

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Marek Pátý

Simulace transsonického proudění s nerovnovážným fázovým přechodem

12101 - Ústav technické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Matematické modelování v technice

Praha 2014/2015

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok

2014–2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

pro: Bc. Marka Pátého

v oboru: Matematické modelování v technice

Název: **Simulace transsonického proudění s nerovnovážným fázovým přechodem**

Zásady pro vypracování:

1. Popis modelu rovinného proudění stlačitelné tekutiny. Formulace úlohy pro proudění v dýze.
2. Popis a naprogramování metody konečných objemů pro případ nevazkého rovinného proudění ideálního plynu. Odladění metody na vhodném testovacím příkladu.
3. Rozšíření modelu na případ proudění páry s nerovnovážným fázovým přechodem – návrh jednoduchého modelu zahrnutí vlivu latentního tepla.
4. Rozšíření numerické metody o model nerovnovážného fázového přechodu. Ověření numerické metody na vhodném testovacím příkladu (dýza, turbínová mříž).
5. Grafické zpracování a popis výsledků.

Rozsah diplomové práce: do 20–30 stran včetně obrázků a grafů


Seznam odborné literatury:

1. K. Kozel, J. Fürst: Numerické řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, FS.
2. J. Fořt a kol.: Numerická simulace proudění I, skripta ČVUT, FS
3. J. Blazek: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001

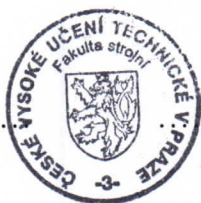
Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 31. 3. 2015

Datum odevzdání diplomové práce: 19. 6. 2015



Prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.
vedoucí Ú12101



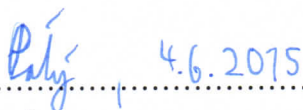
Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
děkan FS, ČVUT v Praze

V Praze dne 31. 3. 2015

Neodevzdá-li student diplomovou práci včas, je povinen tuto skutečnost předem písemně zdůvodnit, pokud bude omluva (předaná prostřednictvím studijního oddělení děkanovi) děkanem uznána, určí děkan studentovi náhradní termín konání státní závěrečné zkoušky (zůstávají dva termíny SZZ). Pokud tuto skutečnost student řádně neomluví nebo omluva nebude děkanem uznána, určí děkan studentovi termín pro opakování státní závěrečné zkoušky. SZZ je možné opakovat pouze jednou (SZŘ čl. 22, odst. 3, 4).

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Zadání diplomové práce převzal dne:



student

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D. za trpělivé a systematické vedení této práce.

Marek Pátý

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Simulace transsonického proudění s nerovnovážným fázovým přechodem

Autor: Marek Pátý

Ústav: 12101 - Ústav technické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se zabývá vývojem výpočetně nenáročného modelu pro numerické řešení dvoufázového proudění vody a vodní páry s nerovnovážným fázovým přechodem. V první části je představen matematický model stlačitelného neviskózního jednofázového proudění založený na Eulerových rovnicích. Následuje popis numerického řešení metodou konečných objemů s příklady Laxova-Friedrichsova a AUSM schématu a aplikacemi na proudění v Barschdorffově dýze v 1D a 2D a v lopatkové mříži axiální turbíny ve 2D. Další část obsahuje popis modelu nerovnovážného fázového přechodu, algoritmu pro jeho numerické řešení a jeho implementace do numerických metod pro výpočet jednofázového proudění. Jsou zde ukázány aplikace modelu s fázovým přechodem na stejných geometriích jako u jednofázového proudění, výsledky jsou porovnány s experimentem a s numerickými výsledky jiných autorů. Numerické výsledky byly získány pomocí programu vyvinutého autorem pro účely této práce.

Klíčová slova: dvoufázové proudění, nerovnovážný fázový přechod, metoda konečných objemů, Eulerovy rovnice, lopatková mříž turbíny

Title: Simulation of Transonic Flow with a Non-Equilibrium Phase Change

Author: Marek Pátý

Department: Department of Technical Mathematics

Supervisor: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Abstract: The thesis deals with the development of a computationally undemanding model for the numerical solution of a two-phase flow of liquid water and vapor with a non-equilibrium phase change. A mathematical model of compressible one-phase flow of non viscous fluid based on the Euler equations is presented in the first part. A description of the numerical solution using a finite-volume method follows. It is demonstrated on the examples of Lax-Friedrichs and AUSM schemes. The numerical methods are applied to the cases of one- and two-dimensional Barschdorff nozzle and two-dimensional axial turbine cascade. The model of non-equilibrium phase change is introduced in the next part, along with the algorithm for its numerical solution and its implementation into the numerical methods used for one-phase flow calculation. The model with the phase change is employed for the solution of the same applications as considered for the one-phase flow case. The results are compared with experimental and numerical results of other authors. The results were obtained using a code developed by the author for the purpose of this thesis.

Keywords: two-phase flow, non-equilibrium phase change, finite volumes method, Euler equations, turbine cascade

Obsah

1	Úvod	2
2	Matematický model jednofázového proudění	4
2.1	2D Navierovy-Stokesovy rovnice	4
2.2	2D Eulerovy rovnice	6
2.3	Quasi-1D Eulerovy rovnice	7
2.4	Formulace úlohy	7
3	Numerické řešení 1D jednofázového proudění	10
3.1	Metoda konečných objemů	10
3.2	Numerické řešení quasi-1D proudění dýzou	12
4	Numerické řešení 2D jednofázového proudění	17
4.1	Metoda konečných objemů ve 2D	17
4.2	Laxovo-Friedrichsovo schéma se sníženou viskozitou	18
4.3	AUSM schéma	19
4.4	Numerické řešení 2D proudění dýzou	21
4.5	Numerické řešení 2D proudění lopatkovou mříží	24
5	Proudění páry s fázovým přechodem	28
5.1	Modelování vícefázového proudění	28
5.2	Model proudění páry s kondenzací	29
5.3	Algoritmus modelu kondenzace	30
5.4	Numerické řešení quasi-1D proudění dýzou	33
5.5	Numerické řešení 2D proudění dýzou	36
5.6	Numerické řešení 2D proudění lopatkovou mříží	38
6	Závěr	43

Kapitola 1

Úvod

Modelování vícefázového proudění je velmi komplikovanou záležitostí jak z hlediska fyzikálního, tak matematického. Komplexnost problému znemožňuje vyvinout univerzální model použitelný pro širokou řadu případů. Avšak i tehdy, kdy konkrétní model pro danou aplikaci existuje, je vícefázové proudění často modelováno jako jednofázové. Příčinou je složitost modelů vícefázového proudění, která znesnadňuje jejich implementaci a výrazně zvyšuje výpočetní čas. Takovéto zjednodušení však může vést k částečně nebo zcela chybným výsledkům. Cílem této práce je vyvinout jednoduchý model dvoufázového proudění pro konkrétní aplikaci na proudění vody a vodní páry v lopatkové mříži axiální turbíny. Účelem je zlepšit přesnost dosahovaných numerických výsledků při pouze malém zvýšení výpočetní náročnosti.

Přestože je tato práce zaměřena na vývoj modelu dvoufázového proudění, je v první části ukázáno řešení jednofázového proudění. Důvodem je potřeba ověřit správnost vyvinutého programu na aplikacích, u kterých jsou k dispozici dobře dostupné experimentální výsledky. Dále jsou výsledky z jednofázového proudění použity ke srovnání s výsledky dvoufázového proudění a k vyhodnocení přínosu modelu fázového přechodu.

Matematický model jednofázového proudění stlačitelné nevazké tekutiny je založen na Eulerových rovnicích. První část práce stručně ukazuje jejich odvození z bilancí hmotnosti, hybnosti a energie. Numerické řešení je získáno pomocí metody konečných objemů s Laxovým-Friedrichsovým a AUSM schématem.

Aplikace jsou předkládány od jednoduchých ke složitějším: nejprve je ukázán výpočet 1D jednofázového proudění dýzou pomocí Laxova-Friedrichsova schématu, které se řadí mezi klasické numerické metody založené na centrálním schématu. Samotné centrální schéma je nestabilní a proto je u těchto metod přidána umělá disipace, která slouží k utlumení oscilací. Negativním důsledkem přidané umělé disipace je méně ostré zachycení nespojitostí v řešení, například rázových vln.

V další kapitole je ukázán výpočet jednofázového proudění ve 2D oblasti se strukturovanou sítí pomocí metody konečných objemů. Vedle dýzy je výpočet proveden i pro složitější geometrii v podobě lopatkové mříže axiální turbíny. Pro řešení je opět použito Laxovo-Friedrichsovo schéma a v případě turbíny také modernější AUSM schéma, řadí se mezi FVS (Flux-Vector Splitting) metody, jejichž základem je zohlednění směru šíření informace na síti. FVS metody byly vyvinuty s cílem zachytit lépe rázové vlny (a v případě vazkého proudění také mezní vrstvu), aniž by byl výrazně zvýšen výpočetní čas.

Poslední kapitola obsahuje popis modelu proudění páry s kondenzací a jeho aplikace na 1D a 2D proudění v dýze a 2D proudění v lopatkové mříži. Model s nerovnovážným fázovým přechodem popisuje směs vody a vodní páry jako kontinuum. Uvažují se stejné rychlosti pohybu obou fází, k jejichž vzájemnému ovlivnění dochází uvolněním latentního tepla při kondenzaci. Model předpokládá nulovou vlhkost páry až do místa, kde rovnovážná vlhkost dosáhne limitní hodnoty a dojde ke kondenzaci. Cílem modelu je zachytit průběh veličin před a za místem fázového přechodu, přestože samotný děj kondenzace je modelován velmi zjednodušeně. Při výpočtu integrálních veličin relevantních v inženýrské praxi (například hmotnostního toku či síly působící na lopatku turbíny) by i přes tuto lokální nepřesnost mělo dojít ke zpřesnění výsledků.

Výsledky dosažené modelem kondenzace na 1D dýze jsou porovnány s dostupnými experimentálními výsledky [12], u 2D lopatkové mříže je k dispozici srovnání s výsledky dosaženými jiným autorem pomocí komplexnějšího modelu dvoufázového proudění [22].

Kapitola 2

Matematický model jednofázového proudění

Základem modelu jsou rovnice vyjadřující bilance hmotnosti, hybnosti a energie, známé jako Navierovy-Stokesovy rovnice. V některých aplikacích (proudění v dýze či v lopatkové mříži turbíny) mohou převládat tlakové a setrvačné síly nad silami viskózními a lze proto zanedbat členy vyjadřující viskózní efekty. Tím vznikne zjednodušená soustava rovnic pro stlačitelnou neviskózní tekutinu, tzv. Eulerovy rovnice. Bilanční rovnice je nutné doplnit rovnicí vyjadřující materiálové vlastnosti tekutiny, aby byl počet rovnic stejný jako počet neznámých.

2.1 2D Navierovy-Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice vyjadřují bilanci hmotnosti, hybnosti a energie tekutiny. Bilanci obecné veličiny \mathbf{Q} o hustotě \mathbf{q} lze pro materiálový objem ω s hranicí $\partial\omega$ obecně zapsat ve tvaru [1]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) dv = - \oint_{\partial\omega} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) da + \int_{\omega} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\omega} \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (2.1)$$

kde \mathbf{f}_v je hustota viskózního toku \mathbf{Q} , \mathbf{p} je hustota vnitřní produkce \mathbf{Q} a \mathbf{z} hustota vnější produkce \mathbf{Q} . Zde použitý předpoklad, že hustota toku \mathbf{f}_v plochou $\partial\omega$ závisí pouze na normále plochy \mathbf{n} a nikoliv na dalších jejích parametrech, např. křivosti, se nazývá *Cauchyho postulát*. Z něj dále vyplývá, že \mathbf{f}_v může být pouze lineární funkcí \mathbf{n} :

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.2)$$

kde $\boldsymbol{\phi}$ se rovněž označuje jako hustota toku. Obecně může být hustota \mathbf{q} (a tedy i \mathbf{f}_v , \mathbf{p} a \mathbf{z}) tenzor libovolného řádu. Pro \mathbf{q} řádu n je hustota toku $\boldsymbol{\phi}$ tenzor řádu $(n + 1)$. Na základě *Reynoldsova transportního teorému* lze při spojitosti polí vystupujících v rovnici získat obecnou lokální bilanci:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\phi} + \mathbf{q}\mathbf{v}) - \mathbf{p} - \mathbf{z} = 0 \quad (2.3)$$

V přírodě se však vyskytuje řada jevů, při kterých se objevují nespojitosti. Vzhledem k tomu je žádoucí formulovat bilanční rovnici v integrálním tvaru, tedy pro určitý objem.

V případě libovolného (nemateriálového) objemu V s hranicí ∂V bilance zní:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{q} dv + \oint_{\partial V} (\phi + \mathbf{q}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da = \int_V \mathbf{p} dv + \int_V \mathbf{z} dv, \quad (2.4)$$

Oproti bilanci pro materiálový objem (2.1) zde přibyl člen $\oint_{\partial V} (\mathbf{q}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da$, vyjadřující konvektivní tok veličiny \mathbf{Q} hranicí nemateriálového objemu.

Soustava Navierových-Stokesových rovnic zahrnuje bilanci pro hmotnost, hybnost a energii [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{F}(\mathbf{W}), \mathbf{G}(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{W}) dV \quad (2.5)$$

Vektor tzv. *konzervativních proměnných* \mathbf{W} má ve 2D čtyři složky - ρ je hustota tekutiny, u a v složky vektoru rychlosti tekutiny a e její celková energie :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

\mathbf{G} a \mathbf{F} představují x -ovou a y -ovou složku toku hranicí objemu V . Tok se skládá z konvektivní ($\mathbf{F}^c, \mathbf{G}^c$) a viskózní části ($\mathbf{F}^v, \mathbf{G}^v$):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}^c - \mathbf{F}^v, & \mathbf{F}^c &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, & \mathbf{F}^v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}^c - \mathbf{G}^v, & \mathbf{G}^c &= \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}, & \mathbf{G}^v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

přičemž p je tlak, τ tenzor tečného napětí a q tepelný tok. P je zdrojový člen, jehož složky F_x a F_y vyjadřují vnější síly působící na tekutinu a Q vnější tepelný zdroj:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ F_y \\ Q \end{bmatrix},$$

Počet neznámých je vyšší než počet rovnic a proto je potřeba soustavu doplnit dalšími rovnicemi. Při předpokladu ideálního plynu lze pro tlak použít vztah:

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right], \quad (2.7)$$

kde γ je Poissonova konstanta. Pro newtonskou tekutinu o dynamické viskozitě η a součiniteli tepelné vodivosti λ pak platí následující vztahy pro tečná napětí τ_{ij} a tepelné toky q_i :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2\eta}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \frac{2\eta}{3} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), & q_x &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, & q_y &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Oproti 3D Navier-Stokesovým rovnicím, u nichž existence a jednoznačnost řešení zůstává otevřenou otázkou a je jedním ze sedmi *Problémů tisíciletí* (Millennium Prize Problems) vyhlášených *Clayovým matematickým institutem* [3], byly pro dvoudimenzionální případ podány důkazy již před poměrně dlouhou dobou. Jean Leray dokázal v roce 1934 existenci a jednoznačnost slabých řešení v \mathbb{R}^2 a v roce 1962 dokázala O. Ladyzhenskaya existenci a jednoznačnost silných řešení [4].

Kromě nejjednodušších případů však nejsou známa či ani neexistují analytická řešení a je proto nutné řešit problém numericky. Existuje několik přístupů, z nichž nejobvyklejší je *metoda konečných objemů*, použitá i v této práci. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ rozdělíme na systém nepřekrývajících se konečných objemů V_k , přičemž $\Omega = \cup V_k$. Řešení $\mathbf{W}(x, y, t)$ pak musí vyhovovat integrální bilanci (2.5) v každém objemu V_k a okrajovým podmínkám na $\partial\Omega$. V této práci je pro řešení použita *metoda ustalování*, která předpokládá, že se při stacionárních okrajových podmínkách systém vyvíjí k ustálenému stavu a za řešení považuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}$.

2.2 2D Eulerovy rovnice

V řadě případů, například při proudění s vysokým Reynoldsovým číslem, kdy je mezní vrstva velmi tenká ve srovnání s rozměry těles a nedochází k jejímu odtržení, lze zanedbat viskózní efekty. Vynecháním viskózních toků v Navierových-Stokesových rovnicích vznikne soustava Eulerových rovnic [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{F}(\mathbf{W}), \mathbf{G}(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{W}) dV \quad (2.9)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ F_y \\ Q \end{bmatrix},$$

popisující proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Stejně jako v případě Navierových-Stokesových rovnic musí být soustava doplněna o rovnici pro tlak.

Při dostatečné hladkosti řešení lze (2.9) použitím Gaussovy věty převést do diferenciálního tvaru:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{W})}{\partial y} = \mathbf{P} \quad (2.10)$$

Řešením rovnic v diferenciálním tvaru dostaneme pouze klasické řešení úlohy. Pro získání slabého řešení je třeba použít integrální tvar Eulerových rovnic (2.9). Na diferenciálním tvaru lze ovšem ukázat klíčovou vlastnost soustavy Eulerových rovnic, její *hyperbolicitu*. Jacobiho matice $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{W}$ má reálná vlastní čísla $\lambda_1^1 = u - c$, $\lambda_2^1 = u + c$, $\lambda_3^1 = u$, $\lambda_4^1 = u$. Obdobně matice $\mathbf{B} = \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{W}$ má reálná vlastní čísla $\lambda_1^2 = v - c$, $\lambda_2^2 = v + c$, $\lambda_3^2 = v$, $\lambda_4^2 = v$ [6]. Soustava Eulerových rovnic je hyperbolická a lze ji přepsat do diagonalizovaného tvaru.

2.3 Quasi-1D Eulerovy rovnice

Předpokládáme-li výrazně převládající proudění jedním směrem, například v dýze s měnícím se průřezem, lze použít *quasi-1D Eulerovy rovnice*. Proměnné v nich závisí pouze na jedné prostorové souřadnici x a geometrie je zohledněna prostřednictvím průřezu $A(x)$. V diferenciální podobě znějí *quasi-1D Eulerovy rovnice* [6]:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{P} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ e A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho A u \\ \rho A u^2 + p A \\ (e + p) u A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dA}{dx} p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

Pokud se v řešení mohou vyskytovat nespojitosti, jako například rázové vlny, je nutné vycházet z integrálního tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + [\mathbf{F}(\mathbf{W})]_{x_L}^{x_R} = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{W}) dV, \quad (2.13)$$

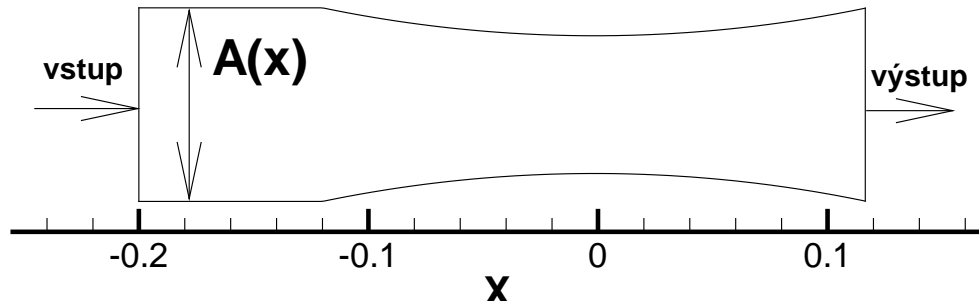
kde x_L a x_R jsou levá a pravá hranice objemu V . Soustavu rovnic je opět nutné doplnit rovnicí pro tlak, v případě ideálního plynu:

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right] \quad (2.14)$$

Vlastní čísla Jacobiho matice $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{W}$ jsou reálná: $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$, $\lambda_3 = u$. Soustava quasi-1D Eulerových rovnic je ryze hyperbolická.

2.4 Formulace úlohy

Úloha pro řešení 1D jednofázového proudění je založena na quasi-1D Eulerových rovnicích (2.13), doplněných rovnicí pro tlak ideálního plynu (2.14). Hledáme vektor $\mathbf{W}(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, který je řešením této soustavy na oblasti $\Omega = I \times \mathbb{R}^+$ a vyhovuje okrajovým podmínkám na $\partial\Omega$. Zvolená geometrie je reprezentována průřezem $A(x)$ v Eulerových rovnicích.



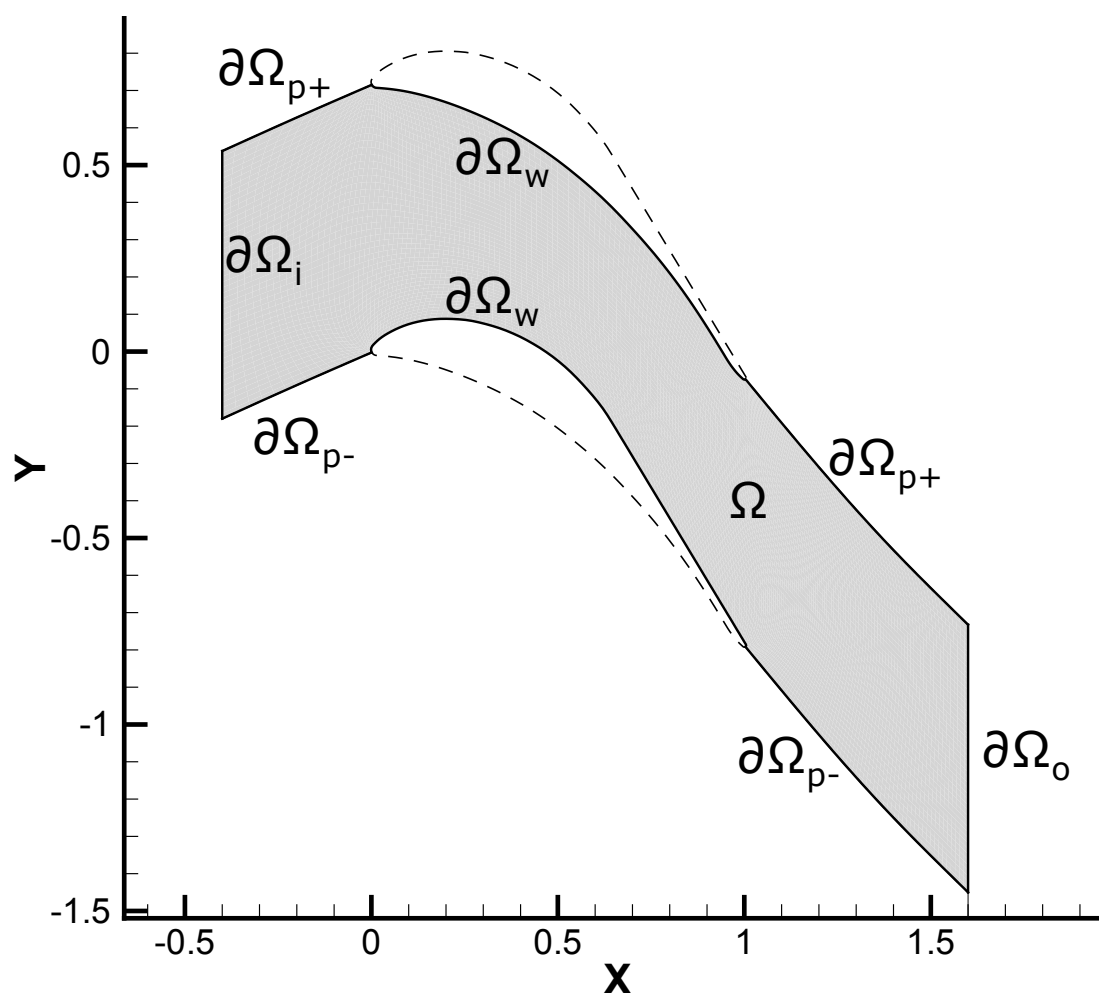
Obrázek 2.1: Příklad výpočetní oblasti 1D

Počáteční podmínky odpovídají klidovému stavu s teplotou T_0 , tlakem p_0 a nulovou rychlostí u_0 .

Definice okrajových podmínek vychází z vlastností linearizované soustavy 1D Eulerových rovnic, která má vlastní čísla $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$, $\lambda_3 = u$ (viz Kapitola 2.3). Předpokládáme-li podzvukové proudění na vstupu, jsou dvě vlastní čísla na vstupu kladná a jedno záporné, je zde tedy potřeba zadat dva parametry (např. klidovou teplota a tlak) a jeden extrapolovat z vnitřku oblasti.

Zadání parametrů na výstupu závisí na režimu proudění: v případě podzvukového režimu jsou dvě vlastní čísla na výstupu kladná a jedno záporné, tudíž je třeba nastavit jeden parametr (např. výstupní tlak p_{out}) a dva extrapolovat z vnitřku oblasti. Pokud je rychlost proudění na výstupu nadzvuková, jsou všechna tři vlastní čísla kladná a nenastavuje se žádný parametr.

V případě 2D úlohy pro 2D Eulerovy rovnice (2.9) doplněné rovnicí pro tlak ideálního plynu (2.7) hledáme vektor $\mathbf{W}(x, y, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, který je řešením této soustavy rovnic na oblasti $\Omega = \Omega_{xy} \times \mathbb{R}^+$, kde $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$, a vyhovuje okrajovým podmínkám na $\partial\Omega$.



Obrázek 2.2: Příklad výpočetní oblasti 2D

Počáteční podmínky jsou podobně jako v 1D případě definovány klidovým stavem. Pro určení počtu okrajových podmínek linearizujeme Eulerovy rovnice (viz Kapitola 2.2) a

vektor Jacobiho matic \mathbf{A} , \mathbf{B} promítneme do normálového směru k hranici oblasti:

$$\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.15)$$

kde \mathbf{n} je vnitřní normála k hranici. Označme jako u_n rychlost promítnutou do směru \mathbf{n} a vzniklá matice \mathbf{A}_n má vlastní čísla $\lambda_1^n = u_n - c$, $\lambda_2^n = u_n + c$, $\lambda_3^n = u_n$, $\lambda_4^n = u_n$ [13]. Počet předepisovaných okrajových podmínek odpovídá podobně jako v 1D případě počtu kladných vlastních čísel \mathbf{A}_n . Kromě *vstupu* (na Obrázku 2.2 označen jako $\partial\Omega_i$) a *výstupu* ($\partial\Omega_o$) se ve 2D případě objevují okrajové podmínky pro další typy hranice, např. *stěnu* ($\partial\Omega_w$) a *periodickou hranici* ($\partial\Omega_{p+}$ a $\partial\Omega_{p-}$).

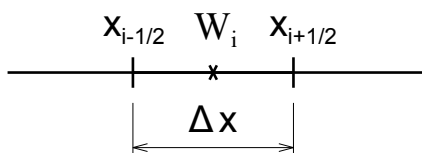
Kapitola 3

Numerické řešení 1D jednofázového proudění

3.1 Metoda konečných objemů

Diskretizace rovnic pomocí metody konečných objemů je založena na integrálním tvaru zákonů zachování, vyjádřených Navierovými-Stokesovými či Eulerovými rovnicemi [5], a bude zde ukázána na příkladu quasi-1D Eulerových rovnic (2.13). Oblast je vygenerovanou sítí rozdělena na konečný počet navzájem se nepřekrývajících objemů, které tvoří její úplné pokrytí. Diskretizace rovnic pracuje s průměrnými hodnotami proměnných \mathbf{W} v objemu sítě vyjádřenými jako:

$$\mathbf{W}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} dx, \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Objem sítě v 1D

Obdobně definujeme \mathbf{P}_i jako průměrnou hodnotu \mathbf{P} v buňce i a po dosazení do (2.13) získáme

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{W}_i \right) \Delta x + \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} = \mathbf{P}_i \Delta x \quad (3.2)$$

Časovou derivaci můžeme diskretizovat Eulerovou explicitní metodou 1. řádu:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t}, \quad (3.3)$$

čímž vznikne explicitní schéma pro výpočet nové časové vrstvy:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{P}_i \Delta t \quad (3.4)$$

Numerický tok $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ odpovídá hodnotě toku $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ na hranici mezi buňkami i a $i + 1$. Schéma (3.4) je typu *cell-centered* a počítá tedy s hodnotami \mathbf{W} umístěnými uprostřed buněk, pomocí nichž je nutné numerický tok na hranici aproximovat. Použito bylo Laxovo-Friedrichsovo schéma se sníženou viskozitou, které se řadí mezi centrální schémata s umělou disipací:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) - \epsilon \frac{\Delta x}{2\Delta t} (\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i), \quad \epsilon \in (0; 1) \quad (3.5)$$

Význam koeficientu ϵ lze ukázat na základě srovnání s centrálním schématem. Numerický tok je v jeho případě počítán z průměru hodnot v sousedních buňkách:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^C = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) \quad (3.6)$$

Laxovo-Friedrichsovo schéma lze pak vyjádřit na základě centrálního schématu:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^C - \epsilon \frac{\Delta x}{2\Delta t} (\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i) \quad (3.7)$$

Toto vyjádření dosadíme do (3.4):

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^C - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^C) + \frac{\epsilon}{2} (\mathbf{W}_{i+1}^n - 2\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_{i-1}^n) + \mathbf{P}_i \Delta t \quad (3.8)$$

$$\frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1}}{2\Delta x} = \epsilon \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\mathbf{W}_{i+1}^n - 2\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \mathbf{P}_i \quad (3.9)$$

Takovéto schéma odpovídá aproximaci diferenciální rovnice

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x = \epsilon \mu \mathbf{W}_{xx} + \mathbf{P} \quad (3.10)$$

Oproti původně řešené rovnici (2.11) se zde navíc objevuje difuzní člen \mathbf{W}_{xx} , násobený numerickou viskozitou $\mu = \Delta x^2 / (2\Delta t)$. Vliv numerické viskozity lze regulovat parametrem $\epsilon \in (0; 1)$: pro $\epsilon = 0$ bychom získali nestabilní centrální schéma, pro $\epsilon = 1$ vysoce disipativní klasické Laxovo-Friedrichsovo schéma.

Lze ukázat, že za předpokladu $\Delta t \approx \Delta x$ (viz podmínka stability (3.17) níže) je levá strana rovnice diskretizována s přesností $O(\Delta x)$ (časová derivace $O(\Delta x)$, prostorová derivace $O(\Delta x^2)$), zatímco disipativní člen na pravé straně představuje chybu řádu $O(\Delta x)$. Při zjemňování sítě se bude jeho vliv zmenšovat a řešení bude konvergovat k řešení původní rovnice [7]. Laxovo-Friedrichsovo schéma je řádu přesnosti $O(\Delta x, \Delta t)$ [11].

Pro analýzu stability schématu se často používá quasi-lineární forma rovnice [6]:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}_x = \mathbf{P}, \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{W}$ je Jacobiho matice, která má vzhledem k hyperboličnosti Eulerových rovnic reálná vlastní čísla:

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - c, \quad \lambda_3 = u + c \quad (3.12)$$

Soustavu Eulerových rovnic můžeme za pomoci diagonální matice vlastních čísel $\mathbf{\Lambda}$ a matice vlastních vektorů \mathbf{T} zapsat v charakteristickém tvaru

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_x = \hat{\mathbf{P}}, \quad (3.13)$$

kde

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{W}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.14)$$

Rovnice vzniklé soustavy jsou nezávislé a stabilitu schématu lze pak zkoumat na reprezentativní modelové rovnici

$$v_t + \lambda v_x = p \quad (3.15)$$

Pro stabilitu Laxova-Friedrichsova schématu platí podmínka [8]:

$$0 < \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \rho(\mathbf{A})^2 \leq \epsilon \leq 1, \quad (3.16)$$

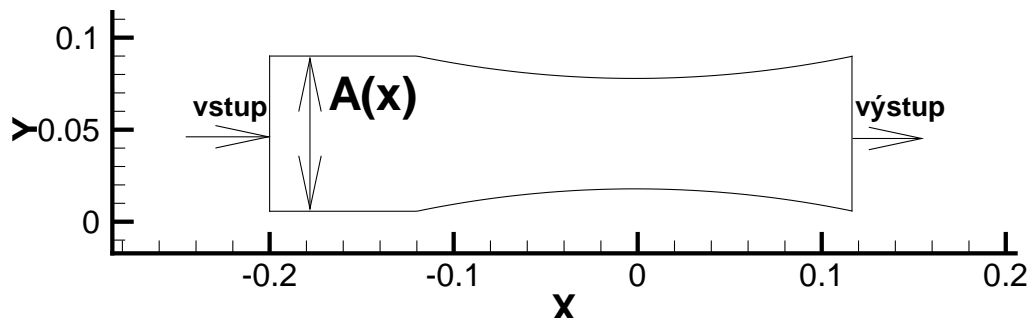
kde $\rho(\mathbf{A}) = |u| + c$ je spektrální poloměr Jacobiho matice. Zvolíme-li nejprve hodnotu numerické vazkosti schématu $\epsilon \in (0; 1)$, pak pro volbu časového kroku platí:

$$\Delta t \leq \sqrt{\epsilon} \frac{\Delta x}{|u| + c} \quad (3.17)$$

Vzhledem k linearizaci použité při odvození může být ve skutečnosti při výpočtu nutné časový krok snížit.

3.2 Numerické řešení quasi-1D proudění dýzou

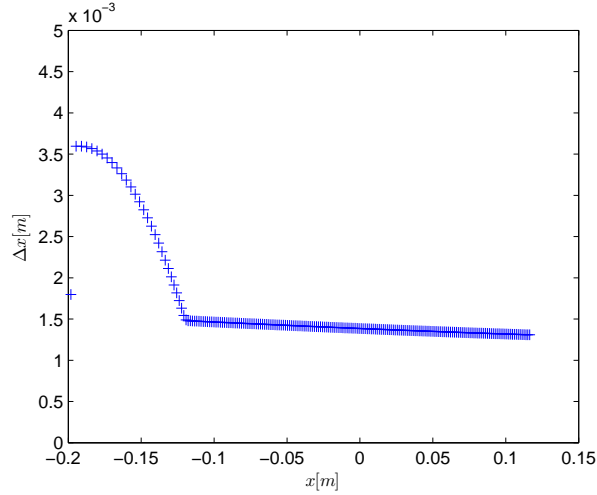
Numerické schéma popsané v Kapitole 3.1 bylo použito pro výpočet proudění v Barschdorffově dýze [12]. Její geometrie je tvořena rovnou vstupní částí, na kterou navazuje oblouk s poloměrem 584mm a kritickou šířkou hrdla 60mm (Obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Geometrie Barschdorffovy dýzy

Velikost kroku sítě, se kterou byla provedena prostorová diskretizace oblasti řešení, je zobrazena na Obrázku 3.3.

Počáteční podmínkou pro výpočet byl klidový stav s teplotou $T_0 = 273.145K$, tlakem $p_0 = 101325Pa$ a rychlostí proudění $u_0 = 0$. Výpočet byl proveden pro vzduch o parametrech $r = 287J/kgK$ a $\gamma = 1.4$.



Obrázek 3.3: Velikost kroku 1D sítě

V případě subsonického proudění je jako okrajové podmínky na vstupu potřeba zadat dva parametry (klidový tlak p_0 a klidovou teplotu T_0) a jeden extrapolovat z vnitřku oblasti (Machovo číslo M). Hodnoty \mathbf{W} na vstupu lze spočítat na základě vztahů pro izoentropické proudění ideálního plynu [9]:

$$\begin{aligned}\rho &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \rho_0 \\ \rho u &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2}} M \rho_0 c_0 \\ e &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{M^2}{2}\right) \rho_0 c_0^2,\end{aligned}\tag{3.18}$$

kde pro klidovou rychlost zvuku v ideálním plynu platí vztah

$$c_0 = \sqrt{\gamma r T_0}\tag{3.19}$$

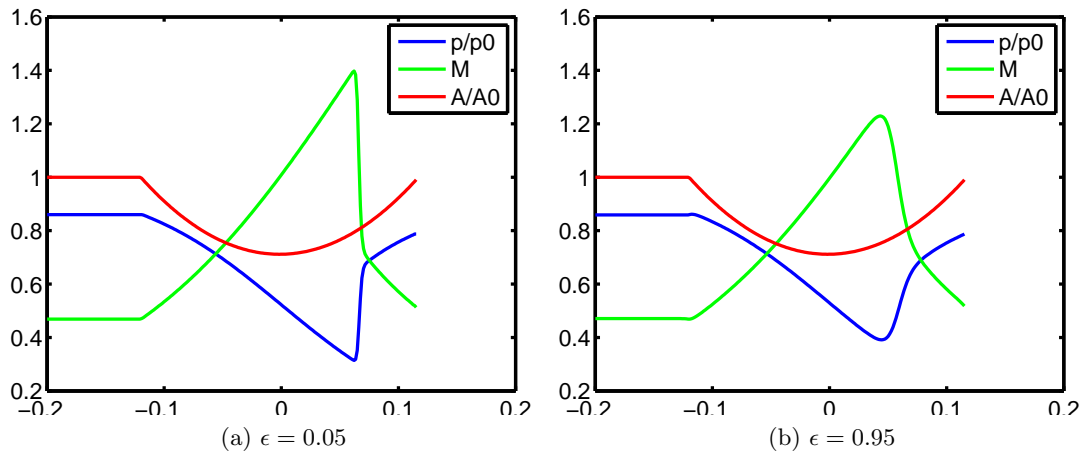
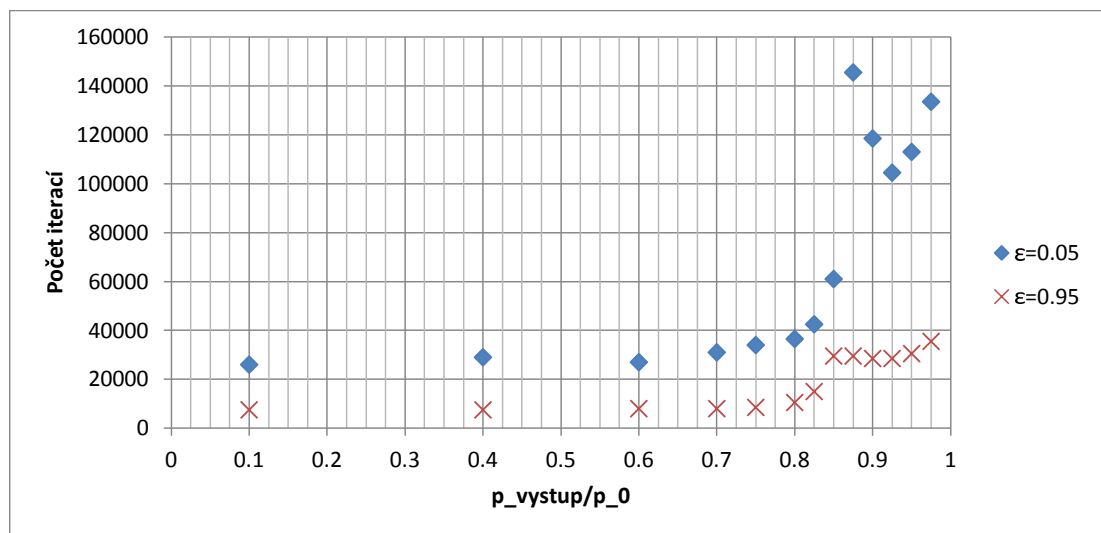
V případě podzvukové výstupní rychlosti je na výstupu třeba nastavit jeden parametr (zvolen byl tlak p) a dva extrapolovat z vnitřku oblasti (hustota ρ a rychlost u). Celková energie je pak korigována dle následujícího vztahu:

$$e = \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2\tag{3.20}$$

Pokud je rychlost na výstupu nadzvuková, nenastavuje se žádný parametr. Výpočet byl proveden pro různé výstupní tlaky od $p_{out} = 0.1p_0$ po $p_{out} = 0.975p_0$. Jako kritérium konvergence bylo zvoleno residuum hustoty Res_ρ , které aproximuje průměrnou hodnotu časové derivace hustoty v k -té iteraci:

$$Res_\rho^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\rho_i^k - \rho_i^{k-1}|}{\Delta t^k}\tag{3.21}$$

Výpočet byl zastaven, pokud jeho hodnota klesla pod $\delta = 10^{-8}$.

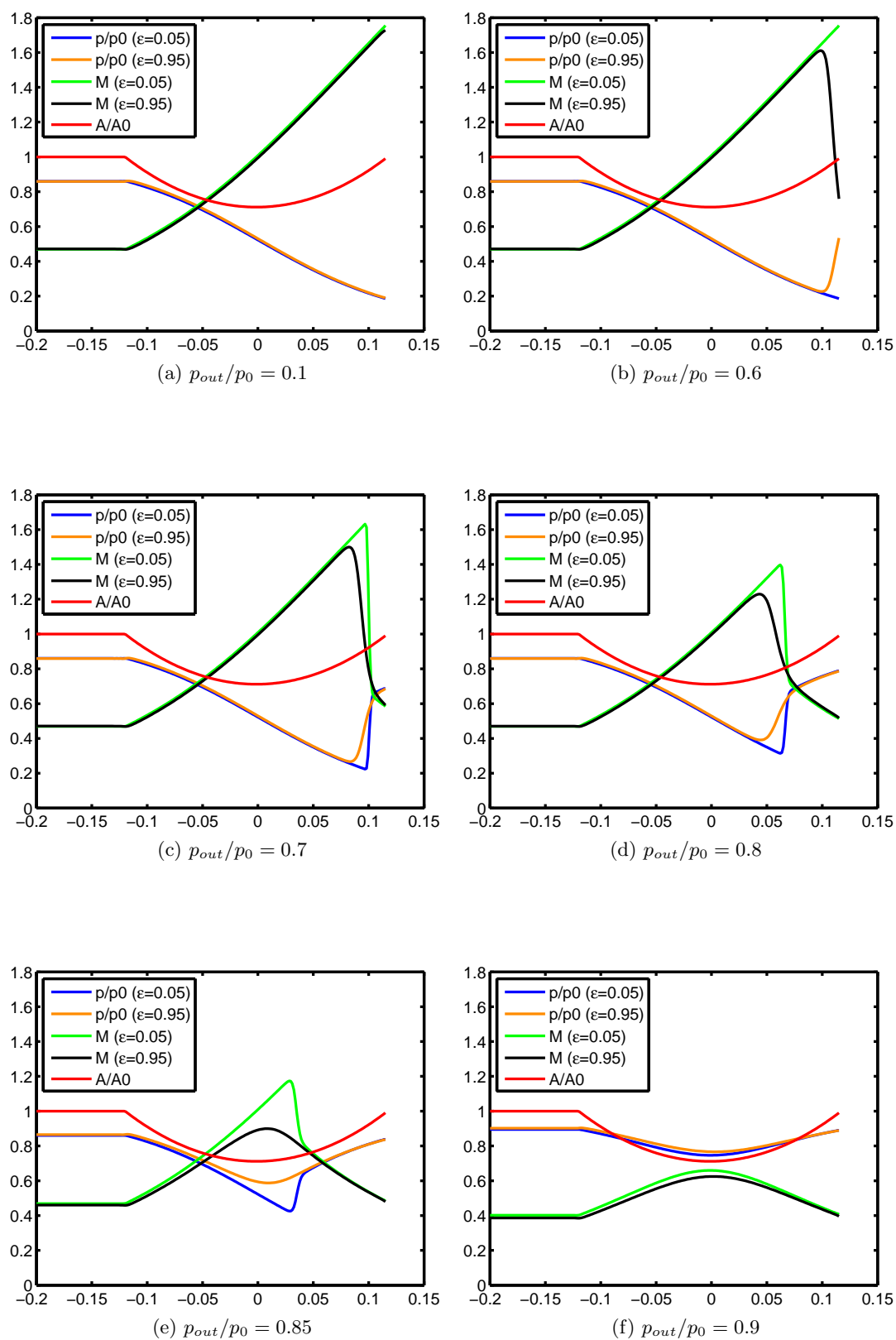

 Obrázek 3.4: Průběh tlaku a Machova čísla v dýze pro výstupní tlak $p_{out} = 0.8p_0$


Obrázek 3.5: Závislost počtu iterací na výstupním tlaku

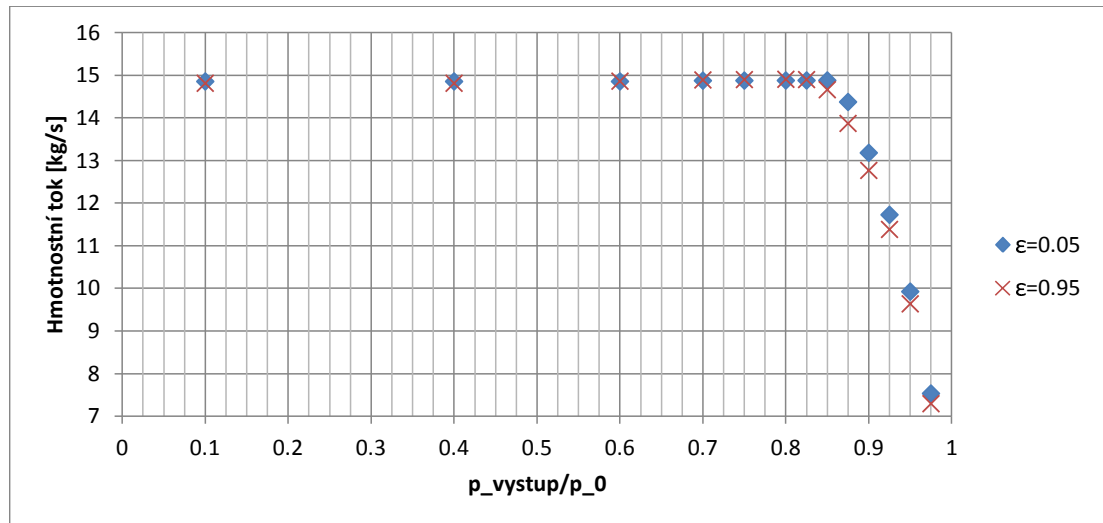
U Laxova-Friedrichsova schématu je možné nastavit hodnotu koeficientu viskozity ϵ . Na Obrázku 3.4 jsou zobrazeny výsledky výpočtu pro $\epsilon = 0.05$ a $\epsilon = 0.95$ při výstupním tlaku $p_{out} = 0.8p_0$.

Hodnota koeficientu viskozity zjevně ovlivňuje ostrost zachycení rázové vlny. Při jeho vyšší hodnotě se zvětšuje vliv disipativního členu a dochází k vyhlazení rázové vlny, ke snížení maximálního Machova čísla a zvýšení minimálního tlaku. Při snížení ϵ se Laxovo-Friedrichsovo schéma blíží centrálnímu schématu, díky čemuž je rázová vlna lépe zachycena. Snižování koeficientu viskozity však s sebou přináší negativní důsledky v podobě zpomalení konvergence, které se projeví zvláště při zvýšení výstupního tlaku nad $0.85p_0$ (Obr. 3.5).

Zde nastane zpomalení konvergence i v případě vysoké hodnoty koeficientu viskozity ($\epsilon = 0.95$), avšak méně výrazné než v případě jeho nízké hodnoty ($\epsilon = 0.05$). Zhoršení konvergence při výstupních tlacích nad $0.85p_0$ lze vysvětlit tím, že je v tomto případě již proudění v celé dýze podzvukové (Obrázek 3.6f) a proudění se chová jako téměř nestlačitelné.



Obrázek 3.6: Průběh tlaku a Machova čísla v dýze pro různé výstupní tlaky



Obrázek 3.7: Závislost hmotnostního toku na výstupním tlaku

Koeficient viskozity ϵ se projeví také na hodnotě hmotnostního toku dýzou (Obrázek 3.7). Při výpočtu s $\epsilon = 0.95$ dojde k aerodynamickému ucpání dýzy při výstupním tlaku $p_{out} = 0.825p_0$, zatímco při $\epsilon = 0.05$ nastává tento jev již při $p_{out} = 0.85p_0$. Rozdílnost výsledků dosažených s různými hodnotami ϵ vynikne na Obrázku 3.6e, který zobrazuje průběh Machova čísla a tlaku v dýze při $p_{out} = 0.85p_0$. Při výpočtu s $\epsilon = 0.05$ je část proudění nadzvuková s následující rázovou vlnou a Machovo číslo dosahuje maximální hodnoty $M = 1.17$. Vysoká hodnota $\epsilon = 0.95$ působí natolik disipativně, že rázovou vlnu zcela vyhladí a celé proudění je podzvukové s maximálním Machovým číslem $M = 0.9$. K dosažení realistického výsledku je proto nutné volit hodnotu ϵ tak nízkou, jak je jen možné při zachování stability schématu.

Kapitola 4

Numerické řešení 2D jednofázového proudění

4.1 Metoda konečných objemů ve 2D

Metoda konečných objemů v 1D byla již představena v Kapitole 3.1, zde bude pouze ukázáno její rozšíření do dvou dimenzí pro Eulerovy rovnice (2.9) bez zdrojového členu. Průměrná hodnota \mathbf{W} , umístěná ve středu objemu sítě Ω_p (*cell-centered*), je definována jako:

$$\mathbf{W}_p = \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{\Omega_p} \mathbf{W} d\Omega \quad (4.1)$$

Dosazením do (2.9) bez zdrojového členu získáme rovnici

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_p = -\frac{1}{|\Omega_p|} \oint_{\partial\Omega_p} (\mathbf{F}(\mathbf{W}), \mathbf{G}(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2)$$

kde \mathbf{n} je vnější normála k hranici objemu. Nyní je třeba aproximovat časovou derivaci \mathbf{W}_p a křivkový integrál toků na hranici objemu. Časová derivace byla stejně jako v 1D případě aproximována pomocí Eulerovy explicitní metody 1. řádu:

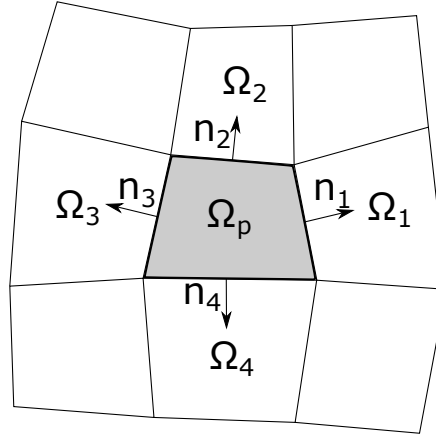
$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_p \approx \frac{\mathbf{W}_p^{n+1} - \mathbf{W}_p^n}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

Při aproximaci toků \mathbf{F} , \mathbf{G} se obvykle předpokládá, že jsou konstantní na části hranice společné pro dva objemy [5]. Křivkový integrál se tak na každé části hranice aproximuje součinem této konstantní hodnoty toku s délkou hranice:

$$\oint_{\partial\Omega_p} (\mathbf{F}(\mathbf{W}), \mathbf{G}(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{k=1}^m (\mathbf{F}_{k,p}, \mathbf{G}_{k,p}) \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k \quad (4.4)$$

Zde m je počet objemů, které s Ω_p mají společnou část hranice, ΔS_k délka hranice společné objemům Ω_p a Ω_k a \mathbf{n}_k vnější normála na tuto hranici. Označení $\mathbf{F}_{k,p}$ (resp. $\mathbf{G}_{k,p}$) znamená hodnotu toku \mathbf{F} (resp. \mathbf{G}) aproximovanou na hranici objemů Ω_p , Ω_k . Označení \mathbf{F}_k bude použito jako zkrácený zápis $\mathbf{F}(\mathbf{W}_k)$ pro hodnotu toku \mathbf{F} v objemu Ω_k . Nyní dosadíme (4.3) a (4.4) do (4.2):

$$\mathbf{W}_p^{n+1} = \mathbf{W}_p^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_p|} \sum_{k=1}^m (\mathbf{F}_{k,p}, \mathbf{G}_{k,p}) \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k \quad (4.5)$$



Obrázek 4.1: Síť pro 2D metodu konečných objemů

$$\mathbf{W}_p^{n+1} = \mathbf{W}_p^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_p|} \sum_{k=1}^m \Phi_k(\mathbf{W}_p^n, \mathbf{W}_k^n), \quad (4.6)$$

čímž získáme explicitní schéma pro výpočet nové časové vrstvy. Pro výpočet toku Φ hranicí objemu pomocí hodnot \mathbf{W}_p a \mathbf{W}_k , umístěných uprostřed objemů, existuje řada různých numerických schémat. V následujících kapitolách bude ukázáno *Laxovo-Friedrichsovo* a *AUSM* schéma.

4.2 Laxovo-Friedrichsovo schéma se sníženou viskozitou

Stejně jako v 1D případě lze i ve dvou dimenzích Laxovo-Friedrichsovo schéma vyjádřit jako centrální schéma s doplněnými disipativními členy. Centrální schéma počítá tok na hranici jako průměr toků spočítaných z hodnot \mathbf{W} v přilehlých objemech:

$$\mathbf{F}_{k,p}^C = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_p), \quad \mathbf{G}_{k,p}^C = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_k + \mathbf{G}_p) \quad (4.7)$$

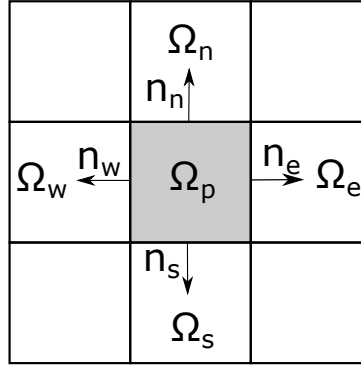
$$\Phi_k^C = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_p) n_{kx} + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_k + \mathbf{G}_p) n_{ky} \right] \Delta S_k \quad (4.8)$$

V Laxově-Friedrichsově schématu se oproti nestabilnímu centrálnímu schématu vyskytuje další člen, díky němuž dochází k utlumení oscilací:

$$\Phi_k^{LF} = \Phi_k^C - \epsilon \frac{|\Omega_p|}{4\Delta t} (\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_p) \quad (4.9)$$

Význam tohoto členu se stane zjevným po dosazení do (4.6). Pro zjednodušení uvažujeme rovnoměrnou kartézskou síť s kroky Δx , Δy :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_p^{n+1} = \mathbf{W}_p^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} & \left[(\mathbf{F}_e^n + \mathbf{F}_p^n) \frac{\Delta y}{2} + (\mathbf{G}_n^n + \mathbf{G}_p^n) \frac{\Delta x}{2} \right. \\ & \left. - (\mathbf{F}_w^n + \mathbf{F}_p^n) \frac{\Delta y}{2} - (\mathbf{G}_s^n + \mathbf{G}_p^n) \frac{\Delta x}{2} \right. \\ & \left. - \epsilon \frac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t} (\mathbf{W}_s^n + \mathbf{W}_e^n + \mathbf{W}_n^n + \mathbf{W}_w^n - 4\mathbf{W}_p^n) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$



Obrázek 4.2: Kartézská síť pro 2D metodu konečných objemů

$$\begin{aligned}
 & \frac{W_p^{n+1} - W_p^n}{\Delta t} + \frac{F_e^n - F_w^n}{2\Delta x} + \frac{G_n^n - G_s^n}{2\Delta y} = \\
 & = \epsilon \left(\frac{W_w - 2W_p + W_e}{\Delta x^2} \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} + \frac{W_n - 2W_p + W_s}{\Delta y^2} \frac{\Delta y^2}{4\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Toto schéma odpovídá aproximaci diferenciální rovnice:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \epsilon (\mu_x \mathbf{W}_{xx} + \mu_y \mathbf{W}_{yy}), \tag{4.12}$$

kde $\mu_x = \Delta x^2/(4\Delta t)$, resp. $\mu_y = \Delta y^2/(4\Delta t)$, je numerická viskozita schématu ve směru osy x , resp. y . Hodnota koeficientu viskozity $\epsilon \in (0; 1)$ ovlivňuje disipativnost schématu. Jak již bylo ukázáno v Kapitole 3.1, Laxovo-Friedrichsovo schéma je prvního řádu přesnosti v prostoru i v čase. Podobně jako v 1D případě lze pomocí linearizace Eulerových rovnic odvodit podmínku pro stabilitu Laxova-Friedrichsova schématu:

$$\Delta t \leq \min \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\Delta x}{|u| + c}; \sqrt{\epsilon} \frac{\Delta y}{|v| + c} \right) \tag{4.13}$$

4.3 AUSM schéma

Centrální schémata s umělou disipací, ke kterým se řadí i v předchozí kapitole představené Laxovo-Friedrichsovo schéma, jsou oblíbená díky své jednoduchosti a výpočetní nenáročnosti. Případné nespojitosti v řešení, například rázové vlny, však dokáží zachytit relativně málo přesně [5]. Tato nevýhoda se ukázala při aplikaci na proudění lopatkovou mříží (Kapitola 4.5), kdy získané řešení neodpovídalo experimentálním výsledkům. Snaha získat přesnější výsledky vedla k použití AUSM schématu, patřícího do skupiny FVS (Flux-Vector Splitting) metod.

FVS schémata je možné klasifikovat jako druh upwind schémat, protože pro výpočet toků na hranicích buněk je zohledňován směr šíření informací na síti. Vektor toků je rozložen na dvě části: buď podle znaménka určitých charakteristických proměnných, nebo na konvektivní a tlakovou část. Do druhé skupiny patří i použité schéma AUSM (Advection Upstream Splitting Method), jehož autory jsou Liou a Steffen [17]. Výhodou FVS schémat oproti centrálním schématům s umělou disipací je výrazně lepší zachycení rázových vln při pouze málo zvýšené výpočetní náročnosti.

Při řešení uvažujeme pouze složku vektoru toku kolmou k hranici objemu [18]. Natočíme souřadnicový systém tak, aby osa x směřovala ve směru vnější normály na hranici objemu a osa y byla s touto hranicí rovnoběžná. Získaná soustava se formálně podobá 1D Eulerovým rovnicím, avšak složky vektorů \mathbf{W} a \mathbf{F} jsou stejné jako v případě 2D Eulerových rovnic:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}(\mathbf{W})_x = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Vlastní čísla této hyperbolické soustavy rovnic jsou $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = \lambda_3 = u$, $\lambda_4 = u + a$. Vektor toků je rozdělen na *konvektivní část* $\mathbf{F}^{(c)}$ a *tlakovou část* $\mathbf{F}^{(p)}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{(c)} + \mathbf{F}^{(p)} \quad (4.16)$$

Zavedením Machova čísla $\tilde{M} = u/a$, které může v závislosti na rychlosti u nabývat i záporných hodnot, je možné zapsat konvektivní tok jako:

$$\mathbf{F}^{(c)} = \tilde{M} \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ a(e + p) \end{bmatrix} = \tilde{M} \hat{\mathbf{F}}^{(c)} \quad (4.17)$$

Tok $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ na hranici objemů i a $i + 1$ je definován jako:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(c)} + \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} = \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}} \left[\hat{\mathbf{F}}^{(c)} \right]_{i,i+1} + \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}, \quad (4.18)$$

kde

$$[\bullet]_{i,i+1} = \begin{cases} [\bullet]_i, & \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ [\bullet]_{i+1}, & \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}} \leq 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že vektor toku se mění v závislosti na směru konvekce, který je vyjádřen znaménkem Machova čísla $\tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}$. Pro Machovo číslo na rozhraní objemů je definován vztah:

$$\tilde{M}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{M}_i^+ + \tilde{M}_{i+1}^- \quad (4.20)$$

Pro pozitivní a negativní komponenty Machova čísla je dáno:

$$\tilde{M}^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(\tilde{M} \pm 1)^2, & |\tilde{M}| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(\tilde{M} \pm |\tilde{M}|), & |\tilde{M}| > 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Podobně tlak na hranici objemů sestává ze složek z obou objemů:

$$\tilde{p}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{p}_i^+ + \tilde{p}_{i+1}^- \quad (4.22)$$

Pro definici pozitivních a negativních komponentů tlaku navrhují Liou a Steffen dvě možnosti [18], z nichž byla vybrána tato:

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}p(1 \pm \tilde{M}), & |\tilde{M}| \leq 1, \\ \frac{1}{2}p \frac{(\tilde{M} \pm |\tilde{M}|)}{\tilde{M}}, & |\tilde{M}| > 1. \end{cases} \quad (4.23)$$

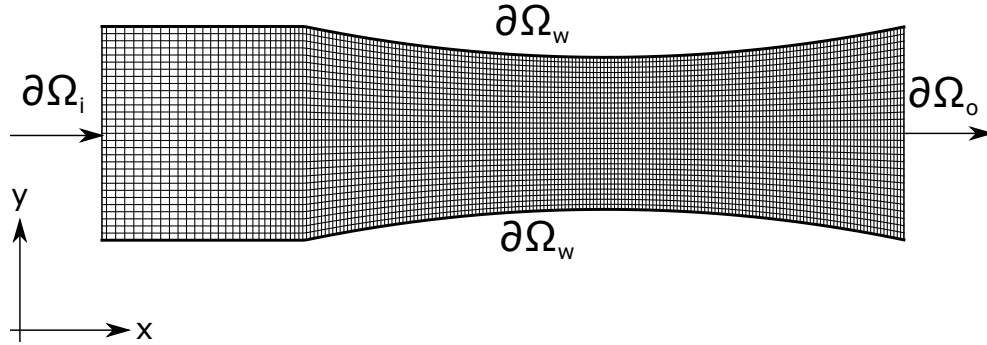
Po spočítání toku \mathbf{F} na hranici objemů je třeba jeho komponenty transformovat zpět do původního souřadnicového systému.

Podmínkou pro stabilitu AUSM schématu na kartézské síti o krocích Δx , Δy je časový krok [18]:

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x}{|u| + c}; \frac{\Delta y}{|v| + c} \right) \quad (4.24)$$

4.4 Numerické řešení 2D proudění dýzou

Stejně jako v případě quasi-1D výpočtu (Kapitola 3.2) byla použita geometrie Barschdorffovy dýzy. V oblasti byla vygenerována strukturovaná čtyřúhelníková algebraická síť s krokem ve směru osy x stejným jako v 1D případě (Obrázek 3.3) a s rovnoměrným krokem ve směru osy y .



Obrázek 4.3: Diskretizace Barschdorffovy dýzy pro 2D metodu konečných objemů

Jako počáteční podmínka pro výpočet byl uvažován klidový stav s teplotou $T_0 = 273.145K$, tlakem $p_0 = 101325Pa$ a rychlostí proudění $u_0 = v_0 = 0ms^{-1}$. Výpočet byl proveden pro vzduch o parametrech $r = 287J/kgK$ a $\gamma = 1.4$.

V případě předpokládaného subsonického vstupu má Jacobiho matice \mathbf{A}_n tři kladná vlastní čísla a je proto třeba zadat na vstupu $\partial\Omega_i$ tři parametry a jeden extrapolovat z vnitřku oblasti (podrobněji viz Kapitola 2.4). Zadáván byl klidový tlak p_0 , klidová teplota T_0 a úhel $\alpha_0 = 0^\circ$, jenž je definován jako úhel vektoru rychlosti \mathbf{u} : $\alpha = \arctg(v/u)$. Z vnitřku oblasti bylo extrapolováno Machovo číslo a následně pomocí vztahů pro izentropické proudění [9] dopočítány hodnoty vektoru \mathbf{W} na vstupu:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \rho_0 \\ \rho u &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2}} M \rho_0 c_0 \cos \alpha \\ \rho v &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2}} M \rho_0 c_0 \sin \alpha \\ e &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{M^2}{2} \right) \rho_0 c_0^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

Okrajové podmínky na výstupu $\partial\Omega_o$ závisejí na tom, zda je zde proudění podzvukové či nadzvukové. Při podzvukovém výstupu je jedno vlastní číslo matice \mathbf{A}_n kladné

($\lambda_2^n = u_n + c$, kde u_n je rychlost ve směru vnitřní normály na hranici a je tedy záporná) a nastavuje se proto jeden parametr, konkrétně výstupní tlak. Pokud by se tlak předepsal konstantní na celém výstupu, mohlo by dojít k oscilacím v řešení a nefyzikálním výsledkům [2], obzvláště v případě lopatkové mříže uvedené v následující kapitole. Z vnitřku oblasti je proto extrapolováno rozložení tlaku $p_{out}(\xi)$, které se následně přenásobí tak, aby průměrný tlak nového tlakového rozložení $\hat{p}_{out}(\xi)$ odpovídal předepsané hodnotě p_{given} :

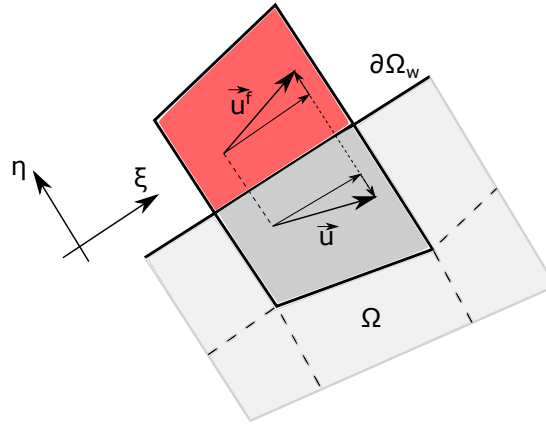
$$\bar{p}_{out} = \frac{1}{\Xi} \int_0^{\Xi} p_{out}(\xi) d\xi, \quad \hat{p}_{out}(\xi) = p_{out}(\xi) \frac{p_{given}}{\bar{p}_{out}}, \quad (4.26)$$

kde $\xi \in \langle 0; \Xi \rangle$ je souřadnice podél hranice $\partial\Omega_o$. Výsledné rozložení tlaku slouží ke korekci energie na výstupu:

$$e = \frac{\hat{p}_{out}(\xi)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (4.27)$$

V případě nadzvukového proudění se žádná okrajová podmínka na výstupu nenastává.

Na hranici typu *stěna* $\partial\Omega_w$ se předepisuje podmínka neprostupnosti, což znamená, že složka vektoru rychlosti kolmá k hranici musí být nulová. To je v souladu s počtem kladných vlastních čísel matice \mathbf{A}_n , protože při nulové normálové rychlosti je kladné jediné vlastní číslo $\lambda_2^n = u_n + c = c$. V programu je tato podmínka realizována pomocí fiktivních objemů (*ghost cells*), ve kterých se předepíše vektor rychlosti symetrický k vektoru rychlosti v hraničním objemu, přičemž osu symetrie tvoří hranice oblasti (Obrázek 4.4).

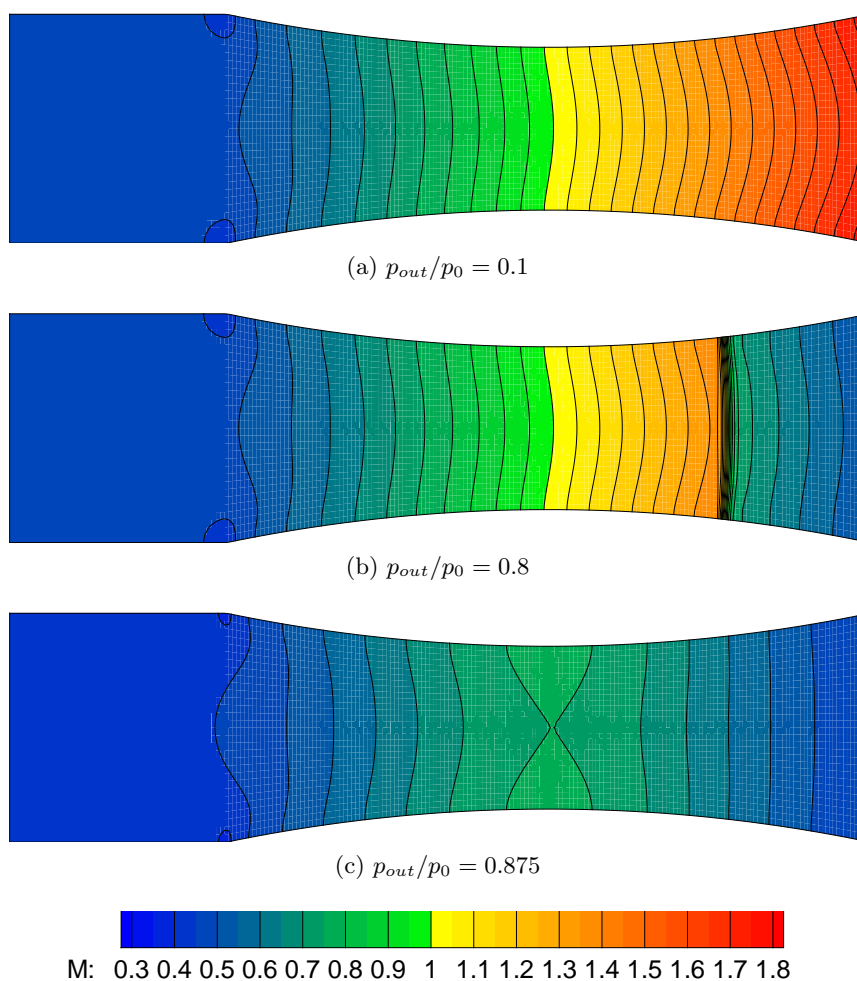


Obrázek 4.4: Realizace okrajové podmínky na stěně pomocí fiktivního objemu (červeně)

V souřadnicovém systému $\xi\eta$, kde osa ξ je tečná ke stěně a osa η má směr vnější normály ke stěně, lze složky rychlosti ve fiktivním objemu \mathbf{u}^f vyjádřit pomocí složek rychlosti ve vnitřním objemu \mathbf{u} :

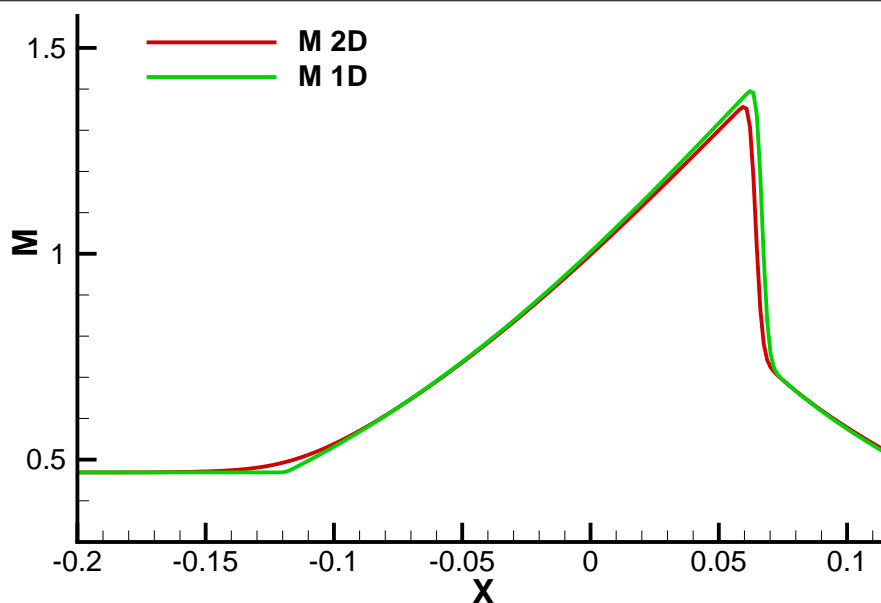
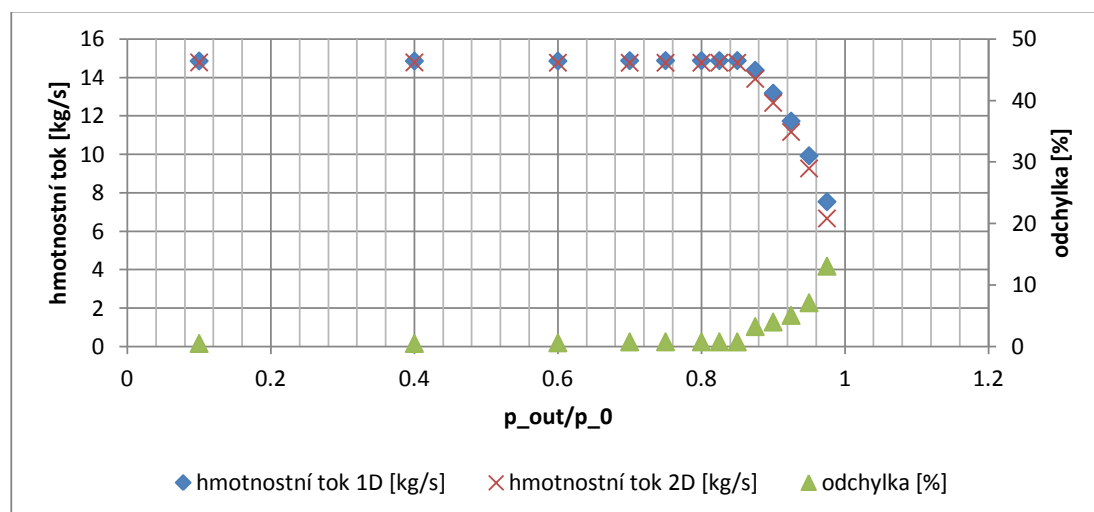
$$\begin{aligned} u_\xi^f &= u_\xi \\ u_\eta^f &= -u_\eta \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pro výpočet bylo použito Laxovo-Friedrichsovo schéma s koeficientem viskozity nastaveným na hodnotu $\epsilon = 0.05$. Výpočet byl zastaven při dosažení rezidua hustoty $Res_\rho \leq 10^{-4}$ (definice rezidua hustoty viz Kapitola 3.2).



Obrázek 4.5: Průběh Machova čísla v dýze při různých výstupních tlacích

Výpočet byl spuštěn pro několik výstupních tlaků od $p_{out} = 0.1p_0$ po $p_{out} = 0.975p_0$. V dýze se v závislosti na nastaveném výstupním tlaku mohou vytvořit tři režimy proudění: 1) proudění dosáhne v nejužším průřezu rychlosti zvuku a je až do výstupu dále urychlováno (Obrázek 4.5a); 2) proudění dosáhne v nejužším průřezu rychlosti zvuku a je urychlováno v divergentní části pouze do místa, kde vzniká rázová vlna, výstup je podzvukový (Obrázek 4.5b); 3) proudění je v celé dýze podzvukové. Výsledky z 1D a 2D výpočtu jeví dobrou shodu, jak je patrné z grafu průběhu Machova čísla podél dýzy (Obrázek 4.6). Zde je největším rozdílem mírně odlišná poloha rázové vlny. Z grafu závislosti hmotnostního toku na výstupním tlaku (Obrázek 4.7) je patrné, že rozdíl mezi výsledky 1D a 2D výpočtu závisí na režimu proudění.


 Obrázek 4.6: Machovo číslo z 1D a 2D výpočtu při výstupním tlaku $p_{out} = 0.8p_0$


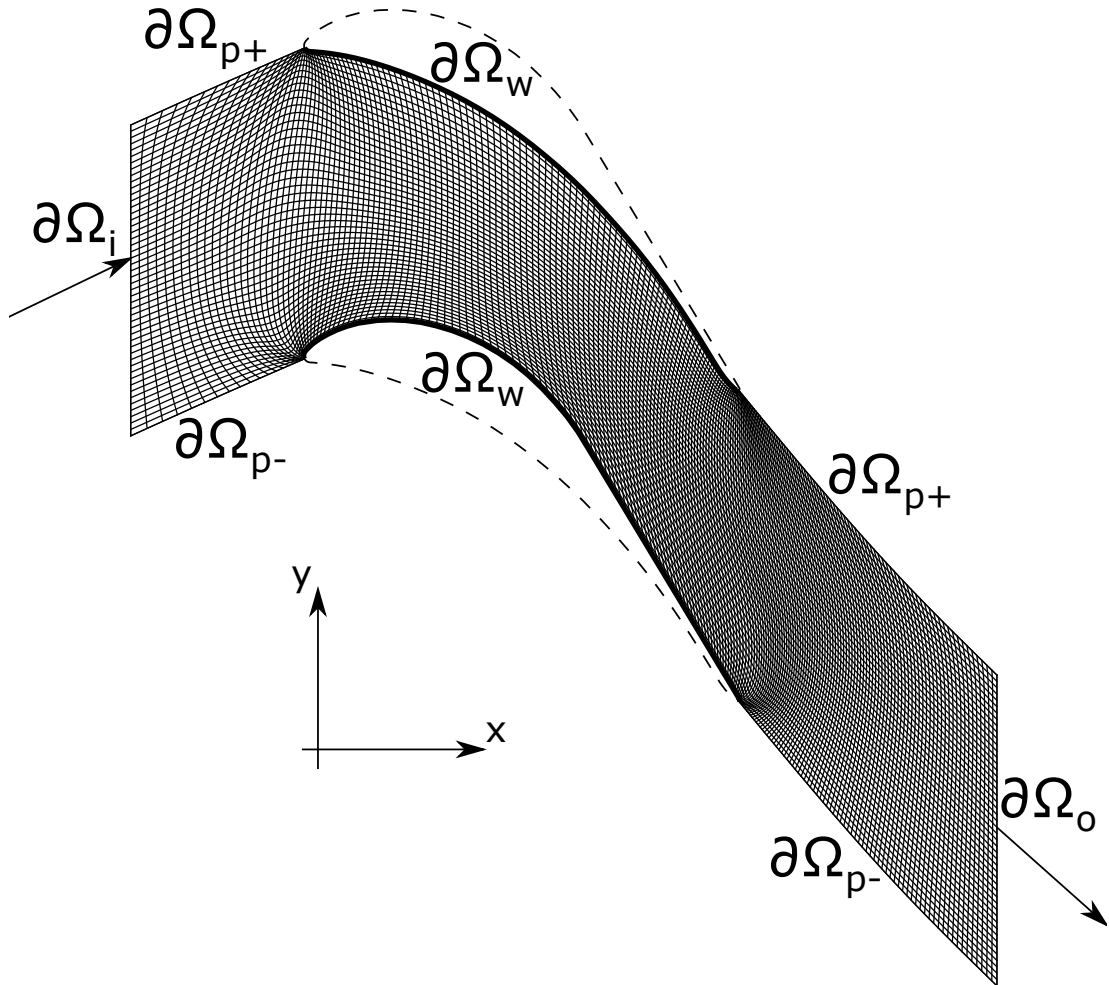
Obrázek 4.7: Srovnání hmotnostního toku dýzou z 1D a 2D výpočtu

Pokud je Machovo číslo v nejužším průřezu $M = 1$ (případy 1) a 2), je odchylka ve hmotnostním toku z 1D a 2D výpočtu menší než 1%. Dýza je v režimu aerodynamického ucpání, tvar zvukové čáry v nejužším místě se blíží úsečce a proudění se chová jako jednorozměrné. Pokud je však rychlost v celé dýze podzvuková, projeví se 2D efekty a při dalším zvyšování výstupního tlaku odchylka prudce roste a dosahuje až 13%. Současně dochází u 1D i 2D výpočtu k výraznému zhoršení konvergence (viz Kapitola 3.2).

4.5 Numerické řešení 2D proudění lopatkovou mříží

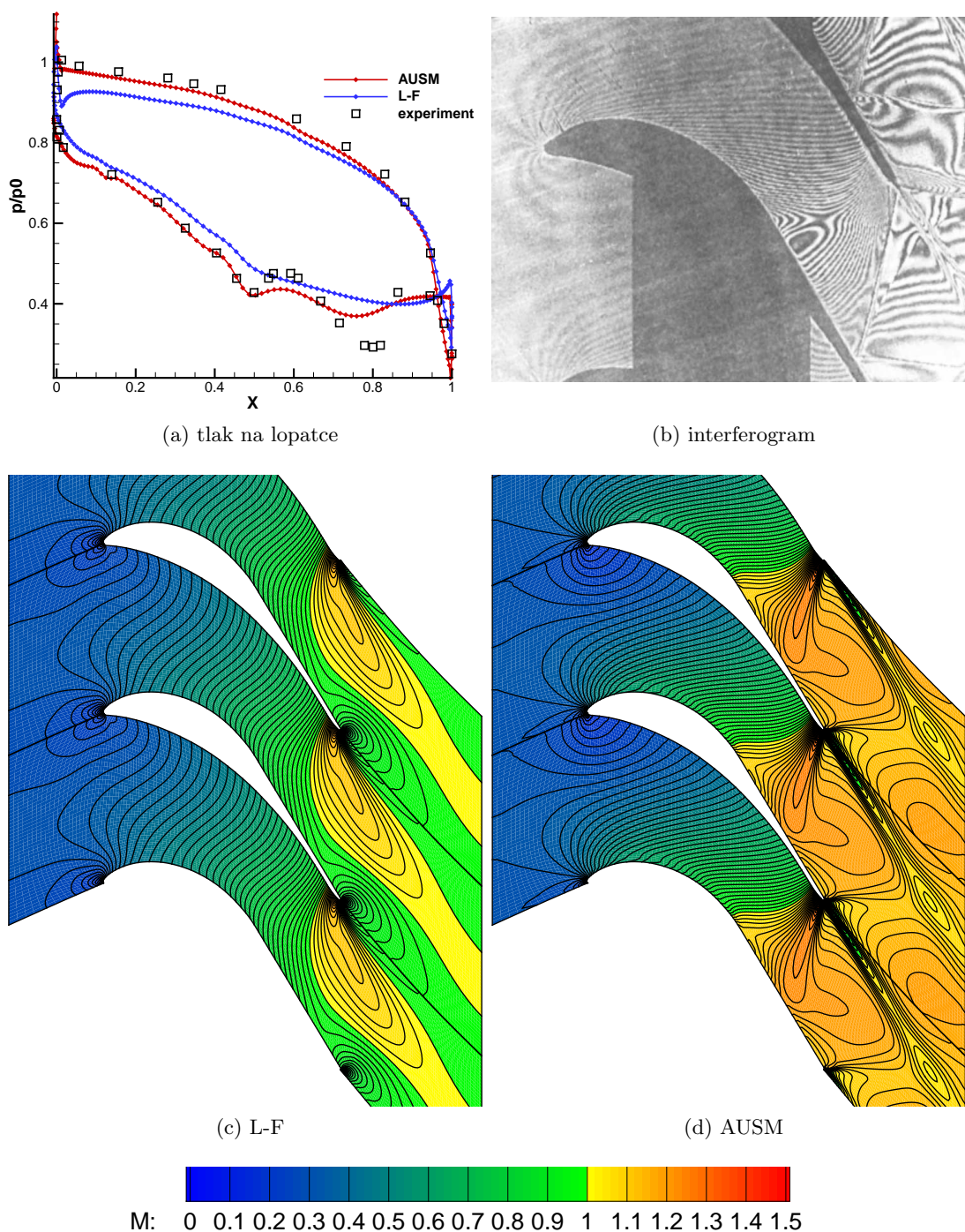
Jedna perioda lopatkové mříže axiální turbíny SE 1050 [19] byla diskretizována strukturovanou čtyřúhelníkovou sítí typu H (Obrázek 4.8). Výpočet byl nastartován s počáteční

podmínkou odpovídající klidovému stavu s teplotou $T_0 = 273.15K$, tlakem $p_0 = 100kPa$ a rychlostí proudění $u_0 = v_0 = 0ms^{-1}$. Proudícím médiem byl vzduch o parametrech $r = 287J/kgK$ a $\gamma = 1.4$. Okrajové podmínky na vstupu $\partial\Omega_i$ byly zadávány stejně jako v případě Barschdorffovy dýzy (Kapitola 4.4, rovnice 4.25), předepsaný úhel proudění na vstupu byl $\alpha_0 = 19.3^\circ$. Výstupní okrajové podmínky byly zadávány také stejně jako v případě dýzy, aby bylo zachováno rozložení tlaku podél $\partial\Omega_o$ a jeho průměrná hodnota odpovídala předepsanému $p_{out} = 42322.5Pa$. Podmínka neprostupnosti stěny $\partial\Omega_w$ byla opět realizována pomocí fiktivních objemů.



Obrázek 4.8: Diskretizace mezilopatkového kanálu SE 1050

Oproti 2D dýze se zde navíc objevuje periodická okrajová podmínka na hranici $\partial\Omega_{p+}$ a $\partial\Omega_{p-}$. Výpočetní oblast lopatkové mříže tvoří periodicky uspořádané mezilopatkové kanály a proto je možné předpokládat periodicitu řešení a provést výpočet na jediném mezilopatkovém kanále s odpovídajícími okrajovými podmínkami. Řešení podél hranice $\partial\Omega_{p+}$ se musí shodovat s řešením podél příslušné hranice $\partial\Omega_{p-}$. Při výpočtu je tato podmínka řešena pomocí fiktivních objemů vně hranice: do fiktivních objemů podél hranice $\partial\Omega_{p+}$ jsou kopírovány hodnoty z hraničních buněk $\partial\Omega_{p-}$ a naopak.



Obrázek 4.9: Numerické a experimentální výsledky na lopatkové mříži SE 1050. Experiment převzat z [19]

Výpočet byl nejprve proveden Laxovým-Friedrichsovým schématem (Kapitola 4.2), avšak jeho výsledky neodpovídaly experimentu [19]. Izočáry Machova čísla z výpočtu Laxovým-Friedrichsovým schématem (Obrázek 4.9c) jsou značně odlišné od interferogramu (Obrázek 4.9b). Zvuková čára neprochází napříč celým mezilopátkovým kanálem a za lopatkami se nevyskytují žádné rázové vlny. Průběh tlaku na lopatce (Obrázek 4.9a) vykazuje značně menší rozdíl tlaků na přetlakové a podtlakové straně lopatky

oproti datům z experimentu. Rázové vlny poblíž konce lopatky nejsou vůbec zachyceny a průběh tlaku na zadní části podtlakové strany lopatky je hladký, zatímco dle experimentu zde tlak kolísá.

Snaha zachytit strukturu rázových vln v zadní části kanálu a za lopatkami vedla k použití AUSM schématu (Kapitola 4.3). Přestože je AUSM schéma prvního řádu přesnosti v prostoru stejně jako Laxovo-Friedrichsovo schéma, výsledky podstatně lépe odpovídají experimentu. Zvuková čára prochází napříč celým mezilopatkovým kanálem a v izočárách Machova čísla (Obrázek 4.9d) je zřetelná podobná struktura rázových vln jako v interferogramu, přestože není úplně ostře zachycena. Tlak na přetlakové straně lopatky je nižší než podle experimentu, avšak odchylka je menší než v případě Laxova-Friedrichsova schématu. Průběh tlaku na podtlakové straně lopatky se velmi dobře shoduje s experimentem až do místa $x \approx 0.5$. Výkyvy tlaku poblíž konce lopatky nejsou tak ostré, jako ukazuje experiment, ale na rozdíl od Laxova-Friedrichsova schématu jsou zde zřetelně přítomné.

Laxovo-Friedrichsovo schéma se pro řešení proudění v lopátkové mříži ukázalo jako nevhodné a jím získané výsledky neodpovídají realitě. Použití AUSM schématu přineslo výrazné zlepšení, přestože rázové vlny nedokáže zachytit zcela ostře. Pro další zpřesnění výsledků by bylo nutné použít schéma vyššího řádu. Výpočet AUSM schématem zkonvergoval po 62 400 iteracích, výpočet Laxovým-Friedrichsovým schématem po 299 000 iteracích (podmínka pro zastavení výpočtu $Res_\rho \leq 10^{-4}$). I přes delší výpočetní čas na jednu iteraci byl proto výpočet AUSM schématem značně rychlejší.

Kapitola 5

Proudění páry s fázovým přechodem

5.1 Modelování vícefázového proudění

Vícefázové proudění je charakterizováno výskytem více složek s odlišnými fyzikálními vlastnostmi. Proudící médium se může skládat z různých látek (např. sedimentace písku v řece) či jen různých fází téže látky (voda a vodní pára). Vícefázové proudění lze rozdělit mimo jiné podle skupenství přítomných látek, podílu a rozprostření disperzní fáze, geometrie fázových rozhraní atd. K jeho popisu se používá řada modelů, které jsou obvykle vhodné pouze pro konkrétní druh proudění a nemohou být použity univerzálně. Modely vícefázového proudění lze klasifikovat do tří skupin [1]:

- Proudění s fázovými rozhraními
- Proudění směsí
- Eulerovy-Lagrangeovy modely proudění

V případě *proudění s fázovými rozhraními* je pohyb přítomných fází popisován odděleně. Pro každou fázi jsou samostatně sestaveny bilanční rovnice, složitější modely pracují i s bilancemi na fázových rozhraních. Vzájemné působení složek v podobě výměny hmoty, energie, hybnosti atd. se odehrává na fázových rozhraních a vstupuje do řešení ve formě okrajových podmínek. Zásadním problémem je popis geometrie hraničních ploch, který musí být schopen postihnout vznik, slučování a zánik oblastí. V praxi je nemožné aplikovat tento model na komplexní geometrie (např. písek promísený s vodou) a lze jej použít pouze pro proudění s jasně vymezenými oblastmi jednotlivých fází (např. hladina moře, stékání tenkého filmu po stěně).

Pro popis proudění s komplexními fázovými rozhraními je vhodné modelovat médium jako *směs*. Tento přístup předpokládá přítomnost všech složek média v každém bodě prostoru s určitým podílem (koncentrací). Sleduje se chování média jako celku, což přináší značné zjednodušení výpočtu. Zároveň se ztrácí informace o rozhraní jednotlivých fází, která však obvykle není předmětem zájmu. Model je založen na sestavení bilančních rovnic pro jednotlivé složky média. Vzájemné působení složek zohledňují zdrojové členy.

Vyskytuje-li se jedna fáze v podobě kontinua a další v diskrétní formě, lze použít *Eulerův-Lagrangeův model*. Spojitá fáze je popsána podobně jako v případě jednofázového proudění, avšak s možným přidáním členu zohledňujícího vliv zbývající fáze. Na základě sil působících na částice při pohybu kontinuální fází je lagrangeovsky popsána jejich trajektorie. Protože výpočetní náročnost prudce roste s počtem částic, nesleduje se obvykle dráha každé částice zvlášť a uvažují se třídy částic s podobnými vlastnostmi (například kapky o stejné velikosti).

5.2 Model proudění páry s kondenzací

Použitý model spadá do druhé skupiny výše uvedených modelů a zachází s médiem tvořeným parou a zkondenzovanou vodou jako s kontinuem. V určitém místě prostoru je přítomna voda jak v kapalně, tak v plynné formě. Podíl obou složek je vyjádřen hmotnostním zlomkem vody (vlhkostí) χ [%]:

$$\chi = \frac{m_l}{m_l + m_v}, \quad (5.1)$$

kde m_l [kg] je hmotnost kapalně složky a m_v [kg] hmotnost plynné složky. Základem modelu proudění páry jsou opět Eulerovy rovnice (2.9 pro 2D, 2.13 pro 1D). Rovnice nejsou doplněny zdrojovými členy, které by vyjadřovaly vzájemné působení (výměnu hmoty, hybnosti a energie) obou fází. Toto zjednodušení lze obhájit tím, že kapky vody vznikají převážně homogenní nukleací, tj. mají stejnou počáteční rychlost jako okolní pára, a jsou natolik malé, že jsou parou nadále unášeny. Díky tomu není nutné sestavovat bilanční rovnice pro kapalnou fázi. Vliv kapalně fáze na páru prostřednictvím uvolňovaného latentního tepla je zahrnut v rovnici pro tlak [2]:

$$p = \frac{(\gamma - 1)(1 - \chi)}{1 + \chi(\gamma - 1)} \left[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \rho\chi L \right] \quad (5.2)$$

Model byl sestaven s ohledem na zamýšlenou aplikaci pro výpočet proudění páry v dýze a v lopatkové mříži turbíny, při kterém je na vstupu suchá pára ($\chi = 0\%$), následně dojde k jejímu podchlazení pod teplotu syté páry T_s a ke kondenzaci. Z experimentů vyplývá, že kondenzace nenastává hned při poklesu teploty páry pod T_s , nýbrž až po dosažení určitého teplotního rozdílu ΔT . Po zkondenzování již vlhkost páry přibližně odpovídá rovnovážné vlhkosti χ_{eq} (viz níže). V modelu byl tento poznatek implementován následovně:

- Od vstupu po směru proudění až do dosažení kritické rovnovážné vlhkosti χ_{lim} je pára suchá, $\chi = 0\%$.
- V místě dosažení kritické rovnovážné vlhkosti $\chi_{eq} = \chi_{lim}$ dojde ke kondenzaci a vlhkost skokově stoupne na hodnotu $\chi = \chi_{eq}$.
- Od místa kondenzace po směru proudění dále vlhkost odpovídá rovnovážné vlhkosti $\chi = \chi_{eq}$.

Výpočet rovnovážné vlhkosti vychází z rovnosti tepla, které je třeba k ohřátí podchlazené páry o teplotě T_v [K] na teplotu syté páry T_s , a tepla uvolněného při kondenzaci páry na rovnovážnou vlhkost:

$$c_p(T_s - T_v)(1 - \chi) = L(\chi_{eq} - \chi) \quad (5.3)$$

$$\chi_{eq} = \frac{T_s - T_v}{L} c_p (1 - \chi) + \chi, \quad (5.4)$$

kde $c_p [J.kg^{-1}K^{-1}]$ měrná tepelná kapacita páry [14] a $L [J.kg^{-1}]$ je měrné skupenské teplo kondenzace páry [15]. Pro výpočet teploty syté páry byla použita *Industrial Formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam* [16].

Označíme-li polohu zkondenzování páry jako x_{start} , lze předpis pro vlhkost zapsat jednoduše jako:

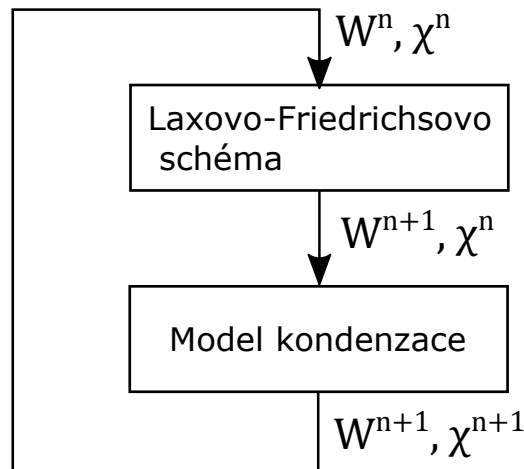
$$\chi = \begin{cases} 0, & x < x_{start}, \\ \chi_{eq}, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Pro určení místa kondenzace (polohy x_{start}) je možné brát do úvahy několik faktorů, například rozdíl teploty páry T_v oproti teplotě syté páry T_s či hodnotu rovnovážné vlhkosti χ_{eq} . V této práci bylo na základě dat z experimentů jako kritérium použito dosažení mezní hodnoty rovnovážné vlhkosti χ_{lim} .

5.3 Algoritmus modelu kondenzace

Algoritmus bude popsán pro výpočet quasi-1D proudění (například v Barschdorffově dýze) a v závěru kapitoly bude ukázána modifikace pro 2D výpočet.

V každé iteraci se nejprve vypočítá hodnota W^{n+1} (zde Laxovým-Friedrichsovým schématem) a následně modelem kondenzace dopočítají hodnoty vlhkosti χ^{n+1} (Obrázek 5.1):



Obrázek 5.1: Schéma programu s modelem kondenzace

Výpočet vlhkosti (Model kondenzace) v každé iteraci v první verzi algoritmu probíhal v následujících krocích:

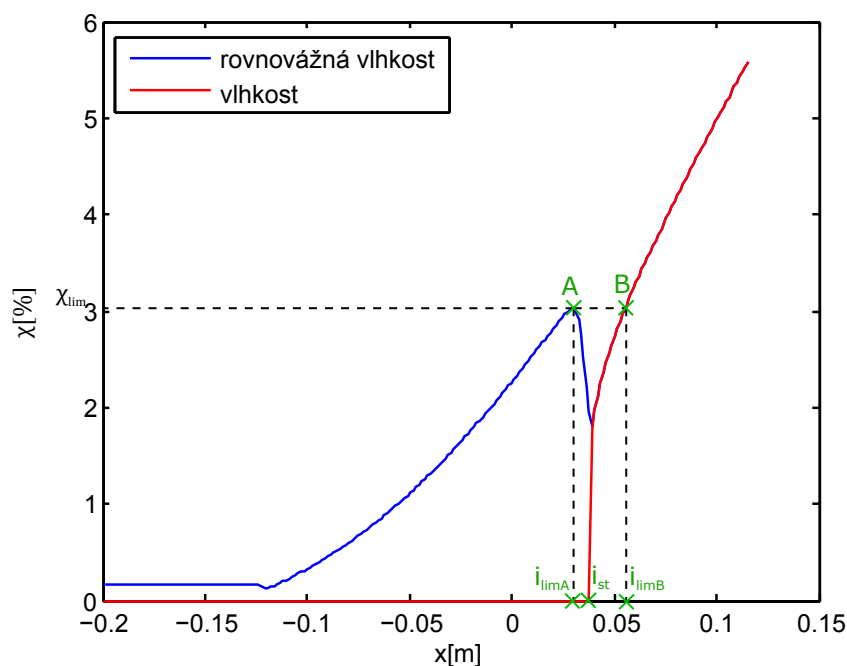
1. Objemy sítě procházeny směrem od vstupu k výstupu z oblasti; první objem, kde rovnovážná vlhkost přesahuje limitní hodnotu ($\chi_{eq,i}^n \geq \chi_{lim}$), označen jako i_{lim}
2. Pokud by i_{lim} bylo použito přímo jako nový počátek kondenzace i_{stdec}^{n+1} , mohlo by dojít k oscilacím a nestabilitě výpočtu. Proto byl zaveden relaxační koeficient $\xi \in (0; 1)$:

$$i_{stdec}^{n+1} = (1 - \xi) \cdot i_{stdec}^n + \xi \cdot i_{lim} \quad (5.6)$$

Protože i_{stdec}^{n+1} může být desetinné číslo a objemy sítě jsou indexovány celými čísly, definuje se index i_{st}^{n+1} jako hodnota i_{stdec}^{n+1} zaokrouhlená na celé číslo.

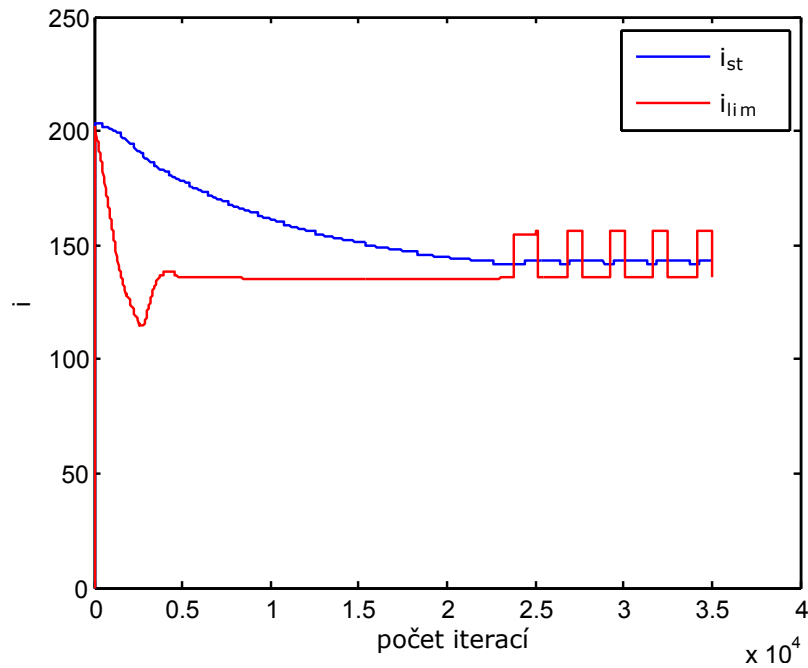
3. Vypočtena nová hodnota vlhkosti ve všech objemech sítě:

$$\chi_i^{n+1} = \begin{cases} 0, & i \leq i_{st}^{n+1}, \\ \chi_{eq,i}^n, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.7)$$



Obrázek 5.2: Průběh vlhkosti a rovnovážné vlhkosti (Barschdorffova dýza)

Při aplikaci se však ukázalo, že takto sestavený algoritmus nevede ke konvergenci řešení. Zkondenzováním páry v místě $i_{st}+1$ se uvolní latentní teplo, v jehož důsledku se skokově zvýší teplota a sníží rovnovážná vlhkost. Kvůli numerické vazkosti Laxova-Friedrichsova schématu je však ovlivněna i oblast těsně před místem kondenzace a pokles rovnovážné vlhkosti probíhá postupně, nikoliv skokově (Obrázek 5.2). Rovnovážná vlhkost $\chi_{eq,i_{st}}$ proto klesne pod χ_{lim} a v další iteraci bude zjištěna hodnota $\chi_{eq,i} \geq \chi_{lim}$ až o několik objemů dále za místem kondenzace (bod B); i_{st} se začne posouvat k výstupu. To opět vede k nárůstu rovnovážné vlhkosti před i_{st} nad χ_{lim} (bod A) a i_{st} se začne posouvat zpět ke vstupu. Poloha i_{st} se periodicky přesouvá a nevede k ustálenému řešení (Obrázek 5.3).



Obrázek 5.3: Poloha počátku kondenzace v závislosti na počtu iterací (Barschdorffova dýza)

Algoritmus bylo nutné změnit, aby výpočet konvergoval. Nejvyšší rozdíl mezi vlhkostí χ a rovnovážnou vlhkostí χ_{eq} nenastává v místě kondenzace, ale o několik objemů sítě před ním. To může být způsobeno například numerickou vazkostí schématu. Není proto možné předepisovat kondenzaci v místě, kde je dosažen maximální rozdíl ($\chi_{eq} - \chi$). Poloha počátku kondenzace se v upraveném algoritmu řídí tak, aby maximální dosažený rozdíl ($\chi_{eq} - \chi$) odpovídal předepsané χ_{lim} . Vzhledem k diskrétní povaze numerického řešení nelze očekávat, že bude v nějakém objemu sítě dosažena právě hodnota χ_{lim} ; hodnotícím kritériem je proto pásmo $U_{\chi_{lim}} = (\chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi)$, kde tolerance $\delta_\chi > 0$. Výpočet podle upraveného algoritmu probíhá následujícími kroky:

1. Objemy sítě procházeny směrem od vstupu k výstupu z oblasti; hledáno $\Delta\chi_{max} = \max\{(\chi_{eq,i} - \chi_i)\}$
2. Počátek kondenzace se posune podle hodnoty $\Delta\chi_{max}$:

- Pokud $\Delta\chi_{max} < \chi_{lim} - \delta_\chi$:

$$i_{stdec}^{n+1} = i_{stdec}^n + \beta \cdot \frac{|\Delta\chi_{max} - \chi_{lim}|}{\chi_{lim}} \quad (5.8)$$

- Pokud $\Delta\chi_{max} \in \langle \chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi \rangle$:

$$i_{stdec}^{n+1} = i_{stdec}^n \quad (5.9)$$

- Pokud $\Delta\chi_{max} > \chi_{lim} + \delta_\chi$:

$$i_{stdec}^{n+1} = i_{stdec}^n - \beta \cdot \frac{|\Delta\chi_{max} - \chi_{lim}|}{\chi_{lim}} \quad (5.10)$$

Opět je definován index i_{st}^{n+1} jako hodnota i_{stdec}^{n+1} zaokrouhlená na celé číslo.

3. Vypočtena nová hodnota vlhkosti ve všech objemech sítě:

$$\chi_i^{n+1} = \begin{cases} 0, & i \leq i_{st}^{n+1}, \\ \chi_{eq,i}^n, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Rychlost změny i_{stdec} je lineárně závislá na relativní odchylce $\Delta\chi_{max}$ od χ_{lim} , aby se urychlil výpočet při nevhodné počáteční volbě i_{stdec} . Koefficient $\beta > 0$ je nutné volit natolik nízký, aby nedošlo k nestabilitě výpočtu; čím nižší je však jeho hodnota, tím pomaleji výpočet konverguje.

Při 2D výpočtu je nutné použít strukturovanou síť, jejíž síťové čáry by měly přibližně odpovídat proudnicím. Označme index podél těchto síťových čar jako i a druhý index jako j . Do algoritmu přibude vnější *for-cyklus*, který prochází indexy j . Podél každé síťové čáry j je výše popsaným algoritmem nalezen počátek kondenzace $i_{st}^{n+1}(j)$ a vypočtena nová hodnota vlhkosti. Pokud se objem i, j nachází před začátkem kondenzace na síťové čáře j , nastaví se nulová vlhkost. Pokud leží za začátkem počátku kondenzace, nastaví se vlhkost odpovídající rovnovážné vlhkosti:

$$\chi_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} 0, & i \leq i_{st}^{n+1}(j), \\ \chi_{eq,i,j}^n, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.12)$$

5.4 Numerické řešení quasi-1D proudění dýzou

Stejně jako v případě jednofázového proudění (Kapitola 3.2) byla použita geometrie Barschdorffovy dýzy. Výpočet byl proveden pro dvě hodnoty klidové teploty $T_0 = 373.15K$ a $T_0 = 380.55K$, za počáteční podmínku byl zvolen klidový stav s teplotou T_0 , tlakem $p_0 = 78390Pa$, rychlostí proudění $u_0 = 0$, vlhkostí $\chi = 0$ a místem kondenzace i_{start}^0 na výstupu z dýzy. Proudícím médiem byla pára o parametrech $r = 461.52J/kgK$ a $\gamma = 1.32$ (další materiálové vlastnosti páry viz Kapitola 5.2).

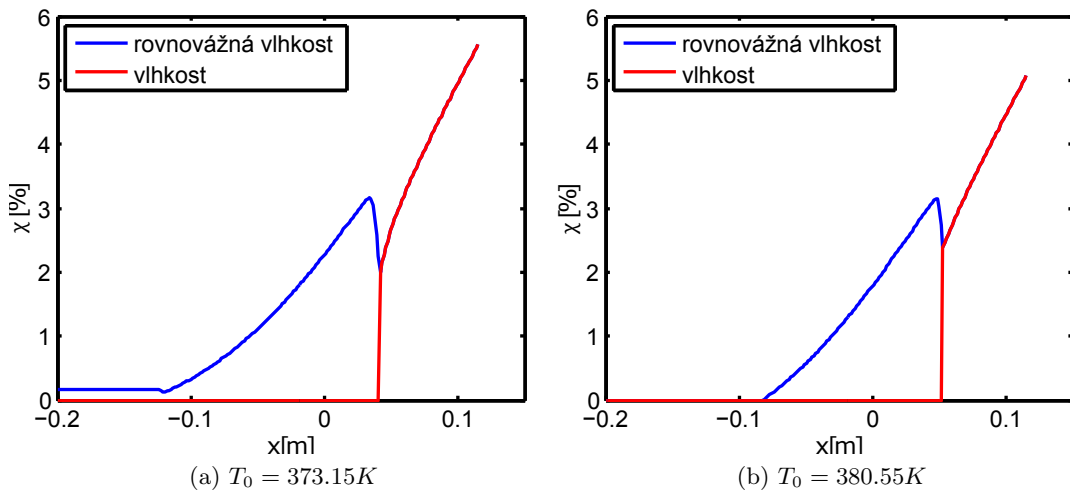
Okrajové podmínky na vstupu jsou totožné jako v případě jednofázového proudění: v případě podzvukového proudění se zadávají dva parametry (klidový tlak p_0 a klidová teplota T_0) a jeden se extrapoluje z vnitřku oblasti (Machovo číslo M). Hodnoty \mathbf{W} na vstupu se dopočítají pomocí vztahů (3.18).

Na výstupu se pro podzvukové proudění nastavuje jeden parametr (tlak p) a dva se extrapolují z vnitřku oblasti (hustota ρ a rychlost u). Vztah pro korekci energie je odlišný od jednofázového proudění [2]:

$$e = p_{out} \cdot \frac{1 + \chi(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)(1 - \chi)} + \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho\chi L \quad (5.13)$$

V případě nadzvukového výstupu se žádná okrajová podmínka nenastavuje. Výpočet byl nastartován s výstupním tlakem $p_{out} = 0.1p_0$ a po dosažení nadzvukového proudění přestala být energie na výstupu korigována.

Na základě poznatků ohledně chování Laxova-Friedrichsova schématu, popsaných v Kapitole 3.2, byla nastavena umělá viskozita na $\epsilon = 0.05$. Hodnota vlhkosti χ_{lim} byla zvolena tak, aby místo kondenzace odpovídalo experimentálním výsledkům. Jako vhodná se ukázala volba $\chi_{lim} = 3.15\%$ s tolerancí $\delta_\chi = 0.01\%$. Při příliš nízké hodnotě δ_χ by výpočet nezkonvergoval, protože by kvůli diskrétní povaze metody neexistovalo řešení,



Obrázek 5.4: Průběh vlhkosti v dýze

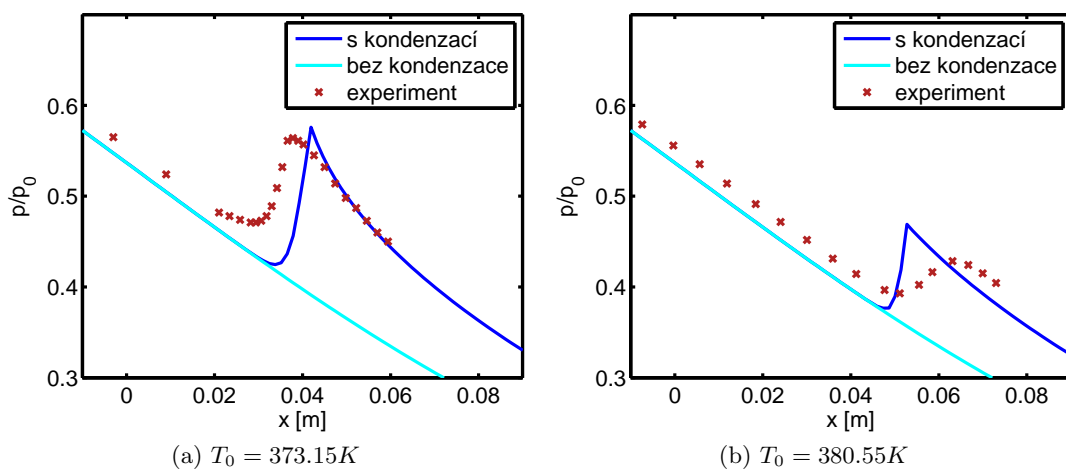
ve kterém $\Delta\chi_{max} \in (\chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi)$. Pokud by naopak δ_χ bylo zvoleno příliš vysoké, podmínka $\Delta\chi_{max} \in (\chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi)$ by byla splněna pro několik různých poloh kondenzace i_{st} a řešení by nebylo jednoznačné. Při vhodné volbě δ_χ řešení zkonverguje a je nezávislé na počáteční poloze i_{st}^0 .

Jako kritérium pro zastavení výpočtu byla stejně jako v případě jednofázového 1D proudění použita hodnota rezidua hustoty 10^{-8} (3.21). Počet iterací nutných ke zkonvergování se ve srovnání s jednofázovým výpočtem zvýšil pouze v řádu procent (Tabulka 5.1).

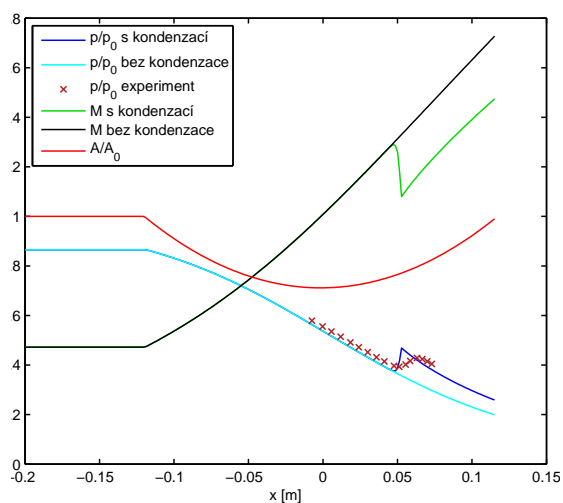
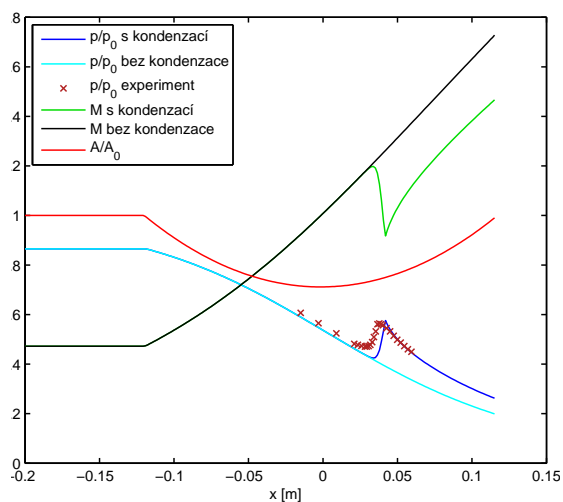
T ₀ [K]	Počet iterací		
	bez kondenzace	s kondenzací	rozdíl [%]
373.15	31590	33476	5.97
380.55	31605	34874	10.34

Tabulka 5.1: Srovnání počtu iterací jednofázového výpočtu a výpočtu s modelem kondenzace na 1D dýze

Srovnání s experimentem [12] ukazuje, že použitý model nedokáže přesně zachytit průběh kondenzace, avšak průběhy tlaků před a za místem kondenzace jeví dobrou shodu s naměřenými hodnotami (obrázky 5.6 a 5.5). Je zřejmé, že i takto jednoduchý model kondenzace přináší značné zlepšení numerických výsledků oproti výpočtu, který kondenzaci vůbec neuvažuje. K zachycení samotného průběhu kondenzace by bylo nutné použít složitější model, což by však znamenalo zvýšení náročnosti výpočtu a prodloužení výpočetního času.



Obrázek 5.5: Průběh tlaku v místě kondenzace



Obrázek 5.6: Průběh tlaku a Machova čísla

5.5 Numerické řešení 2D proudění dýzou

Výpočet na Barschdorffově dýze byl proveden se stejnými počátečními podmínkami jako v 1D případě: klidový stav s teplotou $T_0 = 373.15K$ nebo $T_0 = 380.55K$, tlakem $p_0 = 78390Pa$, rychlostí proudění $u_0 = v_0 = 0$ a vlhkostí $\chi = 0$. Proudícím médiem byla pára o parametrech $r = 461.52J/kgK$ a $\gamma = 1.32$. Okrajové podmínky byly zadávány stejně jako u jednofázového proudění (Kapitola 4.4). Na vstupu se předepisuje klidový tlak p_0 , klidová teplota T_0 a úhel proudění $\alpha_0 = 0$, z vnitřku oblasti se extrapoluje Machovo číslo a z těchto hodnot se dopočítává vektor \mathbf{W} . Podmínka neprostupnosti stěny je realizována pomocí fiktivních objemů a na výstupu je v případě podzvukového proudění korigována energie dle vztahu:

$$e = \hat{p}_{out}(\xi) \cdot \frac{1 + \chi(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)(1 - \chi)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) - \rho\chi L, \quad (5.14)$$

pro nadzvukový výstup se žádná okrajová podmínka nepředepisuje. Výpočet byl nastartován s výstupním tlakem $p_{out} = 0.1p_0$ a po dosažení nadzvukového proudění přestala být energie na výstupu korigována.

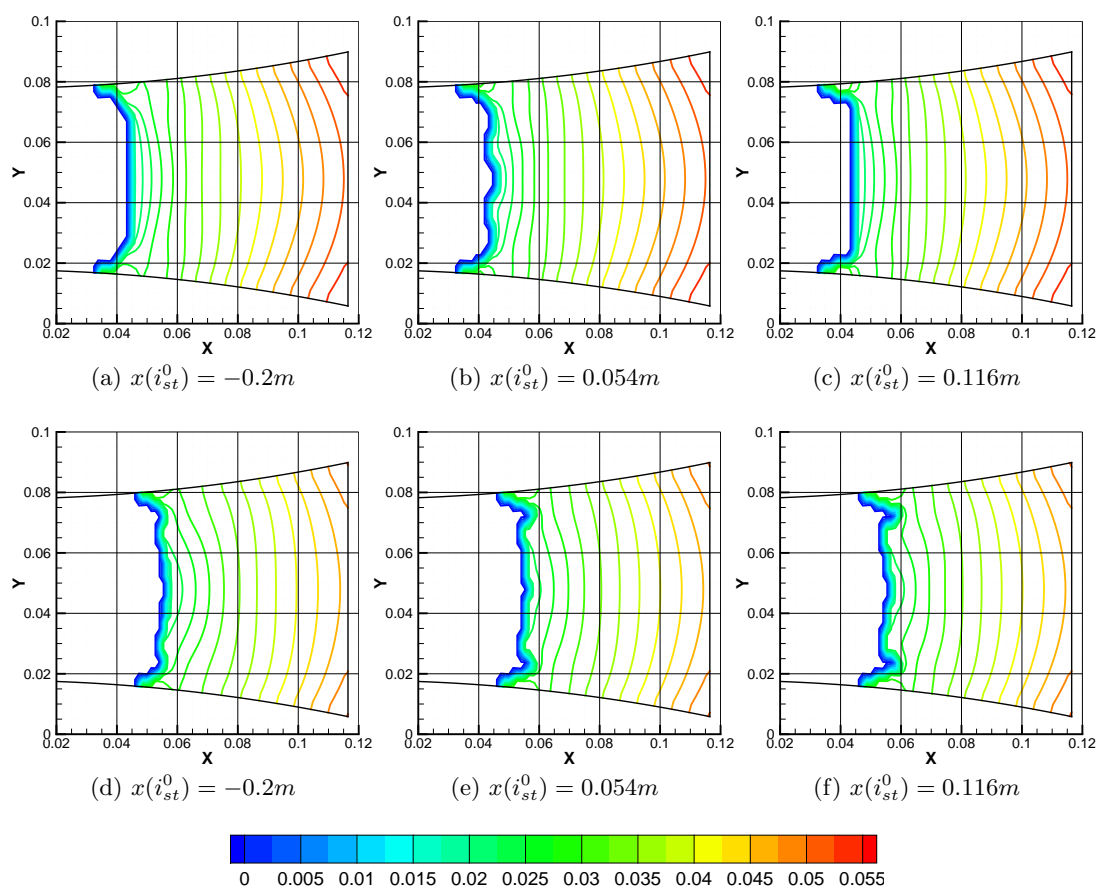
Hodnota limitní vlhkosti byla stejně jako v 1D případě nastavena na $\chi_{lim} = 3.15\%$ s tolerancí zvětšenou na $\delta_\chi = 0.015\%$. Hodnota tolerance δ_χ musí být nastavena dostatečně vysoká, aby na všech síťových čarách j existovala poloha počátku kondenzace, pro kterou $\Delta\chi_{max}(j) \in (\chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi)$. Použijeme-li stejnou δ_χ na všech síťových čarách, může být na některých z nich poloha počátku kondenzace nejednoznačná (podmínka pro $\Delta\chi_{max}(j)$ bude splněna při několika různých polohách kondenzace $i_{st}(j)$, protože δ_χ je příliš vysoké), zatímco na jiných nebude řešení konvergovat (neexistuje žádná poloha počátku kondenzace, při které bude podmínka pro $\Delta\chi_{max}(j)$ splněna, protože δ_χ je příliš nízké). Pro získání jednoznačného řešení by proto bylo nutné předepisovat pro δ_χ na každé síťové čáře j jinou hodnotu. Její určování by však bylo složité a šlo by proti smyslu modelu, který má umožnit rychlý výpočet. Proto bylo v programu použito stejné δ_χ na všech síťových čarách, dostatečně vysoké, aby výpočet konvergoval.

Z důvodů uvedených v předchozím odstavci nemá výpočet s modelem kondenzace jednoznačné řešení a výsledek závisí na počátečních podmínkách. Odlišnost výsledků však není velká, jak ukazuje Obrázek 5.7. Rozdíly se týkají především místa počátku kondenzace a další průběh téměř ovlivněn není. Další zde uváděné výsledky pocházejí z výpočtů s počáteční polohou kondenzace na konci dýzy.

Výpočet byl proveden Laxovým-Friedrichsovým schématem s koeficientem umělé viskozity $\epsilon = 0.05$ a jako podmínka pro zastavení výpočtu bylo uvažováno reziduum hustoty $Res_\rho \leq 10^{-4}$. Podobně jako u 1D výpočtu vede použití modelu kondenzace pouze k nízkému navýšení počtu iterací oproti jednofázovému proudění (Tabulka 5.2).

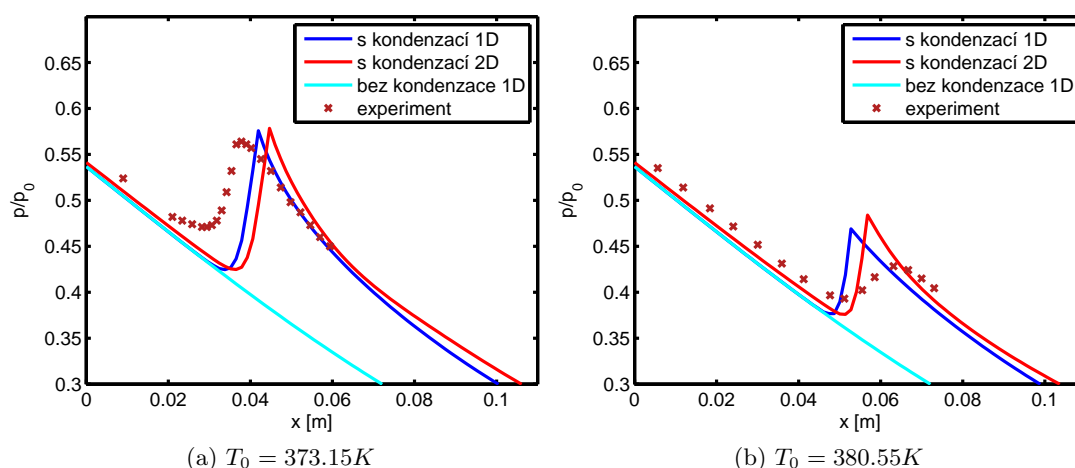
T_0 [K]	Počet iterací		
	bez kondenzace	s kondenzací	rozdíl [%]
373.15	44100	49000	11.11
380.55	44100	44200	0.23

Tabulka 5.2: Srovnání počtu iterací jednofázového výpočtu a výpočtu s modelem kondenzace na 2D dýze

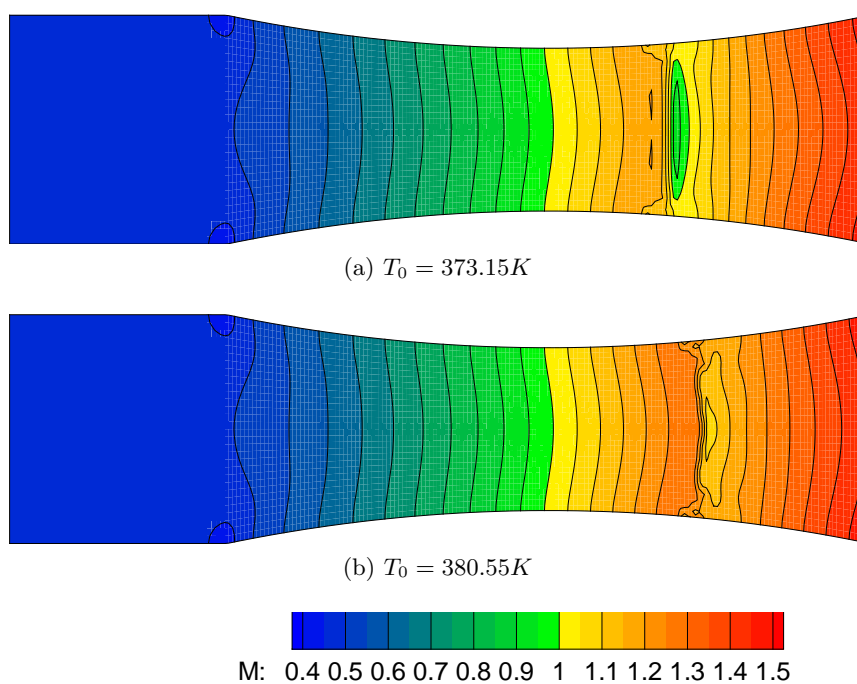


Obrázek 5.7: Izočáry vlhkosti pro různé volby počáteční polohy kondenzace: a), d) na začátku dýzy, b), e) poblíž výsledného místa kondenzace, c), f) na konci dýzy. Klidová teplota $373.15K$ u a)-c) a $380.55K$ u d)-f).

Průběhy tlaků a Machova čísla se příliš neliší od 1D výpočtu. Poloha kondenzace se posouvá směrem ke konci dýzy a lokální maximum tlaku nastávající po kondenzaci je vyšší. O srovnání s experimentem lze říci totéž, co v 1D případě - model nedokáže přesně zachytit průběh veličin v místě kondenzace, avšak průběhy před a za tímto místem se s experimentem dobře shodují.



Obrázek 5.8: Průběh tlaku v místě kondenzace z 1D a 2D výpočtu



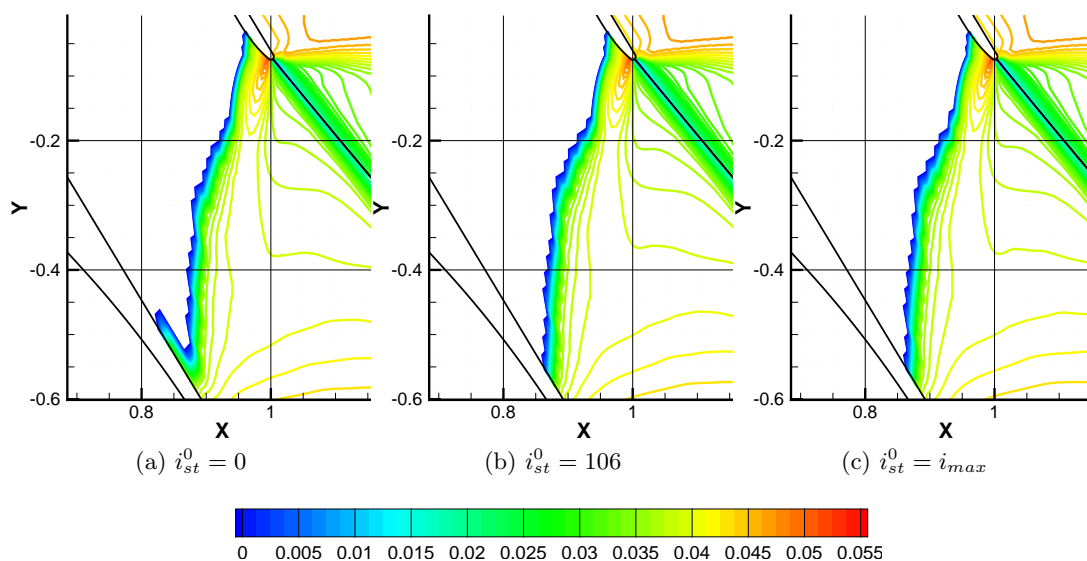
Obrázek 5.9: Průběh Machova čísla

5.6 Numerické řešení 2D proudění lopatkovou mříží

Počáteční podmínkou pro výpočet proudění páry na lopatkové mříži SE 1050 byl klidový stav s teplotou $T_0 = 340K$, tlakem $p_0 = 36730Pa$, rychlostí proudění $u_0 = v_0 = 0ms^{-1}$ a vlhkostí $\chi = 0\%$, parametry páry jsou $r = 461.52J/kgK$ a $\gamma = 1.32$. Okrajové podmínky jsou zadávány stejně jako u jednofázového proudění (Kapitola 4.5). Hodnoty vektoru \mathbf{W} na vstupu se dopočítávají pomocí vztahů pro izoentropické proudění, do kterých se dosadí předepsaný klidový tlak, klidová teplota a úhel proudění $\alpha_0 = 19.3^\circ$ a Machovo číslo extrapolované z vnitřku oblasti. Podmínka neprostupnosti stěny a periodická okrajová podmínka jsou realizovány pomocí fiktivních objemů. V případě

podzvukového proudění se na výstupu zadává tlak $p_{given} = 15537 Pa$ a energie se koriguje dle vztahu (5.14).

Výpočet byl proveden pouze AUSM schématem, protože výsledky Laxova-Friedrichsova schématu pro jednofázové proudění na lopatkové mříži byly neuspokojivé. Pro určení místa kondenzace byla nejprve použita stejná hodnota $\chi_{lim} = 3.15\%$ jako v případě Barschdorffovy dýzy, avšak s tolerancí zvětšenou na $\delta_\chi = 0.1\%$, aby výpočet i přes větší složitost geometrie konvergoval. Kritériem konvergence byl pokles rezidua hustoty pod hodnotu 10^{-4} .



Obrázek 5.10: Izočáry vlhkosti pro různé volby počáteční polohy kondenzace: a) na začátku mezilopatkového kanálu, b) poblíž výsledného místa kondenzace, c) na konci mezilopatkového kanálu.

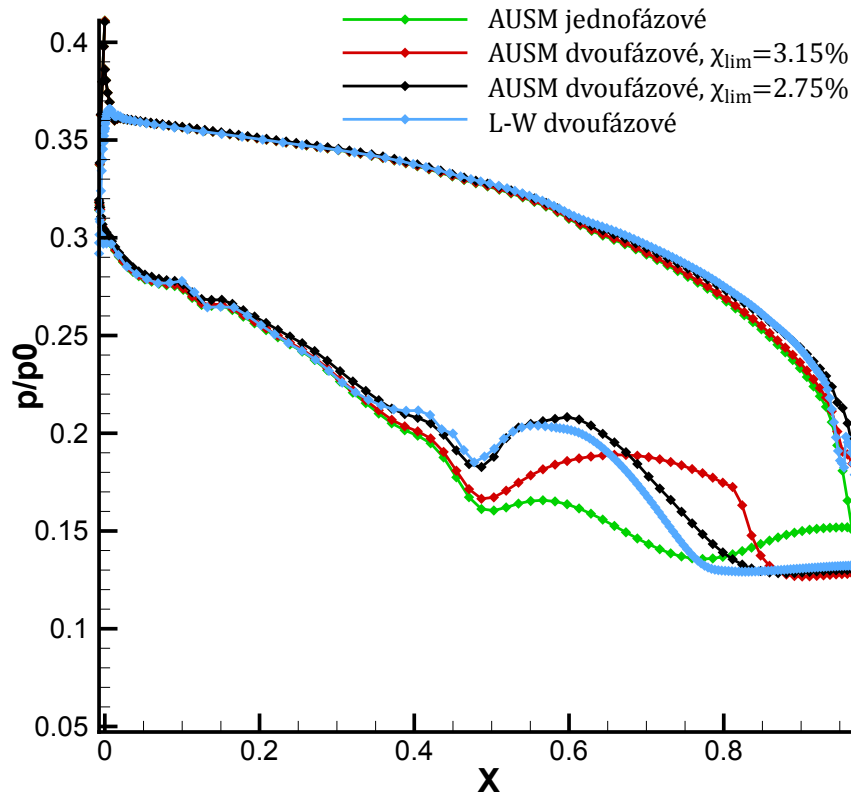
Řešení závisí na počáteční volbě polohy kondenzace, ale i v tomto případě platí, že rozdíl mezi výsledky není velký a týká se pouze omezené oblasti okolo místa kondenzace (Obrázek 5.10). Poblíž odtokové hrany lopatky je zřetelné výrazné maximum vlhkosti. Model nevazkého proudění neumožňuje zachytit odtržení na konci lopatky a nutí proudnice nefyzikálně sledovat její tvar, čímž dochází ke vzniku lokálního maxima rovnovážné vlhkosti. Vysoký gradient rovnovážné vlhkosti v tomto místě způsobuje, že i malé posunutí počátku kondenzace vede k velké změně $\Delta\chi_{max}$. To vedlo k nutnosti použít vyšší toleranci δ_χ , aby bylo možné splnit podmínku $\Delta\chi_{max} \in (\chi_{lim} - \delta_\chi; \chi_{lim} + \delta_\chi)$ a výpočet konvergoval. Lze předpokládat, že v případě proudění vazké tekutiny by bylo možné δ_χ snížit.

Pro všechny testované počáteční polohy kondenzace konvergovalo řešení srovnatelně rychle jako při jednofázovém výpočtu a v některých případech dokonce rychleji. (Tabulka 5.3)

	Počet iterací			
	bez kondenzace	s kondenzací		
i_{st}^0	-	0	106	i_{max}
počet iterací	54700	54800	52500	52300

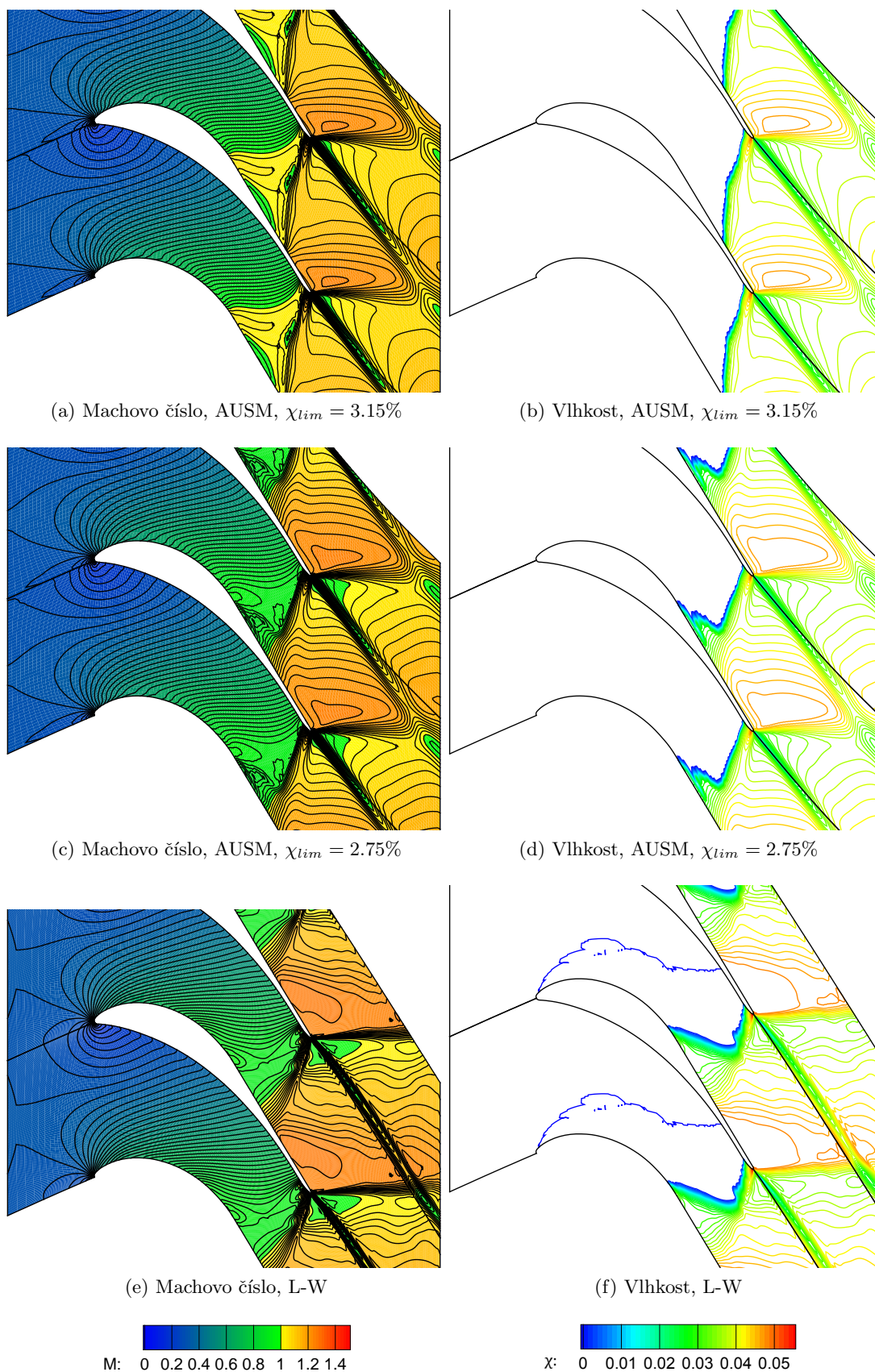
Tabulka 5.3: Srovnání počtu iterací jednofázového výpočtu a výpočtu s modelem kondenzace na lopatkové mříži

Průběh tlaku na lopatce (Obrázek 5.11) ukazuje, že uvažování kondenzace páry má výrazný vliv na výsledky. Výpočet AUSM schématem doplněným výše popsáním modelem kondenzace je zde srovnán s výsledky AUSM schématu pro jednofázové proudění a se složitějším modelem dvofázového proudění, jehož výsledky jsou převzaty z [22]. Tento model je založen na Eulerových rovnicích, doplněných transportními rovnicemi pro momenty kapalné fáze.



Obrázek 5.11: Tlak na lopatce SE 1050. Vlastní výsledky z AUSM schématu pro jednofázové proudění a s modelem kondenzace a převzaté výsledky z Laxova-Wendroffova schématu s modelem dvofázového proudění [22]

Porovnáme-li nejprve výsledky výpočtů AUSM schématem, pozorujeme, že vliv kondenzace se projeví především na podtlakové straně lopatky. K nerovnovážnému fázovému přechodu zde sice při volbě $\chi_{lim} = 3.15\%$ dochází až v 81% délky lopatky, avšak průběhy tlaku se odlišují už přibližně od poloviny lopatky. Tlak zde oproti jednofázovému proudění začíná narůstat a v místě $x \approx 0.84$ naopak klesne pod hodnoty jednofázového proudění. Složitější model dvofázového proudění ukazuje podobný průběh tlaku, avšak posunutý doleva. To je zjevně zapříčiněno tím, že kondenzace nastává dříve, což je ostatně patrné i z Obrázku 5.12. Ukazuje se, že snížíme-li kritérium limitní vlhkosti



Obrázek 5.12: Machovo číslo a vlhkost na lopatkové mříži SE 1050. Výsledky pro AUSM schéma s modelem kondenzace (a)- d)) a pro dvoufázové proudění s Laxovým-Wendroffovým schématem (e), f), převzato z [22])

na $\chi_{lim} = 2.75\%$, aby kondenzace nastala dříve, dostaneme s jednoduchým modelem kondenzace velmi podobné výsledky jako ze složitějšího modelu dvoufázového proudění.

Na přetlakové straně lopatky dochází dle obou modelů dvoufázového proudění k fázovému přechodu přibližně v 95% délky a rozdíly v průbězích tlaku oproti jednofázovému proudění se týkají pouze krátkého úseku před odtokovou hranou. Oba modely dávají podobné výsledky, průběh z jednoduchého modelu kondenzace s AUSM schématem je hladší a neobjevuje se v něm lokální maximum tlaku v místě kondenzace. Důvodem vzniku tohoto maxima může být použití Laxova-Wendroffova schématu v případě složitějšího modelu.

Obrázek 5.12 ukazuje, že při limitní vlhkosti $\chi_{lim} = 3.15\%$ dochází dle jednoduchého modelu ke kondenzaci později, než odpovídá výsledkům ze složitějšího modelu dvoufázového proudění s Laxovým-Wendroffovým schématem. Izočára značící počátek kondenzace má jiný tvar a ovlivňuje i další strukturu proudového pole. Při snížení limitní vlhkosti na $\chi_{lim} = 2.75\%$ se již výsledky obou modelů shodují podstatně lépe. Přetrvávající odlišnosti ve výsledcích mohou být zapříčiněny nejen rozdílným modelováním kondenzace, ale také použitím různých numerických schémat k aproximaci konvektivních toků.

Ukazuje se, že jako kritérium pro počátek kondenzace není vhodné použít pevně danou hodnotu limitní vlhkosti. Hodnota $\chi_{lim} = 3.15\%$, nastavená na základě experimentálních výsledků na Barschdorffově dýze, neodpovídá numerickým výsledkům složitějšího modelu kondenzace na lopatkové mříži turbíny. Při určování místa kondenzace by měly být zohledněny další parametry, například rychlost expanze, teplota směsi či teplota syté páry. Při zpřesnění kritéria pro počátek kondenzace má jednoduchý model potenciál dávat výsledky srovnatelné se složitějším modelem při značně nižší výpočetní náročnosti.

Kapitola 6

Závěr

Práce se zabývá vývojem výpočetně nenáročného modelu dvoufázového proudění vody a vodní páry. Model je použit k numerickému řešení stlačitelného proudění pomocí programu vyvinutého autorem. V první části práce jsou popsány případy 1D a 2D jednofázového proudění sloužící k odladění programu. Výpočet je založen na Eulerových rovnicích, diskretizovaných metodou konečných objemů. Dále je představen model nerovnovážného fázového přechodu s aplikacemi na 1D a 2D geometrie. Dosažené výsledky jsou porovnány s experimentem a s numerickými výsledky jiných autorů.

Řešenými případy jednofázového proudění jsou 1D a 2D Barschdorffova dýza a 2D lopatková mříž SE 1050. Pro výpočet na dýze je použito Laxovo-Friedrichsovo schéma se sníženou viskozitou. Je zde ukázáno, jak hodnota koeficientu umělé viskozity ovlivňuje ostrost zachycení rázové vlny. V případě lopatkové mříže se Laxovo-Friedrichsovo schéma ukázalo jako nedostatečně přesné a dosažené výsledky neodpovídaly experimentu. Proto byl výpočet na lopatkové mříži proveden také s modernějším AUSM schématem, které dokáže lépe zachytit rázové vlny. Výsledky AUSM schématu již byly uspokojivé, k dalšímu zpřesnění výpočtu by bylo vhodné zvýšit řád prostorové diskretizace.

Model dvoufázového proudění vody a vodní páry byl vyvinut s cílem dosáhnout relevantních výsledků při nízkém nárůstu výpočetní náročnosti oproti jednofázovému proudění. Snahou je získat průběhy veličin odpovídající realitě, přestože děje v místě fázového přechodu nejsou přesně modelovány. Výsledky dosažené při 1D výpočtu Laxovým-Friedrichsovým schématem na Barschdorffově dýze odpovídají stanoveným cílům. Průběh Machova čísla před a za místem kondenzace jeví dobrou shodu s experimentem, přestože samotný průběh kondenzace přesně zachycen není.

Aplikace na Barschdorffovu dýzu ve 2D ukázala, že model kondenzace je možné použít i pro řešení dvoudimenzionálního proudění na strukturované síti, pokud síťové čáry přibližně odpovídají proudnicím. Model byl následně použit pro výpočet na lopatkové mříži turbíny SE 1050. Také v tomto případě model prokázal svou robustnost a při vhodném nastavení parametrů řešení konvergovalo, aniž by se výpočetní čas výrazně prodloužil oproti výpočtu jednofázového proudění. Výsledky byly porovnány s dostupnými daty z výpočtu složitějším modelem dvoufázového proudění [22].

Jako klíčová se ukazuje správná volba kritéria pro polohu fázového přechodu. Při vhodném nastavení získáme výsledky srovnatelné se složitějším modelem dvoufázového proudění. V případě méně vhodného nastavení se výsledky začínají rozcházet, přesto přinášejí zpřesnění výpočtu oproti modelu jednofázového proudění. Přesnější definice kritéria počátku kondenzace je námětem pro další vývoj modelu.

Seznam obrázků

2.1	Příklad výpočetní oblasti 1D	7
2.2	Příklad výpočetní oblasti 2D	8
3.1	Objem sítě v 1D	10
3.2	Geometrie Barschdorffovy dýzy	12
3.3	Velikost kroku 1D sítě	13
3.4	Průběh tlaku a Machova čísla v dýze pro výstupní tlak $p_{out} = 0.8p_0$. . .	14
3.5	Závislost počtu iterací na výstupním tlaku	14
3.6	Průběh tlaku a Machova čísla v dýze pro různé výstupní tlaky	15
3.7	Závislost hmotnostního toku na výstupním tlaku	16
4.1	Síť pro 2D metodu konečných objemů	18
4.2	Kartézská síť pro 2D metodu konečných objemů	19
4.3	Diskretizace Barschdorffovy dýzy pro 2D metodu konečných objemů . .	21
4.4	Realizace okrajové podmínky na stěně pomocí fiktivního objemu (červeně)	22
4.5	Průběh Machova čísla v dýze při různých výstupních tlacích	23
4.6	Machovo číslo z 1D a 2D výpočtu při výstupním tlaku $p_{out} = 0.8p_0$. . .	24
4.7	Srovnání hmotnostního toku dýzou z 1D a 2D výpočtu	24
4.8	Diskretizace mezilopatkového kanálu SE 1050	25
4.9	Numerické a experimentální výsledky na lopatkové mříži SE 1050. Experiment převzat z [19]	26
5.1	Schéma programu s modelem kondenzace	30
5.2	Průběh vlhkosti a rovnovážné vlhkosti (Barschdorffova dýza)	31
5.3	Poloha počátku kondenzace v závislosti na počtu iterací (Barschdorffova dýza)	32
5.4	Průběh vlhkosti v dýze	34
5.5	Průběh tlaku v místě kondenzace	35
5.6	Průběh tlaku a Machova čísla	35

Seznam obrázků

5.7	Izočáry vlhkosti pro různé volby počáteční polohy kondenzace: a), d) na začátku dýzy, b), e) poblíž výsledného místa kondenzace, c), f) na konci dýzy. Klidová teplota $373.15K$ u a)-c) a $380.55K$ u d)-f).	37
5.8	Průběh tlaku v místě kondenzace z 1D a 2D výpočtu	38
5.9	Průběh Machova čísla	38
5.10	Izočáry vlhkosti pro různé volby počáteční polohy kondenzace: a) na začátku mezilopatkového kanálu, b) poblíž výsledného místa kondenzace, c) na konci mezilopatkového kanálu.	39
5.11	Tlak na lopatce SE 1050. Vlastní výsledky z AUSM schématu pro jednofázové proudění a s modelem kondenzace a převzaté výsledky z Laxova-Wendroffova schématu s modelem dvoufázového proudění [22]	40
5.12	Machovo číslo a vlhkost na lopatkové mříži SE 1050. Výsledky pro AUSM schéma s modelem kondenzace (a)- d)) a pro dvoufázové proudění s Laxovým-Wendroffovým schématem (e), f), převzato z [22])	41

Literatura

- [1] Wang, Y. *Kontinuumsmechanische Modellierung von Mehrphasenströmungen und Mischungstheorie*. Skriptum. Technische Universität Darmstadt, 2013.
- [2] Halama, J. *Numerical Solution of Single- and Two-Phase Internal Flow Problems*. Habilitační práce. ČVUT v Praze, 2012.
- [3] Carlson, J., Jaffe, A., Wiles, A., Editors. *The Millennium Prize Problems*. Providence: American Mathematical Society, 2006. ISBN 0-8218-3679-X.
- [4] Mattingly, J.C., Sinai, Ya.G. An Elementary Proof of the Existence and Uniqueness Theorem for the Navier-Stokes Equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, Vol. 1, No. 4. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [5] Blazek, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Oxford: Elsevier, 2001. ISBN 008 043009 0.
- [6] Pulliam, T.H. *The Euler Equations*. Revised Notes November 1994. NASA Ames Research Center, 1994.
- [7] Rezzolla, L. *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*. Lecture Notes for the COMPSTAR School on Computational Astrophysics. Albert Einstein Institute, Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, 2010.
- [8] Jiang, H., Tong, W. New Lax-Friedrichs Scheme for Convective-Diffusion Equation. In: *Information Computing and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. ISSN 0302-9743.
- [9] National Advisory Committee for Aeronautics. *NACA Report 1135*. Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow, 1991.
- [10] Liepmann, H.W., Roshko, A. *Elements of Gas Dynamics*. Londýn: John Wiley and Sons, Inc., 1957.
- [11] Leveque, R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-511-04219-1.
- [12] Barschdorff, D. *Verlauf der Zustandsgrößen und gasdynamische Zusammenhänge bei der spontanen Kondensation reinen Wasserdampfes in Lavaldüsen*. Forschung im Ingenieurwesen, Volume 37, Issue 5, 1971.
- [13] Ghidaglia, J.M., Pascal, F. *On Boundary Conditions for Multidimensional Hyperbolic Systems of Conservation Laws in the Finite Volume Framework*. Report CMLA, Ens de Cachan, 2003.

Literatura

- [14] Ludwig, A. *Untersuchung zur spontanen Kondensation von Wasserdampf bei stationärer Überschallströmung unter Berücksichtigung des Realgasverhaltens*. Dizertační práce. Universität Karlsruhe, Fakultät für Maschinenbau, 1975.
- [15] Sonntag, D., Heinze, D. *Sättigungsdampfdruck- und Sättigungsdampfdichtetafeln für Wasser und Eis*. Lipsko: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1982.
- [16] The International Association for the Properties of Water and Steam. *Revised Release on the IAPWS Industrial Formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam*. Lucern, 2007.
- [17] Liou, M.-S., Steffen, C.J. Jr. *A New Flux Splatting Scheme*. Journal of Computational Physics, Vol. 107, 1993.
- [18] Toro, E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*. Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-25202-3
- [19] Šťastný, M., Šafařík, P. *Boundary Layer Effects on the Transonic Flow in a Straight Turbine Cascade*. Technical report, ASME. Paper 92-GT-155, 1992.
- [20] Kozel, K., Fürst, J. *Numerické řešení problémů proudění I*. Skripta ČVUT, Fakulta strojní
- [21] Fořt, J. *Numerická simulace proudění I*. Skripta ČVUT, Fakulta strojní.
- [22] Halama, J. Transonic Flow of Wet Steam - Numerical Simulation In: *Acta Polytechnica*. 2012, vol. 52, no. 6, p. 124-130. ISSN 1210-2709.