ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY TEKUTIN A TERMODYNAMIKY

MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ VLHKÉHO VZDUCHU V OBLASTI DEŠTĚ MOKRÉ CHLADICÍ VĚŽE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Ilona MACHOVSKÁ

2015

ZADÁNÍ

ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Ilona Machovská
Název:	Modelování proudění vlhkého vzduchu v oblasti deště mokré chladicí věže
Anglický název:	Moist Air Flow Modelling in the Rain Zone of Wet-cooling tower
Akademický rok:	2014/2015
Studijní obor:	Aplikovaná mechanika
Ústav:	Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky
Vedoucí BP:	Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 89 Počet obrázků: 47 Počet tabulek: 2 Počet příloh: 1
Klíčová slova:	chladicí věž, oblast deště, metoda konečných objemů, upwind, TVD, zdrojový člen, transportní rovnice, transportní rovnice s konvekcí a difuzí
Keywords:	cooling tower, rain zone, finite volume method, upwind, TVD, source term, transport equation, convection-diffusion equation

Anotace: Diplomová práce se zabývá numerickým řešením proudění v oblasti deště chladicí věže a přenosem tepla a hmoty v této oblasti. Oblast deště je popsána 1D a 2D matematickým modelem. Matematické modely jsou založeny na řešení transportní rovnice s konvekcí a difuzí se zdrojovým členem, k jejichž diskretizaci je použita metoda konečných objemů. Pro určení hodnot vyšetřovaných veličin na čelech kontrolního objemu je použito schéma typu upwind. Zdrojové členy jsou řešeny soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.

Abstract: Master thesis is focused on numerical simulation of flow in the rain zone of cooling tower and on heat and mass transfer in this zone. Rain zone is described by 1D and 2D mathematical model. Models are based on solution convection-diffusion equation with source term, whose discretization is used finite volume method. To determine the values of the variables on the faces of the control volume is used upwind scheme. Source terms are solved using a system of ordinary differential equations.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a pouze s použitím literatury uvedené v seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 zákona č. 121/2000Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne……. ……

Ilona Machovská

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu diplomové práce panu Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D za dlouhodobou spolupráci trvající už od začátku mého studia, za odborné rady a vstřícný přístup. Dále bych ráda poděkovala mé rodině za morální i materiální podporu během celé doby mého studia. Děkuji také mým přátelům za zpestření volného času a v neposlední řadě musím poděkovat všem mým spolužákům za vytvoření příjemného studijního prostředí.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN **7**
ÚVOD **10**
1 CHLADICÍ VĚŽ **11**
1.1 MOKRÁ CHLADICÍ VĚŽ S PŘIROZENÝM TAHEM 11
1.1.1 PROTIPROUDÁ CHLADICÍ VĚŽ S PŘIROZENÝM TAHEM 14
1.1.2 PŘENOS TEPLA A HMOTY 15
1.1.3 LEWISŮV FAKTOR 17
1.2 MOKRÁ CHLADICÍ VĚŽ S NUCENÝM TAHEM 20
2 METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ **22**
2.1 STACIONÁRNÍ ROVNICE S KONVEKCÍ A DIFUZÍ 22
2.2 DISKRETIZACE TRANSPORTNÍ ROVNICE 23
2.3 VLASTNOSTI NUMERICKÉHO SCHÉMATU 26
2.3.1 KONZERVATIVNOST 27
2.3.2 OMEZENOST 28
2.3.3 TRANSPORTIVNOST 29
3 VYBRANÁ NUMERICKÁ SCHÉMATA **31**
3.1 SCHÉMA TYPU UPWIND 31
3.1.1 SCHÉMA TYPU UPWIND PRO JEDNOROZMĚRNOU OBLAST 34
3.1.2 SCHÉMA TYPU UPWIND PRO DVOUROZMĚRNOU OBLAST 38
3.2 SCHÉMA TYPU TVD 43
3.2.1 FUNKCE LIMITERU 43
3.2.2 IMPLEMENTACE TVD SCHÉMATU 46
3.3 VÝBĚR SCHÉMATU 49
4 VÝPOČET ZDROJOVÝCH ČLENŮ **51**
4.1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRO ŘEŠENÍ ZDROJOVÝCH ČLENŮ 51
4.2 ROVNICE PRO VÝPOČET ZDROJOVÝCH ČLENŮ 59
5 MATEMATICKÝ MODEL OBLASTI DEŠTĚ **62**
5.1 TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO HMOTNOSTNÍ ZLOMEK VODNÍ PÁRY 62
5.1.1 OVĚŘENÍ ALGORITMU ŘEŠENÍ NA JEDNOROZMĚRNÉ ÚLOZE 65
5.1.2 ŘEŠENÍ TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO HMOTNOSTNÍ ZLOMEK 67
5.2 TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO MĚRNOU ENTALPII VLHKÉHO VZDUCHU 71
5.2.1 OVĚŘENÍ ALGORITMU ŘEŠENÍ NA JEDNOROZMĚRNÉ ÚLOZE 73
5.2.2 ŘEŠENÍ TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO MĚRNOU ENTALPII VLHKÉHO VZDUCHU 75
6 DISKUZE VÝSLEDKŮ **81**
7 ZÁVĚR **84**
8 BIBLIOGRAFIE **86**
SEZNAM PŘÍLOH **88**

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Veličiny

A	$[m^2]$	plocha
D, D_x, D_y	$[kg \cdot s^{-1}]$	difuzní tok
D	$[m^2 \cdot s^{-1}]$	difuzní koeficient
F	$[N]$	síla
F, F_x, F_y	$[kg \cdot m^{-2} s^{-1}]$	konvekční tok
F	$[-]$	korekční funkce
H	$[m]$	vzdálenost
Le	$[-]$	Lewisovo číslo
Le_f	$[-]$	Lewisův faktor
L	$[m]$	délka
N_d	$[m^{-1}]$	hustota vodních kapek na metr
$\underline{N}$	$[-]$	matice koeficientů
Nu	$[-]$	Nusseltovo číslo
Pe	$[-]$	Pecletovo číslo
Pr	$[-]$	Prandtlovo číslo
$\underline{Q}$	$[-]$	vektor pravé strany
Q	$[J]$	teplo
$\dot{Q}$	$[J \cdot s^{-1}]$	tepelný tok
R	$[m]$	poloměr
Re	$[-]$	Reynoldsovo číslo
S	$[m^2]$	plocha kruhu
S_h	$[J \cdot kg^{-1} s^{-1}]$	hustota zdroje entalpie
S_P	$[-]$	zdrojový člen pro okrajové podmínky
S_{vp}	$[s^{-1}]$	hustota zdroje vodní páry
Su	$[-]$	zdrojový člen pro okrajové podmínky
Su^{DC}	$[-]$	korekční zdrojový člen
Sc	$[-]$	Schmidtovo číslo
Sh	$[-]$	Sherwoodovo číslo
St	$[-]$	Stantonovo číslo
T	$[K]$	teplota
U	$[J]$	vnitřní energie
V	$[m^3]$	objem
a	$[m^2 \cdot s^{-1}]$	teplotní vodivost
a	$[-]$	koeficient

c	$[J \cdot kg^{-1}K^{-1}]$	měrná tepelná kapacita
c_x	$[-]$	koeficient odporu koule
dx	$[m]$	elementární krok ve směru x
dy	$[m]$	elementární krok ve směru y
dt	$[s]$	elementární časový krok
dz	$[m]$	elementární krok ve směru z
g	$[m \cdot s^{-2}]$	tíhové zrychlení
h, h_{1+x}	$[J \cdot kg^{-1}]$	měrná entalpie vlhkého vzduchu
k	$[-]$	empirický koeficient
l_0	$[J \cdot kg^{-1}]$	výparné skupenské teplo
m	$[kg]$	hmotnost
$\dot{m}$	$[kg \cdot s^{-1}]$	hmotnostní tok
$\boldsymbol{n}$	$[-]$	vektor normály
p	$[Pa]$	tlak
q	$[-]$	tok obecné veličiny
r	$[-]$	poměr gradientů
t	$[s]$	čas
$\boldsymbol{u}$	$[m \cdot s^{-1}]$	vektor rychlosti
v	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost
x	$[-]$	vodorovná souřadnice
x	$[kg \cdot kg^{-1}]$	měrná vlhkost
x''	$[kg \cdot kg^{-1}]$	měrná vlhkost nasyceného vzduchu
y	$[-]$	svislá souřadnice
z	$[-]$	svislá souřadnice

Řecká písmena

α	$[W \cdot m^{-2}K^{-1}]$	součinitel přestupu tepla
β	$[m \cdot s^{-1}]$	součinitel přenosu hmoty
Γ	$[kg \cdot m^{-1}s^{-1}]$	difuzní koeficient
δ	$[-]$	změna veličiny
Δ	$[-]$	změna veličiny
η	$[-]$	účinnost
λ	$[W \cdot m^{-1}K^{-1}]$	tepelná vodivost
ν	$[m^2 \cdot s^{-1}]$	kinematická viskozita
ξ	$[-]$	korekce
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
σ	$[N \cdot m^{-1}]$	povrchové napětí
σ_v	$[-]$	hmotnostní zlomek vodní páry
ϕ	$[-]$	obecná veličina
ψ	$[-]$	funkce limiteru

Indexy

a	vzduch
A	hranice oblasti
B	hranice oblasti
d	vodní kapka
e	east, východní
i, in	vstup, vstupní hodnota
m	hmota
ma	vlhký vzduch
max	maximální hodnota
n	north, severní
out	výstup, výstupní hodnota
p	za konstantního tlaku
RZ	Rain Zone
s	south, jižní, směs
sw	nasycený
v	vodní pára
w	west, západní

Zkratky

CFD	Computational Fluid Dynamics
CV	Kontrolní objem
JE	Jaderná elektrárna
NDWCT	Natural Draft Wet-cooling Tower
PE	Polyetylen
PVC	Polyvinylchlorid
1D	Jednorozměrný
2D	Dvourozměrný

ÚVOD

Různé typy chladicích věží jsou součástí velké většiny výrobních závodů. Nemusí se nutně jednat jen o elektrárny nebo teplárny ale i menší průmyslové podniky mají své chladicí věže byť trochu jiného typu a vzhledu než je většina lidí zvyklá vídat jako součást velkých elektráren. Problematika chlazení je tedy velmi aktuální téma a znalost procesu chlazení a jeho kvalitní popis může vést k ekonomickým i ekologickým úsporám.

Chladicí věže se nejčastěji dělí na chladicí věže s přirozeným tahem a chladicí věže s nuceným tahem tzv. ventilátorové. Oba typy věží mají své výhody i nevýhody. Velkou výhodou ventilátorových věží je podstatně menší výška a tudíž i větší odolnost proti případnému zemětřesení nebo extrémním podmínkám. Ventilátorové věže se spíše používají pro menší výkony. Chladicí věže s přirozeným tahem jsou mnohonásobně vyšší než ventilátorové a jejich stavba vždy znamená zásah do okolní přírody. Tento typ věží se používá pro větší kapacity odnímání tepla, oblíbené jsou zejména v energetickém průmyslu.

Tématem chladicích věží s přirozeným tahem se zabývala má bakalářská práce. Vzhledem k tomu, že toto téma je velmi obsáhlé i náročné na pochopení a množství znalostí, zabývá se jím i má diplomová práce. Stejně jako bakalářská práce, se i tato práce omezuje na protiproudou konfiguraci chladicí věže s přirozeným tahem. Protiproudou chladicí věž lze rozdělit na několik částí, které lze popsat různými matematickými modely. V mé bakalářské práci je popsán model chladicí výplně. V této práci bude podrobně popsána oblast deště, v angličtině *rain zone*. Matematický model oblasti deště bude popsán transportní rovnicí s konvekcí a difuzí, která je řešena pomocí metody konečných objemů, což je v mechanice tekutin často používaná metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic. Zdrojový člen transportní rovnice bude řešen soustavou obyčejných diferenciálních rovnic. Transportní rovnice řeší proudění vlhkého vzduchu oblastí deště, obyčejné diferenciální rovnice popisují pohyb dešťových kapek, které z chladicí výplně padají přes oblast deště do záchytného bazénu.

Výstupem diplomové práce bude matematický model, který bude dobře popisovat přenos tepla a hmoty oblastí deště. Je řešeno rozložení měrné vlhkosti a entalpie vzduchu proudícího touto oblastí. Výsledky budou uvedeny v závěru této práce.

1 CHLADICÍ VĚŽ

Problematika chladicích věží je popsána v [1]. Chladicí věž je výměník tepla, který se hojně využívá v energetickém průmyslu, zejména v tepelných nebo jaderných elektrárnách. Zde je součástí terciárního okruhu a má za úkol ochlazovat chladicí vodu z kondenzátoru parní turbíny. Tento způsob využití chladicích věží je pravděpodobně nejznámější, existují ale i jiné typy chladicích věží, které jsou nedílnou součástí průmyslových výrob, vzhledově jsou ale odlišné od známých železobetonových věží.

Dle [2] se výměníky tepla třídí podle způsobu kontaktu médií na tři skupiny – výměníky rekuperační, regenerační a směšovací. V rekuperačních a regeneračních výměnících jsou teplonosné látky trvale odděleny a nemísí se. To je výhodné zejména v případech, kdy je jedna z látek znečištěná nebo škodlivá. V případě chladicí věže dochází k přímé interakci ochlazované látky (vody) a chladicího média (vlhkého vzduchu). Chladicí věž se tedy řadí do skupiny směšovacích výměníku tepla.

Chladicí věže mohou děleny různě dle různých hledisek. Základní dělení chladicích věží je z hlediska vzniku tahu ve věži. Z tohoto hlediska lze chladicí věže rozdělit na chladicí věže s přirozeným tahem a chladicí věže s nuceným tahem. Tato práce se zabývá pouze chladicí věží s přirozeným tahem, a proto je detailněji přiblížena v následující kapitole. Problematika chladicí věže s nuceným tahem je zmíněna v kapitole 1.2.

1.1 MOKRÁ CHLADICÍ VĚŽ S PŘIROZENÝM TAHEM

V odborných článcích a jiné literatuře se často využívá zkratky NDWCT – *Natural draft wet-cooling tower*. V češtině se ujal název mokrá chladicí věž s přirozeným tahem. Přívlastek „mokrá“ definuje vlastně způsob chlazení v tomto typu věže. Ochlazovaná voda je vstřikována tryskami přímo do prostoru chladicí věže, respektive na chladicí výplň. Voda je ochlazována proudícím vzduchem za jejího částečného odpaření. V problematice suchých chladičů je situace rozdílná. Voda proudí trubkami výměníku a je ochlazovaná vzduchem proudícím okolo trubek. Voda a vzduch tedy nejsou v přímém kontaktu. Existují chladicí věže, ve kterých se oba způsoby kombinují. Takové chladicí věže se nazývají hybridní. Voda je nejdříve vedena výměníkem, kde je odebrána část tepla proudícím vzduchem, a následně prochází stejným procesem chlazení jako ve věži mokré. Vzduch z mokré sekce se mísí se vzduchem ohřátým ve výměníku, čímž se sníží jeho relativní vlhkost a redukuje se parní

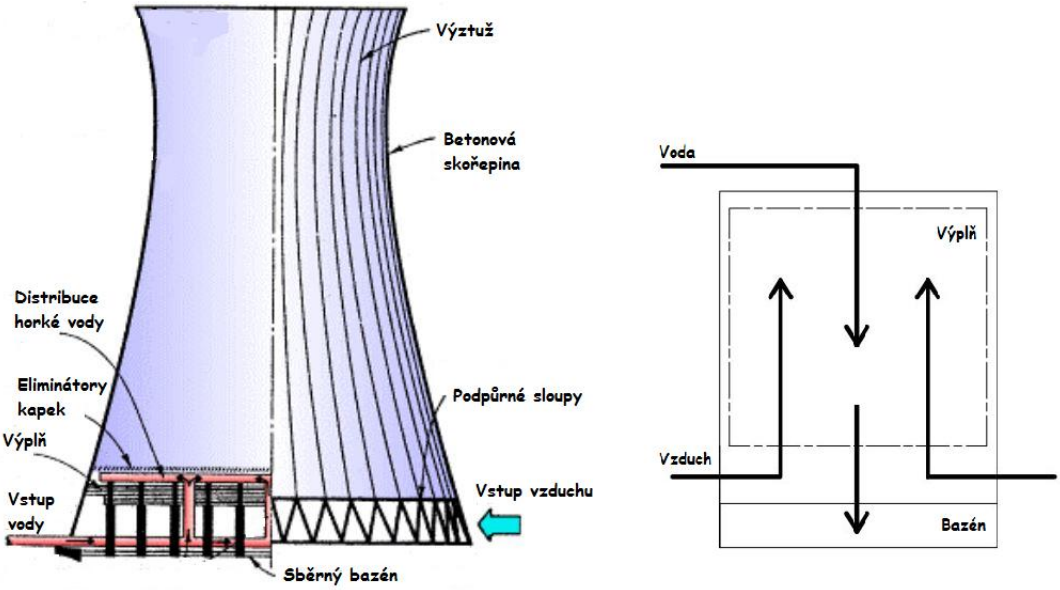
vlečka. Dále už bude kapitola pojednávat pouze o mokré chladicí věži, přívlastek „mokrá“ tedy už není nutné zmiňovat.

Chladicí věž s přirozeným tahem využívá pro vytvoření tahu principu komínového efektu. Vznik komínového efektu byl popsán v [1]. Ochlazovaná voda, která je rozstřikována tryskami do prostoru věže, kde předává teplo vzduchu. Hustota vzduchu ve věži tedy klesá, zatímco vně věže zůstává neměnná. S hustotou se mění i tlak, rozdíl hustot tedy zapříčiní tlakový spád. Snaha o vyrovnání tlakového rozdílu vede ke vzniku proudění ve věži.

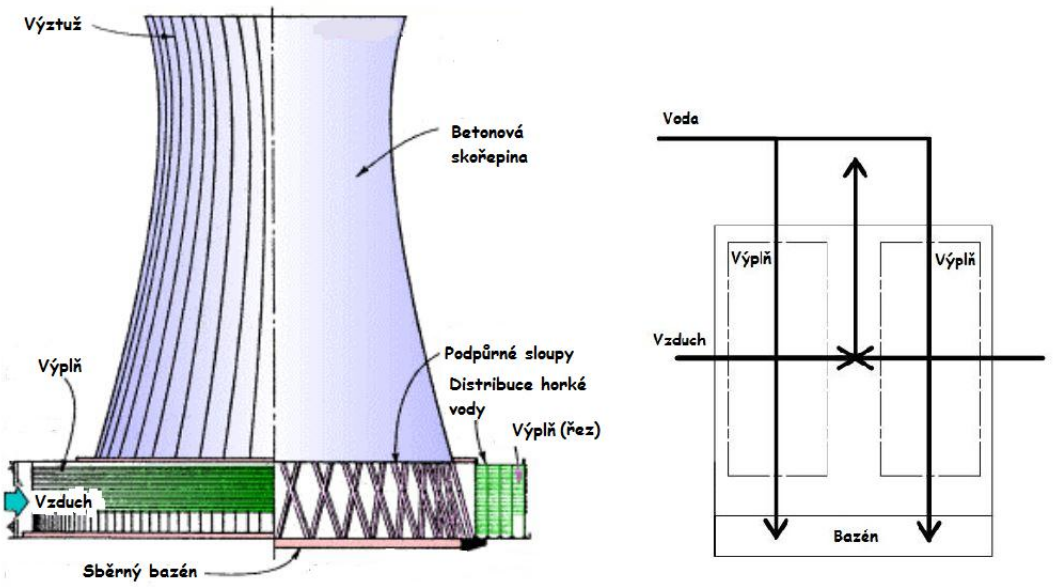
Chladicí věže s přirozeným tahem lze rozdělit dle vzájemného směru proudění vody a vzduchu na protiproudé a křížoproudé. Schémata obou typů věží jsou na *Obr. 1.1.1* a *Obr. 1.1.2*. U protiproudé konfigurace proudí vzduch vertikálně nahoru a voda je rozstřikována a padá vertikálně dolů, tedy proti směru proudění vzduchu. U křížoproudé konfigurace voda padá vertikálně dolů přes chladicí výplň a vzduch proudí přes tuto výplň horizontálně. Směry proudícího vzduchu a padající vody jsou tedy navzájem kolmé.

Výhodami křížoproudé konfigurace jsou například nižší spotřeba energie potřebné k čerpání vody, protože vodu stačí čerpat do menší výšky než u protiproudé konfigurace, a snazší přístup, a tedy i údržba, k chladicí výplni. Umístění chladicí výplně má ale nevýhodu spojenou s namrzáním chladicí vody v zimních měsících. Dalším problémem u této konfigurace může být ve větším zástavbovém prostoru. Křížoproudá konfigurace se častěji využívá u ventilátorových chladicích věží kvůli nižší tlakové ztrátě, která snižuje požadavek na výkon ventilátoru.

Protiproudá konfigurace je u chladicích věží s přirozeným tahem častější, i přesto, že má nevýhody v podobě vyšší spotřeby energie na provoz čerpadel ochlazované vody, která se musí čerpat do výšky cca $15m$. S umístěním trysek souvisí i jejich problematická údržba. Naopak rozmístění trysek zlepšuje distribuci vody, respektive má vliv na velikost vodních kapek. Chladicí výplň je umístěna uvnitř věže pod tryskami. V tomto místě je výplň lépe chráněna proti případnému namrzání. Z hlediska přenosu tepla je protiproudá konfigurace výhodnější. V této práci je upřednostněna protiproudá chladicí věž s přirozeným tahem, které bude věnována následující podkapitola.



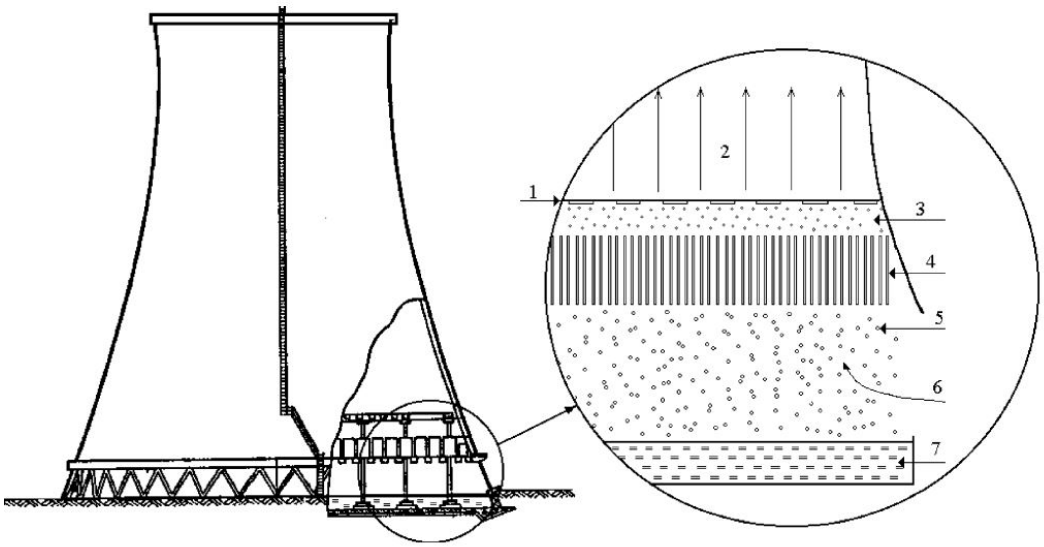
Obr. 1.1.1 Protiproudá konfigurace, převzato z [3]



Obr. 1.1.2 Křížoproudá konfigurace, převzato z [3]

1.1.1 PROTIPROUDÁ CHLADICÍ VĚŽ S PŘIROZENÝM TAHEM

Protiproudou chladicí věž lze rozdělit do několika oblastí dle schématu na *Obr. 1.1.1.1.* Vybrané oblasti jsou důležité z hlediska přenosu tepla a hmoty.

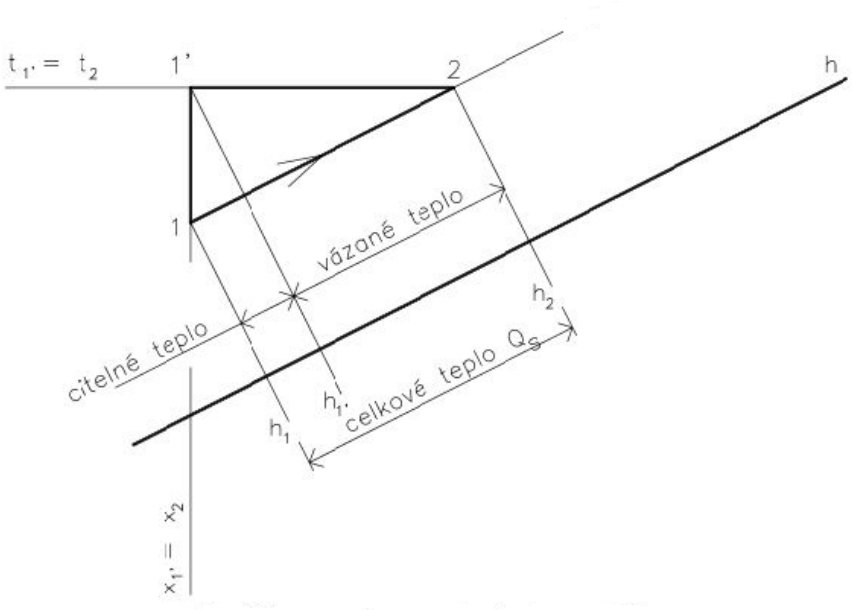


Obr. 1.1.1.1 Schéma protiproudé chladicí věže, převzato z [4]
Vstup vody, (2) Vlhký vzduch, (3) Oblast pod tryskami,
(4) Oblast výplně, (5) Oblast deště, (6) Proudící vzduch, (7) Bazén

Na *Obr. 1.1.1.1* chybí pouze eliminátory únosu kapek, které jsou umístěny nad tryskami. Z hlediska přenosu tepla a hmoty tato část chladicí věže není řešena. Eliminátory únosu kapek slouží k zachycení vodních kapek, které jsou strženy proudem vzduchu. Tvar eliminátorů by měl být navržen tak, aby měl co nejmenší aerodynamický odpor a nenavyšoval tak tlakovou ztrátu. Oblast pod tryskami se v angličtině označuje jako *spray zone.* Voda je zde ve formě malých kapiček. Pod touto oblastí je umístěna chladicí výplň. Existují různé typy chladicí výplně, převážně využívaným typem je tzv. filmová výplň. Výplň je sestavena z tenkých desek (většinou jsou vyrobeny z PVC či PE), které jsou umístěny těsně u sebe. Malé vodní kapičky, které jsou rozstřikovány z trysek, se zde spojí do vodního filmu a stékají po povrchu desek. Výplní vzhůru proudí vlhký vzduch. Mezi vodním filmem a proudícím vzduchem dochází ke konvektivnímu přenosu tepla a hmoty. Z chladicí výplně vypadává voda opět ve formě kapek přes oblast deště, anglicky *rain zone,* do sběrného bazénu. Tím končí jeden ochlazovací cyklus. Voda z bazénu je opět využita v kondenzátoru parní turbíny.

1.1.2 PŘENOS TEPLA A HMOTY

Přenos tepla a hmoty v chladicí věži s přirozeným tahem je podrobně popsán v [4], [5], [6]. Z hlediska přenosu tepla a hmoty jsou zajímavé oblast pod tryskami, chladicí výplň a oblast deště. Proces ochlazování vody je charakterizován přestupem tepla a odpařováním vody do vzduchu. Sdělené teplo při procesu ochlazování se skládá ze dvou částí, citelného tepla a tepla latentního. Situace je názorně vykreslena na *Obr. 1.1.2.1.*



Obr. 1.1.2.1 Rozdělení sděleného tepla na složky, převzato z [6]

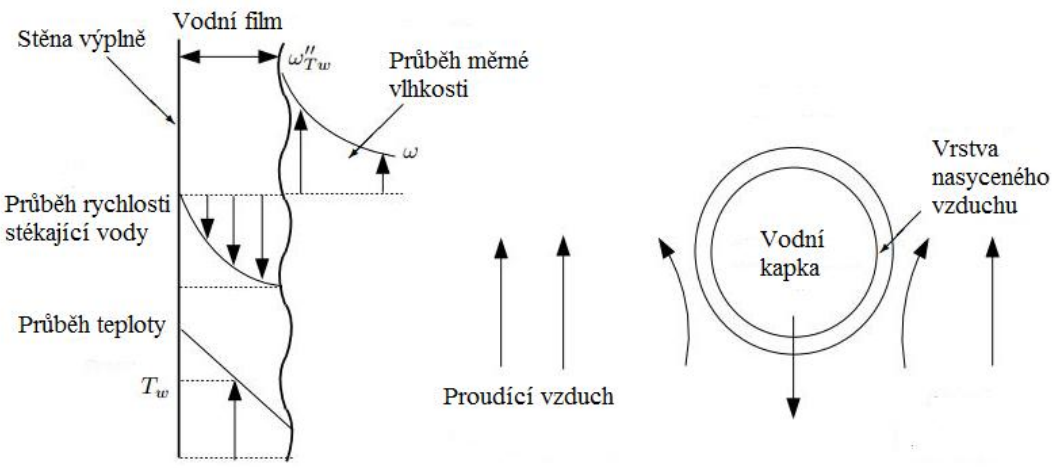
Citelné teplo je funkcí změny teploty. V Molliérově diagramu má průběh ve směru konstantní měrné vlhkosti. Teplo latentní (také se používá název skupenské či vázané) nesouvisí se změnou teploty ale je funkcí měrné vlhkosti. Latentní teplo je také spojeno s fázovými změnami a souvisí s odpařováním vody do vzduchu. V Molliérově diagramu má průběh ve směru izoterm. Při konstantním tlaku je pak sdělené teplo rovno rozdílu entalpií.

V [4] je účinnost odpařovacího procesu vody definována tepelnou účinností chladicí věže dle rovnice (1.1).

$$\eta = \frac{T_{w_{in}} - T_{w_{out}}}{T_{w_{in}} - T_{awb_{in}}} \tag{1.1}$$

V čitateli je rozdíl teplot vody na vstupu a výstupu z chladicí věže. Ve jmenovateli je rozdíl teploty vody na vstupu a teploty mokrého teploměru okolního vlhkého vzduchu na vstupu do věže $T_{awb_{in}}$. Teplota mokrého teploměru je teplota, kterou vzduch dosáhne nasycením vypařováním vody. Tato teplota je pro proces vypařování vody do vzduchu limitní (nejnižší) teplotou a její hodnota má výrazný vliv na účinnost chladicí věže.

Přenos tepla a hmoty probíhá buď ve výplni mezi vodním filmem stékajícím po stěně a proudícím vzduchem nebo v oblasti pod tryskami, respektive v oblasti deště, mezi vodními kapkami a okolním proudícím vzduchem. Situace je schematicky znázorněná na *Obr. 1.1.2.2*.



Obr. 1.1.2.2 Proudění vzduchu kolem vodního filmu/kapky, převzato z [5]

Dle [4] je úzká souvislost přenosu tepla a hmoty v oblasti pod tryskami a ve výplni. Teplota proudícího vzduchu průchodem výplní stoupá, stejně tak i jeho měrná vlhkost, protože se do něj odpařuje voda z vodního filmu. Vzduch z výplně vstupuje do oblasti pod tryskami, protože ale průchodem výplní vzrostla jeho teplota i měrná vlhkost, odpařovací proces z vodních kapek rozstříknutých z trysek se stává méně efektivním. I přesto dojde k přenosu tepla a hmoty i v této oblasti a tím se ještě zvýší teplota proudícího vzduchu, což podpoří rychlost konvektivního toku vzduchu věží (zvýší se tlakový spád), a to poté zvýší efektivitu chladicí výplně. Voda z výplně padá ve formě kapek nebo vodních paprsků do sběrného bazénu. Z hlediska tvorby matematického modelu se uvažují velikostí rovnoměrně rozložené kapky. Dle [4] závisí přenos tepla a hmoty z kapek do vzduchu hlavně na jejich

poloměru. Počáteční (maximální) velikost je známá z experimentů (liší se podle typu použité výplně) nebo jejich poloměr lze vypočítat ze vzorce (1.2).

$$R_{max} \leq 2{,}3 \frac{\sigma}{\rho_a \cdot v_d^2} \tag{1.2}$$

Kde σ je povrchové napětí vody. Poloměr kapek v oblasti deště je ovlivněn hlavně rychlostí proudícího vzduchu. Se zvyšující se rychlostí vzduchu se poloměr kapek zmenšuje. Minimální hodnoty poloměru kapek, které se ještě podílejí na evaporaci, jsou dány silovou bilancí působící na kapku. Velmi malé kapky, které jsou strženy proudem vzduchu, se na přenosu tepla a hmoty se nepodílejí. Rychlost proudícího vzduchu lze určit z následující rovnice.

$$v_a = \frac{R_H^2}{R_P^2} \left(\frac{2 g H_{HF} \Delta\rho_{ma}}{\rho_{ma}} \right)^{0,5} \cdot k \tag{1.3}$$

Kde R_H je poloměr hrdla věže, R_P je půdorysný poloměr, H_{HF} je vzdálenost hrdla věže od horního okraje chladicí výplně, $\Delta\rho_{ma}$ je změna hustoty vlhkého vzduchu ve věži, která se pro jednoduchost rovná změně hustoty vlhkého vzduchu ve výplni. Koeficient k je empirický koeficient, který se určuje nejčastěji na základě experimentu. Velikost rychlosti proudícího vzduchu se ve vybraných oblastech sdílení tepla a hmoty uvažuje konstantní, protože výška těchto oblastí je mnohem menší než výška věže.

V této práci bude podrobně řešena oblast deště. Matematický model bude odvozen detailně v dalších kapitolách.

1.1.3 LEWISŮV FAKTOR

Definice Lewisova faktoru je popsána v [7]. Lewisův faktor se značí Le_f a vyskytuje se v rovnicích popisující přenos tepla a hmoty, respektive v rovnicích, které popisují evaporační proces v chladicí věži. Hodnota Lewisova faktoru má vliv na účinnost chladicí věže. Lewisův faktor je často zaměňován s Lewisovým podobnostním číslem, které je dáno rovnicí (1.4).

$$Le = \frac{a}{D_{AB}} \tag{1.4}$$

Kde a je teplotní vodivost a D_{AB} je difuzní koeficient molekulární difuze látky A do látky B.

Schmidtovo číslo Sc vyjadřuje poměr difuzivit hybnosti a hmoty a je dáno rovnicí (1.5).

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} \tag{1.5}$$

Kinematická viskozita ν je někdy označována jako difuzivita hybnosti. V analogii mezi přenosem tepla a hmoty odpovídá Schmidtovo číslo číslu Prandtlovu, které je dáno poměrem kinematické viskozity ν a teplotní vodivosti a.

$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{1.6}$$

Dosazením rovnic (1.5) a (1.6) do rovnice (1.4) plyne, že Lewisovo číslo je poměrem Schmidtova a Prandtlova čísla.

$$Le = \frac{Sc}{Pr} \tag{1.7}$$

Lewisovo číslo udává, v jakém poměru jsou v daném systému zastoupeny přestup tepla a přenos hmoty. Lewisův faktor dává do poměru relativní toky tepla a hmoty v evaporačních procesech. Lewisův faktor lze vyjádřit poměrem Stantonova čísla pro přestup tepla St a Stantonova čísla pro přenos hmoty St_m.

$$Le_f = \frac{St}{St_m} = \frac{\alpha}{c_p \beta} \tag{1.8}$$

Kde α je součinitel přestupu tepla a β je součinitel přenosu hmoty. Dosazením dalších podobnostních čísel a jejich poměrů za Stantonova čísla v rovnici (1.8) lze odvodit vztah mezi Lewisovým číslem a Lewisovým faktorem.

$$Le_f = \frac{St}{St_m} = \left(\frac{Pr}{Sc}\right)^{-\frac{2}{3}} = Le^{\frac{2}{3}} \tag{1.9}$$

Dle [7] Lewisovo číslo není konstantní a závisí na vlastnostech vlhkého vzduchu a na stavu tenké vrstvy na rozhraní voda/vzduch. Lewisův faktor vyjádřený rovnicí (1.9) se potom koriguje korekčním činitelem dle rovnice (1.10).

$$Le_f = Le^{\frac{2}{3}} \frac{1}{F(\xi)} \tag{1.10}$$

Pro $F(\xi)$ a ξ platí rovnice (1.111) a (1.12).

$$F(\xi) = \frac{\ln \xi}{\xi - 1} \tag{1.11}$$

$$\xi = \frac{x_{sw} + 0{,}622}{x + 0{,}622} \tag{1.12}$$

Pro výpočet Lewisova faktoru se také často používá Bonsjakovičova rovnice ve tvaru (1.13).

$$Le_f = 0{,}865^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{x_{sw} + 0{,}622}{x + 0{,}622} - 1}{\ln\left(\frac{x_{sw} + 0{,}622}{x_{sw} + 0{,}622}\right)} \tag{1.13}$$

V rovnici (1.13) se uvažuje konstantní Lewisovo číslo $Le = 0{,}865$. Lewisův faktor se dle [7] pohybuje v intervalu $\langle 0{,}5; 1.3 \rangle$.

Lewisův faktor Le_f má vliv na výkonnost chladicí věže, konkrétně pak na množství odvedeného tepla a na množství odpařené vody. Vliv má i na hodnotu teploty vody a vzduchu na výstupu. Například s rostoucí hodnotou Le_f je množství odvedeného tepla větší. S tím souvisí, že teplota vody na výstupu bude pro větší hodnoty Le_f nižší, protože bylo odvedeno více tepla. Platí také, že při vyšší teplotě vzduchu na vstupu do věže a vyšší měrné vlhkosti, se rozdíly vyšetřovaných veličin v závislosti na Le_f zmenšují. To znamená, že při vyšší teplotě a vlhkosti vzduchu se výsledky víceméně shodují pro různé hodnoty Le_f.

Množství odpařené vody je vyšší při nižších hodnotách Le_f. Z toho vyplývá, že při nižších hodnotách Le_f se vzduch stane dříve nasyceným. Teplota vzduchu na výstupu z věže roste s rostoucím Le_f.

Z předchozího odstavce je patrné, že Lewisův faktor Le_f má výrazný vliv na predikci výkonnosti chladicí věže při nižších hodnotách měrné vlhkosti okolního vzduchu bez ohledu na jeho teplotu. Naopak při vyšší měrné vlhkosti okolního vzduchu má Le_f jen malý vliv. Tento poznatek lze využít při výpočtech chladicí věže s uvažováním okolních podmínek, ve kterých bude věž fungovat. Z výše uvedeného také vyplývá, že při experimentu, ve kterém se testuje výkon chladicí věže či samotné výplně, musí být dodrženy okolní podmínky, které se uvažují ve výpočtech.

1.2 MOKRÁ CHLADICÍ VĚŽ S NUCENÝM TAHEM

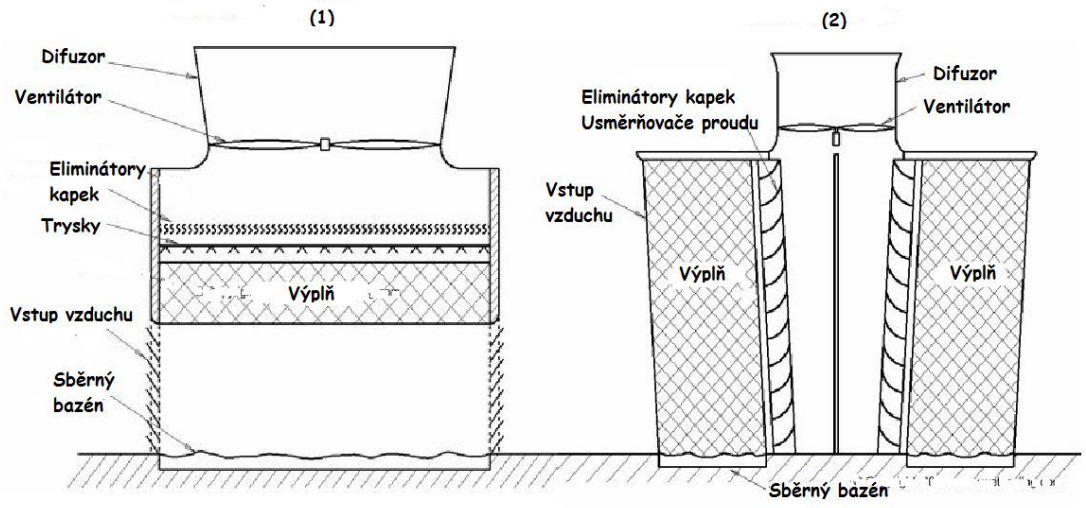
Chladicí věž s nuceným tahem používá k vytvoření tahu věží ventilátory, často se používá název ventilátorová chladicí věž. O tomto typu věží podrobně pojednává [8].

Ventilátorové věže mohou být suché, mokré nebo hybridní. V této kapitole se mluví jen o mokrých chladicích věžích. Díky ventilátorům jsou tyto věže nižší než chladicí věže s přirozeným tahem. Časté je jejich využití v malých průmyslových podnicích právě díky velmi malým a kompaktním rozměrům, ale lze se s nimi setkat i v elektrárnách či teplárnách. Například v JE Dukovany právě probíhá výstavba bloku šesti ventilátorových věží o výšce 17 metrů. To je cca desetina výšky stávajících věží s přirozeným tahem, které budou i nadále sloužit k chlazení chladicí vody kondenzátorů parních turbín. Nový blok ventilátorových věží má primárně sloužit k chlazení bezpečnostních systému, protože díky menší výšce jsou tyto věže odolnější proti nepříznivým vnějším vlivům. Výstavba nových věží je součástí projektu „Zodolňování JE Dukovany“, stavba má odolat zemětřesení i tornádu.

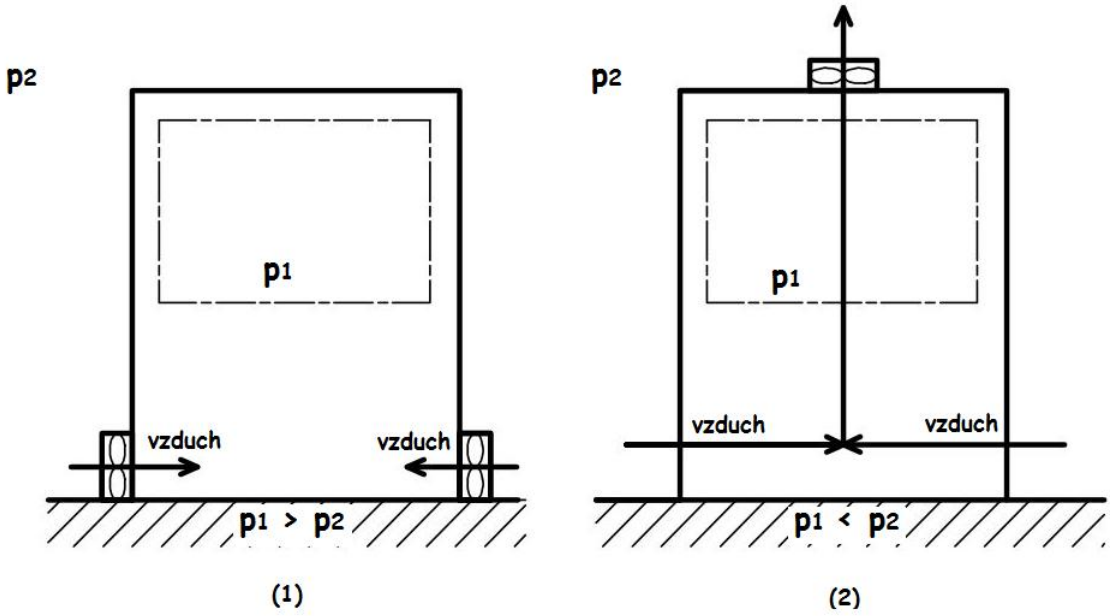
Chladicí věže s nuceným tahem mohou být stejně jako věže s přirozeným tahem děleny na protiproudé nebo křížoproudé. U protiproudých proudí vzduch proti padající vodě, u křížoproudých je směr proudění vzduchu kolmý ke směru padající vody. Schéma je na *Obr. 1.2.1.* Kromě ventilátoru zde přibyl ještě difuzor, který slouží k usměrnění výstupního proudu vzduchu.

Další dělení chladicích věží s nuceným tahem vychází z různého umístění ventilátorů a tedy i z různého principu vytvoření tahu. Tah je buď vytvářen protlačováním vzduchu věží a ventilátor nebo více ventilátorů jsou umístěné ve spodní části věže. Častější je umístění

sacího ventilátoru v horní časti věže. U křížoproudé konfigurace je možná pouze varianta se sacím ventilátorem, u protiproudé jsou možné obě varianty. Možné umístění ventilátorů je znázorněné na *Obr. 1.2.2.*



Obr. 1.2.1 Konfigurace chladicích věží s nuceným tahem, převzato z [9]
(1) Protiproudá konfigurace, (2) Křížoproudá konfigurace



Obr. 1.2.2 Umístění ventilátorů v chladicích věžích s nuceným tahem
(1) Konfigurace s protlačovacími ventilátory
(2) Konfigurace se sacím ventilátorem

2 METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ

Úvod do metody konečných objemů a její historie je popsána v zajímavém článku [10]. Metoda konečných objemů se používá jako jedna z metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Dalšími metodami jsou například metoda konečných prvků nebo metoda konečných diferencí. K rozvoji těchto metod došlo hlavně během druhé světové války a ve druhé polovině 20. století, samotný název metoda konečných objemů se objevil v roce 1977 v práci profesora Antonyho Jamesona ze *Standford university*. Metoda konečných objemů je součástí mnoha výpočetních softwarů a nadále se rozvíjí po teoretické i aplikační stránce.

2.1 STACIONÁRNÍ ROVNICE S KONVEKCÍ A DIFUZÍ

Řešení transportních rovnic s konvekcí a difuzí pomocí metody konečných objemů je podrobně popsáno v [11].

V chladicí věži je proudění tekutiny převládajícím problémem, proto se v transportní rovnici musí počítat s konvekčním členem. V přírodě se s konvekcí vyskytuje i difuze, řešená transportní rovnice tedy bude řešit kombinaci konvekce s difuzí. Obecnou transportní rovnici s konvekcí a difuzí, která popisuje transport obecné veličiny ϕ, lze napsat v diferenciálním tvaru (2.1).

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\boldsymbol{u}) = div(\Gamma grad\phi) + S_\phi \tag{2.1}$$

Pro stacionární případ se neuvažuje první člen na levé straně, rovnice (2.1) se tedy zjednoduší na tvar rovnice (2.2).

$$div(\rho\phi\boldsymbol{u}) = div(\Gamma grad\phi) + S_\phi \tag{2.2}$$

Rovnice (2.2) se integruje přes kontrolní objem.

$$\int_{CV} div(\rho\phi\boldsymbol{u})dV = \int_{CV} div(\Gamma grad\phi)\, dV + \int_{CV} S_\phi\, dV \tag{2.3}$$

Požitím Gaussovy věty se objemové integrály převedou na povrchové a rovnice (2.3) pak bude ve tvaru (2.4).

$$\int_A \boldsymbol{n}(\rho\phi\boldsymbol{u})dA = \int_A \boldsymbol{n}(\Gamma grad\phi)\, dA + \int_{CV} S_\phi\, dV \tag{2.4}$$

Člen na levé straně rovnice přestavuje konvekční tok obecné veličiny ϕ přes hranici kontrolního objemu, první člen na pravé straně rovnice je difuzní tok ϕ hranicí objemu. Druhý člen na pravé straně přestavuje zdroj případně propad veličiny ϕ uvnitř kontrolního objemu. V konvekčním i difuzním členu vystupuje vektor normály $\boldsymbol{n}$ elementární plošky dA, v konvekčním členu je ρ hustota proudící tekutiny a $\boldsymbol{u}$ je vektor rychlosti proudění. Konstanta Γ v difuzním členu je difuzní koeficient.

2.2 DISKRETIZACE TRANSPORTNÍ ROVNICE

Pro jednoduchost a názornost je diskretizace popsána na jednorozměrné rovnici s konvekcí a difuzí bez uvažování zdrojového členu. Postup diskretizace je také podrobně popsán v [11].

Zjednodušená rovnice má tvar (2.5).

$$div(\rho\phi\boldsymbol{u}) = div(\Gamma grad\phi) \tag{2.5}$$

Protože se rovnice uvažuje jako jednorozměrná, vystupuje v ní pouze souřadnice x a vektor rychlosti má pouze jednu složku u ve směru souřadnice x. Operátory divergence a gradientu lze také zapsat pro jedinou souřadnici x. Rovnice (2.5) pak přejde do tvaru (2.6).

$$\frac{d}{dx}(\rho\phi u) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{2.6}$$

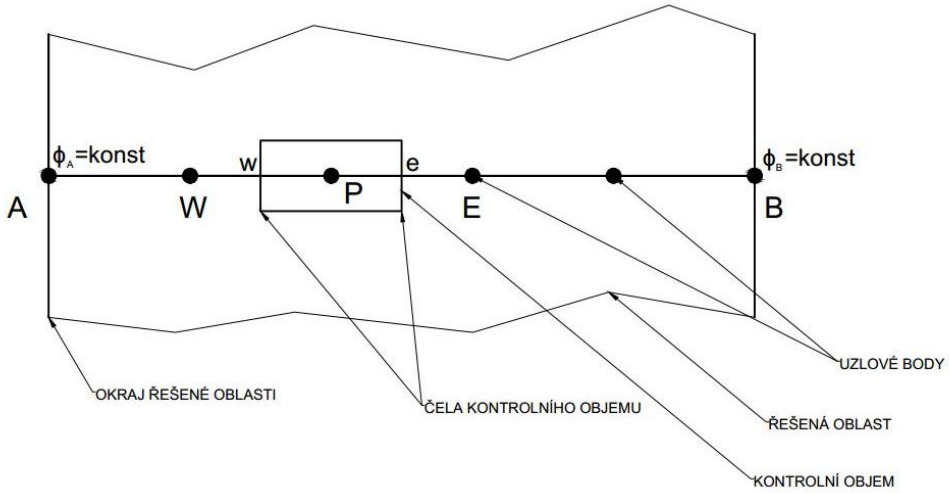
Rovnice (1.6) se integruje přes kontrolní objem.

$$\int_{CV}\frac{d}{dx}(\rho\phi u)\, dV = \int_{CV}\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) dV \tag{2.7}$$

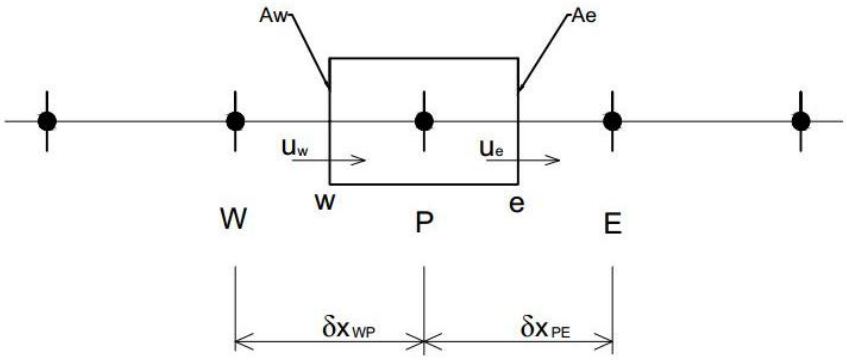
Po integraci přejde rovnice (2.7) do tvaru (2.8).

$$(\rho u A\phi)_e - (\rho u A\phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w \tag{2.8}$$

Pro lepší názornost je situace popsána na *Obr. 2.2.1* a na *Obr. 2.2.2*. Z *Obr. 2.2.2* je patrné, že A_e respektive A_w je plocha čela kontrolního objemu. Pro zvolený postup diskretizace se uvažuje $A_e = A_e = A$. Rovnice (2.8) se potom může vydělit plochou A.



Obr. 2.2.1 Popis řešené oblasti



Obr. 2.2.2 Kontrolní objem

Častým problémem při řešení rovnic pomocí metody konečných objemů je, že hodnoty proměnné ϕ i dalších proměnných se určují v uzlových bodech, pro výpočet je ale nutná znalost proměnných na čelech kontrolního objemu. Difuzní proces ovlivňuje distribuci veličiny ϕ ve směru jejího gradientu, pro určení hodnot difuzních toků na čelech kontrolního objemu lze proto použít aproximaci pomocí centrálních diferencí. Pro lepší pochopení opět poslouží *Obr. 2.2.2.* Hodnoty difuzních toků, které vystupují na pravé straně rovnice (2.8) se převedou do tvaru (2.9) respektive (2.10).

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) \tag{2.9}$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\delta x_{WP}}\right) \tag{2.10}$$

Hodnoty difuzních koeficientů Γ_e a Γ_w se určí lineární aproximací ze známých hodnot difuzních koeficientů v uzlových bodech pomocí rovnic (2.11) a (2.12).

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \tag{2.11}$$

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_P + \Gamma_W}{2} \tag{2.12}$$

Pro další postup se zavedou dvě nové proměnné (2.13) a (2.14).

$$F = \rho u \tag{2.13}$$

$$D = \frac{\Gamma}{dx} \tag{2.14}$$

Hodnoty proměnných dle rovnic (2.13) a (2.14) na čelech kontrolního objemu jsou v následujících rovnicích (2.15) a (2.16).

$$F_w = (\rho u)_w \qquad F_e = (\rho u)_e \tag{2.15}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \qquad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \tag{2.16}$$

Dosazením rovnic (2.15) a (2.16) do rovnic (2.9) a (2.10), a poté do rovnice (2.8) se získá finální diskretizovaný tvar rovnice, který se zapíše ve tvaru (2.17).

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e\,(\phi_E - \phi_P) - D_w\,(\phi_P - \phi_W) \tag{2.17}$$

Stejný postup se aplikuje i pro rovnici kontinuity ve tvaru (2.18).

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \tag{2.18}$$

Po integraci přes kontrolní objem se rovnice (2.18) zapíše ve tvaru (2.19).

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \tag{2.19}$$

Vydělením plochou A a dosazením vztahů (2.15) platí rovnice (2.20).

$$F_e - F_w = 0 \tag{2.20}$$

Z rovnice (2.15) je patrné, že pro určení hodnot konvekčních toků F_e a F_w na čelech kontrolního objemu je nutná znalost rychlostního pole. Prozatím se předpokládá, že rychlostní pole je známé. V rovnici (2.17) je ještě třeba určit hodnoty veličiny ϕ na čelech kontrolního objemu, tj. ϕ_e a ϕ_w. Určení těchto hodnot bude diskutováno v dalších kapitolách.

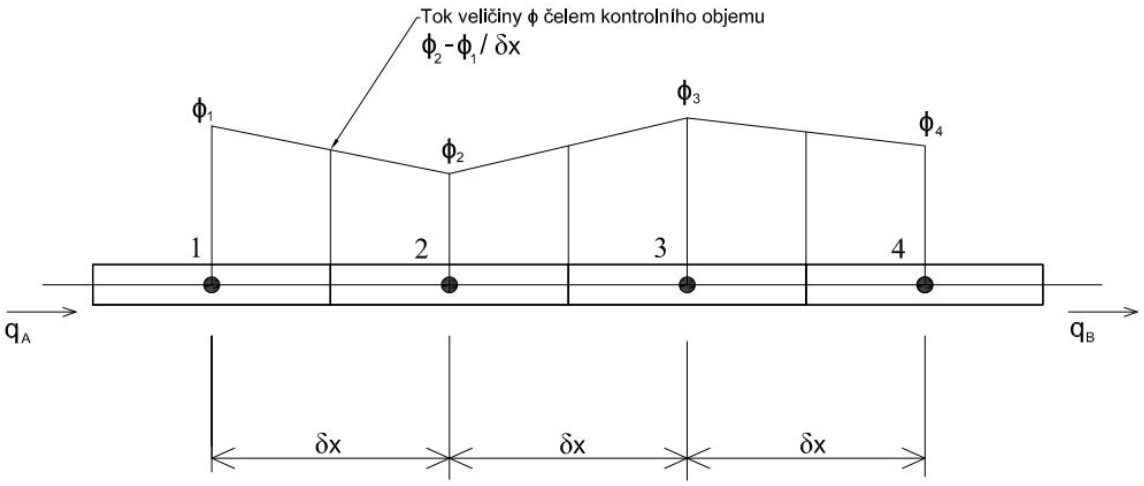
2.3 VLASTNOSTI NUMERICKÉHO SCHÉMATU

Jak už bylo řečeno výše, problémem při použití metody konečných objemů k řešení diferenciálních rovnic je stanovení hodnot proměnných na čelech kontrolního objemu. K aproximaci těchto hodnot se používají různá numerická schémata a jejich vhodná či nevhodná volba značně ovlivňuje výsledek. Pro správnou volbu numerického schématu je dobré znát jeho základní vlastnosti. Základní vlastnosti numerického schématu jsou podrobně popsány v [11].

2.3.1 KONZERVATIVNOST

Konzervativnost schématu je popsáno jako zachování velikosti toku obecné veličiny ϕ celou řešenou oblastí. To je zaručeno, pokud tok veličiny ϕ, opouštějící kontrolní objem, je stejný jako tok veličiny ϕ, který vstupuje do následujícího sousedního kontrolního objemu. To znamená, že tok pravým čelem kontrolního objemu je stejný jako tok levým čelem sousedního kontrolního objemu. Pro lepší pochopení je konzervativnost schématu popsána na následujícím příkladu.

Uvažuje se jednorozměrná řešená oblast znázorněná na *Obr. 2.3.1.1.*



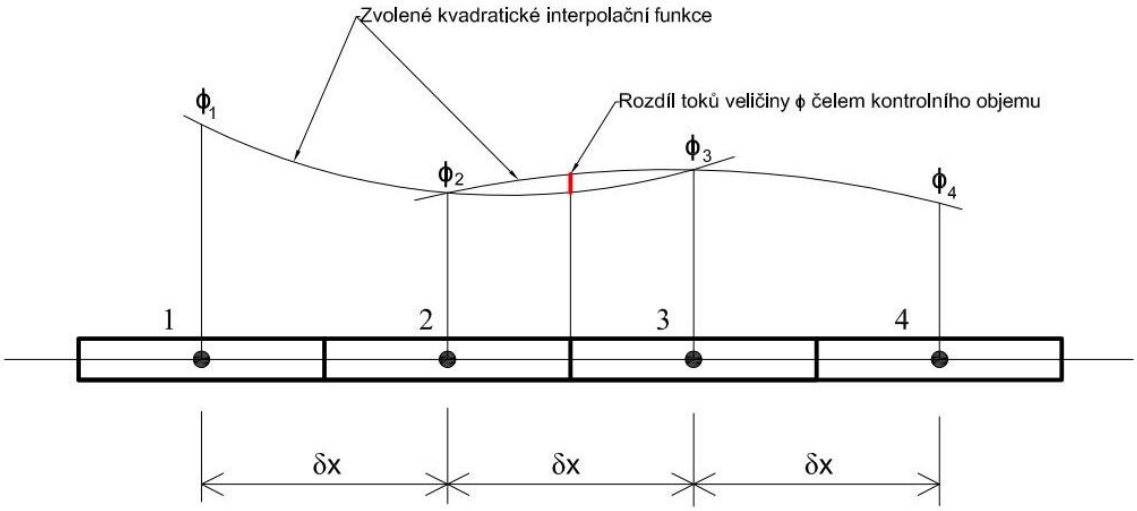
Obr. 2.3.1.1 Konzervativnost schématu

Řešená oblast je rozdělená na čtyři kontrolní objemy. Pro jednoduchost se uvažují jen difuzní toky, tj. pravá strana rovnice (2.6). Pro určení toků veličiny ϕ na čelech jednotlivých kontrolních objemů byla použita aproximace pomocí centrálních diferencí dle rovnic (2.9) a (2.10). Aby byla splněna konzervativnost, celkový tok veličiny ϕ řešenou oblastí by měl být dán rozdílem toků na hranicích $q_B - q_A$. Celkový tok veličiny ϕ řešenou oblastí se zapíše jako součet dílčích toků přes čela jednotlivých kontrolních objemů.

$$celkový\ tok = \left(\Gamma_{e1}\frac{\phi_2-\phi_1}{\delta x} - q_A\right) + \left(\Gamma_{e2}\frac{\phi_3-\phi_2}{\delta x} - \Gamma_{w2}\frac{\phi_2-\phi_1}{\delta x}\right) + \left(\Gamma_{e3}\frac{\phi_4-\phi_3}{\delta x} - \Gamma_{w3}\frac{\phi_3-\phi_2}{\delta x}\right) + \left(q_B - \Gamma_{w4}\frac{\phi_4-\phi_3}{\delta x}\right) \quad (2.21)$$

Z rovnice (2.21) je vidět, že pro $\Gamma_{e1} = \Gamma_{w2}, \Gamma_{e2} = \Gamma_{w3}, \Gamma_{e3} = \Gamma_{w4}$ je celkový tok veličiny ϕ řešenou oblastí skutečně dán pouze rozdílem toku na hranicích oblasti $q_B - q_A$. Zvolené schéma pro výpočet difuzního toku, které používá aproximaci pomocí centrálních diferencí, je tedy konzervativní.

Nekonzervativní schéma vznikne například užitím kvadratické interpolace pro určení toků přes čela kontrolních objemů. Situace je znázorněna na *Obr. 2.3.1.2*.



Obr. 2.3.1.2 Nekonzervativnost schématu

Na tomto obrázku je dobře vidět, že pro zvolené kvadratické funkce, které interpolují hodnoty toků na čelech kontrolních objemů, tok veličiny ϕ z kontrolního objemu 2 není stejný jako tok veličiny ϕ do kontrolního objemu 3. Schéma, které používá tyto konkrétní kvadratické funkce, nevyhovuje požadavku pro konzistenci schématu.

V [11] je zdůrazněné, že schémata používající kvadratickou interpolaci nejsou obecně nekonzistentní. Pro správnou volbu kvadratické interpolační funkce může být schéma konzistentní. Takovým schématem je například schéma s názvem QUICK *(Quadratic upstream interpolation for convective kinetics)*.

2.3.2 OMEZENOST

Tato vlastnost numerického schématu říká, že při uvažování transportní rovnice bez zdrojového členu, budou hodnoty transportované veličiny ϕ u vnitřních uzlů omezeny zvolenými okrajovými podmínkami. Pokud se tedy bude řešit transport veličiny ϕ

jednorozměrnou oblastí $x \epsilon \langle 0, L \rangle$ a okrajové podmínky budou dány $\phi_0 = 1$ a $\phi_L = 0$, hodnoty veličiny ϕ u vnitřních uzlů potom budou menší než 1 a větší než 0. Omezenost se zajistí například splněním kritéria pro velikost koeficientů u hodnot veličiny ϕ u jednotlivých uzlů ve tvaru nerovnice (2.22).

$$\frac{\Sigma|a_{nb}|}{|a_P'|} \begin{cases} \leq 1 & pro\ všechny\ uzly \\ < 1 & aspoň\ pro\ jeden\ uzel \end{cases} \tag{2.22}$$

V nerovnici (2.22) je v čitateli součet hodnot koeficientů všech sousedních uzlů uzlu P, ve jmenovateli je koeficient $a_P' = a_P - S_P$. Pokud je tedy kritérium (2.22) splněno, matice koeficientů bude diagonálně dominantní. Na diagonále matice jsou koeficienty a_P', které jsou dle nerovnice (2.22) mnohem větší než koeficienty sousedních uzlů. Protože se člen S_P odečítá od koeficientu a_P a koeficient a_P' má být co největší, dalším požadavkem je, že člen S_P má být záporný. Dvě záporná znaménka se pak změní na kladné a koeficient a_P' pak bude větší než koeficient a_P. Člen S_P vznikne implementací okrajových podmínek.

Dalším nezbytným požadavkem pro splnění omezenosti je, že všechny koeficienty u hodnot veličiny ϕ jednotlivých uzlů by měly mít stejné znaménko, většinou kladné. Splnění tohoto požadavku způsobí, že nárůst hodnoty veličiny ϕ v jednom uzlu, vede k nárůstu hodnoty veličiny ϕ v uzlu sousedním.

Splněním podmínek pro omezenost schématu je zajištěno, že řešení rovnice bude konvergovat a toto řešení nebude obsahovat lokální oscilace, které jsou nežádoucí.

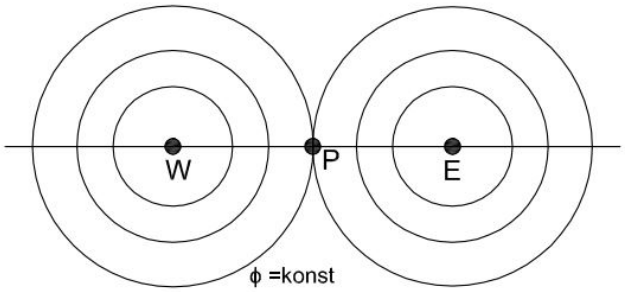
2.3.3 TRANSPORTIVNOST

Vlastnost transportivnosti numerického schématu je popsáno na jednoduchém příkladu. Poměr konvekce a difuze v transportní rovnici je dán bezrozměrným Pecletovým číslem.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\frac{\Gamma}{\delta x}} \tag{2.23}$$

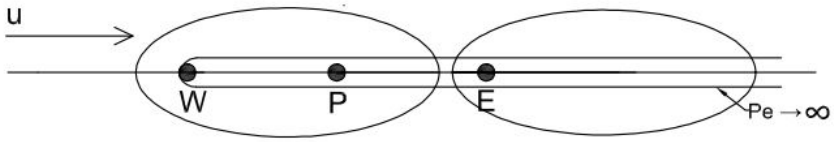
Pro čistě difuzní transport veličiny ϕ bude $Pe \rightarrow 0$, pro čistě konvekční transport bude platit $Pe \rightarrow \infty$. Na *Obr. 2.3.3.1.* a *Obr. 2.3.3.2.* je naznačeno rozložení veličiny ϕ v okolí

dvou sousedních uzlů W a E uzlu P pro různá Pecletova čísla. V uzlech W a E jsou umístěny konstantní zdroje veličiny ϕ.



Obr. 2.3.3.1 Rozložení veličiny ϕ pro případ čisté difuze

Na *Obr. 2.3.3.1.* je případ čisté difuze, Pecletovo číslo se tedy blíží nule. V tomto případě veličina ϕ neproudí a difuzní proces rozprostírá veličinu ϕ ve všech směrech stejně, kontury konstantního ϕ jsou proto soustředné kružnice. Pro případ čisté difuze lze tedy použít například aproximaci pomocí centrálních diferencí.



Obr. 2.3.3.2 Rozložení veličiny ϕ pro případ kombinace konvekce a difuze

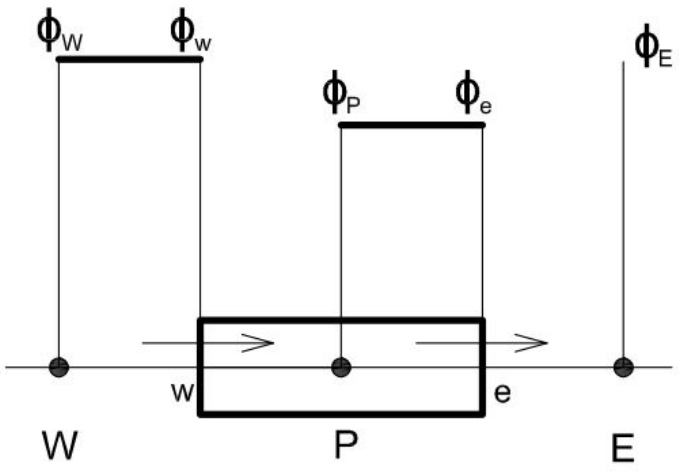
Na *Obr. 2.3.3.2.* je znázorněn případ, kdy Pecletovo číslo roste a kružnice se budou měnit v elipsy posunuté ve směru proudění. Pro případ $Pe \rightarrow \infty$ elipsy degradují v úsečky. Pro vyznačený směr proudění je hodnota veličiny ϕ v uzlu P ovlivněna pouze hodnotou ϕ v uzlu W. Protože veličina ϕ není jako v případě čisté difuze rozložena ve všech směrech stejně, není pro tento případ vhodné použít aproximaci pomocí centrálních diferencí. Tato metoda by pravděpodobně dávala špatné výsledky. Vhodnější je použít například schéma typu upwind, které respektuje směr proudění.

3 VYBRANÁ NUMERICKÁ SCHÉMATA

V této kapitole jsou podrobně řešena vybraná numerická schémata pro určení hodnot vyšetřovaných veličin na čelech kontrolního objemu. Vybranými schématy jsou schéma typu upwind a schéma typu TVD, která jsou podrobně odvozena a popsána v [11].

3.1 SCHÉMA TYPU UPWIND

Z názvu tohoto numerického schématu *(upwind ≈ proti větru)* je patrné, že toho schéma respektuje směr proudění sledované veličiny. Jak už bylo řečeno v předchozích kapitolách, jedním z hlavních problémů při použití metody konečných objemů je aproximace hodnot na čelech kontrolních objemů. Schéma typu upwind při určování těchto hodnot počítá se směrem proudění. Situace je naznačená na *Obr. 3.1.1.*



Obr. 3.1.1 Určení hodnot toků na čelech kontrolního objemu pro kladný směr proudění

Při uvažovaní kladného směru proudění, který je na *Obr. 3.1.1.* vyznačen šipkami, je hodnota toku veličiny ϕ na západním (levém) čele kontrolního objemu mnohem více ovlivněna hodnotou veličiny ϕ v uzlu W než hodnotou veličiny ϕ v uzlu P. Hodnotu toku veličiny ϕ východním (pravým) čelem zase výrazně ovlivňuje hodnota veličiny ϕ v uzlu P než v uzlu E. Upwind schéma tedy aproximuje hodnoty na čelech kontrolního objemu dle rovnic (3.1) a (3.2).

$$\phi_w = \phi_W \tag{3.1}$$

$$\phi_e = \phi_P \tag{3.2}$$

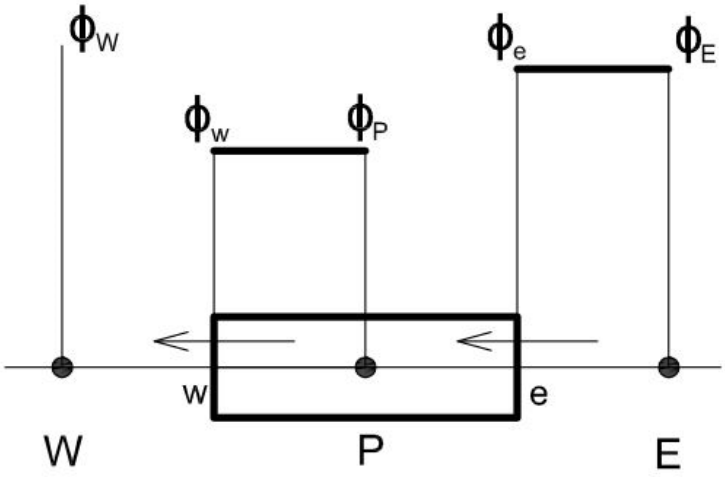
Po dosazení aproximace do rovnice (2.17) je diskretizovaná rovnice ve tvaru (3.3).

$$F_e\phi_P - F_w\phi_W = D_e\,(\phi_E - \phi_P) - D_w\,(\phi_P - \phi_W) \tag{3.3}$$

Rovnice (3.3) se upraví na tvar (3.4).

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E \tag{3.4}$$

Záporný směr proudění veličiny ϕ je vyznačen šipkami na *Obr. 3.1.2.*



Obr. 3.1.2 Určení hodnot toků na čelech kontrolního objemu pro záporný směr proudění

Hodnoty veličiny ϕ na čelech kontrolního objemu se aproximují rovnicemi (3.5) a (3.6).

$$\phi_w = \phi_P \tag{3.5}$$

$$\phi_e = \phi_E \tag{3.6}$$

Pro záporný směr proudění se stejně jako pro kladný směr počítá s výraznějším vlivem uzlu proti proudu na hodnotu toku na čele kontrolního objemu. Na hodnotu toku východním čelem má tedy výraznější vliv hodnota veličiny ϕ v uzlu E, proto lze tuto hodnotu

aproximovat rovnicí (3.6). Obdobná praxe platí i pro hodnotu toku západním čelem. Dosazením rovnic (3.5) a (3.6) do rovnice (2.17) má diskretizovaná rovnice pro záporný směr proudění tvar (3.7).

$$F_e\phi_E - F_w\phi_P = D_e\,(\phi_E - \phi_P) - D_w\,(\phi_P - \phi_W) \tag{3.7}$$

Po úpravě lze rovnici (3.7) naspat ve tvaru (3.8).

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)]\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E \tag{3.8}$$

Koeficienty u uzlových hodnot veličiny ϕ, tedy u ϕ_P, ϕ_W a ϕ_E, lze nahradit koeficienty a_P, a_W a a_E. Rovnice (3.4) respektive (3.8) se zapíše ve tvaru (3.9).

$$a_P\phi_P = a_W\,\phi_W + a_E\phi_E \tag{3.9}$$

Pro koeficient a_P platí rovnice (3.10).

$$a_P = a_W\ + a_E + (F_e - F_w) \tag{3.10}$$

Koeficienty a_W a a_E jsou různé pro různé směry proudění. Pro kladný směr proudění platí rovnice (3.11) a (3.12).

$$a_W = D_w + F_w \tag{3.11}$$

$$a_E = D_e \tag{3.12}$$

Pro záporný směr proudění platí rovnice (3.13) a (3.14).

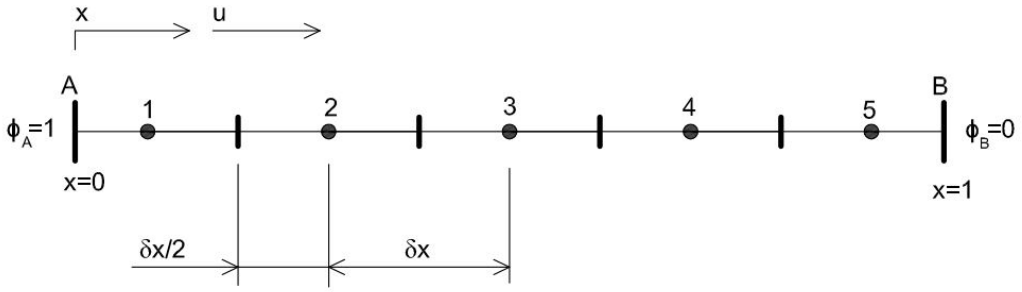
$$a_W = D_w \tag{3.13}$$

$$a_E = D_e - F_e \tag{3.14}$$

Princip metody konečných objemů a použití schématu typu upwind pro určení toků čely kontrolního objemu je vysvětlen na příkladech v následujících kapitolách.

3.1.1 SCHÉMA TYPU UPWIND PRO JEDNOROZMĚRNOU OBLAST

Použití upwind schématu je demonstrováno na jednoduchém příkladu. Zadání příkladu a postup řešení jsou převzaty z [11]. V příkladu se řeší transport veličiny ϕ jednorozměrnou oblastí o délce $1m$, hustota je $\rho = 1\ kg.m^{-3}$ a difuzní koeficient $\Gamma = 0.1\ kg.m^{-1}.s^{-1}$. Oblast je rozdělena na pět shodných kontrolních objemů o délce $\delta x = 0.2\ m$. Rychlost proudění je rovna $u = 0.1\ m.s^{-1}$. Směr proudění je uvažován pouze v kladném smyslu. Rozdělení řešené oblasti na kontrolní objemy je naznačeno na *Obr. 3.1.1.1.*



Obr. 3.1.1.1 Řešená jednorozměrná oblast

Okrajové podmínky na hranicích A respektive B jsou $\phi_A = 1$ a $\phi_B = 0$. Pro jednoduchost je uvažováno $F_e = F_w = F = \rho u$ a $D_e = D_w = D = \frac{\Gamma}{\delta x}$. Pro řešení tohoto příkladu lze využít postupu, který byl popsán v předchozí kapitole. Speciální pozornost se ale musí věnovat okrajovým podmínkám respektive uzlům 1 a 5, které jsou okrajovými podmínkami ovlivněny. Rovnice (3.3) pro uzel 1 po dosazení okrajové podmínky je ve tvaru (3.15).

$$F_e\phi_P - F_A\phi_A = D_e\,(\phi_E - \phi_P) - D_A\,(\phi_P - \phi_A) \tag{3.15}$$

Pro uzel 5 potom rovnice (3.3) přejde na tvar (3.16).

$$F_B\phi_P - F_w\phi_W = D_B\,(\phi_B - \phi_P) - D_w\,(\phi_P - \phi_W) \tag{3.16}$$

Rovnici (3.15) se upraví do tvaru (3.17).

$$[(F_e + D_e) + D_A]\phi_P = D_e\phi_E + (D_A + F_A)\phi_A \tag{3.17}$$

Aby koeficient a_P u hodnoty veličiny ϕ v uzlu P odpovídal tvaru rovnice (3.10), musí se k závorce na levé straně rovnice (3.17) přičíst a odečíst F_w. Rovnice (3.17) se upraví do tvaru (3.18).

$$[D_e + (F_e - F_w) + D_A + F_w]\phi_P = D_e\phi_E + (D_A + F_A)\phi_A \tag{3.18}$$

Z rovnice (3.18) je patrné, že u koeficientu a_P proti rovnici (3.10) přebývá člen $D_A + F_w$. Tento se označí jako S_P a rovnice (3.10) pak přejde do tvaru (3.19).

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P \tag{3.19}$$

Význam koeficientu S_P byl diskutován v kapitole 2.3.2. Předpokládá se, že transport veličiny ϕ v tomto příkladu splňuje rovnici kontinuity dle rovnice (2.20). Člen $(F_e - F_w)$ v rovnici (3.19) je tedy nulový. Na pravé straně rovnice (3.18) po implementaci okrajové podmínky objeví člen $(D_A + F_A)\phi_A$. Tento člen se označí jako S_u a přičítá se k pravé straně diskretizované rovnice obdobně jako zdrojový člen. Diskretizovaná rovnice (3.9) pak přejde do tvaru (3.20).

$$a_P\phi_P = a_W\,\phi_W + a_E\phi_E + S_u \tag{3.20}$$

Stejný postup lze aplikovat pro uzel 5 a rovnici (3.16). Pro uzly 1 a 5 platí $F_A = F_B = F$ a $D_A = D_B = \frac{\Gamma}{\delta x/2} = 2D$. Na vnitřní uzly 2,3,4 nemají okrajové podmínky vliv a platí tedy původní rovnice. Členy S_P a S_u jsou tedy pro vnitřní členy nulové. Hodnoty jednotlivých členů pro jednotlivé uzly jsou pro přehlednost uvedeny v *Tabulce 3.1.1.1.*

Tabulka 3.1.1.1 Hodnoty koeficinetů diskretizované rovnice pro jednotlivé uzly

Uzel	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	D	$-(2D + F)$	$(2D + F)\phi_A$
2,3,4	$D + F$	D	0	0
5	$D + F$	0	$-2D$	$2D \cdot \phi_B$

U členu S_P je záporné znaménko, v rovnici (3.19) se totiž člen odečítá, dvě záporná znaménka potom přejdou v kladné. Koeficient a_P musí být mnohem větší než

koeficienty a_E a a_W sousedních uzlů, aby byla dodržena podmínka diagonální dominantnosti matice koeficientů.

Schéma matice koeficientů a výsledné soustavy algebraických rovnic v maticovém zápisu je zapsáno ve tvaru (3.21).

$$\begin{bmatrix} a'_{P1} & -a_{E1} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} & -a_{E4} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{W5} & a'_{P5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{u1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{u5} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Maticový zápis (3.21) se zapíše ve tvaru (3.22).

$$\underline{N} \cdot \underline{\phi} = \underline{Q} \tag{3.22}$$

Hledaný vektor řešení $\underline{\phi}$ se pak určí z rovnice (3.23).

$$\underline{\phi} = \underline{N} \backslash \underline{Q} \tag{3.23}$$

Dle [11] je přesné analytické řešení vyjádřeno rovnicí (3.24).

$$\frac{\phi - \phi_A}{\phi_B - \phi} = \frac{e^{\frac{\rho u x}{\Gamma}} - 1}{e^{\frac{\rho u L}{\Gamma}} - 1} \tag{3.24}$$

Analytické řešení dle rovnice (3.24) je použito pro porovnání s numerickým řešením.

Po dosazení konkrétních hodnot ze zadání uvedeného na začátku kapitoly je maticový zápis (3.21) vyčíslen v zápisu (3.25).

$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

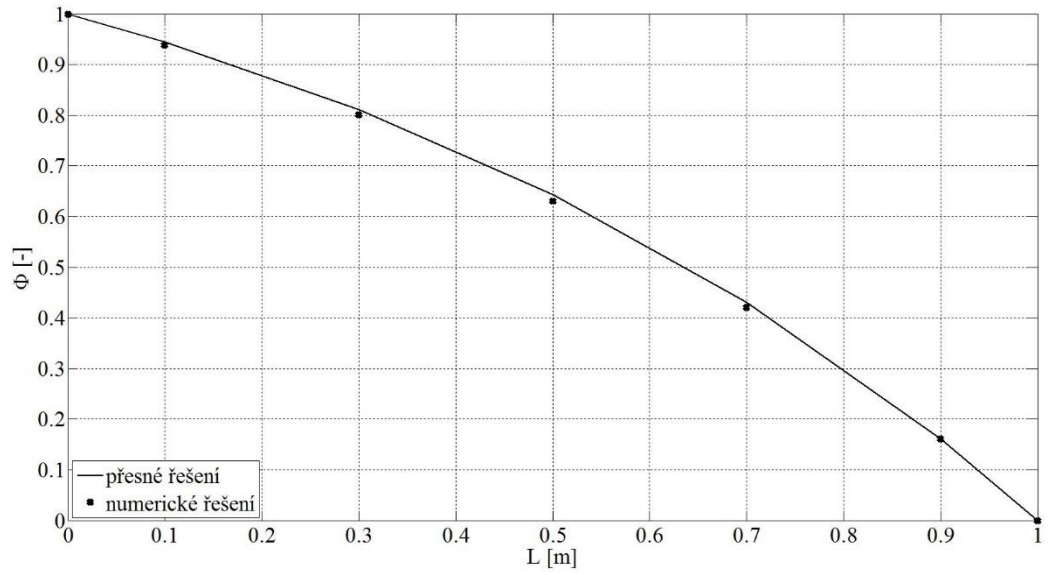
Vektor řešení (3.26) se nalezne dle rovnice (3.23).

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.9337\\ 0.7879\\ 0.6130\\ 0.4031\\ 0.1512\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Analytické řešení (3.27) pro jednotlivé uzly je vyčísleno z rovnice (3.24).

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.9387\\ 0.7963\\ 0.6224\\ 0.4100\\ 0.1505\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

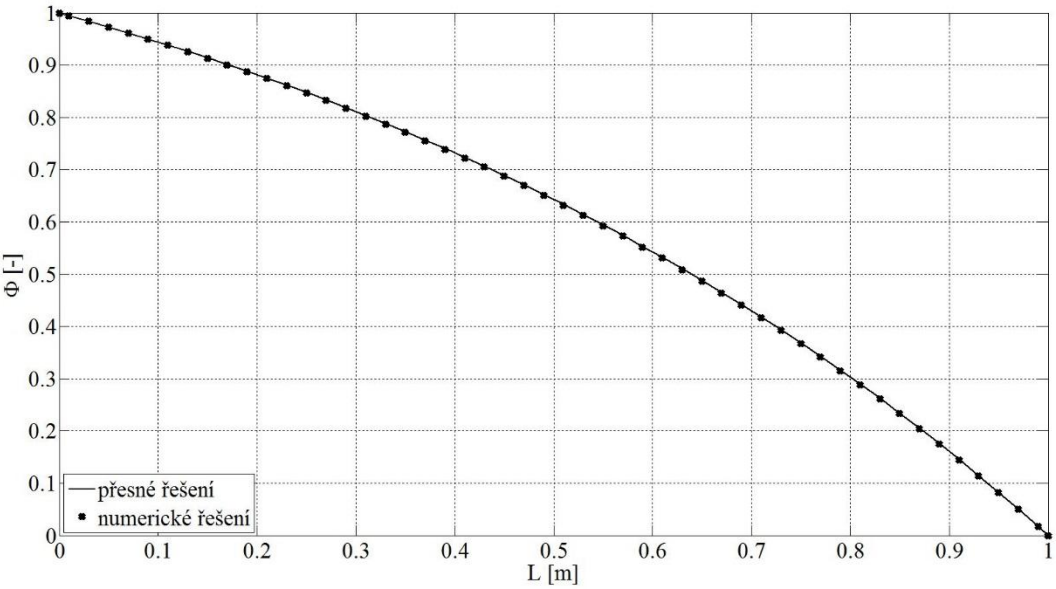
Srovnání analytického a numerického řešení je na *Obr. 3.1.1.2.* Porovnáním výsledků vyšla největší chyba v uzlu 4 rovna 1,68%.



Obr. 3.1.1.2 Srovnání analytického a numerického řešení pro u=0,1ms^{-1} a rozdělení na 5 kontrolních objemů

Ze srovnání analytického a numerického řešení obou případů je vidět, že schéma typu upwind je pro tento jednoduchý jednorozměrný příklad vyhovující. Koeficienty $a_P,\ a_W, a_E$ jsou kladné a koeficienty a_P' jsou mnohem větší. Kritérium dle nerovnice (2.22) je tedy splněno a matice $\underline{\underline{N}}$ je diagonálně dominantní. Schéma má vlastnost omezenosti, což je patrné i z výsledného řešení, které je ohraničené zvolenými okrajovými podmínkami a řešení

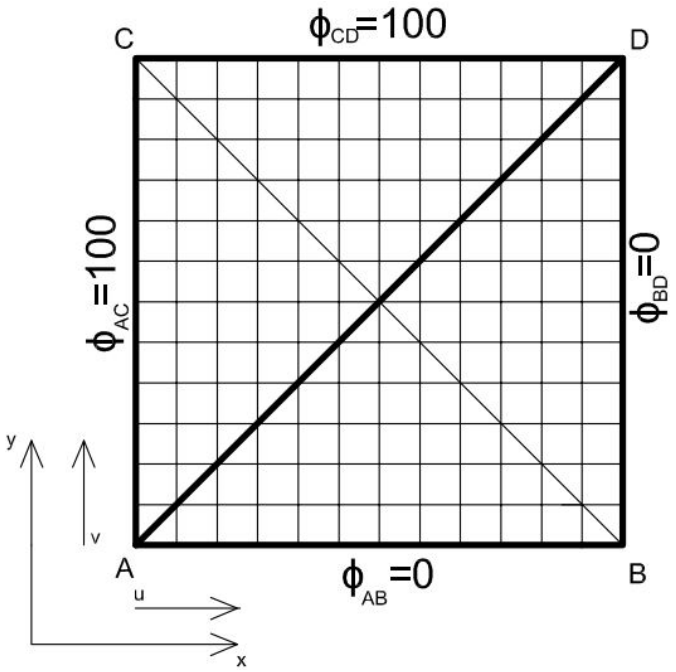
neobsahuje žádné skoky ani oscilace. Upwind schéma respektuje směr proudění, má tedy i vlastnost transportivnosti. Výsledné řešení lze zpřesnit rozdělením řešené oblasti na více kontrolních objemů, což je patné z *Obr. 3.1.1.3.* Tento příklad je uveden jako názorná ukázka výpočetní metody a odvození koeficientů.



Obr. 3.1.1.3 Srovnání analytického a numerického řešení pro u=0,1ms^{-1} a rozdělení na 50 kontrolních objemů

3.1.2 SCHÉMA TYPU UPWIND PRO DVOUROZMĚRNOU OBLAST

Rovnice použité v předchozích kapitolách lze jednoduše rozšířit do dvou dimenzí a použít tedy pro řešení příkladu na dvourozměrné oblasti naznačené na *Obr. 3.1.2.1.* Hustota zůstává stejná jako u předchozího příkladu tj. $\rho = 1\ kg.m^{-3}$, difuzní koeficient Γ se mění dle zadání. Rychlost proudění v horizontálním směru je $u = 2\ m.s^{-1}$, ve vertikálním směru $v = 2\ m.s^{-1}$. Složky rychlostí jsou stejně velké a působí ve směrech navzájem kolmých, výsledná složka rychlosti bude tedy působit ve směru diagonály A-D, která je vyznačená na *Obr. 3.1.2.1.*



Obr. 3.1.2.1 Řešená dvourozměrná oblast

Při řešení vícerozměrných konvekčně-difuzních problémů vzniká problém s tzv. numerickou difuzí *(false diffusion)*. Vypočtené numerické řešení čistě konvekční rovnice se chová jako řešení rovnice s difuzním členem nebo větším difuzním koeficientem v případě konvekčně-difuzní rovnice. Konkrétněji tento problém vzniká numerickou aproximací konvekčního členu. V tomto příkladu je pro aproximaci použito upwind schéma. Toto schéma, kvůli problému s numerickou difuzí, generuje větší chybu v řešení, zejména pokud směr proudění není shodný se směrem rozdělení výpočtové sítě. Výše bylo řečeno, že výsledný směr proudění je shodný se směrem diagonály A-D, řešená oblast je ale dělena ve směru x a ve směru y. V příkladu se nejdříve uvažuje čistě konvekční transport bez difuzního a zdrojového členu, poté je uvažován difuzní člen a různé hodnoty difuzního koeficientu Γ. Obdobný příklad a demonstrace numerické difuze je v [11].

Pro dvourozměrný případ přejde rovnice (3.20) do tvaru (3.28).

$$a_P\phi_P = a_W\,\phi_W + a_E\phi_E + a_S\,\phi_S + a_N\phi_N + S_u \tag{3.28}$$

Pro koeficient a_P platí rovnice (3.29).

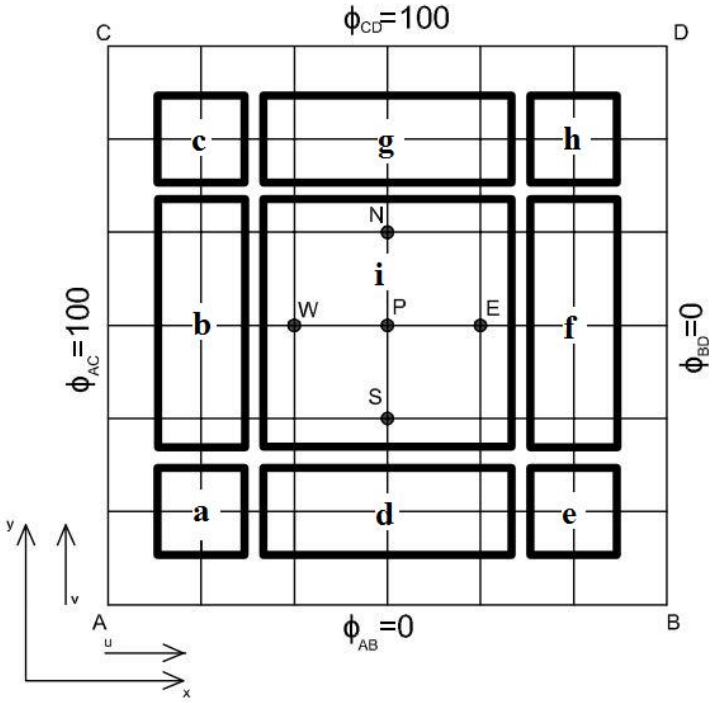
$$a_P = a_W\ + a_E + a_S\ + a_N + (F_e - F_w) + (F_n - F_s) - S_P \tag{3.29}$$

Pro dvourozměrný problém trvá předpoklad splnění rovnice kontinuity a platí tedy rovnice (3.30) a (3.31).

$$(F_e - F_w) = 0 \tag{3.30}$$

$$(F_n - F_s) = 0 \tag{3.31}$$

Hodnota členů S_u a S_P z rovnic (3.28) a (3.29) závisí na zvolených okrajových podmínkách. Okrajové podmínky pro řešený příklad jsou $\phi_{AB} = 0$, $\phi_{AC} = 100$, $\phi_{BD} = 0$, $\phi_{CD} = 100$. Rozdělení výpočtové oblasti je na *Obr. 3.1.2.2.*

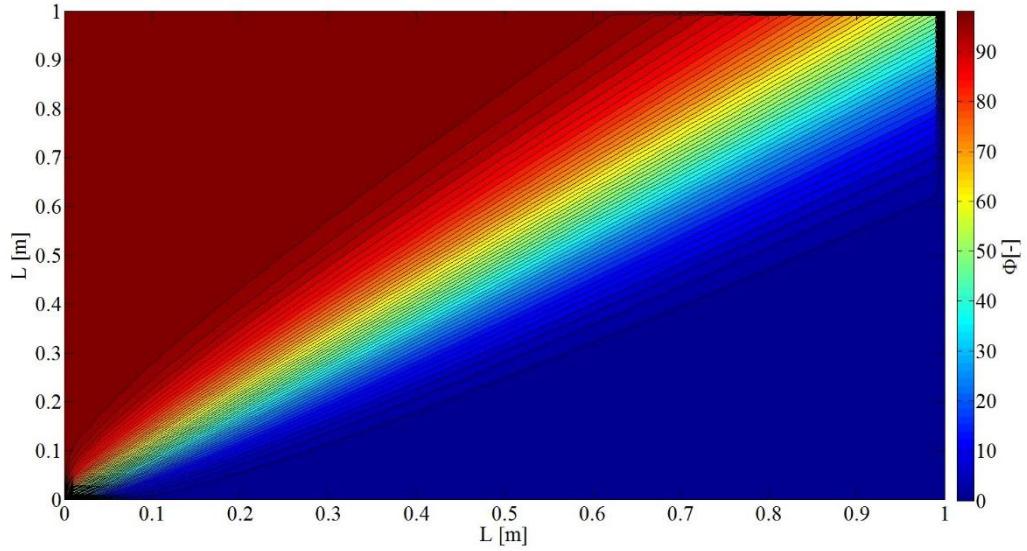


Obr. 3.1.2.2 Rozdělení řešené oblasti

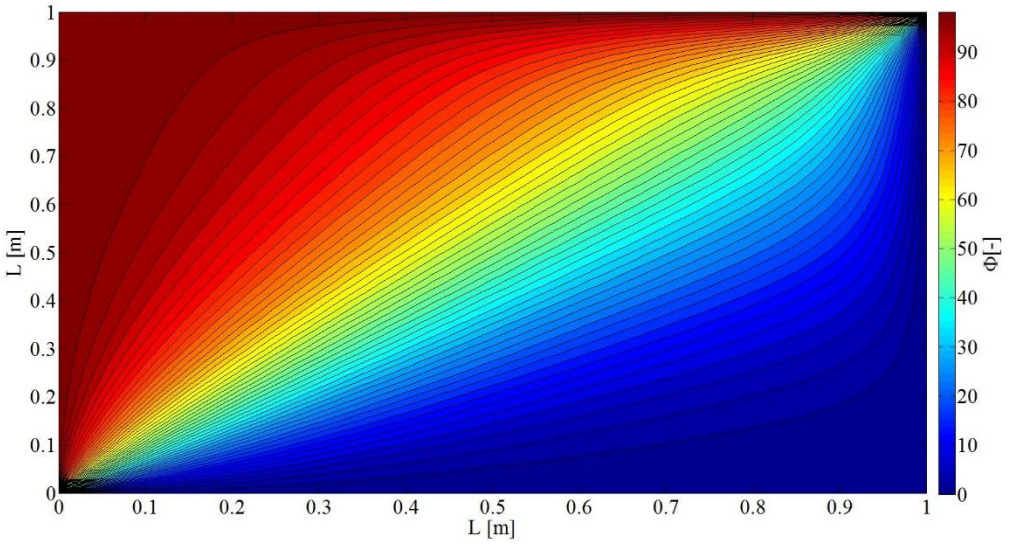
V oblastech, které jsou na *Obr. 3.1.2.2.* vyznačeny písmeny *a, e, c* a *h* se musí počítat s vlivem dvou okrajových podmínek. V oblastech *b, d, f* a *g* má vliv vždy jen jedna okrajová podmínka. Oblast *i* není ovlivněna žádnou okrajovou podmínkou, členy S_u a S_P jsou zde tedy nulové. Řešená soustava algebraických rovnic se zapíše v maticovém tvaru (3.32).

$$\begin{bmatrix} a_{Pa} & -a_N & -a_E & 0 & \dots & 0 \\ -a_S & a_{Pb} & -a_N & -a_E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_W & -a_S & a_{Ph} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ua} \\ S_{ub} \\ \vdots \\ S_{uh} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Hledaný vektor řešení se nalezne dle rovnice (3.23). Výsledné rozložení veličiny ϕ na řešené oblasti pro řešení čistě konvekční rovnice a konvekčně-difuzní rovnice pro hodnotu difuzního koeficientu $\Gamma = 0.1\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ jsou na *Obr. 3.1.2.3.* a *Obr. 3.1.2.4.* Řešení je provedeno na mřížce 50x50 uzlových bodů.

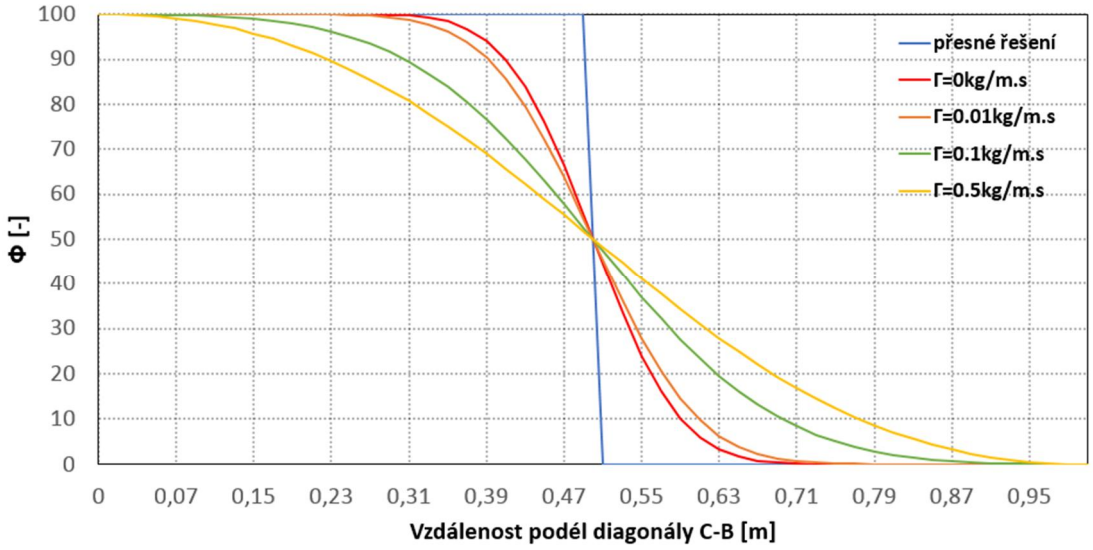


Obr. 3.1.2.3 Rozložení veličiny ϕ na řešené oblasti pro čistě konvekční rovnici



Obr. 3.1.2.4 Rozložení veličiny ϕ na řešené oblasti pro Γ=0.1 $kgm^{-1}s^{-1}$

Dle přesného řešení pro zvolený směr větru, tedy ve směru diagonály A-D, a čistou konvekci, by hodnota veličiny ϕ nad diagonálou A-D měla být rovna 100 a pod diagonálou rovna 0. Na *Obr. 3.1.2.3.* je vidět vliv numerické difuze na rozložení veličiny ϕ. Na *Obr. 3.1.2.4.* je vliv numerické difuze znásoben uvažováním difuzního členu v transportní rovnici. V konvekčně-difuzní rovnici způsobuje numerická difuze chování řešené rovnice jako by v ní byl větší difuzní koeficient, než jaký ve skutečnosti je. Pro větší názornost je na *Obr. 3.1.2.5.* srovnání přesného a numerického řešení pro různé difuzní koeficienty Γ podél diagonály C-B.



Obr. 3.1.2.5 Rozložení veličiny ϕ podél diagonály C-B pro různé hodnoty difuzního koeficientu Γ

Pro konkrétní vybrané místo, např. $x = 0{,}39m$, je pro čistě konvekční rovnici ($\Gamma = 0\ kg.m^{-1}.s^{-1}$) chyba numerického řešení 5,95%, pro $\Gamma = 0.1\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ je chyba 9,7% a pro $\Gamma = 0.5\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ je chyba 31%. Řešení lze také zpřesnit zjemněním výpočtové mřížky. V dalších výpočtech je uvažována výpočtová síť 100x100 uzlových bodů. Pro čistě konvekční rovnici je pro tuto síť v místě $x = 0{,}39m$ chyba 1,76%.Větší síť není použita z důvodu omezené výpočetní síly. Další diskuze použití schématu typu upwind je uvedena v kapitole 3.3.

3.2 SCHÉMA TYPU TVD

Rozbor a implementace TVD *(Total Variation diminishing)* schémat je podobně popsáno v [11]. Schéma typu upwind popsané v předchozí kapitole je stabilní a neobsahuje lokální oscilace, je ale pouze prvního řádu přesnosti, a proto je zatížené numerickou difuzí, což může být v některých případech nepřijatelné. Schémata vyššího řádu přesnosti, která jsou také uvedena v [11], ale často v řešení generují lokální oscilace a může se pak stát, že výsledné řešení není omezené okrajovými podmínkami.

Schéma typu TVD je trochu zavádějící název. TVD je vlastnost numerického schématu, která potlačuje oscilace ve výsledném řešení přidáním korekčního zdrojového členu *(deferred correction source term).* Uvedené upwind schéma má také TVD vlastnost, je ale prvního řádu přesnosti. Dále jsou uvedena i schémata vyššího řádu přesnosti, která mají TVD vlastnost, jsou tedy omezené okrajovými podmínkami a navíc potlačují vliv numerické difuze. *Total Variation diminishing* v překladu znamená zmenšování totální (celkové) variace diskrétního řešení s časem. Pro numerická schémata je totální variace definovaná rovnicí (3.33).

$$TV(\phi^n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \phi_j^n - \phi_{j-1}^n \right| \tag{3.33}$$

Numerické schéma má TVD vlastnost pokud $TV(\phi^n)$ neroste s rostoucím n. Platí tedy nerovnice (3.34).

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n) \tag{3.34}$$

V rovnicích (3.33) a (3.34) reprezentují n a $n+1$ po sobě jdoucí časové kroky. Schématům s TVD vlastností se také říká monotonicitu zachovávající schémata *(monotonicity-preserving schemes).* To znamená, že v řešení nevytvářejí lokální extrémy.

3.2.1 FUNKCE LIMITERU

V anglicky psané literatuře se užívá název *flux limiter function* nebo jen *flux limiter.* V česky psaných publikacích se nejčastěji objevuje překlad funkce limiteru nebo jen limiter. Funkce limiteru je funkce omezující numerické schéma tak, aby mělo TVD vlastnost.

V transportní rovnici s konvekcí a difuzí je problém většinou s diskretizací konvekčního členu, protože musí být zohledněn směr proudění. V následujícím odvození je pro jednoduchost uvažován jen kladný směr proudění. V kapitole 2.2 je odvozen tvar diskretizované rovnice pro jednorozměrnou oblast.

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e\,(\phi_E - \phi_P) - D_w\,(\phi_P - \phi_W) \tag{3.35}$$

Konvekční členy vystupují na levé straně rovnice. Jak už bylo řečeno, hodnoty řešení na čelech kontrolních objemů ϕ_e a ϕ_w nejsou známé, aproximují se tedy vhodnými numerickými schématy. Pro názornější odvození se dále uvažuje jen hodnota na východním čele kontrolního objemu ϕ_e. Pro hodnotu ϕ_w je odvození obdobné.

Pro různá schémata platí následující rovnice pro nahrazení hodnoty řešení na čele kontrolního objemu ϕ_e známými uzlovými hodnotami.

$$\phi_e = \phi_P \quad upwind \tag{3.36}$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_E - \phi_P) \quad centrální\ diference \tag{3.37}$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}(3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W) \quad QUICK \tag{3.38}$$

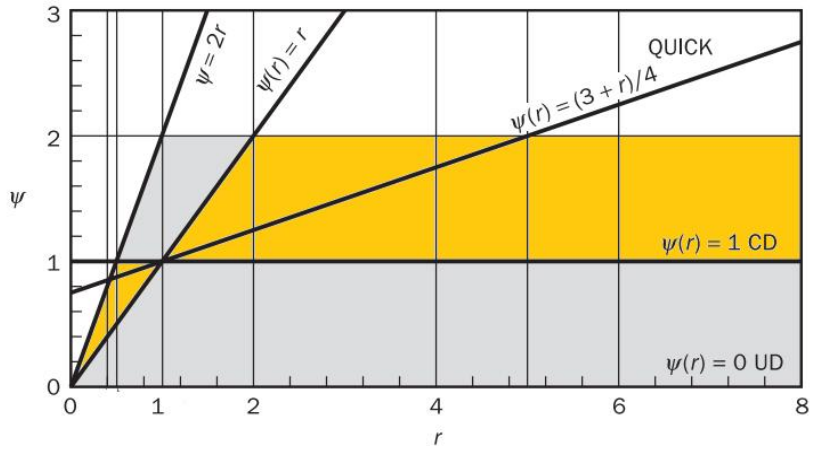
Úpravou se rovnice (3.36), (3.37) a (3.38) dají zapsat do jediného obecného tvaru (3.39).

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P) \tag{3.39}$$

Funkce $\psi(r)$ je funkce limiteru. Porovnáním rovnic je vidět, že pro $\psi = 0$ je schéma typu upwind, pro $\psi = 1$ je využito centrálních diferencí, ale například pro QUICK schéma už funkce limiteru ψ není konstantní ale je funkcí hodnot řešení v uzlových bodech, lze tedy napsat, že $\psi = \psi(r)$, kde r je poměr gradientů hodnot řešení v uzlových bodech "proti větru" a "po větru". Pro r platí rovnice (3.40).

$$r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \tag{3.40}$$

V [11] jsou uvedena kritéria, jejichž splněním bude mít dané schéma TVD vlastnost. Pro vyhodnocení kritéria slouží funkce limiteru ψ respektive závislost $\psi = \psi(r)$. Situace je znázorněna na *Obr. 3.2.1.1.*



Obr. 3.2.1.1 Závislost funkce limiteru ψ na poměru r s vyobrazením oblasti pro TVD schémata, převzato z [11]

Dle [11] má numerické schéma prvního řádu přesnosti TVD vlastnost pokud funkce $\psi = \psi(r)$ leží v oblasti ohraničené funkcí $\psi = 2r$ a $\psi = 2$ (šedá oblast na *Obr. 3.2.1.1*). Numerické schéma druhého řádu přesnosti má TVD vlastnost pokud funkce $\psi = \psi(r)$ prochází bodem [1,1] a leží v oblasti ohraničené funkcemi $\psi = r$, $\psi = 2r$ a $\psi = 1$ pro $r \leq 1$ a pro $r \geq 1$ v oblasti ohraničené funkcemi $\psi = r$, $\psi = 1$ a $\psi = 2$ (oranžová oblast na *Obr. 3.2.1.1*). Vhodnou volbou funkce limiteru ψ bude mít dané schéma TVD vlastnost. Funkce limiteru ψ, které splňují kritéria pro TVD schémata druhého řádu přesnosti jsou uvedeny v *Tabulce 3.2.1.1.*

Tabulka 3.2.1.1 Funkce limiteru ψ

Název	***Funkce limiteru ψ***
Van Leer	$\frac{r + \lvert r \rvert}{1 + r}$
Van Albada	$\frac{r + r^2}{1 + r^2}$
Min-Mod	$\psi(r) = \begin{cases} \min(r, 1) & \text{if } r > 0 \\ 0 & \text{if } r \leq 0 \end{cases}$
SUPERBEE	$max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$

3.2.2 IMPLEMENTACE TVD SCHÉMATU

Postup implementace TVD schématu do vybrané rovnice je podrobně popsáno v [11]. Implementace je ukázána na jednorozměrné transportní rovnici s konvekcí a difuzí (3.41).

$$\frac{d}{dx}(\rho u\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{3.41}$$

Difuzní člen na pravé straně rovnice (3.41) je diskretizován použitím centrálních diferencí, konvenční člen na levé straně je vyhodnocen užitím vztahů (3.42) a (3.43), které se dosadí do rovnice (3.35).

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P) \tag{3.42}$$

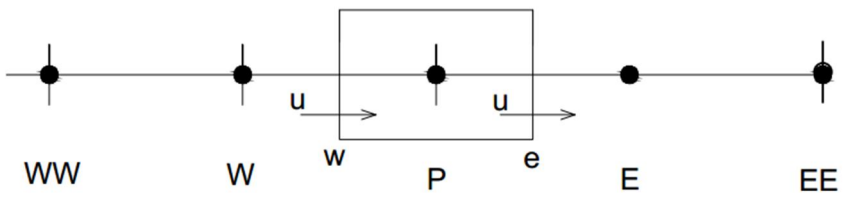
$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W) \tag{3.43}$$

Směr proudění se uvažuje pouze kladný. Pro r_e a r_w platí rovnice (3.44) a (3.45).

$$r_e = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \tag{3.44}$$

$$r_w = \frac{\phi_W - \phi_{WW}}{\phi_P - \phi_W} \tag{3.45}$$

Funkce limiteru $\psi(r_e)$ a $\psi(r_w)$ se vyhodnocují lokálně pro každý uzel a hodnoty r_e a r_w. Funkce limiteru může být jakákoliv funkce uvedená v *Tabulce 3.2.1.1* nebo existují i jiné, méně známé, funkce limiteru, které lze použít, musí ale splňovat kritéria pro TVD schémata. V rovnici (3.45) se vyskytuje hodnota řešení ϕ_{WW}. Značení je znázorněné na *Obr. 3.2.2.1.*



Obr. 3.2.2.1 Označení uzlových bodů

Pro určení funkce limiteru ψ v každém uzlovém bodě je třeba vyčíslovat aktuální hodnoty r_e a r_w. Problém nastává u uzlů, které nemají sousední uzel ale okraj definovaný okrajovou podmínkou. V těchto uzlech se se hodnoty ϕ_W a ϕ_{WW} musí extrapolovat ze známých hodnot. V [11] je použita lineární extrapolace pro vytvoření tzv. zrcadlového uzlu. Tím se nahradí hodnota ϕ_W za ϕ_0. Další lineární extrapolací se pak nahradí hodnota ϕ_{WW} za ϕ_{00}. Vytvoří se tedy dvě nové uzlové hodnoty, pro které platí rovnice (3.46) a (3.47).

$$\phi_0 = 2\phi_A - \phi_P \tag{3.46}$$

$$\phi_{00} = 4\phi_A - 3\phi_P \tag{3.47}$$

Pro řešení na dvourozměrné oblasti se stejný postup aplikuje i na jižní okraj oblasti. Po dosazení rovnic (3.42) a (3.43) do rovnice (3.35) a jednoduché úpravě se diskretizovaná rovnice zapíše ve tvaru (3.48).

$$\begin{aligned}[D_e + F_e + D_w]\phi_P = [D_w + F_w]\phi_W + D_e\phi_E - \\ F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W)\right]\end{aligned} \tag{3.48}$$

Rovnice (3.48) se zapíše ve tvaru (3.49).

$$a_P\phi_P = a_W\,\phi_W + a_E\phi_E + Su^{DC} \tag{3.49}$$

Pro koeficienty rovnice (3.49) platí následující rovnice. Koeficienty zůstávají stejné jako u upwind schématu.

$$a_W = D_w + F_w \tag{3.50}$$

$$a_E = D_e \tag{3.51}$$

$$a_P = a_w + a_E - S_P \tag{3.52}$$

Člen S_P v rovnici (3.52) je různý pro různě zvolené okrajové podmínky. Pro poslední člen na pravé straně rovnice (3.49) platí rovnice (3.53).

$$Su^{DC} = -F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W)\right] \tag{3.53}$$

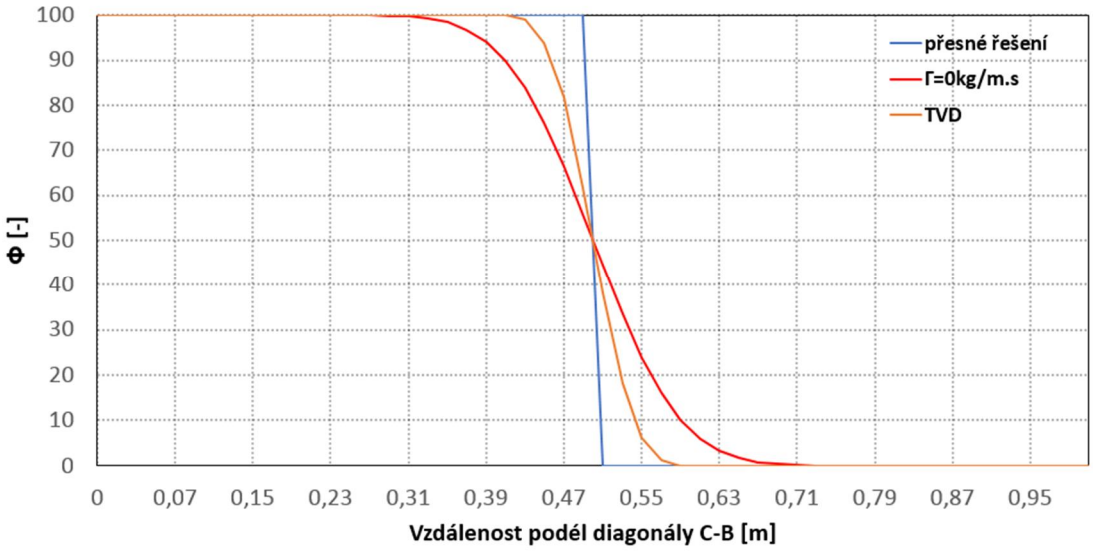
Tento člen se nazývá korekční zdrojový člen *(deferred correction source term)*. Implementací tohoto členu do numerické schématu a pro vhodně zvolenou funkci limiteru ψ se docílí TVD vlastnosti u daného schématu. Odvození pro záporný směr proudění je obdobné, stejně tak rozšíření do dvou dimenzí. Rovnice (3.49) pro výpočet na dvourozměrné oblasti přejde do tvaru (3.54).

$$a_P\phi_P = a_W\,\phi_W + a_E\phi_E + a_S\,\phi_S + a_N\phi_N + Su^{DC} \tag{3.54}$$

Korekční zdrojový člen se rozšíří na tvar (3.55).

$$\begin{aligned} Su^{DC} = &-F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_P - \phi_W)\right] \\ &- F_n\left[\frac{1}{2}\psi(r_n)(\phi_N - \phi_P)\right] + F_s\left[\frac{1}{2}\psi(r_s)(\phi_P - \phi_S)\right] \end{aligned} \tag{3.55}$$

Postup řešení zůstává stejný jako u upwind schématu, vektor řešení se určí z rovnice (3.23). Změní se pouze vektor $\underline{Q}$, ke kterému se přičte korekční zdrojový člen. Srovnání řešení vzorového příkladu z kapitoly 3.1.2 pro upwind a TVD schéma je na *Obr. 3.2.2.2.*



Obr. 3.2.2.2 Srovnání řešení pro upwind a TVD schéma

Srovnání ve stejném místě jako v kapitole 3.1.2, tedy v $x = 0{,}39m$, ukazuje, že chyba upwind schématu je 5,95% a chyba TVD schématu 0,1%.

3.3 VÝBĚR SCHÉMATU

Numerické řešení je proti přesnému řešení vždy zatíženo chybou, která může být různě velká. Velikost chyby závisí na mnoha faktorech. Volba numerického schématu je jedním z nejpodstatnějších faktorů, které mají vliv na přesnost výpočtu. Proto je výše uveden rozbor dvou vybraných schémat, schématu typu upwind a stejného schématu s TVD vlastností, společně se vzorovými příklady a vzájemným porovnáním výsledků. Vzorové příklady jsou voleny tak, aby bylo známé i jejich přesné řešení a dalo se na nich dobře demonstrovat odvození výpočetních vztahů. V dalších kapitolách je vybrané schéma použito k výpočtu transportní rovnice s konvekcí a difuzí a se zdrojovým členem ve tvaru rovnice (2.2).

Na konci kapitoly 3.2.2 je uvedeno srovnání řešení vzorového příkladu s využitím obou numerických schémat. Co se týče velikosti chyby, TVD schéma vychází o poznání lépe, chyba upwind schématu proti přesnému řešení je v řádu jednotek. U TVD schématu se k pravé straně diskretizované rovnice přidává korekční zdrojový člen, jehož velikost se musí vyhodnocovat pro každý uzel řešené oblasti, respektive se musí vyhodnocovat zvolená funkce limiteru ψ a pro vyhodnocení této funkce je nutné vyhodnocovat hodnoty poměru r. V kapitole 3.2.2 je uvedeno, že u krajních uzlů se pro vyhodnocení poměru r musí vytvořit nové zrcadlové uzly pomocí lineární extrapolace, což je zejména u řešení dvourozměrných problémů značně náročné na implementaci do výpočetního prostředí. U vnitřních uzlů, je vyhodnocení poměru r jednodušší, ale musí se řešit iteračně, protože v prvním kroku nejsou známé hodnoty řešení v jednotlivých uzlech a musí tedy použít hodnoty z předchozího řešení. Konkrétně v příkladu v kapitole 3.2.2 jsou v prvním kroku použity hodnoty řešení z příkladu v kapitole 3.1.2. V tomto příkladu je použito upwind schéma, které je na implementaci do výpočetního prostředí jednodušší a nevznikají zde problémy z okrajovými podmínkami. Při zjemnění výpočetní sítě se chyba numerického výpočtu zmenšuje. V dalších výpočtech je uvažována výpočetní síť 100x100 uzlových bodů. Větší síť nelze použít vzhledem k omezené výpočetní síle výpočetního prostředí MATLAB. V kapitole 3.1.2 je také zmíněn problém s numerickou difuzí, který narůstá s rostoucí velikostí difuzního koeficientu. V dalších výpočtech se uvažuje difuzní koeficient vodní páry ve vzduchu, který je v řádu $10^{-5} kgm^{-1}s^{-1}$. Srovnání dle příkladu v kapitole 3.1.2 ukazuje, že difuzní koeficient v této velikosti odpovídá řešení pro čistě konvekční rovnici, chyba tedy zůstává v řádu jednotek. Výše je také řečeno, že vzhledem k problému s numerickou difuzí, generuje upwind schéma větší chybu zejména pokud směr větru není shodný se směrem výpočetní sítě. V dalších výpočtech je směr větru uvažován buď v horizontálním, nebo

vertikálním směru, tedy ve směru výpočetní sítě. Obecný směr větru v dalších výpočtech uvažován není, protože by vedl na řešení přesahující rozsah této práce. Vzhledem k výše uvedeným argumentům je pro další výpočty zvoleno schéma typu upwind.

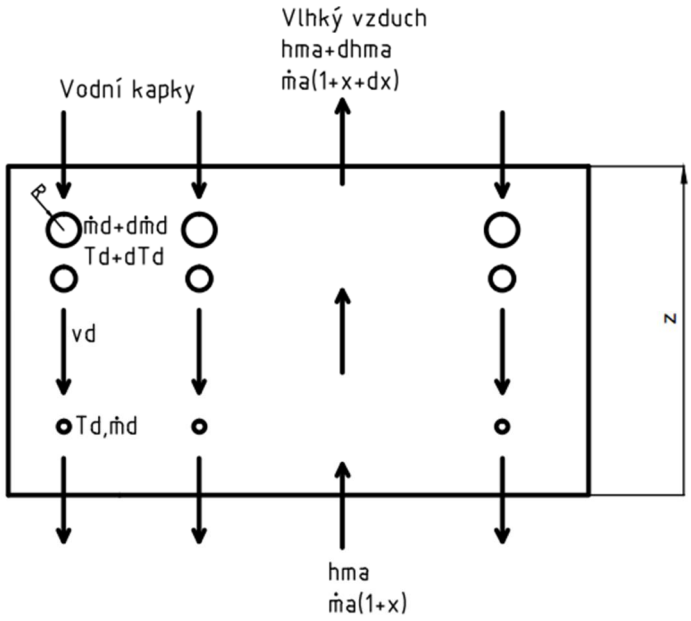
4 VÝPOČET ZDROJOVÝCH ČLENŮ

Matematický model oblasti deště, který je představen v kapitole 5, je postaven na řešení transportních rovnic pro hmotnostní zlomek vodní páry a měrné entalpie vlhkého vzduchu se zdrojovým členem. Znalost zdrojových členů je nezbytná pro vyřešení zmíněných transportních rovnic. Nejdříve je řešen zdroj hustoty vodní páry, který následně vstupuje do transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry. Do transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu vstupuje hustota zdroje entalpie, jejíž odvození je také uvedeno. Řešení zdrojových členů vychází z řešení soustavy pěti obyčejných diferenciálních rovnic.

4.1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRO ŘEŠENÍ ZDROJOVÝCH ČLENŮ

Rovnice pro řešení zdrojových členů jsou podrobně popsány v [12]. Rovnice vyjadřující termodynamické vlastnosti vlhkého vzduchu jsou převzaty z [13] a [14].

Rovnice pro zdrojové členy, konkrétně pro hustotu zdroje vodní páry a hustotu zdroje entalpie, jsou odvozeny pro jednorozměrný protiproudý výměník tepla, uvažuje se tedy jen změna vyšetřovaných veličin s vertikální souřadnicí z. Vodní kapky padají vertikálně dolů a vlhký vzduch proudí vertikálně nahoru. Situace je naznačena na *Obr. 4.1.1.*

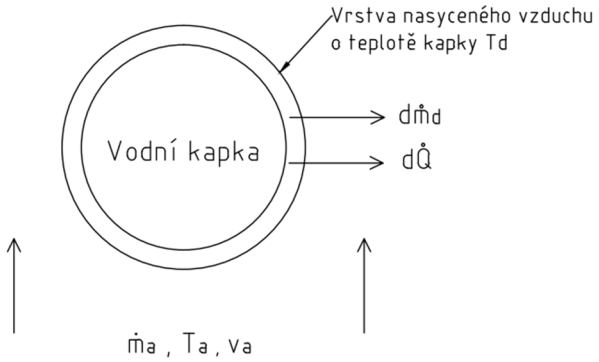


Obr. 4.1.1 Oblast deště

Pro oblast deště se zapíše zákon zachování hmoty ve tvaru rovnice (4.1).

$$\frac{d\dot{m}_d}{dz} = -\dot{m}_a \frac{dx}{dz} \tag{4.1}$$

Přenos tepla a hmoty mezi vodní kapkou a proudícím vzduchem je schematicky naznačen na *Obr. 4.1.2.*



Obr. 4.1.2 Přenos tepla a hmoty mezi vodní kapkou a proudícím vzduchem

Předpokládá se, že přenos tepla a hmoty probíhá jen mezi tenkou vrstvou nasyceného vzduchu na povrchu vodní kapky, která má stejnou teplotu T_d jako vodní kapka, a proudícím vzduchem o teplotě T_a. Časová změna hmotnosti vodní kapky je dána rovnicí (4.2).

$$d\dot{m}_d = \frac{dm_d}{dt} = -\beta \bar{\rho}_{ma} A_d [x''(T_d(z)) - x(z)] \tag{4.2}$$

V rovnici (4.2) je $\bar{\rho}_{ma}$ průměrná hustota vlhkého vzduchu, která je vyjádřena rovnicí (4.3), pro plochu kapky platí $A_d = 4\pi R^2$, v hranatých závorkách je rozdíl měrné vlhkosti nasyceného vlhkého vzduchu při teplotě kapky T_d a měrné vlhkosti vlhkého vzduchu proudícího kolem kapky.

$$\bar{\rho}_{ma} = \frac{\rho_{ma}(x, p, T_a) + \rho''_{ma}(x'', p, T_d)}{2} \tag{4.3}$$

Koeficient přenosu hmoty β je vypočten z rovnice (4.4).

$$\beta = \frac{D_{v,a} \cdot Sh}{2R} \tag{4.4}$$

V rovnici (4.4) je $D_{v,a}$ je difuzní koeficient vodní páry ve vzduchu, který je vypočten z rovnice (4.5) a Sh je Sherwoodovo podobnostní číslo, pro které platí rovnice (4.6).

$$D_{v,a} = \frac{0{,}926}{1000 \cdot p}\left(\frac{T_a^{2,5}}{T_a + 245}\right) \tag{4.5}$$

$$Sh = 2 + 0{,}6Re^{1/2}Sc^{1/3} \tag{4.6}$$

Pro Reynoldsovo číslo Re a Schmidtovo číslo Sc platí rovnice (4.7),(4.8).

$$Re = \frac{|v_a - v_d| \cdot 2R}{\nu} \tag{4.7}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D_{v,a}} \tag{4.8}$$

Z rovnice (4.2) se odvodí obyčejná diferenciální rovnice pro změnu poloměru vodní kapky podél vertikální souřadnice. Elementární změna hmotnosti vodní kapky se vyjádří rovnicí (4.9) a elementární časový přírůstek rovnicí (4.10). Tyto rovnice se dosadí do levé strany rovnice (4.2).

$$dm_d = \rho_w dV = \rho_w A_d dR \tag{4.9}$$

$$v_d(z) = \frac{dz}{dt} \rightarrow dt = \frac{dz}{v_d(z)} \tag{4.10}$$

Po dosazení se zkrátí plochy kapky A_d, které vystupují na obou stranách rovnice. Obyčejná diferenciální rovnice pro změnu poloměru kapky podél vertikální souřadnice je poté ve tvaru (4.11).

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{\beta \bar{\rho}_{ma}}{v_d(z)\rho_w}[x''(T_d(z)) - x(z)] \tag{4.11}$$

Obyčejná diferenciální rovnice pro změnu rychlosti padající kapky se svislou souřadnicí se odvodí z druhého Newtonova pohybového zákona ve tvaru (4.12).

$$m_d a_d = \Sigma F \tag{4.12}$$

Rovnice (4.12) říká, že součin hmotnosti kapky a jejího zrychlení se rovná součtu sil působících na padající kapku. Na kapku působí tíhová síla směrem dolů, tedy proti svislé souřadnici, a odporová síla, která působí proti směru pohybu kapky, tedy ve směru souřadnice z. Síly se vyjádří konkrétními vztahy a zrychlení kapky je rovno podílu dv_d/dt. Rovnice (4.12) se pak zapíše ve tvaru (4.13).

$$m_d \frac{dv_d}{dt} = -m_d \cdot g + \frac{1}{2} c_x S \rho_{ma} (v_a - v_d)^2 \tag{4.13}$$

Rovnice (4.13) se vydělí hmotností kapky m_d a za elementární časový krok dt se dosadí vztah (4.10). Plocha S je plocha průřezu koule kolmého ke směru obtékajícího proudu, tedy plocha kruhu a platí $S = \pi R^2$. Hmotnost kapky m_d, která po vydělení figuruje v podílu druhého členu na pravé straně rovnice (4.13), se vyjádří součinem objemu kapky V a její hustoty ρ_w. Kapka je tvaru koule a pro její objem platí $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$\frac{dv_d}{dz} v_d(z) = -g + \frac{3 c_x \pi R^2 \rho_{ma}}{2 \cdot 4\pi R^3 \rho_w} (v_a - v_d)^2 \tag{4.14}$$

Po úpravě rovnice (4.14) vznikne obyčejná diferenciální rovnice pro změnu rychlosti padající kapky se svislou souřadnicí ve tvaru (4.15).

$$\frac{dv_d}{dz} = -\frac{g}{v_d(z)} + \frac{3 c_x \rho_{ma}}{8 R v_d(z) \rho_w} (v_a - v_d)^2 \tag{4.15}$$

V rovnici (4.15) je c_x koeficient odporu kapky, který je funkcí Reynoldsova čísla Re určeného ze vztahu (4.7). Rovnice pro výpočet koeficientu odporu c_x se liší v závislosti na hodnotě Reynoldsova čísla. Všechny rovnice potřebné pro výpočet koeficientu odporu jsou uvedené v tabulce 5.2 v [15].

Obyčejná diferenciální rovnice pro změnu teploty kapky se svislou souřadnicí se odvodí z rovnice pro změnu vnitřní energie vodní kapky.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(m_d c_w T_d) = m_d c_w \frac{dT_d}{dt} + c_w T_d \frac{dm_d}{dt} \tag{4.16}$$

Změna vnitřní energie vodní kapky je dána tepelným tokem z kapky do okolního proudícího vzduchu a částečným odpařením vody do vzduchu. Platí tedy rovnost (4.17).

$$m_d c_w \frac{dT_d}{dt} + c_w T_d \frac{dm_d}{dt} = \dot{Q} + h_v(T_d) \frac{dm_d}{dt} \tag{4.17}$$

V rovnici (4.17) je h_v měrná entalpie vodní páry při teplotě T_d. Elementární časový přírůstek se opět nahradí vztahem (4.10). Hmotnost kapky se vyjádří jako součin její hustoty a objemu. Pro elementární přírůstek hmoty platí $dm_d = \rho_w A_d dR$.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w c_w \frac{dT_d v_d(z)}{dz} + c_w T_d \frac{\rho_w A_d dR v_d(z)}{dz} = \dot{Q} + h_v(T_d) \frac{\rho_w A_d dR v_d(z)}{dz} \tag{4.18}$$

Druhý člen na levé straně rovnice (4.18) se převede na pravou stranu. Na pravé straně rovnice jsou dva členy, ve kterých se vyskytuje poměr dR/dz, který lze z těchto členů vytknout a výraz se potom nahradí rovnicí (4.11).

Z *Obr. 4.1.2* je patrné, že se uvažuje přestup tepla konvekcí. Tepelný tok $\dot{Q}$ se potom vyjádří z Newtonova ochlazovacího zákona ve tvaru rovnice (4.19).

$$\dot{Q} = \alpha A_d (T_a - T_d(z)) \tag{4.19}$$

V rovnici (4.19) je α součinitel přestupu tepla, který se určí z rovnice (4.20).

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{2R} \tag{4.20}$$

V čitateli rovnice (4.20) je Nu Nusseltovo číslo a λ je tepelná vodivost vlhkého vzduchu. Pro Nusseltovo číslo platí rovnice (4.21), ve které se vyskytuje ještě Prandtlovo číslo dané rovnicí (4.22).

$$Nu = 2 + 0{,}6Re^{1/2}Pr^{1/3} \tag{4.21}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{4.22}$$

V rovnici (4.22) je ν kinematická viskozita vzduchu a a je teplotní vodivost. Rovnice pro výpočet tepelné vodivosti vlhkého vzduchu λ je uvedena na str. 447 v [13].

Dosazením rovnice (4.19) do rovnice (4.18) a úpravou vznikne rovnice (4.23).

$$\frac{dT_d}{dz} = \frac{\alpha A_d\big(T_a - T_d(z)\big) - \beta\bar{\rho}_{ma}[x''(T_d(z)) - x(z)] \cdot (h_v A_d - c_w T_d A_d)}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w c_w v_d(z)} \tag{4.23}$$

Plocha koule se vyjádří vztahem $A_d = 4\pi R^2$ a lze ji vytknout a zkrátit. Měrná entalpie vodní páry se vyjádří pomocí rovnice (4.24).

$$h_v(T_d) = l_0 + c_{pv}T_d \tag{4.24}$$

V rovnici (4.24) je l_0 výparné skupenské teplo při teplotě $T = 273{,}15\ K$ a vypočte se ze vztahu (4.25).

$$l_0 = 3{,}4831814 \cdot 10^6 - 5{,}8627709 \cdot 10^3 T + 12{,}139568T^2 - 1{,}40290431 \cdot 10^{-2}T^3 \tag{4.25}$$

Dosazením rovnice (4.24) do rovnice (4.23) a konečnou úpravou vznikne obyčejná diferenciální rovnice pro změnu teploty kapky se svislou souřadnicí ve tvaru (4.26).

$$\frac{dT_d}{dz} = \frac{3\big[\alpha\big(T_a - T_d(z)\big) - \beta\bar{\rho}_{ma}\big[x''\big(T_d(z)\big) - x(z)\big] \cdot \big(l_0 + T_d\big(c_{pv} - c_w\big)\big)\big]}{R\rho_w c_w v_d(z)} \tag{4.26}$$

Dále je k uvedeným rovnicím potřeba připojit rovnice pro změnu měrné vlhkosti vzduchu a změnu teploty vzduchu se svislou souřadnicí. Zákon zachování hmoty ve tvaru (4.1) se zapíše ve tvaru (4.27).

$$\dot{m}_a \frac{dx}{dz} = -N_d(z) v_d(z) \frac{dm_d}{dz} \tag{4.27}$$

Elementární přírůstek hmotnosti se opět vyjádří jako $dm_d = \rho_w A_d dR$ a v rovnici (4.27) je podíl dR/dz, za který se dosadí rovnice (4.11). Rovnice (4.27) pak přejde do tvaru (4.28). Tato rovnice vyjadřuje změnu měrné vlhkosti se svislou souřadnicí.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{4\pi R^2 N_d(z) \beta \bar{\rho}_{ma}}{\dot{m}_a} [x''(T_d(z)) - x(z)] \tag{4.28}$$

Obyčejná diferenciální rovnice pro změnu teploty vzduchu se svislou souřadnicí se odvodí z definice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu převedené do tvaru (4.29).

$$\frac{dT_a}{dz} = \frac{1}{c_{pa} + x c_{pv}} \left[\frac{dh_{1+x}}{dz} - \left(l_0 + c_{pv} T_a \right) \frac{dx}{dz} \right] \tag{4.29}$$

Za podíl dx/dz se dosadí rovnice (4.28). Elementární změna měrné entalpie vzduchu se svislou souřadnicí se vyjádří rovnicí (4.30).

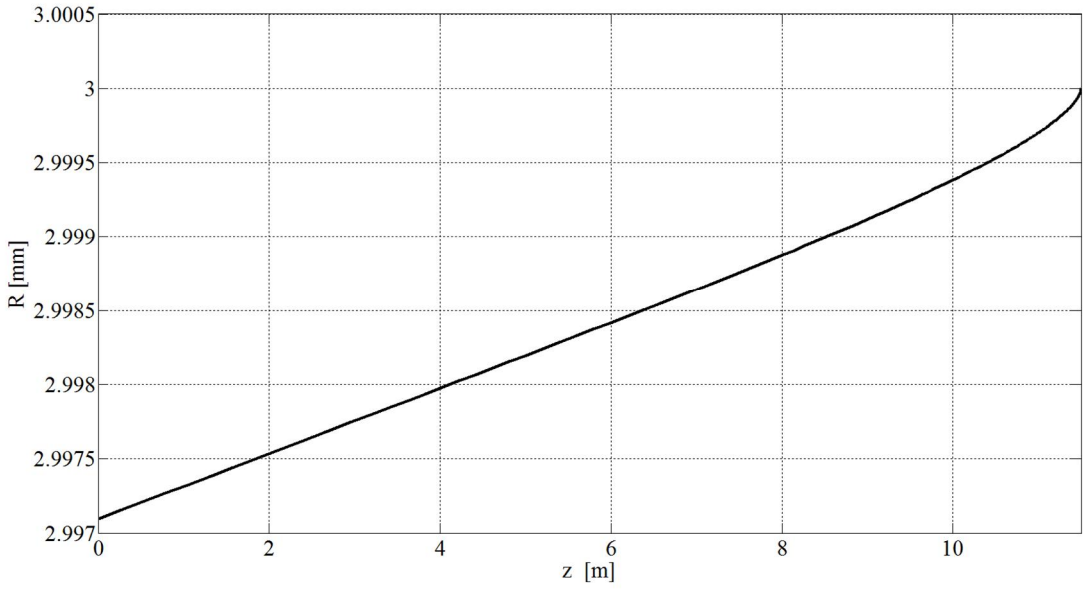
$$\frac{dh_{1+x}}{dz} = \frac{-N_d(z) v_d(z)}{\dot{m}_a} \left[\frac{dQ}{dz} + \frac{dm_d}{dz} h_v(T_d) \right] \tag{4.30}$$

Do rovnice (4.30) se dosadí rovnice (4.19) a (4.11). Celá rovnice (4.30) se pak dosadí rovnice (4.29). Výsledná obyčejná diferenciální rovnice pro změnu teploty vzduchu se svislou rovnicí je pak ve tvaru (4.31).

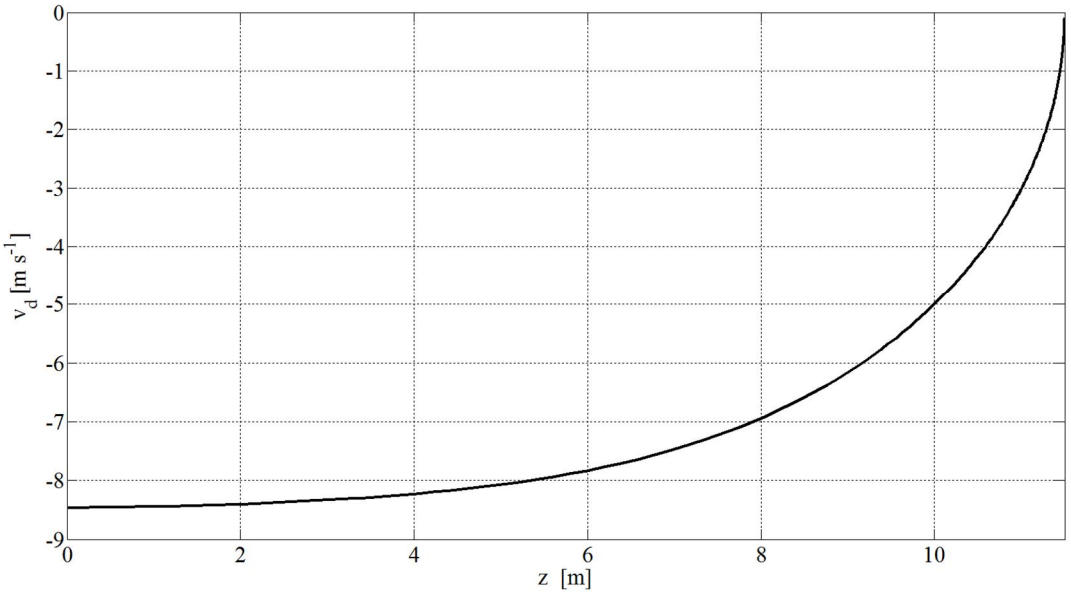
$$\frac{dt_a}{dz} = \frac{4\pi R^2 N_d(z)}{\dot{m}_a (c_{pa} + x c_{pv})} \left[\alpha \left(T_a - T_d(z) \right) + \beta \bar{\rho}_{ma} \left(x''(T_d(z)) - x(z) \right) c_{pv} \left(T_a - T_d(z) \right) \right] \tag{4.31}$$

Vyřešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (4.11), (4.15), (4.26), (4.28) a (4.31) se získají průběhy změn poloměru kapky, její rychlosti a teploty podél svislé souřadnice a průběh změny měrné vlhkosti vzduchu a jeho teploty. Soustava rovnic je řešena ve výpočetním prostředí MATLAB jako okrajová úloha funkcí *bvp4c*. Výpočetní program částečně vychází z výpočetního programu k článku [16]. Rovnice (4.28) a (4.31) jsou použity jen pro první iteraci řešení zdrojových členů a pro ověření algoritmu použitého pro

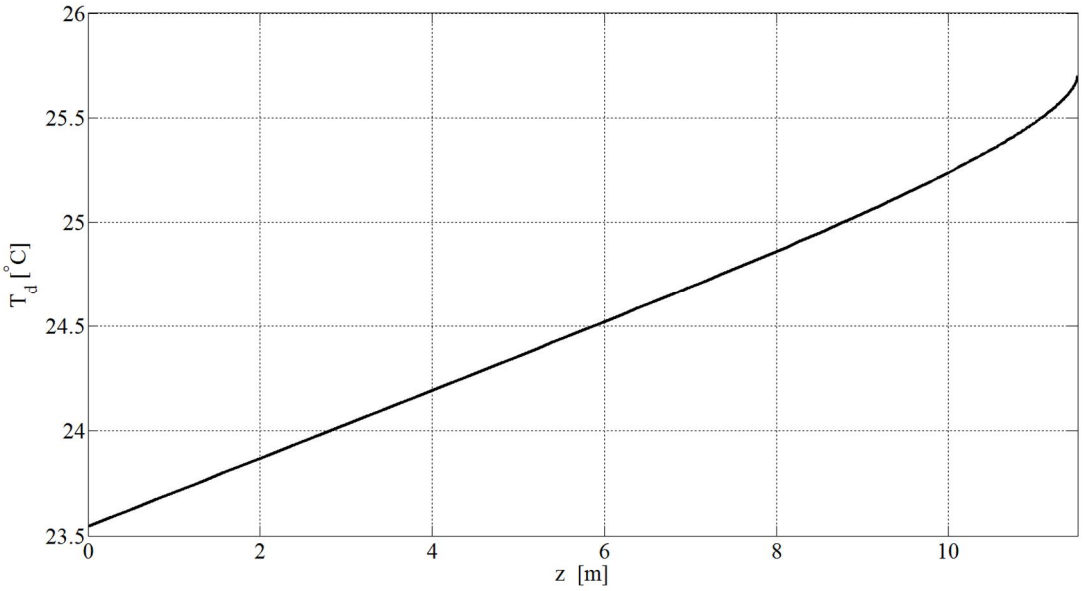
řešení transportních rovnic, které jsou uvedeny v kapitole 5, a jejich průběhy tedy není nutné uvádět. Průběhy změny poloměru kapky, její rychlosti a teploty se svislou souřadnicí jsou na *Obr. 4.1.3, Obr. 4.1.4* a *Obr. 4.1.5* pro okrajové podmínky $R_i = 3mm$, $v_{d_i} = -0{,}1ms^{-1}$, $T_{d_i} = 25{,}7°C$, $x_i = 7{,}622gkg^{-1}$, $T_{a_i} = 15{,}7°C$. Výška oblasti deště je $11{,}5m$. Zvolené okrajové podmínky jsou platné pro horní okraj oblasti deště, kromě x_i a T_{a_i}, které platí pro dolní okraj oblasti deště.



Obr. 4.1.3 Průběh změny poloměru kapky se svislou souřadnicí



Obr. 4.1.4 Průběh změny rychlosti kapky se svislou souřadnicí



Obr. 4.1.5 Průběh změny teploty kapky se svislou souřadnicí

4.2 ROVNICE PRO VÝPOČET ZDROJOVÝCH ČLENŮ

Po vyřešení soustavy diferenciálních rovnic, uvedených v kapitole 4.1, je možné vypočítat hledané zdrojové členy pro hustotu zdroje vodní páry a hustotu zdroje entalpie.

Rovnice pro hustotu zdroje vodní páry se odvodí ze zákona zachování hmoty ve tvaru (4.27). Rovnice pro hustotu zdroje vodní páry je uvedena v [12] ve tvaru (4.32).

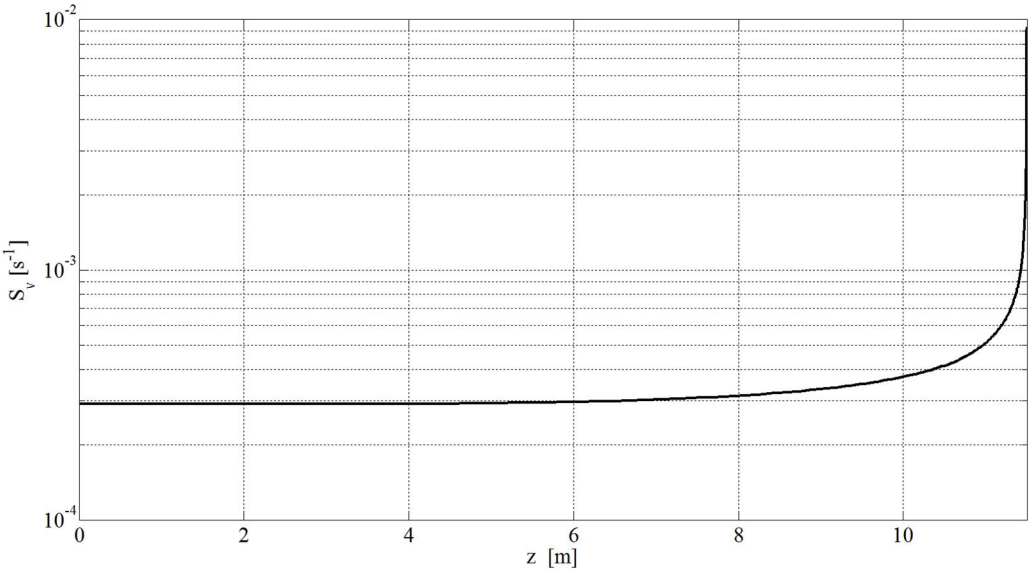
$$S_{vp}(x_j) = \frac{4\pi R^2 N_d(z)\beta\bar{\rho}_{ma}}{A_{RZ}(z)\rho_{ma}}[x''(T_d(z)) - x(z)] \tag{4.32}$$

Hodnoty zdrojového členu vyjadřují, jakou změnu hmotnostního zlomku páry přinesou do daného řešení kapky vypadávající z chladicí výplně do oblasti deště. V rovnici (4.32) vyjadřuje člen N_d hustotu (množství) vodních kapek na metr řešené oblasti a vyjádří se rovnicí (4.33). Člen A_{RZ} je plocha průřezu oblasti deště.

$$N_d(z) = \frac{\dot{m}_w}{\frac{4}{3}\pi R_i^3 \rho_w |v_d(z)|} \tag{4.33}$$

V rovnici (4.33) je $\dot{m}_w$ hmotnostní tok vody na vstupu do oblasti deště a R_i je poloměr vodní kapky na vstupu do oblasti deště.

Rozložení hustoty zdroje vodní páry se svislou souřadnicí je na *Obr. 4.2.1.*



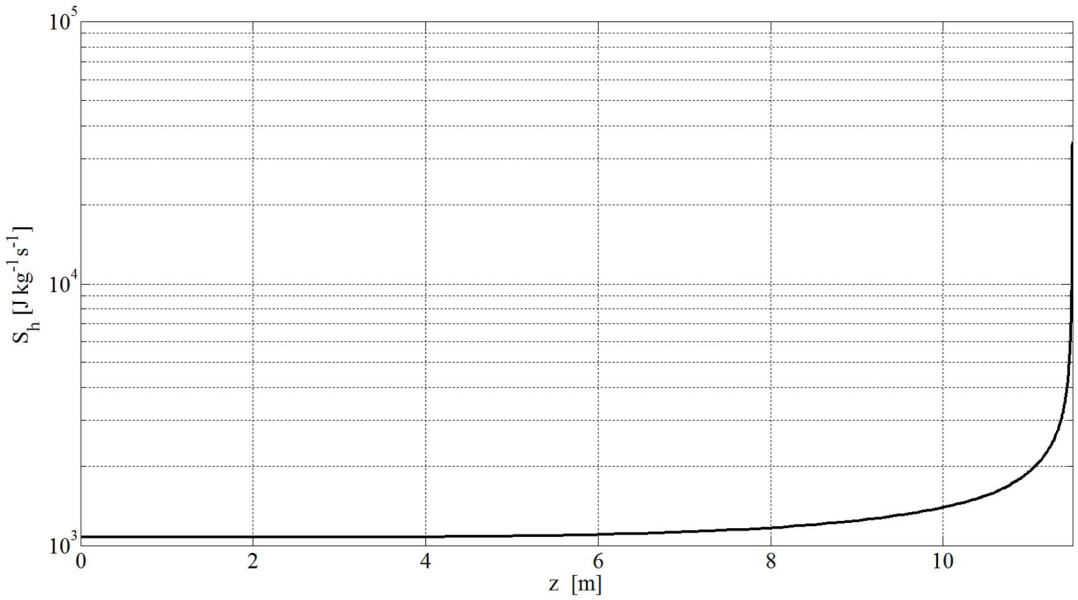
Obr. 4.2.1 Rozložení hustoty zdroje vodní páry se svislou souřadnicí

Z Obr. 4.2.1 je patrné, že hustota zdroje vodní páry je až do výšky cca $8m$ téměř konstantní, protože kapky jsou zde rovnoměrně rozložené. Hodnoty zdroje prudce narůstají u horního okraje oblasti deště, kde kapky chaoticky vypadávají z chladicí výplně.

Rovnice pro hustotu zdroje entalpie je odvozena z rovnic (4.29) a (4.31), ze kterých je vyjádřena změna měrné entalpie se svislou souřadnicí. Rovnice pro hustotu zdroje entalpie je uvedena v [12] ve tvaru (4.34).

$$S_h(x_j) = \frac{-4\pi R^2 N_d(z)}{A_{RZ}(z)\rho_{ma}}\left[\alpha\left(T_a - T_d(z)\right) - \beta\bar{\rho}_{ma}\left(x''\left(T_d(z)\right) - x(z)\right)\cdot\left(l_0 + c_{pv}T_d\right)\right] \qquad (4.34)$$

Rozložení hustoty zdroje entalpie se svislou souřadnicí je na *Obr. 4.2.2.*



Obr. 4.2.2 Rozložení hustoty zdroje entalpie se svislou souřadnicí

Podobně jako u zdrojového členu pro hustotu zdroje vodní páry, je i zdrojový člen pro hustotu zdroje entalpie téměř konstantní až do výšky cca $8m$ a směrem k hornímu okraji oblasti deště prudce narůstá.

Vypočtené zdrojové členy jsou použity v řešení transportních rovnic pro hmotnostní zlomek vodní páry a měrnou entalpii vlhkého vzduchu, které jsou popsány v kapitole 5.

5 MATEMATICKÝ MODEL OBLASTI DEŠTĚ

Matematický model oblasti deště je postaven na řešení transportních rovnic se zdrojovým členem na dvourozměrné obdélníkové oblasti. Samostatně je řešena transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu. Postup řešení transportní rovnice vychází z předchozích kapitol, k diskretizaci tedy využívá metodu konečných objemů a pro určení hodnot řešení na čelech jednotlivých kontrolních objemů používá schéma typu upwind. Z vyřešených hodnot hmotnostního zlomku se určí měrná vlhkost v jednotlivých uzlech řešené oblasti. Dále je také řešena transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu, ze které je dopočítávána jeho teplota.

5.1 TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO HMOTNOSTNÍ ZLOMEK VODNÍ PÁRY

Transportní rovnici lze zapsat ve tvaru (2.1) pro transport obecné veličiny ϕ. V této podkapitole bude touto veličinou hustota vodní páry respektive hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu. Řešení transportních rovnic se zdrojovým členem je popsáno v [11]. Matematický model oblasti deště je podrobně popsán v [12].

Obecná veličina ϕ v rovnici (2.1) se nahradí hustotou vodní páry ρ_v. Obecná transportní rovnice (2.1) je navíc vydělena hustotou ρ, která už v rovnici nevystupuje, změní se ale jednotky a značení difuzního koeficientu Γ $[kgm^{-1}s^{-1}]$ na D $[m^2s^{-1}]$. Platí rovnice (5.1).

$$D = \frac{\Gamma}{\rho} \tag{5.1}$$

Vlhký vzduch se uvažuje jako směs suchého vzduchu a vodní páry. Pro hustotu vlhkého vzduchu platí rovnice (5.2).

$$\rho_{ma} = \rho_v + \rho_a \tag{5.2}$$

Hustota vlhkého vzduchu ρ_{ma} dle rovnice (5.2) je dána součtem hustoty vodní páry ρ_v a hustoty suchého vzduchu ρ_a. Transportní rovnice pro hustotu vodní páru se zapíše ve tvaru (5.3).

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_v u_j)}{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_{v,a}\frac{\partial \rho_v}{\partial x_j}\right] = S_v(x_j, t) \tag{5.3}$$

Uvažuje se pouze stacionární případ a rovnice (5.3) se potom zjednoduší na tvar (5.4).

$$\frac{\partial (\rho_v u_j)}{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_{v,a}\frac{\partial \rho_v}{\partial x_j}\right] = S_v(x_j) \tag{5.4}$$

Kde $D_{v,a}$ je difuzní koeficient vodní páry ve vzduchu. Člen na pravé straně rovnice reprezentuje hustotu zdroje vodní páry z padajících kapek v oblasti deště.

Hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu se zapíše jako poměr hustot.

$$\sigma_v = \frac{m_v}{m_{ma}} = \frac{\rho_v \cdot V}{\rho_{ma} \cdot V} = \frac{\rho_v}{\rho_{ma}} \tag{5.5}$$

V rovnici (5.5) je ρ_{ma} je hustota vlhkého vzduchu. Pro hustotu vodní páry pak bude platit rovnice (5.6).

$$\rho_v = \sigma_v \cdot \rho_{ma} \tag{5.6}$$

Rovnice (5.6) se dosadí do rovnice (5.4). Nová transportní rovnice pak bude mít tvar (5.7).

$$\frac{\partial (\sigma_v \rho_{ma} u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_{v,a}\frac{\partial (\sigma_v \rho_{ma})}{\partial x_j}\right] = S_v(x_j) \tag{5.7}$$

Cela rovnice (5.7) se vydělí hustotou vlhkého vzduchu ρ_{ma} a tím vznikne transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu ve tvaru (5.8).

$$\frac{\partial (\sigma_v u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_{v,a}\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_j}\right] = \frac{S_v(x_j)}{\rho_{ma}} = S_{vp}(x_j) \tag{5.8}$$

Rovnice (5.8) je hledaná transportní rovnice, ze které se získá rozložení velikosti hmotnostního zlomku v řešené oblasti. Diskretizace pomocí metody konečných objemů odpovídá postupu v kapitole 2.2, na pravé straně rovnice ale přibyl zdrojový člen S_{vp}, který reprezentuje hustotu zdroje vodní páry. Odvození a výpočet hodnoty zdrojového členu je popsán v kapitole 4.

Postup diskretizace rovnice (5.8) je pro názornost naznačen pro jednorozměrnou úlohu. Rozšíření do dvou dimenzí je obdobné postupu, který je podrobně vysvětlen v kapitole 3.1.2. Rovnice (5.8) se integruje přes kontrolní objem.

$$\int_{CV} \frac{d}{dx}(\sigma_v u)\, dV - \int_{CV} \frac{d}{dx}\left(D_{v,a} \frac{d\sigma_v}{dx}\right) dV = \int_{CV} S_{vp}\, dV \tag{5.9}$$

Po integraci je výsledná rovnice ve tvaru (5.10).

$$(uA\sigma_v)_e - (uA\sigma_v)_w - \left[\left(D_{v,a} A \frac{d\sigma_v}{dx}\right)_e - \left(D_{v,a} A \frac{d\sigma_v}{dx}\right)_w\right] = \bar{S}_{vp} \Delta V \tag{5.10}$$

Velikost kontrolního objemu ΔV zůstává konstantní a platí rovnice (5.11).

$$\Delta V = A \cdot \delta x \tag{5.11}$$

Kde δx je velikost kroku, respektive vzdálenost dvou uzlů výpočetní sítě. Protože $A = konst$ celá rovnice (5.10) se může vydělit plochou čela kontrolního objemu A.

$$(u\sigma_v)_e - (u\sigma_v)_w - \left[\left(D_{v,a} \frac{d\sigma_v}{\delta x}\right)_e - \left(D_{v,a} \frac{d\sigma_v}{\delta x}\right)_w\right] = \bar{S}_{vp} \delta x \tag{5.12}$$

V [11] je hodnota zdrojového členu $\bar{S}_{vp}$ po integraci zprůměrována a zdroj je řešen jako konstantní. V kapitole 4 je uveden postup výpočtu zdrojového členu, pro další postup jsou tedy známé hodnoty zdrojového členu v každém uzlu výpočetní sítě a zdrojový člen je řešen jako nekonstantní. Jednotlivé hodnoty zdrojového členu se vynásobí velikostí zvoleného kroku δx.

Rovnice (5.12) se zapíše ve tvaru (2.17). Pro koeficienty platí vztahy $F_e = F_w = F_x = u$ a $D_e = D_w = D_x = \frac{D_{v,a}}{\delta x}$, kde F_x je konvektivní tok čelem

kontrolního objemu a D_x je difuzní tok čelem kontrolního objemu. Pro všechny další výpočty se uvažuje známá a konstantní hodnota rychlosti u respektive rychlostního pole při uvažování dvourozměrné výpočetní oblasti. Po dosazení okrajových podmínek dle postupu v kapitole 3.1.1 je diskretizovaná rovnice ve tvaru (3.20) a pro koeficient a_P platí rovnice (3.19). Členy S_u a S_P mají stále stejný význam a jsou závislé na zvolených okrajových podmínkách. Ke členu S_u na pravé straně rovnice (3.20) se přičte zdrojový člen vynásobený zvoleným krokem δx. Řešení se nalezne opět pomocí rovnic (3.22) respektive (3.23). Vektor $\underline{Q}$ na pravé straně rovnice (3.22) je pro řešení bez zdrojového členu nulový až na první respektive poslední řádek, jejichž hodnoty jsou určené okrajovými podmínkami. Pro řešení rovnice se zdrojovým členem se k vektoru $\underline{Q}$ přičte člen $\bar{S}_{vp}\delta x$ a vektor tedy bude nenulový.

Měrná vlhkost vlhkého vzduchu x je definována jako poměr hmotnosti vodní páry m_v a hmotnosti suchého vzduchu m_a.

$$x = \frac{m_v}{m_a} \tag{5.13}$$

Pro hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu potom platí rovnice (5.14).

$$\sigma_v = \frac{m_v}{m_{ma}} = \frac{m_v}{m_v + m_a} = \frac{x}{1 + x} \tag{5.14}$$

Řešením rovnice (5.12) se získají hmotnostní zlomky vodní páry v jednotlivých uzlových bodech řešené oblasti a použitím rovnice (5.14) se dopočítají i hodnoty měrných vlhkostí.

5.1.1 OVĚŘENÍ ALGORITMU ŘEŠENÍ NA JEDNOROZMĚRNÉ ÚLOZE

Rovnice pro zdrojové členy uvedené v kapitole 4 jsou odvozeny pro jednorozměrný protiproudý výměník tepla. Změna měrné vlhkosti proudícího vzduchu se svislou souřadnicí je řešena obyčejnou diferenciální rovnicí (4.28). Lze dokázat, že výpočet měrné vlhkosti řešením soustavy pěti diferenciálních rovnic uvedených v kapitole 4.1 je ekvivalentní řešení jednorozměrné transportní rovnice ve tvaru (5.8) bez uvažování difuzního členu, ke které je přičten zdrojový člen vypočtený z rovnice (4.32).

Bilance zachovávané veličiny v kontrolním objemu V a jeho hranici ∂V je daná jejím přítokem a odtokem z kontrolního objemu a zdrojem nebo propadem uvnitř kontrolního objemu. Zachovávanou veličinou je hmotnost vodní páry vyjádřená rovnicí (5.15).

$$m_v = \int_V \sigma_v \rho_{ma} \, dV \tag{5.15}$$

V oblasti deště chladicí věže se předpokládá, že odpařená voda z padajících kapek je zdrojem vodní páry, který vstupuje do známého tvaru bilančního zákona, který lze napsat ve tvaru (5.16).

$$\overline{\int_V \sigma_v \rho_{ma} \, dV} = \int_V S_{vp} \, dV \tag{5.16}$$

Na levé straně rovnice (5.16) je výraz pro materiálovou derivaci hmotnosti vodní páry, na pravé straně je integrál zdrojového členu. Materiálová derivace se rozepíše na součet dvou integrálů a rovnice se integruje přes kontrolní objem. Potom platí rovnice ve tvaru (5.17).

$$\frac{\partial(\rho_{ma}\sigma_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ma}\sigma_v u_i)}{\partial x_i} = S_{vp}(x_i, t) \tag{5.17}$$

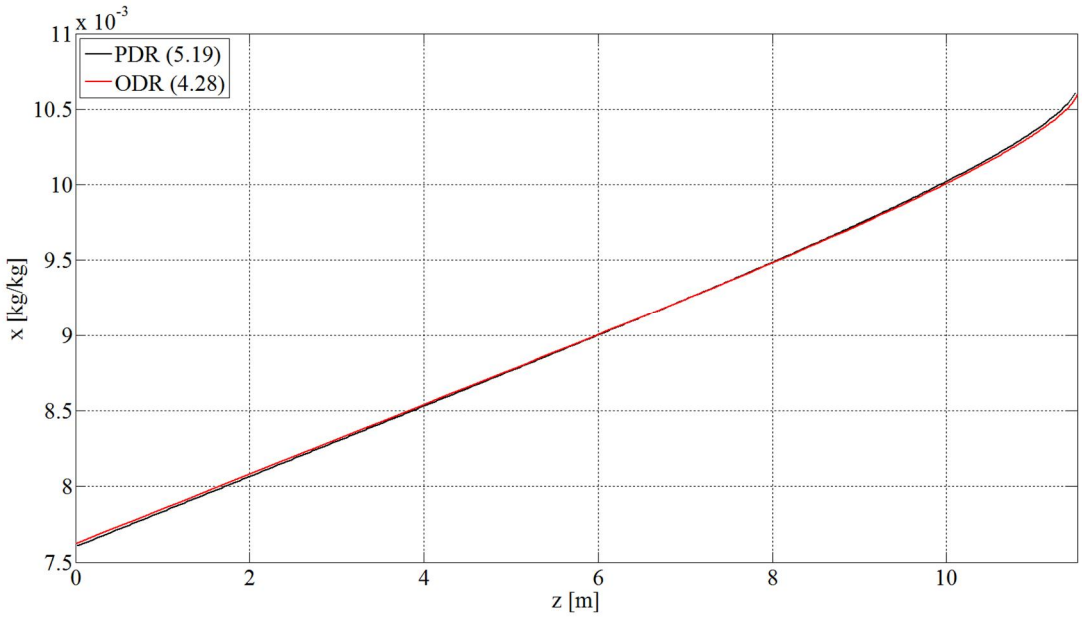
Pro předpoklad, že je materiálová derivace vlhkého vzduchu nulová, se rovnice (5.17) rozpadne na dvě parciální diferenciální rovnice (5.18) a (5.19).

$$\frac{\partial(\rho_{ma})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ma}u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial(\sigma_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma_v u_i)}{\partial x_i} = S_{vp}(x_i, t) \tag{5.19}$$

Řešení se uvažuje stacionární a v rovnici (5.19) již není uvažován první člen na levé straně. Po dosazení rovnice (5.14) za hmotnostní zlomek a rovnice (4.32) za zdrojový člen je vidět, že rovnice (5.19) je ekvivalentní rovnici (4.28) pro řešení na jednorozměrné oblasti a platí, že souřadnice x_i v rovnici (5.19) odpovídá souřadnici z v rovnici (4.28). Srovnání řešení užitím parciální diferenciální rovnice (5.19) a obyčejné diferenciální rovnice (4.28),

která je řešena ze soustavy obyčejných diferenciálních rovnic uvedených v kapitole 4.1, je na *Obr. 5.1.1.1.*

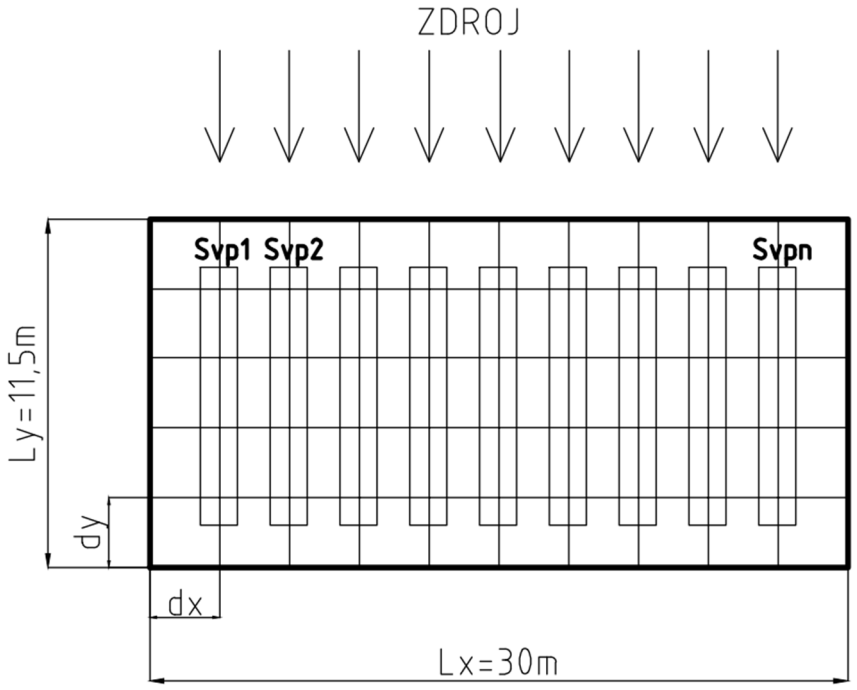


Obr. 5.1.1.1 Srovnání řešení dle parciální diferenciální rovnice (5.19) a obyčejné diferenciální rovnice (4.28)

Z *Obr. 5.1.1.1* je vidět, že výsledná řešení si odpovídají. Drobné odchylky jsou hlavně dány chybami použitých numerických metod. Průběh řešení odpovídá rozložení měrné vlhkosti vzduchu proudícího oblastí deště se svislou souřadnicí z odpovídající výšce oblasti deště.

5.1.2 ŘEŠENÍ TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO HMOTNOSTNÍ ZLOMEK

Transportní rovnice (5.8) je řešena pomocí metody konečných objemů a pro určení hodnot řešení na čelech kontrolního objemu je použito schéma typu upwind. Řešení pak vychází z řešení rovnice ve tvaru (3.28), ke které se přičítají hodnoty zdrojového členu vynásobené krokem dy, který odpovídá vzdálenosti uzlů nad sebou. Oblast deště je uvažována ve tvaru obdélníku o vodorovné hraně $L_x = 30m$ a svislé hraně $L_y = 11{,}5m$. Situace je naznačená na *Obr. 5.1.2.1.*



Obr. 5.1.2.1 Oblast deště

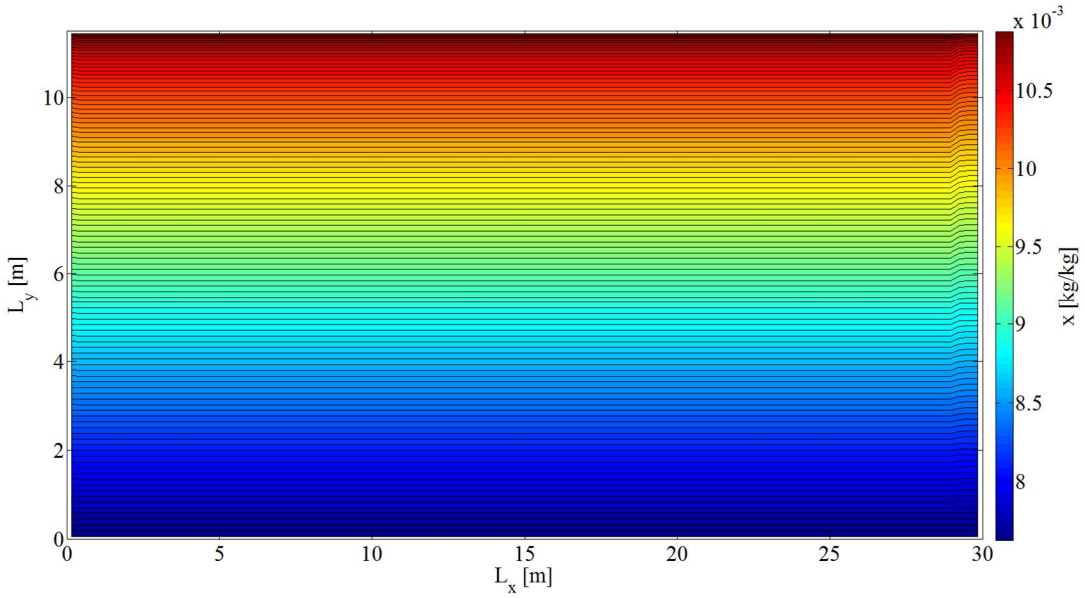
Hodnoty zdrojového členu jsou řešeny pro jednorozměrnou oblast, která odpovídá jednomu sloupci ve směru, který je vyznačen šipkami na *Obr. 5.1.2.1.* V kapitole 3.1.2 je popsáno řešení transportní rovnice na dvourozměrné oblasti. Výsledné řešení zapsané ve formě maticového zápisu (3.32) je pozměněno přičtením vektoru hodnot zdrojového členu na pravé straně rovnice. Jednotlivá řešení jsou seřazena ve vektoru po sloupcích, stejně se tedy musí přičítat hodnoty zdrojových členů, které jsou vyhodnoceny také po jednotlivých sloupcích. Výsledný maticový zápis se symbolicky zapíše ve tvaru (5.20).

$$\begin{bmatrix} a_{Pa} & -a_N & -a_E & 0 & \dots & 0 \\ -a_S & a_{Pb} & -a_N & -a_E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_W & -a_S & a_{Ph} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{v1} \\ \vdots \\ \sigma_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ua} \\ S_{ub} \\ \vdots \\ S_{uh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{S}_{vp1} \\ \bar{S}_{vp2} \\ \vdots \\ \bar{S}_{vpn} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Maticový zápis (5.20) reprezentuje soustavu algebraických rovnic. Řešením je vektor hodnot hmotnostních zlomků, které přísluší uzlům zvolené výpočetní sítě. Z vypočtených hodnot hmotnostních zlomků se dle rovnice (5.14) dopočítají hodnoty měrné vlhkosti proudícího vzduchu.

Algoritmus řešení transportní rovnice na dvourozměrné oblasti je nejdříve otestován dosazením konstantního zdrojového členu pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti

dle *Obr. 5.1.2.1.* Rozložení měrné vlhkosti pro konstantní zdrojový člen je na *Obr. 5.1.2.2.* Uvažován je vertikální směr větru ve směru kladné osy y.



Obr. 5.1.2.2 Rozložení měrné vlhkosti vzduchu pro konstantní hodnotu zdrojového členu a vertikální směr větru

Ze srovnání hodnot měrné vlhkosti dle *Obr. 5.1.1.1* a *Obr. 5.1.2.2* je vidět, že hodnoty jsou podél výšky oblasti deště stejné a algoritmus tedy funguje. Směr větru je uvažován ve směru svislé souřadnice, pro konstantní hodnoty zdroje v jednotlivých sloupcích se proto měrná vlhkost mění pouze se svislou souřadnicí.

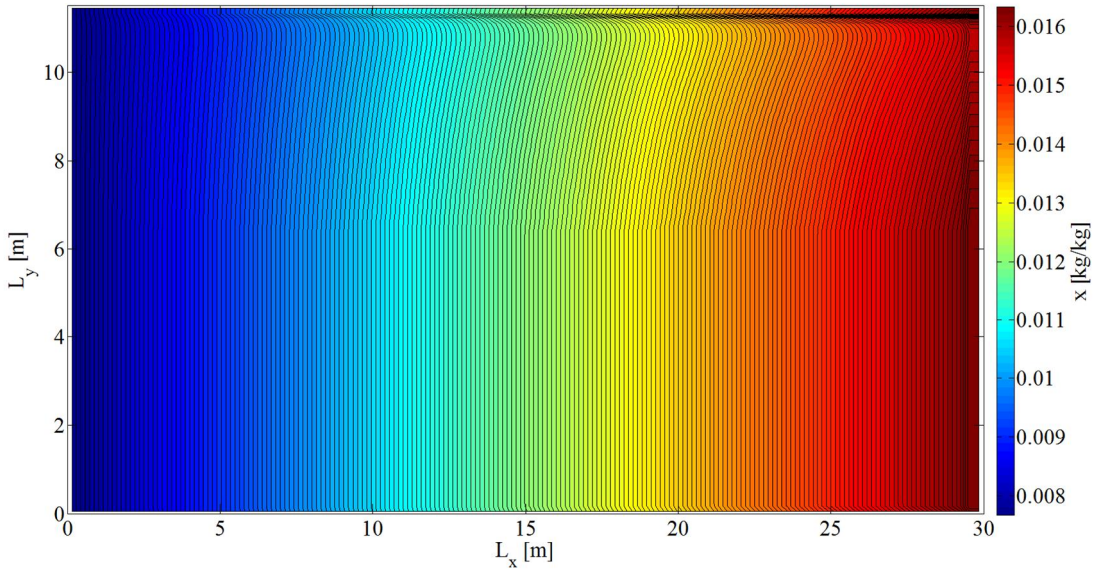
V rovnici (4.15) pro výpočet změny rychlosti padající kapky se svislou souřadnicí je jako relativní rychlost ve vzorci pro odporovou sílu uvažován pouze rozdíl rychlosti větru a rychlosti padající kapky, protože se uvažuje pouze případ jednorozměrného protiproudého výměníku tepla. V následujícím příkladu se uvažuje horizontální směr větru v kladném směru osy x, což se projeví ve změně relativní rychlosti v rovnici (4.15) a ve změně hodnoty Reynoldsova čísla, na kterém závisí i hodnota koeficientu odporu kapky. Změna směru větru a velikosti jeho rychlosti tedy vede na změnu velikosti zdrojového členu.

Při uvažování horizontálního směru větru v kladném směru osy x, je směr větru kolmý na směr rychlosti padající kapky a výsledná relativní rychlost u se určí dle rovnice (5.21).

$$u = \sqrt{v_a^2 + v_d^2} \tag{5.21}$$

V rovnici (5.21) je v_a velikost rychlosti větru, která je vhodně zvolena, a v_d je velikost rychlosti padající kapky, jejíž výpočet je uveden v kapitole 4.1. Předpokládá se, že kapky padají stále svisle dolů a směr rychlosti kapky se tedy se svislou souřadnicí nemění. Takto vypočtená rychlost se pak dosadí za hodnotu rychlosti v rovnici (4.7) pro výpočet Reynoldsova čísla.

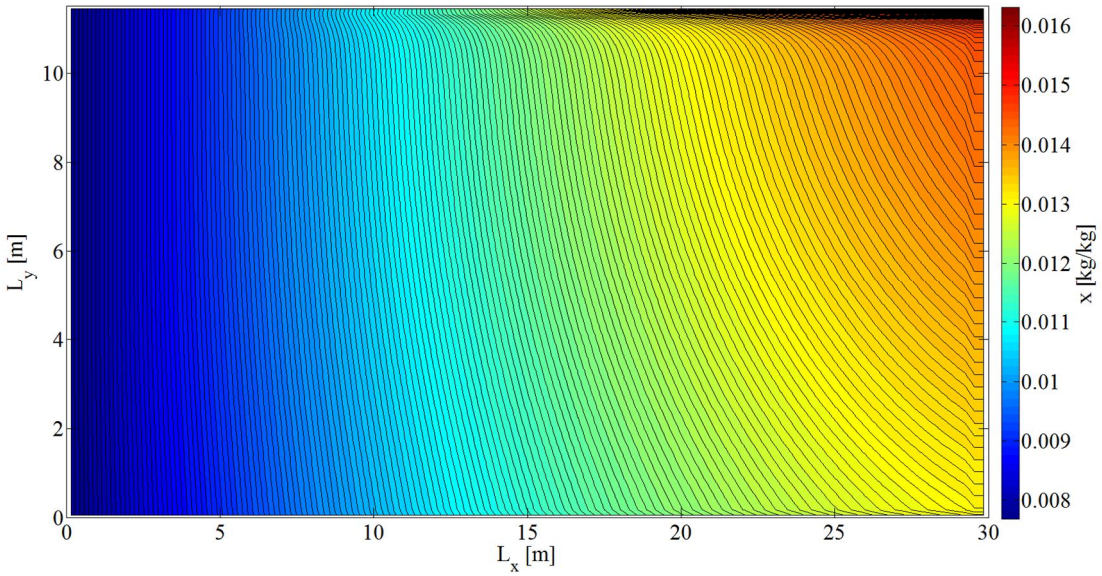
Změny jsou zohledněny ve výpočtu zdrojového členu dle rovnice (4.32). Pro následující výpočet je opět uvažována konstantní hodnota přepočteného zdrojového členu pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti a je uvažován horizontální směr větru ve směru kladné osy x. Rozložení měrné vlhkosti pro přepočtené hodnoty konstantního zdroje a horizontální směr větru v kladném směru osy x je na *Obr. 5.1.2.3.*



Obr. 5.1.2.3 Rozložení měrné vlhkosti vzduchu pro konstantní hodnotu přepočteného zdrojového členu a horizontální směr větru

Z Obr. 5.1.2.3 je patrný vliv směru větru, který vane zleva doprava. Na pravé straně oblasti deště je maximální hodnota měrné vlhkosti $x = 0{,}016\ kgkg^{-1}$, z *Obr. 5.1.2.2* je odečtena maximální hodnota $x = 0{,}0106\ kgkg^{-1}$. Hodnota měrné vlhkosti tedy vzrostla o $0{,}0054\ kgkg^{-1}$. To je dáno změnou hodnot zdrojového členu, a také směrem větru, který zanáší vlhkost na pravou stranu oblasti deště. Změna měrné vlhkosti je zohledněná v dalším přepočtení zdrojových členů. Do rovnice (4.32) pro výpočet hustoty zdroje páry jsou dosazeny hodnoty měrné vlhkosti vypočtené z předchozího řešení pro konstantní hodnoty

zdrojového členu ale se zohlednění vlivu směru a velikosti větru. Pro další výpočet už tedy hodnoty zdrojového členu nejsou stejné pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti, ale mění se změnou měrné vlhkosti v oblasti deště. Rozložení měrné vlhkosti vzduchu v oblasti deště pro nekonstantní hodnoty zdrojového členu a pro horizontální a kladný směr větru je na *Obr. 5.1.2.4.*



Obr. 5.1.2.4 Rozložení měrné vlhkosti vzduchu pro nekonstantní hodnotu zdrojového členu a horizontální směr větru

Z Obr. 5.1.2.4 je patrné, že maximální hodnota měrné vlhkosti zůstává stejná a větší měrná vlhkost je v pravé části oblasti deště, protože vítr vane z levé části a zanáší vlhkost doprava. Přepočtením zdrojových členů je zohledněna změna měrné vlhkosti se svislou i vodorovnou souřadnicí.

5.2 TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO MĚRNOU ENTALPII VLHKÉHO VZDUCHU

V transportní rovnici ve tvaru (2.1) se obecnou veličinou ϕ tentokrát uvažuje měrná entalpie vlhkého vzduchu h_{1+x}. Pro přehlednost zápisu je v následujících rovnicích měrná entalpie vlhkého vzduchu h_{1+x} značená pouze h. Postup sestavení transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu je obdobný postupu sestavení transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry ve vzduchu, který je uvedený v kapitole 5.1. Transportní

rovnice ve tvaru (2.1) je vydělena hustotou ρ, která už v rovnici nevystupuje a změní se jednotky a značení difuzního koeficientu dle rovnice (5.1). Transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu se zapíše ve tvaru (5.22).

$$\frac{\partial(h \cdot u_j)}{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_{v,a}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right] = S_h(x_j) \tag{5.22}$$

Zdrojový člen S_h představuje hustotu zdroje entalpie a je vypočten z rovnice (4.34). Postup diskretizace rovnice je obdobný postupu, který je uveden v kapitole 5.1. Diskretizovaná rovnice pro jednorozměrnou úlohu se zapíše ve tvaru (5.23).

$$(uh)_e - (uh)_w - \left[\left(D_{v,a}\frac{dh}{\delta x}\right)_e - \left(D_{v,a}\frac{dh}{\delta x}\right)_w\right] = \bar{S}_h \delta x \tag{5.23}$$

Hodnoty měrných entalpií na čelech kontrolního objemu jsou pro konvekční člen aproximovány upwind schématem, pro difuzní člen jsou aproximovány centrálními diferencemi. Výsledné hodnoty zdrojového členu se po integraci musí násobit krokem δx. Řešená rovnice přejde do tvaru (3.20). Výsledné řešení, tedy vektor hodnot měrných entalpií vlhkého vzduchu v jednotlivých uzlech výpočetní oblasti, se určí z rovnice (3.23).

Pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu platí rovnice (5.24).

$$h = c_{ps}T_a + \sigma_v l_0 \tag{5.24}$$

V rovnici (5.24) je c_{ps} měrná tepelná kapacita směsi suchého vzduchu a vodní páry za konstantního tlaku a platí pro ni rovnice (5.25). Výparné skupenské teplo l_0 se stanoví z rovnice (4.25).

$$c_{ps} = c_{pa} + x c_{pv} \tag{5.25}$$

Řešením transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu se získá vektor hodnot měrných entalpií v jednotlivých uzlech. Z vypočtených hodnot měrné entalpie se dopočítají hodnoty teploty vlhkého vzduchu z rovnice (5.26).

$$T_a = \frac{h - \sigma_v l_o}{c_{ps}} \tag{5.26}$$

Do rovnice (5.26) se dosadí vypočtené hodnoty hmotnostního zlomku σ_v.

5.2.1 OVĚŘENÍ ALGORITMU ŘEŠENÍ NA JEDNOROZMĚRNÉ ÚLOZE

V předchozí kapitole je uveden výpočet měrné entalpie vzduchu z řešení transportní rovnice ve tvaru (5.22). Lze dokázat, že výpočet měrné entalpie vlhkého vzduchu a jeho teploty řešením soustavy pěti diferenciálních rovnic uvedených v kapitole 4.1 je ekvivalentní řešení jednorozměrné transportní rovnice ve tvaru (5.22) bez uvažování difuzního členu, ke které je přičten zdrojový člen vypočtený z rovnice (4.34). Transportní rovnice s konvekcí a zdrojovým členem se zapíše ve tvaru (5.27).

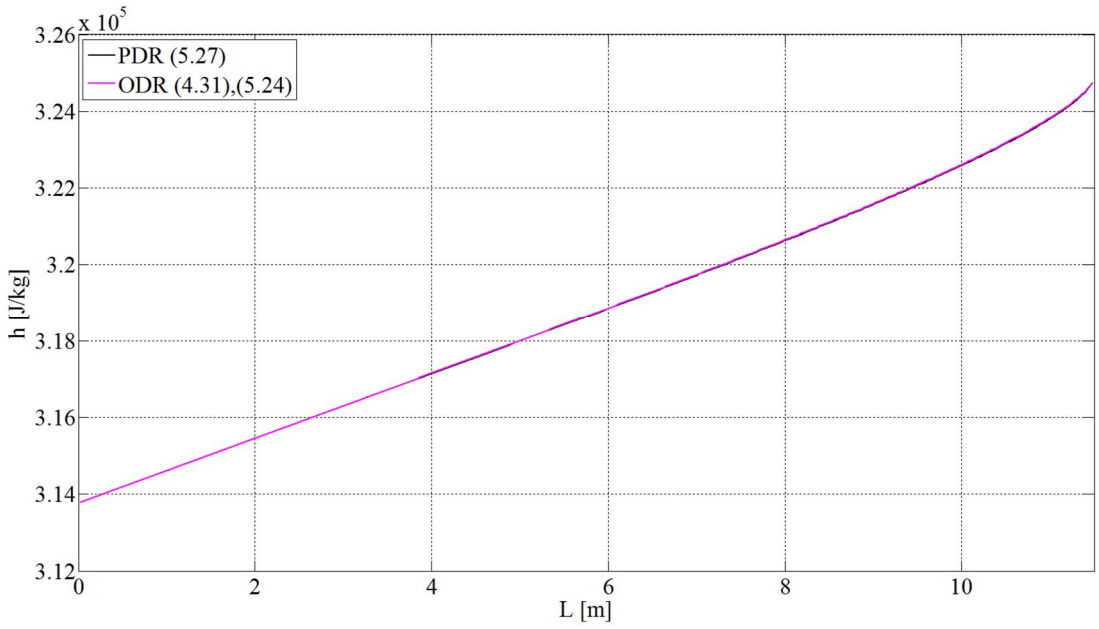
$$u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = S_h(x_i) \tag{5.27}$$

Rychlost u_i v rovnici (5.27) je konstantní a odpovídá rychlosti proudění vlhkého vzduchu v_a. Pro řešení na jednorozměrné oblasti platí, že souřadnice x_i v rovnici (5.27) odpovídá souřadnici z v rovnici (4.30) pro změnu měrné entalpie vlhkého vzduchu se svislou souřadnicí. Rovnice (4.30) se upraví do tvaru (5.28). Značení měrné entalpie h odpovídá značení h_{1+x} v rovnici (4.30).

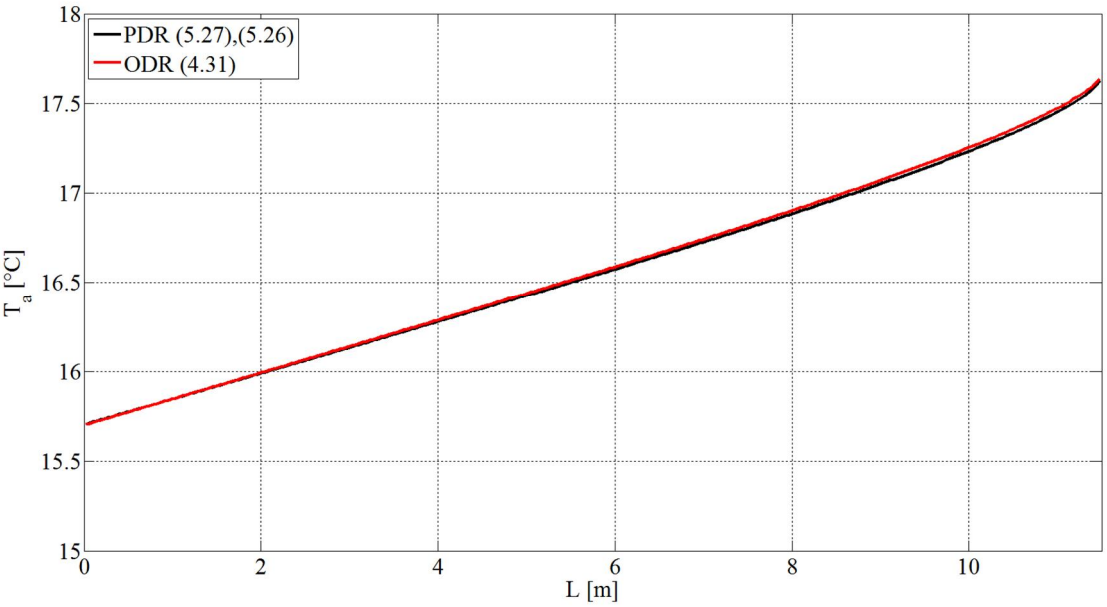
$$\frac{dh}{dz} = -N_d(z) v_d(z) \left[\frac{d\dot{Q}}{v_d(z)} + \rho_w A_d h_v \frac{dR}{dz} \right] \tag{5.28}$$

Dosazením rovnic (4.11), (4.19) a (4.24) do rovnice (5.28) je splněna platnost rovnice (5.27). Výpočet měrné entalpie vlhkého vzduchu a jeho teploty řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic uvedených v kapitole 4.1 je tedy ekvivalentní výpočtu řešením jednorozměrné transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu bez difuzního členu se zdrojovým členem vypočteným z rovnice (4.34). Z řešení rovnice (5.27) se dle rovnice (5.26) dopočítají hodnoty teploty vlhkého vzduchu. Takto vypočtené hodnoty teploty vlhkého vzduchu se srovnají s hodnotami teploty vzduchu vypočtenými z rovnice (4.31), které je řešena soustavou obyčejných diferenciálních rovnic. Z hodnot teploty vzduchu,

které jsou vypočteny z rovnice (4.31) lze dopočítat měrnou entalpii vlhkého vzduchu užitím rovnice (5.24) a porovnat s řešením dle rovnice (5.27). Srovnání řešení je na *Obr. 5.2.1.1* a na *Obr. 5.2.1.2.*



Obr. 5.2.1.1 Srovnání řešení dle parciální diferenciální rovnice (5.27) a obyčejné diferenciální rovnice (4.31) resp. (5.24)



Obr. 5.2.1.2 Srovnání řešení dle parciální diferenciální rovnice (5.27) resp. (5.26) a obyčejné diferenciální rovnice (4.31)

Z *Obr. 5.2.1.1* a *Obr. 5.2.1.2* je vidět, že výsledná řešení si odpovídají. Drobné odchylky jsou dány hlavně chybami použitých numerických metod. V případě přepočtu dle rovnice (5.24) respektive (5.26) je navíc do výpočtu vnesena chyba numerického řešení výpočtu hmotnostního zlomku. Průběh řešení na *Obr. 5.2.1.1* odpovídá rozložení měrné entalpie vlhkého vzduchu proudícího oblastí deště se svislou souřadnicí z odpovídající výšce oblasti deště. Průběh řešení na *Obr. 5.2.1.2* odpovídá rozložení hodnot teploty vlhkého vzduchu se svislou souřadnicí z odpovídající výšce oblasti deště.

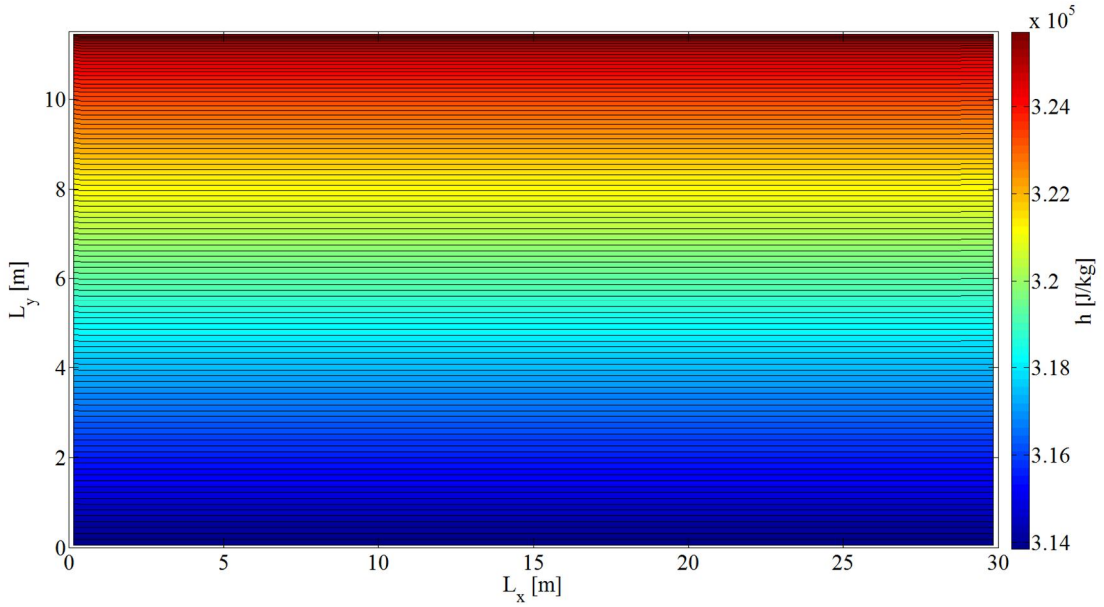
5.2.2 ŘEŠENÍ TRANSPORTNÍ ROVNICE PRO MĚRNOU ENTALPII VLHKÉHO VZDUCHU

Řešení transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu na dvourozměrné oblasti dle *Obr. 5.1.2.1* je obdobné řešení transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry, které je uvedeno v kapitole 5.1.2. Zdrojový člen reprezentující hustotu zdroje entalpie vypočtený z rovnice (4.34) se po integraci transportní rovnice musí vynásobit krokem dy, který odpovídá vzdálenosti uzlů nad sebou. Diskretizovaná rovnice ve tvaru (3.28) se zapíše v maticovém tvaru (5.29).

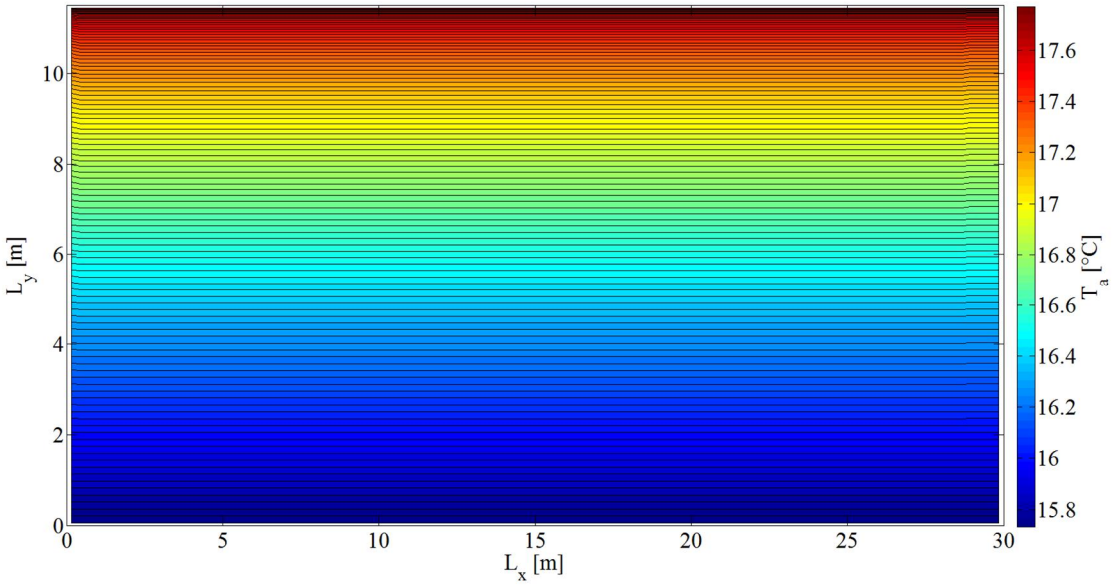
$$\begin{bmatrix} a_{Pa} & -a_N & -a_E & 0 & \dots & 0 \\ -a_S & a_{Pb} & -a_N & -a_E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_W & -a_S & a_{Ph} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ua} \\ S_{ub} \\ \vdots \\ S_{uh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{s}_{h1} \\ \bar{S}_{h2} \\ \vdots \\ \bar{S}_{hn} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Maticový zápis (5.29) reprezentuje soustavu algebraických rovnic, jejímž řešením se získá vektor hodnot měrné entalpie vlhkého vzduchu pro jednotlivé uzly výpočetní oblasti. Rozložení teploty vlhkého vzduchu se dopočte z rovnice (5.26). Hodnoty zdrojového členu jsou řešeny pro jednorozměrnou oblast a přičítají se k pravé straně maticového zápisu (5.29) po jednotlivých sloupcích.

Algoritmus řešení transportní rovnice na dvourozměrné oblasti je nejdříve otestován dosazením konstantního zdrojového členu pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti dle *Obr. 5.1.2.1.* Rozložení měrné entalpie vlhkého vzduchu pro konstantní zdrojový člen je na *Obr. 5.2.2.1.* Je uvažován pouze vertikální směr větru ve směru kladné osy y. Rozložení teploty vlhkého vzduchu pro konstantní zdrojový člen je na *Obr. 5.2.2.2.*



Obr. 5.2.2.1 Rozložení měrné entalpie vzduchu pro konstantní hodnotu zdrojového členu a vertikální směr větru

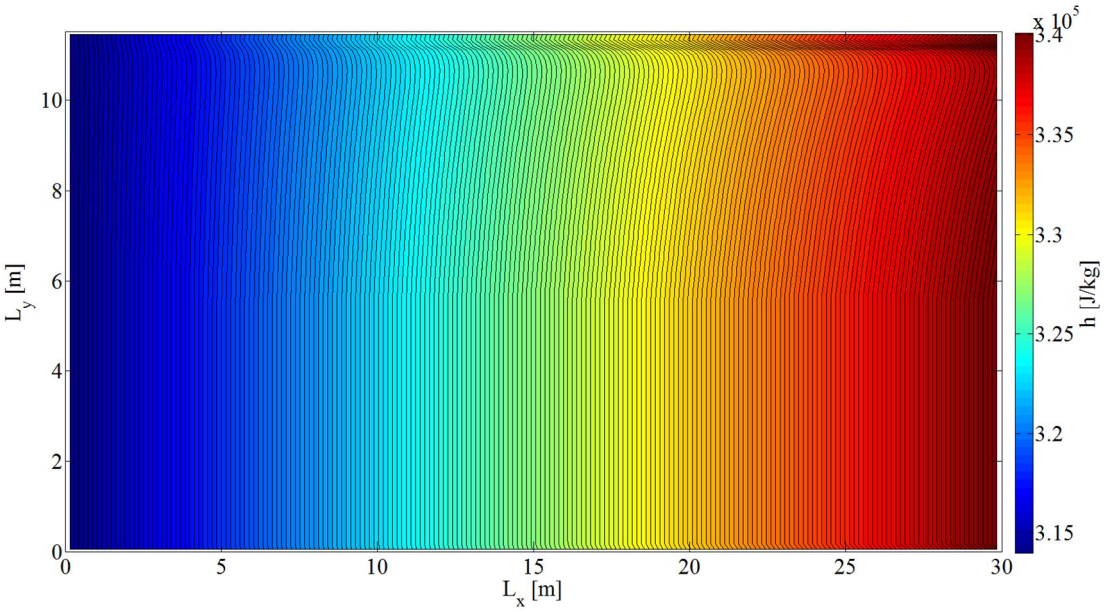


Obr. 5.2.2.2 Rozložení teploty vzduchu pro konstantní hodnotu zdrojového členu a vertikální směr větru

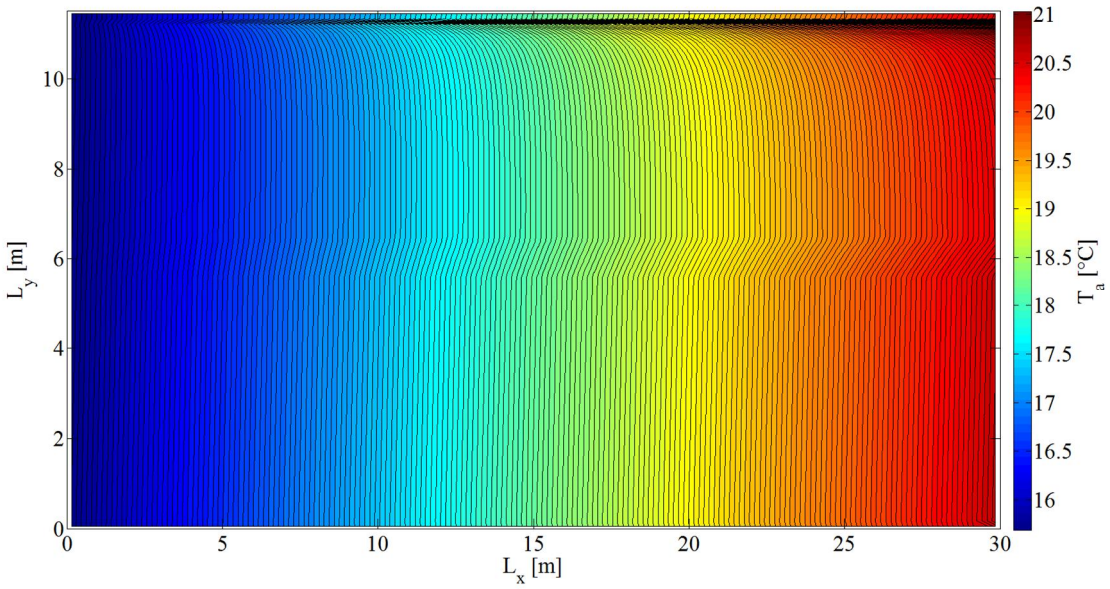
Ze srovnání hodnot měrné entalpie dle *Obr. 5.2.1.1* a *Obr. 5.2.2.1* je vidět, že hodnoty jsou podél výšky oblasti deště stejné a algoritmus tedy funguje. Shodné jsou i hodnoty teploty vzduchu odečtené pro svislou souřadnici z *Obr. 5.2.1.2* a *Obr. 5.2.2.2*. Směr větru je

uvažován ve směru svislé souřadnice, pro konstantní hodnoty zdroje v jednotlivých sloupcích se proto měrná entalpie vzduchu a jeho teplota mění pouze se svislou souřadnicí.

V dalších výpočtech je stejně jako v kapitole 5.1.2 uvažován horizontální směr větru ve směr kladné osy x. Relativní rychlost větru se tedy změní dle rovnice (5.21) a změní se i hodnota Reynoldsova čísla, na které závisí koeficient odporu kapky. Reynoldsovo číslo se vyskytuje i v kriteriálních rovnicích pro Nusseltovo a Sherwoodovo číslo. Hodnota zdrojového členu se změnou směru a rychlosti větru změní. Přepočtené hodnoty zdrojového členu, které jsou určeny pro jeden sloupec výpočetní oblasti, se po jednotlivých sloupcích přičtou k pravé straně řešené rovnice. Rozložení měrné entalpie vzduchu a jeho teploty pro přepočtený konstantní zdrojový člen a pro horizontální směr větru je na *Obr. 5.2.2.3* a na *Obr. 5.2.2.4*.



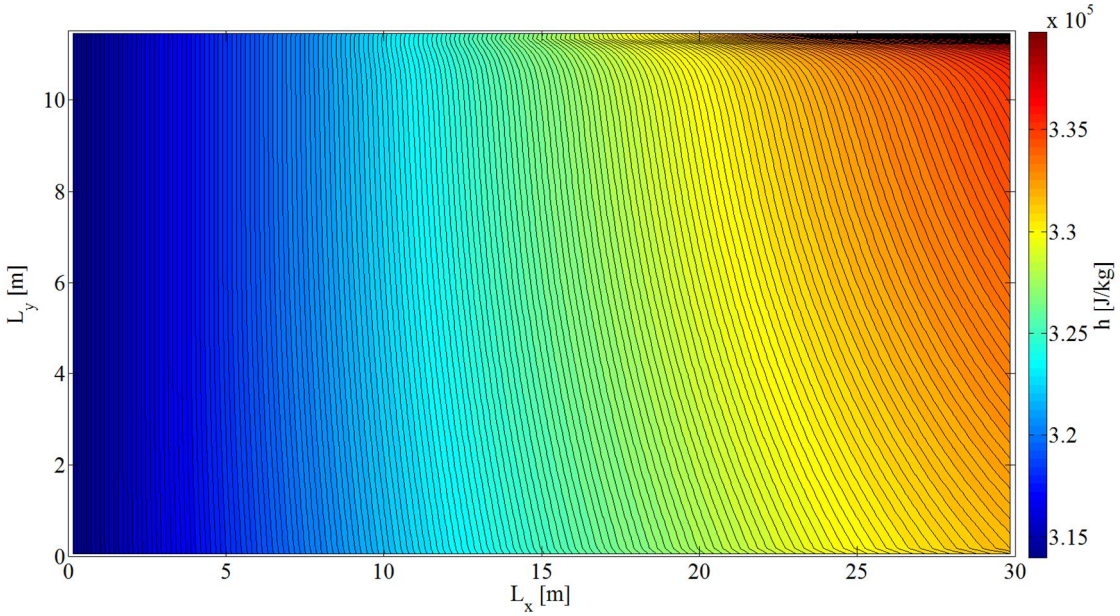
Obr. 5.2.2.3 Rozložení měrné entalpie vzduchu pro konstantní hodnotu přepočteného zdrojového členu a horizontální směr větru



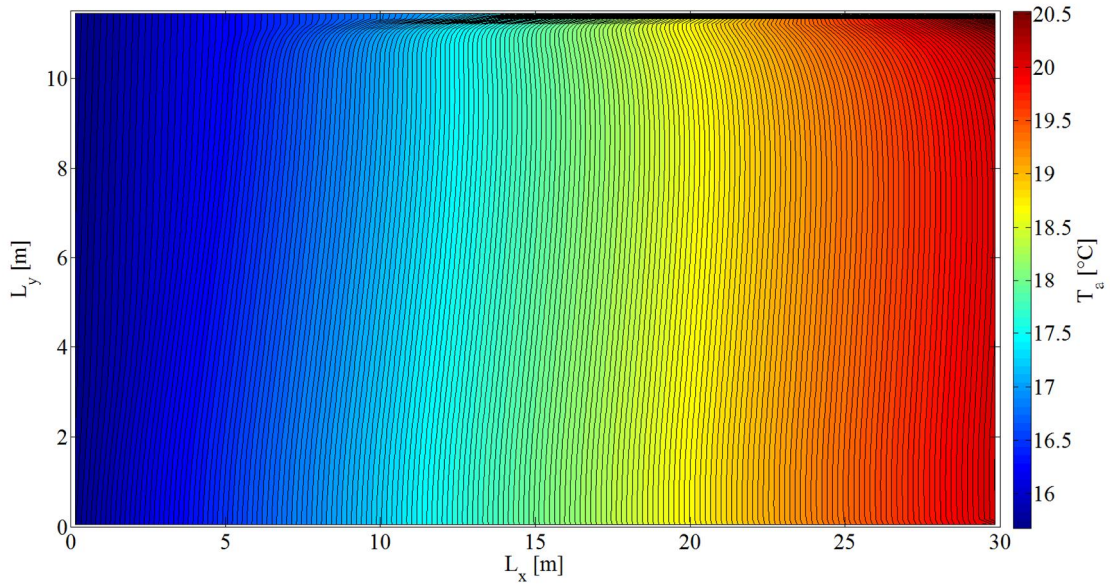
Obr. 5.2.2.4 Rozložení hodnot teploty vzduchu pro konstantní hodnotu přepočteného zdrojového členu a horizontální směr větru

Odečtená maximální hodnota měrné entalpie vzduchu z *Obr. 5.2.2.1* je $h = 3{,}25 \cdot 10^5 Jkg^{-1}$, maximální hodnota měrné entalpie odečtená z *Obr. 5.2.2.3* je $h = 3{,}40 \cdot 10^5 Jkg^{-1}$. Přepočtením zdrojového členu měrná entalpie vzrostla o $15 \cdot 10^3 Jkg^{-1}$. Srovnáním *Obr. 5.2.2.2* a *Obr. 5.2.2.4* je vidět, že teplota vzduchu po přepočtení zdrojového členu vzroste o $3{,}3°C$. Z *Obr.5.2.2.1-4* je také patrný vliv směru a velikosti větru. Maximální hodnoty sledovaných veličin pro horizontální směr větru se vyskytují u pravé strany oblasti deště.

Obdobně jako v kapitole 5.1.2 je v dalších výpočtech zohledněná změna měrné vlhkosti v oblasti deště. Do rovnice (4.34) pro výpočet hustoty zdroje entalpie jsou dosazeny hodnoty měrné vlhkosti vypočtené z řešení pro konstantní hodnoty zdrojového členu ale se zohlednění vlivu směru a velikosti větru. Tento výpočet je uveden v kapitole 5.1.2. Pro další výpočet už tedy hodnoty zdrojového členu nejsou stejné pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti, ale mění se změnou měrné vlhkosti v oblasti deště. Rozložení měrné entalpie vzduchu v oblasti deště pro nekonstantní hodnoty zdrojového členu a pro horizontální a kladný směr větru je na *Obr. 5.2.2.5.* Rozložení hodnot teploty vlhkého vzduchu v oblasti deště pro nekonstantní hodnoty zdrojového členu a pro horizontální a kladný směr větru je na *Obr. 5.2.2.6.*



Obr. 5.2.2.5 Rozložení měrné entalpie vzduchu pro nekonstantní hodnotu zdrojového členu a horizontální směr větru

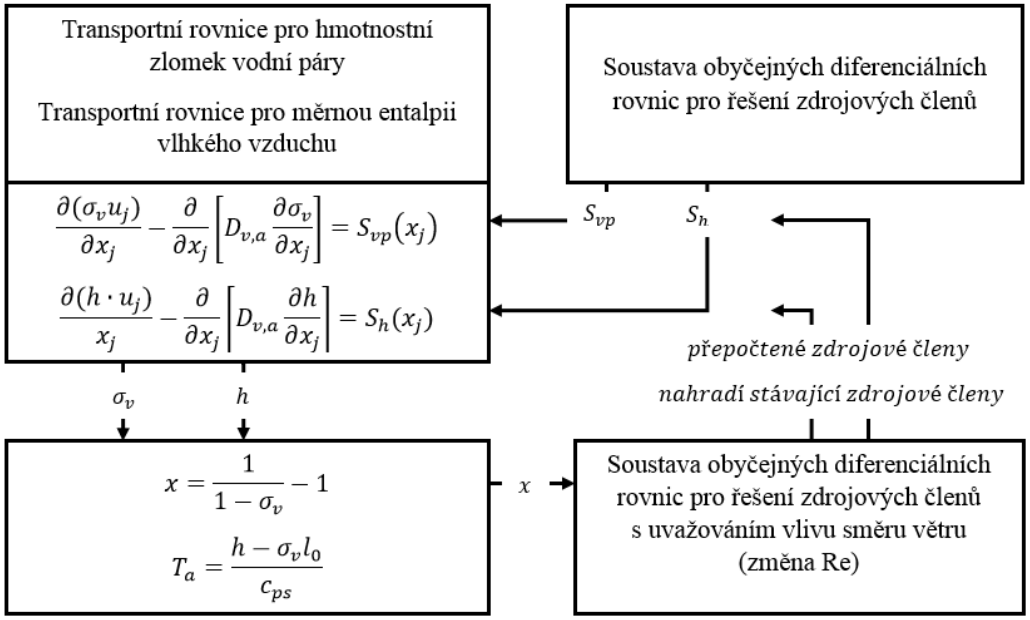


Obr. 5.2.2.6 Rozložení hodnot teploty vzduchu pro nekonstantní hodnotu zdrojového členu a horizontální směr větru

Z Obr. 5.2.2.5 a *Obr. 5.2.2.6* je vidět, že maximální hodnota měrné entalpie vlhkého vzduchu zůstává stejná, nevzrůstá ani teplota vzduchu. Vyšší hodnoty měrné entalpie a teploty vzduchu jsou v pravé části oblasti deště, protože vítr vane z leva doprava. Přepočtením zdrojových členů je zohledněna změna měrné entalpie a teploty vlhkého

vzduchu se svislou i vodorovnou souřadnicí. Hodnoty teploty vzduchu jsou vypočteny dle rovnice (5.26), kde jsou za hodnoty hmotnostního zlomku páry σ_v dosazeny hodnoty vypočtené z řešení hmotnostního zlomku pro nekonstantní hodnotu zdrojového členu. Hodnoty hmotnostního zlomku vodní páry a měrné entalpie vlhkého vzduchu jsou zatížené chybou numerického řešení. Teplota vzduchu je dopočítávána z hodnot měrné entalpie i z hodnot hmotnostního zlomku, chyba výpočtu teploty vzduchu potom může být větší.

Na *Obr. 5.2.2.7* je zobrazen diagram zjednodušeného postupu výpočtů uvedených v kapitolách 5.1.2 a 5.2.2.



Obr. 5.2.2.7 Diagram zjednodušeného postupu výpočtu

6 DISKUZE VÝSLEDKŮ

V kapitole 2 je uveden postup diskretizace obecné transportní rovnice s konvekcí a difuzí pomocí metody konečných objemů. V diskretizované rovnici je třeba aproximovat hodnoty řešené veličiny na čelech kontrolního objemu. Pro aproximaci těchto veličin jsou použita různá numerická schémata. V difuzním členu je použita aproximace pomocí centrálních diferencí, u konvekčního členu je situace složitější, protože aproximace musí respektovat směr proudění. V kapitole 3 je podrobně popsáno schéma typu upwind a schéma typu TVD. Obě schémata jsou otestována na vzorovém příkladu se známým řešením. Výběr schématu pro další výpočty je diskutován v kapitole 3.3. Jsou zde zváženy výhody i nevýhody použití daného schématu, zvoleno je schéma typu upwind.

Matematický model oblasti je založen na řešení transportních rovnic s konvekcí a difuzí se zdrojovým členem. V kapitole 4 jsou podrobně odvozeny obyčejné diferenciální rovnice, které řeší změny vybraných veličin se svislou souřadnicí reprezentující výšku oblasti deště. Konkrétně řeší změnu poloměru vodní kapky, změnu rychlosti padající vodní kapky a změnu její teploty se svislou souřadnicí. Průběhy změn zmíněných veličin jsou na *Obr. 4.1.3, Obr. 4.1.4* a *Obr. 4.1.5.* Výsledné průběhy závisí na zvolených okrajových podmínkách, které jsou uvedeny pro horní nebo dolní okraj oblasti deště. Okrajové podmínky jsou zvoleny s ohledem na realitu, nereprezentují konkrétní chladicí věž. Dále jsou uvedeny rovnice pro změnu měrné vlhkosti proudícího vzduchu a jeho teploty se svislou souřadnicí. Z řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic se dopočítají hodnoty zdrojových členů pro hustotu zdroje vodní páry dle rovnice (4.32) a pro hustotu zdroje entalpie dle rovnice (4.34). Průběhy hodnot zdrojových členů jsou na *Obr. 4.2.1* a *Obr. 4.2.2*. Z průběhů hodnot zdrojových členů je vidět, že jsou téměř konstantní až do výšky cca $8m$, a pak prudce narůstají. To je dáno chaotickým vypadáváním kapek z chladicí výplně do oblasti deště. S klesající výškou se kapky naopak ustalují do rovnoměrného proudu kapek.

Se znalostí hodnot zdrojových členů lze řešit zmíněné transportní rovnice, konkrétně transportní rovnici pro hmotnostní zlomek vodní páry a transportní rovnici pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu. Postup řešení je nejdříve ukázán na řešení transportní rovnice na jednorozměrné oblasti. Algoritmus řešení je následně ověřen porovnáním rozložení měrné vlhkosti podél výšky oblasti deště řešeným ze soustavy obyčejných diferenciálních rovnic z kapitoly 4.1 a řešeným z transportní rovnice na jednorozměrné oblasti reprezentující výšku oblasti deště. Stejné srovnání je provedeno i pro rozložení měrné entalpie vlhkého vzduchu

podél výšky oblasti deště a jeho teploty. Z *Obr. 5.1.1.1, Obr. 5.2.1.1* a *Obr. 5.2.1.2* je vidět, že rozložení sledovaných veličin podél výšky oblasti deště si odpovídají pro různé metody výpočtu. Z toho lze usoudit, že algoritmus je správný. Obě transportní rovnice jsou následně řešeny na dvourozměrné obdélníkové oblasti reprezentující oblast deště. Dosazením hodnot konstantního zdroje pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti a uvažováním vertikálního směru větru je nejdříve ověřen algoritmus řešení na dvourozměrné oblasti. Porovnáním hodnot odečtených z *Obr. 5.1.1.1* a z *Obr. 5.1.2.2* je patrná shoda rozložení měrné vlhkosti podél svislé souřadnice. Porovnání hodnot odečtených z *Obr. 5.2.1.1* a z *Obr. 5.2.2.1* je vidět shoda rozložení měrné entalpie vlhkého vzduchu. Hodnoty teploty vzduchu odečtené z *Obr. 5.2.1.2* a z *Obr. 5.2.2.2* se také shodují.

Zdrojové členy jsou nejdříve řešeny pro vertikální směr větru. Dále je uvažován horizontální směr větru ve směru kladné osy x. Změna směru a případně i velikosti větru vede ke změně hodnot zdrojových členů. Rozložení měrné vlhkosti na řešené oblasti pro přepočtené hodnoty hustoty zdroje vodní páry je na *Obr. 5.1.2.3,* na kterém je vidět vliv změny směru větru. Měrná vlhkost je větrem unášena do pravé části oblasti deště. Maximální hodnota měrné vlhkosti se přepočtením zdrojového členu zvětšila o $0{,}0054 kg kg^{-1}$. To je dáno přepočtením zdrojů pro horizontální směr větru. Relativní rychlost vzduchu proti kapce je dána vektorovým součtem rychlosti kapky a rychlosti větru, která jsou na sebe kolmé. Při uvažování vertikálního směru větru je relativní rychlost dána rozdílem rychlosti větru a rychlosti kapky, protože působí proti sobě. V dalším výpočtu je zohledněna změna měrné vlhkosti s vodorovnou souřadnicí. Vypočtené hodnoty měrné vlhkosti jsou použity pro další přepočet zdrojového členu. Hodnoty zdrojového členu už nejsou stejné pro jednotlivé sloupce výpočetní oblasti a mění se změnou měrné vlhkosti. Rozložení měrné vlhkosti pro nekonstantní hodnoty zdrojového členu je na *Obr. 5.1.2.4.* Maximální hodnota měrné vlhkosti se proti předchozímu kroku řešení nezměnila, nejvyšší hodnoty měrné vlhkosti jsou opět u pravé horní části oblasti deště, což je dáno směrem větru, který vane z leva doprava.

Stejný postup, který je popsán v předchozím odstavci, je použit pro řešení transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu. Z vypočtených hodnot měrné entalpie se dopočítává teplota vlhkého vzduchu, který proudí oblastí deště. Algoritmus řešení na dvourozměrné oblasti je nejdříve otestován na řešení transportní rovnice s hodnotami konstantního zdroje a vertikální směr větru. Hodnoty měrné entalpie vlhkého vzduchu pro svislou souřadnici odečtené z *Obr. 5.2.1.1* a z *Obr. 5.2.2.1* se shodují, stejně jako hodnoty teploty vzduchu odečtené z *Obr. 5.2.1.2* a z *Obr. 5.2.2.2.* Lze tedy usoudit, že algoritmus pro řešení transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu na dvourozměrné oblasti

funguje. Dále se uvažuje horizontální směr větru a přepočítají se hodnoty zdrojového členu. Rozložení měrné entalpie a teploty vzduchu jsou na *Obr. 5.2.2.3* a *Obr. 5.2.2.4.* Změnou směru větru a přepočtení zdrojového členu maximální hodnota měrné entalpie vzrostla o $15 \cdot 10^3 Jkg^{-1}$ a maximální hodnota teploty vzduchu vzrostla o $3{,}3°C$. Nárůst hodnot sledovaných veličin je dán přepočtením zdrojů pro větší relativní rychlost kapky vůči proudícímu větru. Zdrojové členy jsou znovu přepočteny se zohledněním změny rozložení měrné vlhkosti z řešení transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry. Výsledná rozložení měrné entalpie a teploty vzduchu jsou na *Obr. 5.2.2.5* a *Obr. 5.2.2.6.* Odečtením maximálních hodnot měrné entalpie vlhkého vzduchu a jeho teploty je vidět, že se proti předchozímu kroku řešení nemění. Nejvyšší hodnoty měrné entalpie a teploty vzduchu jsou opět u pravé strany oblasti deště, což je dáno směrem větru, ale i hodnotami měrné vlhkosti, které také vstupují do výpočtu. Nejvyšší hodnoty měrné vlhkosti jsou u pravé strany oblasti deště. Hodnoty teploty vzduchu jsou přepočítávány z vyřešených hodnot měrné entalpie a hmotnostního zlomku vodní páry ve vzduchu, obě tyto hodnoty už jsou zatížené chybou metody numerického řešení, hodnoty teploty vzduchu tedy mohou být zatíženy větší chybou a rozložení teploty vzduchu dle *Obr. 5.2.2.6* může být zkreslené proti rozložení měrné entalpie dle *Obr. 5.2.2.5.*

Jak už bylo řečeno, numerické metody řešení rovnic nejsou přesné a vykazují chybu. Numerické řešení je tedy rozdílné od řešení přesného. Pro stanovení velikosti chyby řešení transportních rovnic na dvourozměrné oblasti, které je uvedeno v této práci, by bylo vhodné výpočet verifikovat pomocí experimentu. Z uvedeného řešení nevycházejí nereálné hodnoty sledovaných veličin.

7 ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zabývá modelováním proudění vlhkého vzduchu v oblasti deště mokré chladicí věže. V první kapitole je uveden popis různých typů chladicích věží, jejich výhody a nevýhody. Podrobněji je popsána protiproudá chladicí věž s přirozeným tahem, které je řešena ve zbytku práce. Dále je popsána teorie přenosu tepla a hmoty v chladicí věži, respektive v oblastech chladicí věže, které jsou důležité z hlediska přenosu tepla a hmoty. V této práci je řešeno proudění vlhkého vzduchu a přenos tepla hmoty v oblasti deště.

V kapitole 2 je popsána metoda konečných objemů. Tato metoda je použita k diskretizaci řešených transportních rovnic. Metoda konečných objemů je v mechanice tekutin často používaná metoda diskretizace kontinua a je na ni založena většina CFD softwarů, tato metoda je tedy pro řešený problém vhodně zvolena. V další kapitole jsou podrobně probrána numerická schémata, která jsou použita k aproximaci hodnot řešených veličin na čelech kontrolního objemu. V závěru třetí kapitoly je uvedena diskuze výběru vhodného schématu. V této diskuzi je uvedeno, že implementace do výpočetního prostředí je značně náročná z hlediska vyhodnocování funkce limiteru i implementace okrajových podmínek do řešení. Současná implementace TVD schématu v prostředí MATLAB nedovoluje řešit zcela obecně zadané úlohy. Pro rozšíření na řešení zcela obecných úloh je třeba volit principiálně jinou architekturu implementace. Bylo by vhodné rozšířit stávající algoritmus řešení tak, aby byl schopen řešit i obecně zadané úlohy. Pro současné řešení hodnot veličin na čelech kontrolního objemu je použito schéma typu upwind, které sice vnáší do řešení chybu v podobě numerické difuze, tato chyba je ale značně potlačena velmi malou hodnotou difuzního koeficientu vodní páry ve vzduchu a zjemněním výpočetní sítě. Pro velikost difuzního koeficientu v řádu $10^{-5} kgm^{-1}s^{-1}$ a volbu výpočetní sítě 100x100 uzlových bodů je maximální chyba řešení užitím upwind schématu proti přesnému řešení menší než 2%. Směr větru je pro další řešení volen ve směru kladné osy x nebo ve směru kladné osy y, tedy ve směrech rozdělení výpočetní oblasti. Chyba řešení u upwind schématu způsobená numerickou difuzí narůstá, pokud směr větru není shodný se směrem rozdělení výpočetní sítě. To je ukázáno na vzorovém příkladu v kapitole 3.1.2. Dalším vhodným rozšířením výpočetního programu by bylo zohlednění obecného směru větru. To by znamenalo počítat s různým směrem a velikostí větru pro každý uzel výpočetní oblasti. Při uvažování obecného směru větru by bylo vhodné použít pro aproximaci hodnot veličin na čelech kontrolního objemu TVD schématu, které potlačuje numerickou difuzi.

V kapitole 4 jsou řešeny zdrojové členy, respektive hustota zdroje vodní páry a hustota zdroje entalpie. Zdrojové členy jsou řešeny soustavou pěti obyčejných diferenciálních rovnic. Nejdříve jsou vyřešeny průběhy poloměru vodní kapky, její rychlosti a teploty a průběhy měrné vlhkosti a teploty vlhkého vzduchu se svislou souřadnicí. Ze znalosti rozložení hodnot těchto veličin se pak určí rozložení zdrojových členů podél výšky oblasti deště. Rozložení měrné vlhkosti a teploty vzduchu jsou použity pro ověření algoritmu řešení transportní rovnice na jednorozměrné oblasti. Ze shody průběhů měrné vlhkosti a teploty vzduchu, které jsou vypočteny různými metodami, lze usoudit, že je algoritmus správný a lze jej použít pro další výpočty.

V kapitole 5 je odvozena transportní rovnice pro hmotnostní zlomek vodní páry, z jejíž řešení se dopočítává měrná vlhkost vzduchu proudícího oblastí deště, a transportní rovnice pro měrnou entalpii vlhkého vzduchu. Z vyřešených hodnot měrné entalpie se dopočítávají hodnoty teploty vlhkého vzduchu. Řešení je několikrát přepočítáváno pro různé hodnoty zdrojových členů v závislosti na směru a velikosti rychlosti větru. Směr větru je uvažován nejdříve vertikální pro testování algoritmu, a poté horizontální. V reálné chladicí věži není situace tak jednoduchá a směr větru může být různý. Jak už bylo uvedeno vhodným rozšířením výpočetního algoritmu by bylo zohlednění obecného směru větru. Výsledky uvedené v kapitole 5 jsou okomentovány v kapitole 6. Výstupem této práce je rozložení měrné vlhkosti, měrné entalpie a teploty vlhkého vzduchu v oblasti deště mokré chladicí věže.

8 BIBLIOGRAFIE

1. MACHOVSKÁ, I. *Zahrnutí modelu výplně do CFD modelu chladicí věže*. Praha: 2012. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze, Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky.

2. NOŽIČKA, J. *Základy termomechaniky*. ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-04022-5.

3. [online]. Dostupné také z: http://www.me.psu.ac.th/Power_Plant_Engineering/P7d.htm

4. FISENKO, S. P. A. I. PETRUCHIK a A. D. SOLODUKHIN. Evaporative cooling of water in a natural draft cooling tower. *International Journal of Heat and Mass transfer*. Minsk: 2002, č. 45, s. 4683-94.

5. WILLIAMSON, N. J. *Heat and Mass transfer and optimisation of natural draft wet cooling tower*. Sydney: 2008. Disertační práce. The University of Sydney, The school of Aerospace, Mechanical and Mechatronic engineering.

6. [online]. Dostupné také z: http://tzb.fsv.cvut.cz/files/vyuka/125yatm/prednasky/125yatm-02.pdf

7. KLOPPERS, J. C. a D. G. KRÖGER. The Lewis factor and its influence on the performance prediction of wet-cooling towers. *International Journal of Thermal Sciences*. Secunda: 2005, č. 44, s. 879-84.

8. STANFORD, H. W. *HVAC Water Chillers and Cooling Towers: Fundamentals, Application and Operation*. Basel: Marcel Dekker, Inc. 2003. ISBN 0-8247-0992-6.

9. [online]. Dostupné také z: http://www.wetcooling.com/software.html

10. BRANDNER, M. a S. MÍKA. Stručná historie metody konečných objemů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Plzeň: 2014, č. 1, s. 44-54.

11. VERSTEEG, H. K. a W. MALALASEKERA. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: Finite Volume method*. Second edition. Harlow: Pearson, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.

12. HYHLÍK, T. Development of mathematical model of rain zone. In: *Engineering Mechanics 2014 (20th International Conference)*. Svratka: 2014.

13. KRÖGER, D. G. *Air-cooled heat exchangers and cooling towers: Thermal-flow performance evaluation and design ...*. Tulsa: PennWell Corporation, 2004. ISBN 0-87814-896-5.

14. KRÖGER, D. G. *Air-cooled heat exchangers and cooling towers: Thermal-flow performance evaluation and design ...*. Tulsa: PennWell Corporation, 2004. ISBN 1-59370-019-2.

15. CLIFT, R. J. R. GRACE a M. E. WEBER. *Bubbles, Drops and Particles*. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1978. 0-12-176950-X.

16. HYHLÍK, T. CFD Modelling of Natural Draft Wet-Cooling Tower Flow Including Rain Zone Model. In: *International Symposium on Industrial Chimneys and Cooling Towers*. Prague: 2014.

SEZNAM PŘÍLOH

Součástí příloh je CD s diplomovou prací ve formátu PDF a výpočetními programy, které byly napsány ve výpočetním prostředí MATLAB verze R2013a a použity pro výpočet zadaných problémů.

Ve složce *vypocetni program* jsou tři složky – *Upwind, Upwind se zdrojem_1D* a *Upwind se zdrojem_2D.* Komentář k jednotlivým programům je přiložen v textovém souboru *Read me.txt* ve zmíněných složkách.