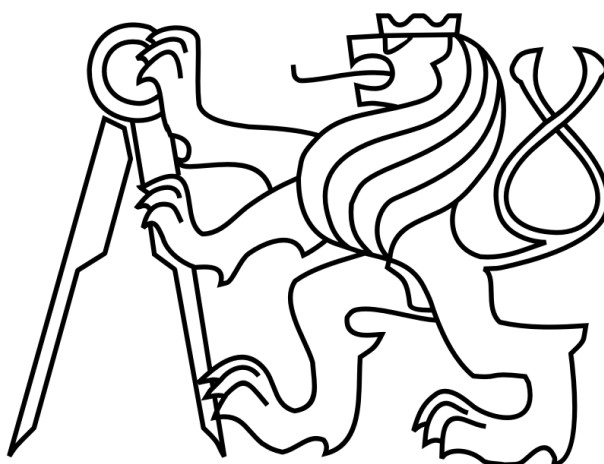


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



ANALÝZA NAPĚTÍ VE SPOJÍCH ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH
KONSTRUKCÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anotační list

Jméno autora:	Petr LINDUŠKA
Název BP:	Analýza napětí ve spojích rotačně symetrických konstrukcí.
Anglický název:	Stress analysis in joints of rotationally symmetrical structures.
Rok:	2015
Odbor studia:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Karel Vítek, CSc.
Konzultant:	Ing. Jan Andruš
Bibliografické údaje:	počet stran: 56 počet obrázků: 57 počet tabulek: 2 počet příloh: 0
Klíčová slova:	Deformace, tlak, rotační těleso, osově napětí, tečné napětí a radiální napětí.
Keywords:	Deformation, pressure, rotation solid, axial stress, tangential stress and radial stress.
Anotace:	Cílem této bakalářské práce bylo analyzovat chování napětí ve spojích vybraných rotačně symetrických konstrukcí. Numerická analýza byla provedena v programu SolidWorks. V tomto vývojovém prostředí byly vytvořeny také výpočtové modely konstrukcí nádob, desek nebo kotoučů. Modely byly podrobeny numerickým výpočtům. Aplikace klasických výpočtových modelů platí pouze v ideálním stavu konstrukcí. Pakliže dojde k narušení homogenity (například v přechodových oblastech), klasické výpočtové modely se dají uplatnit pouze na určité úseky rotačních těles.

Abstract:

The goal of this bachelor's theses was to analyze a behavior of stress in joints of rotationally symmetrical structures. Numeric analysis was made by SolidWorks software. Designs of vessels, discs or rotation discs were created also in SolidWorks. Models were put to the test of numeric experimentations. The application of computational models is valid only in an ideal structural condition of models. If any disturbance of homogeneity occurs (for example in the transition areas) computational models can be applied only to certain sections of rotating bodies.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem

„Analýza napětí ve spojích rotačně symetrických konstrukcí“

vypracoval samostatně, veškerou použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v příloženém seznamu literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze 12. 6. 2015

.....

Petr Linduška

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji především svému vedoucímu bakalářské práce, panu Ing. Karlu Vítkovi, za cenné rady, připomínky, ochotu a hlavně metodické vedení práce. Můj velký dík patří také mým kamarádům, Ing. Janu Andrušovi za spolupráci při získávání výstupů pro experimentální část této práce a Ing. Jindřichu Louthanovi za odbornou revizi práce.

Dále bych zde chtěl poděkovat, také mé přítelkyni Bc. Kateřině Šebestové za duševní a morální podporu během celého tříletého studia.

Obsah

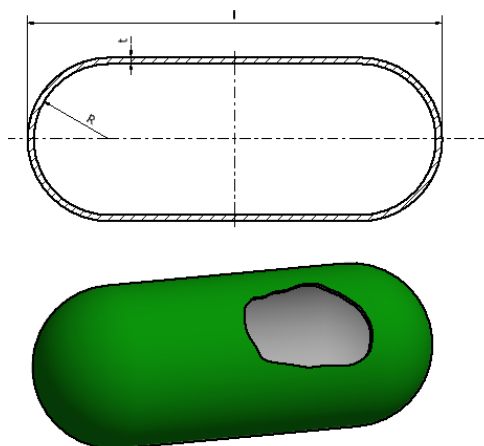
1.	REŠERŠE UŽITÉ TEORIE	- 1 -
1.1.	Tenkostěnné nádoby	- 1 -
1.1.1.	Napjatost tenkostěnné rotační skořepiny	- 3 -
1.2.	Silnostěnné tlakové nádoby	- 6 -
1.2.1.	Napětí v tlustostěnných nádobách	- 8 -
1.2.2.	Deformační podmínka	- 10 -
1.2.3.	Změna velikosti pláště nádoby	- 13 -
1.2.4.	Pevnostní podmínky	- 14 -
1.2.5.	Zvláštní případy tlustostěnných nádob	- 15 -
1.2.6.	Nalisované tlakové nádoby	- 16 -
1.3.1.	Výpočet napětí	- 17 -
1.3.	Rotující kotouče	- 20 -
1.4.1.	Napětí rotujících kotoučů	- 20 -
1.4.2.	Sestavení statické rovnice z elementu	- 21 -
1.4.3.	Deformace rotujícího kotouče	- 28 -
1.4.	Kruhové rotačně-symetrické, tenkostěnné desky	- 29 -
1.5.1.	Základní rovnice kruhových desek	- 30 -
1.5.2.	Průhyb kruhových desek	- 34 -
2.	NÁVRHVÝPOČTOVÝCH MODELŮ	- 35 -
3.	NUMERICKÉ VÝPOČTY (EXPERIMENTY)	- 38 -
3.1.	Tenkostěnná, uzavřená nádoba (SKOŘEPINA)	- 38 -
3.2.	Tlustostěnná nádoba	- 41 -
3.3.	Rotující kotouč	- 43 -
3.1.1.	Kotouč stálé tloušťky	- 44 -
3.1.2.	Kotouč rozdílné tloušťky	- 47 -
	Seznam použité literatury	- 50 -

1. REŠERŠE UŽITÉ TEORIE

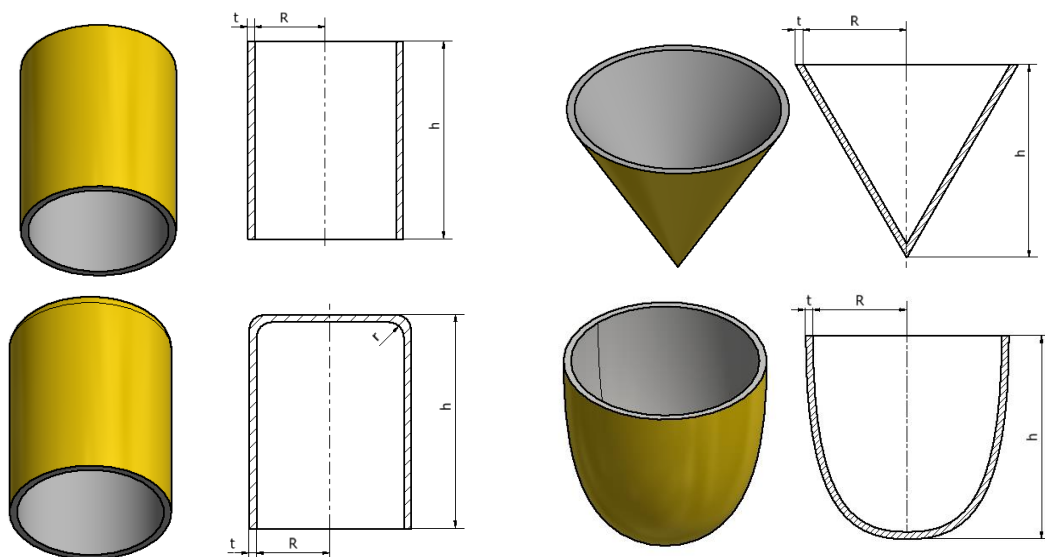
1.1. Tenkostěnné nádoby

Pod pojmem nádoba si nejlépe můžeme představit rotačně symetrické těleso. Často jsou tato tělesa, nazývají též jako rotačně symetrické skořepiny. Abychom mohli tvrdit, že se jedná o tenkostěnnou nádobu, budeme vycházet z toho, že vnitřní poloměr R nádoby je **10x** větší než je tloušťka nádoby t , čili tloušťka je pro vlastní výpočty zanedbatelná. Lze tedy definovat splnění vlastností tenkostěnné nádoby podmínkou $R/t \geq 10$. Pro vlastní výpočet bude dostačující střední poloměr $r_s = R$.

Takovéto těleso může být zaslepeno z obou stran dnem, a pak říkáme, že se jedná o uzavřenou nádobu (viz obr. 1). Naopak není-li těleso zaslepeno vůbec nebo jen z jedné strany, pak říkáme, že se jedná o nádobu otevřenou (viz obr. 2) [1].

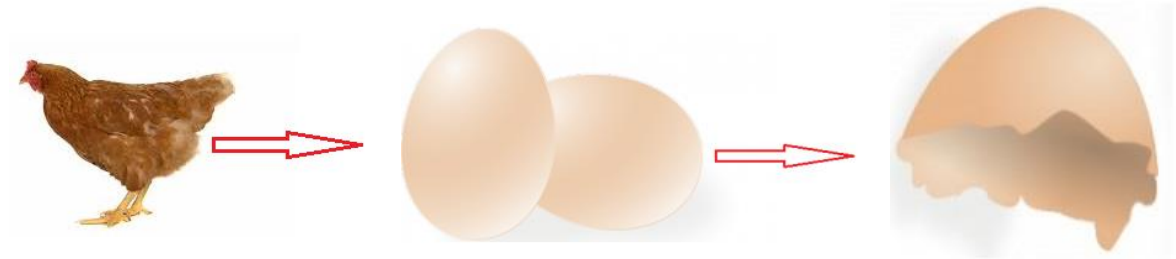


Obrázek 1: Příklad z obou stran uzavřené nádoby [1].



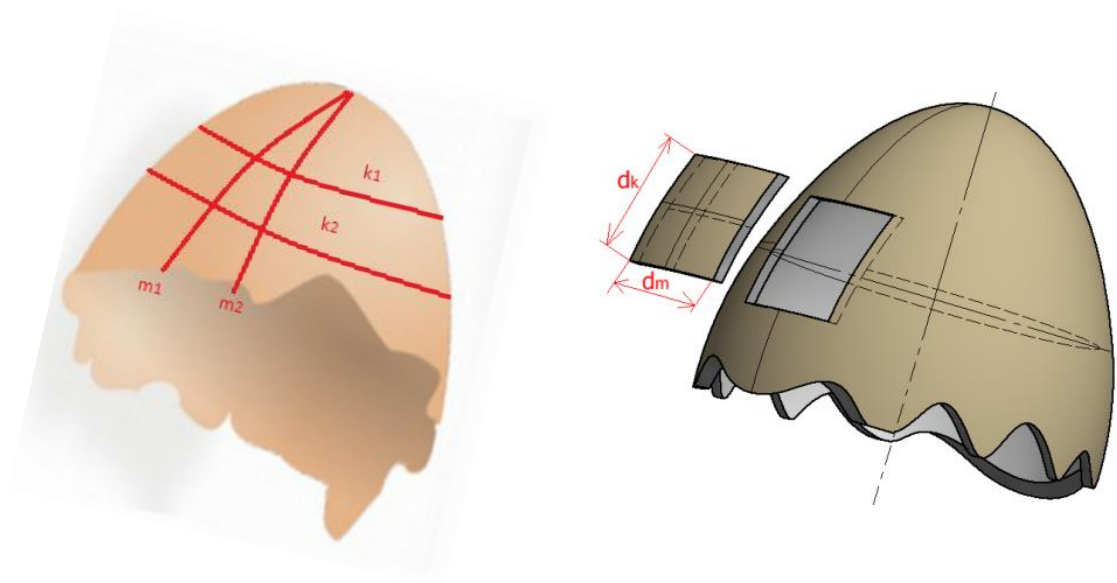
Obrázek 2: Příkladů otevřených nádob [1].

Budeme-li se zabývat výpočty rotačních **SKOŘEPIN**, je potřeba si nejprve určit hlavní poloměry křivosti rotační osově-symetrické plochy. Pro náš příklad si za typickou skořepinu zvolíme vajíčko, resp. jeho skořápku (viz obr. 3) [1].



Obrázek 3: Skořápka vajíčka jako SKOŘEPINA.

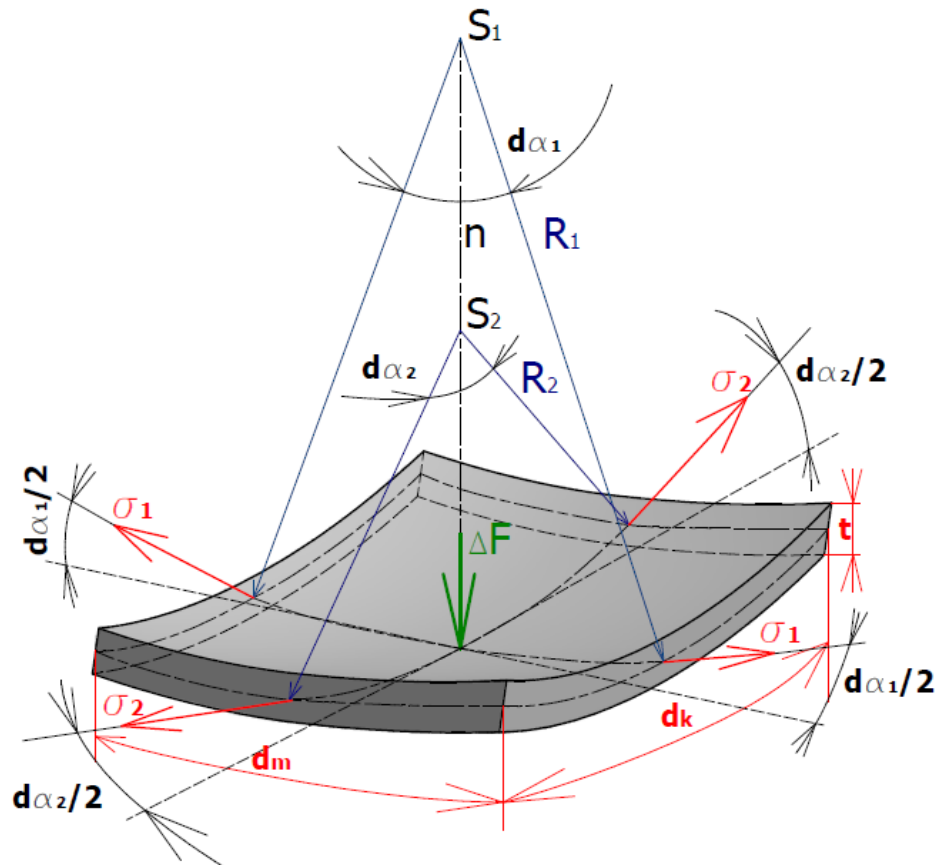
Plocha níže zobrazené skořápky, tedy naší **SKOŘEPINY**, je složena z rotačních křivek kružnic k a z meridiánů m , (viz obr. 4). Plocha, která vznikne ohraničením kružnicemi k_1, k_2 a meridiány m_1, m_2 , pak bude hladká spojitá plocha [1].



Obrázek 4: Vlevo rotační křivky, kružnice a meridiány. Vpravo výřez elementu o rozměrech d_k a d_m [1]

1.1.1. Napjatost tenkostěnné rotační skořepiny

K tomu, abychom mohli určit napjatost ve stěnách skořepiny, je potřeba si vytknout element plochy dA tvořený hranicí rotačních křivek o rozměrech d_k a d_m , (viz obr. 5) [1].



Obrázek 5: Vytknutý element ze skořepiny plochy dA o rozměrech d_k a d_m [1].

Ve stěnách elementu působí dvě dominantní hlavní napětí, a to $\sigma_m = \sigma_1$ meridiánové, $\sigma_k = \sigma_2$ rovnoběžné, obě ve směru tečen příslušných kružnic (viz obr. 4). Současně na element působí tlakové zatížení silou ΔF . Tím je celý element udržován v rovnováze [1].

Rovnice rovnováhy elementu:

Pro sestavení rovnice rovnováhy budeme vycházet, z vytknutého elementu (viz obr. 5), kde jsou současně vyznačeny, všechny silové účinky, které na element působí [1].

Charakteristické rozměry elementu:

$$d_m = R_2 \cdot d_{\alpha 2},$$

$$d_k = R_1 \cdot d_{\alpha 1}.$$

Tedy plocha elementu je $\rightarrow dA = d_m \cdot d_k$.

Velikosti úhlů d_{α_1} a d_{α_2} jsou zanedbatelně malé. Pro malé úhly α_1 a α_2 uvažujeme:

$$\sin\left(\frac{d_{\alpha_1}}{2}\right) \approx \frac{d_{\alpha_1}}{2}; \quad \sin\left(\frac{d_{\alpha_2}}{2}\right) \approx \frac{d_{\alpha_2}}{2}.$$

Tlaková síla ΔF :

$$\Delta F = \Delta p \cdot dA = (p_1 - p_2) \cdot d_m \cdot d_k = p_1 \cdot d_m \cdot d_k - p_2 \cdot d_m \cdot d_k,$$

$$\Delta F = p_1 \cdot R_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot R_1 \cdot d_{\alpha_1} - p_2 \cdot R_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot R_1 \cdot d_{\alpha_1}.$$

Kde tlak p_1 je vnitřní přetlak, který nám působí na vnitřní stranu nádoby a tlak p_2 je vnější přetlak, který působí z vnějšku na stěnu nádoby [1].

Statická rovnice ve směru normály n :

$$2 \cdot \sigma_1 \cdot \sin\left(\frac{d_{\alpha_1}}{2}\right) \cdot d_m \cdot t + 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sin\left(\frac{d_{\alpha_2}}{2}\right) \cdot d_k \cdot t - \Delta F = 0.$$

Úprava statické rovnice do konečného tvaru:

$$2 \cdot \sigma_1 \cdot \frac{d_{\alpha_1}}{2} \cdot R_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot t + 2 \cdot \sigma_2 \cdot \frac{d_{\alpha_2}}{2} \cdot R_1 \cdot d_{\alpha_1} \cdot t = \Delta F,$$

$$\sigma_1 \cdot d_{\alpha_1} \cdot R_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot t + \sigma_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot R_1 \cdot d_{\alpha_1} \cdot t = R_2 \cdot d_{\alpha_2} \cdot R_1 \cdot d_{\alpha_1} \cdot (p_1 - p_2),$$

$$t \cdot \left(\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2}\right) = (p_1 - p_2).$$

Výsledný vztah:

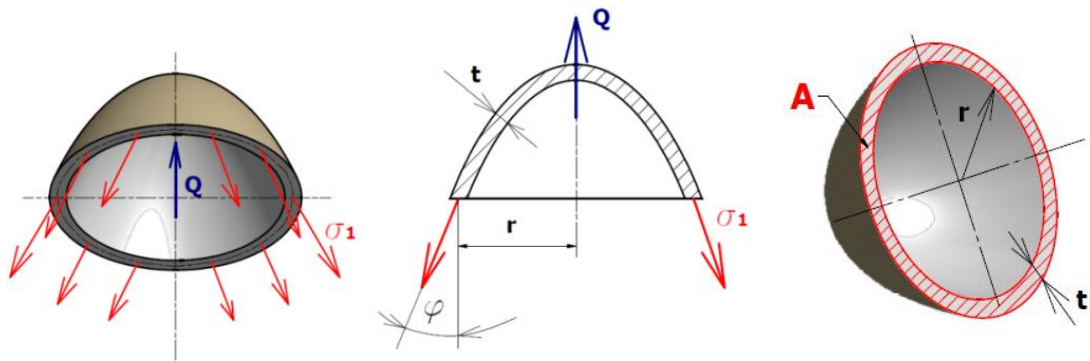
$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{(p_1 - p_2)}{t} \rightarrow \text{podmínky } R_1 \neq 0; R_2 \neq 0; t \neq 0.$$

Tímto jsme získali vztah/rovnici, která se nazývá **Laplaceova rovnice**.

Rovnice má, ale dvě neznámé a těmi jsou právě ona hlavní napětí σ_1 a σ_2 . To znamená, že nám jedna rovnice k určení obou hlavních napětí stačit nebude [1].

Proto je potřeba použít druhou z podmínek rovnováhy [1].

Hledanou rovnici získáme z horní nebo dolní části oddělené skořepiny (viz obr. 6). Kde na jednu část skořepiny působí jedno z hlavních napětí σ_1 , a ve směru meridiánu, současně působí vnější síla Q , jenž je výslednou silou. V ní jsou zahrnuty jednak vnitřní tlakové účinky, které působí na stěnu skořepiny, tíha vlastní skořepiny a tlakové síly působící na plochu A skořepiny [1].



Obrázek 6: Horní část skořepiny [1].

Rovnováha elementu horní části skořepiny [1]:

$$Q - \sigma_1 \cdot A \cdot \cos(\varphi) = 0,$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \rightarrow (\text{viz obr. 6}),$$

$$Q - \sigma_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot \cos(\varphi) = 0.$$

Tedy dostáváme rovnici pro určení prvního hlavního napětí [1]:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot \cos(\varphi)}.$$

1.2. Silnostěnné tlakové nádoby

Silnostěnné nádoby, nebo také válce s tlustou stěnou, takto obvykle nazýváme součásti strojů a zařízení, které jsou svým tvarem a charakterem namáhání shodné s válcovými tělesy. Mohou to být například různá potrubí, kotlová tělesa, ale i tlakové nádoby pro jadernou energetiku, viz obrázky níže [1].



Obrázek 7: Kotlové těleso pro elektrárnu Tamuin Mexico [3].

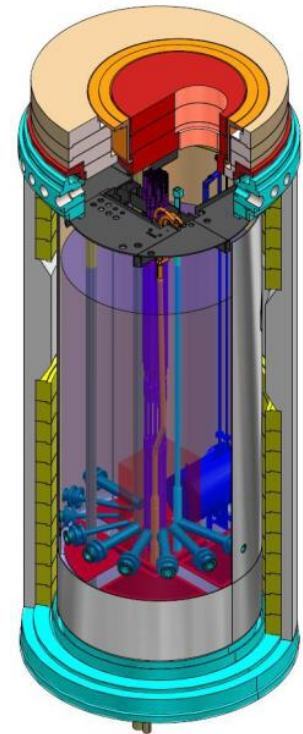


Obrázek 9: Spojovací potrubí - nadkritické (indukční ohyb) [4].

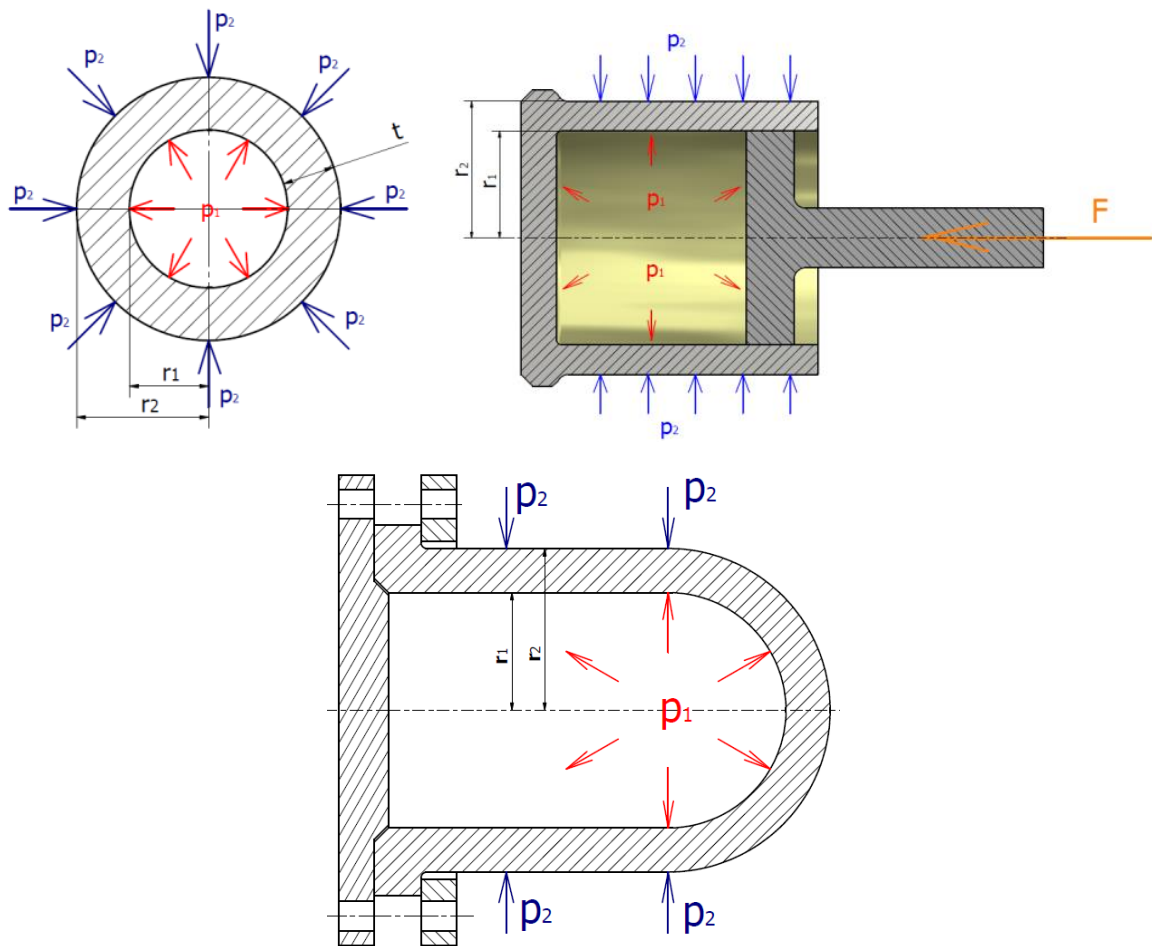
Z obrázků je patrné, že tyto nádoby mohou být rozděleny opět do dvou typů a to:

nádoby uzavřené a nádoby otevřené.

Tato tělesa mohou být vystavena namáhání od vnitřního přtlaku p_1 nebo vnějšího přtlaku p_2 (viz obr. 10) [2].



Obrázek 8: Schéma reaktoru LVR-15 v Řeži [5].



Obrázek 10: Nahoře příklady otevřených nádob a dole příklad uzavřené nádoby [2].

Nádoby, které jsou, znázorněny výše, se liší jednak vlastní konstrukcí, ale také velikostí osového napětí σ_o ve **válcové** stěně. U nádob otevřených, je $\sigma_o = 0$, protože zde většinou působí ve směru osy pouze vnější tlak p_2 . Kdežto u tlakových nádob uzavřených vznikají osová napětí vlivem působící síly F na dno nádoby, která je definovaná, jako

$$F = \Delta p \cdot S.$$

Tedy:

$$F = \Delta p \cdot S = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2,$$

$$F = \pi \cdot (p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2).$$

Osové napětí vyvolané od síly F potom vyjádříme takto:

$$\sigma_o = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2}{\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Jak bude vypadat vztah pro σ_o , bude-li jeden z tlaků $p_1 = 0$ nebo $p_2 = 0$?

Pro $p_1 = 0$ působí vnější přetlak:

$$\sigma_o = \frac{-p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Pro $p_2 = 0$ působí vnitřní přetlak:

$$\sigma_o = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Dále si odvodíme průběhy napětí σ_r a σ_t ve válcové stěně nádoby a její deformaci na základě těchto předpokladů:

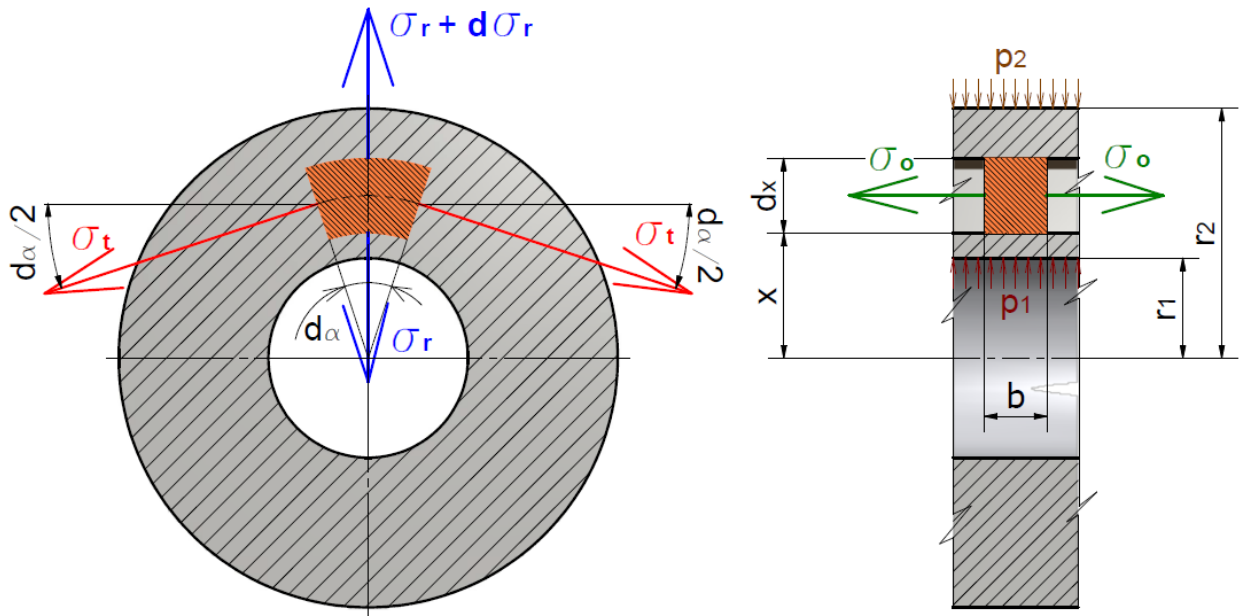
- Musí platit Hookův zákon. To znamená, že napětí v žádném bodě nádoby nepřekročí velikost meze úměrnosti [2]. Jedná se tedy o elastické namáhání.
- Nádoba je rotačně symetrická stejně tak, jako její napětí a deformace. To znamená, že jsou funkcí pouze jedné proměnné – x , tedy v našem případě poloměru r [2].
- Všechny odvozené vztahy platí vždy v dostatečné vzdálenosti ode dna nádob. Případné vlastní zakřivení stěn nádob není bráno do úvahy. Objekt je možné si představit jako dlouhý dutý válec [2].

1.2.1. Napětí v tlustostěnných nádobách

Mějme například *otevřenou* válcovou tlustostěnnou nádobu (viz obrázek 11), v jejímž plášti vytkneme – „vyřízneme“ element tak, že po jeho deformaci jsou jednotlivé stěny navzájem kolmé. Znamená to tedy, že ve stěnách, takto ideálně vytknutého elementu, jsou všechna smyková napětí τ nulová [2].

Ve stěnách elementu vznikají tři hlavní napětí. Osové napětí $\sigma_o = 0$, které je v souběžném směru, spolu s osou, válcové části nádoby. Dále napětí radiální σ_r vznikající ve směru poloměru nádoby a třetím hlavním napětím je napětí tečné σ_t , které působí v tečném směru k obvodovým kružnicím [2].

Dříve již bylo řečeno, že osové napětí u otevřených nádob je rovno tlaku, který působí vně nádoby. Z pravidla, je to tlak atmosférický, jehož velikost se dá, oproti vnitřnímu tlaku, většinou zanedbat. Pak tedy můžeme říct, že pro otevřené nádoby platí $\sigma_o = 0$. Z čehož plyne, že rovinná napjatost u otevřených nádob je daná dvěma hlavními napětími a to radiálním σ_r a tečným σ_t [2].



Obrázek 11: Element v plášti tlustostěnné nádoby a působící napětí [2].

Jelikož pro element musí platit rovnovážný stav, lze psát jedinou statickou rovnici, respektive složkovou rovnici, a to v radiálním směru elementu [2].

Taková rovnice bude mít následující tvar.

Statická rovnice elementu v radiálním směru:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot b - \sigma_r \cdot x \cdot d\alpha \cdot b - 2\sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) = 0.$$

Vzhledem ke skutečnosti, že úhel alfa je malý (zanedbatelný), můžeme stejně jako u tenkostěnných nádob tvrdit toto:

$$\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}.$$

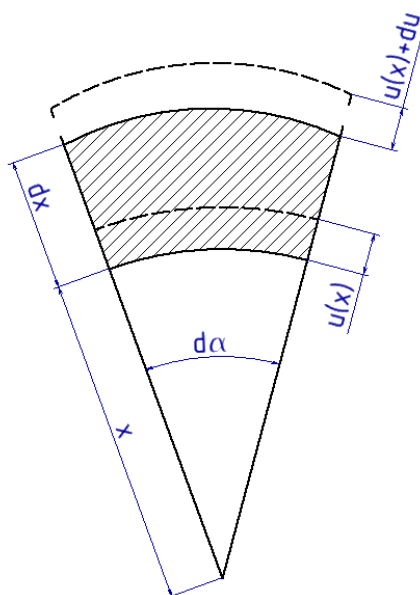
Víme, že nekonečně malé veličiny vyšších řádů lze zanedbat. Potom, po úpravách bude mít statická rovnice následující podobu:

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = 0.$$

Je vidět, že se jedná o diferenciální rovnici, která obsahuje dvě neznámá napětí, čili úloha je vnitřně staticky neurčitá. Bude tedy nutné zavést deformační podmínku [2].

1.2.2. Deformační podmínka

Deformační podmínku získáme následovně. Na *obr. 12* je znázorněn element před deformací a čárkovaně po deformaci. Posuv v radiálním směru elementu je funkcí nezávislé proměnné x , $u = u(x)$. Veličina u , vyjadřuje přírůstek poloměru x , tedy posun na poloměru x [2].



Obrázek 12: Deformace elementu [2].

Pro poměrné prodloužení na poloměru oblouku x , v tečném směru, platí [2]:

$$\varepsilon_t = \frac{(x + u) \cdot d\alpha - x \cdot d\alpha}{x \cdot d\alpha} = \frac{u(x)}{x}.$$

Vztah pro poměrné prodloužení na poloměru x , v radiálním směru, vyjádříme takto [2]:

$$\varepsilon_r = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u'(x).$$

Vyjádření poměrných prodloužení pomocí napětí rozšířeným Hookovým zákonem [2]:

$$\varepsilon_t = \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r + \sigma_o),$$

$$\varepsilon_r = u'(x) = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot \sigma_t + \sigma_o).$$

Naopak – vyjádření napětí z poměrných prodloužení a následně ze změny poloměru $u(x)$ [2]:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot [\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r] = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \mu \cdot u'(x) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot [\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t] = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right].$$

Po dosazení za napětí, pomocí radiálního posuvu $u(x)$, bude mít **rovnice rovnováhy** tvar Eulerovy diferenciální rovnice II. řádu (pro jednu proměnnou) [2]:

Eulerovy diferenciální rovnice II. řádu:

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = 0 \rightarrow x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0.$$

Odhad řešení této homogenní rovnice [2]:

Posuv lze vyjádřit $u(x) = x^n$.

I. Derivace posuvu: $u' = n \cdot x^{n-1}$.

II. Derivace posuvu: $u'' = n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}$.

Derivace po dosazení do rovnice rovnováhy [2]:

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0 \rightarrow x^{n-1}[n \cdot (n - 1) + n - 1] = 0.$$

Potom řešení posuvu $u(x)$, neboli změna poloměru x [2]:

$$u = C_1 \cdot x - C_2/x.$$

Dosadíme zpět do Hookova zákona, kde jsme vyjádřili napětí a rovnice pak budou mít tvar [2]:

$$\sigma_t = K + \frac{C}{x^2},$$

$$\sigma_r = K - \frac{C}{x^2}.$$

Konstanty K a C získáme z okrajových podmínek pro σ_r , které jsou $x = r_1$ a $x = r_2$.

Protože $\sigma_r(r_1) = -p_1$ a $\sigma_r(r_2) = -p_2$ dosazením dostaneme [2]:

$$-p_1 = K - \frac{C}{r_1^2}, \quad -p_2 = K - \frac{C}{r_2^2}.$$

Z čehož pak dostáváme vztahy pro konstantu K a C [2]:

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Je vidět, že konstanta $K = \sigma_o$, které jsme si vyjádřili již dříve.

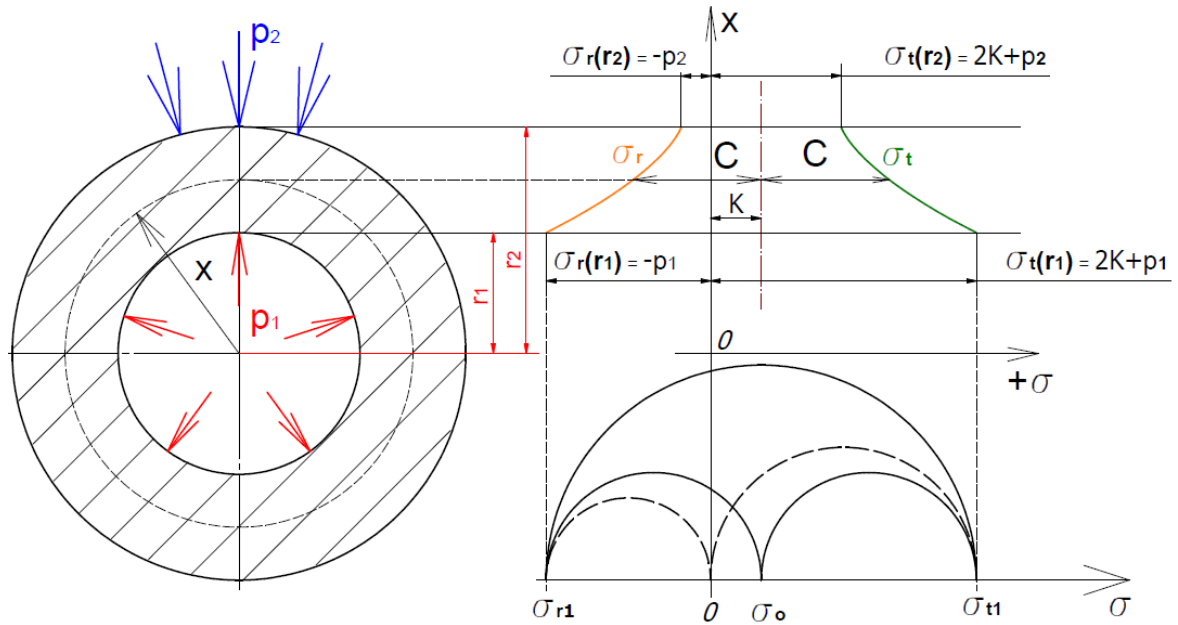
Výsledné vztahy pro hlavní napětí tedy jsou [2]:

$$\sigma_t = K + \frac{C}{x^2} = \sigma_o + \frac{C}{x^2},$$

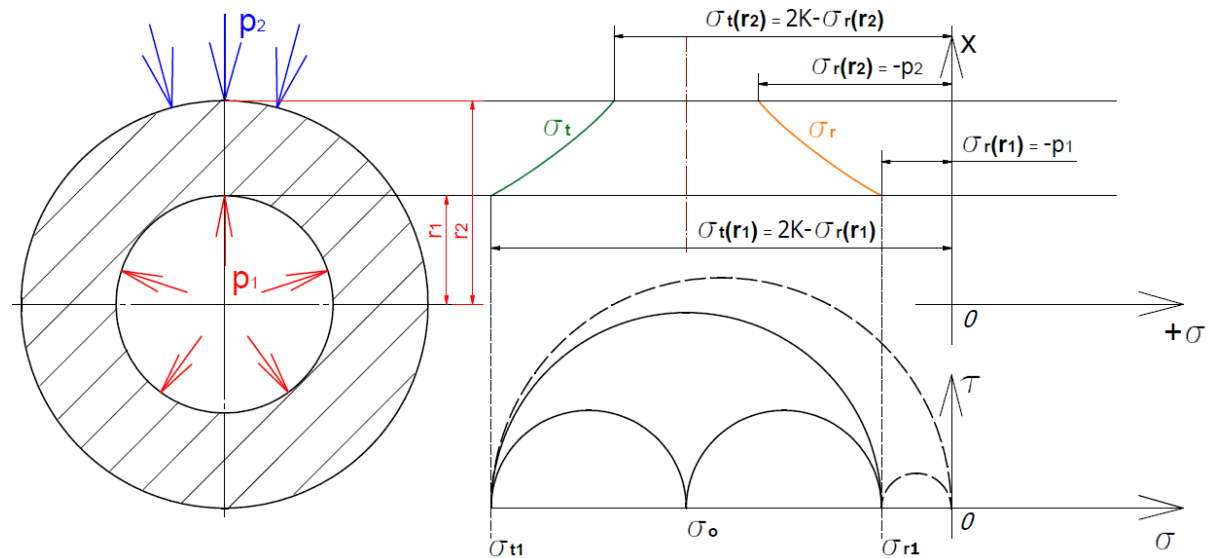
$$\sigma_r = K - \frac{C}{x^2} = \sigma_o - \frac{C}{x^2},$$

$$\sigma_o = K.$$

Grafické znázornění průběhů napětí [2]:



Obrázek 13: Grafické znázornění průběhu napětí, když $p_1 > p_2$ [2].

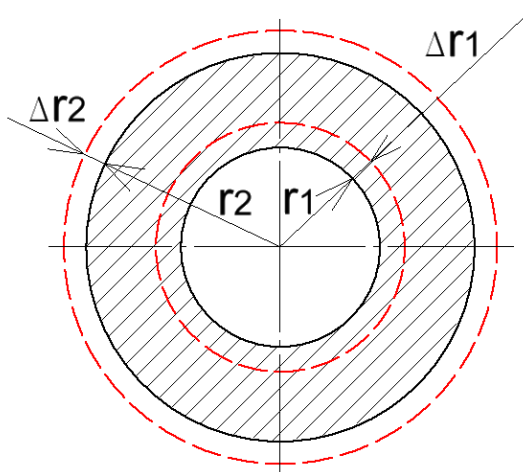


Obrázek 14: Grafické znázornění průběhu napětí, když $p_2 > p_1$ [2].

Je vidět, že vztahy, které jsme si odvodili pro výpočet σ_t a σ_r , jsou zároveň rovnice polytrop [2].

1.2.3. Změna velikosti pláště nádoby

Působí-li na nádobu vnitřní přetlak p_1 nebo vnější přetlak p_2 , dochází u nádoby ke změně jejího poloměru. Vnitřní poloměr pláště nádoby se změní o hodnotu Δr_1 a vnější poloměr pláště o Δr_2 (viz obr. 15) [2].



Obrázek 15: Přetvoření pláště nádoby vlivem namáhání [2].

Plnou čarou je vyznačen stav před deformací a čárkovanou červeně je vyznačen stav po deformaci. Pro určení těchto deformací použijeme vztah pro poměrné prodloužení na poloměru oblouku x v tečném směru, čili ε_t [2].

Platí $x = r_1$ a $u(r_1) = \Delta r_1$, potom opět s použitím rozšířeného Hookova zákona dostaneme vztah:

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{u(x)}{x} = \frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{t_1} - \mu \cdot (\sigma_{r_1} + \sigma_o)].$$

Ze vztahu potom plyne:

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E} \cdot [\sigma_{t_1} - \mu \cdot (-p_1 + \sigma_o)].$$

A zcela analogicky, potom:

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot [\sigma_{t_2} - \mu \cdot (-p_2 + \sigma_o)].$$

Tyto vztahy platí současně pro otevřenou nádobu, ale také pro nádobu uzavřenou. Za osové napětí dosazujeme reálnou hodnotu, tedy hodnotu, která je dána vztahem pro výpočet σ_o . U nádob otevřených je opět $\sigma_o = 0$ [2].

1.2.4. Pevnostní podmínky

U nádob je obecně nejvíce namáhaná vnitřní část povrchu pláště. Proto bude vztah pro pevnostní podmínku vyjádřen právě pro vnitřní povrch. Také musíme zohlednit, zda je plášť namáhán vnitřním přetlakem, tedy $p_1 > p_2$ nebo vnějším přetlakem, tedy $p_1 < p_2$ [2].

Pro oba případy budeme vycházet ze vztahu dle hypotézy τ_{max} , která je též známá pod názvem hypotéza TRESCA [2].

Mějme například tlustostěnnou uzavřenou nádobu pro případ vnitřního přetlaku $p_1 > p_2$ [2].

Vztah pro výpočet redukovaného napětí:

$$\sigma_{red\tau_{max}} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} \leq \sigma_D.$$

Do výše uvedeného vztahu pro $\sigma_{red\tau_{max}}$ dosadíme za tečné a radiální napětí [2]:

$$\sigma_{t_1} = 2K + p_1; \sigma_{r_1} = -p_1 \text{ (viz obr. 13),}$$

pak

$$2K + p_1 - (-p_1) = 2K + 2p_1 \leq \sigma_D.$$

Dosadíme-li dále ještě za konstantu K , bude konečný vztah po úpravách vypadat následovně [2]:

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Tento vztah platí pro případ, že $p_1 > p_2$ – VNITŘNÍ PŘETLAK.

U případu vnějšního přetlaku se $\sigma_{red\tau_{max}}$ spočítá ze vztahu [2]:

$$\sigma_{red\tau_{max}} = \sigma_{r_1} - \sigma_{t_1} \leq \sigma_D$$

a obdobně jako u předchozího případu po úpravách dostáváme

$$p_2 - p_1 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right],$$

kde tento vztah platí pro případ, že $p_2 > p_1$ – VNĚJŠÍ PŘETLAK[2].

Pro otevřenou nádobu platí vztah pro výpočet $\sigma_{red\tau_{max}}$ [2]:

$$\sigma_{red\tau_{max}} = 0 - \sigma_{t_1} \leq \sigma_D,$$

po dosazení za σ_{t_1} ,

$$0 - 2K + p_1 \leq \sigma_D,$$

$$p_1 \leq \sigma_D + 2K.$$

1.2.5. Zvláštní případy tlustostěnných nádob

Takovým případem může být například nádoba bez otvoru. Čili obyčejný hřídel o průměru $d = 2 \cdot r_2$. Zde nám bude působit na „nádobu“ pouze vnější přetlak p_2 a ostatní veličiny jako jsou p_1 a r_1 budou nulové [2].

Pro $r_1 = 0$ a $p_1 = 0$ budou konstanty K a C , mít následující tvar [2]:

$$K = \frac{0 \cdot 0 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0} = -p_2 \Rightarrow K = -p_2,$$

$$C = (0 - p_2) \cdot \frac{0 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0} = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Po dosazení do základních vztahů:

$$\sigma_{t(x)} = K + \frac{C}{x^2} = -p_2,$$

$$\sigma_{r(x)} = K - \frac{C}{x^2} = -p_2,$$

neboli

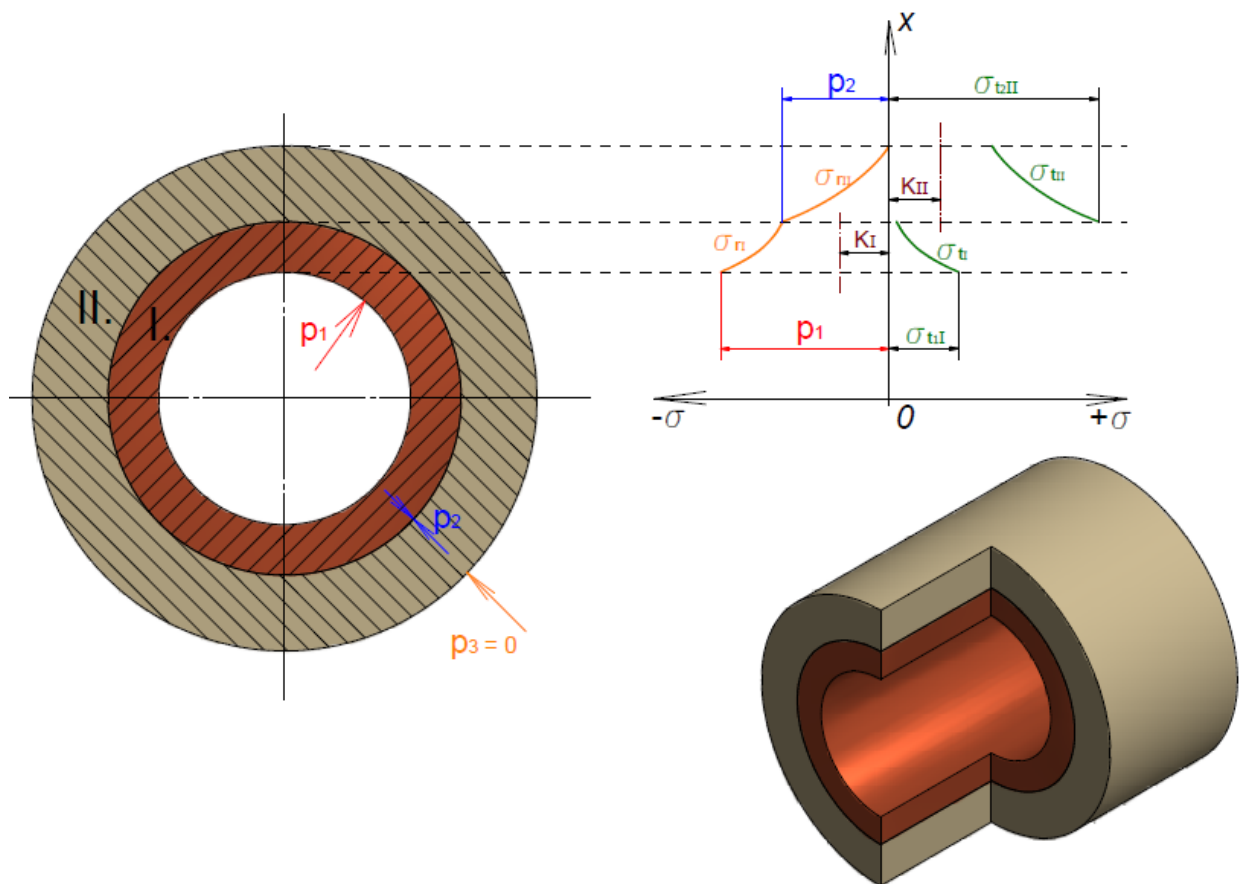
$\sigma_{t(x)} = \sigma_{r(x)} = -p_2$, v celém průřezu nádoby je pak napjatost konstantní [2].

1.2.6. Nalisované tlakové nádoby

Jak již z předchozích teorií o tlakových nádobách víme, je zřejmé, že plášť silnostěnné nádoby je namáhán zcela nerovnoměrně [2].

Je to dáno zejména tím, že vnitřní vlákna jsou namáhána daleko více než vlákna vnější. Optimální by bylo, kdyby se napětí v nádobě rozdělilo rovnoměrně, tím by se pevnost celé konstrukce značně zvýšila. Toho lze docílit tak, že plášť nádoby zkonstruujeme ze dvou, či více na sebe nalisovaných nádob [2].

Jak takový příklad konstrukce vypadá a jaký je průběh napětí u nalisované nádoby, která se skládá ze dvou nalisovaných trub, je znázorněno na *obr. 16* [2].



Obrázek 16: Nalisovaná nádoba ze dvou trub s vnitřním přetlakem p_1 a průběhy hlavních napětí [2].

1.3.1. Výpočet napětí

Mějme například, zadáno dovolené napětí σ_D , rozměry r_1, r_2 a r_3 a vnější tlak p_3 , ten bývá obvykle roven nule. Naším úkolem bude určit dovolený vnitřní tlak p_1 , průběhy hlavních napětí σ_r a σ_t a potřebný přesah Δr_2 . Pro tento příklad, vyjdeme z *obrázku 16* [2].

Jako první budeme řešit vnější nádobu II. a pevnostní podmínky jejího vnitřního okraje.

Budeme-li uvažovat hypotézu τ_{max} , pak bude platit [2]:

$$\sigma_{t_2}^{II} + p_2 = \sigma_D \Rightarrow \sigma_{t_2}^{II} = 2K^{II} + p_2,$$

$$K^{II} = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = (\sigma_o)^{II}.$$

Z těchto vztahů lze již snadno vypočítat K^{II} , $\sigma_{t_2}^{II}$ a tlak p_2 a můžeme nakreslit průběhy napětí σ_t^{II} a σ_r^{II} [2].

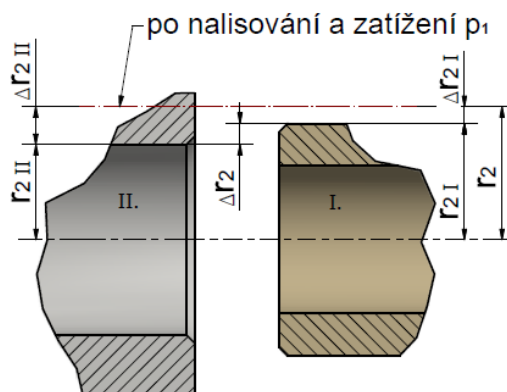
Na vnitřní nádobu I. bude tedy působit tlak p_2 a pro nás neznámým tlakem bude tlak p_1 . Zcela analogicky pak bude platit [2]:

$$\sigma_{t_1}^I + p_1 = \sigma_D \Rightarrow \sigma_{t_1}^I = 2K^I + p_1,$$

$$K^I = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (\sigma_o)^I.$$

Stejným způsobem opět vypočteme K^I , $\sigma_{t_1}^I$ a tlak p_1 a můžeme nakreslit průběhy napětí σ_t^I a σ_r^I .

Nyní nám ještě zbývá vyjádřit vztah pro přesah Δr_2 , který si postupně odvodíme. Víme, že se bude jednat o přesah na poloměru r_2 a určíme ho tedy z jeho deformace. K tomu nám pomůže *obrázek 17*, kde jsou vidět „nádobý“ před nalisováním [2].



Obrázek 17: Obě nádoby před nalisováním [2].

Z obrázku 17 je patrné, že přesah Δr_2 lze vyjádřit takto:

$$\Delta r_2 = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I.$$

Rovnici podělíme poloměrem r_2 . Pro něj platí, že: $r_2 \approx r_2^I \approx r_2^{II}$ [2].

Potom tedy:

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2}.$$

Z kapitoly o deformacích pláště tlustostěnné nádoby víme, že větší deformace vznikají na vnitřním poloměru a platí [2]:

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{\Delta r_1}{r_1}.$$

U nalisovaných nádob bude platit, že [2]:

$$\varepsilon_{t_2}^{II} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} \text{ a } \varepsilon_{t_2}^I = \frac{\Delta r_2^I}{r_2}.$$

Úpravou rovnice získáme tvar:

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \varepsilon_{t_2}^{II} - \varepsilon_{t_2}^I.$$

Dosadíme-li za poměrná prodloužení

$$\varepsilon_{t_2}^{II} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{t_2}^{II} + \mu \cdot p_2] \text{ a za } \varepsilon_{t_2}^I = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{t_2}^I + \mu \cdot p_2],$$

dostaneme

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot [\sigma_{t_2}^{II} - \sigma_{t_2}^I][2].$$

Pokud ještě dosadíme za $\sigma_{t_2}^{II}$ a $\sigma_{t_2}^I$:

$$\sigma_{t_2}^{II} = 2K^{II} + p_2 \text{ a } \sigma_{t_2}^I = 2K^I + p_2,$$

dostaneme

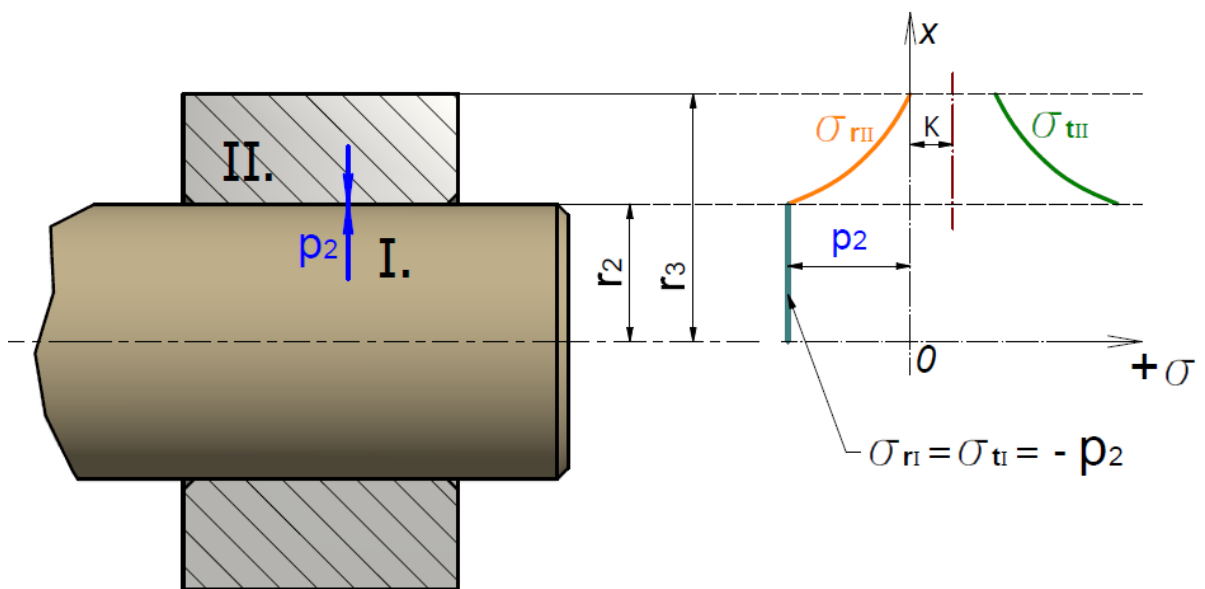
$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot [(2K^{II} + p_2) - (2K^I + p_2)][2].$$

Výsledný přesah lze pak vyjádřit takto [2]:

$$\Delta r_2 = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot (K^{II} - K^I).$$

Teorii nalisovaných nádob lze uplatnit například při řešení nalisovaného náboje na hřídeli, čili uložení s přesahem [2].

V tomto případě nádoba I. bude nádoba bez otvoru neboli hřídel (viz zvláštní případy tlustostěnných nádob) a nádoba II. bude náboj, jako otevřená tlustostěnná nádoba. Takový případ máme na *obrázku18* [2].



Obrázek 18: Plný hřídel s nalisovaným nábojem současně s průběhy napětí [2].

Jak již bylo uvedeno, obě hlavní napětí na hřídeli jsou konstantní $\sigma_t^I = \sigma_t^{II} = -p_2$.

Podle vztahu pro přesah bude platit vztah [2]:

$$\Delta r_2 = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot (K^{II} - K^I) \rightarrow C = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - (-p_2) \right).$$

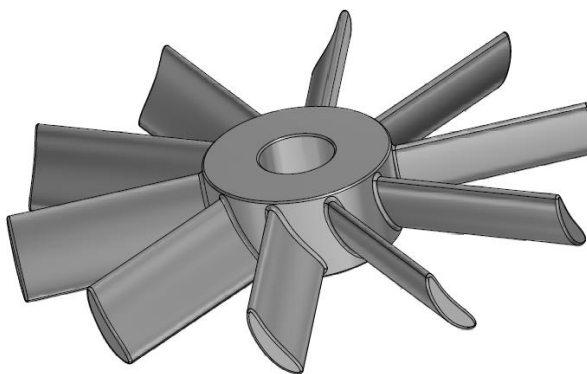
Z rovnice lze vyjádřit tlak p_2 jako funkce přesahu Δr_2

$$p_2 = \frac{E \cdot \Delta r_2}{2 \cdot r_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] [2].$$

1.3. Rotující kotouče

Za rotující kotouč považujeme těleso kruhového nebo mezi-kruhového tvaru, které se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí ω . Takto rotující kotouč je proto zatížen po obvodu spojitě rozloženými odstředivými silami a případně silami na vnitřním obvodě r_1 nebo vnějším obvodě r_2 , které vyvolají napětí σ_{r_1} nebo σ_{r_2} [2].

Napětí σ_{r_1} a σ_{r_2} , mohou vzniknout například od nalisování na hřídel nebo tahem právě od působení odstředivých sil, působících na lopatky umístěné po obvodu (*viz obr. 19*) [2]. Tloušťka h (značí se též b) kotouče může být homogenní nebo proměnná. Tomuto případu se budeme dále více věnovat.



Obrázek 19: Rotující kotouč s lopatkami.

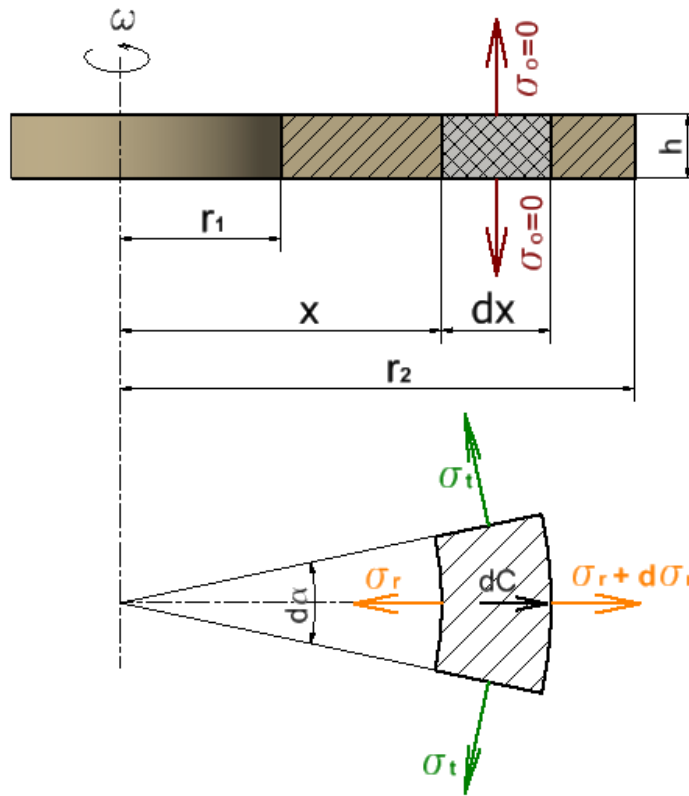
1.4.1. Napětí rotujících kotoučů

Rotující kotouč si vlastně můžeme představit jako tlustostěnnou nádobu. Rozdíl je pouze v tom, že na každý element hmoty působí navíc odstředivé síly C . Tedy i následující odvození, bude prakticky obdobné, jako u odvození tlustostěnných nádob [2].

Při odvozování budeme vycházet z těchto předpokladů [2]:

- a) Platí opět Hookův zákon.
- b) Těleso je symetrické a tedy i jeho napětí a deformace jsou rovněž symetrické.
- c) Působící úhlová rychlost je neměnná, čili konstantní.
- d) Tloušťka tělesa h je po celé ploše homogenní a je velmi malá v porovnání s poloměry r_1 a r_2 .

Představme si opět vytknutý element z rotujícího kotouče, tak jak je znázorněno na *obrázku 20*.



Obrázek 20:Vytknutý element zatížen silovými účinky [2].

1.4.2. Sestavení statické rovnice z elementu

Vytkneme si opět element, který bude mít tloušťku h a rozměry poloměrů x , $x + dx$ a úhel mezi osovými řezy bude $d\alpha$. Díky rotaci kotouče vzniknou ve stěnách tohoto elementu tahová napětí σ_r a σ_t , která jsou zároveň funkcí x (viz *obrázek 20*). Je-li tloušťka kotouče h příliš malá můžeme uvažovat $\sigma_o = 0$. Výše již bylo zmíněno, že na element také působí odstředivá síla C , jejíž velikost je dána vztahem [2]:

$$dC = dm \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot d\alpha \cdot b \cdot x \cdot \omega^2 .$$

Statická rovnice bude mít tvar

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot b \cdot d\alpha - \sigma_r \cdot x \cdot b \cdot d\alpha + \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot d\alpha \cdot b \cdot x \cdot \omega^2 = \sigma_t \cdot dx \cdot b \cdot d\alpha$$

a po její úpravě

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = -A \cdot x^2 \cdot dx[2].$$

Konstanta A je dána vztahem

$$A = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [2].$$

Porovnáme-li rovnici rovnováhy s Eulerovou rovnicí, která byla v teorii silnostěnných nádob, tak je vidět, že se prakticky liší pouze o člen, který je závislý na otáčkách kotouče. V případě, že $\omega = 0$, bude $A = 0$, budou rovnice naprosto totožné [2].

Podobně jako u silnostěnných nádob, tak i u kotoučů, si pro řešení napětí, zavedeme novou neznámou u , která nám udává přírůstek poloměru x . Rovnice, které popisují deformaci prvku, pak budou totožné s rovnicemi odvozenými jako u nádob.

$$\varepsilon_t = \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r + \sigma_o),$$

$$\varepsilon_r = u'(x) = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot \sigma_t + \sigma_o)$$

a z nich pak

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \mu \cdot u'(x) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right] [2].$$

Po dosazení těchto výrazů do rovnice rovnováhy dostáváme po úpravě pro u opět diferenciální rovnici ve tvaru:

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = -x^2 \cdot \frac{A}{E^x}$$

,kde

$$E^x = \frac{E}{1 - \mu^2} [2].$$

Vidíme, že rovnice je opět Eulerova a to s pravou stranou. Obecné řešení této rovnice sestává z obecného řešení rovnice homogenní [2].

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0.$$

Řešení této rovnice již známe z teorie silnostěnných nádob a vypadá

$$u = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} [2].$$

Podle pravé strany odhadneme partikulární integrál u_p ve tvaru:

$$u_p = Kx^3 [2].$$

Neznámou konstantu K najdeme tak, že uděláme první derivaci z u_p

$$u_p' = 3 \cdot Kx^2$$

a následně druhou derivaci u_p

$$u_p'' = 6 \cdot Kx.$$

Po dosazení zpět do rovnice

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = -x^2 \cdot \frac{A}{Ex}$$

dostaneme

$$6 \cdot Kx^2 + 3 \cdot Kx^2 - Kx^2 = -x^2 \cdot \frac{A}{Ex} \rightarrow \text{z toho } K = -\frac{A}{8 \cdot Ex}$$

a partikulární integrál u_p

$$u_p = -\frac{A}{8 \cdot Ex} \cdot x^3 [2].$$

Celkové řešení diferenciální rovnice pak bude vypadat takto.[2]:

$$u = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} - \frac{A}{8 \cdot Ex} \cdot x^3$$

Konstanty C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Po dosazení tohoto řešení do výrazů pro σ_t a σ_r dostaneme

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2,$$

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2.$$

Pokud bychom se pokusili srovnat tyto výrazy s výrazy, které byly odvozeny u nádob.

$$\sigma_t = K + \frac{C}{x^2} ; \sigma_r = K - \frac{C}{x^2}$$

tak vidíme, že se liší pouze posledním členem [2].

Rozdíl bude v charakteristice průběhů napětí [2].

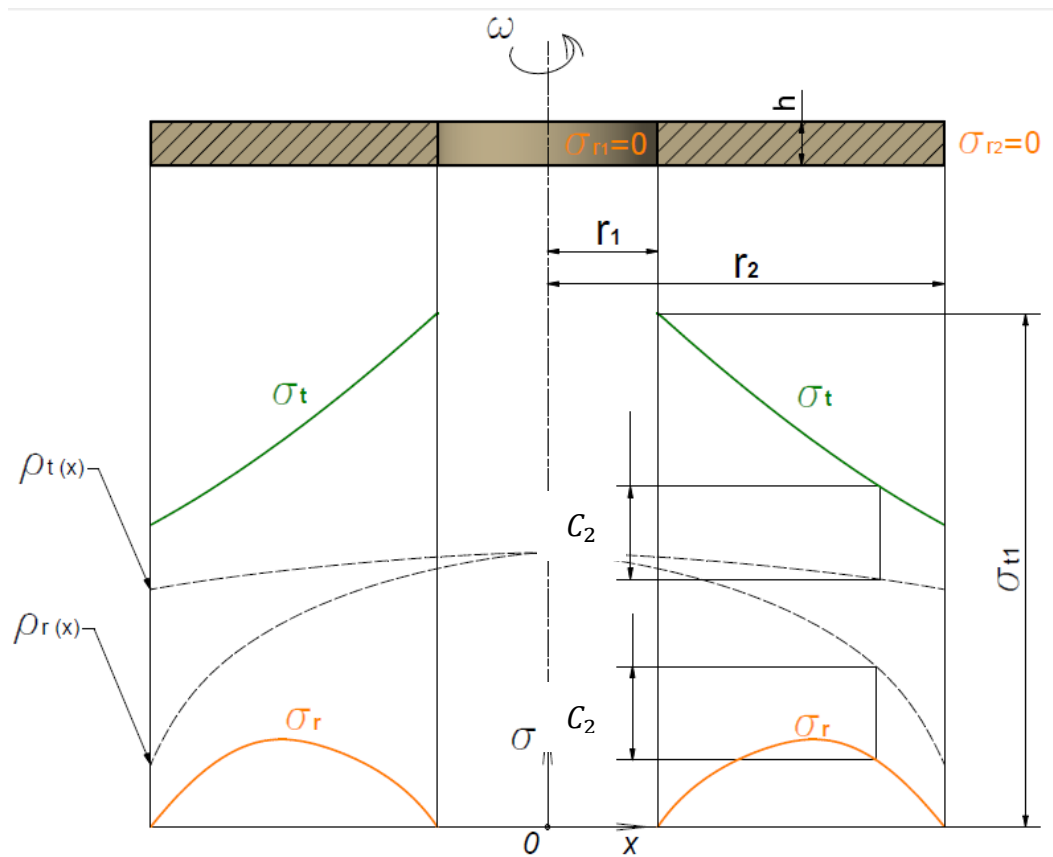
U nádob byla charakteristika popsána polytropy, kdežto u rotujících kotoučů se tyto charakteristiky budou blížit asymptoticky k parabolám [2].

Jejich tvar bude následující [2]:

$$\rho_{t(x)} = C_1 - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2,$$

$$\rho_{r(x)} = C_1 - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2.$$

Průběhy napětí σ_r a σ_t pro volný rotující kotouč s otvorem jsou vyznačeny na *obrázku 21*.



Obrázek 21: Průběhy hlavních napětí, volný rotující kotouč [2].

Z obrázku jsou patrné okrajové podmínky, které jsou platné pro volný kotouč. Takto nazýváme kotouč, který nemá na vnitřním a ani vnějším obvodě žádné vnější zatížení a je namáhán jen od odstředivé síly (viz obr. 21) [2].

Okrajové podmínky jsou

$$\sigma_{r_1} = 0 \text{ a } \sigma_{r_2} = 0$$

neboli

$$\text{pro } x = r_1 \rightarrow \sigma_{r_1} = 0$$

$$\text{pro } x = r_2 \rightarrow \sigma_{r_2} = 0 [2].$$

Tyto podmínky můžeme dosadit do vztahu

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2$$

a dostaneme

$$0 = C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot r_1^2,$$

$$0 = C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot r_2^2 [2].$$

Odtud si vyjádříme konstanty C_1 a C_2

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot (r_1^2 + r_2^2) \text{ a } C_2 = \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot (r_1^2 \cdot r_2^2) [2].$$

Maximální napětí u volného kotouče je vždy obvodové napětí na **vnitřním okraji** $\sigma_{t_1(r_1)}$ [2].

Velikost tohoto napětí vyjádříme z rovnice:

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2$$

a dosazením konstant C_1 , C_2 a $A = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2$.

Vyjde vztah pro napětí

$$\sigma_{t_1} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} \cdot [(1 - \mu) \cdot r_1^2 + (3 + \mu) \cdot r_2^2] [2].$$

Napjatost na vnitřním obvodě kotouče je jednoosá, protože $\sigma_r(r_1) = 0$ i $\sigma_o = 0$. Čili pevnostní podmínka bude mít jednoduchý tvar:

$$\sigma_{t1} \leq \sigma_D.$$

Jak by vypadalo rozložení napětí ve volném kotouči bez otvoru?

V tomto případě jde o zvláštní případ, který je znázorněn na *obrázku 22*.

Zde pro $x = 0$ bude integrační konstanta $C_2 = 0$ [2].

Po dosazení podmínky do rovnic, pak vyjde

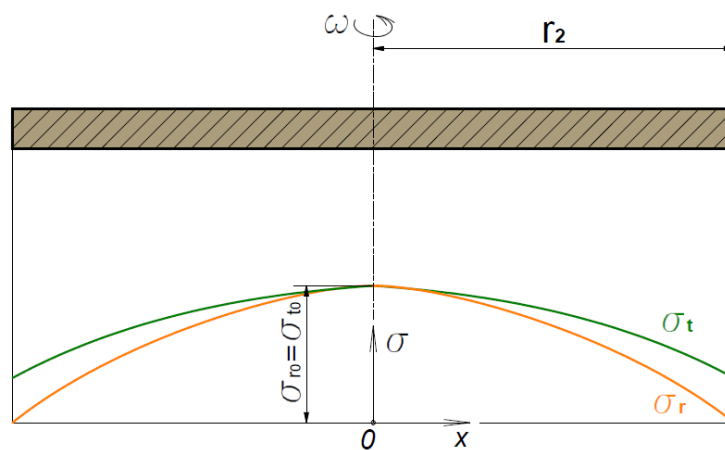
$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2 \rightarrow \sigma_t = C_1 - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2,$$

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2 \rightarrow \sigma_r = C_1 - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2.$$

Z výsledků je zřejmé, že σ_t a σ_r splynou s asymptotami $\rho_{t(x)}$ a $\rho_r(x)$.

Integrační konstantu C_1 určíme z podmínky $\sigma_{r_2} = 0$, odkud bude

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot r^2.$$



Obrázek 22: Průběhy napětí u rotujícího kotouče bez otvoru [2].

Na *obrázku 22* jsou graficky znázorněny průběhy obou hlavních napětí $\sigma_t(x)$ a $\sigma_r(x)$, kde je patrné, že nejvíce namáhaná část, je uprostřed kotouče tedy v místě $x = 0$.

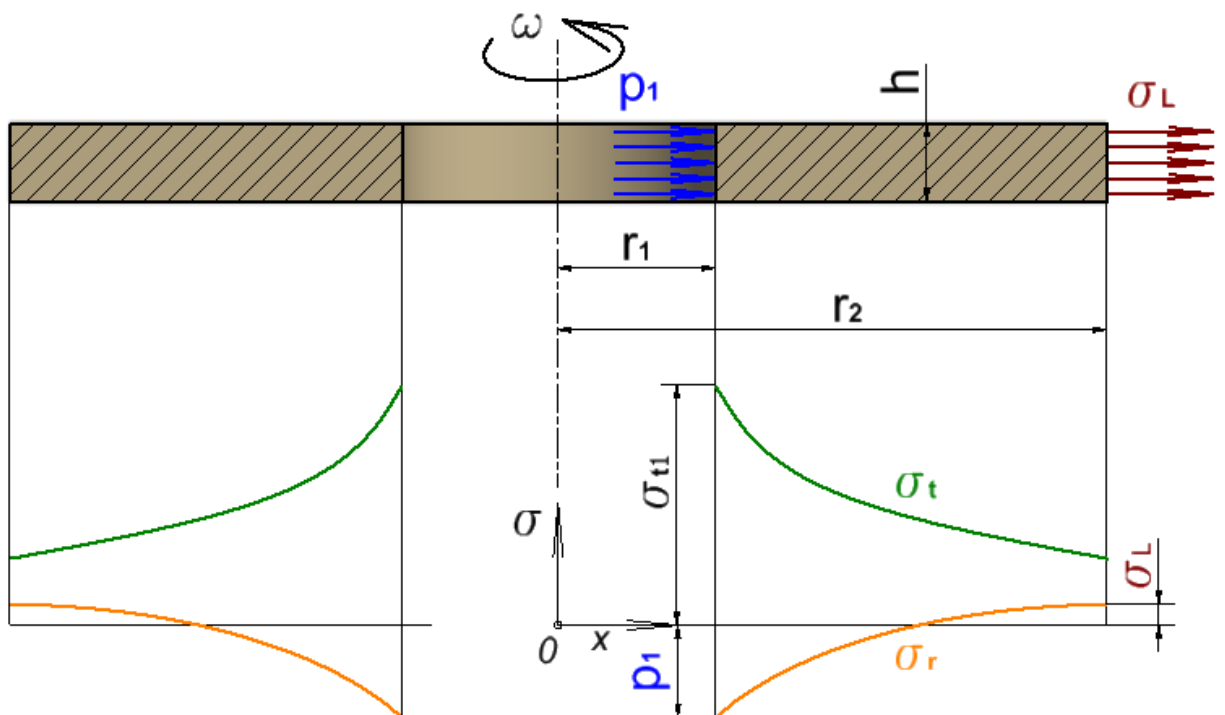
Pro $x = 0$ pak platí,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{r0} = \sigma_{t0} = C_1 = \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot r^2 [2].$$

Pevnostní podmínka bude dle teorie τ_{max} ve tvaru [2]:

$$\sigma_{red\tau_{max}} = \sigma_{t0} - 0 \leq \sigma_D.$$

Vezměme si, ale případ, kdy kotouč nebude volný. To znamená, že na jeho okrajích působí napětí σ_{r_1} a σ_{r_2} , která nejsou nulová. Takovým příkladem může být klidně **nalisovaný** kotouč na hřídeli, který má po obvodě lopatky. Výpočtový model, včetně průběhů napětí, je vidět na *obrázku 23* [2].



Obrázek 23: Průběh napětí na rotujícím kotouči s lopatkami [2].

Můžeme předpokládat, že v místě nalisování za provozu působí tlak p_1 (na *obrázku 23* modře), lopatky nám vyvolají tahové napětí σ_L (na *obrázku 23* tmavě červená). U tahového napětí se jedná o střední hodnotu, která tak působí na hmotu. Pokud bychom napjatost lopatek chtěli počítat přímo v místech připojení, byl by výpočet daleko složitější [2].

Při řešení použijeme opět vztahů:

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot A \cdot x^2,$$

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot A \cdot x^2.$$

Jejich integrační konstanty určíme z těchto okrajových podmínek:

pro $x = r_1$, kde je $\sigma_{r1} = -p_1$

pro $x = r_2$, kde je $\sigma_{r2} = \sigma_L$ (tahové napětí vzniklé vlivem odstředivé síly) [2].

Nejvíce namáhaná část kotouče zde bude vnitřní povrch a to na poloměru r_1 , čili pro $x = r_1$.

Pevnostní podmínka bude dle teorie τ_{max} ve tvaru.[2]:

$$\sigma_{red\tau_{max}} = \sigma_{t1} - \sigma_{r1} = \sigma_{t1} + p_1 \leq \sigma_D.$$

1.4.3. Deformace rotujícího kotouče

U kotoučů se zpravidla zajímáme o deformace vnitřního poloměru r_1 a vnějšího r_2 . Vydeme opět z teorie použité u tlustostěnných nádob [2].

Pro přírůstek vnitřního poloměru platí vztah.[2]:

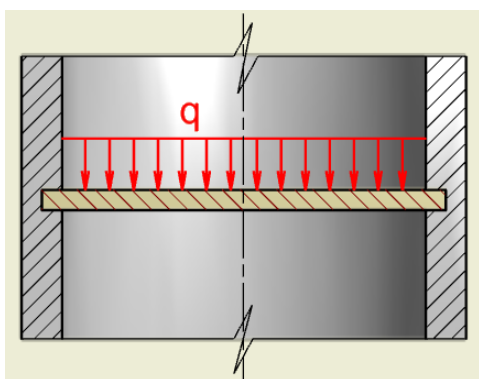
$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E} \cdot (\sigma_{t1} - \mu \cdot \sigma_{r1}) = \varepsilon_{t_1} \cdot r_1.$$

Pro přírůstek vnějšího poloměru platí vztah.[2]:

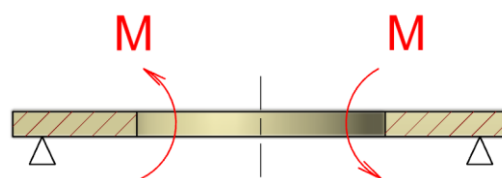
$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot (\sigma_{t2} - \mu \cdot \sigma_{r2}) = \varepsilon_{t_2} \cdot r_2.$$

1.4. Kruhové rotačně-symetrické, tenkostěnné desky

V této teoretické části se zaměříme na problematiku výpočtů namáhání a deformací tenkostěnných kruhových rotačně symetrických desek. Budou uvažovány zejména desky stále tloušťky zatížené symetricky. Různé případy takovýchto desek jsou znázorněny na *obrázcích 24 až obrázcích 27* [2].



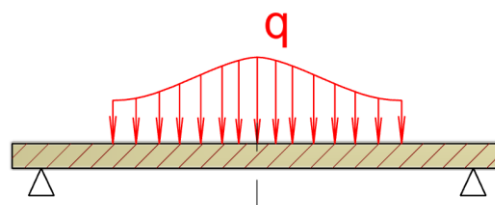
Obrázek 24.



Obrázek 25.



Obrázek 26.



Obrázek 27.

Obrázek 24 deska, která je na obvodě vetknutá a současně zatížená spojitým zatížením [2].

Obrázek 25 deska s otvorem na vnějším obvodě podepřená a na vnitřním obvodě momentem M [2].

Obrázek 26 deska s otvorem na vnějším obvodě podepřená a na vnitřním zatížená silou F [2].

Obrázek 27 deska podepřená částečně zatížená spojitým zatížením [2].

Předpoklady pro výpočet.[2]:

Bude opět platit Hookův zákon

- Tloušťka desky nebude příliš velká tj. $t \leq 1/5 r$, čili můžeme zanedbat smyková napětí. Bude platit Bernoulliho teorie lineárního rozložení napětí.
- Střední a zároveň neutrální plocha, která má nulové napětí se bude deformovat tak, že se její body deformace posouvají jen vertikálně.

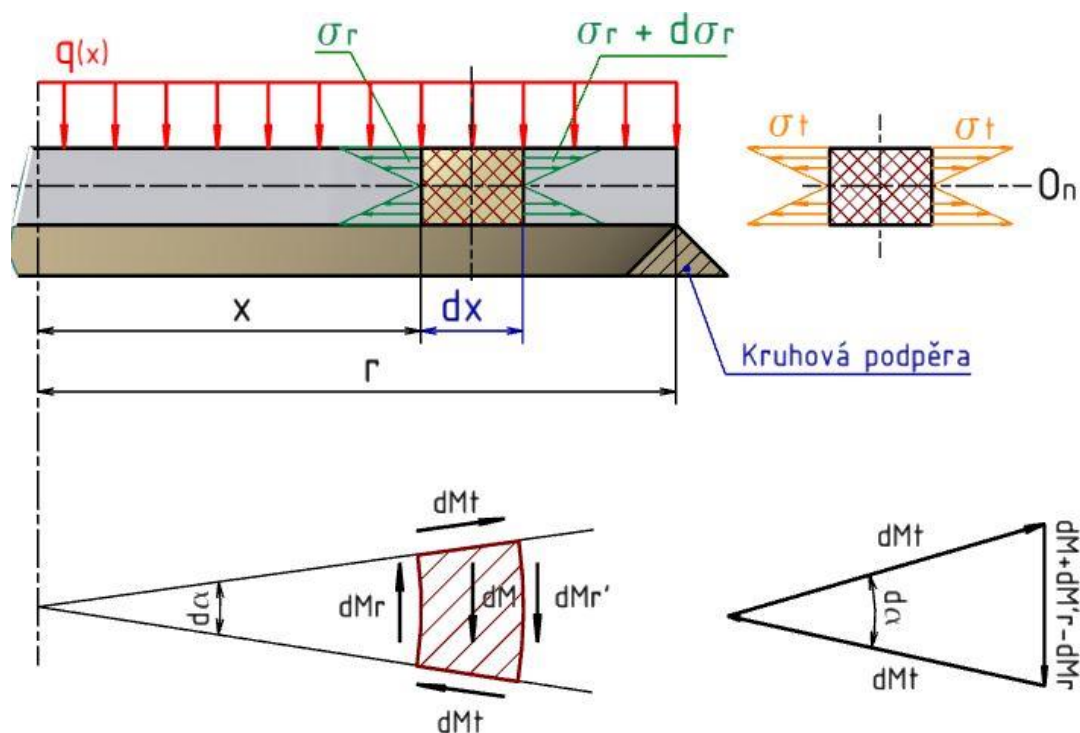
- c) Zdeformovanou rovinnou plochu si lze představit jako vrchlík, kde každý element této plochy bude mít obecně dva poloměry křivosti. Z toho plyne, že na něj působí dva vnitřní ohybové momenty v navzájem kolmých rovinách.
- d) Ohybová napětí vzniklá od ohybových momentů budou úměrná vzdálenosti od neutrální vrstvy.

1.5.1. Základní rovnice kruhových desek

Mějme desku, která je po obvodě podepřená podpěrou a rotačně symetricky zatížená spojitým zatížením $q(x)$, viz obrázek 24. Dvěma válcovými souměrnými řezy o poloměrech $r = x$ a $r = x + dx$ a dvěma osovými řezy, které svírají úhel $d\alpha$, vytkneme výpočtový element, který je taktéž vidět na obrázku (vyšrafován obou směrně). Na vnitřní válcové stěně elementu, který má charakteristický rozměr, šířky $(x + dx)d\alpha$ a výšky h vzniká radiální napětí σ_r (na obrázku vyznačeno zelenou barvou). Toto napětí je vyvoláno ohybovým momentem dM_r [2].

Tento moment je vyjádřený vztahem [2]:

$$dM_r = W_o \cdot \sigma_r = \frac{1}{6} \cdot x \cdot d\alpha \cdot h^2 \cdot \sigma_r.$$



Obrázek 28: Kruhová deska podepřená. Zatížená spojitým zatížením [2].

Naopak na vnější válcové straně elementu, o šířce $(x + dx)d\alpha$ a výšce h , působí radiální ohybové napětí $\sigma_r + d\sigma_r$ a to nám vyvolává moment označený v obrázku jako dM'_r [2].

Tento moment je vyjádřen vztahem

$$dM'_r = W'_o \cdot (\sigma_r + d\sigma_r) = \frac{1}{6} \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot h^2 \cdot (\sigma_r + d\sigma_r) [2].$$

Dále na element působí také spojité zatížení $q(x)$, jehož celkové příčné zatížení $Q(x)$ vyvolá posouvající sílu dT [2].

Tato síla na vnitřní stěně elementu je vyjádřena vztahem [2]:

$$dT = \frac{Q(x)}{2\pi x} \cdot x \cdot d\alpha = \frac{Q(x)}{2\pi} \cdot d\alpha.$$

Na vnější stěně elementu je síla vyjádřena vztahem [2].

$$dT' = \frac{Q(x) + dQ(x)}{2\pi} \cdot d\alpha.$$

Tyto dvě **smykové** síly dT a dT' jsou dvojice sil, které mají společné rameno dx . Moment této silové dvojice je po zanedbání malých veličin vyššího řádu, popsán vztahem [2]:

$$dM = dt \cdot dx = Q(x) \frac{d\alpha \cdot dx}{2\pi}.$$

V osových řezech, které svírají úhel $d\alpha$ působí ve stěnách elementu o rozměrech šířky dx a výšce h tečná napětí σ_t , která vyvolávají vnitřní ohybový moment dM_t [2].

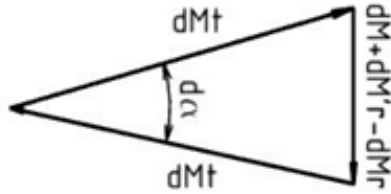
Moment dM_t je dán vztahem [2]:

$$dM_t = W_o \cdot \sigma_t = \frac{1}{6} \cdot dx \cdot h^2 \cdot \sigma_t.$$

Všechny výše popsané vztahy jsou pro momenty, které jsou charakterizovány jako vektory. Aby byla splněna podmínka rovnováhy elementu/prvku, musí všechny tyto na něj působící momenty tvořit uzavřený polygon, tak jak je znázorněno na *obrázku 25*. Podobně tomu bylo i pro element u rotujících kotoučů, kde však místo vektorů momentu vystupovaly vektory sil [2].

V tomto případě z příslušného polygonu plyne vztah, resp. podmínka rovnováhy v tomto tvaru [2]:

$$dM_t \cdot d\alpha = dM'_r + dM - dMr.$$



Obrázek 29: Vektorový rovnovážný polygon [2].

Do takto vyjádřené podmínky rovnováhy můžeme za momenty samozřejmě dosadit a dostaneme [2]:

$$\frac{1}{6} \cdot dx \cdot h^2 \cdot \sigma_t \cdot d\alpha = \frac{1}{6} \cdot (x + dx) \cdot d\alpha \cdot h^2 \cdot (\sigma_r + d\sigma_r) + Q(x) \frac{d\alpha \cdot dx}{2\pi} - \frac{1}{6} \cdot x \cdot d\alpha \cdot h^2 \cdot \sigma_r.$$

Po úpravě této rovnice s tím, že opět zanedbáme malé veličiny vyšších řádů, dostaneme:

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = -\frac{6Q(x)}{2\pi \cdot h^2} \cdot dx.$$

Takto upravená statická rovnice vyjadřuje rovnováhu prvku tenké kruhové desky a je analogií rovnice pro řešení rotujících kotoučů, kde pro rovnice vypadala následovně [2]:

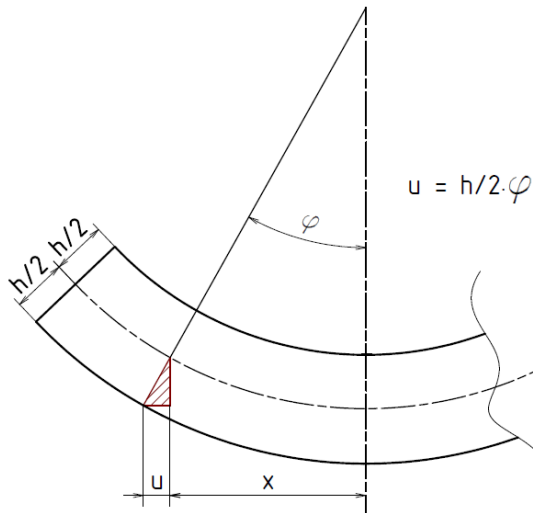
$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = -A \cdot x^2 \cdot dx.$$

K tomu, abychom mohli určit σ_r a σ_t potřebujeme opět deformační podmínku. Vyjdeme-li z teorie silnostěnných nádob, kde docházelo k posuvu, čili ke změně poloměru x daného elementu a následně jeho vzniklé deformaci u , budou rovnice obou napětí vypadat následovně:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \mu \cdot u'(x) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right].$$

V případě kruhových desek se však místo posuvu u , pro obecný poloměr, používá úhel natočení φ . Vztah, který je mezi těmito veličinami u a φ , je znázorněn na obrázku 30 [2].



Obrázek 30: Vztah mezi posuvem a natočením [2].

Dosadíme-li za u do rovnic pro napětí, dostáváme rovnice pro σ_t a σ_r v následujících tvarech

$$\sigma_t = \frac{E^x \cdot h}{2} \cdot \left[\frac{\varphi}{x} + \mu \cdot \varphi' \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E^x \cdot h}{2} \cdot \left[\varphi'(x) + \mu \cdot \frac{\varphi}{x} \right],$$

kde

$$E^x = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

E^x je nazýván jako „zpevněný“ podul pružnosti v tahu [2].

Po dosazení za σ_t a σ_r do rovnice:

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = -\frac{6Q(x)}{2\pi \cdot h^2} \cdot dx,$$

dostaneme po její úpravě **ZÁKLADNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI KRUHOVÝCH DESEK**.

$$x \cdot \varphi'' + \varphi' - \frac{\varphi}{x} = \frac{6Q(x)}{\pi \cdot E^x \cdot h^3} [2].$$

Rovnici lze také zapsat ve tvaru

$$x \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot (\varphi \cdot x)' \right]' = \frac{6Q(x)}{\pi \cdot E^x \cdot h^3}.$$

Jedná se opět o Eulerovu diferenciální rovnici druhého řádu, kde jsou proměnlivé koeficienty a pravá strana [2].

1.5.2. Průhyb kruhových desek

Na *obrázku 31* je vyznačen průhyb na okraji desky dv a z obrázku plyne, že

$$dv = -\varphi(x) \cdot dx \quad [2].$$

Po integraci levé i pravé strany dostaneme vztah pro průhyb

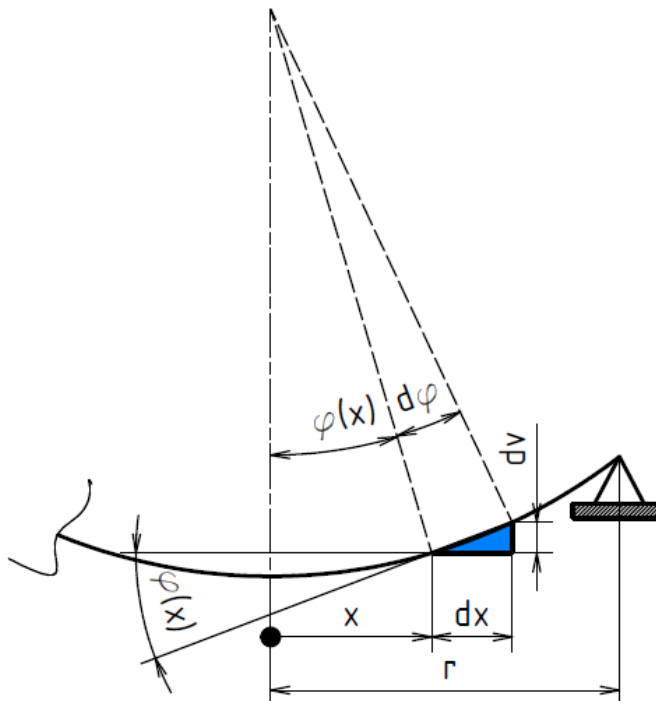
$$v(x) = -\int \varphi(x) \cdot dx + K,$$

kde K – je integrační konstanta a určíme ji z okrajových podmínek pro uložení desky [2].

Například pro desku, která je na obrázku, by okrajová podmínka byla

$$v_{(x=r)} = 0,$$

protože v místě, kde je deska podepřena k průhybu nedojde, tudíž je průhyb roven nule.

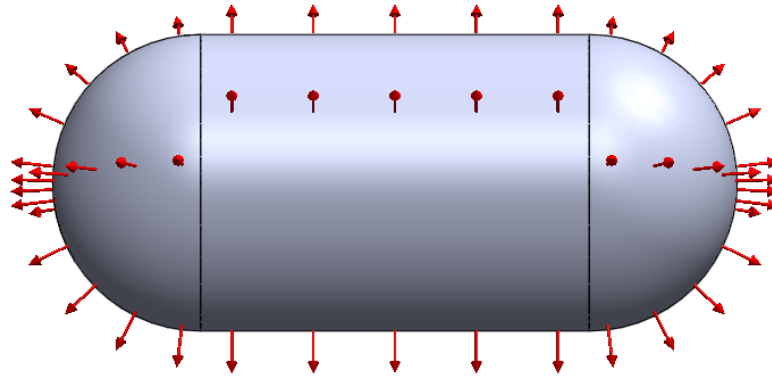


Obrázek 31: Průhyb na okraji desky [2].

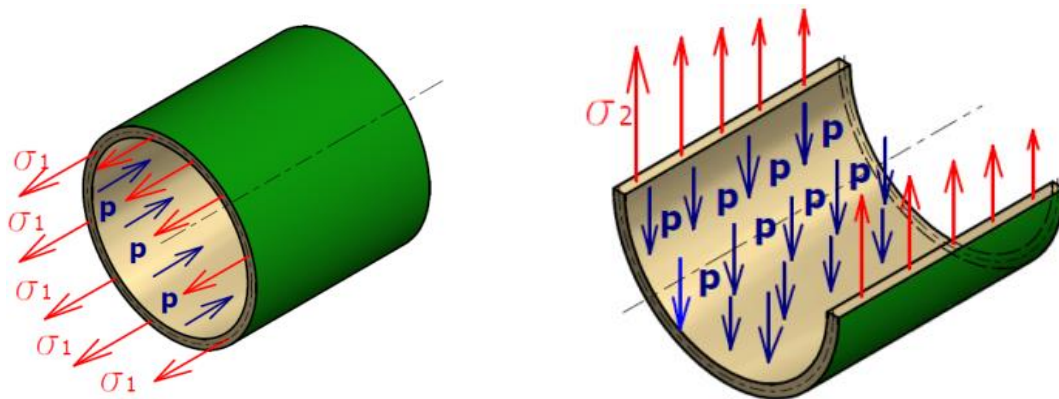
2. NÁVRHVÝPOČTOVÝCH MODELŮ

V této kapitole si budeme demonstrovat, jak by vypadaly výpočtové modely respektive sestavy idealizovaných těles, které následně podrobíme numerickým experimentům.

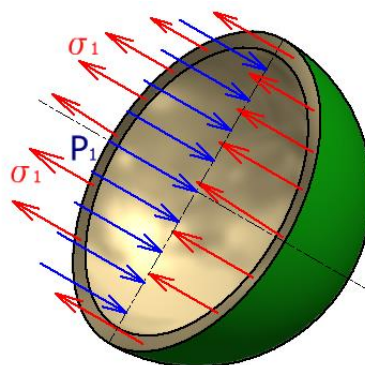
Výpočtový model tenkostěnné nádoby (*SKOŘEPINY*) zatížené vnitřním přetlakem



Obrázek 32: Výpočtový model tenkostěnné nádoby [2].

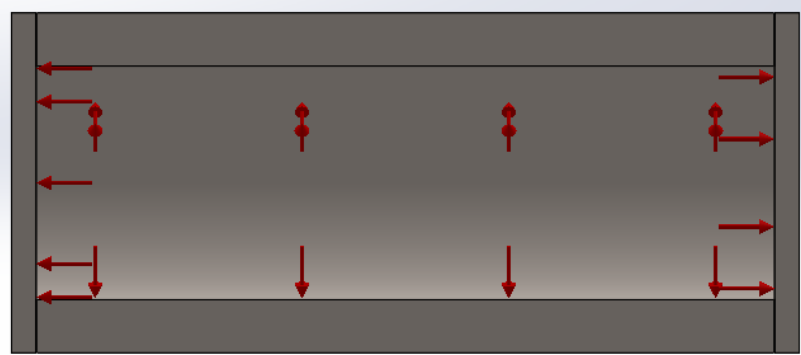


Obrázek 33: Působení tlaku a osového napětí [6]. Obrázek 34: Působení tlaku a tečného napětí [6].

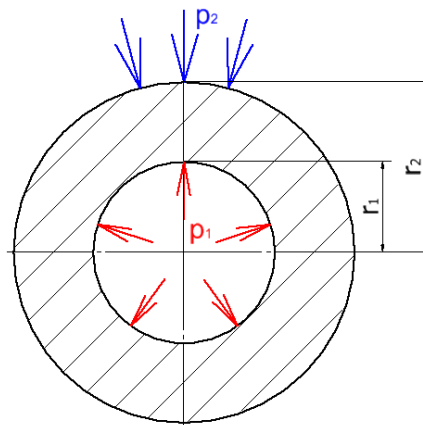


Obrázek 35: Působení tlaku a osového napětí v místě styku [6].

Výpočtový model tlustostěnné nádoby zatížené vnitřním přetlakem



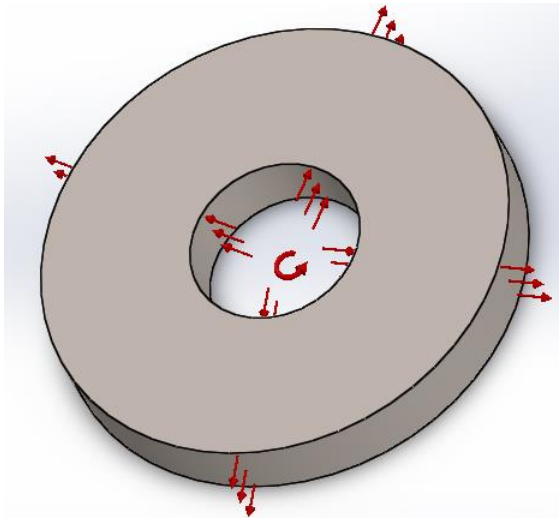
Obrázek 36: Výpočtový model tlustostěnné nádoby.



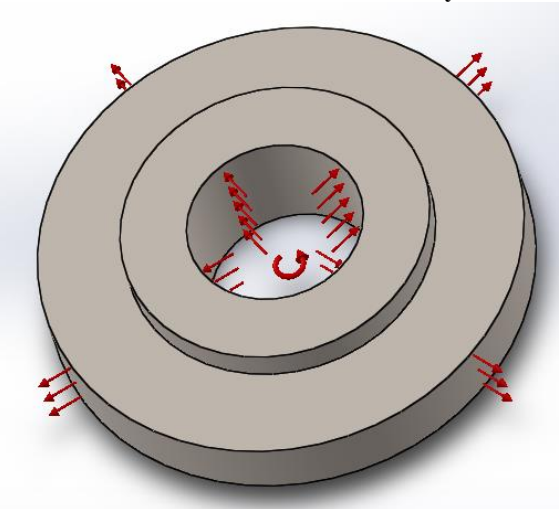
Obrázek 37: Těleso namáháno na vnitřní přetlak $p_1 > p_2$ [2].

Pevný rotující kotouč s lopatkami

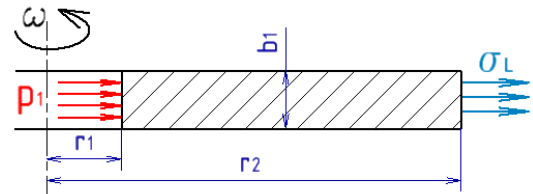
Lopatky na níže vyobrazeném modelu jsou nahrazeny tahovým napětím σ_L . To je napětí, které vyvolává odstředivá síla. Tlak p_1 je tlak vzniklý například nalisováním kotouče na hřídel [2].



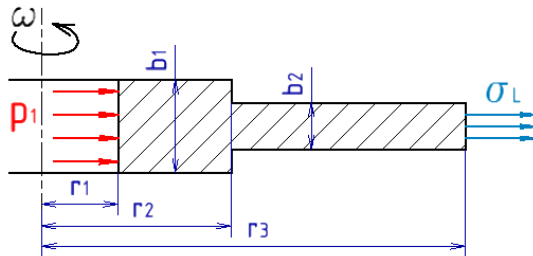
Obrázek 38: Kotouč stálé tloušťky [2].



Obrázek 40: Nehomogenní kotouč.[2].



Obrázek 39: Rotující kotouč působí tlak od nalisování a vzniká tahové napětí od odstředivé síly [2].



Obrázek 41: Nehomogenní rotující kotouč působí tlak od nalisování a vzniká tahové napětí od odstředivé síly [2].

3. NUMERICKÉ VÝPOČTY (EXPERIMENTY)

Provedli jsme numerické experimenty těchto výpočtových modelů:

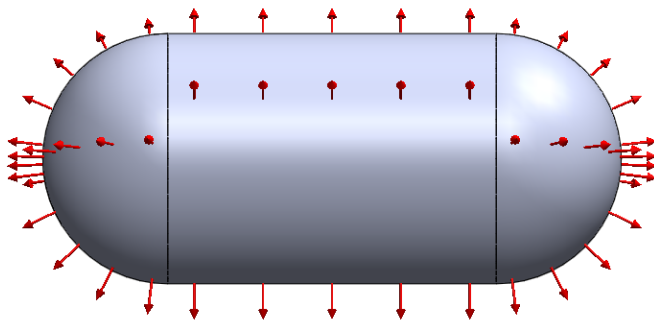
- a) Tenkostěnné nádoby
- b) Tlustostěnné nádoby
- c) Rotujícího kotouče

3.1. Tenkostěnná, uzavřená nádoba (SKOŘEPINA)

Uzavřenou skořepinu jsme nechali zatížit vnitřním přetlakem $p_1 = 4,5$ [MPa].

Hlavní rozměry $r = R = 400$ [mm], $t = 4$ [mm].

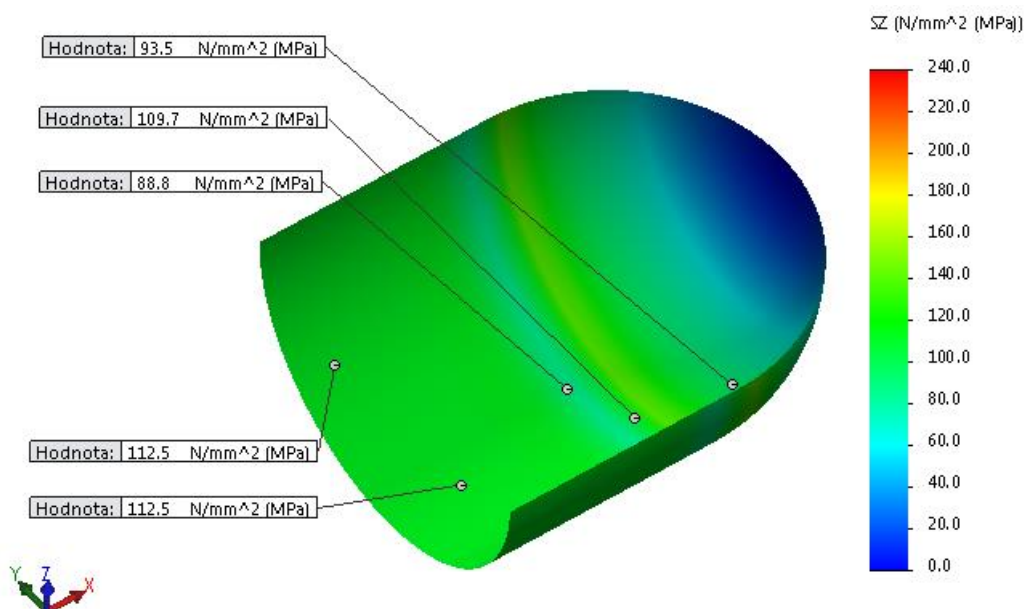
Experimentem jsme měli určit velikosti hlavních napětí a ověřit rozdíl mezi výsledky získaným numerickým výpočtem a výsledky získanými dle odvozené teorie.



Obrázek 42: Referenční výpočtový model.

Simulace průběhů osového napětí:

Hodnoty výsledků osového napětí, které vyšly ze simulace $\sigma_1 = \sigma_o = \sigma_x$.



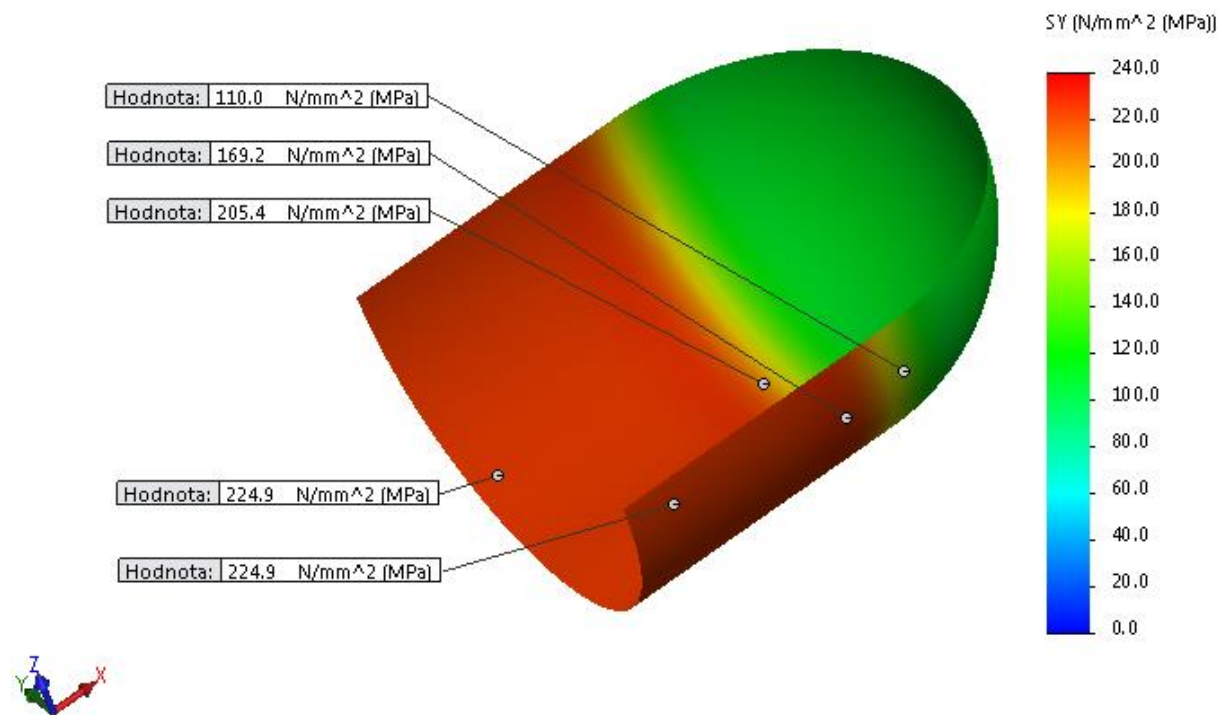
Obrázek 43: Průběh osového napětí v uzavřené, tenkostěnné nádobě.

Hodnoty výsledků pro osová napětí, které vyšly početně dle teorie skořepin, viz kapitola první:

$$\sigma_1 = \sigma_o = \sigma_x = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t} = \frac{4,5 \cdot 200}{2 \cdot 4} = 112,5 \text{ [MPa]}.$$

Simulace průběhů tečného napětí:

Hodnoty výsledků osového napětí, které vyšly ze simulace $\sigma_2 = \sigma_t = \sigma_y$.

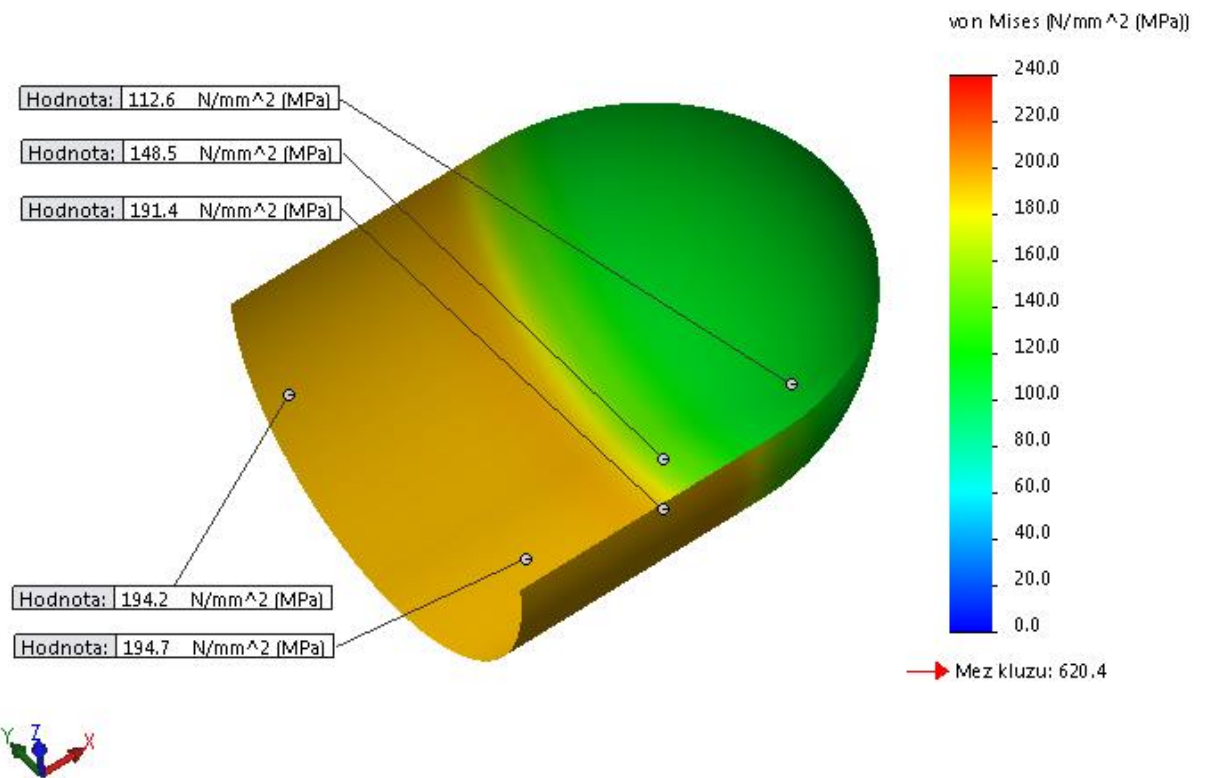


Obrázek 44: Průběh tečného napětí v uzavřené, tenkostěnné nádobě.

Hodnoty výsledků pro tečné napětí, které vyšly početně dle teorie skořepin, viz kapitola první:

$$\sigma_2 = \sigma_t = \sigma_y = \frac{p \cdot r}{t} = \frac{4,5}{4} \cdot 200 = 225 \text{ [MPa]}.$$

Simulace průběhů redukovaného napětí σ_{red} :



Obrázek 45: Napětí redukované v uzavřené, tenkostěnné nádobě.

Hodnoty výsledků pro redukované napětí, které vyšly početně dle teorie skořepin, viz kapitola první:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2} = 194,85 \text{ [MPa]}.$$

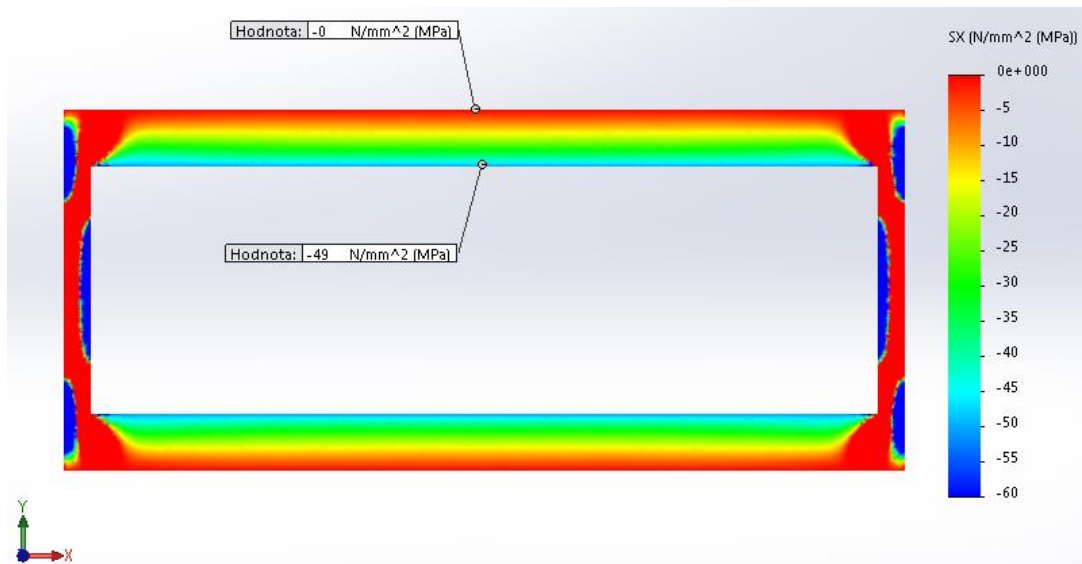
3.2. Tlustostěnná nádoba

Uzavřenou tlustostěnnou nádobu jsme nechali zatížit vnitřním přetlakem $p_1 = 50$ [MPa], $p_2 = 0$ [MPa].

Experimentem jsme měli určit velikosti hlavních napětí a ověřit rozdíl mezi výsledky získanými numerickým výpočtem a výsledky získanými dle odvozené teorie.

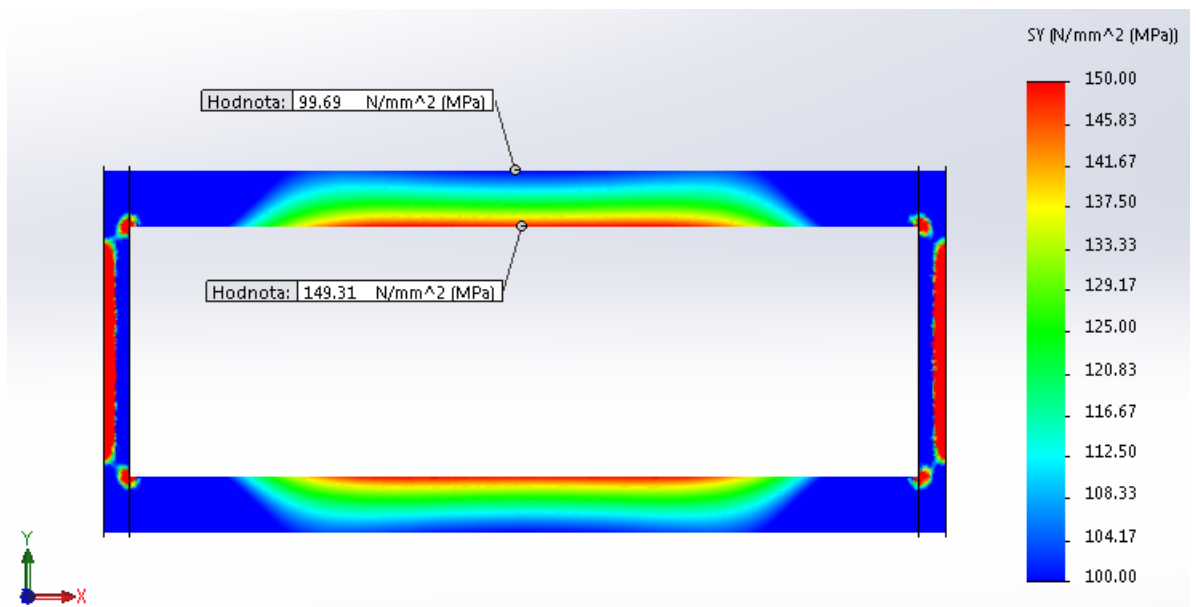
Hlavní rozměry $r_1 = 250$ [mm], $r_2 = 354$ [mm].

Simulace průběhů radiálního napětí:



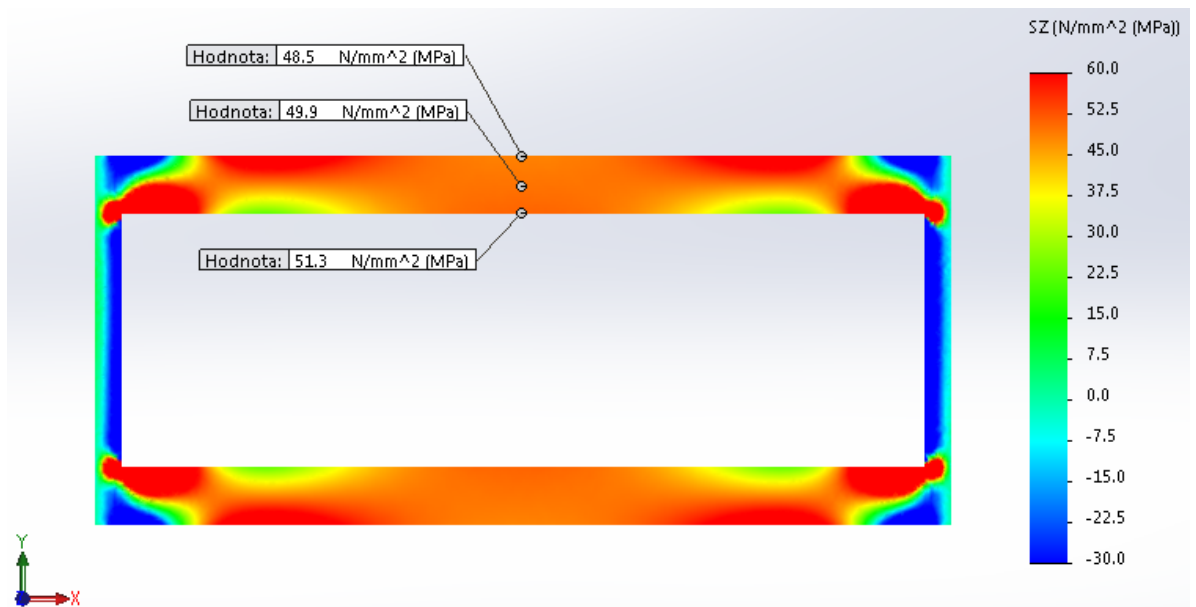
Obrázek 46: Průběh radiálního napětí v uzavřené, tlustostěnné nádobě.

Simulace průběhů tečného napětí:



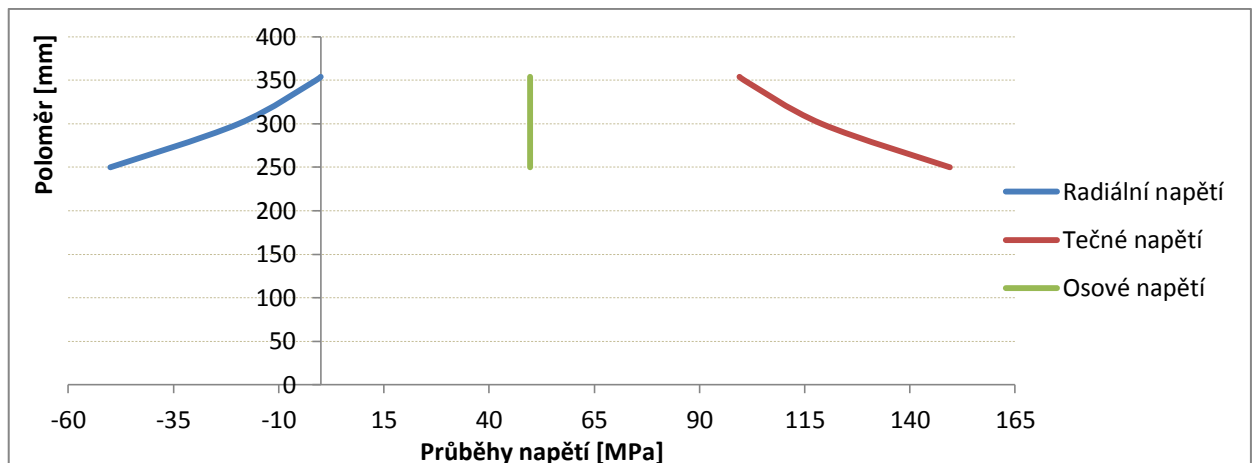
Obrázek 47: Průběh tečného napětí v uzavřené, tlustostěnné nádobě.

Simulace průběhů osového napětí:



Obrázek 48: Průběh osového napětí v uzavřené, tlustostěnné nádobě.

Průběhy napětí – graficky:



Obrázek 49: Graf průběhů napětí z analytického řešení.

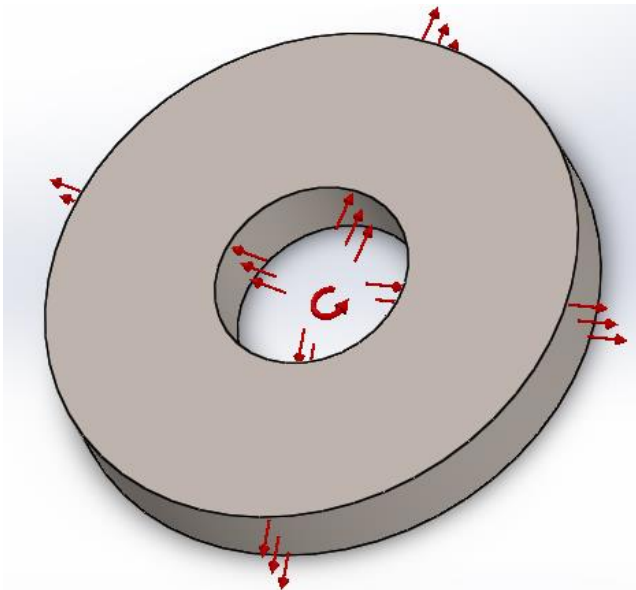
Shrnutí:

Z realizovaných numerických experimentů je zjevné, že klasické analytické teorie platí pouze pro idealizovaný stav, nekonečně dlouhého pláště, tlustostěnné válcové nádoby nebo Kirchhoffovy desky stálé tloušťky i tenkostěnné membrány. Klasické teorie však přestávají platit v přechodových oblastech tvarů, kdy je homogenita ovlivněna změnou geometrie, respektive vazbou na další prvky. Pak klasická teorie platí jen v určité oblasti.

3.3. Rotující kotouč

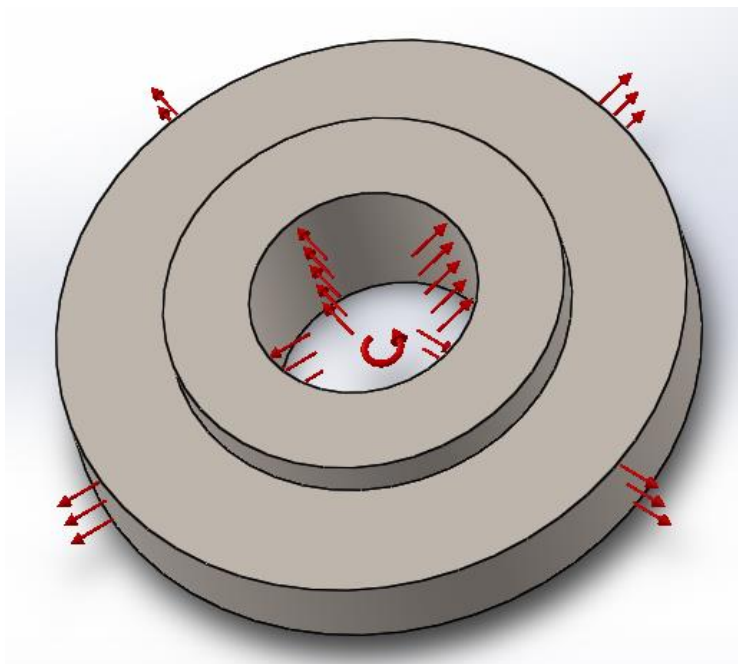
Experimentu jsme podrobili pro porovnání dva modely rotujících kotoučů:

a) Rotující kotouč stálé tloušťky.



Obrázek 50: Výpočtový model kotouče stálé tloušťky [2].

b) Rotující kotouč rozdílné tloušťky



Obrázek 51: Výpočtový model kotouče rozdílné tloušťky [2].

3.1.1. Kotouč stálé tloušťky

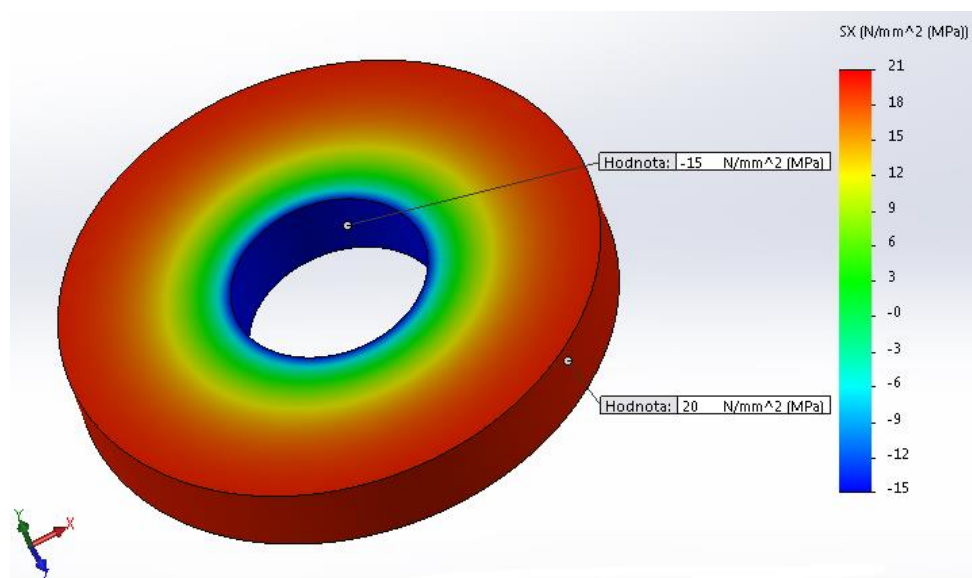
Parametry kotouče stálé tloušťky:

$\rho = 7\,800$ [kg/m³], $\mu = 0,3$, $n = 3\,000$ [ot/min], $p_1 = 15$ [MPa], $\sigma_L = 20$ [MPa],

$r_1 = 40$ [mm], $r_2 = 110$ [mm], $h_1 = 30$ [mm]

Simulace průběhů radiálního napětí u kotouče stálé tloušťky:

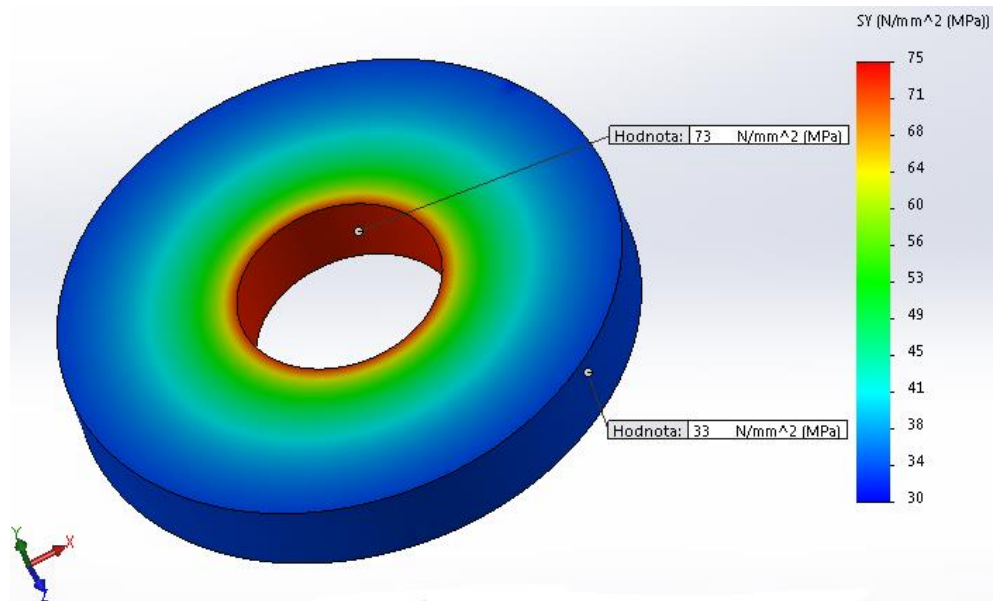
Hodnoty výsledků radiálního napětí, které vyšly ze simulace σ_r .



Obrázek 52: Průběh radiálního napětí v kotouči.

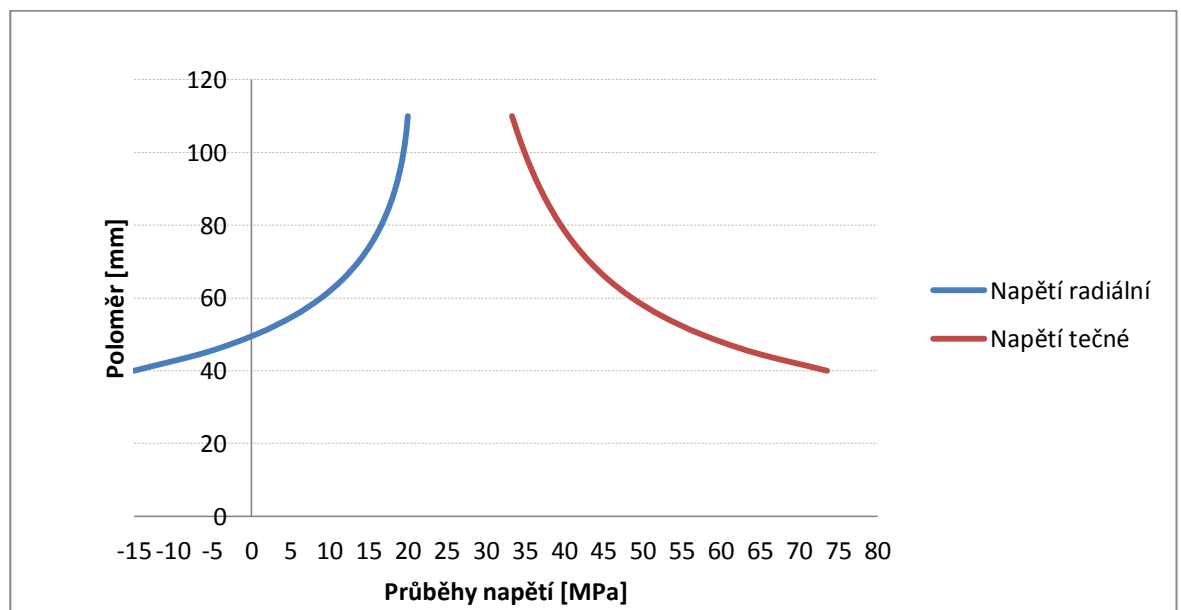
Simulace průběhů tečného napětí u kotouče stálé tloušťky:

Hodnoty výsledků tečného napětí, které vyšly ze simulace $\sigma_t = \sigma_{red}$.



Obrázek 53: Průběh tečného napětí v kotouči.

Průběhy napětí – graficky:



Obrázek 54: Graf průběhů napětí v rotujícím kotouči. Závislost rozměru na velikosti napětí.

Tabulka 1: Výsledky analytického výpočtu.

	POLOMĚR		NAPĚTÍ [MPa]	
	[m]	[mm]	Radiální[MPa]	Tečné[MPa]
$x \in (r_1, r_2)$	0,04	40	-15,0	73,6
	0,045	45	-5,9	64,2
	0,05	50	0,6	57,5
	0,055	55	5,4	52,5
	0,06	60	8,9	48,7
	0,065	65	11,6	45,6
	0,07	70	13,7	43,2
	0,075	75	15,3	41,2
	0,08	80	16,6	39,6
	0,085	85	17,6	38,1
	0,09	90	18,4	36,9
	0,095	95	19,0	35,9
	0,1	100	19,4	34,9
	0,105	105	19,8	34,1
	0,11	110	20,0	33,3

Shrnutí:

Je vidět, že si analytický model s modelem numerickým odpovídají. Jak tomu, ale bude v případě, že změním geometrii kotouče, viz následující podkapitola.

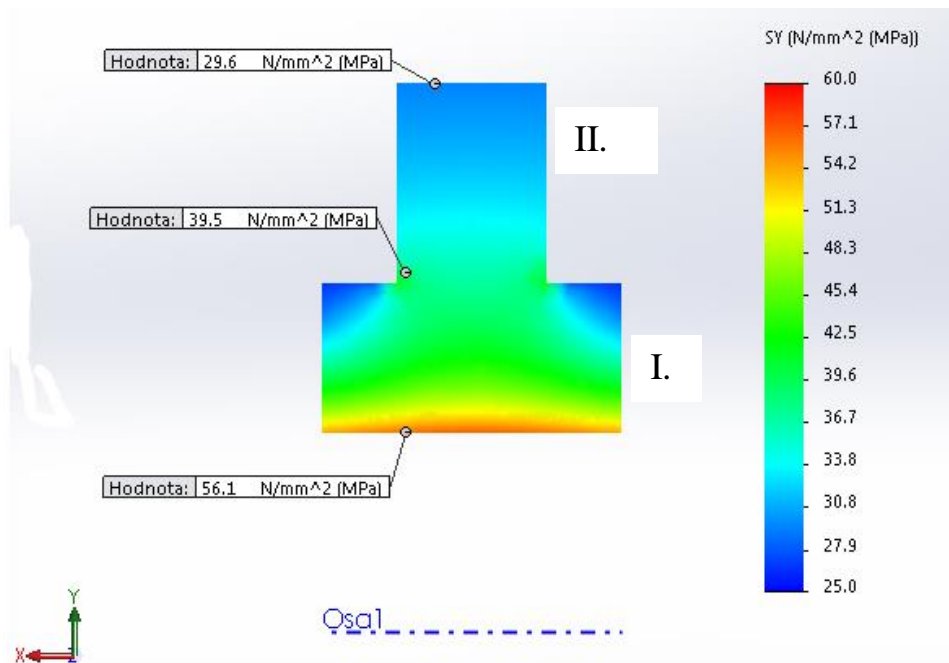
3.1.2. Kotouč rozdílné tloušťky

Parametry kotouče rozdílné tloušťky:

$\rho = 7\,800 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, $\mu = 0,3$, $n = 3\,000 \text{ [ot/min]}$, $p_1 = 15 \text{ [MPa]}$, $\sigma_L = 20 \text{ [MPa]}$,

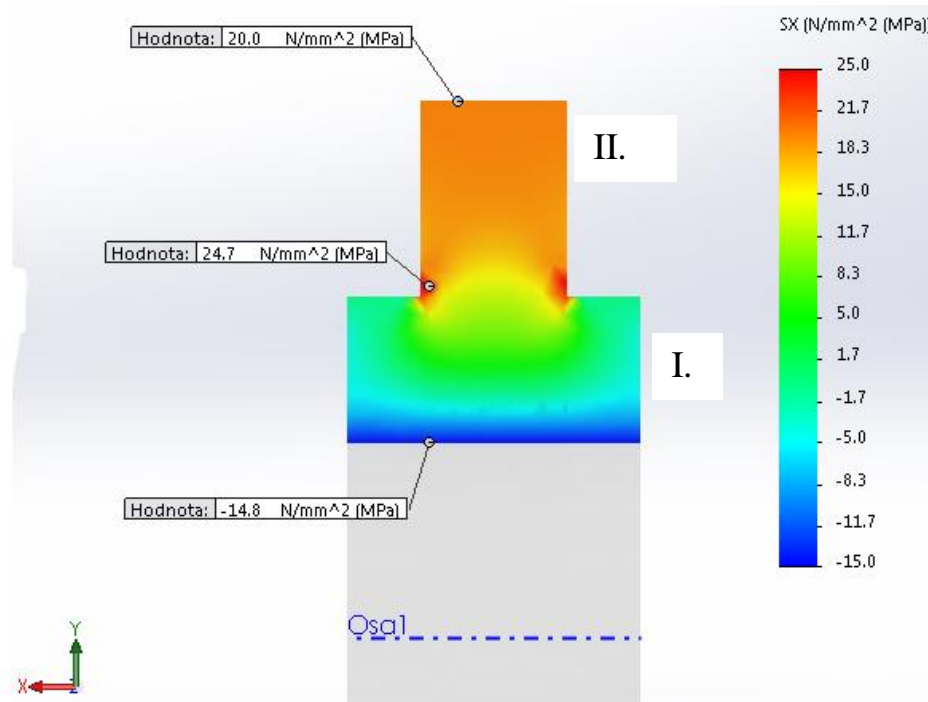
$r_1 = 40 \text{ [mm]}$, $r_2 = 110 \text{ [mm]}$, $h_1 = 60 \text{ [mm]}$, $h_2 = 30 \text{ [mm]}$

Simulace průběhů tečného napětí u kotouče stálé tloušťky:



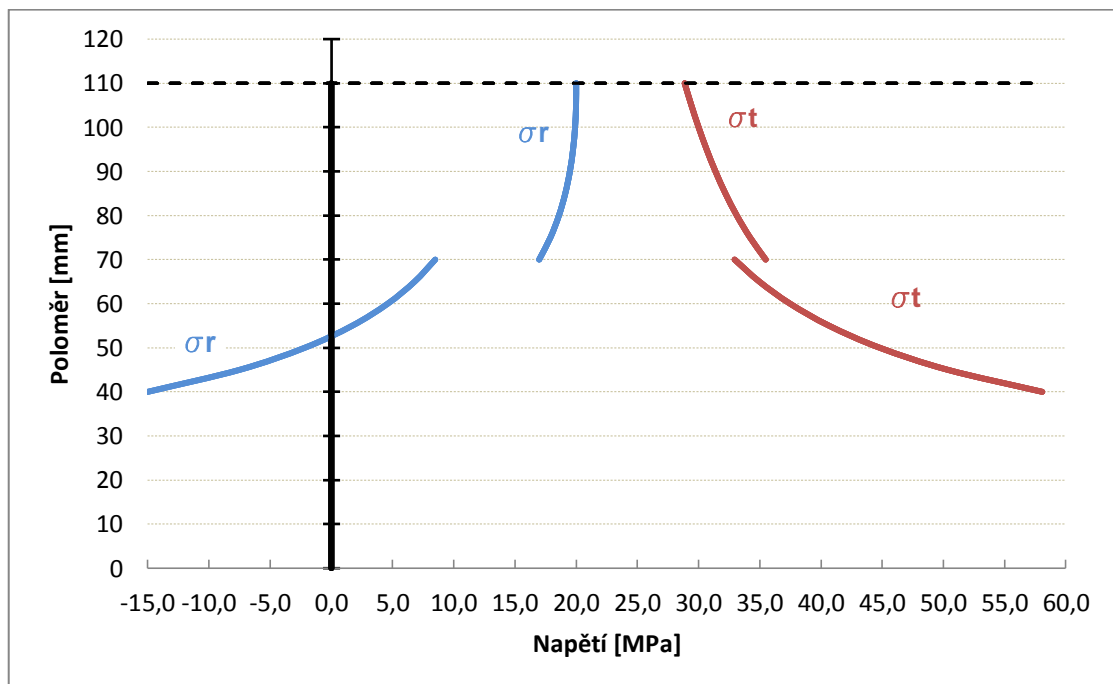
Obrázek 55: Průběh tečného napětí v rotujícím kotouči o rozdílné tloušťce.

Simulace průběhů radiálního napětí u kotouče stálé tloušťky:



Obrázek 56: Průběh radiálního napětí v rotujícím kotouči o rozdílné tloušťce.

Průběhy napětí – graficky:



Obrázek 57: Graf průběhů napětí v rotujícím kotouči.

Tabulka 2: Výsledky analytického výpočtu.

POLE	POLOMĚR	NAPĚTÍ	
	[mm]	Radiální[MPa]	Tečné[MPa]
I.	40	-15,0	58,1
	45	-7,5	50,4
	50	-2,2	44,8
	55	1,7	40,7
	60	4,6	37,5
	65	6,8	35,0
	70	8,5	32,9
II.	70	17,0	35,5
	75	17,9	34,2
	80	18,6	33,1
	85	19,1	32,2
	90	19,5	31,4
	95	19,7	30,7
	100	19,9	30,0
	105	19,99	29,4
	110	20,0	28,9

Shrnutí:

Změnou geometrie se nám kotouč rozdělil na dvě nehomogenní pole. Na základě výsledků lze říci, že numerický model si s modelem analytickým v zásadě odpovídá v oblasti, která není ovlivněná kumulací napětí na vrubech a podobně.

Všechny numerické výpočty, byly vypracovány ve vývojovém prostředí programu SolidWorks 2014, metodou konečných prvků. Výpočtovou síť tvořily rovnoramenné trojúhelníky o rozměrech 15 mm v toleranci 0,75 mm.

Seznam použité literatury

- [1] MICHALEC, Jiří, a kol.: *Pružnost a pevnost I*, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 1995 a 1998, (312 str.)
- [2] MICHALEC, Jiří, a kol.: *Pružnost a pevnost II*, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 1994 a 2000, (320 str.)
- [3] Vítkovice Steel. *Vítkovice Steel* [online]. 2015 [cit. 2015-06-07]. Dostupné z: <http://www.vitkovicesteel.com/stranky/reference-kotlove-teleso-tamuin>
- [4] Modřany POWER. *Modřany POWER* [online]. 2007 [cit. 2015-06-07]. Dostupné z: <http://www.modrany.cz/Ohyby-1.html>
- [5] Reaktor LVR-15. *Reaktor LVR-15* [online]. 2015 [cit. 2015-06-07]. Dostupné z: <http://cvrez.cz/vyzkumna-infrastruktura/vyzkumny-reaktor-lvr-15/>
- [6] Thin-Walled Pressure Wessel. *Thin-Walled Pressure Wessel* [online]. 2014 [cit. 2015-06-08]. Dostupné z: <http://www.slideshare.net/priodeepriom/solid-mechanics-thin-walled-pressure-vessel>