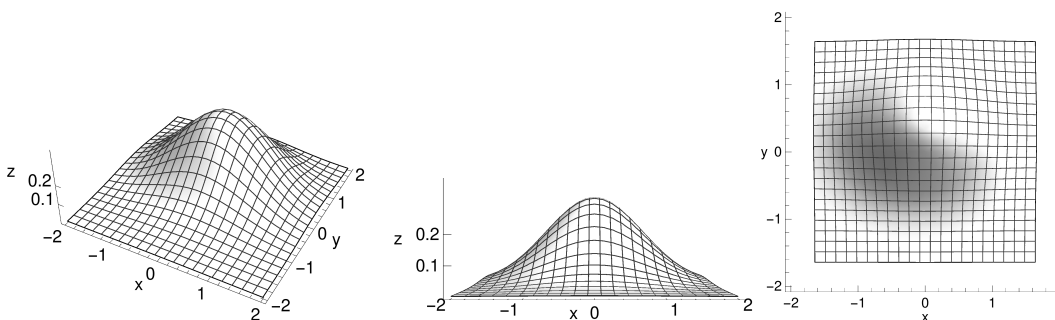
Pro výpočet konvoluce v daném bodě  $(x, y)$  jsme nuceni počítat integrál z  $K_G((u-x, v-y))$ , kde  $(u, v)$  probíhá přes omezenou oblast  $A$ . To lze provést, nicméně řešení pro obecnou souřadnici  $(x, y)$  nelze zapsat ve formě elementární funkce.



Obrázek 6.14: Výpočet konvoluce  $(\chi_A * K_G)$  v bodě  $(x, y) = (-1, 1)$  jako plochy pod funkcí  $K_G$  nad množinou  $A$

### Vizualizace

Na obrázku (6.15) vykreslujeme graf konvoluce  $(\chi_A * K_G)$  pro  $\mu = (0, 0)$ ,  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ .



Obrázek 6.15: Konvoluce  $(\chi_A * K_G)$  pro  $\Sigma = 1/2 \cdot I$

➡ Další grafy pro jiné volby  $\Sigma$  nalezne čtenář v příloze D.

### 6.2.2 Steinerův bod

Následuje výpočet Steinerova bodu normalizované fuzzy množiny  $(\mu_A * K_G)$ . Vzhledem k symetrii množiny  $A$  dle osy  $y$  a vzhledem ke středové symetrii jádra  $K_G$  je funkce  $(\mu_A * K_G)$  symetrická dle osy  $y$ . Proto bude opět  $x$ -ová souřadnice Steinerova bodu pro všechny řezy nulová.

V tomto modelovém případě platí podobné závěry jako v případě konvoluce s kruhovým jádrem. Opět provedeme výpočet analogicky k poznámkám v kapitole 5.

1. Najdeme body na vybraných  $\alpha$ -hladinách.
2. Z těchto bodů odhadneme  $y$ -ovou souřadnici Steinerova bodu pro vybrané  $\alpha$ -řezy.
3. Budeme diskutovat volbu vah  $w_\alpha$ .

Výpočty provádíme pro parametry jádra  $\mu = (0, 0)$  a  $\Sigma = 1/2I$  (kde  $I$  je jednotková matice). Dále volíme  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$  – stejně jako v předchozím modelovém případě.

#### Hledání bodů na $\alpha$ -hladině

Tolerance  $\epsilon > 0$  byla nastavena maximálně na  $10^{-10}$ . Počáteční bod  $M$  byl nalezen numerickou maximalizací pomocí funkce jádra programu *Mathematica*. Z bodu  $M$  bylo iterativně nalezeno 2048 bodů na každé ze zvolených hladin. Směry hledání  $d$  byly voleny rovnoměrně kolem bodu  $M$ .

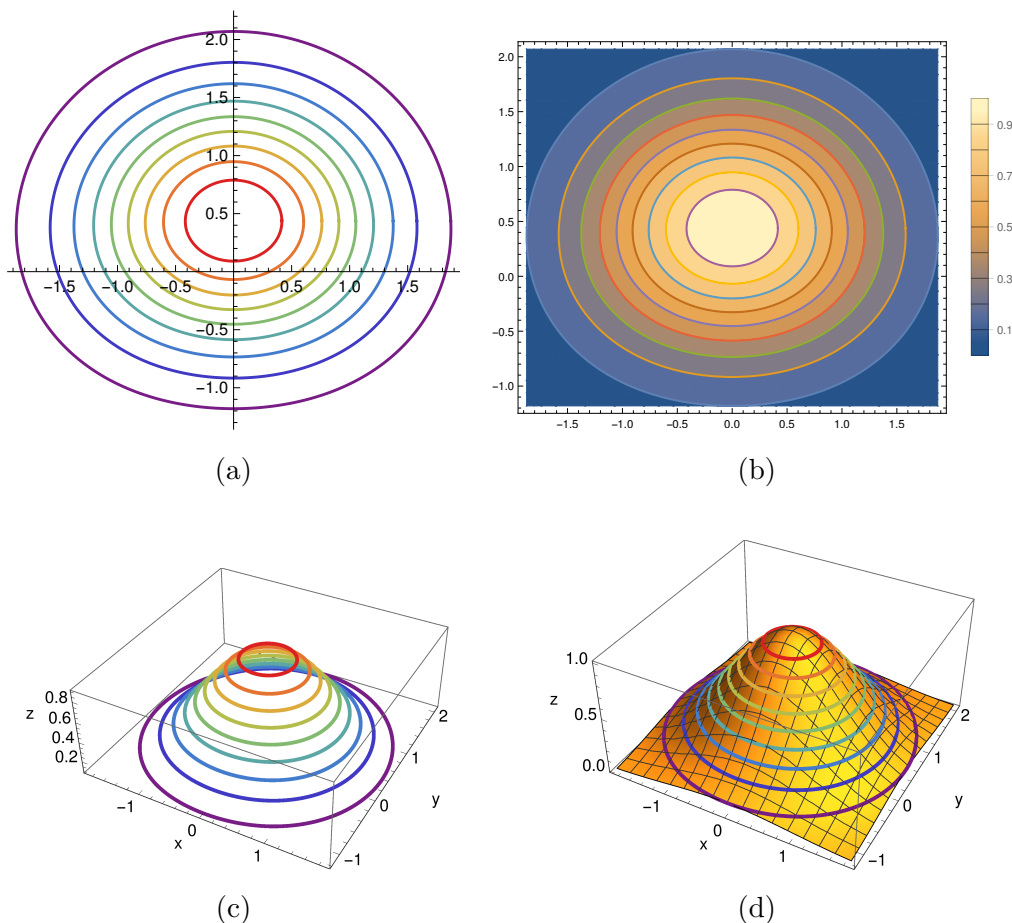
Vizualizace nalezených bodů jsou na obrázku 6.16.

#### Souřadnice Steinerových bodů vybraných řezů

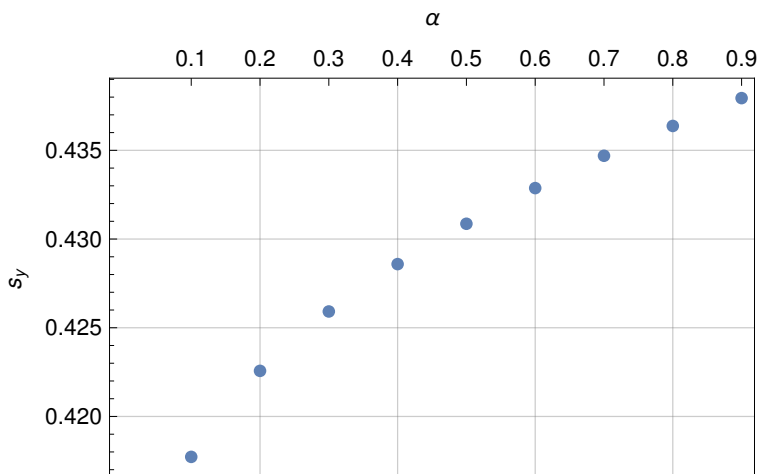
Z nalezených bodů byla odhadnuta poloha  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu vybraných řezů. K odhadu byla použita Rombergova metoda pro 32 – 2048 uzlových bodů. Uzlové body integrace byly voleny rovnoměrně na jednotkové kružnici se středem v počátku. Pro  $i$  uzlových bodů byl k odhadu opěrné funkce použit stejný počet bodů z  $\alpha$  hladiny.

Výsledné souřadnice uvádíme formou grafu na obrázku 6.17.

- ➡ Tabulku výsledků Rombergovy metody pro vybraná  $\alpha$  nalezne čtenář v příloze G.1.
- ➡ Obrázky nalezených bodů na  $\alpha$  hladinách s vyznačenými odhady Steinerova bodu nalezne čtenář v příloze G.2.
- ➡ Grafy odhadů  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu řezů pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku jsou v příloze G.3.



Obrázek 6.16: Nalezené body pro vybrané  $\alpha$ -hladiny (a), vrstevnice normalizované fuzzy množiny  $(\chi_A * K_G)$  (b), nalezené body ve 3D projekci (c) a funkce  $(\chi_A * K_G)$  (d)



Obrázek 6.17: Závislost  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu  $\alpha$  řezu na volbě  $\alpha$

**Volba vah**

Dostáváme se do podobné situace jako v prvním modelovém případě. Chceme zvolit váhy  $w_\alpha$  Steinerových bodů vybraných  $\alpha$ -řezů tak, aby se výsledný Steinerův bod fuzzy mno-

žiny vzniklé rozmazáním co nejvíce blížil poloze Steinerova bodu nerozmazané množiny  $s(A) = (0, 1/\pi) \approx (0, 0.3183099)$ . Stejně jako v případě konvoluce s kruhovým jádrem jsou výsledné hodnoty pro vybrané  $\alpha$ -řezy větší než hodnota  $1/\pi$ .

Jediný drobný rozdíl oproti kruhovému jádru je ten, že gaussovské konvoluční jádro není nikde na  $\mathbb{R}^2$  nulové. Hodnotě 0 se blíží pouze asymptoticky. Nemůžeme tedy najít ostrý 0-řez.

Hodnoty  $K_G(x, y)$  budou ale v určité vzdálenosti od střední hodnoty zanedbatelně malé. Pokud bychom určili nějaký libovolně malý práh  $\nu > 0$  a hodnoty  $K_G(x, y) < \nu$  považovali za nulové, ocitli bychom se ve stejné situaci jako v případě s kruhovým jádrem. Opět bychom našli ostrý 0-řez, který by odpovídal množině  $A$  zvětšené ve všech směrech o nějakou konstantu (která by závisela na volbě  $\nu$ ).

Poloha Steinerova bodu  $s(A)$  by pak odpovídala poloze Steinerova bodu ostrého 0-řezu. Váhy  $w_\alpha$  bychom volili nulové pro  $\alpha > 0$  a jednotkovou pro  $\alpha = 0$ .



## 7 Závěr

---

Cílem bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s pojmem Steinerova bodu, jakož i s jeho fuzzy zobecněním, a demonstrovat jeho výpočet na konkrétním rovinném útvaru.

V úvodu práce byly zavedeny základní pojmy týkající se fuzzy množin. Dále byl definován Steinerův bod uzavřené konvexní množiny, stejně jako jeho rozšíření na konvexní fuzzy množiny. V kapitole 4 byl popsán proces fuzzifikace, konkrétně pak operace konvoluce, která byla využita k fuzzifikaci klasické množiny při modelovém výpočtu.

V kapitole 5 byl obecně analyzován výpočet Steinerova bodu fuzzy množiny. Dále byly uvedeny poznámky o analytickém a numerickém výpočtu. Pro výpočet bylo zvoleno numerické řešení. Bylo provedeno několik testů integračních metod, protože pro řešení na modelových příkladech byla vybrána Rombergova metoda numerické integrace. Dále bylo rozvedeno několik úvah o odhadu chyby výpočtu.

Nakonec byly v kapitole 6 provedeny konkrétní výpočty na vybraném rovinném útvaru – půlkruhu, který byl „rozmazán“ konvolucí s normálním rozdělením a s rovnoměrným rozdělením na kruhu.

Pro konvoluci s rozdělením na kruhu bylo zjištěno, že optimální volba vah je  $w_\alpha = 0$  pro  $\alpha > 0$  a  $w_0 = 1$ , kde váha  $w_0$  odpovídá váze Steinerova bodu ostrého 0-řezu. To znamená, že jako (fuzzy) Steinerův bod rozmazané množiny vybíráme (klasický) Steinerův bod jejího ostrého 0-řezu, jehož poloha je, jak bylo zjištěno, stejná jako poloha Steinerova bodu nerozmazané množiny.

Pro konvoluci s gaussovským rozdělením není možné Steinerův bod ostrého 0-řezu určit, ale polohy Steinerových bodů  $\alpha$ -řezů se budou pro  $\alpha$  jdoucí k nule limitně blížit poloze Steinerova bodu nerozmazaného půlkruhu.

## 8 Zdroje

---

- [1] Klingenberg, B. Getting Started with Fuzzy Logic [online]. Dostupné z URL: <https://www.calvin.edu/~pribeiro/othrlnks/Fuzzy/home.htm> (accessed April, 2016).
- [2] Navara, M.; Olšák, P. Základy fuzzy množin, 2nd ed.; Nakladatelství ČVUT: Praha, 2007.
- [3] Dubois, D.; Ostasiewicz, W.; Prade, H. Fuzzy Sets: History and Basic Notions [online]. Dostupné z URL: [http://www.colorado.edu/geography/leyk/geog\\_5113/readings/dubois\\_etal\\_Fuzzy\\_Sets\\_.pdf](http://www.colorado.edu/geography/leyk/geog_5113/readings/dubois_etal_Fuzzy_Sets_.pdf) (accessed April, 2016).
- [4] Liang, J.; Wang, D. Implementation of Steiner Point of Fuzzy Set [online]. The Scientific World Journal 2014. Dostupné z URL: <http://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/593065/> (accessed April, 2016).
- [5] Vetterlein, T.; Navara, M. Defuzzification using Steiner points. Fuzzy Sets and Systems 2006, 157 (11), 1455–1462.
- [6] Weisstein, E. W. Steiner Points [online]. Wolfram MathWorld. Dostupné z URL: <http://mathworld.wolfram.com/SteinerPoints.html> (accessed March, 2016).
- [7] Sternberg, S. R. Grayscale Morphology. Computer Vision, Graphics and Image Processing 1986, 35 (3), 333–355.
- [8] Liang, L. Z.; Song, W. Clustering Based on Steiner Points. Machine Learning 2011, 3 (2), 141–148.
- [9] Alt, H.; Aichholzer, O.; Rote, G. Matching Shapes with a reference point. International Journal of Computational Geometry 1997, 7 (4), 349–363.
- [10] Alt, H.; Aichholzer, O.; Rote, G. Minkowski operations and vector spaces. Set-Valued Analysis 1995, 3 (1), 33–50.
- [11] Shephard, G. C. A uniqueness theorem for the Steiner point of a convex region. Journal London Mathematical Society 1968, 43, 439–444.
- [12] Schneider, R. On Steiner points of convex bodies. Israel Journal of Mathematics 1971, 9, 241–249.
- [13] Meyer, W. J. Characterization of the Steiner point. Pacific Journal of Mathematics 1970, 35 (3), 717–725.
- [14] Diamond, P.; Kloeden, P. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific 1994.

- [15] Fuzzy Logic Image Processing [online]. MathWorks. Dostupné z URL: <http://www.mathworks.com/help/fuzzy/examples/fuzzy-logic-image-processing.html> (accessed May, 2016).
- [16] Fuzzy Logic Example 9: Image Processing [online]. Wolfram. Dostupné z URL: <https://www.wolfram.com/products/applications/fuzzylogic/examples/processing.html> (accessed May, 2016).
- [17] Weisstein, E. W. Convolution [online]. From MathWorld. Dostupné z URL: <http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>
- [18] Navara, M.; Němeček, A. Numerické metody, 1st ed.; Nakladatelství ČVUT: Praha, 2005.
- [19] Niemitalo, O. Circularly symmetric convolution and lens blur [online]. Dostupné z URL: <http://yehar.com/blog/?p=1495> (accessed May, 2016).
- [20] Fisher, R.; Perkins, S.; Walker, A.; Wolfart, E. Gaussian Smoothing [online]. Dostupné z URL: <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm> (accessed May, 2016).
- [21] Konvoluce [online]. Analýza a modelování dynamických biologických dat. Dostupné z URL: <http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-modelovani-dynamicky-ch-biologicky-ch-dat--signaly-a-linearni-systemy--modely-velicin-spojitych-v-case-ii--1-konvoluce> (accessed April, 2016).

# Přílohy

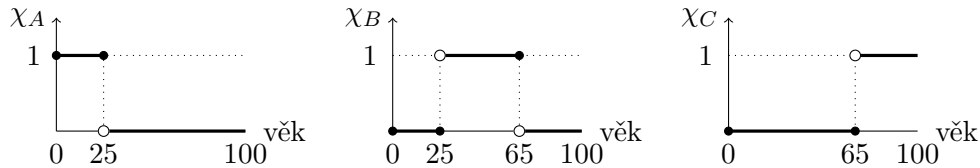
---

## A Příklad: Rozdíl mezi fuzzy a klasickou množinou

Představme si universum  $X$  jako interval  $X = \langle 0, \infty \rangle$ . Jeho hodnoty budeme interpretovat jako lidský věk (v letech). Naším cílem bude přiřadit prvky  $x \in X$  do množin, které budeme chápat jako *mladý věk*, *střední věk* a *starý věk*. Po řadě označíme tyto množiny jako  $A, B$  a  $C$ .

V případě klasických množin by množiny  $A, B, C$  mohly vypadat například jako

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid 0 \leq x \leq 25\}, \\ B &= \{x \in X \mid 25 < x \leq 65\}, \\ C &= \{x \in X \mid 65 < x < \infty\}. \end{aligned}$$

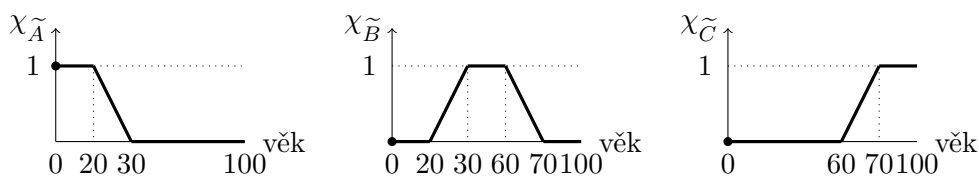


Obrázek 1: Funkce příslušnosti klasických množin  $A, B, C$

Takovéto vyjádření pomocí klasických množin je ale velice citlivé. Člověk, který oslaví své 65. narozeniny, se ze dne na den stane „starým“. V reálném životě to tak nefunguje, člověk stárne postupně, nikoliv skokově. Proto není tato reprezentace příliš vhodná.

Klasické množiny  $A, B$  a  $C$  nahradíme odpovídajícími fuzzy množinami  $\tilde{A}, \tilde{B}$  a  $\tilde{C}$ . Jejich funkce příslušnosti by mohly vypadat takto:

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{A}}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 20, \\ -\frac{1}{10}x + 3 & \text{pro } 20 < x \leq 30, \\ 0 & \text{pro } 30 < x, \end{cases} \\ \chi_{\tilde{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq 20, \\ \frac{1}{10}x - 2 & \text{pro } 20 < x \leq 30, \\ 1 & \text{pro } 30 < x \leq 60, \\ -\frac{1}{10}x + 7 & \text{pro } 60 < x \leq 70, \\ 0 & \text{pro } 70 < x, \end{cases} \\ \chi_{\tilde{C}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq 60, \\ \frac{1}{10}x - 6 & \text{pro } 60 < x \leq 70, \\ 1 & \text{pro } 70 < x. \end{cases} \end{aligned}$$

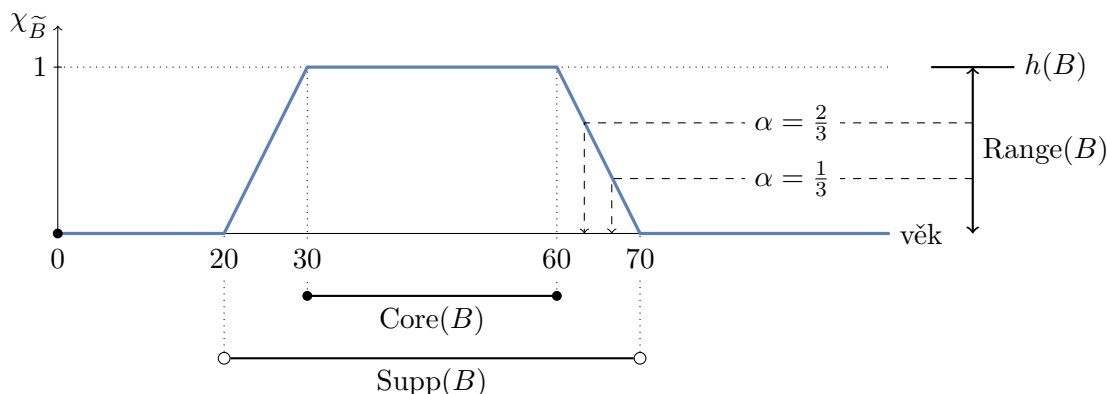
Obrázek 2: Funkce příslušnosti fuzzy množin  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ 

To lépe zachycuje proces stárnutí. Ve 21 letech bychom dle našeho zápisu označili člověka za „spíše mladého“ ( $\chi_{\tilde{A}}(21) = 0.9$ ) než „středně starého“ ( $\chi_{\tilde{B}}(21) = 0.1$ ), ale vůbec ne „starého“ ( $\chi_{\tilde{C}}(21) = 0$ ).

**Poznámka:** Fuzzy množiny  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  a  $\tilde{C}$  jsou zvoleny tak, aby ukázaly rozdíl oproti klasickým množinám  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Volba funkce příslušnosti je v tomto případě subjektivní. Někdo by mohl například vnímat věk 30 let jako stále „mladý“ apod. Funkce příslušnosti by nemusela být po částech lineární (my ji tak zvolili pouze pro jednoduchost).

△

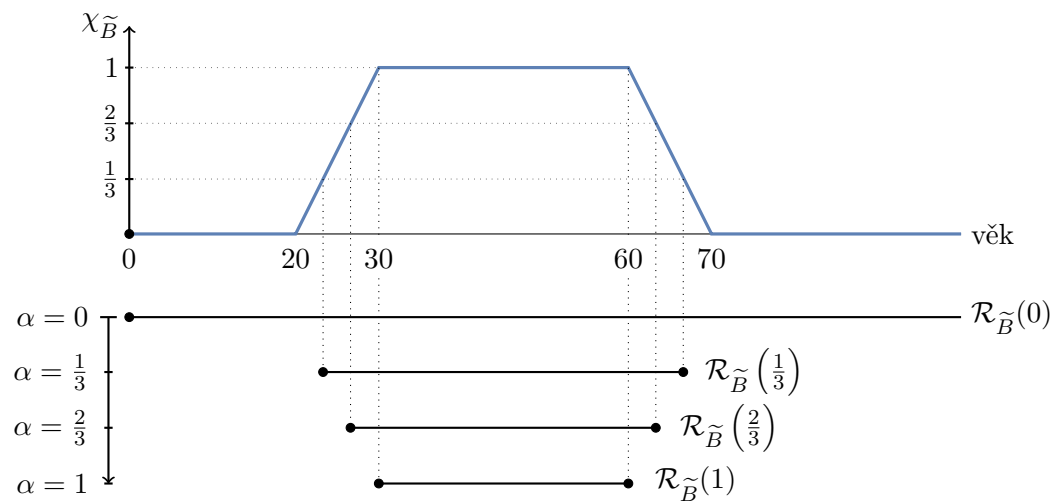
Na fuzzy množině  $\tilde{B}$  rozebereme pojmy zavedené v sekci 2.3.

Obrázek 3: Ilustrace vybraných pojmů na fuzzy množině  $\tilde{B}$ 

- **Obor pravdivostních hodnot** je celý interval od 0 do 1 včetně,  $\text{Range } \tilde{B} = \langle 0, 1 \rangle$ .
- **Výška** je rovna přímo maximu  $\text{Range } \tilde{B}$ , tj.  $h(\tilde{B}) = 1$ , množina  $\tilde{B}$  je tedy normální.
- **Nosič** je otevřený interval od 20 do 70,  $\text{Supp } \tilde{B} = (20, 70)$ , množina  $\tilde{B}$  není konečná.
- **Jádro** je uzavřený interval od 30 do 60,  $\text{Core } \tilde{B} = \langle 30, 60 \rangle$ .

Ještě uvedme horizontální reprezentaci.

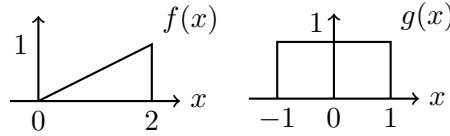
$$\mathcal{R}_{\tilde{B}}(\alpha) = \begin{cases} X & \text{pro } \alpha = 0, \\ \langle 10(\alpha + 2), 10(7 - \alpha) \rangle & \text{pro } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Obrázek 4: Vybrané řezy na fuzzy množině  $\tilde{B}$

## B Příklad: Konvoluce dvou funkcí

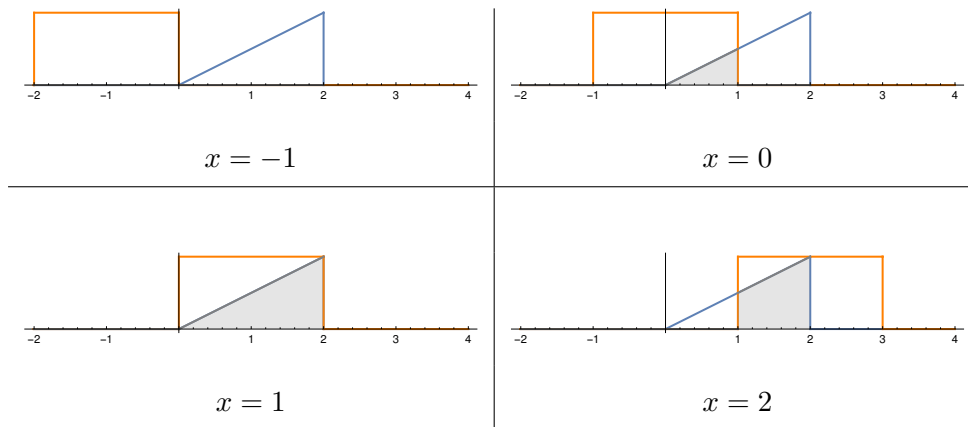
Příklad byl inspirován z [21]. Definujme dvě jednoduché funkce.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 5: Ilustrace funkcí  $f(x)$ ,  $g(x)$

Určíme konvoluci  $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du$ . Obrázek 6 ilustruje výpočet konvoluce pro různé hodnoty  $x$ .



Obrázek 6: Konvoluce pro vybraná  $x$ ; hodnota konvoluce je rovna ploše šedé oblasti

Funkční hodnoty  $f(u)$  funkce  $f$  jsou nenulové pro  $u \in (0, 2]$ . Funkční hodnoty  $g(t)$  funkce  $g$  jsou nenulové pro  $t \in [-1, 1]$ . Součin  $f(u) \cdot g(x-u)$  bude nenulový pro

$$(x-u) \in (-1, 1] \rightarrow x \in (-1, 3].$$

- Pro  $x \in (-1, 1]$  dostáváme

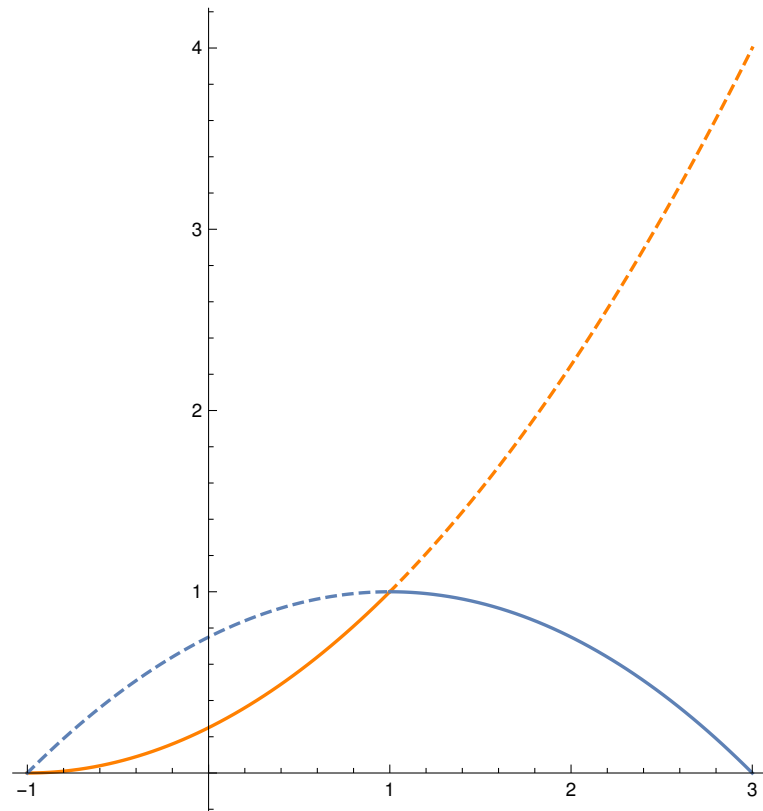
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du = \int_0^2 f(u) \cdot g(x-u) du = \int_0^{x+1} \frac{1}{2}u du = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

- Pro  $x \in (1, 3]$  dostáváme

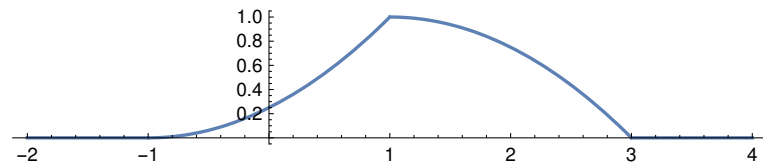
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du = \int_0^2 f(u) \cdot g(x-u) du = \int_{x-1}^2 \frac{1}{2}u du = \frac{1}{4}(4-(x-1)^2).$$

- Pro  $x \in (-\infty, -1] \cup (3, \infty]$  je konvoluce  $(f * g)$  nulová.

Následuje graf funkcí  $\frac{1}{4}(x+1)^2$  a  $\frac{1}{4}(4-(x-1)^2)$  a graf výsledné konvoluce.



Obrázek 7: Funkce  $\frac{1}{4}(x+1)^2$  (oranžově) a  $\frac{1}{4}(4-(x-1)^2)$  (modře)



Obrázek 8: Výsledná konvoluce  $(f * g)$



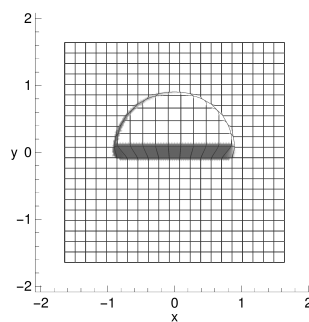
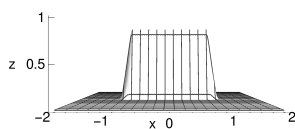
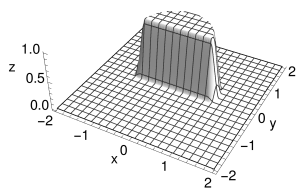
## C Vizualizace konvoluce pro kruhové jádro

Vykreslujeme graf konvoluce  $(\chi_A * K_K)$  pro funkci příslušnosti půlkruhu  $\chi_A$  a kruhové konvoluční jádro  $K_K$ . Poloměr  $r$  jádra  $K_K$  volíme jako

$$r \in \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}.$$

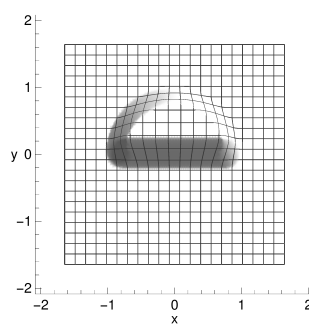
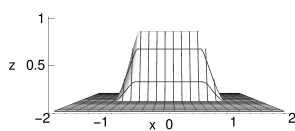
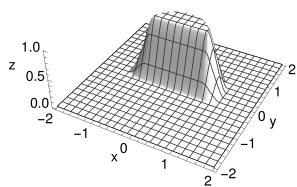
---


$$r = \frac{1}{8}$$



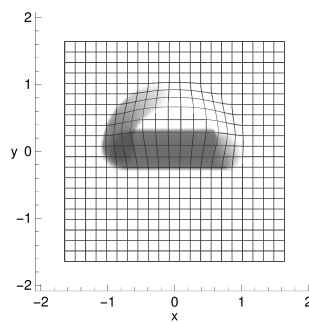
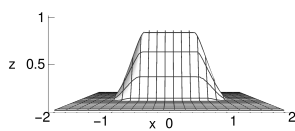
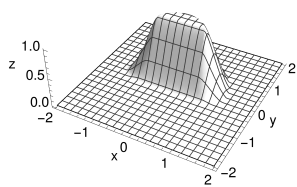
---

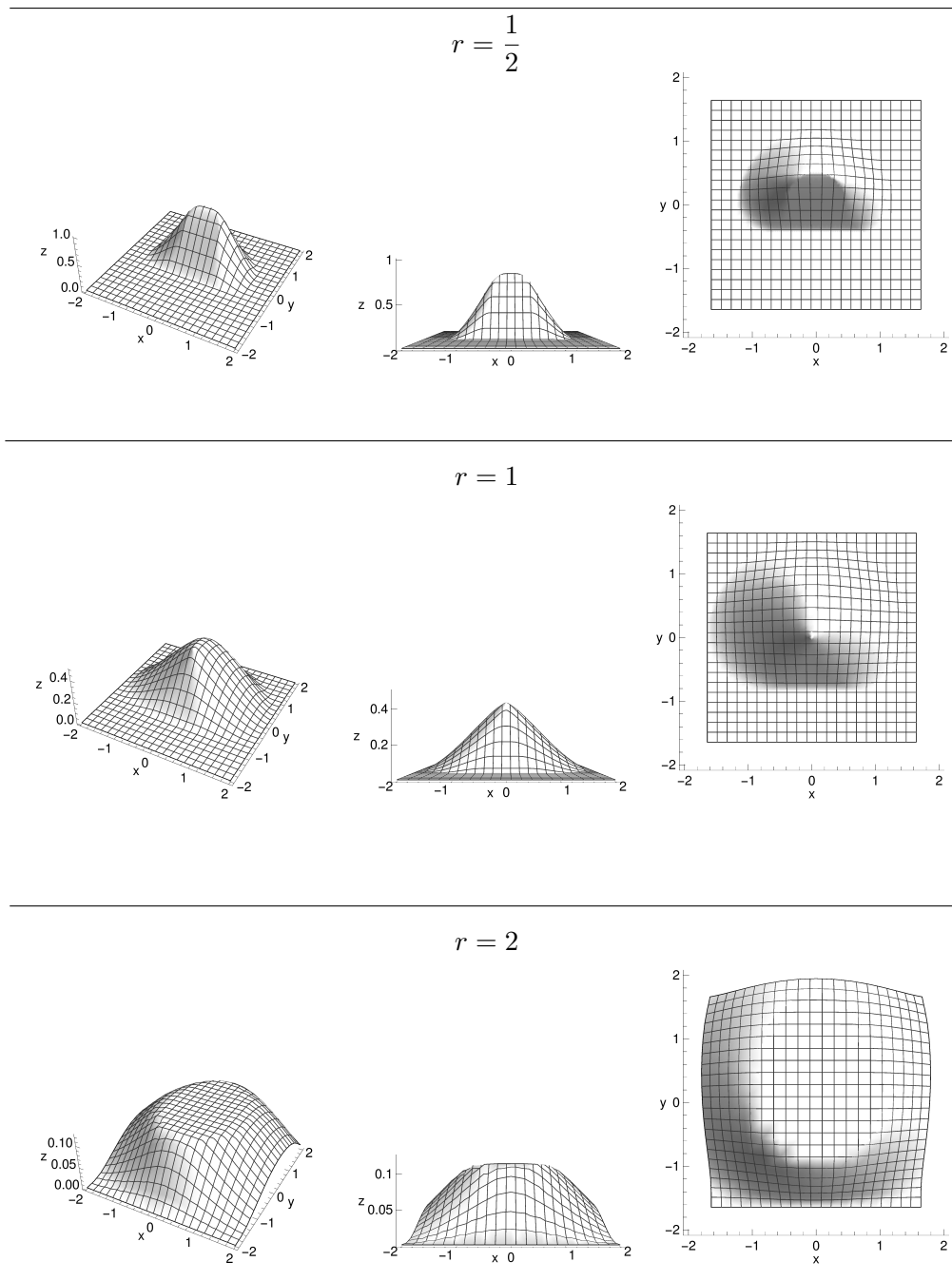

$$r = \frac{1}{4}$$



---


$$r = \frac{1}{3}$$



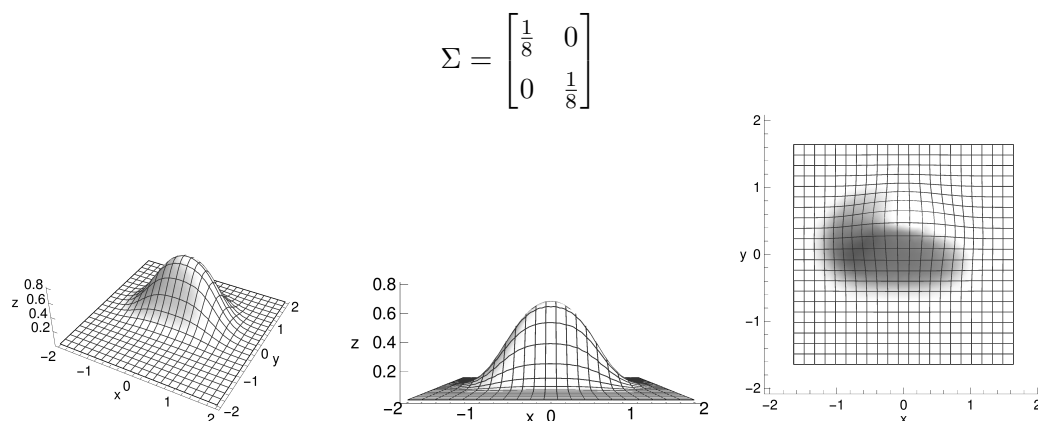
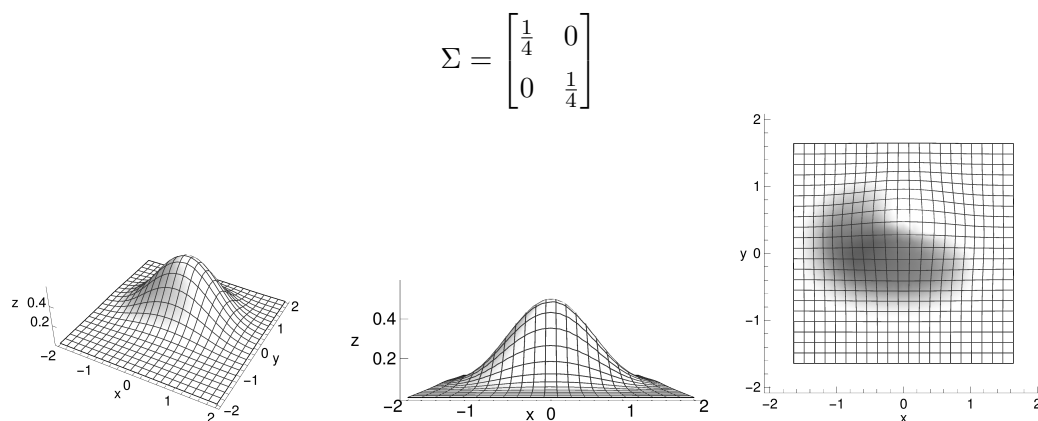
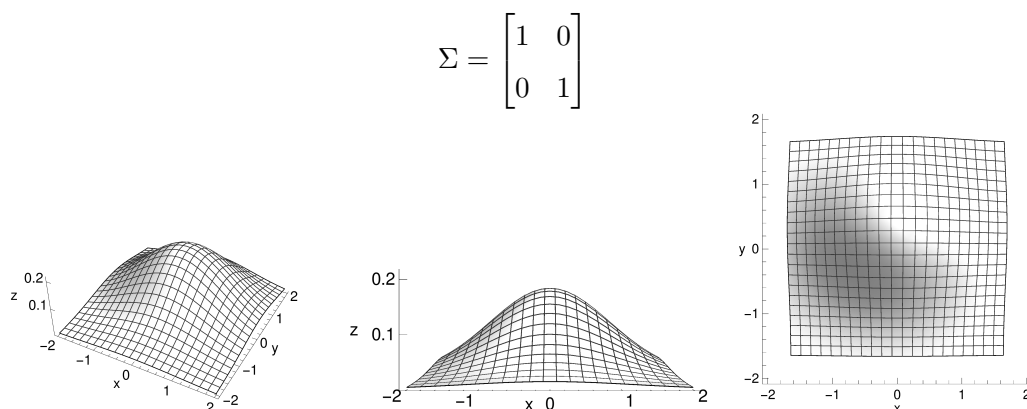


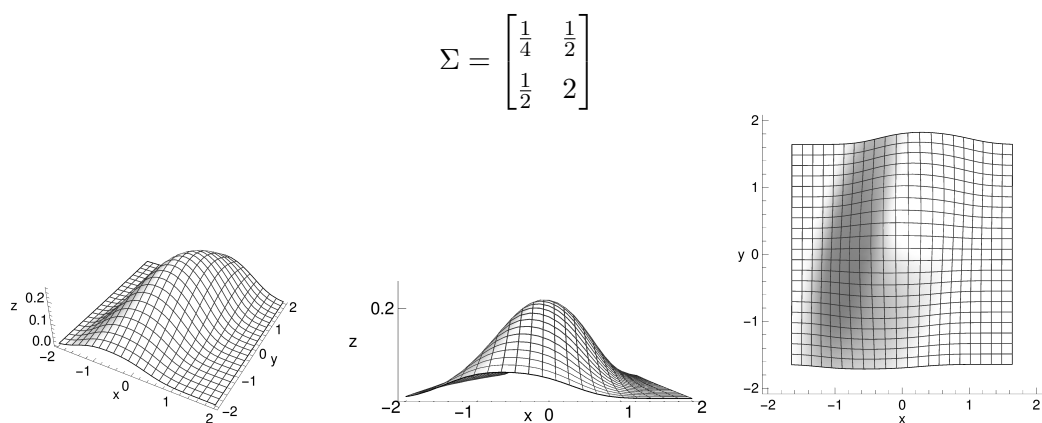
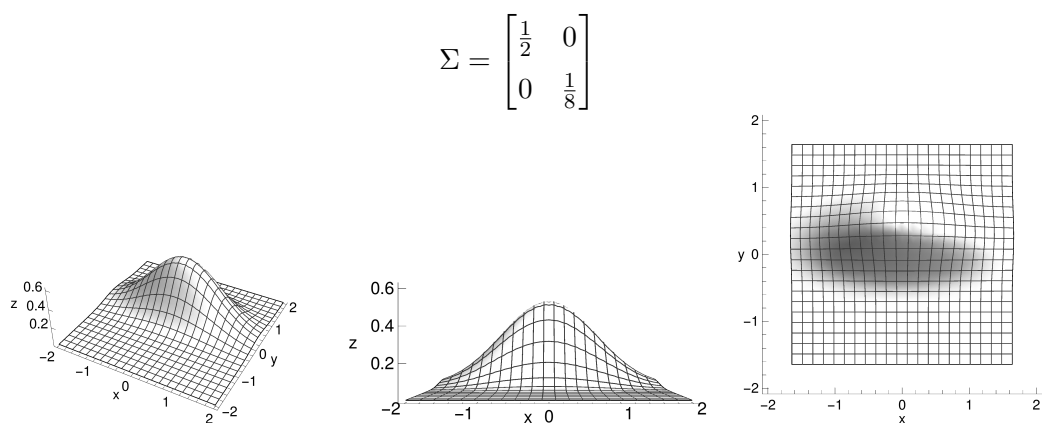
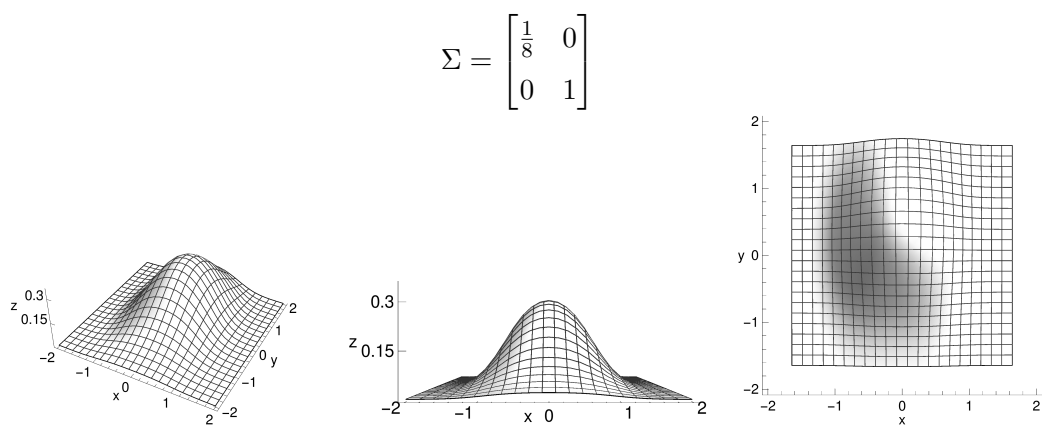
Obrázek 9: Konvoluce  $(\chi_A * K_K)$  pro různé volby poloměru jádra  $r$

## D Vizualizace konvoluce pro gaussovské jádro

Vykreslujeme graf konvoluce  $(\chi_A * K_G)$  pro funkci příslušnosti půlkruhu  $\chi_A$  a gaussovské konvoluční jádro  $K_G$ . Kovarianční matici  $\Sigma$  jádra  $K_G$  volíme jako

$$\Sigma \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$





Obrázek 10: Konvoluce  $(\chi_A * K_G)$  pro různé volby parametru  $\Sigma$

## E Poloha Steinerova bodu půlkruhu

Zde ukážeme výpočet polohy Steinerova bodu pro půlkruh  $A$  o poloměru  $R$ . Jeho polohu počítáme dle vzorce

$$s(A) = \frac{1}{V(B^n)} \cdot \int_{S^{n-1}} e \cdot h_A(e) \, d\lambda(e).$$

K výpočtu daného integrálu potřebujeme parametrizaci křivky, přes kterou budeme integrovat. Jednotkovou kružnici můžeme parametrizovat například takto

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\} t \in [0, 2\pi)$$

Dále vyjádříme  $d\lambda(e)$ . V našem případě je to:

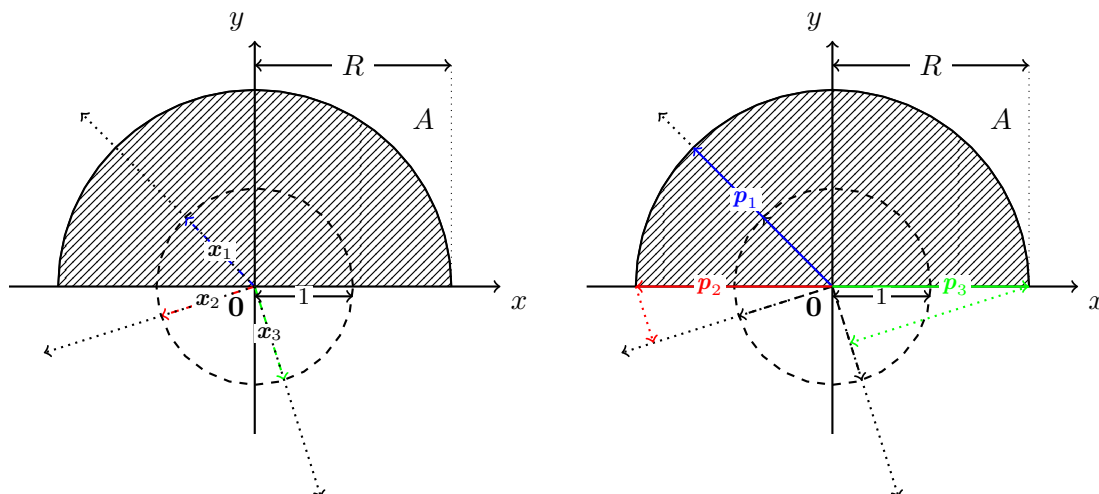
$$d\lambda(e) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Po dosazení vychází:

$$\sqrt{\left(\frac{\cos t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \sqrt{1} dt = 1 dt.$$

Objem jednotkové koule se ve dvoudimenzionálním prostoru redukuje na obsah.

$$V(B^2) = \pi \cdot 1^2 = \pi$$



Obrázek 11: Ilustrace hodnot opěrné funkce  $h_A(e)$  – pro tři směry  $x_1, x_2, x_3$  tři vektory  $p_1, p_2, p_3$  s největším kolmým průmětem do příslušného směru

Opěrná funkce se počítá jako

$$h_A(x) = \max\{\langle x, p \rangle \mid p \in A\}.$$

Její hodnoty pro půlkruh vychází následovně:

$$h_A((e_x, e_y)) = \begin{cases} R & \text{pro } y \geq 0, \\ R \cdot |e_x| & \text{pro } y < 0, \end{cases}$$

Zbývá jen sestavit konkrétní integrály.

Pro oblast  $y \geq 0$ :

$$s(A)_x = \frac{1}{V(B^2)} \cdot \int_0^\pi \cos(t) \cdot r \, dt = 0$$

$$s(A)_y = \frac{1}{V(B^2)} \cdot \int_0^\pi \sin(t) \cdot r \, dt = \frac{2R}{\pi}$$

Pro oblast  $y < 0$ :

$$s(A)_x = \frac{1}{V(B^2)} \cdot \int_\pi^{2\pi} \cos(t) \cdot r |\cos(t)| \, dt = 0$$

$$s(A)_y = \frac{1}{V(B^2)} \cdot \int_\pi^{2\pi} \sin(t) \cdot r |\cos(t)| \, dt = -\frac{R}{\pi}$$

Po součtu příslušných souřadnic dostáváme  $s(A) = (0, R/\pi)$ .

## F Steinerův bod a kruhové jádro

### F.1 Výsledky Rombergovy metody

Zde uvádíme výsledky numerické integrace Rombergovy metody pro odhady  $y$ -ových souřadnic Steinerových bodů jednotlivých  $\alpha$ -řezů ( $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ ) fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$  pro poloměr jádra  $r = 1/2$ .

Ve sloupcích tabulky jsou diagonály Rombergovy tabulky, ve které byly odhady v prvním sloupci vypočteny lichoběžníkovou metodou pro 32 – 2048 bodů. Uzlové body integrace byly zvoleny rovnoměrně na jednotkové kružnici. Pro odhad hodnot opěrné funkce byly použity body na příslušné  $\alpha$ -hladině, kterých byl zvolen stejný počet jako počet uzlových bodů integrace.

Z tabulek je patrné, že pro rostoucí počet uzlových bodů (tedy i bodů použitých pro odhad opěrné funkce) se odhad souřadnice Steinerova bodu zpřesňuje. Za naše finální odhady považujeme hodnoty získané pro 2048 bodů. Kurzívou jsou znázorněny cifry, které se shodují s odhadem pro 2048 bodů.

Hladina $\alpha$ :	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Bodů: 32	<i>0.378957</i>	<i>0.394413</i>	<i>0.404218</i>	<i>0.411189</i>	<i>0.417461</i>
Bodů: 64	<i>0.377007</i>	<i>0.392396</i>	<i>0.402313</i>	<i>0.409860</i>	<i>0.414752</i>
Bodů: 128	<i>0.376671</i>	<i>0.392173</i>	<i>0.402270</i>	<i>0.409453</i>	<i>0.414905</i>
Bodů: 256	<i>0.376729</i>	<i>0.392240</i>	<i>0.402265</i>	<i>0.409532</i>	<i>0.414857</i>
Bodů: 512	<i>0.376712</i>	<i>0.392228</i>	<i>0.402267</i>	<i>0.409521</i>	<i>0.414866</i>
Bodů: 1024	<i>0.376715</i>	<i>0.392229</i>	<i>0.402266</i>	<i>0.409524</i>	<i>0.414866</i>
Bodů: 2048	<i>0.376715</i>	<i>0.392229</i>	<i>0.402266</i>	<i>0.409524</i>	<i>0.414866</i>

Tabulka 1: Výsledky Rombergovy metody pro  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

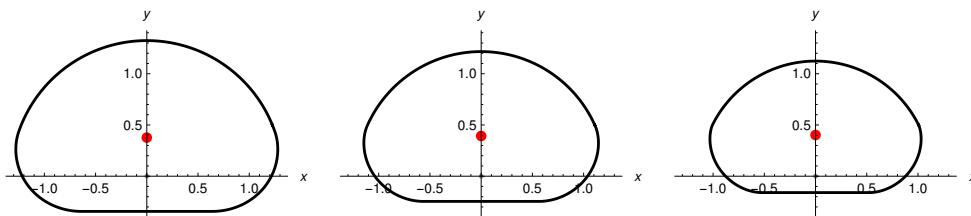
Hladina $\alpha$ :	0.6	0.7	0.8	0.9
Bodů: 32	<i>0.422682</i>	<i>0.423036</i>	<i>0.432764</i>	<i>0.443843</i>
Bodů: 64	<i>0.417905</i>	<i>0.422074</i>	<i>0.426802</i>	<i>0.442647</i>
Bodů: 128	<i>0.418781</i>	<i>0.421668</i>	<i>0.427680</i>	<i>0.442503</i>
Bodů: 256	<i>0.418617</i>	<i>0.421349</i>	<i>0.427309</i>	<i>0.442449</i>
Bodů: 512	<i>0.418555</i>	<i>0.421437</i>	<i>0.427323</i>	<i>0.442354</i>
Bodů: 1024	<i>0.418555</i>	<i>0.421409</i>	<i>0.427337</i>	<i>0.442379</i>
Bodů: 2048	<i>0.418560</i>	<i>0.421411</i>	<i>0.427335</i>	<i>0.442376</i>

Tabulka 2: Výsledky Rombergovy metody pro  $\alpha \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$

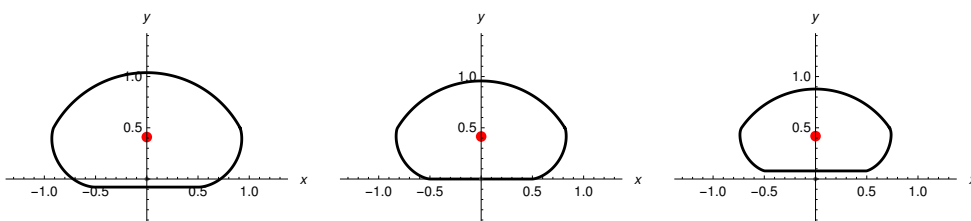
## F.2 Vybrané hladiny a jejich Steinerovy body

Zde uvádíme odhady Steinerových bodů vybraných  $\alpha$ -hladin fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$  s poloměrem jádra  $r = 1/2$  ve srovnání s body nalezenými na daných  $\alpha$ -hladinách. Souřadnici  $s_x$  jsme zvolili nulovou díky symetrii množiny  $(\chi_A * K_K)$ .

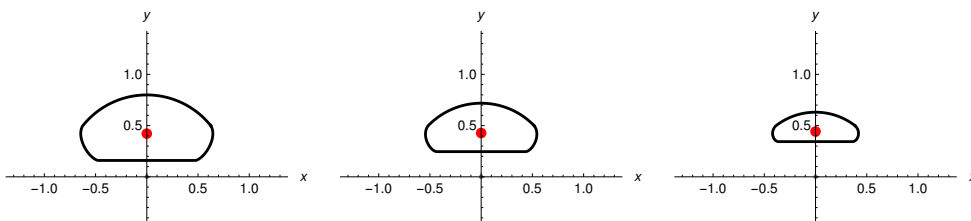
$$\alpha = 0.1, s_y = 0.376715 \quad \alpha = 0.2, s_y = 0.392229 \quad \alpha = 0.3, s_y = 0.402266$$



$$\alpha = 0.4, s_y = 0.409524 \quad \alpha = 0.5, s_y = 0.414866 \quad \alpha = 0.6, s_y = 0.418560$$



$$\alpha = 0.7, s_y = 0.421411 \quad \alpha = 0.8, s_y = 0.427335 \quad \alpha = 0.9, s_y = 0.442376$$



Obrázek 12: Body na  $\alpha$ -hladinách (černě) a příslušné odhady Steinerova bodu řezů určených danými hladinami (červeně)

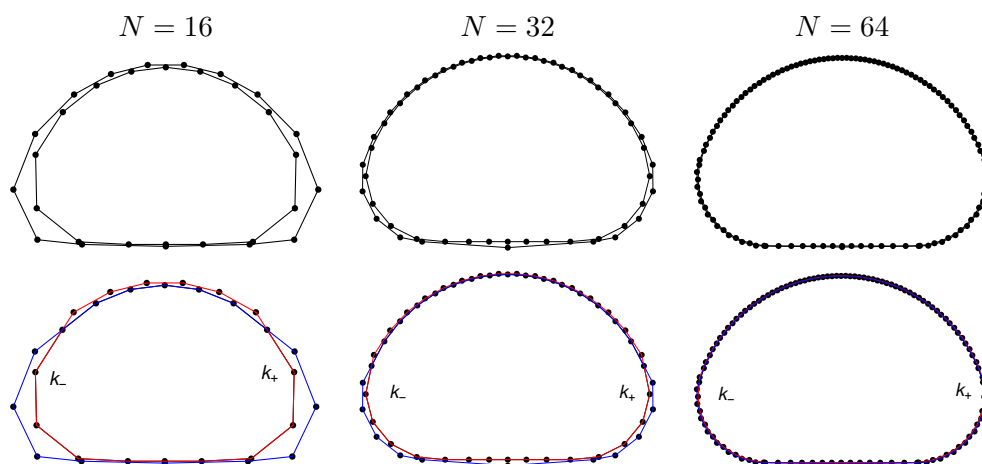


### F.3 Odhady pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku

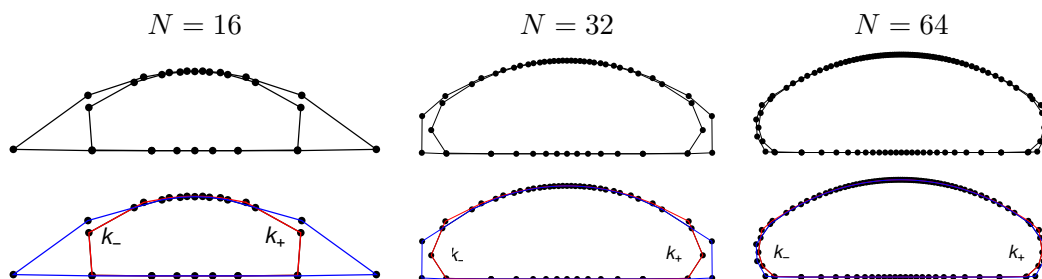
Následující výsledky byly nalezeny pro fuzzy množinu  $(\chi_A * K_K)$  s poloměrem jádra  $r = 1/2$ .

Pro jednotlivé řezy jsme sestrojili „horní“ a „spodní“ mnohoúhelník, jak se popsáno v kapitole 5.4. Následně jsme vypočítali odhady polohy  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu, přičemž hodnoty opěrné funkce byly aproximovány pomocí již zmíněných mnohoúhelníků. Výsledky uvádíme v následujících grafech. Důležité je, že pro rostoucí počet bodů  $N$  (tj. počet uzlových bodů numerické integrace a zároveň počet vrcholů původního vepsaného mnohoúhelníku dané hladiny) se horní, spodní i náš odhad přibližují (mnohoúhelník  $L$  se těsně přibližuje vepsanému).

Následují ukázky řečených mnohoúhelníků. Černě vyobrazeny mnohoúhelníky  $M$  a  $L$ . Vrcholy  $M$  představují body na  $\alpha$ -hladině. Červeně a modře vykresleny mnohoúhelníky použité pro horní a spodní odhad hodnot opěrné funkce.

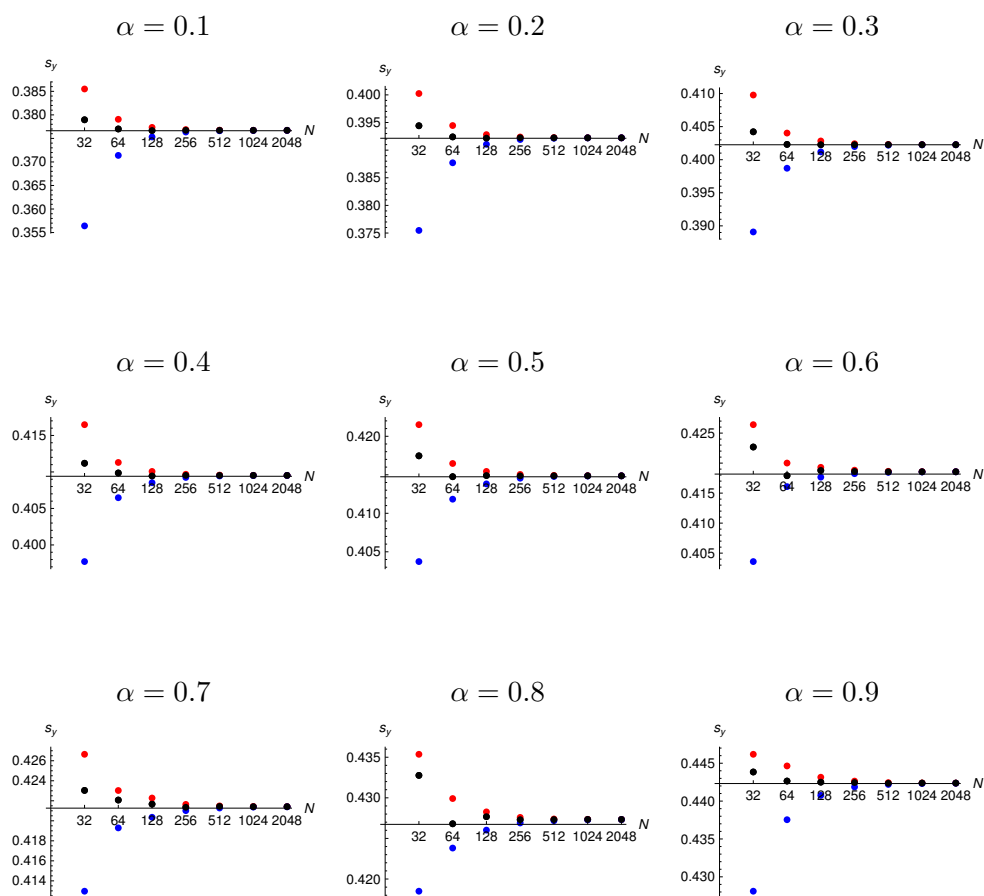


Obrázek 13: Ukázky „horního“ (červeně) a „spodního“ (modře) mnohoúhelníku pro  $N \in \{16, 32, 64\}$  bodů na 0.1-hladině fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$



Obrázek 14: Ukázky „horního“ (červeně) a „spodního“ (modře) mnohoúhelníku pro  $N \in \{16, 32, 64\}$  bodů na 0.9-hladině fuzzy množiny  $(\chi_A * K_K)$

Následuje tabulka odhadů.



Obrázek 15: Odhady  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodů jednotlivých řezů – černě náš odhad (hodnoty opěrné funkce aproximovány pomocí bodů na  $\alpha$ -hladině). červeně odhad pomocí „horního“ mnohoúhelníku, modře odhad pomocí „spodního mnohoúhelníku“

## G Steinerův bod a gaussovské jádro

### G.1 Výsledky Rombergovy metody

Zde uvádíme výsledky numerické integrace Rombergovy metody pro  $y$ -ové souřadnice Steinerových bodů jednotlivých  $\alpha$ -řezů ( $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ ) normalizované fuzzy množiny  $(\chi_A * K_G)$  pro parametry jádra

$$\mu = (0, 0), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Stejně jako v případě kruhového jádra jsou ve sloupcích tabulky diagonály příslušných tabulek Rombergovy integrační metody. Uzlové body integrace byly zvoleny rovnoměrně na jednotkové kružnici. Pro odhad hodnot opěrné funkce byly použity body na příslušné  $\alpha$ -hladině, kterých byl zvolen stejný počet jako počet uzlových bodů integrace.

Můžeme pozorovat, že s rostoucím počtem uzlových bodů (a tedy i bodů použitých při odhadu hodnot opěrné funkce) se výsledek postupně zpřesňuje. Za naše finální odhady považujeme hodnoty získané pro 2048 bodů. Kurzívou jsou vyznačeny cifry, které se shodují s posledním odhadem pro 2048 bodů.

Hladina:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Bodů: 32	<i>0.417109</i>	<i>0.422021</i>	<i>0.425434</i>	<i>0.428238</i>	<i>0.430646</i>
Bodů: 64	<i>0.418290</i>	<i>0.422904</i>	<i>0.426100</i>	<i>0.428648</i>	<i>0.430849</i>
Bodů: 128	<i>0.417559</i>	<i>0.422539</i>	<i>0.425945</i>	<i>0.428655</i>	<i>0.430933</i>
Bodů: 256	<i>0.417752</i>	<i>0.422555</i>	<i>0.425899</i>	<i>0.428569</i>	<i>0.430847</i>
Bodů: 512	<i>0.417720</i>	<i>0.422574</i>	<i>0.425919</i>	<i>0.428590</i>	<i>0.430862</i>
Bodů: 1024	<i>0.417722</i>	<i>0.422570</i>	<i>0.425918</i>	<i>0.428587</i>	<i>0.430861</i>
Bodů: 2048	<i>0.417722</i>	<i>0.422570</i>	<i>0.425918</i>	<i>0.428587</i>	<i>0.430861</i>

Tabulka 3: Výsledky Rombergovy metody pro  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

Hladina:	0.6	0.7	0.8	0.9
Bodů: 32	<i>0.432753</i>	<i>0.434634</i>	<i>0.436359</i>	<i>0.437956</i>
Bodů: 64	<i>0.432822</i>	<i>0.434638</i>	<i>0.436334</i>	<i>0.437920</i>
Bodů: 128	<i>0.432939</i>	<i>0.434751</i>	<i>0.436408</i>	<i>0.437958</i>
Bodů: 256	<i>0.432859</i>	<i>0.434681</i>	<i>0.436367</i>	<i>0.437942</i>
Bodů: 512	<i>0.432871</i>	<i>0.434696</i>	<i>0.436376</i>	<i>0.437944</i>
Bodů: 1024	<i>0.432872</i>	<i>0.434694</i>	<i>0.436375</i>	<i>0.437944</i>
Bodů: 2048	<i>0.432872</i>	<i>0.434694</i>	<i>0.436375</i>	<i>0.437944</i>

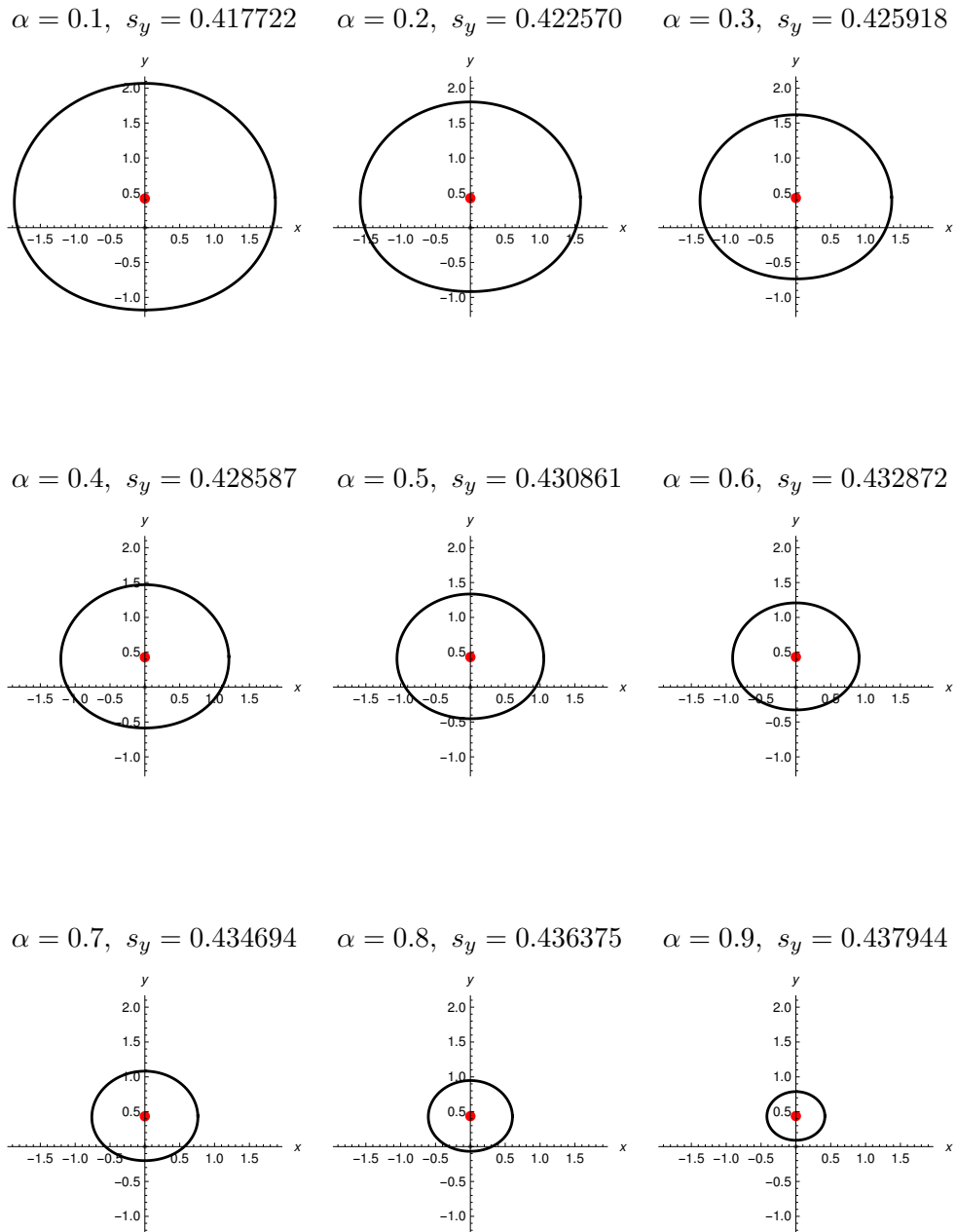
Tabulka 4: Výsledky Rombergovy metody pro  $\alpha \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$

## G.2 Vybrané hladiny a jejich Steinerovy body

Tato příloha obsahuje vizualizaci polohy Steinerových bodů na zvolených  $\alpha$ -hladinách normalizované fuzzy množiny  $(\chi_A * K_G)$  pro parametry konvolučního jádra

$$\mu = (0, 0), \Sigma = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Souřadnice  $s_x$  Steinerových bodů hladin byla vzhledem k symetrii (viz 6.2) zvolena nulová.



Obrázek 16: Body na  $\alpha$ -hladinách (černě) a příslušné odhady Steinerova bodu daných hladin (červeně)

### G.3 Odhady pomocí „horního“ a „spodního“ mnohoúhelníku

Následující výsledky byly nalezeny pro normalizovanou fuzzy množinu  $(\chi_A * K_G)$  s parametry jádra

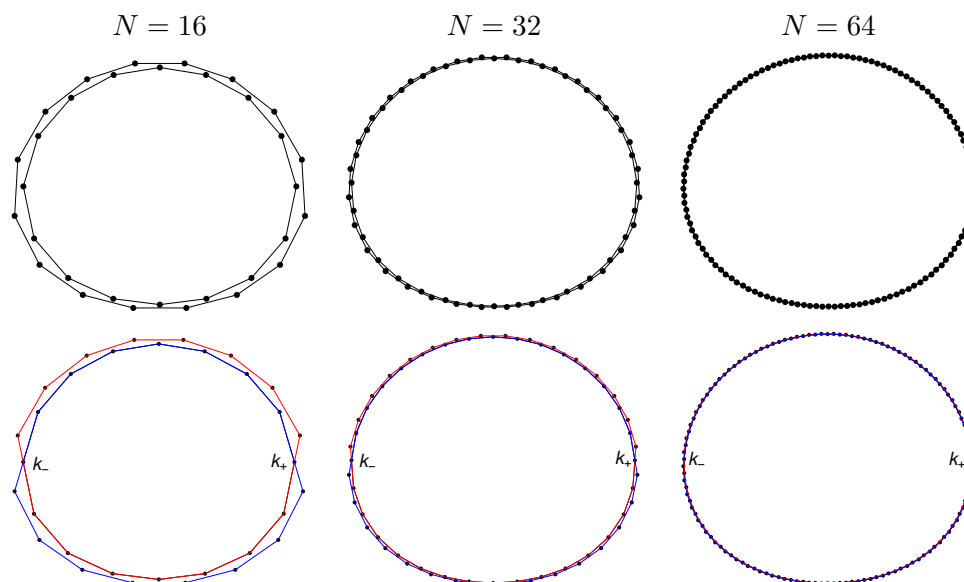
$$\mu = (0, 0), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pro jednotlivé řezy byl sestaven „horní“ a „spodní“ mnohoúhelník (viz sekce 5.4). Na rozdíl od případu konvoluce s jádrem kruhu bylo tentokrát pro dělení využito bodů  $k_+$  a  $k_-$  – nemusíme se bát znehodnocení horního odhadu při integraci, protože výsledné řezy jsou pro dané parametry jádra „pěkně zaoblené“, nevzniká tedy nežádoucí efekt popsáný v kapitole 5.4.

Vrcholy zmíněných mnohoúhelníků byly použity při odhadu hodnot opěrné funkce – po integraci dostaneme horní a spodní odhad souřadnice Steinerova bodu. Tyto odhady srovnáváme v obrázku 18 s našim odhadem, ve kterém bylo při aproximaci hodnot opěrné funkce využito bodů na  $\alpha$ -hladině dané fuzzy množiny.

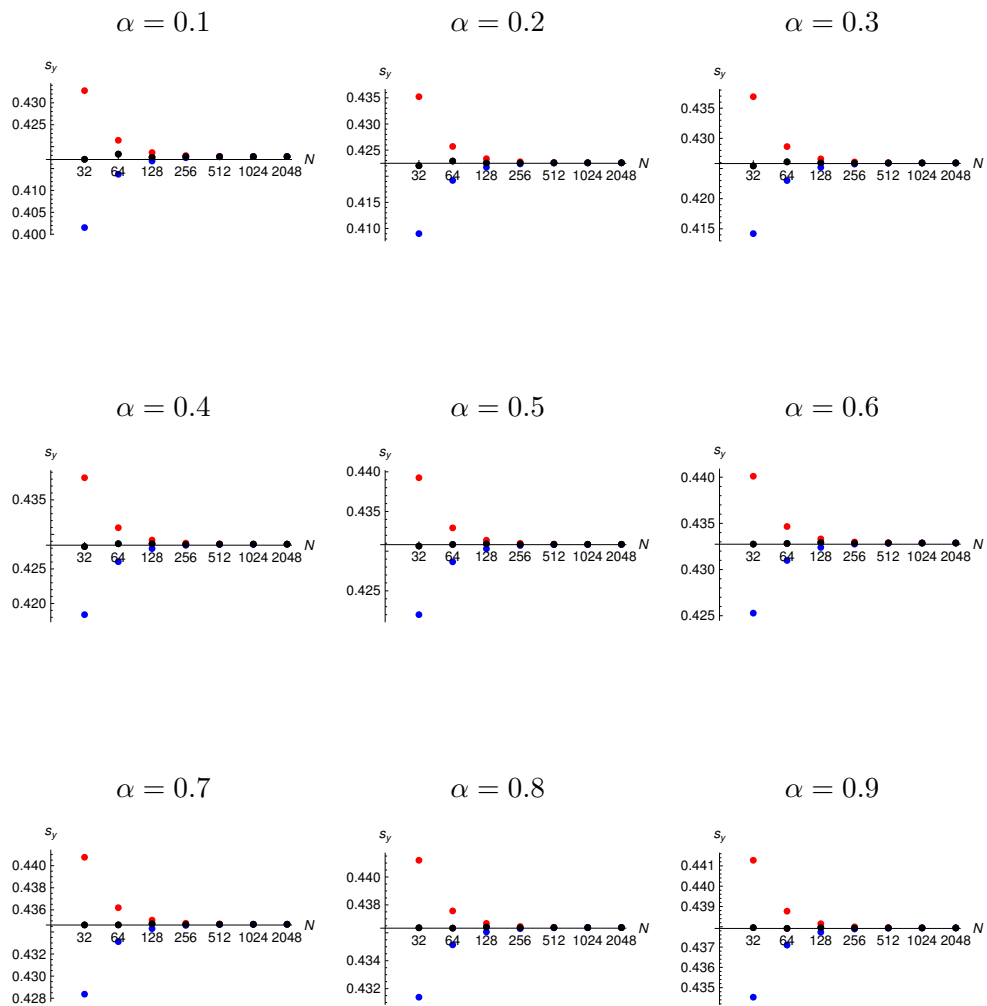
Z obrázku 18 je opět patrné (stejně jako v případě fuzzifikace pomocí konvoluce s jádrem kruhu), že pro rostoucí počet bodů  $N$  se horní, spodní i náš odhad přibližují (mnohoúhelník  $L$  se těsně přibližuje mnohoúhelníku  $M$ ).

Následuje ukázka řečených mnohoúhelníků. Černě jsou vyobrazeny mnohoúhelníky  $M$  a  $L$ . Vrcholy mnohoúhelníku  $M$  představují body na  $\alpha$ -hladině. Červeně a modře jsou vykresleny mnohoúhelníky použité pro horní a spodní odhad hodnot opěrné funkce.



Obrázek 17: Ukázky „horního“ (červeně) a „spodního“ (modře) mnohoúhelníku pro  $N \in \{16, 32, 64\}$  bodů na 0.1-hladině normalizované fuzzy množiny  $(\chi_A * K_G)$

Následuje tabulka odhadů.



Obrázek 18: Odhady  $y$ -ové souřadnice Steinerova bodu jednotlivých řezů – černě náš odhad (hodnoty opěrné funkce aproximovány pomocí bodů na  $\alpha$ -hladině), červeně odhad pomocí „horního“ mnohoúhelníku, modře odhad pomocí „spodního mnohoúhelníku“

## H Obsah CD

```
root
├── Steineruv_bod_a_jeho_fuzzy_zobecneni
│   ├── README.txt ..... Doprovné informace k CD
│   ├── IMAGES.nb ..... Generování vybraných obrázků
│   ├── NUMERIC-DISK.nb ..... Výpočty pro konvoluci s kruhovým jádrem
│   ├── NUMERIC-GAUSS.nb ..... Výpočty pro konvoluci s gaussovským jádrem
│   ├── NUMERIC-TEST.nb ..... Testy numerických integračních metod
│   └── BP_Benedikt_2016.pdf ..... Elektronická verze textu bakalářské práce
```