

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**  
**FAKULTA STROJNÍ**

---

**Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**

**Odbor pružnosti a pevnosti**

**Návrh a identifikace zjednodušeného popisu silentbloku pro  
globální MKP modely**

**Design and identification of simplified engine mount for global FE  
models**

Diplomová práce

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika  
Vedoucí práce: doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: „Návrh a identifikace zjednodušeného popisu silentbloku pro globální MKP modely“ vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Miroslava Španiela, CSc. s použitím literatury uvedené na konci mé diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Praze 18. 06. 2015

Michal Mračko

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Miroslavu Španielovi, CSc. za cenné rady a připomínky k řešení dané problematiky a za čas mně věnovaný při konzultacích, Ing. Vladislavu Drobnému, Ph.D. za pomoc při práci a za vymyšlení tématu, dále Ing. Janu Zavřelovi, Ph.D. a Ing. Karlu Doubravovi, Ph.D. za možnost uskutečnění experimentů a v neposlední řadě Ing. Josefu Jurenkovi, Ph.D. za pomoc s programem Ansys.

## Anotační list

Jméno autora: **Michal MRAČKO**

Název DP: *Návrh a identifikace zjednodušeného popisu silentbloku pro globální MKP modely*

Anglický název: *Design and identification of simplified engine mount for global FE models*

Rok: 2015

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství

Obor studia: 3901T003 Aplikovaná mechanika

Ústav: *Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky*

Vedoucí DP: *doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.*

Konzultant: *Ing. Jan Zavřel, Ph.D.*

Bibliografické údaje: počet stran 66  
počet obrázků 44  
počet tabulek 10  
počet příloh 2

Klíčová slova: silentblok, lineární dynamická odezva, identifikace, MKP

Keywords: engine mount, linear dynamic response, identification, FEA

### Anotace:

Diplomová práce je zaměřena na popsání metody identifikace dynamických vlastností modelu silentbloku se soustředěnými parametry pomocí experimentálně získaných dat. Současně byla ověřena možnost nahradit experiment podrobným výpočtem metodou konečných prvků.

### Abstract:

The diploma thesis is focused on describing method of identification of dynamical properties of the discrete engine mount model based on experimentally obtained data. Substitution of experiment with fine finite element analysis has been discussed as well.

# OBSAH:

<b>A. ÚVOD.....</b>	<b>8</b>
<b>B. TEORETICKÁ ČÁST .....</b>	<b>9</b>
<b>1. Hyperelasticita.....</b>	<b>9</b>
1.1. Fenomenologické modely .....	10
1.1.1. Mooneyho-Rivlinův model .....	10
1.1.2. Ogdenův model .....	10
1.1.3. Yeohův model .....	11
1.2. Statistické modely .....	11
<b>2. Viskoelasticita.....</b>	<b>12</b>
2.1. Viskoelastické modely .....	13
2.1.1. Kelvinův model.....	13
2.1.2. Maxwellův model.....	13
2.1.3. Tuckettův model.....	14
2.2. Dynamické zatěžování viskoelastické látky.....	15
2.2.1. Komplexní modul.....	15
2.2.2. Hystereze.....	16
<b>3. Rozlišení časové a frekvenční domény .....</b>	<b>17</b>
3.1. Časová doména .....	17
3.2. Frekvenční doména .....	19
<b>C. PRAKTICKÁ ČÁST.....</b>	<b>20</b>
<b>4. Způsob identifikace parametrů .....</b>	<b>21</b>
4.1. Metoda nejmenších čtverců.....	21
4.2. Simplexová metoda .....	21
4.3. Kvadratický průměr .....	22
<b>5. Statická charakteristika silentbloku.....</b>	<b>23</b>
5.1. Experiment I.....	23
5.2. Statická charakteristika silentbloku v radiálním směru.....	24
5.3. MKP analýza modelu silentbloku .....	26
5.4. Náhradní model pro statickou analýzu.....	29
<b>6. Dynamické vlastnosti silentbloku .....</b>	<b>31</b>
6.1. Experiment II .....	31
6.2. Zpracování dat.....	33
6.3. Volba náhradního modelu se soustředěnými parametry .....	35
6.3.1. Kelvinův model.....	36

6.3.2.	Maxwellův model paralelně s pružinou .....	36
6.3.3.	Kelvinův model sériově s pružinou.....	37
6.4.	Identifikace soustředěných parametrů náhradních modelů .....	38
6.4.1.	Identifikace samostatných parametrů pro jednotlivá měření .....	39
6.4.2.	Identifikace jednotných parametrů pro všechna měření.....	41
6.4.3.	Porovnání výsledků.....	42
6.5.	Identifikace dynamických vlastností v radiálním směru .....	45
6.5.1.	Naladění materiálu pro harmonickou analýzu .....	46
6.5.2.	Identifikace parametrů náhradního modelu pro dynamiku v radiálním směru .....	49
6.6.	Náhradní model pro dynamickou analýzu .....	50
6.6.1.	Model s frekvenčně závislými parametry .....	50
6.6.2.	Model s konstantními parametry.....	52
6.7.	Dynamické vlastnosti silentbloku v závislosti na předpětí .....	54
6.7.1.	Zkušební analýza 3D modelu.....	57
6.7.2.	Náhradní model pro dynamickou analýzu se zahrnutím vlivu statického předpětí....	58
7.	<b>Modelový případ uložení motoru .....</b>	<b>59</b>
D.	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>62</b>
E.	<b>POUŽITÁ LITERATURA.....</b>	<b>63</b>
F.	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>64</b>

## A. ÚVOD

Silentblok je technické zařízení, které slouží k tlumení vibrací. Variant provedení je mnoho, ale v principu se vždy skládá z pevné schránky a z pružného členu vyrobeného z látky s vysokým vnitřním útlumem, například pryže nebo elastomeru. Silentblok nabízí široké uplatnění zejména v automobilovém průmyslu jako spojovací člen mezi rámem a motorem. V porovnání s tuhým spojením snižuje amplitudu vibrací, což má za následek snížení dynamického namáhání rámu i například snížení hluku při provozu.

V porovnání s v průmyslu nejpoužívanější ocelí, která má ve všech odvětvích průmyslu dlouhou historii a jejíž vnější vlastnosti jsou popsány velmi dobře, jsou pryže i elastomery, ve smyslu průmyslového využití, stále ještě mladé materiály. Velmi podrobně se těmto materiálům věnuje L. R. G. Treolar ve své knize [1], vydané roku 1949. Pryž i elastomery patří mezi tzv. hyperelastické materiály, při jejichž popisu si nevystačíme s lineární teorií pružnosti. Závislost napětí na deformaci není lineární jako například u zmíněné oceli. Hyperelastické materiály jsou schopny snášet obrovská protažení až v řádu stovek procent.

Schopnost efektivně řešit tyto materiály přišla až s nástupem konečněprvkových softwarů. Vznikly dvě skupiny materiálových modelů, z nichž jedna vychází ze statistického přístupu a řeší problém na úrovni molekulových řetězců uvnitř materiálu, druhá skupina vychází z deformační energie.

Cílem práce je identifikovat vlastnosti materiálu silentbloku, vytvořit materiálový model a ten posléze použít pro vytvoření zjednodušeného modelu popsaného soustředěnými parametry.

V první části práce se věnuji rozboru teoretického předpokladu, v druhé části potom samotnému řešení stanovených cílů. Tu lze ještě rozdělit na dva oddíly, z nichž v prvním jsem se zaměřil na popis statických vlastností materiálu, v druhém naopak na popis dynamických vlastností. Oběma oddílům předchází experiment, ve kterém jsem vždy změřil vlastnosti silentbloku v axiálním směru. Práce je koncipována tak, aby byla popsána metodika řešení této problematiky.

## B. TEORETICKÁ ČÁST

V teoretické části jsou probrána témata nezbytná pro pochopení problematiky, které se tato práce věnuje, a principů užitých v praktické části.

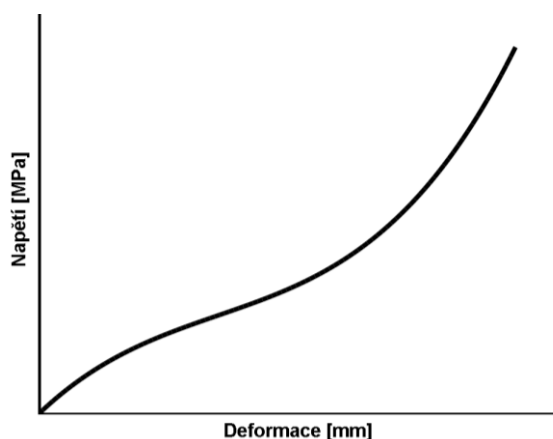
### 1. Hyperelasticita

Při popisu materiálů, jako jsou například polymery, nevystačíme s lineární teorií pružnosti a Hookovým zákonem. Pro hyperelastické materiály jsou typická velká přetvoření (až několik set procent) při působení nízkých napětí, nelineární závislost napětí na deformaci (Obr. 1) a značná závislost na teplotě. Materiály jsou navíc téměř nestlačitelné a při tvorbě hyperelastických modelů se často uvažuje dokonalá nestlačitelnost.

Obecně existují dva typy materiálových modelů – fenomenologický a fyzikální. Fenomenologický model nemusí být založený na žádné fyzikální podstatě. Základem pro vytvoření fenomenologického modelu je řada experimentů, které se snažíme aproximovat naladěním parametrů modelu. Výsledkem je potom model, který vykazuje vnější chování zkoumaného materiálu, a je popsán konstitutivními rovnicemi.

Přesným opakem je fyzikální model. Fyzikální model vychází z dokonalé znalosti probíhajících jevů, čímž se dostáváme minimálně na atomární úroveň řešení problematiky. Toho samozřejmě nejsme schopni. Každý materiálový model je tedy více či méně fenomenologický, liší se pouze hloubkou fyzikálního popisu.

Výše zmíněná teorie modelování se netýká pouze materiálů. Tyto přístupy lze zobecnit na modelování jakýchkoliv fyzikálních dějů.



Obr. 1. Obecná závislost napětí na deformaci u hyperelastických materiálů



## 1.1. Fenomenologické modely

Všechny fenomenologické modely jsou založeny na předpokladu, že lze jejich chování popsat pomocí funkce hustoty deformační energie, ze které lze získat závislost napětí na deformaci. Uvedeme zde ve zkratce některé příklady nejběžnějších modelů.

### 1.1.1. Mooneyho-Rivlinův model

Model Mooneyho-Rivlina [13] zavádí deformační energii pro stlačitelný materiál ve tvaru

$$W = \sum_{p,q=0}^N C_{pq} (\bar{I}_1 - 3)^p (\bar{I}_2 - 3)^q + \sum_{m=1}^M D_m (J - 1)^{2m} ,$$

kde  $C_{pq}$  a  $D_m$  jsou materiálové konstanty související s deviatorickým přetvořením, respektive s volumetrickým přetvořením.  $\bar{I}_1$  a  $\bar{I}_2$  jsou invarianty levého Cauchyho-Greenova tenzoru deformace  $\mathbf{B}$ ,  $J$  je Jakobián.

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T ,$$

kde  $\mathbf{F}$  je deformační gradient.

$$J = \det(\mathbf{F})$$

Pokud budeme uvažovat nestlačitelný materiál, zůstane ve vzorci pouze ta část související s deviatorickým přetvořením.

Tento model se používá jako 2, 3, 5, a 9 parametrický. Volba složitosti modelu závisí na tvaru křivky napětí-deformace.

### 1.1.2. Ogdenův model

Pro tento model [14] je zavedena deformační energie jako funkce hlavních protažení ve tvaru

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) ,$$

kde  $\mu_p$  a  $\alpha_p$  jsou materiálové konstanty a  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  jsou hlavní protažení.

Hlavními protaženími (anglicky Principal stretches) nazýváme vlastní čísla tenzorů  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ , které získáme polárním rozkladem deformačního gradientu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

přičemž  $\mathbf{U}$  je pravostranný tenzor protažení,  $\mathbf{V}$  je levostranný tenzor protažení a  $\mathbf{R}$  je tenzor rotace. Platí, že

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T,$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1.$$

Používají se modely 1., 2., a 3. řádu.

### 1.1.3. Yeohův model

V případě Yeohova modelu [15] je deformační energie funkcí pouze prvního invariantu  $\bar{I}_1$  levého Cauchyho-Greenova  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$W = \sum_{i=0}^n C_{i0}(\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^n C_{k1}(J - 1)^{2k}, \quad (1)$$

kde  $C_{i0}$  a  $C_{k1}$  jsou materiálové konstanty související s deviatorickým přetvořením, respektive s volumetrickým přetvořením.

Model se používá 1, 2 a 3 parametrický.

## 1.2. Statistické modely

Tyto modely využívají oproti výše zmiňovaným modelům zcela odlišné principy založené na statistické mechanice. Příkladem je model Arruda-Boyce [13], který pracuje s entropií polymerních řetězců.

Modely tohoto typu jsou zde zmíněny jen pro úplnost, nebudeme je dále rozebírat.

## 2. Viskoelastická

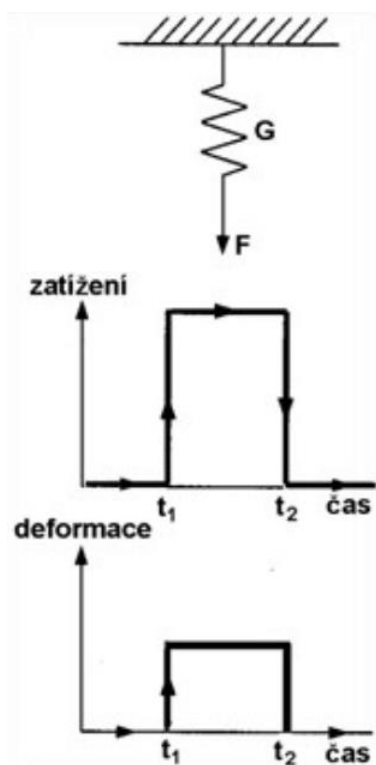
Materiály vykazující jak elastické, tak viskózní chování, se nazývají viskoelastické nebo reologické. Elastický člen představuje pružina (Obr. 2), definovaná pouze tuhostí. Napětí v pružině závisí na velikosti deformace  $\gamma$  a platí pro něj vztah:

$$\sigma = G\gamma. \quad (2)$$

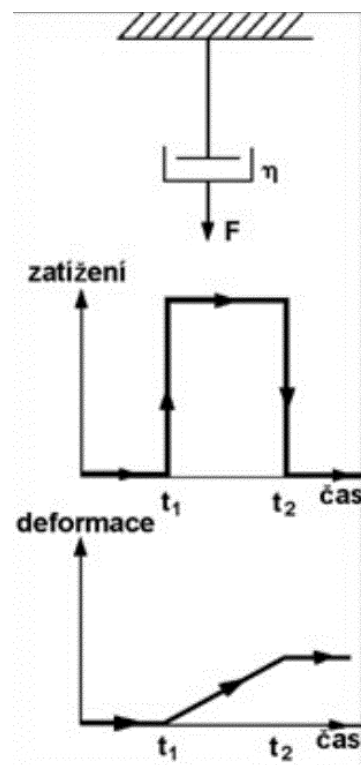
Viskózní člen představuje tlumič (Obr. 3), definovaný pouze tlumením. Napětí v tlumiči závisí na rychlosti deformace a je dáno vztahem:

$$\sigma = \eta\dot{\gamma}. \quad (3)$$

Kombinací těchto základních prvků dostáváme různé modely.



Obr. 2. Deformace pružiny [10]



Obr. 3. Deformace tlumiče [10]

## 2.1. Viskoelastické modely

Uvedeme zde příklady modelů se soustředěnými parametry vykazující viskoelastické chování [5].

### 2.1.1. Kelvinův model

Paralelní zapojení pružiny a tlumiče se nazývá Kelvinův model (Obr. 4a). Tento model se používá k modelování creepu. Deformace Kelvinova modelu je vratná, ale je bržděna viskózním členem. Je tedy závislá na rychlosti zatěžování. Diferenciální rovnici získáme z podmínek, že deformace obou členů je stejná a celkové napětí se rovná součtu napětí na jednotlivých členech.

$$\gamma_{celk} = \gamma_{pruž} = \gamma_{tlum}$$

$$\sigma_{celk} = \sigma_{pruž} + \sigma_{tlum}$$

Pokud do druhé rovnice dosadíme vztahy (2, 3), dostáváme diferenciální rovnici Kelvinova modelu ve tvaru:

$$\sigma = G\gamma + \eta\dot{\gamma}. \quad (4)$$

### 2.1.2. Maxwellův model

Maxwellův model (Obr. 4b) se používá k modelování relaxace. Vznikne sériovým zapojením pružiny a pístu. Napětí je v obou prvcích stejné a deformace jednotlivých členů aditivně přispívají celkové deformaci.

$$\gamma_{celk} = \gamma_{pruž} + \gamma_{tlum}$$

$$\sigma_{celk} = \sigma_{pruž} = \sigma_{tlum}$$

Diferenciální rovnici Maxwellova modelu dostáváme z časové derivace celkové deformace

$$\frac{\gamma_{celk}}{dt} = \frac{\gamma_{pruž}}{dt} + \frac{\gamma_{tlum}}{dt}$$

Zavedením veličiny  $\tau = \eta/G$ , která se nazývá relaxační doba, dostáváme rovnici ve tvaru:

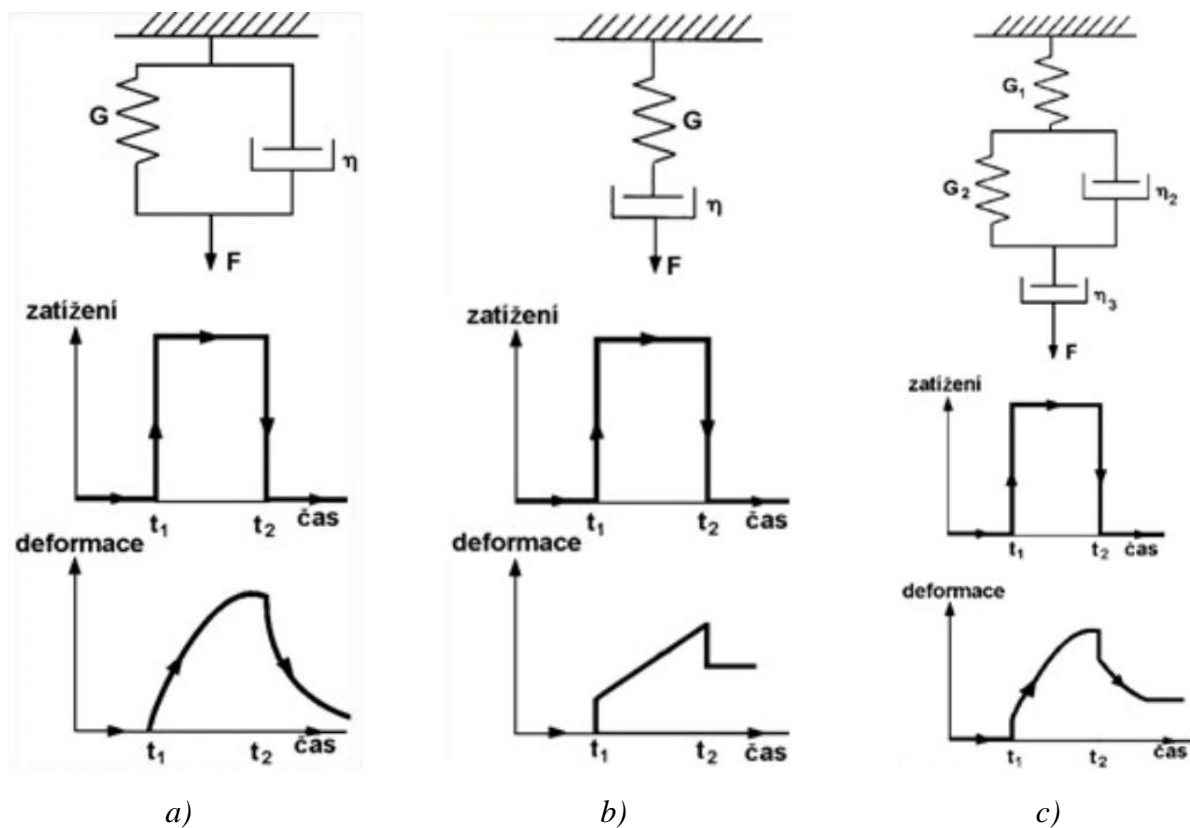
$$\frac{\gamma_{celk}}{dt} G = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau}. \quad (5)$$

### 2.1.3. Tuckettův model

Tuckettův model (Obr. 4c) znázorňuje deformaci lineárního amorfního polymeru. Je dán sériovým zapojením pružiny, pístu a Kelvinova modelu. Celková deformace je součtem deformací jednotlivých členů a je dána rovnicí

$$\gamma(t) = \sigma \left[ \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + \frac{1}{\eta_3} t \right]. \quad (6)$$

První člen v závorce představuje okamžitou elastickou deformaci, druhý člen zpožděnou elastickou deformaci a třetí člen trvalou deformaci závislou na délce zatěžování.



Obr. 4. Viskoelastické modely: a) Kelvinův, b) Maxwellův, c) Tuckettův [10]

## 2.2. Dynamické zatěžování viskoelastické látky

### 2.2.1. Komplexní modul

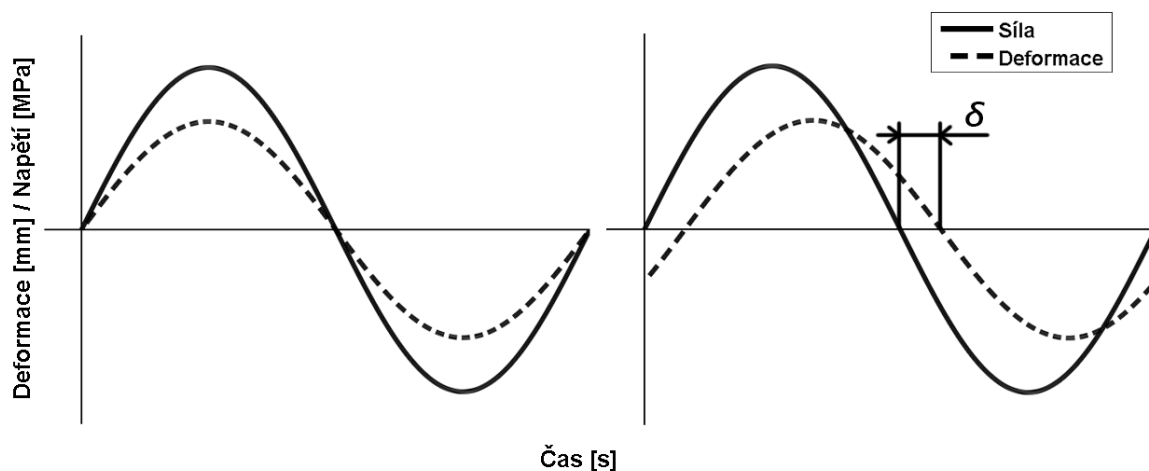
Vystavíme-li viskoelastickou látku dynamickému namáhání, pro jednoduchost budeme uvažovat sinový průběh, viskózní člen způsobí, že deformace a napětí budou vzájemně posunuty o fázový úhel  $\delta$  (Obr. 5). Pokud tedy zvolíme jako vstupní veličinu deformaci

$$\gamma(t) = \gamma_0 \sin \omega t,$$

dostaneme na výstupu napětí předcházející se o úhel  $\delta$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta).$$

Jinak řečeno deformace se za napětím zpožďuje. Látka vykazuje stále stejné chování a není důležité, kterou veličinu bereme jako prvotní [5].



Obr. 5. Výsledný průběh deformace a napětí při zatěžování ideální elastické látky (vlevo) a viskoelastické látky (vpravo)

Uvažujme nyní Kelvinův model, který budeme zatěžovat sinusově proměnnou deformací s amplitudou  $\gamma_0$ . Do diferenciální rovnice (3) dosadíme

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t; \quad \text{po derivaci} \quad \dot{\gamma} = \gamma_0 \omega \cos \omega t$$

a dostaneme tak

$$\sigma(t) = G\gamma_0 \sin \omega t + \eta\gamma_0\omega \cos \omega t$$

Zavedeme označení pro amplitudy jednotlivých složek napětí  $\sigma' = G\gamma_0$ , resp.  $\sigma'' = \eta\gamma_0\omega$ , čímž získáme rovnici

$$\sigma(t) = \sigma' \sin \omega t + \sigma'' \cos \omega t. \quad (7)$$

Rovnici (7) vydělíme celkovou deformací a vyjádříme v komplexní rovině

$$G^* = G' + iG''. \quad (8)$$

Veličina  $G^*$  se nazývá *komplexní modul pružnosti ve smyku*,  $G'$  je *soufázový modul* a  $G''$  je *ztrátový modul*. Soufázový modul odpovídá čistě elastické, tudíž vratné deformaci, ztrátový modul pak odpovídá disipované energii. Veličina  $\tan \delta$  se nazývá *ztrátový faktor*.

Platí následující vztahy:

$$G' = \frac{\sigma'}{\gamma_0} \sin \omega t \qquad G'' = \frac{\sigma''}{\gamma_0} \cos \omega t$$

$$G^* = \sqrt{G'^2 + G''^2} \qquad \tan \delta = \frac{G''}{G'}$$

Přestože byly tyto veličiny odvozeny pro Kelvinův model, výše uvedené vztahy platí pro jakoukoliv viskoelastickou látku, kterou lze popsat kombinací lineárních pružin a tlumičů. Analogicky k rovnici (8) je možné definovat i komplexní modul pružnosti v tahu:

$$E^* = E' + iE''.$$

Tyto dynamické veličiny ( $E^*$ ,  $E'$ ,  $E''$ ,  $\delta$ ) jsou obecně funkcí frekvence a teploty.

Přestože jsme s komplexním modulem dále nepracovali, považovali jsme za důležité jej v teoretickém základu neopomenout. Jde o běžně zkoumanou vlastnost dynamicky namáhaných viskoelastických látek.

### 2.2.2. Hystereze

Vzájemné posunutí průběhu napětí a průběhu deformace o fázový úhel  $\delta$  způsobí, že vynesení závislosti napětí na deformaci získáme uzavřenou křivku, která má při harmonickém ustáleném kmitání tvar elipsy (Obr. 6). Nazýváme ji *hysterezní smyčka*. Napětí v materiálu proto nezávisí pouze na okamžité hodnotě deformace jako u ideální elastické látky, ale také na předchozím stavu. Obsah plochy hysterezní smyčky je roven tlumičem disipované energii

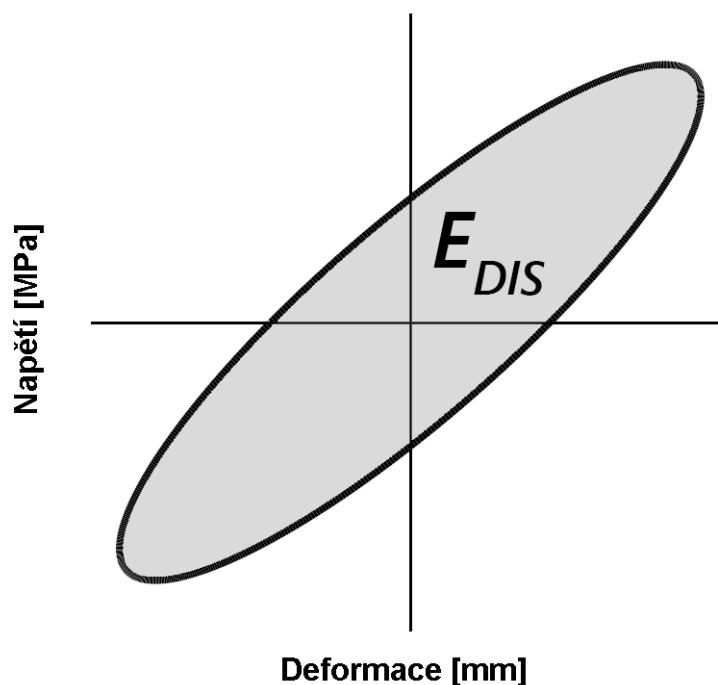
během jednoho cyklu (jedné periody). Disipovaná energie, označená jako  $E_{DIS}$ , se spočítá podle vzorce<sup>1</sup>:

$$E_{DIS} = \pi b \omega x_A^2, \quad (9)$$

kde  $b$  je konstanta tlumiče,  $\omega$  budící frekvence a  $x_A$  je amplituda vynucených kmitů.

Tato rovnice platí pouze pro ustálené harmonické kmity. Vztah pro výpočet energie disipované tlumičem při obecně stochastickém buzení, ze kterého vychází i (9), má tvar:

$$E_{DIS} = \oint b \dot{x}^2 dt.$$



Obr. 6. Hysterezní smyčka

### 3. Rozlišení časové a frekvenční domény

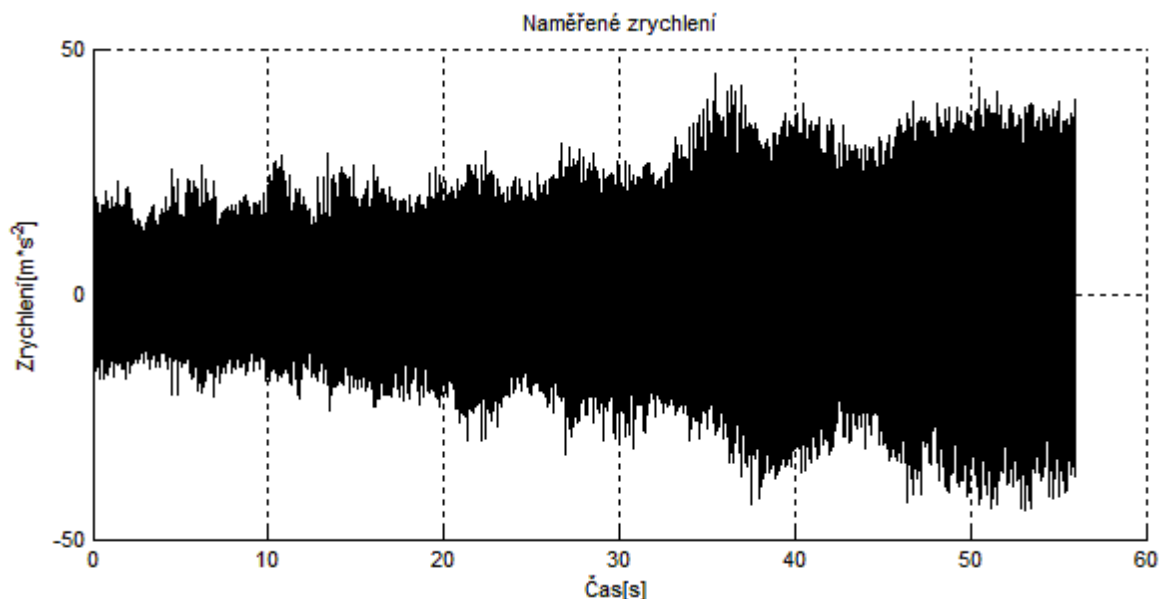
#### 3.1. Časová doména

Signál v časové doméně získáme například na výstupu z akcelerometru. Přístroj nám zaznamenává hodnotu okamžitého zrychlení v jednotlivých časových krocích. Výsledkem je

<sup>1</sup> Viz [8] – str. 62



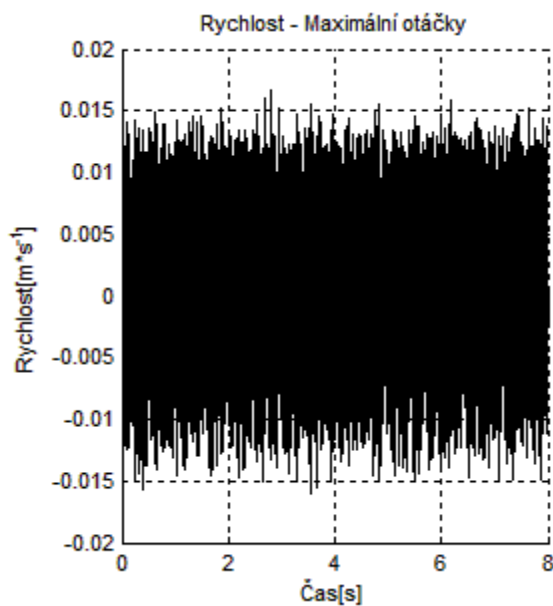
tedy závislost zrychlení na čase. Na obrázku (Obr. 7) jsou vzorová data z měření spalovacího motoru. Měření začíná při volnoběhu, postupně se zvyšují otáčky a přibližně v čase 48 sekund se dosáhne maximálních otáček cca 2800 ot/min.



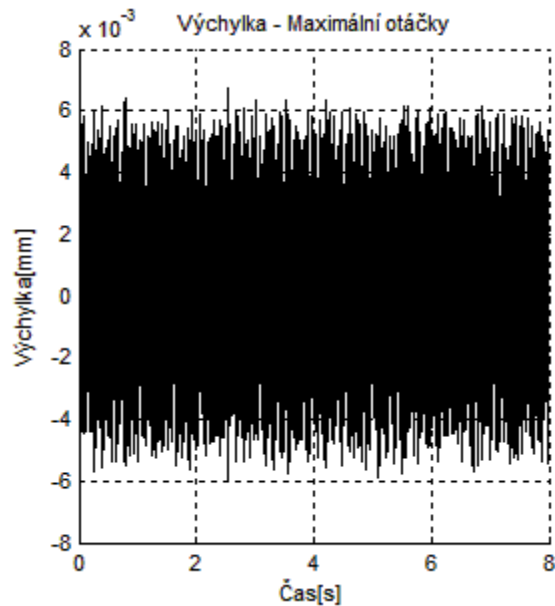
Obr. 7. Výstup z akcelerometru

Nás zajímají pouze maximální otáčky, při kterých je zrychlení a tudíž i zatížení konstrukce největší. Dále tedy budeme pracovat jen s daty v rozmezí 48-56 sekund.

Z naměřeného zrychlení lze integrací získat závislost okamžité rychlosti na čase (Obr. 8) a následně další integrací závislost okamžité výchylky na čase (Obr. 9).



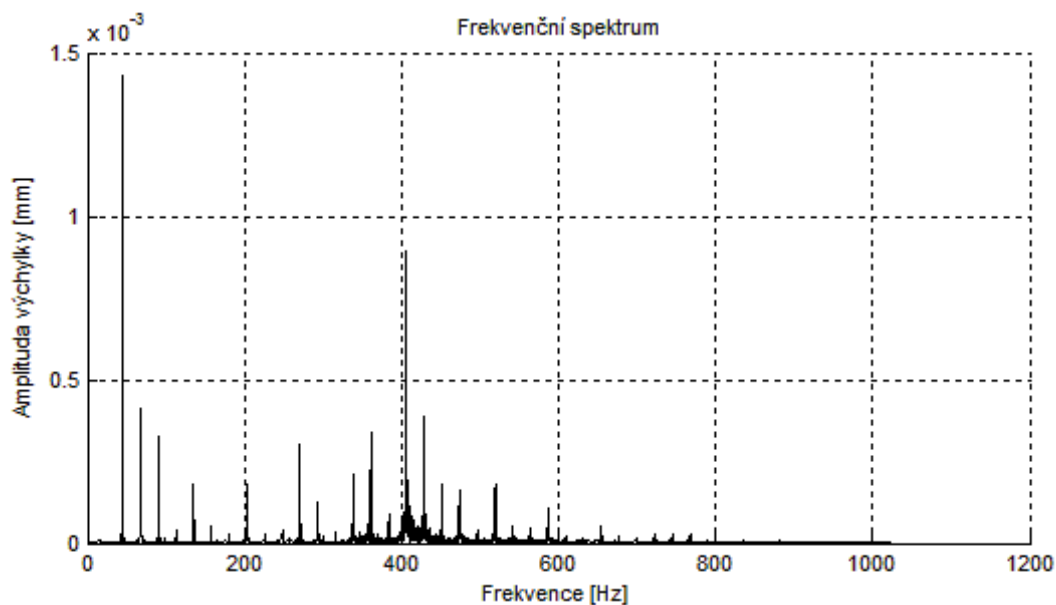
Obr. 8. Závislost rychlosti na čase



Obr. 9. Závislost výchylky na čase

## 3.2. Frekvenční doména

Abychom získali signál ve frekvenční doméně, je nutné provést frekvenční analýzu. K tomu nám jako vhodný nástroj slouží Fourierova transformace. Díky ní jsme schopni odhalit jednotlivé frekvence, které jsou obsažené v daném signálu (Obr. 10).

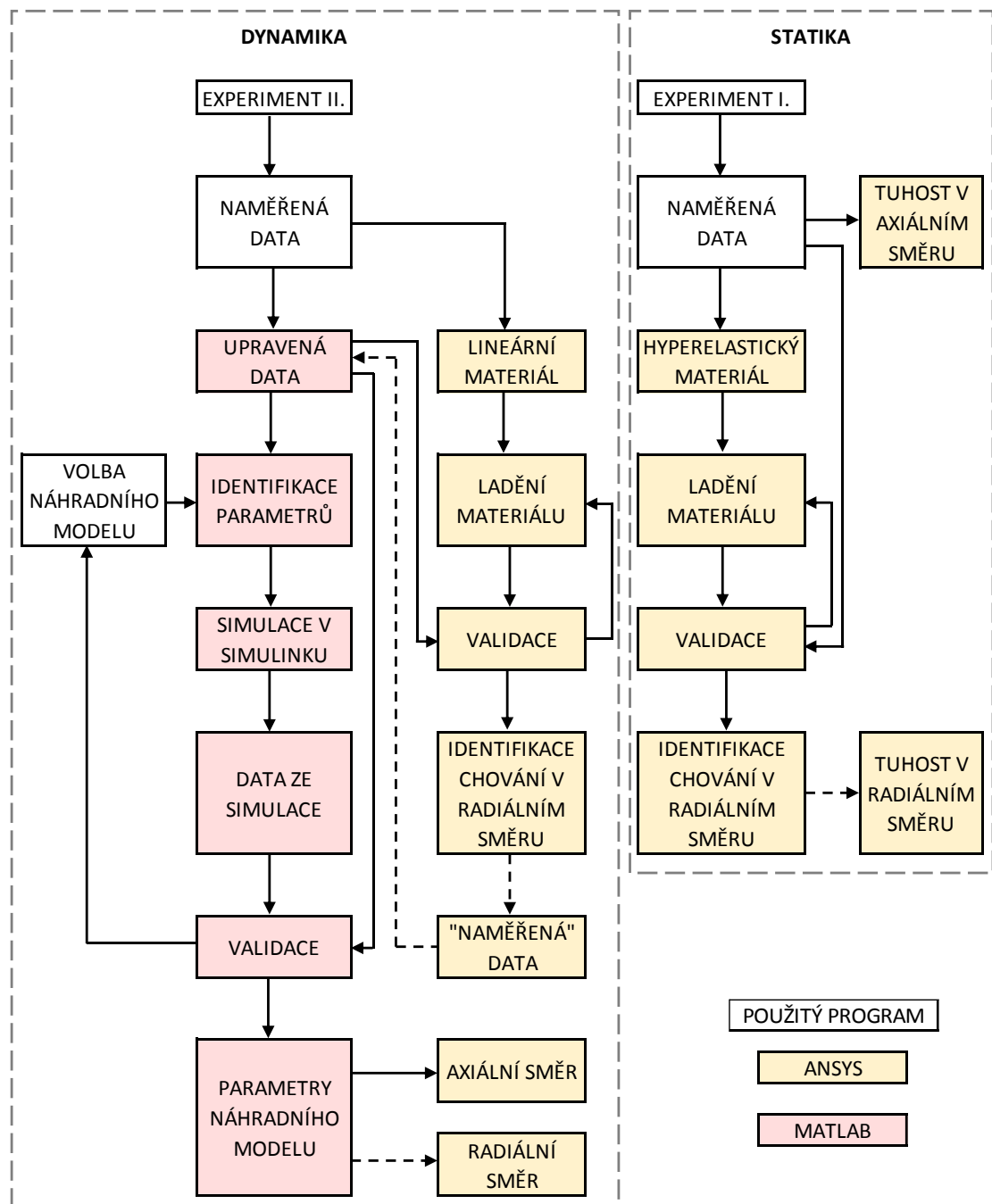


Obr. 10. Frekvenční spektrum signálu

„Při nízkých frekvencích se látka chová jako elastická a dynamicky měkká, při velmi vysokých frekvencích také jako elastická, ale dynamicky tuhá. Přechod mezi oběma elastickými stavy látky se uskutečňuje v jisté frekvenční oblasti, které se říká přechodová frekvenční oblast“ [5]. Tato oblast je pro nás zajímavá, neboť zde při cyklickém zatěžování silentbloku dochází k nejvyššímu útlumu.

## C. PRAKTICKÁ ČÁST

V praktické části je popsán způsob identifikace parametrů zvoleného silentbloku a jejich implementace do náhradního modelu v programu Ansys. Celý postup je schematicky znázorněn na obrázku (Obr. 11). Jednotlivé kroky jsou probrány zvlášť.



Obr. 11. Schéma řešení úlohy

## 4. Způsob identifikace parametrů

Jak statické, tak dynamické parametry silentbloku byly z naměřených dat identifikovány metodou nejmenších čtverců. To vedlo na minimalizaci cílové funkce pomocí optimalizační metody, v našem případě metody simplexové. Ta je implementována v programu Matlab a skrývá se mimo jiné pod příkazem *fminsearch*. Funkce *fminsearch* hledá minimum cílové funkce pro  $n$  parametrů. Detailní popis použití metody v kapitole 6.4.

### 4.1. Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je statistická metoda, která aproximuje řešení přeuročených soustav rovnic. To znamená, že rovnic popisujících například chování systému je více než hledaných parametrů. Při každém měření se totiž nutně dopouštíme chyb náhodného charakteru [4]. Kdybychom pro získání dat z experimentu použili stejný počet rovnic, jako je počet neznámých, výsledek by byl zatížen větší chybou, než když použijeme nadbytečný počet rovnic.

#### Princip metody:

Experimentálně získaný průběh nějaké veličiny  $y$  jako funkci známého parametru  $i$  označíme  $y(i)$ . Snahou je aproximovat naměřený průběh předem zvolenou funkcí  $\tilde{y} = \tilde{y}(i, \vec{\alpha})$ , kde  $\vec{\alpha}$  je sada hledaných parametrů. Chyba v  $i$ -tém kroku, kterou označíme  $\varepsilon_i$ , je funkcí  $\vec{\alpha}$ ,

$$\varepsilon_i(\vec{\alpha}) = y(i) - \tilde{y}(i, \vec{\alpha}).$$

Funkce  $E(\vec{\alpha})$  představuje součet všech kvadrátů chyb,

$$E(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^I [\varepsilon_i(\vec{\alpha})]^2.$$

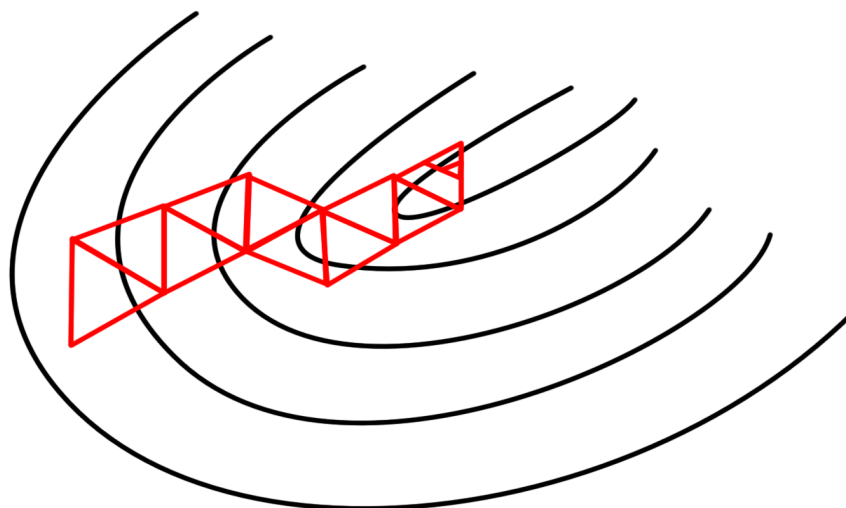
Hledané parametry  $\vec{\alpha}$  získáme minimalizací této funkce, tedy nalezením extrému. To obecně vede na užití optimalizačních metod, kterých je celá řada.

### 4.2. Simplexová metoda

Optimalizační metody se dělí na dvě hlavní skupiny – lokální a globální – podle toho, zda hledají lokální nebo globální extrém funkce. Mezi globální metody patří například genetické

algoritmy, do skupiny lokálních například právě metoda simplexová. Simplexová metoda je jednou z tzv. negradientních metod, neboť algoritmus vyhodnocuje přímo funkční hodnoty v určitých bodech, aniž by v nich počítal derivace.

V roce 1947 ji vymyslel americký matematik George Dantzig a v roce 1965 ji upravili a přednesli John Nelder a Roger Mead. Princip metody spočívá v tom, že se v  $n$  rozměrném prostoru, kde  $n$  je počet parametrů, generuje polyedr o  $n+1$  vrcholech, který se v korespondenci s určitými pravidly přesouvá prostorem a konverguje k lokálnímu extrému cílové funkce. Příkladem je dvourozměrný prostor pro funkci dvou proměnných, kdy je simplexem trojúhelník. Pro ilustraci viz obrázek níže (Obr. 12).



Obr. 12. Grafické znázornění simplexové metody

### 4.3. Kvadratický průměr

Tento pojem se netýká identifikace parametrů, ale naopak porovnávání výsledných naměřených a vypočtených průběhů různých veličin. Kvadratický průměr je statistická veličina, která vychází vždy kladná. Běžně se používá zkratka RMS<sup>2</sup>. Vzorec pro výpočet kvadratického průměru nějaké funkce  $f(t)$ , kde  $t$  je parametr, je:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt.} \quad (10)$$

<sup>2</sup> RMS – z anglického Root Mean Square; doslovný český překlad je „odmocnina z průměru čtverců“

Kvadratický průměr se používá například pro výpočet efektivní hodnoty střídavého napětí. Fyzikálně lze efektivní hodnotu interpretovat jako signál o konstantní hodnotě  $f_{RMS}$ , který má stejnou energii jako původní signál  $f(t)$ . Geometricky vyjádřeno – obsahy ploch pod křivkami  $f_{RMS}$  a  $f(t)$  jsou pro stejně dlouhý úsek  $t_2 - t_1$  stejné.

## 5. Statická charakteristika silentbloku

### 5.1. Experiment I

Měření bylo realizováno na univerzálním trhacím stroji pouze v axiálním směru. Výstupem z experimentu jsou čtyři naměřené statické charakteristiky (Obr. 13) pro dva vzorky, čili každý vzorek byl zatížen dvakrát. Seznam měřicí techniky v Příloze A.

Je patrné, že tuhost silentbloku je nelineární a závisí na deformaci. Naměřené charakteristiky byly proto proloženy polynomem 3. stupně, jehož konstanty vyšly:

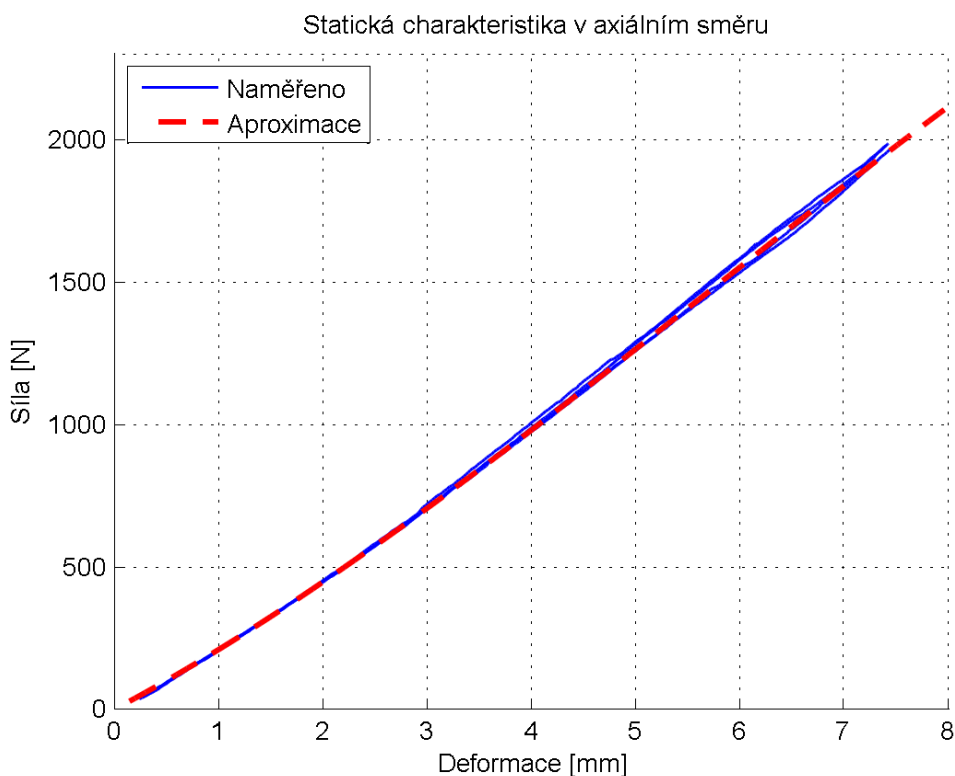
$$a_1 = 194,22$$

$$a_2 = 16,62$$

$$a_3 = -0,98$$

Výsledná rovnice pro výpočet reakční síly v závislosti na deformaci bude:

$$F_{ax} = 194,22 u_{ax} + 16,62 u_{ax}^2 - 0,98 u_{ax}^3$$



Obr. 13. Výstup z experimentu I

## 5.2. Statická charakteristika silentbloku v radiálním směru

Cílem této fáze bylo identifikovat statickou charakteristiku silentbloku v radiálním směru na základně naměřené charakteristiky ve směru axiálním. K tomuto účelu byl v programu Ansys vytvořen zjednodušený model. Pružnému členu byl přiřazen hyperelastický materiál, konkrétně Yeohův tříparametrický model, neboť pro tento model výrobce poskytl hyperelastické konstanty. Materiál byl považován za dokonale nestlačitelný. Samotná analýza bude probána v následující kapitole.

### Hyperelastické konstanty od výrobce:

$$C_{10} = 379\,349 \text{ Pa} \qquad C_{20} = 7\,433 \text{ Pa} \qquad C_{30} = 731 \text{ Pa}$$

Vztah (1) tak získává tvar:

$$W = 379\,349(\bar{I}_1 - 3)^1 + 7\,433(\bar{I}_1 - 3)^2 + 731(\bar{I}_1 - 3)^3 \quad (11)$$

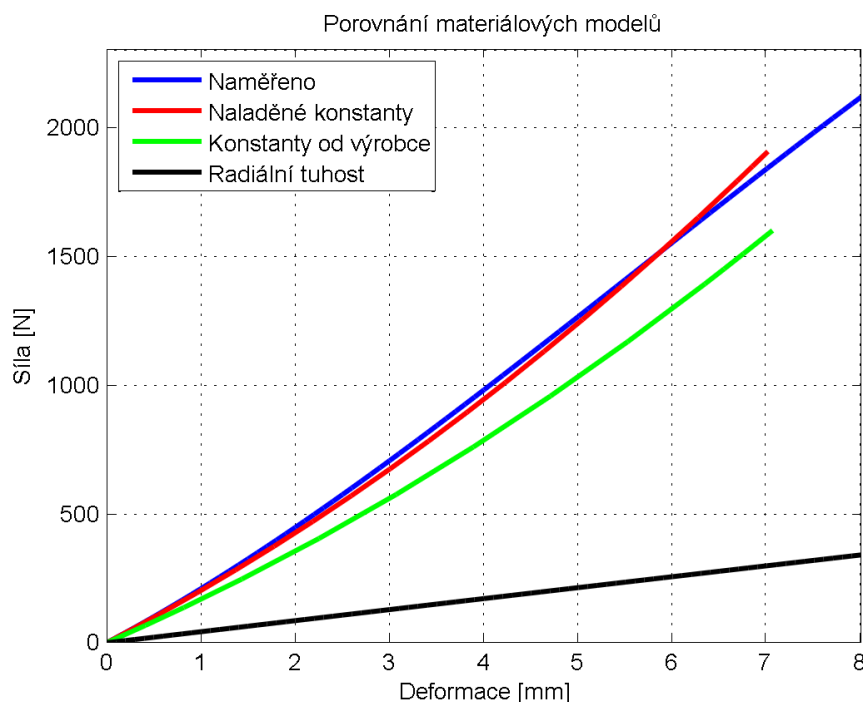
Statická charakteristika výpočetního modelu v axiálním směru, při použití hyperelastických konstant dodaných výrobcem, se však neshodovala s naměřenou závislostí. Bylo proto nutné naladit materiálový model tak, aby se co nejvíce přiblížil reálnému chování silentbloku.

Reálnému chování v axiálním směru se s dostatečnou přesností přibližuje materiál s hyperelastickými konstantami:

$$C_{10} = 460\,000 \text{ Pa} \qquad C_{20} = 7\,500 \text{ Pa} \qquad C_{30} = 800 \text{ Pa},$$

čímž se vztah (11) změní na:

$$W = 460\,000(\bar{I}_1 - 3)^1 + 7\,500(\bar{I}_1 - 3)^2 + 800(\bar{I}_1 - 3)^3.$$



Obr. 14. Porovnání materiálových modelů

S takto naladěným materiálem už bylo možné přistoupit k samotné identifikaci tuhosti v radiálním směru. Výstupní závislost síla-deformace z analýzy považujeme za vstupní (naměřenou) a opět proložíme polynomem třetího stupně. Rovnice má tvar:

$$F_{rad} = 43,07 u_{rad} - 0,055 u_{rad}^2 - 0,0009 u_{rad}^3$$

Radiální tuhost vychází přibližně šestkrát nižší než axiální. Pro porovnání je již závislost síly na deformaci v radiálním směru zakreslena ve výše uvedeném grafu (Obr. 14).

Stejným způsobem by bylo možné identifikovat ohybovou i torzní tuhost silentbloku, kterými se však v této fázi, vzhledem k předpokládanému zatěžování, zabývat nebudeme.

*Poznámka:*

*Se zatěžováním dokonale nestlačitelných materiálů se pojí určitá rizika, kterým je třeba předejít. Těmi jsou především tzv. uzamykání elementů a „hourglass effect“. Tyto parazitní jevy zapříčiněné nedokonalostí výpočetního modelu způsobí, že zdánlivá tuhost mezi elementy je vyšší než skutečná a model tak dává nerelevantní výsledky. Existují různé možnosti obrany, jednou z nich je v Ansysu implementovaná metoda „mixed u-p formulation“<sup>3</sup>, která řeší změnu objemu elementů vyvolanou hydrostatickým tlakem jako další stupně volnosti.*

<sup>3</sup> u – displacement (posuv); p – pressure (tlak)



### 5.3. MKP analýza modelu silentbloku

#### Model:

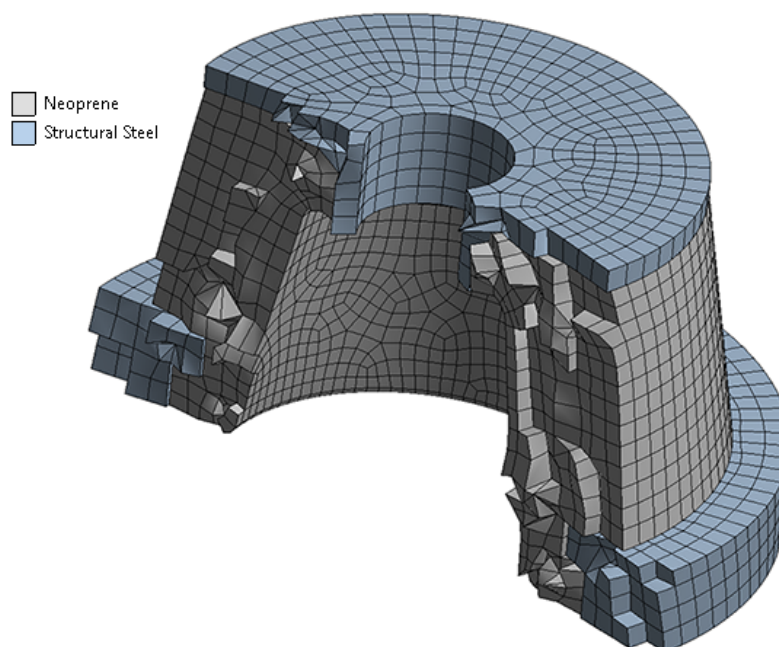
- Model je složen ze dvou ocelových prvků, které jsou od sebe odděleny pružným členem

#### Sít':

- Velikost elementů: Ocelové prvky: 2 mm  
Pružný člen: 1,8 mm
- Typ elementů: SOLID186 (kvadratické elementy s 20 uzly)
- V okolí malých radiusů síť zjemněna na velikost elementu 1 mm
- Shape Checking: Aggressive Mechanical

*(Nastaví tvrdší podmínku pro Jakobián elementu. Při tvorbě sítě se generují elementy „vyšší kvality“ než při ponechání defaultní možnosti „Standard Mechanical“. Doporučuje se pro modely, u kterých předpokládáme velké deformace.)*

- Celkový počet uzlů: 65 620
- Celkový počet elementů: 17 293

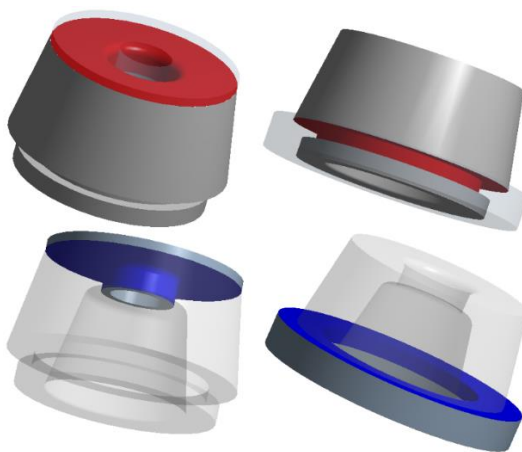


Obr. 15. Řez vysítovaným modelem

## Kontakty:

- Type: Bonded
- Behavior: Asymmetric
- Formulation: MPC<sup>4</sup>

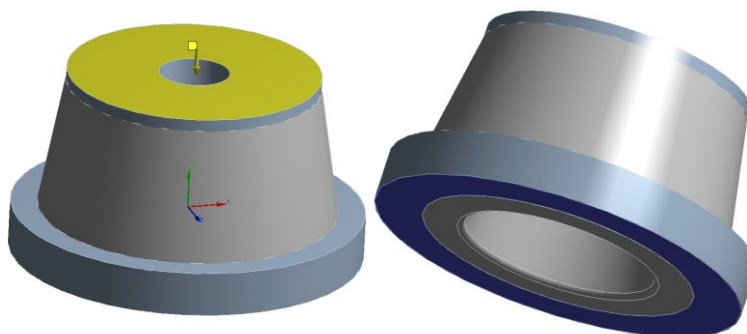
*(Takto definovaný kontakt sváže příslušné elementy kinematickou vazbou. Nejde tedy o kontakt v pravém slova smyslu. Kontaktní tlak mezi plochami je nulový.)*



Obr. 16. Zobrazení kontaktů (červeně – contact, modře – target)

## Okrajové podmínky a zatížení:

- Ukotvení v prostoru: Fixed support (modře)
- Zatížení posuvem: Displacement (žlutě)



Obr. 17. Okrajové podmínky a zatížení

<sup>4</sup> Z anglického MultiPoint Constraint

## Nastavení úlohy:

- Large deflections: On

*(Implikuje použití tenzoru konečných deformací)*

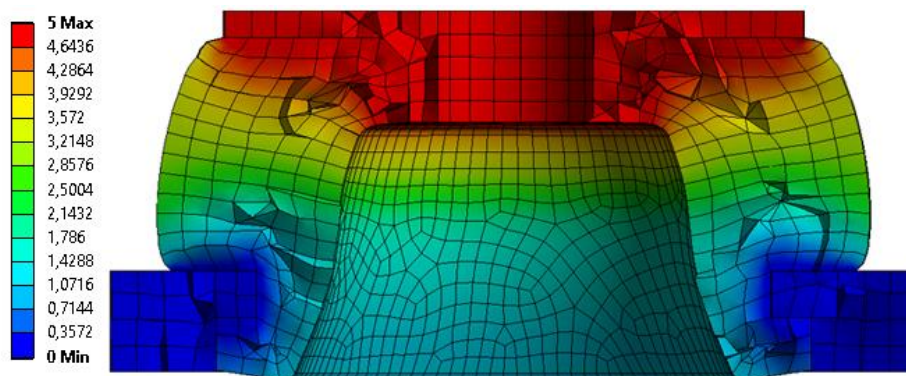
- Weak Springs: Off

*(Zlepšuje konvergenci řešení kontaktů. Pro naše kontakty nemá žádný přínos.)*

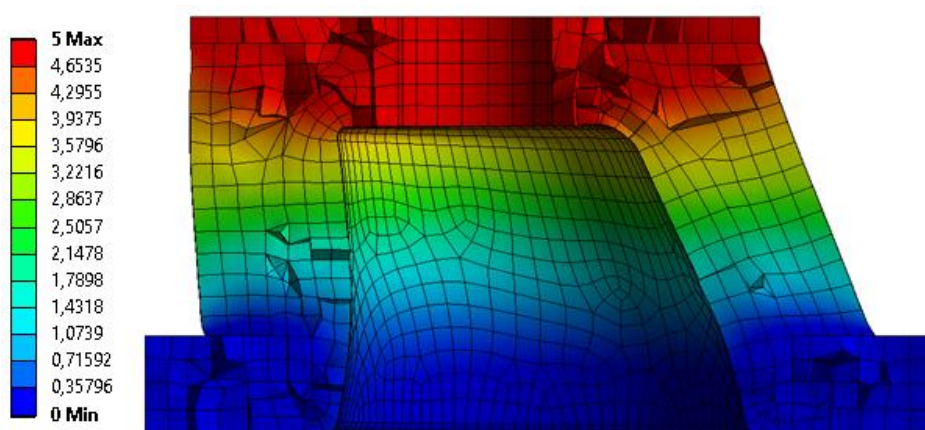
- Initial / Minimum / Maximum Substeps: 20 / 10 / 40

*(Vzhledem k tomu, že nás zajímá celý průběh deformace při stlačování, je výchozí počet mezikroků nastaven na 20. Zvýšením rozsahu je algoritmu ponechána určitá volnost pro volbu inkrementů k dosažení konvergence.)*

- Výstupem je reakční síla v okrajové podmínce „fixed support“ jako odezva na stlačení



Obr. 18. Řez modelu zatíženého v axiálním směru – deformace [mm]



Obr. 19. Řez modelu zatíženého v radiálním směru – deformace [mm]

## 5.4. Náhradní model pro statickou analýzu

Pro statické výpočty bude, za účelem úspory výpočetního času, objemový model nahrazen nelineární pružinou. Přesněji řečeno kombinací tří pružin ve směrech os referenčního souřadného systému. Nelineární pružinu v Ansysu představuje prvek *COMBIN39*, kterému se předepíše pomocí až 20 bodů závislost síly na deformaci. Například zápis pro přiřazení nelineární pružiny ve směru osy  $x$  (radiální směr) vypadá takto<sup>5</sup>:

```
ET, _sid, COMBIN39, , , 1

r, _sid, 0.0, 0.0, 0.4, 17.0, 0.8, 34.0
rmore, 1.2, 52.0, 1.6, 69.0, 2.0, 86.0
rmore, 2.4, 103.0, 2.8, 120.0, 3.2, 137.0
rmore, 3.6, 154.0, 4.0, 171.0, 4.4, 188.0
rmore, 4.8, 205.0, 5.2, 222.0, 5.6, 239.0
rmore, 6.0, 256.0, 6.4, 273.0, 6.8, 290.0
rmore, 7.2, 307.0, 7.6, 324.0
```

Jen pro názornost jsou barevně vyznačena dvě čísla, která představují souřadnice jednoho bodu na křivce síla-deformace (**Deformace pružiny [mm]**, **Příslušná reakční síla [N]**).

### Vysvětlivky:

**ET** ...definuje typ elementu

**\_sid** ...parametr, pod kterým v daném příkazu vystupuje pružina

**COMBIN39** ...typ elementu, který přiřazujeme

**, , , 1** ...tzv. KEYOPTIONS – definují vlastnosti elementu (odděleny čárkami, prázdné místo odpovídá 0)

**KEYOPT(3)** – určuje směr, ve kterém jsou parametry pružiny definovány

KEYOPT(3)=1...směr do osy  $x$     KEYOPT(3)=2... $y$     KEYOPT(3)=3... $z$

**r** ...přiřazení reálné konstanty

**rmore** ...způsob zápisu dalších reálných konstant – na každý řádek lze napsat pouze 6 konstant

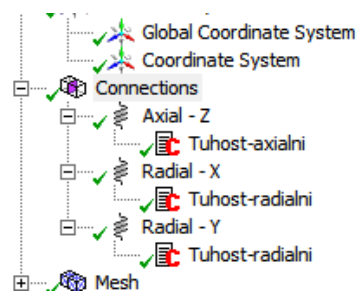
<sup>5</sup> K tomu slouží v prostřední Ansys Workbench funkce „Insert Commands“.

### Tvorba náhradního modelu:

- Vytvoření referenčního souřadného systému tak, aby byla osa  $z$  totožná s axiálním směrem silentbloku (Obr. 20)
- Vytvoření tří pružin
- Přiřazení příslušných „*Commandů*“ jednotlivým pružinám (Obr. 21)



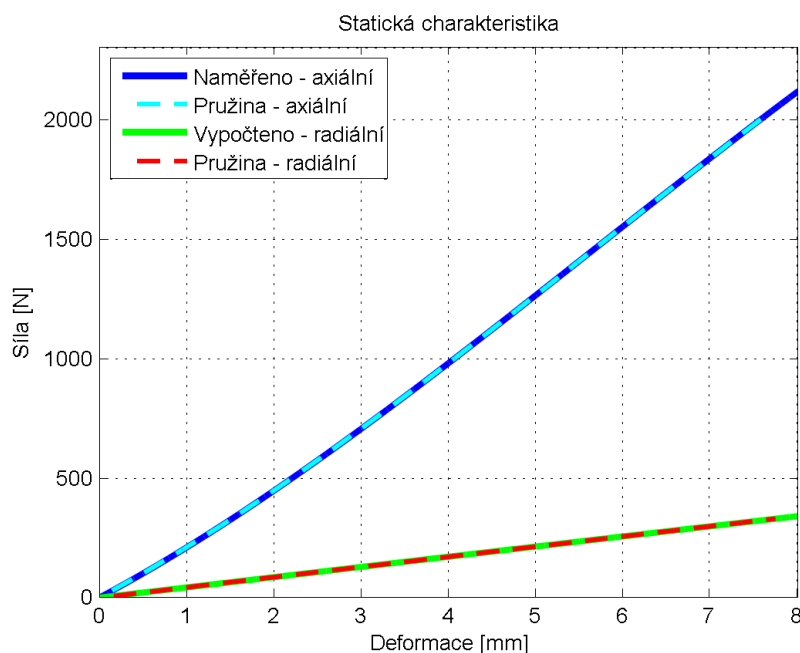
Obr. 20. Referenční souřadný systém



Obr. 21. Pružiny s definovanými vlastnostmi

Abychom minimalizovali odchytku náhradního modelu od reálných vlastností silentbloku, bereme pro axiální směr v úvahu naměřenou závislost, nikoliv vypočtenou. Pro ostatní směry se musíme spokojit s přibližným řešením získaným ze statického výpočtu.

Křivky závislosti síly na deformaci jsou pro oba směry relativně ploché, 20 bodů je tedy pro jejich popis více než dostatečné (Obr. 22). Mezi nedefinovanými body se pro zjištění aktuální tuhosti užívá lineární interpolace.

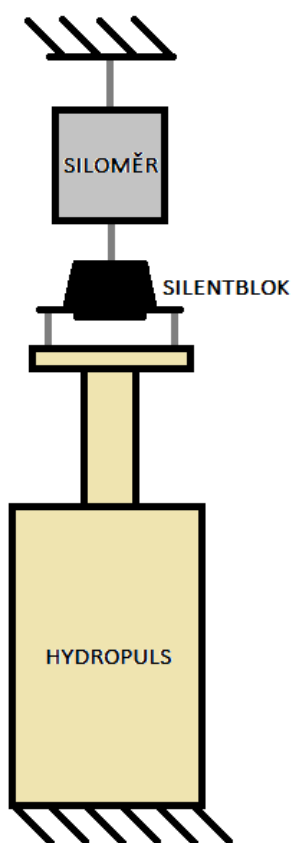


Obr. 22. Ověření náhradního modelu

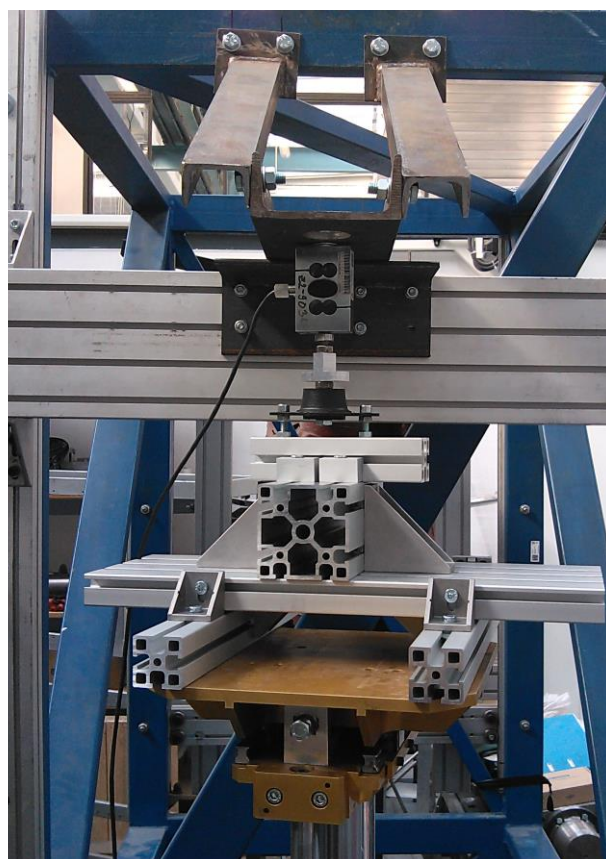
## 6. Dynamické vlastnosti silentbloku

### 6.1. Experiment II

Dynamické vlastnosti silentbloku se měřily na hydropulsu, který při zvolené budící frekvenci vynutil požadovanou deformaci pružné části. Šlo tedy o tzv. tvrdé zatěžování. Silová odezva byla zaznamenávána siloměrem. Schéma měření (Obr. 23) a fotografie z experimentu (Obr. 24) viz níže. Seznam měřící techniky v Příloze A. Pouze zde uvedeme, že výstupní signál byl zaznamenáván se vzorkovací periodou  $T_s=0,001$  s, jelikož se na ni v budoucnu odkážeme.



Obr. 23. Schéma měření



Obr. 24. Fotografie z měření

Předpokládáme závislost dynamických vlastností silentbloku na frekvenci, amplitudě výchylky a na předpětí. Závislost na teplotě nejsme schopni pomocí dostupných prostředků naměřit, a proto ji zanedbáme. Měření probíhalo při stálé teplotě kolem 20 °C.



**Byly provedeny 2 sady měření:**

**A) Test závislosti na předpětí při různých frekvencích (Tab. 1a)**

- Počet měření: 20
- Měřené frekvence: 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz, 45 Hz
- Rozsah předpětí: 200 N – 510 N
- Předepsaná amplituda výchylky: 0,5 mm

**B) Test závislosti na frekvenci a amplitudě výchylky (Tab. 1b)**

- Počet měření: 24
- Předpětí: 400 N (uvažované provozní předpětí)
- Měřené frekvence: 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz, 45 Hz
- Rozsah amplitud výchylky: 0,11 mm – 1,92 mm

Předpětí [N]	Frekvence [Hz]			
	20	25	30	35
200	21	22	23	24
320	25	26	27	28
420	29	31	32	33
510	34	35	36	37

a)

Amplituda výchylky [mm]	Frekvence [Hz]			
	20	30	40	45
0,2	38	39		
0,4	40	41	42	
0,6	43	44	45	
0,8	46	47	48	
1	49	50	51	
1,5	52	53	54	
2		55	56	57
3			58	59
4				60
5				61

b)

Tab. 1. Čísla měření a) první sady, b) druhé sady

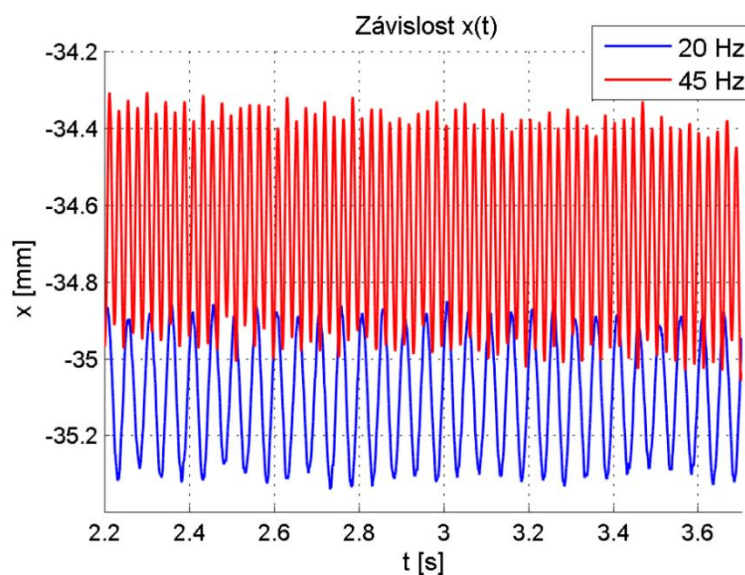
*Poznámka:*

*Vysunutí válce hydropulsu je řízeno regulátorem, který „nestíhal uregulovat“ požadavek relativně nízké amplitudy výchylky. Pro dosažení podobné amplitudy výchylky jako u nižších frekvencí bylo nutné zvýšit její požadovanou hodnotu.*

V následujících kapitolách se věnujeme pouze druhé sadě měření. První sada měření, tedy dynamické vlastnosti silentbloku v závislosti na předpětí, je zpracována až v kapitole 6.7. Na základě výsledků z článku Chang-Kook Chae a jeho spolupracovníků [6] jsme předpokládali, že závislost na frekvenci bude dominantní.

## 6.2. Zpracování dat

Výstupní závislost výchylky v čase je poloha hydraulického válce hydropulsu, nikoliv skutečná deformace silentbloku. Bylo proto nutné naměřená data nejprve upravit. Navíc u naměřených dat pro vyšší frekvence je jasně patrný „pád rovnovážné polohy“ (Obr. 25) způsobený ustalováním regulátoru uvnitř hydropulsu. Nestačilo tak pouze odečíst od celého signálu jednu hodnotu pro vynulování rovnovážné polohy (kde  $x_0 = 0 \text{ mm}$ ,  $F_0 = 0 \text{ N}$ ), neboť se rovnovážná poloha s časem mění. To lze vyřešit odečtením vhodné funkce popisující tento klesající trend. S ohledem na průběh signálů pro vyšší frekvence se jako ideální jeví funkce exponenciální.



Obr. 25. Příklad naměřených průběhů výchylky v čase

Silentblok byl zatěžován posuvem, jehož hodnota se v čase měnila harmonicky. Očekáváme tak *sinový* nebo *kosinový* průběh. My jsme zvolili funkci *sinus*. Průběh výchylky v čase  $x(t)$  se tedy snažíme proložit křivkou ve tvaru:

$$x(t) = a \sin(\omega t + b) + ce^{-dt}, \quad (12)$$



kde  $a, b, c, d$  jsou hledané konstanty a  $\omega$  je úhlová frekvence buzení. K výpočtu konstant bylo užito optimalizační metody. Následně jsme od naměřených průběhů odečetli exponenciální trend:

$$x(t) = x_{naměřené}(t) - ce^{-dt}.$$

Identicky jsme postupovali při úpravě průběhů síly  $F(t)$ , s hledanými koeficienty  $e, f, g, h$ , jelikož byl silentblok zatěžován v předepjatém stavu.

### Popis optimalizační metody:

Základ cílové funkce, kterou je třeba minimalizovat, jsme vytvořili z rovnice (12) tak, že jsme od sebe odečetli levou a pravou stranu rovnice. Jinými slovy hledáme takové konstanty  $a, b, c, d$ , kterými se co nejvíce přiblížíme naměřené závislosti. Výsledkem je rovnice:

$$a \sin(\omega t + b) + ce^{-dt} - x(t) = \text{residuum}.$$

Residuum je zřejmě rozdíl mezi naměřeným a vymodelovaným průběhem výchylky. Nyní bylo třeba minimalizovat součet odchylek ve všech bodech průběhů. Toho nelze dosáhnout pouhým sečtením hodnot, které mohou být jak kladné, tak záporné, ale je nutné sčítat kvadráty odchylek. Tedy použít metodu nejmenších čtverců.

Výsledná cílová funkce pro analogické signály má obecně tvar:

$$CF = \int_{t_{min}}^{t_{max}} (x_{model}(t) - x_{naměřené}(t))^2 dt.$$

Pro diskrétní průběhy výchylek se pak jedná o sumu přes všechny časové kroky:

$$CF = \sum_t (x_{model}(t) - x_{naměřené}(t))^2.$$

Zde parametr  $t$  představuje  $t$ -tý prvek vektoru.

### Zápis v Matlabu:

```
abcd=fminsearch(@(y) cilova_x(y,om,t,x_namereno),nastrel_posuvy);
```

```
function CF=cilova_x(y,om,t,x_namereno)
a=y(1); b=y(2); c=y(3); d=y(4);
residuum=a*sin(omega*t+b)+c*exp(-d*t)-x_namereno;
CF=sum(residuum.^2);
end
```

Než započne algoritmus hledající lokální minimum cílové funkce, je potřeba definovat počáteční hodnoty hledaných parametrů. Tím se v prostoru  $n$  proměnných vytvoří počáteční simplex, který následně směřuje k nejbližšímu lokálnímu minimu cílové funkce. Vektor počátečních hodnot konstant  $a, b, c, d$  se skrývá pod označením `nastrel_posuvy`<sup>6</sup>. Tyto hodnoty byly pro každé měření různé.

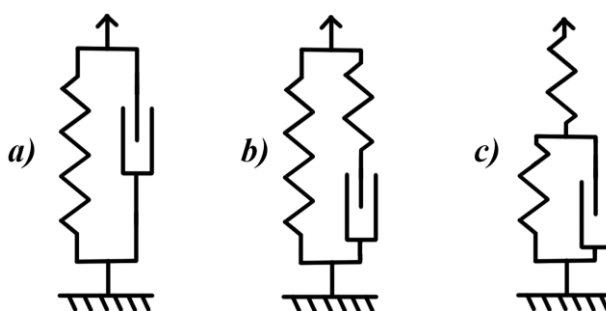
Příkazem `sum` provádíme součet všech prvků daného vektoru.

### 6.3. Volba náhradního modelu se soustředěnými parametry

Před volbou modelu jsme vyslovili dva zjednodušující předpoklady. Prvním předpokladem je dokonale tuhý rám. V opačném případě bychom museli zahrnout tuhost rámu do výpočtu. Druhým předpokladem je, že lze zanedbat hmotnost pohybujících se hmot, které v souladu s prvním předpokladem tvoří pouze hmota pružného členu. To má za následek vymizení členů týkajících se setrvačných sil z diferenciálních rovnic. Uvažovali jsme 3 různé modely tvořené diskretními prvky, pro které bylo nutné sestavit diferenciální rovnice.

#### Uvažované modely:

- A) Kelvinův model (Obr. 26a)
- B) kombinaci Kelvinova modelu a paralelně řazené pružiny (Obr. 26b)
- C) Maxwellův model s pružinou v sérii (Obr. 26c).

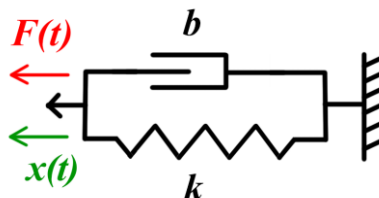


Obr. 26. Varianty náhradních modelů

<sup>6</sup> I počáteční hodnoty bylo někdy nutné naladit. Nežádka byly identifikovány záporné konstanty  $a, b$ , čímž byl vlastně vytvořen kosinový průběh. Přestože to identifikaci dalších parametrů (tuhost, tlumení) nijak neovlivní, ladili jsme „nášťely“ na kladné výstupní hodnoty pro zachování konzistentních výsledků. Navíc některé z parametrů dále používáme jako vstupy do grafů.

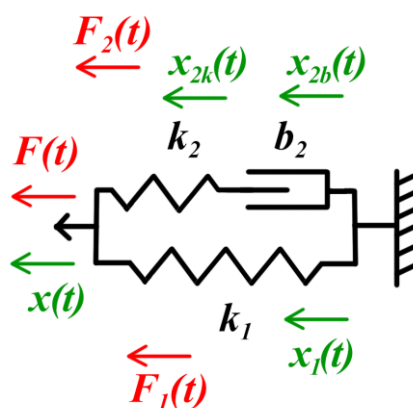
Pro Kelvinův model je diferenciální rovnice zřejmá (13), pro ostatní modely bylo nutné diferenciální rovnice odvodit.

### 6.3.1. Kelvinův model



$$b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (13)$$

### 6.3.2. Maxwellův model paralelně s pružinou



Síly na jednotlivých členech:

$$F_1(t) = k_1 x_1(t)$$

$$F_{2k}(t) = k_2 x_{2k}(t)$$

$$F_{2b}(t) = b_2 \dot{x}_{2b}(t)$$

Rovnice rovnováhy:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

$$F_2(t) = F_{2k}(t) = F_{2b}(t)$$

$$x(t) = x_1(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = x_{2k}(t) + x_{2b}(t)$$

Odvození diferenciální rovnice:

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_{2k}(t) + \dot{x}_{2b}(t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{k_2} \frac{dF_2(t)}{dt} + \frac{F_2(t)}{b_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{k_2} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{1}{k_2} \frac{dF_1(t)}{dt} + \frac{F(t)}{b_2} - \frac{F_1(t)}{b_2} \quad / \cdot k_2 \\ k_2 \dot{x}(t) &= \frac{dF(t)}{dt} - k_1 \dot{x}(t) + \frac{k_2}{b_2} F(t) - \frac{k_2}{b_2} k_1 x(t) \\ (k_1 + k_2) \dot{x}(t) + \frac{k_1 k_2}{b_2} x(t) &= \frac{k_2}{b_2} F(t) + \frac{dF(t)}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

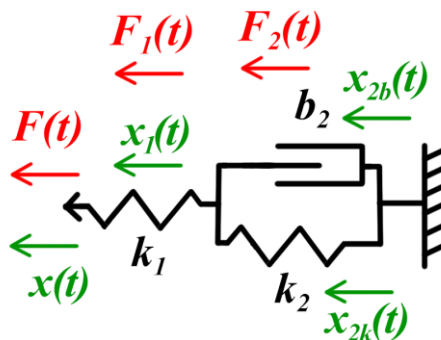
Pro zjednodušení zavedeme konstanty A, B a C, pro které platí:

$$A = k_1 + k_2 \qquad B = \frac{k_1 k_2}{b_2} \qquad C = \frac{k_2}{b_2}$$

Dostaneme diferenciální (14) ve tvaru:

$$A \dot{x}(t) + B x(t) = C F(t) + \frac{dF(t)}{dt}$$

### 6.3.3. Kelvinův model sériově s pružinou



Síly na jednotlivých členech:

$$F_1(t) = k_1 x_1(t)$$

$$F_{2k}(t) = k_2 x_{2k}(t)$$

$$F_{2b}(t) = b_2 \dot{x}_{2b}(t)$$

Rovnice rovnováhy:

$$F(t) = F_1(t) = F_2(t)$$

$$F_2(t) = F_{2k}(t) + F_{2b}(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t) = x_{2k}(t) = x_{2b}(t)$$

Odvození diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}
 k_1 x_1(t) &= k_2 x_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) \\
 k_1 x_1(t) &= k_2 x(t) - k_2 x_1(t) + b_2 \dot{x}(t) - b_2 \dot{x}_1(t) \\
 (k_1 + k_2) x_1(t) &= k_2 x(t) + b_2 \dot{x}(t) - b_2 \dot{x}_1(t) \\
 (k_1 + k_2) \frac{F(t)}{k_1} &= k_2 x(t) + b_2 \dot{x}(t) - b_2 \dot{x}_1(t) \\
 F(t) &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_1 b_2}{k_1 + k_2} \dot{x}(t) - \frac{k_1 b_2}{k_1 + k_2} \dot{x}_1(t) \\
 \frac{k_1 b_2}{k_1 + k_2} \dot{x}(t) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x(t) &= F(t) + \frac{b_2}{k_1 + k_2} \frac{dF(t)}{dt} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zavedeme konstanty A, B a C tak, že:

$$A = \frac{k_1 b_2}{k_1 + k_2} \quad B = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad C = \frac{b_2}{k_1 + k_2}$$

Výsledná diferenciální rovnice (15) tedy získává tvar:

$$A \dot{x}(t) + B x(t) = F(t) + C \frac{dF(t)}{dt}$$

## 6.4. Identifikace soustředěných parametrů náhradních modelů

Do pohybových rovnic vstupují mimo jiné rychlosti deformace  $\dot{x}(t)$  a přírůstky síly  $\frac{dF(t)}{dt}$ , které bylo třeba získat z naměřených průběhů  $x(t)$  a  $F(t)$ . To lze provést jednoduše například v Matlabu numerickou derivací pomocí příkazu *diff*, který generuje vektor rozdílů mezi sousedními prvky, a následně vydělením celého vektoru délkou časového přírůstku (pro konstantní časový krok). V našem případě tento časový krok představuje délka vzorkovací periody  $T_s$ .

Výstupem této operace jsou vektory o jeden prvek kratší než výchozí. Za účelem zachování konzistentních délek vektorů byly ostatní vektory vstupující do rovnic zkráceny o poslední prvek.

Identifikace opět probíhala optimalizační metodou. Pro modely A, B a C (viz kapitola 6.3) jsme sestavili cílové funkce:

$$CF_A = \sum_t \left( b \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + kx(t) - F(t) \right)^2$$

$$CF_B = \sum_t \left( A_B \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + B_B x(t_i) - \frac{\Delta F(t)}{\Delta t} - C_B F(t) \right)^2$$

$$CF_C = \sum_t \left( A_C \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + B_C x(t) - C_C \frac{\Delta F(t)}{\Delta t} - F(t) \right)^2$$

Konstanty  $A, B, C$  byly pouze formálně označeny indexy příslušných modelů. V Matlabu byly konstanty rozepsány a identifikovanými parametry byly ve všech případech přímo hodnoty tuhostí a tlumení.

Po zhodnocení výsledků jsme učinili závěr, že ze tří uvažovaných modelů je pro tato naměřená data použitelný pouze jednoduchý Kelvinův model. Oba složitější modely selhaly v tom smyslu, že výsledné hodnoty parametrů o několik řádů převyšovaly očekávané výsledky, případně byly záporné. Jedním z důvodů může být nevhodná volba náhradního modelu. Vzhledem k tomu, že pro první model byly nalezeny „rozumné“ parametry, je možné, že zbylé dva modely jsou příliš složité. Tyto modely se používají například k modelování creepu, který probíhá v o několik řádů delších časových úsecích, než je náš případ. Nabízí se tak otázka, zda mají složitější modely při dynamickém zatěžování smysl.

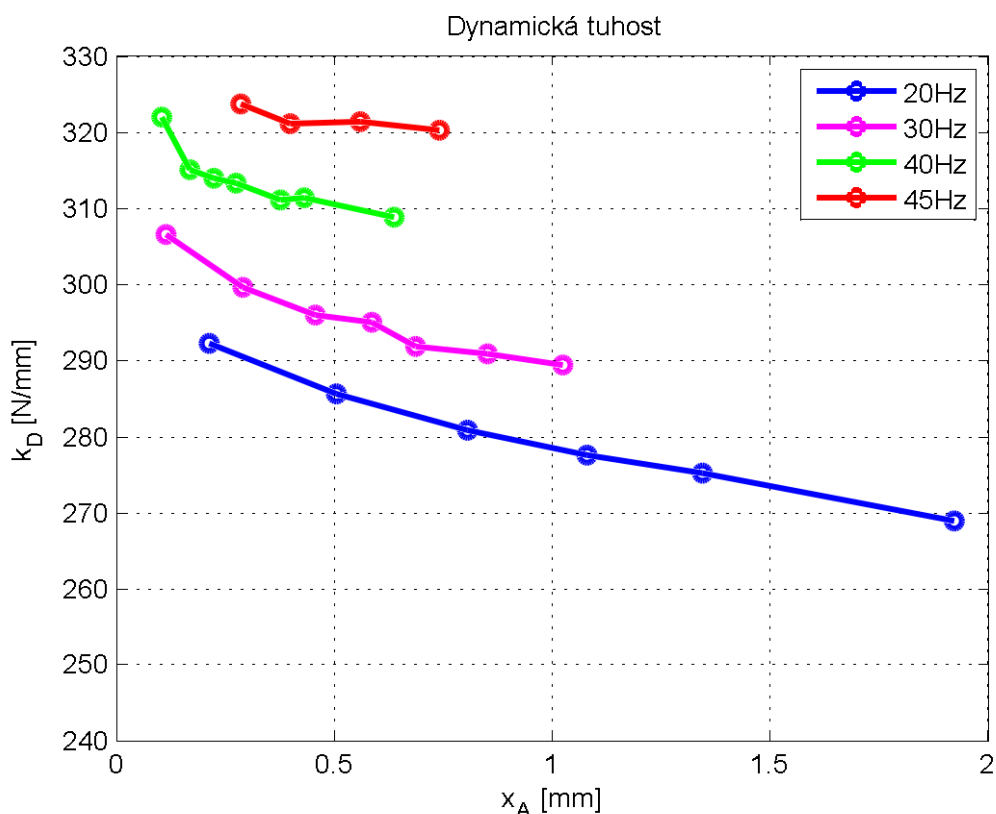
Dalším důvodem by mohla být špatná volba optimalizační metody. Jak již název napovídá, lokální metoda spočívá v hledání lokálních extrémů funkce. Důsledkem bývá závislost výstupních parametrů na počátečním nástřelu vstupních hodnot. Řešením je použití některé z globálních metod, které hledají globální extrém cílové funkce, ovšem stále bez záruky úspěchu. Nadále se už budeme zabývat jen Kelvinovým modelem (pružina paralelně s tlumičem).

### 6.4.1. Identifikace samostatných parametrů pro jednotlivá měření

Zavedeme zde pojem *dynamická tuhost*, kterou označíme veličinou  $k_D$  a spočítáme jako poměr amplitud síly a deformace podle vzorce (16). Pojem dynamická tuhost je chápán různě,

my ho budeme chápat jako tuhost samotné náhradní pružiny při harmonickém zatěžování. Při tvrdém zatěžování se vliv tlumení projeví zvýšením reakčních účinků do rámu, avšak fázový posun průběhů deformace a síly je nulový. Dynamická tuhost se může uplatnit při řešení problému ve frekvenční doméně. Z naměřených dat je vynesena závislost dynamické tuhosti na frekvenci a amplitudě (Obr. 27).

$$k_D = \frac{F_A}{x_A} \tag{16}$$



Obr. 27. Závislost dynamické tuhosti na frekvenci a amplitudě výchylky

Vzhledem k tomu, že bez bližšího prozkoumání naměřených průběhů nedokážeme určit, zda lze některou ze závislostí parametrů (tuhost, tlumení) na proměnných vstupech (frekvence, předpětí,...) zanedbat, provádíme identifikaci parametrů pro každé měření zvlášť.

20 Hz			
Amplituda výchylky [mm]	Amplituda síly [N]	Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
0,21	62	278	0,7694
0,50	144	272	0,8188
0,80	226	268	0,8163
1,08	299	265	0,8099
1,34	370	262	0,8080
1,92	516	256	0,7864

40 Hz			
Amplituda výchylky [mm]	Amplituda síly [N]	Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
0,10	33	277	0,6910
0,17	53	272	0,7330
0,22	70	270	0,7598
0,27	86	269	0,7697
0,38	117	269	0,7618
0,43	134	268	0,7645
0,64	197	266	0,7654

30 Hz			
Amplituda výchylky [mm]	Amplituda síly [N]	Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
0,11	35	277	0,7020
0,29	87	272	0,7781
0,46	135	269	0,7821
0,59	173	268	0,7795
0,69	200	265	0,7755
0,85	247	264	0,7739

45 Hz			
Amplituda výchylky [mm]	Amplituda síly [N]	Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
0,29	92	267	0,7635
0,40	128	267	0,7615
0,56	180	266	0,7684
0,74	237	266	0,7644

Tab. 2. Přehled identifikovaných parametrů pro jednotlivá měření

### 6.4.2. Identifikace jednotných parametrů pro všechna měření

Z Tab. 2 se zdá, že tuhost i tlumení jsou na změně vstupních proměnných závislé, avšak tato závislost není v uvažovaných rozsazích příliš výrazná. Jelikož byla jedním z požadavků na náhradní dynamický model jednoduchá implementovatelnost do globálního MKP řešiče, provedli jsme identifikaci parametrů ještě jednou. Tentokrát jsme hledali pouze dva parametry náhradního modelu, které by s největší přesností popisovaly všechny naměřené průběhy.

Museli jsme proto sestavit novou cílovou funkci, která by v sobě zahrnovala odchylky všech modelovaných průběhů od těch naměřených.



**Cílová funkce pro jednotné parametry:**

```

CF=sum [% 20Hz
        w38*sum((b*x_t38 + k*x38 - F38).^2);
        w39*sum((b*x_t39 + k*x39 - F39).^2);
        w40*sum((b*x_t40 + k*x40 - F40).^2);
        .
        .
        .
        w50*sum((b*x_t50 + k*x50 - F50).^2);
        % 40Hz
        w51*sum((b*x_t51 + k*x51 - F51).^2);
        .
        .
        .
        w61*sum((b*x_t61 + k*x61 - F61).^2);];

```

Váhy jednotlivých měření můžeme řídit pomocí tzv. váhových koeficientů, které jsou označeny  $w_{38} \dots w_{61}$ . Zvýšením váhového koeficientu některého z měření dosáhneme toho, že jej budou hledané parametry aproximovat s vyšší přesností než ostatní měření. Pokud například klademe důraz na přesnost modelu v určitém rozsahu frekvencí, lze toho dosáhnout právě zavedením váhových koeficientů. Koeficienty je možné volit libovolně veliké, avšak nezáporné, jinak by mohlo dojít k destabilizaci metody. My jsme váhové koeficienty nepoužili, jsou zde uvedeny jen jako možnost ovlivnění výsledných hodnot.

**Výsledek:**

Podařilo se nám identifikovat jednotné parametry, které jsou uvedeny v Tab. 3. Kvality aproximací náhradním modelem s dílčími a s jednotnými parametry jsme dále porovnali.

Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
262	0,7820

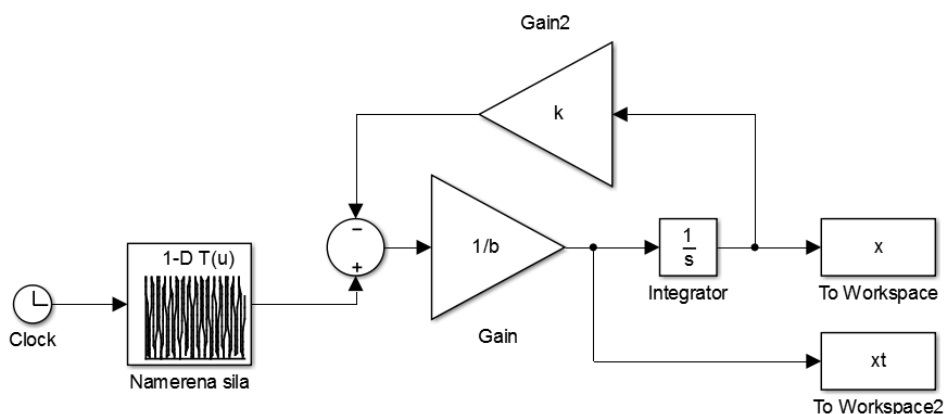
Tab. 3. Identifikované jednotné parametry pro všechna měření v axiálním směru

**6.4.3. Porovnání výsledků**

Pro porovnání kvality modelů s různými parametry byl v programu Matlab Simulink vytvořen jednoduchý model soustavy (Obr. 28), do kterého vstupují naměřené průběhy síly

v čase a výstupem jsou průběhy deformací. Diferenciální rovnice Kelvinova modelu (13) byla pro Simulink přepsána do tvaru (17).

$$\dot{x}_{simulace}(t) = \frac{1}{b} (F_{naměřeno}(t) - kx_{simulace}(t)) \quad (17)$$



Obr. 28. Model v Simulinku

#### Podrobnosti simulace v Simulinku:

- Abychom minimalizovali délku přechodového děje, je zvolen pro počáteční podmínku v bloku „Integrator“ první prvek z vektoru naměřeného průběhu deformace, neboli

$$x_{simulace}(t = 0) = x_{naměřeno}(1)$$

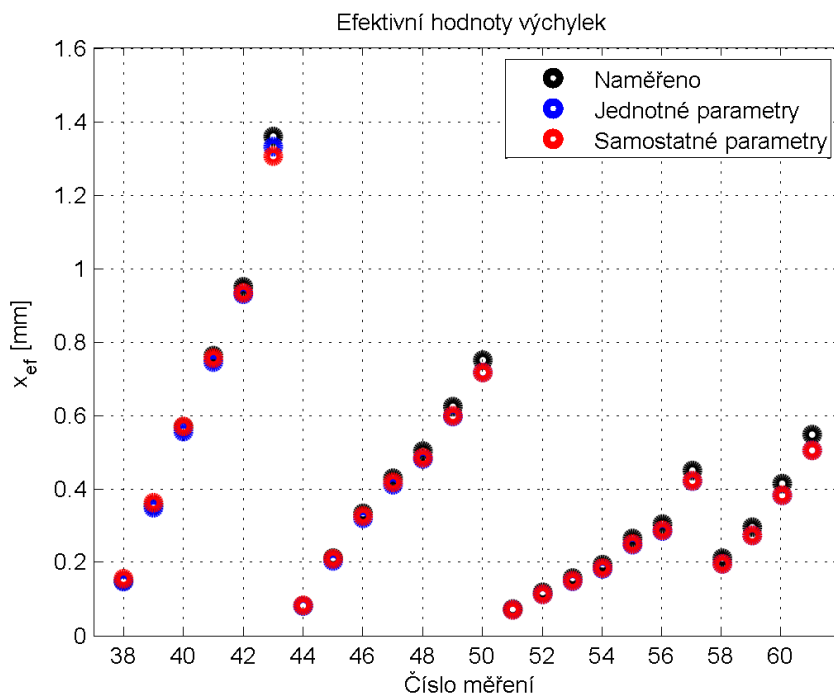
- Délka modelovaného signálu je vždy totožná s délkou signálu vstupujícího do optimalizace
- Průběh naměřené síly je na vstup přiveden pomocí „1-D Lookup Table“

Výstupní závislosti deformací v čase  $x_{simulace}(t)$  byly porovnány s naměřenými závislostmi  $x_{naměřeno}(t)$ . Pro tyto účely byly spočítány *efektivní hodnoty* průběhů, jinak označované jako *kvadratický průměr*, vztah (10) má pro diskrétní signál tvar:

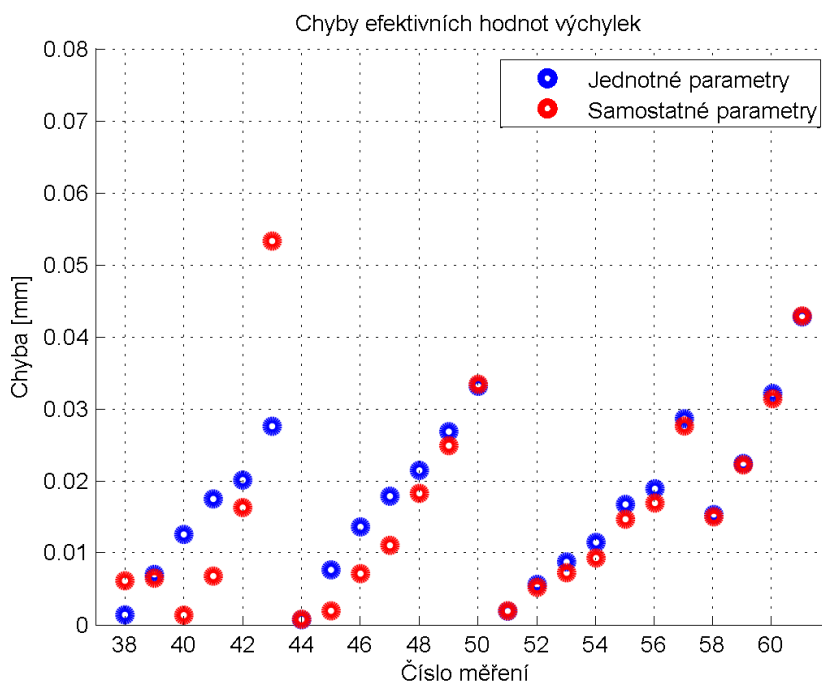
$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_t^T x^2(t)}$$

V Matlabu existuje příkaz `rms`, který přímo spočítá hodnotu kvadratického průměru.

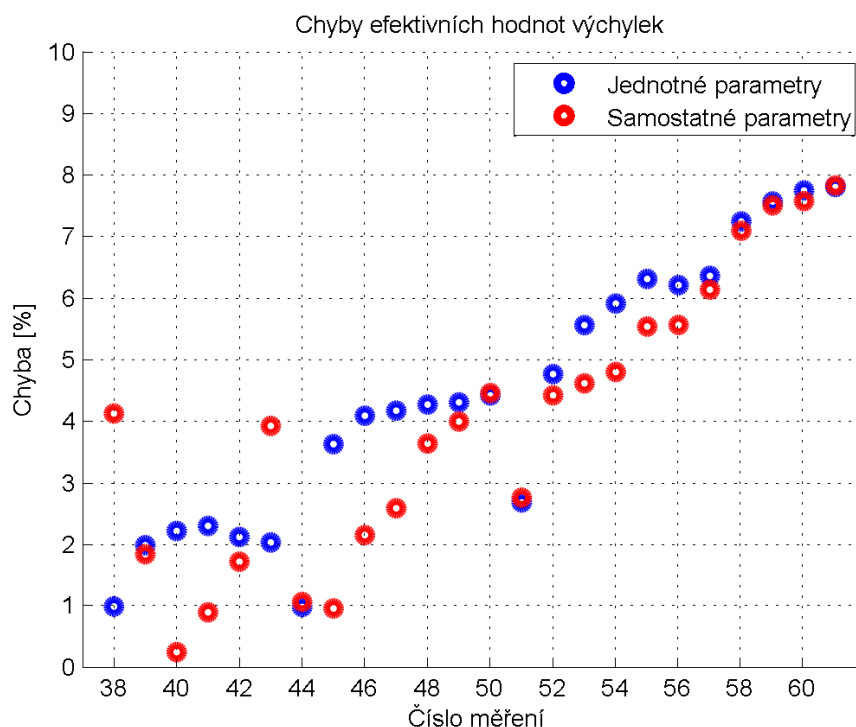
Pro jednotlivá měření byly vyneseny do grafu efektivní hodnoty průběhů (Obr. 29) a dále odchylky efektivních hodnot vypočtených průběhů od naměřených v milimetrech (Obr. 30) a v procentech (Obr. 31).



Obr. 29. Efektivní hodnoty výchylek pro modely s různě zadanými parametry



Obr. 30. Absolutní hodnoty odchylek modelů od naměřených průběhů



Obr. 31. Odchyly modelů od naměřených průběhů vyjádřené v procentech

Z výše uvedených grafů je patrné, že oba modely obsahují chyby, které se zvyšují s rostoucí frekvencí. Rozdíly mezi jednotlivými modely jsou však relativně malé. Zhodnocením výsledků jsme dospěli k názoru, že Kelvinův model s jednotnými parametry aproximuje reálný silentblok s dostatečnou přesností.

V tomto dílčím závěru jsme vlastně přijali předpoklad, že tuhost a tlumení silentbloku jsou v měřeném rozsahu frekvenčně nezávislé.

## 6.5. Identifikace dynamických vlastností v radiálním směru

Na základě závěru z předchozí kapitoly předpokládáme tuhost a tlumení v radiálním směru rovněž frekvenčně nezávislé. Postupovali jsme stejně jako při identifikaci statické charakteristiky silentbloku v radiálním směru. Vytvořili jsme v Ansysu 3D model, jehož materiálové vlastnosti jsme naladili na základě naměřených dat. Tento model jsme zatěžovali ve směru radiálním a z vykreslených průběhů jsme získali kýžené parametry. Při výpočtech jsme používali metodu zvanou harmonická analýza (v Ansysu „Harmonic Response“).

### **Harmonická analýza:**

V této souvislosti není označení harmonická analýza úplně přesné. Lepší představu o použité metodě si uděláme přeložením anglického označení – „harmonická odezva“.

Smyslem metody je nalezení deformační odezvy modelu na silový (napěťový) podnět v zadaném frekvenčním spektru, nebo naopak silovou odezvu na deformační podnět.

## **6.5.1. Naladění materiálu pro harmonickou analýzu**

Naladěním materiálu rozumíme nalezení takových parametrů, při kterých model vykazuje stejnou deformační odezvu na silový podnět, jako testovaný silentblok. Na rozdíl od experimentu jsme zvolili tzv. měkké zatěžování, tedy silou. Tento způsob byl zvolen pouze z toho důvodu, že deformaci součásti je možné snadno zobrazit ve výsledcích, kdežto amplitudu reakční síly je nutné dohledat jinak. Prohození vstupů a výstupů můžeme provést, neboť vazba mezi nimi je lineární. Řešíme vlastně inverzní úlohu.

V harmonické analýze byl použit totožný 3D model (viz Obr. 15) jako ve statické analýze s tím rozdílem, že přiřazený materiál byl lineární isotropní. Nastavení sítě, kontaktů ani okrajových podmínek se nezměnilo.

Nejprve bylo potřeba naladit materiál. Pro harmonickou analýzu lze lineárnímu isotropnímu materiálu přiřadit pouze Youngův modul pružnosti, Poissonovo číslo, hustotu, kterou jsme ponechali z původního modelu, a tlumení. Uvažujeme Poissonovo číslo  $\nu = 0,499$ .

### **Tuhost:**

Po zkušební statické analýze modelu s lineárním materiálem jsme odhadli Youngův modul pružnosti na  $E = 3 \text{ MPa}$ . Tato analýza sloužila pouze k počátečnímu odhadu, proto zde neuvádíme žádné podrobnosti.

### **Tlumení:**

Uvažovali jsme Reyleighův model tlumení, který generuje matici tlumení z matic hmotnosti a tuhosti. Vzorec pro výpočet matice tlumení je

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (18)$$

kde  $\mathbf{M}$  je matice hmotnosti,  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti a  $\alpha, \beta$  jsou konstanty, které jsme volili. Člen  $\alpha\mathbf{M}$  má schopnost tlumit nižší frekvence, člen  $\beta\mathbf{K}$  naopak vyšší. Protože nedokážeme určit, zda jsou námi měřené frekvence nízké či vysoké, provedli jsme citlivostní analýzu na vstupní parametry.

### Citlivostní analýza:

V citlivostní analýze jsme chtěli zjistit závislost na třech parametrech –  $E$ ,  $\alpha$  a  $\beta$ . Postupně jsme měnili hodnotu jednoho parametru, přičemž zbylé dva zůstaly konstantní. Všechny výpočty probíhaly při frekvenci 20 Hz a silovém buzení s amplitudou 500 N.

$\alpha$ [-]	$E$ [MPa]	$x_A$ [mm]	$\varphi$ [°]
1	3	2,5197	0
1000		2,5188	0
$\beta$ [-]	$E$ [MPa]	$x_A$ [mm]	$\varphi$ [°]
0,01	2,88	1,5659	51,6
	3,6	1,2528	51,6
	4,5	1,0025	51,5
	10	0,4511	51,5
	30	0,1403	51,5
$\beta$ [-]	$E$ [MPa]	$x_A$ [mm]	$\varphi$ [°]
0,1	3	0,1913	85,5
0,01		1,5033	51,6
0,001		2,3997	7,2

Tab. 4. Výsledky citlivostní analýzy

Z výsledků citlivostní analýzy (Tab. 4) plyne, že člen  $\alpha\mathbf{M}$  v rovnici (18) lze zanedbat. Dále je patrné, že lze zanedbat i závislost fázového posunu mezi průběhem síly a deformace na modulu pružnosti  $E$ . S ohledem na tato fakta jsme zvolili následující postup.

### Postup ladění materiálu:

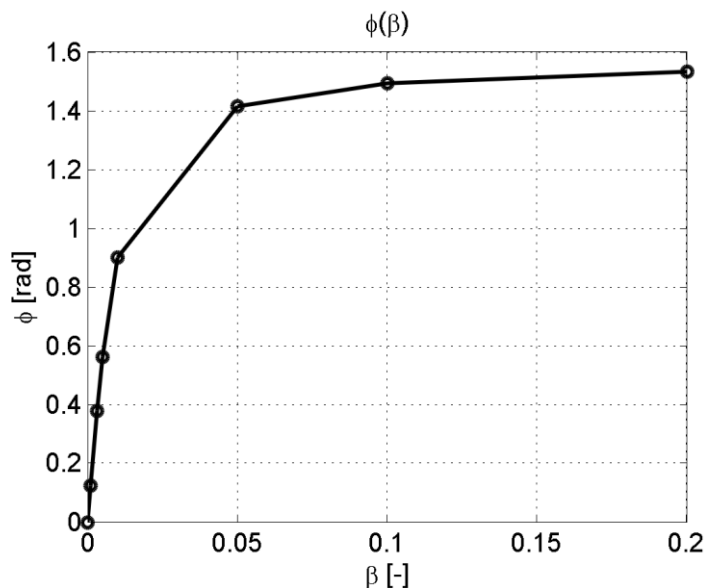
1) Vybrali jsme jedno měření, konkrétně měření číslo 43, pro které platí:

- Amplituda výchylky:  $x_A = 1,9203 \text{ mm}$
- Amplituda síly:  $F_A = 516 \text{ N}$
- Fázový posun:  $\varphi = 22^\circ$

- 2) Při zvoleném modulu pružnosti  $E = 3 \text{ MPa}$  jsme hledali takovou hodnotu konstanty  $\beta$ , abychom dosáhli stejného fázového posunu  $\varphi = 22^\circ$ .

Pro doplnění jsme závislost  $\varphi$  na  $\beta$  vynesli v grafu (Obr. 32).

- 3) Naladili jsme modul pružnosti  $E$  tak, aby amplituda výchylky odpovídala naměřené hodnotě, tedy  $x_A = 1,9203 \text{ mm}$ . Toho lze dosáhnout v jediné iteraci, neboť se jedná o lineární materiál.



Obr. 32. Závislost fázového posunu na konstantě  $\beta$

#### Porovnání naměřených a získaných veličin:

	Naměřené hodnoty	Hodnoty z analýzy
$x_{ef}$ [mm]	1,3581	1,3593
$\varphi$ [°]	21,6	21,7

#### Parametry naladěného materiálu:

$$E = 3,43 \text{ MPa} \quad \nu = 0,499 \quad \rho = 1230 \text{ kg/m}^3 \quad \beta = 0,00316$$

O chování materiálu při jiných frekvencích a zatíženích jsme zatím nevěděli nic, proto byl model s naladěným materiálem otestován pro další vybraná měření (Tab. 5). Opět jsme porovnali efektivní hodnoty průběhů, rozdíl naměřených a vypočtených hodnot je uveden v absolutní hodnotě.

ČÍSLO MĚŘENÍ	VSTUP		NAMĚŘENÉ HODNOTY		HODNOTY Z ANALÝZY		ROZDÍL NAMĚŘENÝCH A VYPOČTENÝCH HODNOT	
	Frekvence [Hz]	F <sub>A</sub> [N]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]
47	30	173	0,4301	30,2	0,4221	30,9	0,008	0,7
50	30	296	0,7506	30,2	0,7223	30,9	0,0283	0,7
52	40	53	0,1203	37,9	0,1182	38,7	0,0021	0,8
56	40	134	0,3056	38,2	0,2987	38,7	0,0069	0,5
58	45	92	0,2127	42,8	0,1954	42,2	0,0173	0,6
61	45	237	0,5486	42,6	0,58	42,2	0,0314	0,4

Tab. 5. Výsledky testování naladěného materiálu

Tímto způsobem by bylo možné naladit frekvenčně závislé vlastnosti materiálu, kdyby se tato závislost potvrdila. Implementace frekvenčně závislých parametrů do Ansysu bude probírána v následující kapitole.

Zhodnocením výsledků z předchozí tabulky jsme dospěli k závěru, že odezva námi definovaného materiálového modelu odpovídá odezvě skutečného silentbloku dostatečně přesně. Přešli jsme proto k další fázi – identifikaci vlastností v radiálním směru.

### 6.5.2. Identifikace parametrů náhradního modelu pro dynamiku v radiálním směru

Provedli jsme dvě analýzy pro různé amplitudy síly; frekvenční rozsah buzení jsme použili stejný jako u experimentu.

Frekvence [Hz]	F <sub>A</sub> = 60 N			F <sub>A</sub> = 150 N		
	k [N/mm]	b [Ns/mm]	φ [°]	k [N/mm]	b [Ns/mm]	φ [°]
20	52,109	0,1765	22,5	52,212	0,1717	21,9
30	50,364	0,1771	31,8	49,727	0,1723	31,5
40	47,912	0,1779	39,6	46,24	0,1731	39,8
45	46,418	0,1784	42,9	44,117	0,1736	43,5

Tab. 6. Výsledky z harmonické analýzy v radiálním směru



Po zhodnocení výsledků uvedených v Tab. 6 jsme i v tomto případě zanedbali závislost tuhosti a tlumení na změnu vstupních parametrů. Pomocí optimalizační metody jsme opět identifikovali jednotné parametry náhradního modelu, které budeme považovat za konstantní.

Tuhost [N/mm]	Tlumení [Ns/mm]
49	0,175

Tab. 7. Jednotné parametry pro náhradní model v radiálním směru

## 6.6. Náhradní model pro dynamickou analýzu

Identifikovali jsme všechny požadované parametry pro vytvoření náhradního modelu určeného pro dynamické analýzy.

### 6.6.1. Model s frekvenčně závislými parametry

Stejně jako náhradní model pro statickou analýzu, i dynamický model s frekvenčně závislými parametry jsme navrhli jako kombinaci tří pružin ve směrech os referenčního souřadného systému, tentokrát lineárních, v kombinaci s lineárními viskózními tlumiči. Soustavu pružina-tlumič představuje prvek COMBIN14.

#### Implementace frekvenčně závislých parametrů:

Následující sada příkazů představuje nadefinování pružiny ve směru osy z (axiální směr).

```
ET, _sid, COMBIN14, , 3

*dim, K, table, 4, 1, 1, FREQ
*taxis, K(1), 1, 20, 30, 40, 45
K(1) = 240, 250, 260, 265

*dim, B, table, 4, 1, 1, FREQ
*taxis, B(1), 1, 20, 30, 40, 45
B(1) = 0.805, 0.801, 0.793, 0.785

R, _sid, %K%, %B%
```

#### Vysvětlivky:

ET ...definuje typ elementu

\_sid ...parametr, pod kterým v daném příkazu vystupuje pružina

COMBIN14 ...typ elementu, který přiřazujeme

,,1 ...tzv. KEYOPTIONS – definují vlastnosti elementu (odděleny čárkami, prázdné místo odpovídá 0)

KEYOPT(2) – určuje směr, ve kterém jsou parametry pružiny definovány

KEYOPT(2)=1...směr do osy  $x$     KEYOPT(2)=2... $y$     KEYOPT(2)=3... $z$

\*dim,K,table,4,1,1,FREQ:

\*dim ...definuje prvek (tabulku nebo vektor)

K ...název prvku (zde představuje tuhost)

table ...volba konkrétního prvku

4,1,1 ...rozměry tabulky (zde 4 řádky, jeden sloupec)

FREQ<sup>7</sup> ...proměnná, na kterém závisí volba prvku z definované tabulky

\*taxis,K(1),1,20,30,40,45:

\*taxis ...vytváří osu proměnných (sloupec indexů) – představuje jakýsi nultý sloupec tabulky

K(1) ...definuje, které tabulce vytváříme *taxis*, číslo v závorce je výchozí pozice

1 ...index rozhodující o tom, zda vytváříme *taxis* jako sloupec, řádek,...  
(pro tabulky vyšších dimenzí)

20,30,40,45 ...frekvence, pro jejichž hodnoty definujeme různé hodnoty tuhosti a tlumení

K(1) = 240,250,260,265 ...vkládá do sloupce požadované hodnoty tuhosti pro různé frekvence

Analogicky vytvoříme i tabulku pro tlumení.

R,\_sid,%K%,%B% ...přiřazení reálných konstant na základě vstupní proměnné (je nutné dodržet pozice)

---

<sup>7</sup> FREQ je jedním z tzv. hlavních proměnných („Primary Variables“). To znamená, že pod proměnnou FREQ se vždy skrývá frekvence a tuto vazbu není potřeba definovat.

**Výsledná podoba tabulek:**

taxis	
FREQ	K
20	240
30	250
40	260
45	265

a)

taxis	
FREQ	B
20	0,805
30	0,801
40	0,793
45	0,785

b)

Obr. 33. Výsledné tabulky pro a) tuhost, b) tlumení závislé na frekvenci (Hodnoty v tabulkách jsou pouze ilustrativní.)

### 6.6.2. Model s konstantními parametry

Jelikož jsme se rozhodli zanedbat závislost parametrů na frekvenci a považovat je tak za konstantní, lze vytvořit náhradní model jednodušeji než v předchozím případě. Potřebujeme tedy jen popsat vazbu mezi dvěma body, která má jiné vlastnosti v různých směrech os referenčního souřadného systému. Taková vazba mezi tělesy je v Ansysu přednastavena a představuje ji spojení typu „Bushing“. Toto spojení vlastně představuje matici tuhosti (Tab. 8a) a matici tlumení (Tab. 8b) pro všech 6 stupňů volnosti mezi dvěma body v prostoru. Nás zajímají pouze první 3 prvky na diagonále. Kdybychom identifikovali i torzní a ohybové vlastnosti, vyplnili bychom i ostatní diagonální prvky. Mimodiagonální prvky představují vazbu mezi momentovým namáháním a deformací ve směru os a naopak; matice jsou symetrické.

Stiffness	Per Unit X (mm)	Per Unit Y (mm)	Per Unit Z (mm)	Per Unit $\theta_x$ (°)	Per Unit $\theta_y$ (°)	Per Unit $\theta_z$ (°)
$\Delta$ Force X (N)	49					
$\Delta$ Force Y (N)	0	49				
$\Delta$ Force Z (N)	0	0	262			
$\Delta$ Moment X (N·mm)	0	0	0	0		
$\Delta$ Moment Y (N·mm)	0	0	0	0	0	
$\Delta$ Moment Z (N·mm)	0	0	0	0	0	0

a)

Viscous Damping	Per Unit X (mm)	Per Unit Y (mm)	Per Unit Z (mm)	Per Unit $\theta_x$ (°)	Per Unit $\theta_y$ (°)	Per Unit $\theta_z$ (°)
$\Delta$ Force * Time X (N·s)	0,175					
$\Delta$ Force * Time X (N·s)	0	0,175				
$\Delta$ Force * Time X (N·s)	0	0	0,782			
$\Delta$ Moment * Time X (N·mm·s)	0	0	0	0		
$\Delta$ Moment * Time Y (N·mm·s)	0	0	0	0	0	
$\Delta$ Moment * Time Z (N·mm·s)	0	0	0	0	0	0

b)

Tab. 8. Nastavení a) tuhosti a b) tlumení vazby mezi dvěma tělesy typu „Bushing“

Abychom ověřili, zda model funguje správně, zatěžovali jsme ho v axiálním směru při různých frekvencích s různou amplitudou síly. Zatížení opět odpovídala zatížením z vybraných měření. Použili jsme stejnou tabulku jako v kapitole 6.5.1.

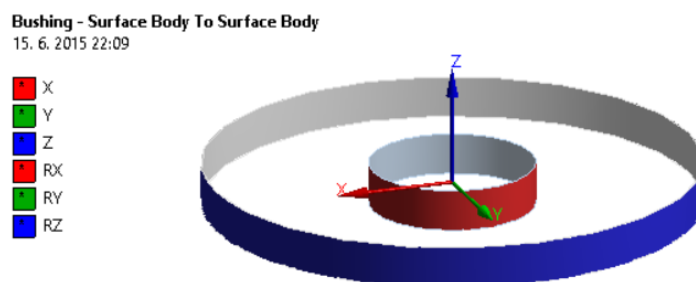
ČÍSLO MĚŘENÍ	VSTUP		NAMĚŘENÉ HODNOTY		HODNOTY Z ANALÝZY		ROZDÍL NAMĚŘENÝCH A VYPOČTENÝCH HODNOT	
	Frekvence [Hz]	$F_A$ [N]	$x_{ef}$ [mm]	$\varphi$ [°]	$x_{ef}$ [mm]	$\varphi$ [°]	$x_{ef}$ [mm]	$\varphi$ [°]
47	30	173	0,4301	30,2	0,407	29,4	0,0231	0,8
50	30	296	0,7506	30,2	0,6962	29,4	0,0544	0,8
52	40	53	0,1203	37,9	0,1143	36,9	0,006	1
56	40	134	0,3056	38,2	0,2893	36,9	0,0163	1,3
58	45	92	0,2127	42,8	0,19	40,2	0,0227	2,6
61	45	237	0,5486	42,6	0,4888	40,2	0,0598	2,4

Tab. 9. Výsledky zatěžování modelu s vazbou „Bushing“

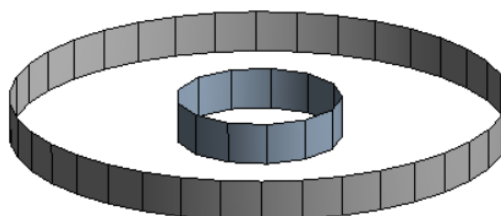
### Testovací model:

Pro otestování jsme vytvořili jednoduchý model, který se skládal ze dvou skořepinových prvků. Oběma byla nastavena tloušťka 0,1 mm, aby se minimalizoval vliv setrvačných sil. Materiálem byla ocel. Na síť nebyly kladeny žádné požadavky (Obr. 35). Vnější prsteneček byl pevně ukotven v prostoru aplikováním okrajové podmínky „Fixed Support“. Pohyboval se tak

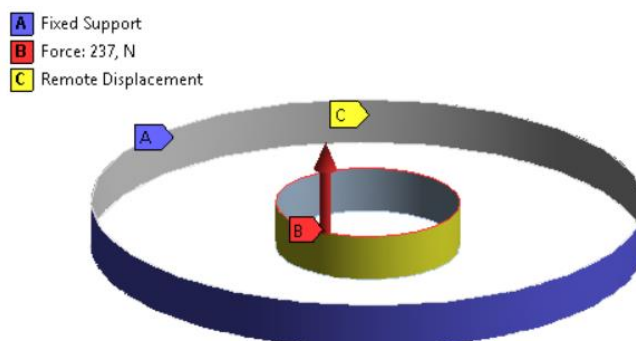
pouze vnitřní prsteneček, kterému byly odebrány všechny rotační stupně volnosti (Obr. 36). Tuto konkrétní podobu modelu jsme zvolili pouze pro názornost vykreslených deformací.



Obr. 34. Zvýrazněné plochy, mezi kterými je vazba „Bushing“



Obr. 35. Vysítovaný model



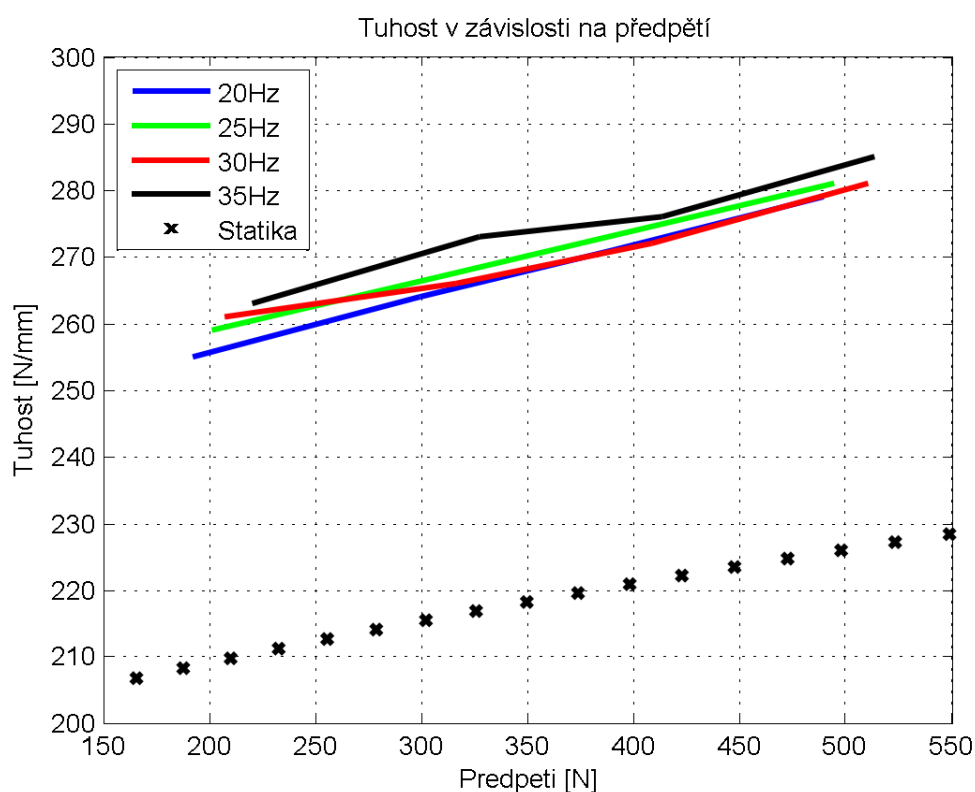
Obr. 36. Zobrazení okrajových podmínek a zatížení modelu

## 6.7. Dynamické vlastnosti silentbloku v závislosti na předpětí

Naměřené průběhy jsme opět upravili a analyzovali dříve uvedeným způsobem. Získali jsme tak hodnoty tuhosti a tlumení náhradního modelu silentbloku při různých frekvencích a při různých hodnotách statického předpětí. Smyslem této fáze bylo zdokonalit model vnesením závislosti parametrů na předpětí, které je do reálného silentbloku vneseno vlastní tíhou motoru.

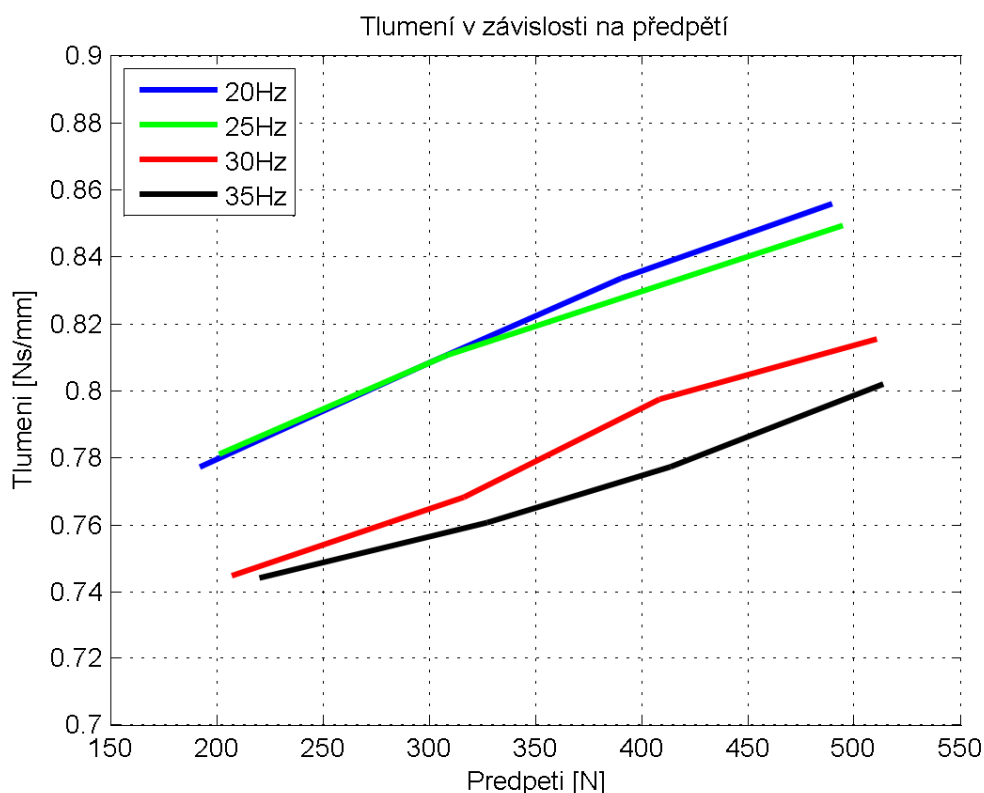
Nejprve jsme se zaměřili na tuhost. Jako nejlogičtější řešení se jevílo použití nelineární pružiny ze statického modelu, kde by se ve zdeformovaném stavu spočítala tečná matice tuhosti (tečná tuhost pro jednorozměrnou pružinu), která by se použila v dalších analýzách. Tento postup jsme však museli na základě níže uvedeného důvodu zavrhnout hned v počátku.

Vynesli jsme do grafu hodnoty tuhosti pro různé zatěžovací stavy z experimentu II a pro porovnání jsme vynesli i statickou tuhost silentbloku v závislosti na reakční síle od deformace, která zde představuje předpětí (Obr. 37). Vidíme, že tuhost při cyklickém zatěžování vychází přibližně o 50 N/mm vyšší než tuhost statická. To znemožňuje použití předepjaté nelineární pružiny.



Obr. 37. Porovnání statické tuhosti silentbloku a tuhosti náhradního modelu při cyklickém zatěžování

Stejným způsobem jsme do dalšího grafu vynesli hodnoty i tlumení v závislosti na frekvenci a předpětí (Obr. 38). Tuhost i tlumení rostou se zvyšujícím se předpětím a tento nárůst není zanedbatelný, jak jsme původně předpokládali.



Obr. 38. Tlumení náhradního modelu v závislosti na předpětí a frekvenci

Bez bližšího zkoumání materiálu nedokážeme určit, zda je tak značný rozdíl ve statické tuhosti a tuhosti při cyklickém zatěžování způsoben přeskupováním vnitřní struktury molekulových řetězců, jak je popsáno například v [1], nebo zda jej způsobují geometrické nelinearity. Jak bylo předneseno už v úvodu této práce, zákony lineární pružnosti zde neplatí, přestože uvažovaný materiál je lineární. Geometrická a materiálová nelinearita jsou dva na sobě nezávislé jevy.

Úloha v sobě zahrnuje geometrické nelinearity, neboť při takto vysokých deformacích, v našem případě kolem 10 %, již nelze zanedbat například změnu plochy průřezu zdeformovaného pružného členu. To se může projevit právě v rozdílných tuhostích předepjatého a nezatíženého silentbloku. Provedli jsme ještě zkušební analýzu 3D modelu, který jsme použili pro identifikaci vlastností v radiálním směru.

#### ***Komentář k výsledkům:***

*Křivky vynesené závislosti tuhosti na předpětí si tvarově odpovídají. Tento jev nám vlastně říká, že závislost na frekvenci i na předpětí lze řešit nezávisle na sobě.*

*Vidíme, že výsledné křivky tuhosti se protínají, a že křivky tlumení jsou seskupené ve dvou hladinách. Nabízí se několik vysvětlení, jejichž následující výčet není považován za konečný:*

- a) Hodnoty parametrů jsou výsledkem identifikace pomocí lokální optimalizační metody, která nezaručuje nalezení ideálního řešení.
- b) Parametry jednotlivých měření byly identifikovány nezávisle na sobě, což umožňuje jejich nespojitý průběh v závislosti na frekvenci. Předmětem dalšího zkoumání by mohlo nalezení vhodné funkce, kterou bychom tyto závislosti popsali. Podrobnějšímu zkoumání by nutně muselo předcházet další měření pro širší frekvenční spektrum.
- c) Z Tab. 10 v kapitole 6.7.1 plyne, že pro vyšší frekvence nebyl regulátor schopen splnit požadavek amplitudy deformace 0,5 mm. Vyhodnocení výsledků tedy probíhalo pro různá vstupní data, což bylo způsobeno naší neznalostí chování regulátoru.

### 6.7.1. Zkušební analýza 3D modelu

Model jsme testovali pro vybraná měření z Tab. 1a. Vstupními parametry jsou frekvence, předpětí a amplituda síly. Pro každou měřenou frekvenci jsme vybrali vždy měření s nejmenším a největším předpětím. Stejně jako v předchozích případech i zde porovnáváme efektivní hodnoty výchylek a fázový posun. Rozdíl naměřených a vypočtených veličin je v absolutní hodnotě.

ČÍSLO MĚŘENÍ	VSTUP			NAMĚŘENÉ HODNOTY		HODNOTY Z ANALÝZY		ROZDÍL NAMĚŘENÝCH A VYPOČTENÝCH HODNOT	
	Frekvence [Hz]	F <sub>0</sub> [N]	F <sub>A</sub> [N]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]	x <sub>ef</sub> [mm]	φ [°]
21	20	192	173	0,458	21,7	0,4322	21,7	0,0258	0
34		489	183	0,4592	21,8	0,4355	21,7	0,0237	0,1
22	25	201	161	0,4116	26,4	0,3874	26,5	0,0252	0,1
35		494	203	0,4774	26,3	0,4656	26,5	0,0188	0,2
23	30	207	97	0,2488	30,4	0,2239	30,1	0,0249	0,3
36		510	125	0,2977	30,7	0,2746	30,9	0,0231	0,2
24	35	220	62	0,1561	33,9	0,1366	35	0,0195	1,1
37		513	74	0,1715	33,6	0,1556	35	0,0159	1,4

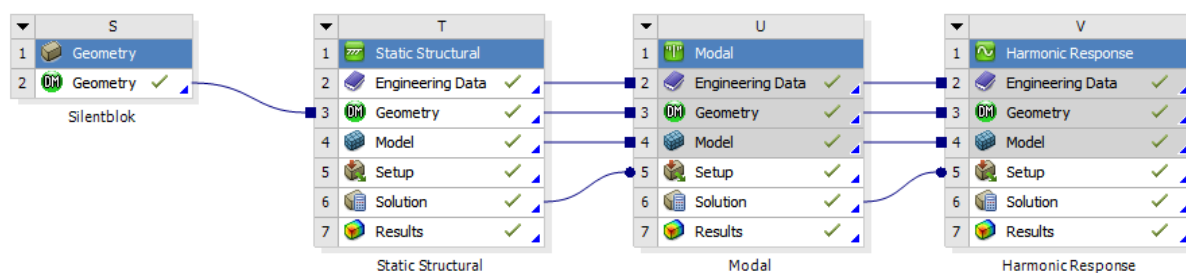
Tab. 10. Výsledky z testování 3D modelu při různých hodnotách předpětí

Ve výsledcích v Tab. 10 vidíme, že odchylky modelu od naměřených průběhů jsou pro vyšší hodnoty předpětí menší, chyba vyjádřená v procentech (v tabulce není uvedena) se však s rostoucí frekvencí zvyšuje. To je pravděpodobně způsobeno tím, že model byl laděn na data, která byla naměřena při statickém předpětí přibližně 400 N a při frekvenci 20 Hz.



## Popis analýzy:

Úlohu jsme řešili jako předepjatou harmonickou analýzu podle struktury na Obr. 39. Nejprve je nutné provést statický výpočet (*Static Structural*), výsledkem kterého je tečná matice tuhosti vstupující do modální analýzy (*Modal*). Modální analýza řeší zvolený počet vlastních frekvencí soustavy a příslušné vlastní tvary kmitů (módy). Ty dále vstupují do harmonické analýzy (*Harmonic Response*), kde je harmonická odezva řešena superpozicí vlastních tvarů kmitů.



Obr. 39. Předepjatá harmonická analýza

### Poznámka:

*V modální ani harmonické analýze nepracujeme s fyzicky zdeformovaným modelem. Předpětí je do modelu vneseno pouze vytvořením tečné matice tuhosti, která je následně promítnuta do nezdeformovaného modelu. Tohoto faktu využijeme v další kapitole.*

## 6.7.2. Náhradní model pro dynamickou analýzu se zahrnutím vlivu statického předpětí

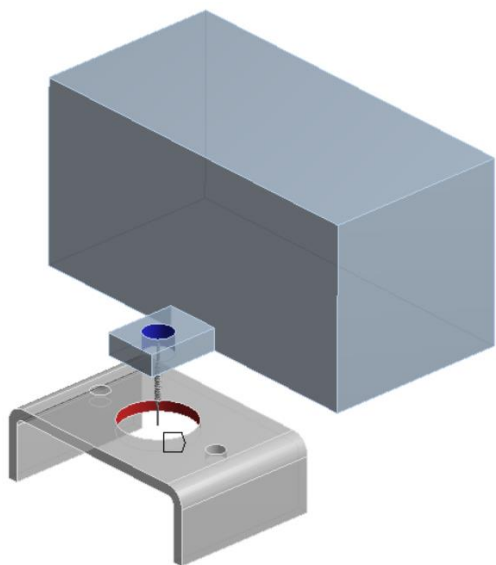
Chceme-li v modelu postihnout i vliv statického předpětí, je nutné dříve navržený model modifikovat. Pro tento účelem jsme navrhli model jako nelineární pružinu, jejíž průběh tuhosti by odpovídal nikoliv statické charakteristice, ale právě průběhu tuhosti v závislosti na předpětí.

Je nutné zmínit, že během statického výpočtu sloužícímu pro předepnutí sestavy, se dopouštíme chyby, která je při uvažovaném zatížení pro náš silentblok v řádu  $10^{-1}$  mm. S ohledem na rozměry běžného stroje a na výrobní tolerance jsme se tuto chybu rozhodli zanedbat.

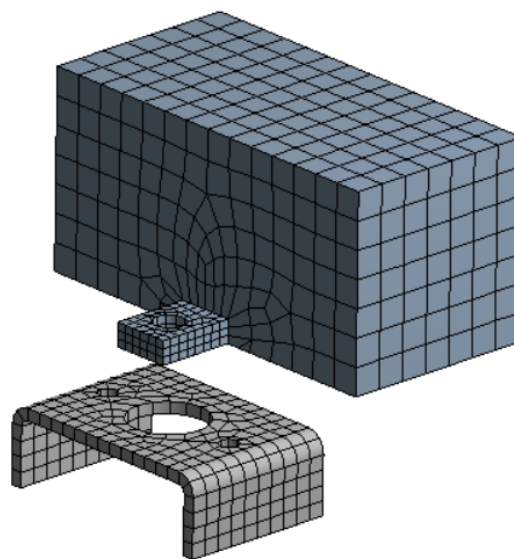
Tlumení náhradního modelu je možné pomocí příkazů volit na základě tuhosti, případně při znalosti vlastní tíhy motoru odečítat z uvedeného grafu.

## 7. Modelový případ uložení motoru

V Ansysu jsme vytvořili zjednodušený model části motoru, která je uložena na jednom silentbloku. Model se skládá ze dvou částí, z nichž první představuje rám stroje a druhá právě motor. Mezi těmito prvky je definována vazba pomocí sady tří nelineárních pružin (Obr. 40), jak bylo popsáno předchozí kapitole 6.7.2. Na síť nebyly kladeny žádné požadavky (Obr. 41).



Obr. 40. Zobrazení referenčních ploch nelineární pružiny



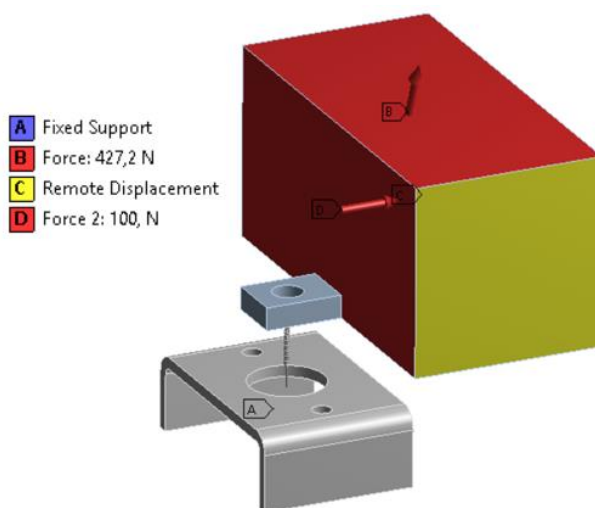
Obr. 41. Vysítovaný model

Sestava je v prostoru ukotvena zavedením okrajové podmínky „Fixed support“ na spodní plochy modelu rámu stroje. Pro svislé plochy modelu motoru jsme předepsali nulová natočení kolem všech os souřadného systému, čímž jsme povolili jen posuvy, a to do všech směrů. Zvolili jsme pro buzení dvě síly, které mají do směrů  $x, y, z$  složky:

- Force: [0, 400, -150] N
- Force 2: [-100, 0, 0] N

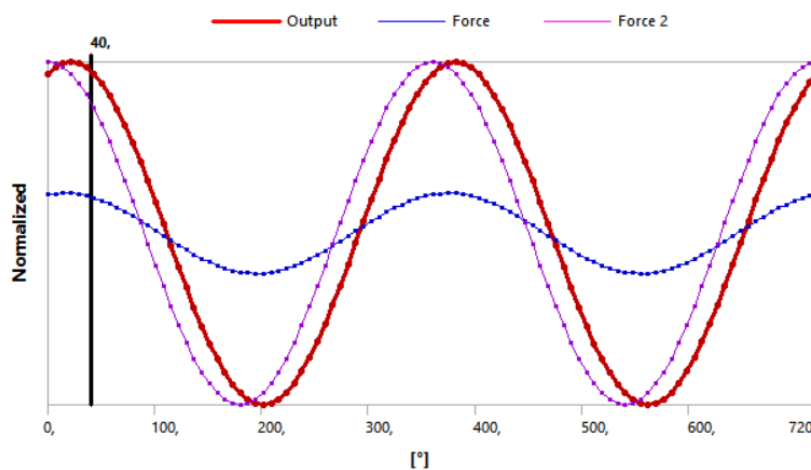
Síla *Force 2* je vůči síle *Force* zpožděna o fázový úhel  $15^\circ$ .

Okrajové podmínky a zatížení modelu zobrazeny na Obr. 42.



Obr. 42. Okrajové podmínky a zatížení modelu

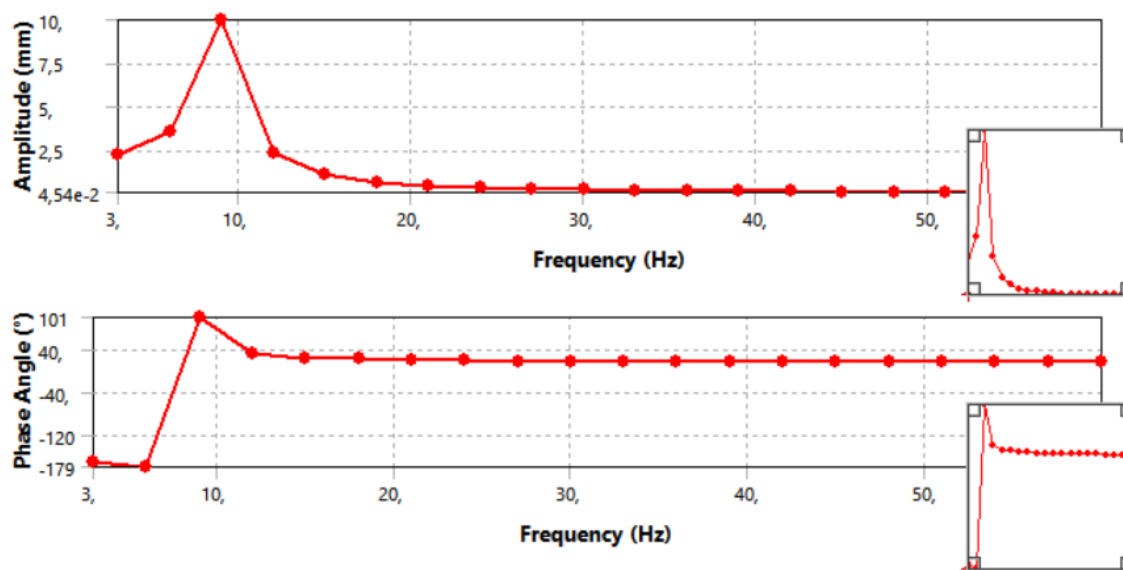
Provedli jsme harmonickou analýzu předepjatého modelu pro rozsah frekvencí 3-60 Hz a zjistili tak harmonickou odezvu. Pro frekvenci 20 Hz jsme vykreslili řešení v časové (Obr. 43) a frekvenční (Obr. 44) doméně. Z druhého grafu vyplývá, že vlastní frekvence soustavy je přibližně rovna 9 Hz, což je v souladu s očekáváním<sup>8</sup>.



Obr. 43. Řešení v časové doméně

Fázové zpoždění průběhu deformace oproti průběhu síly *Force* je 21,3 °.

<sup>8</sup> Viz Příloha B – katalog výrobce



Obr. 44. Řešení ve frekvenční doméně

Při pohledu na Obr. 44 vidíme, že pracovní oblast silentbloku se nachází za první vlastní frekvencí. Dochází tak k poklesu amplitudy vynucených kmitů – navržený silentblok správně zastává svoji funkci.

Na základě výsledků můžeme prohlásit, že makromodel silentbloku se chová podle představ a bez možnosti dalších srovnávacích experimentů jej považujeme za upotřebitelný pro využití v praxi.

Simulace celého motoru by byla jen syntézou dílčích výsledků na jednotlivých silentblocích.

## D. ZÁVĚR

Cílem mé práce bylo popsat metodu, jak navrhnout zjednodušený makromodel model silentbloku založený na soustředěných parametrech. Provedl jsem několik experimentů, s jejichž pomocí jsem popsal materiálový model pružného členu silentbloku, jak pro statické, tak pro dynamické analýzy. Statické i dynamické zatížení silentbloku jsem realizoval vždy v axiálním směru, pro který byly soustředěné parametry náhradního modelu optimalizačními metodami identifikovány přímo. Pomocí naladěných materiálových modelů pro statickou analýzu (hyperelastický materiál) a dynamickou analýzu (lineární materiál) jsem identifikoval hledané vlastnosti i ve směru radiálním. Identifikované parametry náhradního modelu jsem implementoval do makromodelů v Ansysu. Chování makromodelů silentbloku s těmito parametry jsem porovnal s experimentálně získanými daty. Na základě dobré shody výsledků jsem usoudil, že popsaná metoda je aplikovatelná obecně na silentbloky různých tvarů i materiálů, čímž jsem splnil předem vytyčený cíl.

Pro statickou analýzu je silentblok reprezentován soustavou tří nelineárních pružin ve směrech os referenčního souřadného systému. Pro dynamickou analýzu jsem za náhradní model zvolil model Kelvinův – paralelně řazenou pružinu s tlumičem. Soustředěné parametry tohoto modelu obecně závisí na frekvenci a statickém předpětí, přičemž některé ze závislostí lze zanedbat. Zanesení konkrétních závislostí do makromodelu jsem popsal ve své práci.

Výsledný makromodel představuje oproti 3D modelu silentbloku obrovskou úsporu výpočetního času, což byl také smysl tohoto počínání.

Již před začátkem řešení jsem se rozhodl, především kvůli technické náročnosti experimentů, zanedbat vliv teploty na výsledné vlastnosti materiálu. Vyšetření závislosti zkoumaných vlastností na teplotě by mohlo být vhodným tématem případné navazující práce.

## E. POUŽITÁ LITERATURA

- [1]. Treolar, L. R. G. *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford : Clarendon Press, 1949.
- [2]. Balda, Miroslav. *Úvod do Statistické Mechaniky*. Plzeň : ISBN 80-7082-820-X, 2001.
- [3]. Kožešník, Jaroslav. *Teorie podobnosti a modelování*. Praha : Academia, 1983.
- [4]. Holodniok, Martin a kol. *Metody analýzy nelineárních dynamických modelů*. Praha : Academia, 1986.
- [5]. Meissner, B. a Zilvar, V. *Fyzika polymerů - struktura a vlastnosti polymerních materiálů*. Praha : SNTL, 1987.
- [6]. Chae, Chang-Kook. SAE Papers. [Online] 17-20. Květen 1999. [Citace: 5. Únor 2015.] [www.papers.sae.org](http://www.papers.sae.org).
- [7]. Morman Jr., K. N. Rubber Division. [Online] 6-9. Říjen 1987. [Citace: 9. Únor 2015.] [www.rubberchemtechnol.org](http://www.rubberchemtechnol.org).
- [8]. R. Brepta a kol. *Mechanické kmitání - technický průvodce 71*. Praha : Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5.
- [9]. [http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=elastomer\\_neoprene\\_chloroprene](http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=elastomer_neoprene_chloroprene). [Online]
- [10]. Mollíková, Eva. <http://www.slideserve.com/deanna/e-mollikov>. [Online]
- [11]. UTB, Fakulta technologická. [http://ufmi.ft.utb.cz/texty/fyzika\\_pol/FP\\_08.pdf](http://ufmi.ft.utb.cz/texty/fyzika_pol/FP_08.pdf). [Online]
- [12]. ZČU. <http://www.ateam.zcu.cz/download/pryz.pdf>. [Online]
- [13]. Hu, W. a kol. Science Direct. [Online] 11. Listopad 2011. [Citace: 13. Březen 2015.] <http://www.sciencedirect.com.ezproxy.techlib.cz/science/article/pii/S0168874X11001806>.
- [14]. Ogden, R.W. a kol. Springer Link. [Online] 18. Srpen 2004. [Citace: 14. 4 2015.] <http://link.springer.com.ezproxy.techlib.cz/article/10.1007%2Fs00466-004-0593-y>.
- [15]. Dhondt, Guido D. C. [Online] Prosinec 2004. [Citace: 13. 4 2015.] <http://site.ebrary.com/lib/techlib/reader.action?docID=10114059>.

## **F. SEZNAM PŘÍLOH**

**Příloha A:** Měřicí technika z experimentů I a II

**Příloha B:** Katalog výrobce silentbloku

## **Příloha A**

### **Experiment I:**

Univerzální trhací stroj Heckert FPZ100/1

Silové čidlo s rozsahem do 100 kN

### **Experiment II:**

Hydropuls zn. Innova – Typ AS 250Q M|6A

Laboratorní zdroj zn. Diametral – Typ: P130R51D

Příkon: 160 W

Výstup: 1 x 30V / 4A, 1 x 5V / 3A

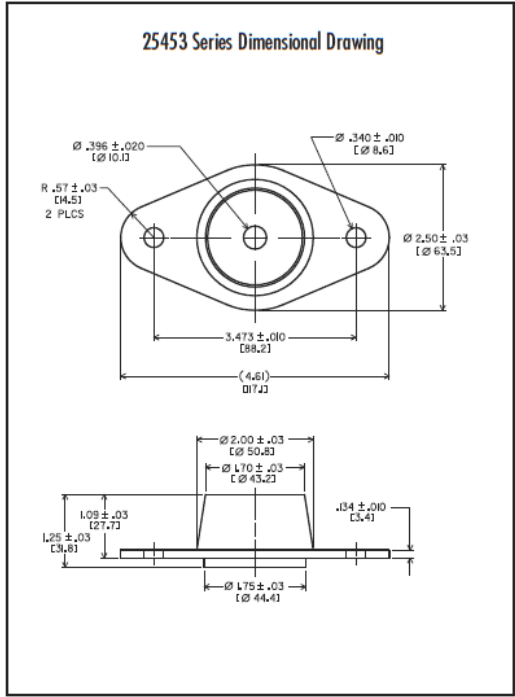
Zesilovač zn. HBM – Typ: RM4220



**Příloha B**

**HR MOUNT SERIES: 25453**

Dimensions & Performance Characteristics



AXIAL STATIC LOAD RANGE - 25453		
Code	Nominal	Color Code
-1	50 lbs.	Red
-3	90 lbs.	White
-5	150 lbs.	Blue
-7	215 lbs.	Purple
-9	300 lbs.	Gray

