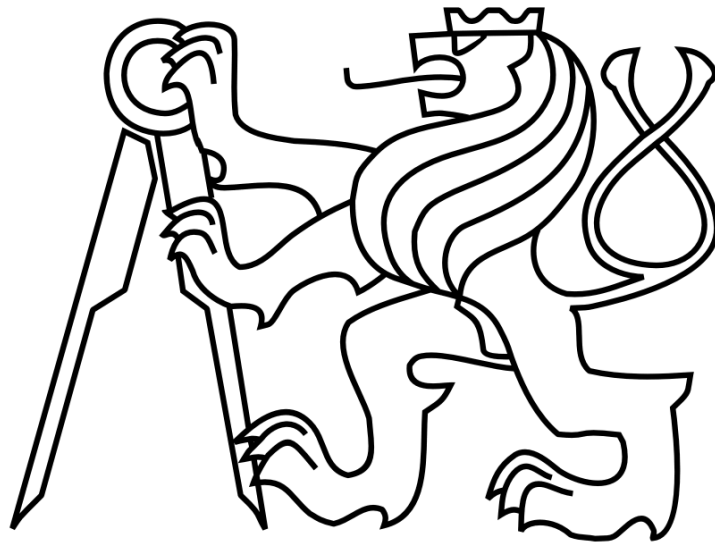


České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Optimalizace mechanických vlastností mechanismu TetraSphere

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jaroslav Štorkán

Obor: Aplikovaná mechanika

Praha 2015

Vložit zadání

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá analýzou mechanismu TetraSphere. Klade si za cíl provést co nejkomplexnější prozkoumání vlastností daného mechanismu. Nejdříve budou provedeny kinematické analýzy, kde nejzákladnější je hledání dosažitelného pracovního prostoru. Dále výpočet dexterity a s tím spojené zkoumání singularit. Z dynamických analýz bude proveden výpočet globální dynamiky a modálních vlastností. A poslední analýzou bude výpočet tuhosti robota. Použité analýzy budou využity pro optimalizaci mechanických vlastností robota.

Klíčová slova

TetraSphere, analýza mechanismů, dexterita, globální dynamika, modální analýza, tuhost robotických systémů, optimalizace, genetický algoritmus

Abstract

The thesis deals with the analysis of the mechanism TetraSphere. It aims to carry out the most comprehensive examination of the characteristics of the mechanism. The kinematic analysis will be made, where the most basic is the search of attainable workspace. Furthermore, dexterity and related exploration of singularities will be calculated. Dynamical analyses such as global dynamics and modal properties will be performed. The final analysis will calculate the stiffness of the robot. All the analyzes will be used to optimize the mechanical properties of the robot.

Keywords

TetraSphere, analysis mechanisms, dexterity, global dynamics, modal analysis, stiffness robotic systems, optimization, genetic algorithm

Rád bych poděkoval vedoucímu této práce prof. Ing. Michaelovi Valáškoví, DrSc. za věnovaný čas a mnoho cenných rad. Nejvíce mu však děkuji za možnost pracovat v Ústavu mechaniky, biomechaniky a mechatroniky, která mi umožnila vidět mechaniku nejen očima řadového studenta. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu během celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci na téma Optimalizace mechanických vlastností mechanismu TetraSphere vypracoval samostatně pod vedením prof. Ing. Michaela Valáška, DrSc. a podklady použité k této práci jsou uvedeny v seznamu citovaných zdrojů.

V Mostě dne:

.....

Jaroslav Štorkán

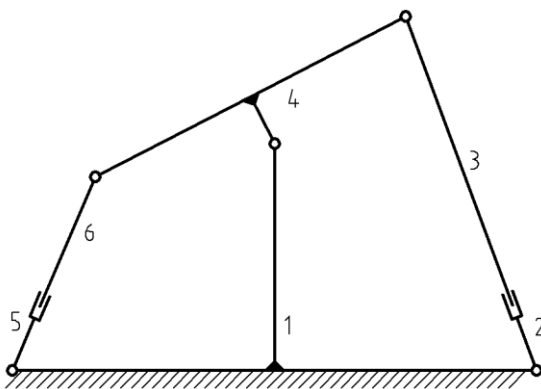
Obsah

1 Úvod.....	1
2 Představení mechanismu TetraSphere	3
3 Kinematické analýzy.....	6
3.1 Analýza dosažitelného prostoru	6
3.2 Dexterita.....	9
4 Elastostatické analýzy.....	16
4.1 Tuhost.....	16
5 Dynamické analýzy.....	28
5.1 Globální dynamika	28
5.2 Modální analýza	43
6 Optimalizace	51
6.1 Genetické algoritmy	53
6.2 Pareto množina.....	56
7 Optimalizace mechanismu TetraSphere	58
7.1 Optimalizační parametry	58
7.2 Cílová funkce	64
7.3 Výsledky optimalizace	66
8 Závěr	80
Použitá literatura	81
Přílohy: Přiložené DVD	

1 Úvod

Vývoj nových typů robotů je časově i finančně velmi náročná činnost. To je také důvod proč většina firem spíše inovuje svoje již vyvinuté roboty a vývoj nových struktur je pro ně méně prioritní záležitost. Tento fakt je vidět i v současném průmyslu, kde většina používaných robotů jsou manipulátory a svařovací automaty typu mechanická paže (např. roboty značek Kuka, nebo Motoman), nebo CNC obráběcí stroje, kde se zase často vyskytuje portálový mechanismus se třemi na sebe kolnými osami. Přitom existuje mnoho nových koncepcí, které mají mnohdy větší potenciál, ale jejich nasazení by zřejmě nebylo rentabilní a tak existují pouze jako prototypy v laboratořích, matematické modely, nákresy, nebo jsou pouze v hlavách lidí, kteří je vymysleli.

Tato diplomová práce se zabývá jednou z nejdůležitějších etap vývoje robota a to analýzami a optimalizací mechanických vlastností, tedy tou etapou vývoje, která má hlavní vliv na užité vlastnosti finálního produktu. Tato práce částečně navazuje na moji bakalářskou práci Kinematické a dynamické řešení rovinného mechanismu [5], kde se na jednoduchém mechanismu (obr. 1.1) prováděly některé výpočty a analýzy. Jednalo se o mechanismus s jedním stupněm volnosti, který představoval rotační pohyb platformy. Pohon byl tvořen dvěma teleskopickými nohama, mechanismus byl tedy redundantní. Cílem bylo řešit inverzní kinematickou a dynamickou úlohu a pomocí vypočítaných velikostí pohonných sil studovat singularitu mechanismu. Nakonec se vytvořený kinematický a dynamický model použil pro simulaci řízení robota, ve které se přímo během simulace určovaly velikosti pohonných sil. Díky tomu bylo řízení rychlejší, přesnější a stabilnější.

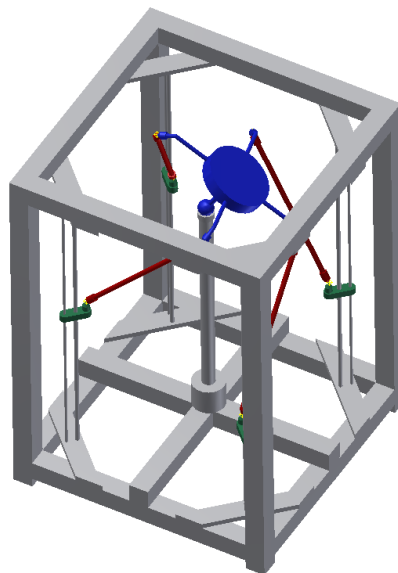


Obr. 1.1 Schéma mechanismu z bakalářské práce [5]

Hlavní pokrok této diplomové práce proti zmíněné bakalářské práci je v zadaném mechanismu, který vychází z řešeného v bakalářské práci, ale je prostorový a složitější. Další rozdíl je v řešených analýzách. Zatímco v minulé práci se hledaly singulární polohy pouze z hodnot pohonných sil, tak zde se hledají například pomocí dexterity, která je mnohem spolehlivější a univerzálnější. Dalším rozdílem je, že na mechanismus se nepohlíží pouze jako na soustavu dokonale tuhých těles, ale je řešen také elastostaticky s cílem vyhodnotit tuhost. V této práci se předpokládá, že pohony nejsou ideální, ale mají určité mezní stavy, z čehož vychází výpočet globální dynamiky, který slouží k určení dosažitelných dynamických vlastností v závislosti na pohonech. V bakalářské práci byly pohony uvažovány jako ideální. A posledním rozdílem je provedení optimalizace mechanických vlastností a určení Pareto množiny, namísto hledání konkrétní varianty mechanismu s konkrétními mechanickými vlastnostmi.

2 Představení mechanismu TetraSphere

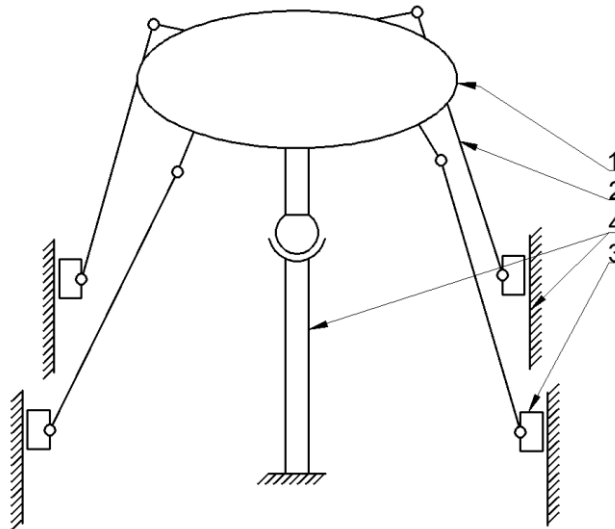
Různé druhy mechanismů je možné třídit do různých skupin, na příklad podle využití nebo konstrukce. Využití mechanismu je možné brát z pohledu technologie například svařovací robot, nebo z pohledu mechaniky například robot sloužící k vykonávání určitého typu pohybu například rovinného kartézského. TetraSphere je mechanismus sloužící k řízení sférického pohybu. To znamená, že jedno jeho těleso (platforma) vykonává sférický pohyb a k tomuto tělesu je připevněno zařízení, které je nutné sféricky polohovat. Sférické mechanismy nejsou tak běžné jako třeba kartézské, ale svůj význam a uplatnění mají. Využívají se například k polohování hlav obráběcích strojů, antén, teleskopů, kamer, nebo jakéhokoliv jiného předmětu či zařízení, které se má pohybovat sférickým pohybem.



Obr. 2.1 Mechanismus TetraSphere

TetraSphere (zobrazen na obr. 2.1) je typickým zástupcem mechanismů s paralelní kinematickou strukturou. Vznikl zobecněním mechanismu z obr. 1.1 z roviny do prostoru, rotační pohyb zmíněného mechanismu je zobecněn na sférický (rotační pohyb je speciální případ sférického). Kinematické schéma mechanismu je zobrazeno na obr. 2.2. Platforma (1) představující centrální těleso je tedy připojena k rámu (4) sférickou vazbou, čímž je zabráněno, aby konala jiný pohyb než sférický. Tato vazba je řešena tak, aby měla vysokou pohyblivost a umožnila kontinuální pohyb libovolnou trajektorií, která nepřekračuje rozsah její pohyblivosti. Možné konstrukční řešení této vazby je sestava jamky a koule k sobě přitahované magnetickým polem, klasický kardanův závěs je nevhodný, protože obsahuje dvě singulární polohy, z nichž minimálně jedna by se nalézala v pracovním prostoru a omezovala

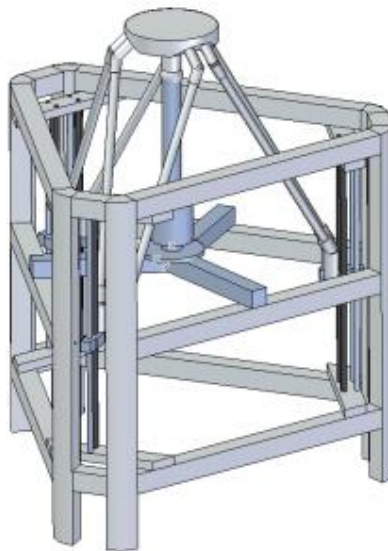
pohyb. Řízení pohybu zajišťují 4 nohy (2) spojující platformu s vozíky (3). Nohy jsou na obou stranách připevněny sférickými vazbami. Vozíky mohou být řízeny různými způsoby, nejpravděpodobnější je použití pohybových šroubů a vodících tyčí.



Obr. 2.2 Kinematické schéma mechanismu TetraSphere

Fundamentálním parametrem všech sférických mechanismů je velikost pracovního prostoru, bohužel u většiny mechanismů, které umožňují sférický pohyb, je tento parametr velmi omezující. Nejprve je třeba stanovit způsob měření velikosti pracovního prostoru. Sférický pohyb je pohyb se třemi stupni volnosti, to znamená, že k získání jednoznačného popisu orientace v prostoru (matice směrových kosinů nebo kvaternionu) jsou potřeba alespoň právě tři nezávislé souřadnice, nejčastěji se využívá sada tří úhlů nebo tří prvků kvaternionu. V této práci se bude vždy pracovat se soustavou Eulerových úhlů. Posloupnost úhlů je brána tak jak, je popsána v [6] (protože v různých zdrojích se používá různé značení a různá definice těchto úhlů), to znamená úhly precese (ψ rotace okolo osy z), nutace (θ rotace okolo osy x), rotace (φ rotace okolo osy z). Rotace jsou brány vždy okolo lokálních os v pravotočivém směru, tak aby se daly jednoduše použít transformační matice. Globální souřadný systém má počátek ve sférické vazbě a je uvažován tak, aby osa z byla rovnoběžná se sloupkem rámu držícím sférickou vazbu a osy x a y protínají vedení vozíků. Lokální osa z se uvažuje jako kolmice k rovině platformy procházející sférickou vazbou a vazby mezi platformou a nohami leží v rovinách x - z a y - z . Z toho plyne, že poslední úhel rotace nemá vliv na orientaci této roviny v prostoru, tento fakt lze jednoduše dokázat. Po roznásobení transformačních matic je ve výsledku patrné, že členy představující lokální osu z nejsou závislé na úhlu rotace. Za předpokladu, že stroj bude polohovat obráběcí hlavu nebo nějakou

anténu, není důležitá poslední rotace, protože na obráběcí hlavě je stejně rotující nástroj a u antén je také důležitá orientace pouze jedné osy. Z toho plyne, že k měření velikosti pracovního prostoru stačí znát rozsah pouze dvou úhlů (precese a nutace) a doplněním požadavku, aby pracovní prostor byl rotačně symetrický podle globální osy z (neomezený úhel precese), se dá velikost pracovního prostoru vyjádřit jediným úhlem nutace což je výhodné. Jedním z požadavků na vlastnosti robota je, aby velikost pracovního prostoru měřená úhlem nutace dosahovala hodnoty alespoň 100° . Jak bylo naznačeno výše, velikost pracovního prostoru je u většiny sférických mechanismů velmi omezující parametr. Například kardanův závěs obsahuje singulární polohy, skrz které může mechanismus procházet avšak ne vždy plynule, vzhledem k požadované nutaci by se minimálně jedna tato poloha nacházela v pracovním prostoru. Mechanismy s paralelní kinematickou strukturou sice nemají problémy s plynulým pohybem ve svém pracovním prostoru, ale naráží na problém, že jejich pracovní prostor je mnohem menší než požadovaný pracovní prostor. Například mechanismus EcoSpeed (naklápěcí hlava Sprint Z3 firmy DS Technologie) nedovoluje velkou nutaci kvůli singularitám [7] a například HexaPod je tom podobně. Existují další mechanismy umožňující sférický pohyb, všechny mají svá pozitiva i negativa, jedním z významných zastupitelů je mechanismus Hexasphere (obr. 2.3), který má výborné mechanické vlastnosti, ale za cenu šesti pohonů [8].



Obr. 2.3 Mechanismus HexaSphere [8]

TetraSphere představuje mutaci mechanismu HexaSphere, jeho konstrukce je téměř stejná, hlavním rozdílem je snížený počet pohonů na čtyři se snahou v co možná nejvyšší míře zachovat mechanické vlastnosti.

3 Kinematické analýzy

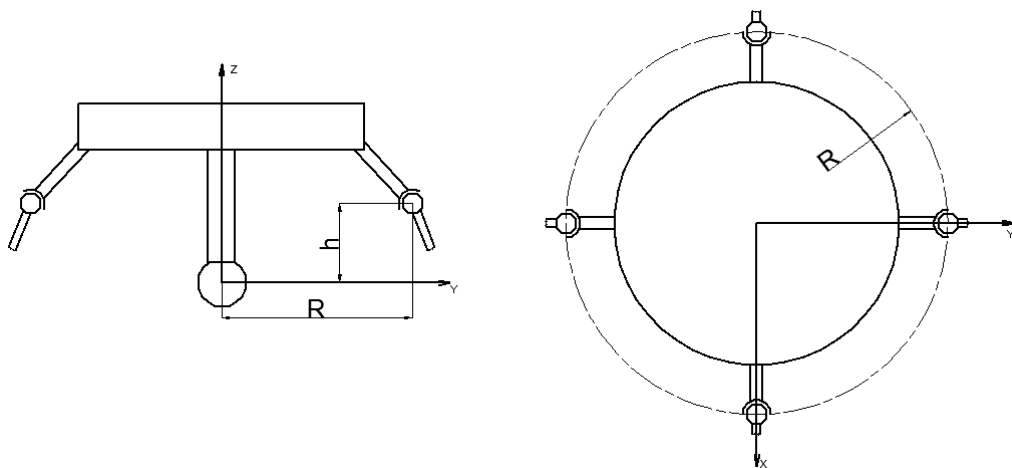
V této skupině se nalézají analýzy, které vycházejí pouze z kinematických vlastností mechanismu. To znamená, že k jejich provedení je potřeba znát pouze topologii a některé charakteristické rozměry, ale není potřeba znát parametry pohonů nebo hmotové charakteristiky (hmotnosti a momenty setrvačnosti těles). Z kinematických analýz bude provedena analýza dosažitelného prostoru a výpočet dexterity.

3.1 Analýza dosažitelného prostoru

Analýza dosažitelného prostoru spočívá v učení velikosti prostoru, ve kterém se může mechanismus nalézat, aniž by nebyly porušeny vazby nebo nedošlo ke kolizím. Typickým příkladem polohy tohoto mechanismu, která není dosažitelná, je případ, kdy poloha platformy je taková, že vzdálenost mezi sférickou vazbou mezi platformou a nohou a vedení příslušného vozíku je větší než délka nohy. Je jasné, že do takové polohy se mechanismus nemůže dostat, aniž by došlo k nějakému poškození, které je nepřipustné. V této práci byl zmíněn pojem velikost pracovního prostoru, to však není totéž jako velikost dosažitelného prostoru. To že je nějaká poloha dosažitelná, není postačující podmínka, aby byla součástí pracovního prostoru. Je to dáno tím, že v celém pracovním prostoru musí být pohony schopné překonávat všechny silové účinky (včetně D'Alembertových silových účinků), které působí na platformu, a to pouhá dosažitelnost polohy nezaručuje. Z toho plyne, že pracovní prostor je podmnožinou dosažitelného prostoru.

V této analýze se nebudou řešit problémy s mechanickými kolizemi, bude se předpokládat, že konstruktér dokáže navrhnout mechanismus tak, aby nedocházelo ke kolizím. Tím se problém zjednodušuje a jedinou podmínkou dosažitelnosti polohy je existence reálného řešení vazbových podmínek. Tato podmínka určuje princip výpočtu dosažitelného prostoru. Nejprve se vytvoří kinematický model sestavením kinematických vazbových podmínek. K tomu je potřeba zvolit vhodnou sadu souřadnic, nejrobustnější způsob je použít soustavu fyzikálních souřadnic (6 souřadnic pro každé těleso jednoznačně definujících polohu a orientaci v prostoru). Jednotlivé vazbové podmínky se potom dají napsat tak, aby představovaly opravdové vazby. Použití těchto souřadnic pro výpočet dosažitelného prostoru zajistí kontrolu dodržení všech vazeb mechanismu, proto je to robustní přístup. Tento přístup je rozumný u složitých mechanismů, u kterých není jasné, kde mohou

nastat problémy s nesplněním vazeb. Mechanismus TetraSphere je v tomto ohledu velmi jednoduchý. Zde opravdu stačí zkontrolovat, zda není „přetržená“ některá noha. Proto není potřeba používat celou sadu fyzikálních souřadnic, ale je možné některé souřadnice vyřadit a tím snížit počet vazbových podmínek potažmo náročnost úlohy. Pro analýzu dosažitelného prostoru budou použity souřadnice popisující polohu platformy (úhly precese, nutace a rotace) a polohy vozíků na pojezdech. Úhly precese a nutace jsou nezávislé, úhel rotace je možné volit teoreticky libovolně (za předpokladu polohování pouze orientace roviny platformy), to bylo napsáno již v minulé kapitole. Úhel rotace se často uvažuje jako záporně vzatý úhel precese, to odstraňuje riziko zamotání nohou a s tím spojené riziko kolizí. Důvod volby právě takového úhlu rotace je prostý, pro takto zvolený úhel rotace se platforma vlastně jen pootočí o úhel nutace do směru daným úhlem precese a nedochází k nežádoucí rotaci, která by zamotávala nohy. Ukazuje se, že pro tento mechanismus to není vhodná volba. V další kapitole zabývající se dexteritou bude vysvětleno proč. Proto je lepší úhel rotace volit jako záporně vzatý úhel precese zvětšený o konstantu. Ještě výhodnější je tuto konstantu nahradit vhodnou funkcí úhlu nutace (3.1). Vazbové podmínky pro zvolenou soustavu souřadnic je nejjednodušší vytvořit vyjmutím těles (nohou). Tím se získají 4 vazbové podmínky, což odpovídá 7 souřadnicím a 3 stupňům volnosti.



Obr. 3.1 Hlavní rozměry platformy

Významné rozměry platformy potřebné pro výpočet jsou znázorněny na obr. 3.1. Jediným podstatným rozměrem rámu je poloměr roztečné kružnice, na kterém se nacházejí sférické vazby na vozících, ve výpočtech je tento rozměr označován znakem H . Vazbové podmínky vytvořené vyjmutím těles vyjadřují, že vzdálenost mezi sférickými vazbami na noze je konstantní (podmínka dokonalé tuhosti tělesa).

$$\varphi = -\psi + k_1\theta^4 + k_2\theta^2 + k_3 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_{n1} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi)\mathbf{T}_{\varphi x}(\theta)\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)[0 \ R \ h \ 1]^T - [0 \ H \ s_1 \ 1]^T \quad (3.2)$$

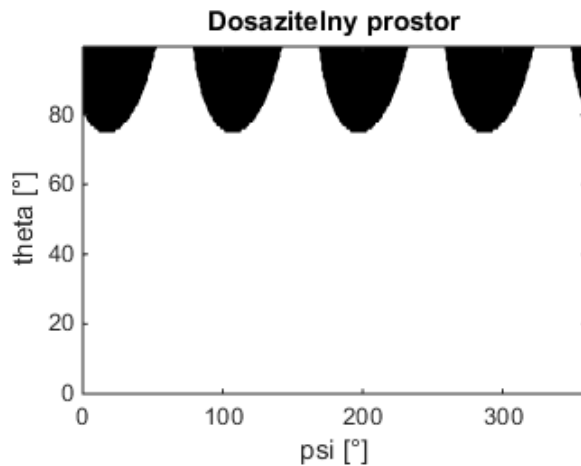
$$\mathbf{r}_{n2} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi)\mathbf{T}_{\varphi x}(\theta)\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)[-R \ 0 \ h \ 1]^T - [-H \ 0 \ s_2 \ 1]^T \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_{n3} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi)\mathbf{T}_{\varphi x}(\theta)\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)[0 \ -R \ h \ 1]^T - [0 \ -H \ s_3 \ 1]^T \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}_{n4} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi)\mathbf{T}_{\varphi x}(\theta)\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)[R \ 0 \ h \ 1]^T - [H \ 0 \ s_4 \ 1]^T \quad (3.5)$$

$$f_i = \mathbf{r}_{ni}^T \mathbf{r}_{ni} - L^2 = 0 \quad (3.6)$$

Proměnné $\mathbf{r}_{n1} - \mathbf{r}_{n4}$ představují vždy vektor, který začíná ve vazbě mezi rámem a nohou a končí ve vazbě mezi platformou a nohou, proměnné s_i jsou pozice vozíků měřené v ose z. Protože délka nohy L je konstantní, pak je možné psát všechny čtyři vazbové podmínky ve tvaru (3.6), kde je zobrazena i-tá vazbová podmínka. Dobrou vlastností takto získaných vazbových podmínek je, že v každé vazbové podmínce je jen jedna neznámá. Soustava se tedy rozpadá na rovnice o jedné neznámé. To významně zvyšuje šanci na nalezení řešení v uzavřeném tvaru, které je vždy výhodné znát. V tomto případě bylo snadné řešení nalézt, přesný tvar zde uveden není, protože výrazy by byly příliš složité vlivem součinu tří matic směrových cosinů. Pro každý vozík existují dvě možná řešení, jedno je tvořeno součtem čísla a odmocniny a druhé tím samým ale rozdílem. Varianta se součtem je konfigurace nohy, kde vede noha směrem nahoru (ve směru osy z) od platformy, v případě rozdílu vede noha směrem dolů. Hledané řešení, se kterým počítá konstrukce, jak je znázorněno na obr. 2.1, odpovídá variantě s rozdílem. Podmínkou pro dosažitelnost polohy je reálné řešení neboli kladný argument odmocniny.



Obr. 3.2 Příklad výpočtu dosažitelného prostoru pro rozměry $H=0.35$, $L=0.4$ m, $R=0.1$ m, $h=0.05$ m, $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=1$ rad

Pro mechanismus TetraSphere může vypadat dosažitelný prostor například tak, jak je ukázáno na obr. 3.2, kde bílá oblast je dosažitelná a černá je nedosažitelná. Nejjednodušší spolehlivý způsob jak u tohoto mechanismu zvětšit dosažitelný prostor je zvětšit délku nohou.

3.2 Dexterita

V minulé kapitole se studoval dosažitelný prostor mechanismu, kde se pouze sledovalo, zda je možné umístit mechanismus do dané polohy, aniž by se přerušily vazby. Neřešilo se, zda v každé z těchto poloh dokážou pohony překonávat síly působící na platformu mechanismu a měnit pohybový stav mechanismu (nezávisle řídit zrychlení všech nezávislých souřadnic). Zrychlení mechanismu lze podle D'Alembertova principu nahradit silovými účinky působícími na mechanismus. To znamená, že během analýzy je možné pohlížet na síly působící na mechanismus a na zrychlení mechanismu jako na jedno a to samé. Polohy mechanismu, ve kterých pohony nejsou schopny překonávat zatěžující síly, se nazývají singulární a nesmí se nacházet v pracovním prostoru. Aby bylo možné vyhodnotit, zda v dané poloze jsou pohony schopné překonávat silové účinky působící na mechanismus, je nutné získat vzájemný silový vztah mezi silami v pohonech a zatěžujícími silami mechanismu.

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}^T \mathbf{n} \quad (3.7)$$

Vztah (3.7) je uveden v [4], pouze zde jsou použity jiné symboly, \mathbf{p} představuje vektor sil zatěžující mechanismus, \mathbf{J} je lineární operátor a \mathbf{n} je vektor sil v pohonech, použití lineárního operátoru vychází z linearit úloh statiky, předpokládá se zanedbání vlivu nelinearit typu pasivních odporů apod. Vektor sil působících na mechanismus není brán tak, že se v něm vyskytnou všechny síly a momenty působící na mechanismus, ale obsahuje tyto silové účinky přepočítané na nezávislé souřadnice. To znamená, že jeho dimenze je vždy rovna počtu nezávislých souřadnic neboli počtu stupňů volnosti. Je-li potřeba, aby existoval vektor \mathbf{n} pro libovolný vektor \mathbf{p} , je nutné, aby matice \mathbf{J}^T měla hodnotu rovnou dimenzi vektoru \mathbf{p} . To znamená, že řádky matice \mathbf{J}^T nesmí být lineárně závislé, protože kdyby byly tak budou závislé i prvky vektoru \mathbf{p} . V takovém případě by pohony byly schopny překonat jen zatěžující síly, které jsou stejným způsobem závislé, ale to ony obecně nejsou.

Postup výpočtu by mohl být následující, v dané poloze mechanismu se vždy určí matice \mathbf{J} a poté se určí její hodnota (transpozice nemění hodnotu). Takový výpočet má však zásadní nedostatek, dokáže říci, zda je nebo není poloha singulární, ale nic víc neřekne. To způsobí, že při analýze kde se postupuje systematickým analyzováním diskrétních poloh tak, že se zadávají souřadnice po krocích, které nemohou být nekonečně malé, se singulární poloha nalezne jen výjimečně. To je dané tím, že singulární polohy z pravidla nepokrývají souvislou oblast (v dosažitelném prostoru), ale jsou to buď osamělé polohy, nebo množiny

poloh, které rozdělují pracovní prostor na části. Pro případ je-li u mechanismu se dvěma stupni volnosti obdélníkový dosažitelný prostor (obsahující singulární polohy), tak je nepravděpodobné, že se v něm bude vyskytovat singulární oblast (která má míru ve 2D), ale singularity budou tvořit spíše body a čáry. V takovém případě je nepravděpodobné, že výpočet, který postupuje po krocích, tyto polohy nalezne, ale bude je spíše přeskakovat. Další nevýhodou je, že se tímto výpočtem nedá zjistit, jak moc se poloha svými vlastnostmi podobá singulární.

Hodnost matice tedy není vhodný nástroj na vyhodnocení singularit. Jako výhodnější se může jevit výpočet determinantu matice, který má některé vhodnější vlastnosti. Hlavní přednost determinantu je, že může nabývat libovolných hodnot a ne jen celých čísel, což byl problém hodnosti matice. Pro singulární matici nabývá nulové hodnoty, a nenulový je pro regulární matici. To znamená, že podle jeho hodnoty je možné odhadnout, jak moc se poloha podobá singulární. Má však dvě nevýhody. Nedá se určit hraniční hodnota determinantu, pro kterou už je nutné považovat polohu za singulární. Hlavní nevýhoda determinantu je, že pro jakoukoliv matici, která není čtvercová, nabývá nulové hodnoty. Nelze ho tedy využít pro redundantní mechanismy a tím je vyloučeno jeho použití po TetraSphere.

Běžně používaná metoda na výpočet dexterity je použit převrácenou hodnotu podmíněnosti matice (3.8), tato metoda je podrobně popsána v [4]. Podmíněnost matice je podíl největšího a nejmenšího singulárního čísla, které je možné získat ze singulárního rozkladu. Tento přístup zachovává všechny výhody determinantu oproti hodnosti matice. Zároveň lze použít pro matice libovolných rozměrů. Na rozdíl od determinantu takto spočítaná dexterita je vždy z intervalu od nuly do jedné, zatímco determinant byl z celého oboru reálných čísel. Nulová hodnota odpovídá matici, jejíž hodnost je nižší než dimenze vektoru \mathbf{p} , to znamená singulární poloze. Dexterita rovna jedné je ideální a odpovídá například ortonormální matici. Ani tento postup výpočtu není ideální, například v případě změny velikosti mechanismu v určitém měřítku se může změnit dexterita, což by z principu neměla, tento nežádoucí jev lze odstranit úpravou výpočtu. U mechanismu TetraSphere velikost neovlivní dexteritu a tak bude použit tento postup.

$$D = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J})} \quad (3.8)$$

K výpočtu je nutné nejdříve získat matici \mathbf{J} . Protože definuje vztah mezi silovými účinky na platformě a v pohonech, je možné ji získat sestavením rovnic rovnováhy

převedením do maticového zápisu a upravením do potřebného tvaru. To je však postup velmi časově náročný protože rovnice rovnováhy se sestavují pomalu a je tam velká pravděpodobnost, že vznikne chyba. Použitím principu virtuálních výkonů lze odvodit, že matice \mathbf{J} má i kinematický význam.

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{z}} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{z}} \quad (3.10)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.11)$$

Rovnice (3.9) vyjadřuje zákon virtuálních výkonů, který říká, že virtuální výkon silových účinků působících na mechanismus je stejný jako virtuální výkon sil v pohonech. Dosazením (3.7) do této rovnice a pokrácením vznikne výsledný kinematický vztah. Vektorem se sice krátit nedá, ale za předpokladu, že prvky vektoru mohou nabývat libovolných hodnot to udělat lze. Vztah (3.11) říká, že rychlost pohybu pohonů je rovna součinu matice \mathbf{J} s vektorem popisujícím rychlost pohybu mechanismu. Určování matice \mathbf{J} pomocí kinematiky je z pravidla rychlejší a pravděpodobnost vzniku chyby je nižší než sestavováním rovnovážných rovnic.

Před výpočtem matice je třeba nejprve definovat vektory $\dot{\mathbf{z}}$ a $\dot{\mathbf{q}}$. U vektoru $\dot{\mathbf{z}}$ není moc nad čím se rozhodovat, jednotlivé prvky budou představovat rychlosti jednotlivých vozíků. Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ není takto jednoznačný, na první pohled by se dalo říci, že pro sférický mechanismus stačí zvolit nezávislé souřadnice jako sadu tří úhlů například Eulerovy úhly a jako prvky vektoru $\dot{\mathbf{q}}$ použít jejich derivace podle času. To by byla však zásadní chyba, každá sada tří úhlů sloužící k popisu sférického pohybu má své vlastní singularity a výpočet dexterity by takovou singularitu vyhodnotil jako singularitu mechanismu, tím by byly výsledky nepoužitelné. Aby výpočet dexterity nebyl zkreslený zvolenými souřadnicemi je potřeba, aby jednotlivé prvky vektoru $\dot{\mathbf{q}}$ představující rotace byly nezávislé, to znamená, aby tvořily ortonormální systém. Například u zmíněných Eulerových úhlů pro nulový úhel nutace představují úhly precese a rotace rotaci okolo stejné osy, to znamená, že by v matici \mathbf{J} byly dva stejné sloupce, což znamená, že je matice singulární bez ohledu na vlastnosti mechanismu v této poloze. Naopak při nutaci rovné $\pi/2$ rad jsou všechny rotace na sebe kolmé a dexterity mechanismu není zvolenými souřadnicemi ovlivněná. Různé sady souřadnic mají svoje singularity na různých místech, ale vždy existují, proto je potřeba použít jiný přístup.

Jako vektor $\dot{\mathbf{q}}$ je možné použít vektor úhlových rychlostí, u kterého je zajištěno, že jeho prvky jsou rotace, které jsou na sebe kolmé. Postup, který zde bude uveden, je převzat z

[8]. Pro výpočet i -tého řádku matice \mathbf{J} bude postup následující. Rychlost pohybu vazby mezi platformou a nohou je možné vyjádřit pomocí matice směrových cosinů platformy, matice úhlových rychlostí platformy a rádius vektoru dané vazby na platformě v souřadném systému platformy.

$${}^1\mathbf{v}_{p_i} = \mathbf{S}_{12} {}^2\boldsymbol{\Omega}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2p_i} \quad (3.12)$$

Protože součin matice úhlových rychlostí a rádius vektoru představuje vektorový součin, který je antikomutativní je možné rovnici upravit na tvar (3.13).

$${}^1\mathbf{v}_{p_i} = -\mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_i} {}^2\boldsymbol{\omega}_{12} \quad (3.13)$$

Tento vztah je výhodné použít pro výpočet rychlostí sférických vazeb mezi nohami a platformou. Z těchto rychlostí je možné spočítat rychlosti jednotlivých vozíků. Derivováním vazbové podmínky (3.6) podle času se získá vztah (3.14). Členy ${}^1\mathbf{r}_{1p_i}$ a ${}^1\mathbf{r}_{1v_i}$ jsou rádius vektory sférických vazeb mezi i -tou nohou a platformou a mezi tutéž nohou a vozíkem, jejich vyjádření je s pomocí inverzní kinematiky v uzavřeném tvaru (které je známé) velmi snadné. Vztah (3.14) říká, že skalární součin vektoru, který začíná v místě spojení nohy a vozíku a končí v místě spojení nohy a platformy s jeho derivací, je nulový.

$$\left({}^1\mathbf{r}_{1p_i} - {}^1\mathbf{r}_{1v_i} \right)^T \left({}^1\mathbf{v}_{p_i} - {}^1\mathbf{v}_{v_i} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Vektor rychlosti vazby mezi vozíkem a nohou je možné upravit do tvaru (3.15). Je to dáno tím, že všechna vedení vozíků jsou rovnoběžná s osou z .

$${}^1\mathbf{v}_{v_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{z}_i \quad (3.15)$$

Zkombinováním předešlých tří vztahů vznikne vztah mezi úhlovou rychlostí platformy a rychlostí i -tého vozíku. Z tohoto vztahu není problém určit i -tý řádek matice \mathbf{J} . Celá matice se určí provedením tohoto výpočtu pro každou nohu.

$$\left({}^1\mathbf{r}_{1p_i} - {}^1\mathbf{r}_{1v_i} \right)^T \mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_i} {}^2\boldsymbol{\omega}_{12} + \left({}^1\mathbf{r}_{1p_i} - {}^1\mathbf{r}_{1v_i} \right)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{z}_i = 0 \quad (3.16)$$

Pro efektivnější a přehlednější provedení výpočtu na počítači je dobré vztah (3.16) rozšířit, aby se z něj určila celá matice \mathbf{J} a nejen jeden řádek (3.17). Matice \mathbf{A}_i je vždy taková matice, aby po roznásobení vektorem $\dot{\mathbf{z}}$ vznikl vektor ${}^1\mathbf{v}_{v_i}$. Její tvar je takový, že má rozměr 3×4 a obsahuje samé nuly, pouze ve třetím řádku v i -tém sloupci je jednička. Dobrou

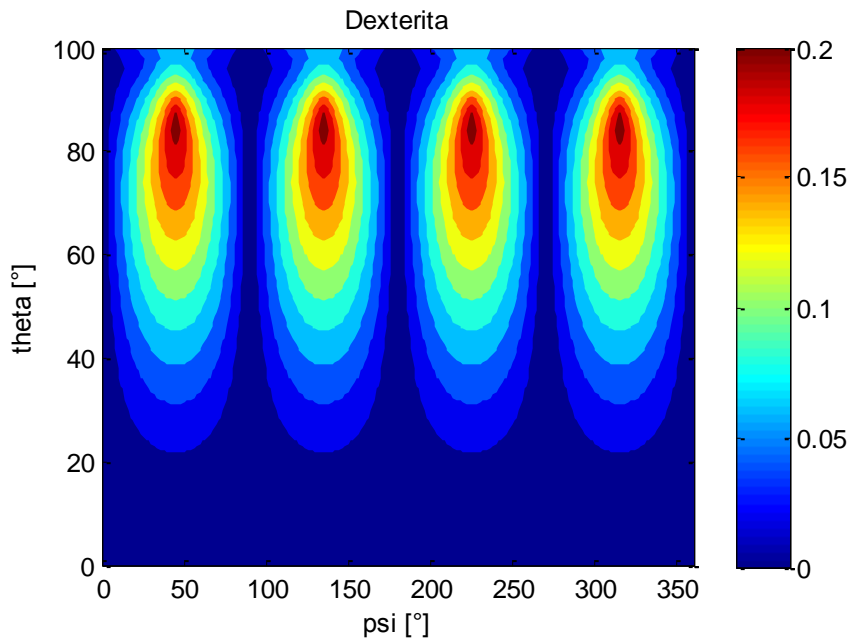
vlastností využití vektoru úhlové rychlosti k určení matice \mathbf{J} je, že výsledná dexterita nezávisí na souřadném systému ve kterém je úhlová rychlost definována. To lze ukázat roznásobením matice \mathbf{J} zprava libovolnou maticí směrových cosinů, a po přepočítání dexterity je vidět, že se nemění.

$$\begin{bmatrix} ({}^1\mathbf{r}_{1p_1} - {}^1\mathbf{r}_{1v_1})^T \mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_1} \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_2} - {}^1\mathbf{r}_{1v_2})^T \mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_2} \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_3} - {}^1\mathbf{r}_{1v_3})^T \mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_3} \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_4} - {}^1\mathbf{r}_{1v_4})^T \mathbf{S}_{12} {}^2\hat{\mathbf{r}}_{2p_4} \end{bmatrix} {}^2\boldsymbol{\omega}_{12} + \begin{bmatrix} ({}^1\mathbf{r}_{1p_1} - {}^1\mathbf{r}_{1v_1})^T \mathbf{A}_1 \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_2} - {}^1\mathbf{r}_{1v_2})^T \mathbf{A}_2 \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_3} - {}^1\mathbf{r}_{1v_3})^T \mathbf{A}_3 \\ ({}^1\mathbf{r}_{1p_4} - {}^1\mathbf{r}_{1v_4})^T \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.17)$$

$$\mathbf{J}_q {}^2\boldsymbol{\omega}_{12} + \mathbf{J}_z \dot{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q \quad (3.19)$$

Postup výpočtu dexterity je tedy prostý, stejným způsobem jako se prováděla analýza dosažitelného prostoru, se budou postupně zkoušet kombinace nezávislých souřadnic a v každé poloze se spočítá dexterita. Jako nezávislé souřadnice se zde budou používat Eulerovy úhly (precese, nutace, rotace). V kapitole zabývající se dosažitelným prostorem bylo zmíněno, že volba úhlu rotace jako záporného úhlu precese není pro tento mechanismus vhodná. Na obrázku 3.3 je ukázána dexterita pro tuto volbu úhlu rotace.



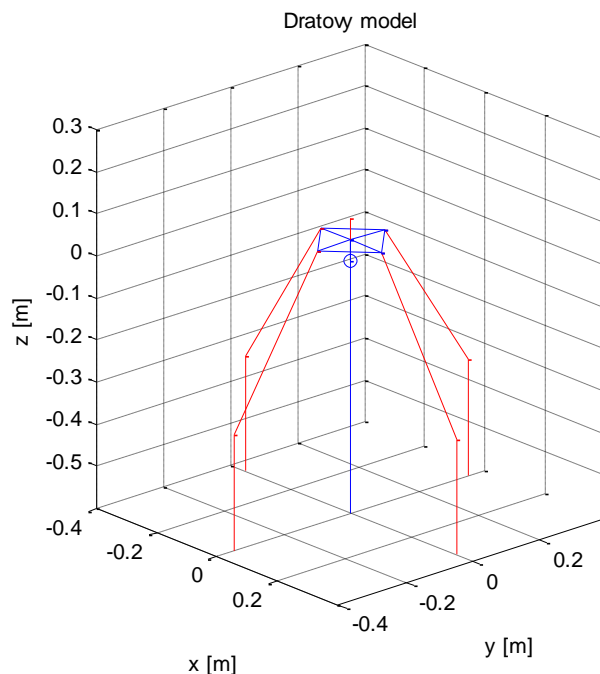
Obr. 3.3 Výsledky dexterity pro rozměry $H=0.35$, $L=0.45\text{m}$, $R=0.1\text{m}$, $h=0.05\text{m}$

Z výsledku je na první pohled vidět, že je mechanismus hodně singulární. Spolu s analýzou dexterity byla současně provedena i kontrola dosažitelnosti všech poloh, celý prostor je kinematicky dosažitelný. Z výsledků je patrné, že pouze 4 velmi malé oblasti mají

dostatečnou dexteritu, ve zbylé části dosažitelného prostoru by mechanismus určitě nemohl být provozován. Mechanismus je singulární takovým způsobem, že to vede k úvahám, zda není ztráta času dále tento mechanismus řešit. Nejzvláštnější je, že je mechanismus zcela singulární v poloze, kdy je nutace rovna nule a platforma je tedy v základní vzpřímené poloze. Očekáváno bylo, že v této poloze bude dexterita nejlepší a s rostoucí nutací se bude zhoršovat. Jednou z mála metod pro zjištění proč je dexterita taková, je zkontrolovat tvar Jacobiho matice, jejíž podmíněnost se vyhodnocuje. Vypsaná matice přísluší poloze, kde všechny tři úhly popisující polohu mechanismu jsou nulové.

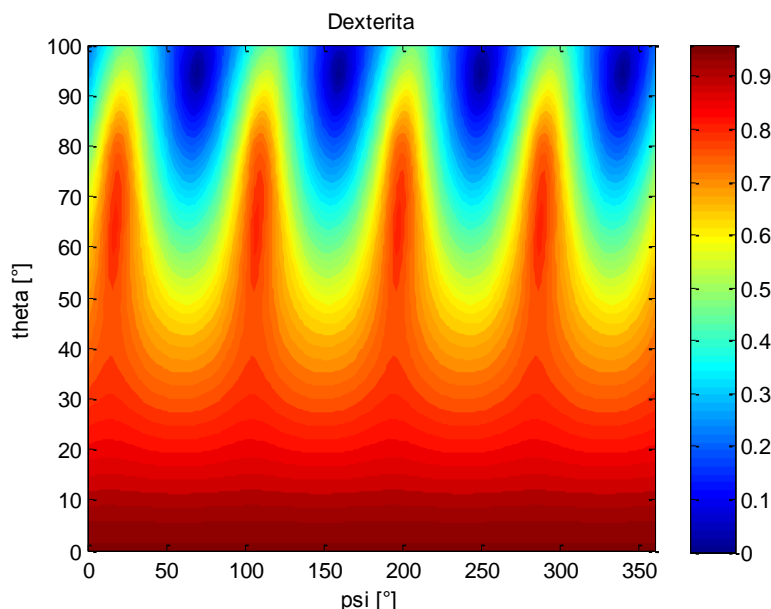
$$J = \begin{bmatrix} 0.1334 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1334 & 0 \\ -0.1334 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1334 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Na matici je okamžitě vidět, že její hodnost je 2 a to je nedostatečné. Je to důsledek nulového sloupce. Vzhledem ke kinematickému významu této matice (3.11) je jasné, že v této poloze rotace okolo lokální osy z (která se zde shoduje s globální osou z) nevyvolá žádný pohyb vozíků a tím není možné tento stupeň volnosti ovládat. To je důsledkem toho, že v této poloze všechny nohy protínají tuto osu, dokonce se všechny nohy protínají v jednom bodě.



Obr. 3.4 Zobrazení singulární polohy drátovým modelem

Drátový model mechanismu v této poloze je zobrazen na obrázku 3.4, a je z něj vidět, že se nohy protínají v jednom bodě. Toto se právě odstraní využitím vztahu (3.1) namísto uvažování úhlu rotace jako záporného úhlu precese.



Obr. 3.5 Výsledky dexterity pro rozměry $H=0.35$, $L=0.45\text{m}$, $R=0.1\text{m}$, $h=0.05\text{m}$, $k_1=0\text{rad}^{-3}$, $k_2=0\text{rad}^{-1}$, $k_3=1\text{rad}$

Vliv této malé úpravy je velký, zatímco původně byl mechanismus při malé nutaci singulární, nebo téměř singulární, nyní jsou hodnoty dexterity v této oblasti okolo 0.95, jak je vidět na obrázku 3.5. Využití vztahu (3.1) se osvědčilo, proto se s ním bude dále vždy počítat. Důvod proč v (3.1) jsou pouze sudé mocniny úhlu nutace je ten, že při přechodu přes středovou polohu by se skokově změnila derivace úhlu rotace. Skoková změna úhlové rychlosti je prakticky nerealizovatelná, proto by v takové situaci byly nadměrně zatěžovány pohony. Stále v pracovním prostoru jsou 4 singulární polohy, ale nacházejí se v polohách s velkou nutací a je tedy možnost, že se je úpravami rozměrů a koeficientů k_1 - k_3 povede odstranit, nebo posunout za hranici pracovního prostoru. Tento proces je předmětem optimalizace, kterou se zabývají další části této práce, proto je tento výsledek v tuto chvíli uspokojivý.

4 Elastostatické analýzy

Tyto analýzy se snaží zohlednit reálné vlastnosti materiálů. Předešlé analýzy předpokládaly dokonalou tuhost všech těles mechanismu a pracovaly pouze s topologií a rozměry. Reálná tělesa nikdy nejsou dokonale tuhá a při zatížení mechanismu silovým účinkem se vždy musí nějak zdeformovat. Z toho plyne, že předešlé analýzy dosažitelného prostoru a dexterity je možné považovat za přesné pouze za předpokladu nezatíženého mechanismu. Provádět tyto analýzy se zahrnutím vlivu poddajnosti by v principu nebylo o mnoho složitější, ale významně by se zvětšila velikost úlohy, protože analýzy by bylo nutné provést pro všechny možné kombinace zatěžujících silových účinků a těch je nekonečně mnoho. To znamená, že úloha by se stejně musela nějak zjednodušit, aby byla prakticky řešitelná a výsledky se daly vyhodnotit. Naštěstí tuhost mechanismů je obecně dostatečná k tomu, aby bylo možné tvrdit, že dexterity i dosažitelný prostor jsou invariantní vůči vnějšímu zatížení mechanismu. Ve skupině elastostatických analýz bude provedena pouze analýza tuhosti mechanismu.

4.1 Tuhost

Přestože se předpokládá dostatečná tuhost, aby zatížení neovlivnilo kinematické vlastnosti, není možné automaticky předpokládat, že je dostatečná pro provoz. Například při použití mechanismu jako naklápací hlavy obráběcího stroje je potřeba vysoká tuhost, protože obráběcí stroje jsou velice přesné, tudíž se nesmí příliš deformovat, a zároveň jsou vysoce zatížené, protože řezné síly jsou většinou vysoké. Tím, že jsou mechanismy navrženy s takovou tuhostí, aby byla zachována přesnost stroje, je zajištěno, že deformace stroje neovlivní kinematické analýzy.

Způsobů jak určit tuhost stroje je více. Nejzákladnějším způsobem je vyřešit úlohu statiky (sestavění a vyřešení statických rovnovážných rovnic), z jejího řešení určit vnitřní silové účinky těles, určit deformace těles a z nich určit deformace mechanismu. Tento postup je správný, ale neefektivní, bylo by sice možné ho parametrizovat takovým způsobem, aby nebylo nutné v každé poloze znovu sestavovat statické rovnovážné rovnice a celý postup algoritmizovat, ale nevyplatilo by se to, když existují efektivnější postupy. Navíc se tato metoda zásadně zesložituje, když je mechanismus staticky neurčitý, protože už při řešení úlohy statiky je nutné uvažovat poddajnost, což u staticky určité úlohy není nutné.

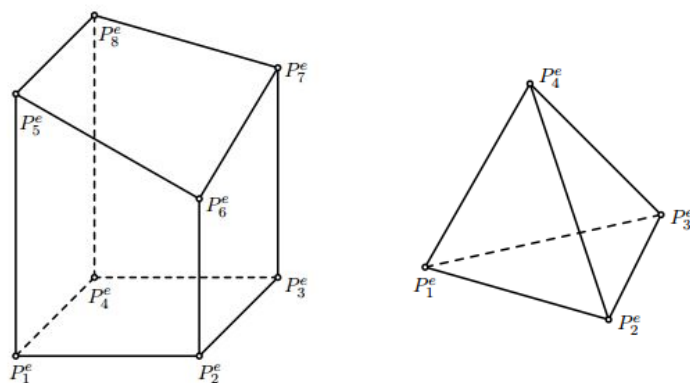
Lepší varianta je použít metodu konečných prvků (dále jen MKP), která má v současné době v podstatě monopol na řešení problémů pružnosti vyjma analyticky řešitelných úloh. Principem MKP je diskretizace kontinua konečným počtem elementů. Pole posunutí v elementu je popsáno posuvy jeho uzlových bodů a pomocí tvarových je distribuováno do celého objemu elementu [3]. Elementů existuje nepřeberné množství a není problém vytvořit vlastní typ elementu podle specifických požadavků. Elementy se liší především dimenzí prostoru (1D, 2D, 3D), počtem a typem (posuv, rotace) stupňů volnosti, typem tvarových funkcí (elementy lineární, kvadratické ...), nebo vhodností použití na různé typy úloh. Jeli známo celé pole posuvů je možné užitím Cauchyho vztahů určit složky tenzoru deformace a použitím konstitutivních vztahů (např. Hookeova zákona) určit složky tenzoru napětí. Je-li známa napjatost v celém objemu, je možné učit objemové i povrchové zatížení tělesa. Úlohy jsou většinou formulovány obráceným způsobem, je známé uložení a zatížení tělesa a určuje se pole napětí, deformace a posunutí. Určování tuhosti mechanismu je také tento typ úlohy, poddajnost je v lineárních úlohách pružnosti vlastně posunutí (natočení) vyvolané jednotkovým silovým účinkem a tuhost je inverze k poddajnosti. Protože mechanismus může sloužit například jako naklápací hlava obráběcího stroje, předpokládá se jeho vysoká tuhost, malé deformace a tedy i nepřekročení meze kluzu a platnost Hookeova zákona.

Jelikož je úloha formulována tak, že jsou známy působící síly a mají se určit posunutí, je výhodné využít princip minima celkové deformační energie. Tento variační princip říká, že soustava je ve stabilní rovnovážné poloze právě tehdy, když její celková potenciální energie na množině kinematicky přípustných posuvů dosáhne svého minima [3]. Celková potenciální energie je definovaná jako součet deformační energie a potenciální energie pracovních sil.

$$\Pi = U + W \quad (4.1)$$

Velkou výhodou použití variačních principů je, že se nemusí přímo řešit rovnice rovnováhy, Lamého rovnice, nebo jiné parciálně diferenciální rovnice. Řešení nalezené jako minimum funkcionálu těmto rovnicím vyhovuje.

Je třeba určit typ elementů, kterými bude mechanismus diskretizován. Nejrigoróznější postup by byl zvolit objemové elementy (obr. 4.1) a diskretizaci provést takovým způsobem, aby se všechny geometrické prvky mechanismu zohlednily.



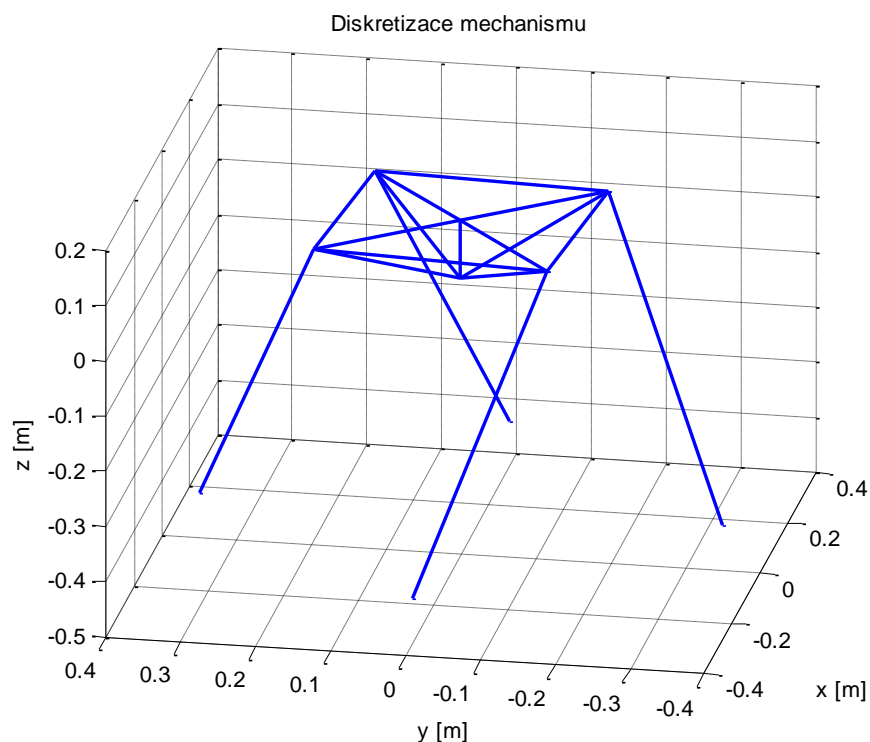
Obr. 4.1 Příklady objemových elementů [10]

Tento postup by dal nejuvěrohodnější informace o tuhosti, ale za cenu velké výpočetní náročnosti a velké časové náročnosti preprocessingu. Také by si tato cesta vyžádala použití moderních sofistikovaných MKP programů. Psát vlastní program by nebylo efektivní, vyžádalo by si to mnoho času. Nehledě na to, že zatím neexistuje přesný konstrukční návrh mechanismu. Protože se výpočet tuhosti bude používat pro optimalizaci mechanismu, bude se tedy výpočet opakovat mnohokrát s různými parametry, je vhodné volit jednodušší postup s menším počtem jednodušších elementů. Tím se zásadně zrychlí výpočet, navíc nebude potřeba používat žádný složitý MKP program a bude stačit vlastnoručně napsaný program, tím se i zjednoduší přenos dat mezi programem počítající tuhost a programem provádějící optimalizaci.

Jako kompromisní řešení bylo zvoleno nahrazení mechanismu prutovou soustavou. To přinese značnou redukci velikosti úlohy. Kdyby se mechanismus diskretizoval objemovými elementy, tak by jich bylo potřeba nejspíše několik tisíc, zatímco když se použijí tyčové elementy, tak jich bude nanejvýš pár desítek, nehledě na to, že tento typ elementů je mnohem jednodušší.

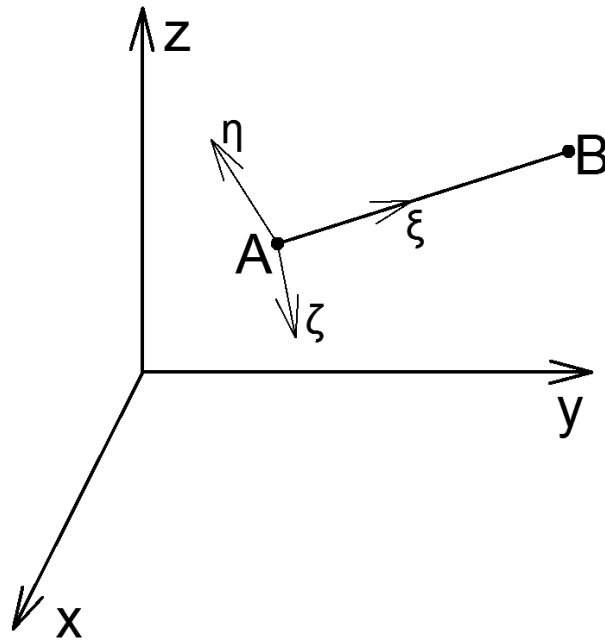
Diskretizace obecně není jednoznačná, způsobů jak diskreditovat těleso nebo soustavu těles je nekonečně mnoho. V této práci se nebude zkoumat vliv diskretizace na výsledky, protože by to dalo na samotnou diplomovou práci. Proto se bude pracovat s diskretizací prutovými elementy (obr. 4.3), jak je zobrazeno na obrázku 4.2. Z obrázku je na první pohled vidět, že zjednodušení je opravdu významné. Každá noha mechanismu je tvořena jedním elementem, to není velké zjednodušení, nohy mají tvar tyčí, takže tato náhrada je rozumná. Problém s náhradou nohy takovýmto prvkem by vznikl, například když by hrozila ztráta stability například problémy se vzpěrem, ale taková zatížení, aby hrozila ztráta stability, se

neočekávají. Také by tato náhrada byla problematická, kdyby nohy nebyly přímé tyče, ale byly zahnuté. Platforma je nahrazena soustavou 13 prutů. To znamená, že je k dispozici 13 parametrů, které je nutné určit z rozměrů tak, aby výpočet tuhosti odpovídal skutečnému mechanismu. Teoreticky čím větší počet parametrů, tím lépe je možné přiblížit model skutečnosti, ale tím se také zvyšuje možnost vzniku nepřesností špatnou identifikací tuhosti jednotlivých prutů. Proto byl kladen důraz na minimalizaci počtu prutů tvořící jednotlivé součásti. Největší zjednodušení je však použito u náhrady rámu. Ve skutečnosti je rám samozřejmě poddajný, ale v této práci se uvažuje jako tuhý. Předpokládá se tedy, že rám stroje bude ve srovnání s ostatními částmi mechanismu velice mohutný, hmotný a tuhý.



Obr. 4.2 Použitá diskretizace mechanismu

Zvolený typ elementů je jeden z nejjednodušších možných. Tyčový (prutový) element (obr. 4.3) je vždy namáhán pouze jednoosým tahem/tlakem. To je dáno tím, že pruty jsou mezi sebou spojeny sférickými vazbami. Tyčový element má na každém svém konci tolik stupňů volnosti v kolika dimenzionálním prostoru se nachází, v případě 3D prostoru má 6 stupňů volnosti. Tento typ elementu je vhodný především na diskretizaci prutových soustav, kde MKP výpočet dává shodné výsledky s analytickým výpočtem, rozdíl bude pouze v zaokrouhlovacích chybách.



Obr. 4.3 Znáornění tyčového elementu a jeho lokálního systému v globálním souřadném systému

Než se vytvoří matematický popis soustavy, je nejprve potřeba znát matematický popis samotného elementu. Tento popis se liší samozřejmě podle typu elementu. Matematický popis elementu je tvořen takzvanou maticí tuhosti elementu \mathbf{K}^e , která zprostředkovává vztah (4.2) mezi posuvy ve stupních volnosti δ^e a působícími silami ve stupních volnosti \mathbf{F}^e , které vyvolají dané posuvy [3]. Z toho plyne, že na diskretizovanou soustavu můžou působit silové účinky pouze v uzlech. Síly smí působit pouze v posuvných stupních volnosti a momenty pouze v rotačních, tyčové elementy mají pouze posuvné stupně volnosti, proto prutové soustavy můžou být zatížené pouze silami. V případě, že síly nepůsobí pouze v uzlech je možné buď změnit diskretizaci, nebo použít ekvivalentní uzlové síly, které mají stejný účinek jako síly skutečné.

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \delta^e \quad (4.2)$$

K odvození tohoto vztahu a tvaru matice tuhosti se využije princip minima celkové potenciální energie. K tomu je potřeba vyjádřit deformační energii a potenciální energii elementu pomocí uzlových posuvů a uzlových sil. Potenciální energie uzlových sil má v tomto případě jasnou definici. Jako záporně vzatý součet součinů uzlových sil a příslušných uzlových posunů, neboli záporně vzatá mechanická práce.

$$W = -\delta^{eT} \mathbf{F}^e \quad (4.3)$$

Deformační energie je definovaná známým vztahem (4.4), který při použití Voigtova zápisu přejde do tvaru (4.5).

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV \quad (4.4)$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.5)$$

Tento vztah se rozepíše na jednotlivé členy. Protože prut je vždy namáhán pouze jednoosou napjatostí, je většina členů nulová.

$$U = \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon_\xi \sigma_\xi + \varepsilon_\eta \sigma_\eta + \varepsilon_\zeta \sigma_\zeta + \gamma_{\xi\eta} \tau_{\xi\eta} + \gamma_{\eta\zeta} \tau_{\eta\zeta} + \gamma_{\zeta\xi} \tau_{\zeta\xi}) dV \quad (4.6)$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_\xi \sigma_\xi dV \quad (4.7)$$

Mezi poměrnou deformací a napětím pro lineární elastický materiál platí Hookeův zákon. V obecném případě, kde není pouze jednoosá napjatost se použije matice \mathbf{E} reprezentující rozšířený Hookeův zákon. V tomto případě to není nutné a místo této matice stačí použít modul pružnosti v tahu.

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (4.8)$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_\xi E \varepsilon_\xi dV \quad (4.9)$$

Poměrná prodloužení je potřeba vyjádřit jako funkci uzlových posuvů $\boldsymbol{\delta}^e$. K tomu je potřeba znát celé pole posuvů v libovolném místě elementu $\mathbf{u}_{(\xi,\eta,\zeta)}$. K tomu je použita matice $\mathbf{N}_{(\xi,\eta,\zeta)}$, která je v MKP nazývána maticí tvarových funkcí. Je to velmi významná matice, která se liší podle typu prvku a zprostředkovává závislost mezi posunutím uzlových bodů a polem posunutí. Pole posuvů $\mathbf{u}_{(\xi,\eta,\zeta)}$ je funkcí lokálních souřadnic, ale obsahuje posuvy v globálním souřadném systému.

$$\mathbf{u}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \mathbf{N}_{(\xi,\eta,\zeta)} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} u_{(\xi)} \\ v_{(\xi)} \\ w_{(\xi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{\xi}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{\xi}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{Ax} \\ \delta_{Ay} \\ \delta_{Az} \\ \delta_{Bx} \\ \delta_{By} \\ \delta_{Bz} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

V tomto případě nebylo nutné tuto matici složitě odvozovat a šlo ji pomocí logického uvažování napsat z hlavy. Jak je vidět, tato matice je funkcí pouze souřadnice ξ a délky elementu L . Takováto matice tvarových funkcí generuje chybu plynoucí z předpokladu konstantní délky elementu, která není konstantní. Vzhledem k předpokladu malých deformací je tato chyba zanedbatelná.

Aby bylo možné vyjádřit deformaci, je nutné znát deformaci ve směru prvku (ve směru osy ξ). Automaticky se při výpočtu předpokládá, že poloha prvku v prostoru je známá. To znamená, že je známá matice směrových cosinů transformující radiusvektory z lokálního systému do globálního, nebo je znám jiný prostředek, ze kterého je možné tuto matici získat. Sloupce matice směrových cosinů jsou jednotkové vektory lokálního souřadného systému vyjádřené v globálním souřadném systému. Pro výpočet stačí znát sloupec příslušející lokální ose ξ . Tento jednotkový vektor bude dále v této části práce nazýván směrovými cosiny \mathbf{n} a dá se jednoduše spočítat (4.13). Tento vztah vychází z toho, že vynásobením směrových cosinů délkou prvku musí vrátit souřadnice vektoru začínající v bodě A a končící v bodě B. Pro zkrácení zápisu je použita substituce prvků vektoru směrových cosinů $\mathbf{n} = [c_x \ c_y \ c_z]^T$.

$$\mathbf{n} = [\cos(\alpha_{\xi x}) \ \cos(\alpha_{\xi y}) \ \cos(\alpha_{\xi z})]^T \quad (4.12)$$

$$\mathbf{n} = \left[\frac{x_B - x_A}{L} \ \frac{y_B - y_A}{L} \ \frac{z_B - z_A}{L} \right]^T \quad (4.13)$$

Pomocí pole posunutí je třeba vyjádřit deformaci prvku. Ve vztahu pro výpočet deformační energie figuruje pouze deformace ve směru ξ , k jeho výpočtu stačí použít Cauchyho vztah.

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial \xi} \quad (4.14)$$

V tomto vztahu však figuruje posunutí ve směru ξ , které není známé. Známa jsou pouze posunutí ve všech směrech globálního souřadného systému. Aby se získalo posunutí ve směru osy ξ , stačí globální vektor posunutí skalárně vynásobit směrovými cosiny. Tím se získá průmět posunutí do směru prvku a také zde vzniká chyba plynoucí z linearizace. Tato

linearizace se v úlohách pružnosti používá zcela běžně. Mechanismus se předpokládá dostatečně tuhý, posunutí uzlů by měla být také malá a díky tomu vzniklá chyba bude zanedbatelná.

$$\Delta \xi = \mathbf{n}^T \mathbf{u}_{(\xi)} \quad (4.15)$$

$$\Delta \xi = \mathbf{n}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_\xi = \mathbf{D} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.18)$$

Kde:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n}^T \quad (4.19)$$

Matrice \mathbf{D} je další důležitá matice, která se liší podle typu elementu. Je to takzvaná matice diferenciálních operátorů a stará se o přepočítání pole posunutí na pole deformací, v tomto případě pouze na jedinou deformaci. Tvar této matice závisí na více faktorech, v tomto případě je matice diferenciálních operátorů řádkovým vektorem.

Nyní je znám způsob jak spočítat deformaci z uzlových posuvů. Tato deformace se dosadí do vztahu pro deformační energii. Pro zkrácení zápisu se zavádí další substituce, kde matice \mathbf{B} je matice derivovaných tvarových funkcí. Vektory uzlových posunutí jsou vůči objemovému integrálu konstanty, a protože stojí na krajích integrantu je možné je spolu s konstantou vytknout mimo integrál.

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e dV \quad (4.20)$$

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{eT} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.21)$$

Kde:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z] \quad (4.22)$$

Integrál ve vztahu (4.21) se nazývá maticí tuhosti elementu \mathbf{K}^e . Matice tuhosti je jakási analogie k tuhosti pružiny pro případy s více stupni volnosti. Pro výpočet tuhosti mechanismu bude tato matice mít zcela zásadní význam.

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.23)$$

Kde:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (4.24)$$

Diferenciál objemu jde za předpokladu konstantního průřezu přepsat na součin průřezu a diferenciálu délky, a příslušným způsobem se upraví meze. Jelikož matice \mathbf{B} , \mathbf{E} a průřez jsou v celém objemu elementu konstantní, lze je vytknout mimo integrál. Výsledný vztah obsahuje člen EA/L , ten není nic jiného než tuhost elementu ve svém podélném směru. Tento člen lze z výsledné matice vytknout, matice pak zajišťuje distribuci této tuhosti do všech směrů.

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} A \int_0^L d\xi \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} A L \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_x c_x & c_y c_x & c_z c_x & -c_x c_x & -c_y c_x & -c_z c_x \\ c_x c_y & c_y c_y & c_z c_y & -c_x c_y & -c_y c_y & -c_z c_y \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z c_z & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z c_z \\ -c_x c_x & -c_y c_x & -c_z c_x & c_x c_x & c_y c_x & c_z c_x \\ -c_x c_y & -c_y c_y & -c_z c_y & c_x c_y & c_y c_y & c_z c_y \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z c_z & c_x c_z & c_y c_z & c_z c_z \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Nyní je možné sestavit celkovou potenciální energii definovanou podle (4.1). Její minimum je řešením statické úlohy pružnosti a tím se dokáže platnost vztahu (4.2).

$$\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e + -\boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (4.28)$$

Minimum celkové potenciální energie se nalezne jednoduše. Stačí derivovat celkovou potenciální energii podle všech proměnných, které zde představují uzlové posuvy. Tím se získá přesně tolik lineárních algebraických rovnic, kolik je neznámých.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i^e} = 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.30)$$

Nyní je znám tvar matice tuhosti elementu, což je základní stavební prvek statických analýz metodou konečných prvků. Řešeným problémem je určit tuhost mechanismu, který byl zjednodušen na prutovou soustavu. Předpokládá se, že parametry jednotlivých prutů jsou

známé. Umístění a orientace (směrové cosiny) jednotlivých prutů jsou také známé. Tudiž jsou známé matice tuhosti všech elementů a je potřeba nalézt matici tuhosti celé prutové soustavy – globální matici tuhosti. K sestavení globální matice tuhosti se používá assemblage procedura, která je podrobně popsána v [3]. Pruty jsou vždy řazeny paralelně, nelze mezi dva uzly umístit dva sériově řazené pruty, aniž by mezi nimi byl další uzel. Matice tuhosti mají charakter tuhosti a ty se při paralelním zapojení vždy sčítají. Proto se globální matice tuhosti vytvoří v podstatě sčítáním lokálních matic s respektováním umístění jednotlivých stupňů volnosti.

Nejdříve se přiřadí kódová čísla všem stupňům volnosti. Každý uzel tedy získá tři kódová čísla, pro každý směr jedno. Očíslují se elementy. Vytvoří se prázdná matice o rozměru globální matice tuhosti. Globální matice tuhosti je čtvercová a počet jejích řádků/sloupců je roven počtu stupňů volnosti. K prvkům této matice se přiřítají prvky matic tuhosti elementů. Začne se prvním elementem, vezme se první člen jeho matice tuhosti, zjistí se, jaké kódové číslo přísluší jeho řádku a sloupci kde je umístěn a poté se tento prvek přičte k prvku prázdné matice ležící v řádku a sloupci se stejnými kódovými čísly. Tímto způsobem se původně prázdná matice naplní všemi prvky matice tuhosti elementu. Tímto postupem se přičtou všechny prvky matic tuhosti všech elementů, takto získaná matice je globální maticí tuhosti.

Obdobným způsobem se může sestavit globální zatěžující vektor, pokud jsou známé zatěžující vektory elementů. Vytvoří se prázdný sloupcový vektor o správném rozměru. Všechny prvky všech lokálních zatěžujících vektorů se postupně přičtou na příslušná místa vytvořeného prázdného vektoru. Zatěžující vektory elementů většinou nejsou známé a globální zatěžující vektor se vytvoří přímo podle vnějšího zatížení.

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F} \quad (4.31)$$

Tímto postupem vznikne soustava rovnic (4.31). Tento vztah přiřadí každému poli uzlových posuvů hodnoty uzlových sil nutné k vytvoření tohoto pole posuvů. Stejně tak lze pro dané uzlové síly po vyřešení soustavy rovnic určit uzlové posuvy. Ale to naráží na problém, pokud dané uzlové síly nejsou samy o sobě v statické rovnováze, neexistuje řešení, pokud v rovnováze jsou, tak řešení existuje, ale není jednoznačné. Je to důsledek toho, že soustava elementu není nijak ukotvena a může se jako celek volně posouvat. V případě, že síly jsou v rovnováze, se soustava může volně posouvat, proto existuje mnoho řešení.

V případě, že nejsou v rovnováze, se soustava začne pohybovat podle pohybových rovnic, použitý popis popisuje pouze statiku, a proto není možné nalézt řešení.

Z matematického pohledu je toto všechno dáno singularitou matice tuhosti. Tento problém se vyřeší zadáním okrajových podmínek. Tyto podmínky mohou být různé, v této práci jsou použity pouze homogenní okrajové podmínky. Tyto okrajové podmínky představují odebrání stupňů volnosti a tím částečné znemožnění pohybu. Tyto okrajové podmínky se zde uplatní na všechny stupně volnosti, které jsou spojeny s pevným rámem.

Realizace okrajových podmínek je jednoduchá. Za uzlové posuvy, které jsou podrobeny homogenní vazbové podmínce, je možné dosadit nuly. Tím ztratí příslušné sloupce matice tuhosti smysl a je možné je spolu s příslušnými uzlovými posuvy odstranit. Soustava poté obsahuje více rovnic než uzlových posuvů. Vektor zatěžujících sil v případě zavedení okrajových podmínek obsahuje neznámé reakce. Je možné soustavu rovnic přeskládat tak, aby ve vektoru neznámých byly reakce, to je ale složité. Jednodušší variantou je rovnice, ve kterých jsou reakce, jednoduše odebrat. Tím vznikne menší soustava rovnic, která pokud bylo odebráno dostatečné množství stupňů volnosti, aby byla soustava nepohyblivá, má regulární matici. V takovém případě existuje řešení pro libovolné zatěžující síly.

Pokud je potřeba znát reakční síly stačí po vypočítání uzlových posuvů sestavit kompletní vektor uzlových posuvů a jím roznásobit matici tuhosti, na kterou nebyly aplikované okrajové podmínky. Tím se získá zatěžující vektor, který obsahuje známé síly a reakční síly.

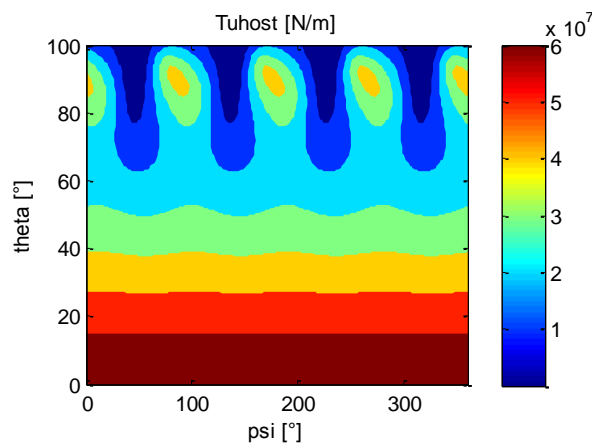
Hlavní zatížení mechanismu se předpokládá ve středu platformy. Vyhodnocení tuhosti mechanismu je proto provedeno na základě deformací středu platformy od sil působících ve středu platformy. Cílem je, aby mechanismus byl co nejtužší, proto se musí nalézt minimální tuhost, která je kritická. Pokud je síla jednotková, je tuhost pouze převrácená hodnota celkového posunutí. Problém je, že jednotkových sil působících do tohoto bodu je nekonečně mnoho, protože tato síla může působit pod různými směry. Směr, ve kterém je mechanismus nejméně tuhý, není znám, ale existuje efektivní způsob, jak jej nalézt.

$$DF = \Delta \quad (4.32)$$

Získá-li se inverze matice tuhosti (po zavedení okrajových podmínek), získá se matice poddajnosti. Protože síly působí pouze na tři stupně volnosti a ostatní jsou nulové, můžou se všechny sloupce kromě těchto tří odstranit. Stejně tak jsou pro vyhodnocení tuhosti důležité

pouze ty samé tři posunutí (řádky) a ostatní se mohou odstranit. Tím se získá matice poddajnosti o rozměru 3x3, která říká, jak se sledovaný uzel posouvá v závislosti na jeho zatížení. Dá se matematicky dokázat, že za předpokladu konstantní zatěžující síly, která mění pouze orientaci, nabývá posunutí extrému právě tehdy, když směr posunutí je rovnoběžný s působící silou. To znamená, že extrémy poddajnosti jsou ve směrech vlastních vektorů vyšetřované matice poddajnosti (zmenšené na rozměr 3x3). Ve směrech hlavních vektorů je podíl mezi velikostí zatěžující síly a velikostí vzniklého posunutí právě příslušné vlastní číslo. To je výhodné, protože stačí spočítat vlastní čísla matice poddajnosti a největší číslo je největší poddajnost, která může nastat. Tuto poddajnost stačí převrátit a získá se hledaná minimální tuhost.

Matice tuhosti soustavy je závislá na směrových cosinech prutů, čili je závislá na poloze mechanismu. Díky tomu tuhost mechanismu závisí na poloze mechanismu a je jí stejně jako u dexterity potřeba spočítat ve více polohách v pracovním prostoru. Dále se může pracovat třeba s minimální hodnotou, průměrnou hodnotou, nebo s jakoukoliv jinou statistickou veličinou. Výpočet tuhosti probíhá stejným způsobem jako výpočet dexterity. Zvolí se hodnoty nezávislých souřadnic a spočítá se tuhost mechanismu pro všechny polohy, které jsou kombinacemi hodnot nezávislých souřadnic.



Obr. 4.4 Ukázka výsledků výpočtu tuhosti

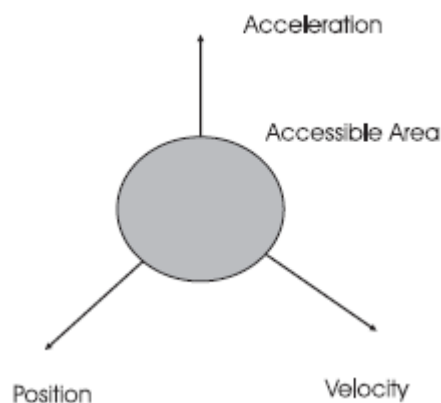
Výsledek je zase možné vykreslit do contourf diagramu. Příklad výsledků je zobrazen na obrázku 4.4. Z obrázku je vidět, jak tuhost klesá s rostoucí nutací. Výsledky jsou zatížené chybou, která je dána určením tuhosti jednotlivých prutů. Tyto tuhosti je nutné určit z geometrie mechanismu. Nedá se jednoznačně určit postup jakým určit tuhost prutů z geometrie. U některých prutů je určení jejich tuhosti jednoduché například u nohou, největší problém je u platformy.

5 Dynamické analýzy

Poslední skupinou analýz jsou analýzy dynamické. Tyto úlohy jsou důležité, protože v sobě zahrnují vliv setrvačnosti a umějí zohlednit vlastnosti pohonů. Kdyby se provedla optimalizace mechanismu pouze na základě kinematických a elastostatických analýz, optimalizovaný mechanismus by pravděpodobně byl v zájmu maximalizace tuhosti velice hmotný a to by si vynutilo použití výkonných pohonů, které jsou drahé a mají vyšší provozní náklady. Proto je nutné doplnit prováděné analýzy o další, které toto zohledňují. Jako velmi vhodná se ukazuje analýza globální dynamiky, která dokáže určit dosažitelná zrychlení mechanismu v závislosti na vlastnostech pohonů. Dále je provedena analýza modálních vlastností, ze které se vyhodnocují vlastní frekvence a tvary kmitu, které jsou jedním z důležitých vlastností strojů.

5.1 Globální dynamika

Cílem výpočtu globální dynamiky je analýza dynamických schopností mechanismu. Dexterita je v mnohém omezená, protože vychází pouze z kinematiky (nebo statiky), dokáže říci, zda silový převod mezi pohony a zbytkem mechanismu umožňuje pohonům řídit pohyb mechanismu. Nezohledňuje však vůbec limitní hodnoty pohonných sil. Globální dynamika všechny vlivy ovlivňující vlastnosti mechanismu zahrnuje, nebo to alespoň umožňuje. Běžně jsou známy dva typy výpočtu dynamiky. Přímá úloha dynamiky spočívá ve výpočtu zrychlení souřadnic popisujících mechanismus v závislosti na působících silách. Inverzní naopak hledá síly potřebné k dosažení požadovaného zrychlení. Globální úloha je něco mezi přímou a inverzní, protože ve vzniklé soustavě rovnic se vyskytuje jak zrychlení mechanismu, tak pohonné síly.



Obr. 5.1 Znárodnění dosažitelné oblasti v prostoru polohy, rychlosti a zrychlení [1]

Zatímco dexterita přiřadila každé poloze skalární hodnotu, tak globální dynamika má výsledky podstatně složitější. Formulovat úlohu jako hledání maximálního a minimálního zrychlení v dané poloze se ukazuje jako nedostatečné. Toto zrychlení za předpokladu mechanismu s více stupni volnosti může nastat v nekonečně mnoha směrech a je závislé nejen na poloze, ale také na rychlosti pohybu mechanismu a tato rychlost může nabývat nekonečně mnoha hodnot v nekonečně mnoha směrech. Proto myšlenka přiřadit poloze hodnotu zrychlení není moc reálná. Úloha je formulována jinak, globální dynamika se vždy počítá na předem dané trajektorii [1]. Tím nenastává problém se směrem zrychlení a rychlostí mechanismu, protože jsou vždy ve směru dané trajektorii, a důležité jsou jenom jejich hodnoty. Tím se výpočet zjednoduší na hledání dosažitelných zrychlení na trajektorii v závislosti na rychlosti a poloze na trajektorii [1]. Výsledek je možné zobrazit jako oblast v prostorovém diagramu, jak je neznáno na obr. 5.1. To ale není moc praktické, proto se častěji vykreslují řezy touto oblastí, tím je myšleno, že pro různé polohy se vždy do jednoho diagramu vykreslí grafy maximálního a minimálního zrychlení v závislosti na rychlosti.

K výpočtu globální dynamiky je potřeba nejprve vytvořit dynamický model mechanismu. Není podstatné, jakým způsobem se tento model získá, nejčastější postupy jsou sestavování Newton-Eulerových pohybových rovnic, nebo použití některých Lagrangeových rovnic. V této práci se bude předpokládat použití Lagrangeových rovnic smíšeného typu.

Prvním krokem je zvolit souřadnice použité k popisu mechanismu a vyjádření kinetické energie. Je možné volit klasické sady souřadnic jako jsou fyzikální, přirozené, nebo použít nějaké vlastní podle mechanismu a tento přístup se právě využije v této práci pro TetraSphere, jak bude podrobně popsáno v dále. Necht' $\boldsymbol{\theta}$ je vektor poskládaný z použitých souřadnic, které jsou vázány soustavou vazbových podmínek (5.1). S jehož pomocí se definuje kinetická energie (5.2).

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$E_k = E_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (5.2)$$

Jsou-li známé vazbové podmínky a vztah pro kinetickou energii, je známé všechno potřebné pro sestavení dynamického modelu.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta_i} = Q_i + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta_i} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} + \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (5.4)$$

Index l v rovnici (5.3) je považován za sčítací, v rovnici je vynechán operátor sumace. Vztah (5.3) se vypočítá pro všechny souřadnice a upraví na (5.4). Na levé straně vztahu (5.4) je součin matice hmotnosti s vektorem zrychlení mechanismu a součin Jacobiho matice vazeb s vektorem Lagrangeových multiplikátorů, na pravé straně je vektor \mathbf{g} , ve kterém jsou síly působící na mechanismus vyjma sil v pohonech s akceleračními zbytky a součin \mathbf{Tn} , ve kterém jsou pohonné síly \mathbf{n} distribuovány do rovnic maticí \mathbf{T} .

Protože je výpočet vždy vztažen k trajektorii, je nutné ji definovat. Je běžné trajektorii definovat jako funkci času, tím by celý výpočet ztratil smysl, protože rychlost a zrychlení by také byly dané jako funkce času. To znamená, že každé poloze by bylo dáno zrychlení už v zadání a nebylo by co počítat. Jediné co by bylo možné počítat, by byla kontrola, zda mechanismus opravdu dokáže projít trajektorií, aniž by se překročily limitní schopnosti pohonů. Proto nebude trajektorie (nezávislé souřadnice) zadána jako funkce času, ale jako funkce obecného parametru (5.5) [9]. Trajektorie se v této práci bude parametrizovat tak, aby počáteční poloha odpovídala parametru rovno nule a konečná rovno jedné.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(p) \quad (5.5)$$

Jelikož z kinematiky je znám vztah mezi nezávislými a ostatními potřebnými souřadnicemi, je možné psát rovnou (5.6).

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(p) \quad (5.6)$$

Pro dynamické výpočty nestačí znát jen hodnoty souřadnic, ale také jejich první a druhé časové derivace. Protože souřadnice nejsou definovány jako funkce času, ale jiného parametru, je nutné je derivovat jako složenou funkci.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5.8)$$

Pro zjednodušení zápisu je výhodné za derivace parametru podle času zavést substituce [9].

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial p} d_1 \quad (5.9)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial p^2} d_1^2 + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial p} d_2 \quad (5.10)$$

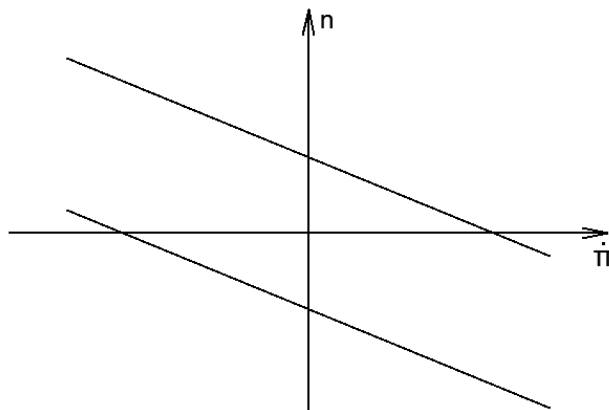
Cíl úlohy, jak už bylo napsáno, je určit závislost limitního zrychlení na rychlosti a poloze, to znamená, že kdyby se chtěla hledat dosažitelná oblast, jak je naznačeno na obr. 5.1, tak by osy diagramu byly parametr p a jeho derivace d_1 a d_2 .

Zásadní vliv na výsledky globální dynamiky mají parametry pohonů (aktuátorů). Každý pohon má své limity, ty jsou především v limitních silových účinkách a limitních rychlostech. Tyto limity se dají dobře znázornit jako oblast v diagramech rychlost-síla u lineárních aktuátorů, nebo úhlová rychlost-krouticí moment u rotačních aktuátorů. Parametry této oblasti závisí na typu aktuátoru a mohou mít i velmi složitý tvar, který se špatně matematicky popisuje. Nejjednodušší je varianta kde limitní silové účinky i limitní rychlosti jsou konstanty a pracovní oblast je pak obdélník. U permanentními magnety buzeného DC motoru se pro limitní silový účinek může použít vztah (5.11) [1].

$$\mathbf{n}^- - \mathbf{F}(\boldsymbol{\pi})\dot{\boldsymbol{\pi}} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^+ - \mathbf{F}(\boldsymbol{\pi})\dot{\boldsymbol{\pi}} \quad (5.11)$$

Tento vztah říká, že hodnoty silových momentů jednotlivých pohonů (vektor \mathbf{n}) musí ležet v intervalu, který je dán limitními momenty pohonů při nulové rychlosti pohybu (hodnoty nakrátko) a určitou funkcí úhlové polohy a rychlosti pohonů. Člen $\mathbf{F}(\boldsymbol{\pi})$ je diagonální matice, která definuje vliv úhlové polohy a rychlosti na limitní silový moment. Diagonální je proto, že limitní moment jednoho motoru je ovlivněn pouze svojí úhlovou polohou a rychlostí a není ovlivněn ostatními motory. Většina současných DC motorů má vysoký počet rotorových vinutí, z toho plyne, že hodnota limitního momentu téměř není závislá na natočení motoru, matice \mathbf{F} je konstantní a za předpokladu, že jsou všechny motory stejné, je možné tuto matici nahradit jedinou konstantou.

$$\mathbf{n}^- - \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\pi}} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^+ - \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\pi}} \quad (5.12)$$



Obr. 5.2 Pracovní oblast DC motoru podle (5.12) [1]

Příklad pracovní oblasti DC motoru je zobrazen na obr. 5.2, na tomto obrázku jsou dva grafy lineární funkce, které představují horní a dolní limitní krouticí moment v závislosti na úhlové rychlosti. Oblast mezi nimi je pracovní oblast motoru. Je zde vidět, že nejsou omezeny limitní úhlové rychlosti ani limitní krouticí momenty, pouze je zde závislost mezi momentem a otáčkami. To nevadí, protože maximální otáčky DC motorů jsou obecně hodně vysoké a předpokládá se, že jsou pohony navrženy tak, aby i při maximálních rychlostech pohybu mechanismu nebyly překročeny limitní otáčky.

K nalezení dosažitelné oblasti z obr. 5.1 je zapotřebí znalost kritéria, které rozhodne, zda určitý stav (bod v obr. 5.1) patří nebo nepatří do dosažitelné oblasti. Toto kritérium je jasné, všechny pohony se musí nacházet ve své pracovní oblasti, pakliže jediný pohon v tomto stavu překročí své limitní parametry, ať už rychlostní nebo silové, tak tento stav není dosažitelný. Výpočet se dá zobecnit i tím, že se nekontrolují jenom parametry pohonů, ale můžou se kontrolovat například i hodnoty reakcí, relativních rychlostí, nebo čehokoli co může být něčím omezeno. Tím je naznačen možný postup výpočtu, zvolí se hodnoty parametru trajektorie a hodnoty jeho první a druhé časové derivace (d_1 , d_2) a pro každou možnou kombinaci těchto tří parametrů se provede výpočet inverzní dynamiky a provede se kontrola nepřekročení limitních parametrů všech pohonů, popřípadě se provedou kontroly splnění ostatních podmínek, pokud existují. Dále se bude předpokládat, že jediné podmínky jsou limitní stavy pohonů.

Naznačený postup má velkou výhodu v tom, že provedení výpočtu, nebo naprogramování v počítači je relativně snadné a jednoduše pochopitelné, ale má i nevýhodu a to tu, že není efektivní a výpočet by byl pomalý, proto je výhodné použít jiný postup. Pokud uvnitř dosažitelné oblasti z obr. 5.1 jsou splněny všechny limitní parametry pohonů a mimo tuto oblast nejsou všechny podmínky splněny, musí na hranici této oblasti být některé pohony přesně na hranici své pracovní oblasti. Z toho plyne jiný možný postup výpočtu. Místo zkoušení dosažitelnosti každého stavu, je možné z podmínky dosažení mezních stavů vyhledat přímo hranici dosažitelné oblasti [1].

Zobrazily by se grafy závislosti silových účinků v pohonech na zrychlení mechanismu (parametr d_2), v dané poloze a při dané rychlosti (konstantní parametry p , d_1) by tyto grafy byly lineární. Tento fakt je důsledkem linearit úlohy dynamiky. Na příkladu mechanismu, kde v daném stavu definovaném parametry p , d_1 , d_2 jsou hodnoty silových účinků v pohonech jednoznačně dány (neredundantní mechanismy), lze říci, že zvyšováním parametru d_2 až

k dosažení limitního stavu prvního pohonu se při dalším navýšení zrychlení musí limitní stav tohoto pohonu překročit, to je důsledek ryzí monotónnosti lineární funkce. Tvrzení z minulé věty se může zdát zcela jasné, ale kdyby úlohy dynamiky nebyly lineární, tak by se teoreticky mohlo stát, že po dosažení limitního stavu na jednom pohonu by se při dalším navýšení zrychlení dostal pohon zpátky do své pracovní oblasti, nebo by zůstal na limitní hodnotě. Kdyby úlohy dynamiky byly nelineární, tak by tvrzení, že na hranici pracovní oblasti z obr. 5.1 jsou některé pohony na svých mezních stavech, nebylo korektní.

Pro hledání hranice dosažitelné oblasti je nutné provést úvahu, které a hlavně kolik pohonů dosáhne svého limitního stavu na hranici dosažitelné oblasti. Na otázku, které pohony musí dosáhnout svého limitního stavu na hranici dosažitelné oblasti, je jednoduchá odpověď, na tom nezáleží. Protože jsou všechny rovnocenné a všechny musí být ve své pracovní oblasti, aby stav byl dosažitelný. Složitější je určit kolik podmínek musí být ve svém limitním stavu na hranici dosažitelné oblasti. V případě neredundantních mechanismů to bylo již popsáno, jediné dosažení limitního stavu je postačující. V případě redundantně poháněných mechanismů je situace jiná, protože v daném stavu mechanismu nejsou hodnoty silových účinků v pohonech jednoznačně dány. Vyřešením inverzní dynamiky se nezíská jednoznačné řešení, ale řešení parametrické, které je závislé na tolika libovolných parametrech jaký je stupeň redundance r . Stupeň redundance (5.13) není nic jiného než rozdíl počtu pohonů a počtu stupňů volnosti [1].

$$r = \dim(\mathbf{n}) - \text{rank}(\mathbf{M}) + \text{rank}(\mathbf{\Phi}) \quad (5.13)$$

Ve stavu kdy u redundantního mechanismu vyjde z inverzní dynamiky jeden pohon na svém limitu je většinou možné vhodnou volbou hodnot volných parametrů nalézt takové řešení, kdy žádný pohon na svém limitu není. Možné to nemusí být například v singulárních polohách, ale těmito polohami nesmí analyzovaná trajektorie procházet. Tato možnost funguje nanejvýš v případě, že vyjde počet pohonů, které jsou na svém limitu rovno počtu stupňů redundance. Tím je jasně dáno, že pro nalezení hranice dosažitelné oblasti je potřeba, aby počet pohonů, které jsou na svém limitu, byl $r+1$. V takovém případě už není k dispozici volný parametr, kterým by šlo nalézt řešení, kde pohony nejsou na svých limitech.

Z těchto poznatků byl vymyšlen postup výpočtu. Úloha se vždy řeší v dané poloze a v dané rychlosti mechanismu (jsou známy parametry p , d_1). Vyřeší se inverzní úloha dynamiky, kterou se získá parametrické řešení silových účinků pohonů. Vybere se $r+1$ pohonů a dosadí se do rovnic jejich limitní hodnoty silových účinků, rovnice pro ostatní

pohony se využijí později. Tím vznikne nová soustava $r+1$ rovnic, ve které jsou neznámými hodnoty parametrů z inverzní dynamiky a parametr zrychlení mechanismu d_2 . Tyto výsledky se zpětně dosadí do rovnic pro výpočet ostatních pohonných silových účinků, pokud ostatní pohony nemají překročeny své limity, uloží se tento stav mechanismu jako potenciální bod na hranici dosažitelné oblasti. Tímto způsobem se spočítají hodnoty parametru d_2 pro všechny kombinace $r+1$ pohonů a pro všechny kombinace jejich limitních silových účinků, protože limitní silové účinky jsou vždy dva pro každý pohon. Tímto způsobem se získá množství hodnot dosažitelných zrychlení, z nichž je důležitá pouze nejmenší a největší hodnota, tyto hodnoty dávají rozsah zrychlení v dané poloze při dané rychlosti. Tento postup se provede pro všechny polohy a pro všechny rychlosti mechanismu (všechny kombinace parametru p, d_1).

Prvním krokem výpočtu je vyřešit inverzní úlohu dynamiky. Nejprve se vytvoří dynamický model a upraví se do maticového zápisu, jak už bylo naznačeno. Při použití Lagrangeových rovnic smíšeného typu vznikne dynamický model ve tvaru (5.4). Při řešení inverzní dynamiky jsou neznámými hodnoty pohonných silových účinků \mathbf{n} a Lagrangeovy multiplikátory λ . Tento vztah se upraví do vhodného tvaru pro řešení neznámých silových účinků a multiplikátorů (5.14).

$$[\Phi^T \quad T] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = M\ddot{\theta} - \mathbf{g} \quad (5.14)$$

Další postup závisí, zda je mechanismus redundantní či nikoliv. Pokud mechanismus není redundantní, tak je vše snadné, řešení se může nalézt například pomocí inverzní matice (5.15). Poté stačí jen odebrat rovnice, které nejsou potřeba pro další vyhodnocení například rovnice pro multiplikátory.

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = ([\Phi^T \quad T])^{-1}(M\ddot{\theta} - \mathbf{g}) \quad (5.15)$$

Složitější postup je v případě, že mechanismus je redundantní, protože se musí hledat parametrické řešení. V knize [2] je podrobně popsán způsob řešení soustav lineárních rovnic pomocí singulárního rozkladu matice. Řešení lineárních soustav pomocí singulárního rozkladu má tu výhodu, že dokáže vyřešit i neregulární soustavy pokud mají řešení, nebo nalézt přibližné řešení u soustav bez řešení. Proto je ho výhodné použít pro nalezení parametrického řešení nedourčené soustavy rovnic inverzní dynamiky.

Postup bude ukázán na soustavě rovnic (5.16), nejprve se provede singulární rozklad matice soustavy. Zavedou se substituce $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ a $\mathbf{c} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}$.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{USV}^T \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{Sy} = \mathbf{c} \quad (5.20)$$

Tím vznikne nová soustava rovnic, která je počtem rovnic a neznámých shodná s původní soustavou, ale má tu dobrou vlastnost, že je diagonální. Nečtvercovou diagonální maticí soustavy je možné rozdělit na čtvercovou diagonální matici a nulovou matici. Protože počet neznámých je vyšší než počet rovnic o počet stupňů redundance r a soustava je diagonální, znamená to, že posledních r neznámých je možné libovolně zvolit.

$$[\mathbf{S}^* \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{rov} \\ \mathbf{y}_{red} \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (5.18)$$

Jak je vidět ze vztahu (5.18) všechny prvky vektoru \mathbf{y}_{red} je možné libovolně volit a vektor \mathbf{y}_{rov} se určí ze vztahu (5.19).

$$\mathbf{y}_{rov} = \mathbf{S}^{*-1} \mathbf{c} \quad (5.19)$$

Pokud jsou známy prvky vektoru \mathbf{y} je možné je dosadit zpět do použité substituce a získat hledané hodnoty \mathbf{x} .

$$\mathbf{x} = \mathbf{Vy} \quad (5.20)$$

Stejně jako byl rozdělen vektor \mathbf{y} , je výhodné rozdělit i matici \mathbf{V} a to z důvodu rozdělení maticového součinu na součet dvou součinů.

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}_{rov} \mathbf{y}_{rov} + \mathbf{V}_{red} \mathbf{y}_{red} \quad (5.21)$$

Dají-li se dohromady vztahy (5.17-5.21) získá se přímo parametrické řešení soustavy (5.16), kde parametry řešení jsou v \mathbf{y}_{red} .

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}_{rov} \mathbf{S}^{*-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b} + \mathbf{V}_{red} \mathbf{y}_{red} \quad (5.22)$$

Důležité je upozornit, že uvedený postup funguje pouze v případě, že všechna singulární čísla jsou nenulová. V případě že jsou některá singulární čísla nulová, nemusí řešení existovat a i když existuje, tak se postup jeho hledání musí mírně upravit. Protože se singulární polohy v pracovním prostoru mechanismu nesmí vyskytovat, měla by být všechna singulární čísla nenulová.

Výpočet singulárního rozkladu je výpočtově náročný, proto je vhodné použít takový postup výpočtu, aby se musel provést co nejméně krát. Matice soustavy inverzní dynamiky je tvořena Jacobiho maticí vazbových rovnic a distribuční maticí pohonů. Tyto matice jsou

závislé na poloze mechanismu, ale nejsou závislé na jeho rychlosti, za předpokladu holonomních stacionárních vazeb. Z toho plyne, že v každé poloze bude nutné provést výpočet singulárního rozkladu, ale pro různé rychlosti mechanismu to nutné nebude.

Je výhodné upravit pravou stranu rovnice (5.14) tak, aby v ní přímo vystupovaly parametry d_1 a d_2 . Matice hmotnosti nezávisí na těchto dvou parametrech, proto je možné ji považovat za konstantu. Závislost vektoru zrychlení mechanismu na těchto parametrech je popsána vztahem (5.10), který je možné přímo dosadit do (5.14). Výsledný vektor jde rozdělit do dvou, kde z jednoho jde vytknout parametr d_2 a z druhého parametr d_1^2 . Složitější je to s vektorem \mathbf{g} , ve kterém jsou zahrnuty akcelerační zbytky a zatěžující síly. Akcelerační zbytky vzniknou během sestavování Lagrangeových rovnic, a pomocí příkladů nebo rozměrovou analýzou jde ukázat, že pokud se do nich dosadí vztah (5.9) lze z nich vždy vytknout parametr d_1^2 . Vektor zatěžujících sil je možné rozložit na část, která je vůči parametrům d_1 a d_2 konstantní a na část ze které jde vytknout parametr d_1 . Vektor, ze kterého jde vytknout d_1 často bývá nulový, například pokud mechanismus neobsahuje žádné tlumící prvky. Použitím těchto substitucí je možné přepsat rovnici (5.14) do tvaru (5.23).

$$[\Phi^T \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}d_1^2 + \tilde{\mathbf{B}}d_1 + \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}d_2 \quad (5.23)$$

Použije-li se výše popsaný postup nalezení řešení, získá se (5.24), v případě že mechanismus není redundantní, vztah nebude obsahovat člen s parametry řešení. Vtáh se dále upraví odstraněním nepotřebných řádků s multiplikátory.

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}d_1^2 + \tilde{\mathbf{B}}d_1 + \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}d_2 + \mathbf{V}_{red}\mathbf{y}_{red} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}d_1^2 + \mathbf{B}d_1 + \mathbf{C} + \mathbf{D}d_2 + \mathbf{V}_{red}\mathbf{y}_{red} \quad (5.25)$$

Tento tvar je výhodný především, protože všechny matice v něm obsažené jsou závislé pouze na poloze, není je třeba znovu určovat při výpočtu při různých rychlostech. Sloučením vztahů (5.25) a (5.12) se získá soustava nerovnic, jejíž řešením je dosažitelná oblast.

$$\mathbf{n}^- - F\dot{\mathbf{r}} \leq \mathbf{A}d_1^2 + \mathbf{B}d_1 + \mathbf{C} + \mathbf{D}d_2 + \mathbf{V}_{red}\mathbf{y}_{red} \leq \mathbf{n}^+ - F\dot{\mathbf{r}} \quad (5.26)$$

Jak už bylo napsáno, v každé poloze a pro každou rychlost se zvolí $r+1$ pohonů, jim nepříslušící nerovnice se odeberou. Těchto kombinací je k_1 . V každé kombinaci pohonů se nerovnice změní na rovnice dosazením mezních stavů pohonů. Protože mezní stavy jsou pro každý pohon dvě, je pro každou kombinaci pohonů potřeba propočítat všechny kombinace mezních stavů, těch je k_2 .

$$k_1 = \frac{\dim(\mathbf{n})!}{(r+1)!(\dim(\mathbf{n})-r-1)!} \quad (5.27)$$

$$k_2 = 2^{r+1} \quad (5.28)$$

V případě TetraSphere je počet kombinací kontrolovaných pohonů $k_1=6$ a počet kombinací mezních stavů $k_2=4$. To znamená, že v každém stavu definovaném polohou a rychlostí mechanismu je nutné provést výpočet dosažitelného zrychlení 24krát a z těchto výsledků určit maximální a minimální dosažitelné zrychlení.

Tímto je teoreticky popsán postup výpočtu globální dynamiky, aby ho však bylo možné provést pro TetraSphere, je nejprve nutné získat jeho dynamický model. Už několikrát bylo zmíněno, že je výhodné použít Lagrangeovy rovnice smíšeného typu (dále jen LEMT) a celý postup výpočtu byl popsán za předpokladu použití těchto pohybových rovnic. K sestavení dynamického modelu pomocí LEMT se musí zavést soustava souřadnic popisující mechanismus. Aby numerická náročnost úlohy nebyla zbytečně velká, byl kladen důraz na minimalizaci počtu použitých souřadnic. Proto byla zvolena taková soustava souřadnic, aby vznikl kompromis mezi náročností odvození rovnic a náročností výpočtu. K popisu polohy platformy jsou použity Eulerovy úhly (precese, nutace, rotace). Každý vozík pohánějící mechanismus je popsán vždy jen jedinou souřadnicí udávající polohu vozíku na rámu. Stejným způsobem byla popsána poloha platformy a vozíků i v předešlých analýzách. V žádné z předešlých analýz nebylo potřeba popsat souřadnicemi polohu nohou mechanismu (tyčí spojující platformu s vozíky). Pouze s těmito souřadnicemi by bylo velmi náročné vyjadřovat kinetickou energii nohou, proto byly zavedeny další souřadnice popisující nohy mechanismu. K popisu každé nohy mechanismu jsou použity souřadnice středu hmotnosti a dva úhly, ale tato sada souřadnic není postačující k jednoznačnému popisu polohy a orientace v prostoru, protože chybí jeden úhel. Vzhledem k tomu, že každá noha je uložena ve dvou sférických vazbách, má jeden neřízený stupeň volnosti, tím je parazitní rotace okolo osy protínající sférické vazby. Tuto parazitní rotaci není potřeba popisovat, při rozumném umístění lokálních souřadných systémů nohou bude chybějící úhel popisovat onu parazitní rotaci, a proto jeho absence nevádí. Celkem bude tedy použito 27 souřadnic, 3 pro platformu, 5 pro každou nohu a 1 pro každý vozík.

Pro použití LEMT je nezbytné vyjádřit kinetickou energii soustavy pomocí výše popsaných souřadnic a jejich derivací. Kinetická energie soustavy těles je dána součtem kinetických energií jednotlivých těles. K získání kinetické energie těles je výhodné použít Königovu větu, která říká, že kinetická energie tělesa je dána součtem kinetické energie

translační a rotační, kde rychlost translace a matice setrvačnosti jsou vztaženy ke středu hmotnosti [6].

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^T m \mathbf{v}_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega} \quad (5.29)$$

V případě tělesa konajícího sférický pohyb není potřeba používat Königovu větu, stačí tam použít pouze rotační energii, ale matice setrvačnosti musí být vztažena ke středu sférického pohybu. Matici setrvačnosti a vektor úhlové rychlosti je vždy výhodné psát v lokálním souřadném systému, aby matice setrvačnosti byla konstantní.

K vyjádření vektoru úhlových rychlostí je výhodné použít vztah pro výpočet matice úhlových rychlostí (5.30) a vztahy pro úhlové rychlosti převést do praktičtější formy (5.31).

$${}^2\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{s}_{12}^T \dot{\mathbf{s}}_{12} \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} {}^2\omega_x \\ {}^2\omega_y \\ {}^2\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\vartheta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Jak je vidět z (5.31), při použití Eulerových úhlů má derivace třetího úhlu (úhel vlastní rotace) vliv pouze na úhlovou rychlost okolo lokální osy z. To je důležité, protože je možné u nohou umístit lokální souřadný systém tak, aby parazitní rotace byla právě okolo této osy. Tím je dána soustava dvou úhlů potřebných k popisu každé nohy, precese okolo osy z a nutace okolo osy x a další úhel není potřebný. Hodnota třetího úhlu má sice vliv na úhlové rychlosti okolo os x a y, ale v případě, že noha je rotační součástí s osou rotace shodnou s osou parazitní rotace, pak tento úhel nemá vliv na kinetickou energii.

Nyní je jasné jaké přesně souřadnice bude potřeba použít pro každý člen mechanismu a je tedy možné sepsat vektor souřadnic mechanismu.

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_{platforma}^T \quad \mathbf{s}_{noha\ 1}^T \quad \mathbf{s}_{noha\ 2}^T \quad \mathbf{s}_{noha\ 3}^T \quad \mathbf{s}_{noha\ 4}^T \quad \mathbf{s}_{voziky}^T]^T \quad (5.32)$$

Kde:

$$\mathbf{s}_{platforma} = [\psi_{pl} \quad \vartheta_{pl} \quad \varphi_{pl}]^T \quad (5.33)$$

$$\mathbf{s}_{noha\ 1} = [x_{svo\ 1} \quad y_{svo\ 1} \quad z_{svo\ 1} \quad \psi_{no1} \quad \vartheta_{no1}]^T \quad (5.34)$$

$$\mathbf{s}_{noha\ 2} = [x_{svo\ 2} \quad y_{svo\ 2} \quad z_{svo\ 2} \quad \psi_{no2} \quad \vartheta_{no2}]^T \quad (5.35)$$

$$\mathbf{s}_{noha\ 3} = [x_{svo\ 3} \quad y_{svo\ 3} \quad z_{svo\ 3} \quad \psi_{no3} \quad \vartheta_{no3}]^T \quad (5.36)$$

$$\mathbf{s}_{noha\ 4} = [x_{svo\ 4} \quad y_{svo\ 4} \quad z_{svo\ 4} \quad \psi_{no4} \quad \vartheta_{no4}]^T \quad (5.37)$$

$$\mathbf{s}_{voziky} = [z_{svo\ 1} \quad z_{svo\ 2} \quad z_{svo\ 3} \quad z_{svo\ 4}]^T \quad (5.38)$$

Protože je použito více souřadnic než je počet stupňů volnosti mechanismu, je potřeba je doplnit rovnicemi vazeb. Počet souřadnic je 27 a počet stupňů volnosti je 3, z toho plyne, že je potřeba najít 24 vazbových rovnic. Tyto souřadnice byly zvoleny i proto, že je pro ně jednoduché nalézt rovnice vazeb. Protože vazbových rovnic má být 24, tak to odpovídá 6 rovnicím na každou nohu. Nohy jsou uloženy ve dvou sférických vazbách, které dohromady odebírají 6 stupňů volnosti, proto se ukazuje jako výhodné sestavit vazbové rovnice rozpojením v těchto vazbách.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha1}[0 \ 0 \ L-t \ 1]^T - \mathbf{T}_{1-platforma}[0 \ R \ h \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha1}[0 \ 0 \ -t \ 1]^T - [0 \ H \ z_{sv01} \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha2}[0 \ 0 \ L-t \ 1]^T - \mathbf{T}_{1-platforma}[-R \ 0 \ h \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha2}[0 \ 0 \ -t \ 1]^T - [-H \ 0 \ z_{sv02} \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha3}[0 \ 0 \ L-t \ 1]^T - \mathbf{T}_{1-platforma}[0 \ -R \ h \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha3}[0 \ 0 \ -t \ 1]^T - [0 \ -H \ z_{sv03} \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha4}[0 \ 0 \ L-t \ 1]^T - \mathbf{T}_{1-platforma}[R \ 0 \ h \ 1]^T) \\ \mathbf{E}_{34}(\mathbf{T}_{1-noha4}[0 \ 0 \ -t \ 1]^T - [H \ 0 \ z_{sv04} \ 1]^T) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Kde:

$$\mathbf{T}_{1-platforma} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi_{pl})\mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta_{pl})\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_{pl}) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{T}_{1-noha1} = \mathbf{T}_x(x_{sv01})\mathbf{T}_y(y_{sv01})\mathbf{T}_z(z_{sv01})\mathbf{T}_{\varphi z}(\psi_{no1})\mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta_{no1}) \quad (5.41)$$

$$\mathbf{T}_{1-noha2} = \mathbf{T}_x(x_{sv02})\mathbf{T}_y(y_{sv02})\mathbf{T}_z(z_{sv02})\mathbf{T}_{\varphi z}(\psi_{no2})\mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta_{no2}) \quad (5.42)$$

$$\mathbf{T}_{1-noha3} = \mathbf{T}_x(x_{sv03})\mathbf{T}_y(y_{sv03})\mathbf{T}_z(z_{sv03})\mathbf{T}_{\varphi z}(\psi_{no3})\mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta_{no3}) \quad (5.43)$$

$$\mathbf{T}_{1-noha4} = \mathbf{T}_x(x_{sv04})\mathbf{T}_y(y_{sv04})\mathbf{T}_z(z_{sv04})\mathbf{T}_{\varphi z}(\psi_{no4})\mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta_{no4}) \quad (5.44)$$

$$\mathbf{E}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Celá soustava vazbových rovnic je zobrazená v (5.39). Každý řádek představuje rozpojení smyčky v jedné sférické vazbě. Každé rozpojení ve vazbě je popsáno rozdílem radiusvektorů dané vazby, ke kterým se dojde sledem součinů transformačních matice a radiusvektoru rozpojované vazby v lokálním souřadném systému, kde jeden radiusvektor se získá transformacemi jdoucimi přes nohu a druhý přes rám nebo platformu. Protože jsou členy mechanismu v těchto vazbách pevně spojeny, musí rozdíl radiusvektorů být nulový. Protože při použití maticové notace se používají rozšířené radiusvektory o čtvrtý prvek obsahující jedničku, vzniklé rovnice vazeb se vždy skládají ze tří rovnic pro složky x, y, z a jedné identity 1=1 [2]. Tato identita nemá mezi vazbovými rovnicemi žádný praktický význam, proto je odstraněna vynásobením rovnice zleva maticí \mathbf{E}_{34} . Parametry L, H, R, h mají stejný význam jako v kapitole zabývající se velikostí dosažitelného prostoru a některé

z nich jsou zobrazeny na obrázku 3.1. Parametr t je vzdálenost středu hmotnosti nohy od vazby spojující nohu a vozík. Vazbové rovnice tak jak jsou napsány v (5.39) předpokládají stejné rozměry všech nohou a symetrii mechanismu, přidáním indexů k jednotlivým parametrům lze jednoduše rovnice zobecnit na nesymetrický mechanismus.

Jak již bylo napsáno, pomocí této soustavy souřadnic je nutné vyjádřit kinetickou energii celého mechanismu. Ta je dána součtem kinetických energií jednotlivých těles, které se spočítají ze vztahu (5.29). Úhlové rychlosti platformy a nohou se určí pomocí (5.31). Celý vztah pro kinetickou energii zde nebude uveden, protože by byl příliš dlouhý a stejně by se v něm pořád dokola opakovaly stejné členy pouze se změněnými indexy. Jeli znám vztah pro kinetickou energii je možné z LEMT získat dynamický model mechanismu.

Dynamický model se skládá z matice hmotnosti \mathbf{M} , distribuční matice pohonných účinků \mathbf{T} , vektoru akceleračních zbytků a zátěžných sil \mathbf{g} a Jacobiho matice vazbových rovnic Φ . Žádná z těchto matic zde nebude rozepsána, protože jsou příliš velké a dají se nalézt v kódech přiložených programů. Bude zde alespoň naznačeno, jakým způsobem se tyto matice získají. Jacobiho matice vazbových rovnic má jasnou definici, která je přímo vidět z LEMT (5.3).

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \quad (5.46)$$

Distribuční matice pohonných účinků je v tomto případě také velice jednoduchá, protože souřadnice, na kterých konají pohonné síly práci, jsou zahrnuty mezi použitými souřadnicemi. Proto ani není nutné použít princip virtuálních prací (nebo jinou metodu) k určení této matice a je možné napsat tuto matici rovnou. Tato matice musí mít 4 sloupce, protože má mechanismus 4 pohony a 27 řádků, protože tolik je souřadnic a tím i pohybových rovnic. Matice je složená z nul, pouze na řádcích příslušejících souřadnicím vozíků je vždy jedna jednička a to v tom sloupci, kterému přísluší daný pohon. Protože souřadnice vozíků jsou poslední 4 souřadnice, bude se tato matice skládat z nulové matice o rozměru 23×4 a jednotkové matice 4×4 .

Určit matici hmotnosti je možné vícero postupy, nejpřirozenější je přímo vyřešit (5.3) a sestavit matici hmotnosti z koeficientů, kterými se násobí druhé derivace souřadnic. To znamená, že člen v prvním řádku a prvním sloupci matice je člen, kterým se násobí zrychlení první souřadnice v první rovnici. Tímto způsobem se z první rovnice postaví celý první řádek

matice hmotnosti a z dalších rovnic postupně celá matice. Existuje i jiný způsob jak ze vztahu pro kinetickou energii získat matici hmotnosti přímo. Matice hmotnosti je totiž Hessova matice kinetické energie [2].

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{s}_i \partial \dot{s}_j} \quad (5.47)$$

Vektor \mathbf{g} je dán součtem vektoru akceleračních zbytků (\mathbf{p}) a vektoru zobecněných sil (\mathbf{Q}). Vektor akceleračních zbytků se dá sestavit tak, že se z levé strany rovnic (5.3) odeberou členy obsahující druhé derivace a zbylé členy jsou akcelerační zbytky, pouze je ještě nutné jim změnit znaménko, protože vektor \mathbf{g} se nachází na druhé straně rovnice. Stejně jako u matice hmotnosti i zde existuje přímý vztah pro spočítání akceleračních zbytků z kinetické energie [2].

$$p_i = \frac{\partial E_k}{\partial s_i} - \frac{\partial^2 E_k}{\partial t \partial \dot{s}_i} - \frac{\partial^2 E_k}{\partial s_a \partial \dot{s}_i} \dot{s}_a \quad (5.48)$$

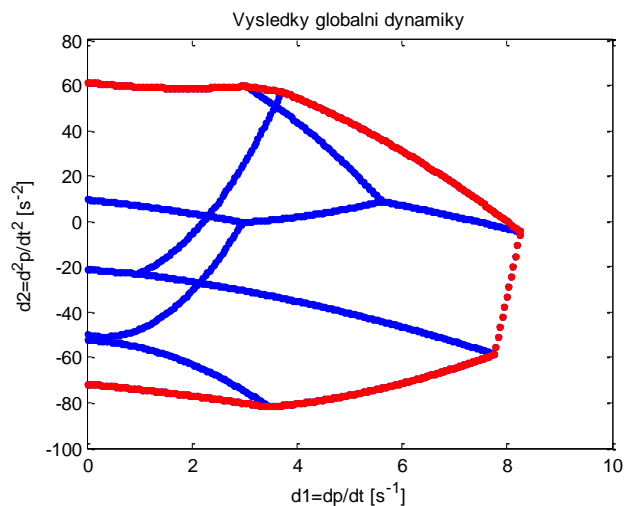
Index a je považován za sčítací. Zatímco u matice hmotnosti bylo využití přímého vztahu jednoznačně výhodnější než vyřešení (5.3) a postupné vybírání správných členů, u vektoru akceleračních zbytků je využití přímého vztahu zhruba stejně náročné.

Vektor zobecněných sil je možné zase sestavit mnoha různými způsoby. Například vyjádřením souřadnic, na kterých síly konají práci a určením jejich převodu s používanými souřadnicemi. Těmito převody se následně zobecní zatěžující síly tak, aby získané zobecněné síly působící na použité souřadnice měly stejný účinek jako síly skutečně působící na mechanismus. Jiný postup je nalezení takových sil působících na souřadnice, které při libovolném virtuálním pohybu vykonají stejnou virtuální práci jako skutečné síly. To se udělá tak, že se vyjádří virtuální práce ze skutečných sil a virtuální práce ze zobecněných sil (sil konajících práci na použitých souřadnicích). Tyto virtuální práce se položí sobě rovné a porovnáním koeficientů na obou stranách rovnice se získají zobecněné síly. Poslední efektivní postup jak určit zobecněné síly je použít vztah (5.49) [2].

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial s_i} \quad (5.49)$$

Tento vztah říká, že zobecněná síla je záporně vzatá parciální derivace potenciální energie podle příslušné souřadnice. Na první pohled může tento vztah vypadat zvláště, ale s přihlédnutím k definici potenciální energie smysl dává. Je třeba pamatovat, že tímto

způsobem je možné nalézt zobecněné síly odpovídající pouze potenciálním silám působícím na mechanismus. Na řešený mechanismus působí pouze pohonné síly, které jsou do dynamického modelu zakomponovány skrze distribuční matici pohonných sil roznásobenou s vektorem pohonných sil a dále pak už jen síly zemské tíže, které jsou potenciální, a proto je výhodné tento vztah použít. Velká výhoda tohoto způsobu určení zobecněných sil je, že se sníží riziko vzniku chyb například ve znaménku [2].



Obr. 5.3 Ukázka výsledků globální dynamiky

Tímto byl popsán teoretický postup výpočtu globální dynamiky a vytvoření dynamického modelu. Na obrázku 5.3 je ukázka výsledků globální dynamiky v jedné poloze mechanismu. Výsledek je tvořen mnoha grafy, kde každý představuje jednu z kombinací kontrolovaných pohonů při dosažení jejich mezních stavů. Důvod proč je grafů méně, než je počet kombinací, je ten, že ostatní pohony by v těchto kombinacích své limitní stavy překročily. Ze stejného důvodu grafy neprocházejí celým diagramem, ale často začínají a končí někde uprostřed diagramu. Mezní hodnoty zrychlení jsou zvýrazněny červenou barvou. Vyhodnocení výsledků globální dynamiky není tak jednoduché jako například u dexterity. Těchto diagramů se získá pro každou trajektorii několik. Jeden ze způsobů je určit si požadovanou hodnotu parametru d_1 a určit maximální hodnotu parametru d_2 , která je dosažitelná na celé trajektorii. Způsob vyhodnocení výsledků by měl být zvolen s ohledem na konkrétní mechanismus, trajektorii a kladené požadavky. Je třeba si uvědomit, že jednu trajektorii je možné parametrizovat různými způsoby a hodnoty d_1 a d_2 jsou na zvolené parametrizaci závislé. Pro snazší vyhodnocení výsledků může být vhodné vykreslit si do jednoho diagramu výsledky mezních hodnot zrychlení ze všech vyhodnocovaných poloh. Jiný způsob vyhodnocení je numerickou integrací dopočítat čas potřebný k překonání trajektorie.

5.2 Modální analýza

Žádná ze zatím popsaných analýz neřešila chování mechanismu v situaci, kdy je buzen časově proměnným silovým účinkem. Globální dynamika řeší mezní pohybové schopnosti mechanismu při působení pohonných sil a předpokládá zatížení pouze účinky zemské tíže a dokonale tuhé členy mechanismu. Výpočet tuhosti uvažuje poddajné členy mechanismu, ale řeší deformace při zatížení, které je v čase neměnné. Problém je, že když na poddajnou soustavu působí harmonické buzení o konstantní amplitudě, tak amplituda vynucených výchylek je funkcí nejen amplitudy buzení a místa kde se určuje, ale také frekvencí budící síly. Výpočet tuhosti nalezne řešení amplitudy pouze pro frekvenci jdoucí limitně k nule. Existují frekvence, při nichž u netlumené soustavy jde amplituda vynucených kmitů do nekonečna a tím i deformace a napětí v tělesech tvořící soustavu, ve skutečnosti jsou všechny soustavy tlumené a navíc při rostoucích deformacích přestává být soustava lineární. Tak že amplituda ve skutečnosti nikdy nejde do nekonečna, buď dojde k destrukci soustavy, nebo se amplituda ustálí na konečné hodnotě, avšak vyšší než pro jiné budící frekvence. Modální analýza nehledá velikosti amplitud vynucených kmitů, ale pouze kritické (vlastní, neboli rezonanční) frekvence, při kterých amplituda vynucených netlumených kmitů konverguje k nekonečnu. Dále modální analýza hledá vlastní tvary kmitu (které přísluší vlastním frekvencím) a útlumy jednotlivých tvarů kmitu.

Při výpočtu se bude předpokládat lineární soustava, to znamená soustava popsaná soustavou obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Dále se bude předpokládat, že je soustava netlumená. Budou se tedy určovat pouze vlastní frekvence a jejich tvary kmitu. Stejně jako výpočtu tuhosti i zde se výpočet nebude odehrávat na řešeném mechanismu, ale na jeho náhradě prutovou soustavou a použije se metoda konečných prvků. Bude použita stejná prutová soustava jako u výpočtu tuhosti, není důvod používat dvě odlišné, navíc to zjednoduší výpočet.

Modální analýza řeší chování soustavy při působení specifických silových účinků, patří tedy mezi dynamické analýzy a základní předpoklad pro její provedení je znalost matematického popisu soustavy. Je tedy třeba znát dynamický model. Ten lze sestavit více postupy, zde se použije Hamiltonův variační princip [11], který je obdobou metody minima celkové potenciální energie použité pro odvození matice tuhosti. Tento princip říká, že se soustava bude pohybovat vždy tak, aby funkcionál nabyl svého extrému. V případě Hamiltonova variačního principu je funkcionál definován jako integrál Lagrangeovy funkce

na časovém intervalu. Lagrangeova funkce L je definovaná jako rozdíl kinetické energie E_k a celkové potenciální energie, kterou je možné rozložit na deformační energii U a potenciální energii působících pracovních sil E_p .

$$L = E_k - U - E_p \quad (5.50)$$

Funkcionál musí dosahovat svého extrému vždy bez ohledu na časový interval, na kterém je určován. Hledá se tedy extrém přímo Lagrangeovy funkce. Hledáním extrémů funkcionálů se zabývá variační počet. Extrém funkcionálu nastane tehdy, když je jeho derivace nulová, při derivování funkcionálu závisí na jeho typu. Lagrangeova funkce je funkcí hodnot souřadnic, jejich prvních časových derivací a teoreticky i času. Pro tento typ funkcionálu byl odvozen vztah pro jeho derivaci, která když se položí rovna nule, vznikne podmínka extrému.

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Delta}_i} \right) = 0 \quad (5.51)$$

Při pohledu na podmínku extrému tohoto funkcionálu je zjevné, že se jedná o Lagrangeovy rovnice II. druhu. Pouze s tím rozdílem, že u nich se většinou předpokládají tuhá tělesa a tím nulová deformační energie. Pro aplikaci tohoto vztahu je potřeba vyjádřit komponenty tvořící Lagrangeovu funkci. V případě deformační energie a potenciální energie pracovních sil to bylo popsáno v kapitole zabývající se tuhostí. Bude ukázáno, že kinetická energie se může vyjádřit jako polovina kvadratické formy matice hmotnosti \mathbf{M} .

$$E_p = -\Delta^T \mathbf{F} \quad (5.52)$$

$$U = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta \quad (5.53)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\Delta}^T \mathbf{M} \dot{\Delta} \quad (5.54)$$

Po dosazení těchto vztahů do vztahu pro extrém funkcionálu vyjde soustava obyčejných diferenciálních rovnic tvořících dynamický model. S tímto modelem je možné provést modální analýzu.

$$\mathbf{M} \ddot{\Delta} + \mathbf{K} \Delta = \mathbf{F} \quad (5.55)$$

Matice tuhosti a vektor zátěžných sil jsou známy z výpočtu tuhosti, je třeba ještě odvodit tvar matice hmotnosti. K jejímu odvození je výhodný vztah (5.54). Kinetickou energii jde také vyjádřit jako součet kinetických energií všech těles (elementů) a kinetickou energii elementu jde vyjádřit jako objemový integrál poloviny součinu hustoty a kvadrátu rychlosti.

$$E_k^e = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} dV \quad (5.56)$$

Protože je element tyčový, mění se rychlost pouze v jednom směru a objemový integrál jde přepsat do jednoduššího tvaru. Předpokládá se konstantní hustota i průřez.

$$E_k^e = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \mathbf{v}_{(\xi)}^T \mathbf{v}_{(\xi)} d\xi \quad (5.57)$$

K vyjádření rychlosti je vhodné použít matici tvarových funkcí, která převádí uzlové posuvy na pole posunutí. Tato matice se v čase nemění, derivováním popsané závislosti podle času se ukáže, že stejným způsobem převádí uzlové rychlosti na pole rychlostí.

$$\mathbf{v}_{(\xi)} = \mathbf{N}_{(\xi)} \boldsymbol{\delta}^e \quad (5.58)$$

Nyní stačí dosadit vztah pro pole rychlostí do vztahu pro kinetickou energii elementu. Uzlové rychlosti je možné z integrálu vytknout, jelikož jsou vůči parametru ξ konstantní.

$$E_k^e = \frac{1}{2} \rho A \boldsymbol{\delta}^{eT} \int_0^L \mathbf{N}_{(\xi)}^T \mathbf{N}_{(\xi)} d\xi \boldsymbol{\delta}^e \quad (5.59)$$

Po dosazení a vyřešení integrálu se ještě zavádí substituce za člen ρAL který je roven hmotnosti elementu.

$$E_k^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{eT} \begin{bmatrix} \frac{m}{3} & 0 & 0 & \frac{m}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{3} & 0 & 0 & \frac{m}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3} & 0 & 0 & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e \quad (5.60)$$

Matice obsažená v tomto vztahu je nazývána konzistentní maticí hmotnosti elementu. Existuje ještě jednodušší varianta matice hmotnosti, nekonzistentní matice hmotnosti, která vznikne tak, že se mimo diagonální prvky matice přesunou na diagonálu [11]. Musí platit, že součet všech prvků matice hmotnosti dá dohromady hmotnost elementu vynásobenou dimenzí prostoru, ve které se nachází. Asi nejzajímavější na této matici je, že neobsahuje informaci o

orientaci elementu v prostoru. Matice hmotnosti byla odvozena pomocí matice tvarových funkcí, které byly odvozeny v obecné poloze, čili i odvozená matice hmotnosti má tento tvar bez ohledu na orientaci v prostoru. Přestože je matice odvozená v obecné poloze, je korektní (i když z principu zbytečné) zkoušet ji transformovat pomocí transformačních pravidel používajících se v MKP (které vycházejí z transformací v tenzorovém počtu). Po této transformaci se tato matice také nikdy nezmění. Z toho plyne zajímavé tvrzení, které říká, že tato matice hmotnosti je invariantní vůči natočení a deformaci elementu. Podle [11] je toto vlastnost matic hmotnosti, jsou-li všechny stupně volnosti translační a jsou-li vyjádřeny v jednom souřadném systému, což tento případ splňuje.

Když je známý tvar matice hmotnosti pro element, zbývá spočítat matice hmotnosti pro všechny elementy a sestavit z nich globální matici hmotnosti. K vytvoření globální matice tuhosti z lokálních se používá naprosto stejný postup jako u matice tuhosti z kapitoly zabývající se tuhostí mechanismu. Vytvoří se nulová matice o rozměru globální matice tuhosti. Určí se pořadí jednotlivých stupňů volnosti (sestaví se globální vektor uzlových posuvů Δ), které se musí shodovat s tím, které bylo použito u sestavování globální matice tuhosti. Vezme se první prvek matice hmotnosti prvního elementu, zjistí se, kterým stupňům volnosti přísluší jeho umístění v lokální matici hmotnosti a přičte se k prvku globální matice hmotnosti, který přísluší stejným stupňům volnosti. Tento postup se opakuje pro všechny prvky matic hmotnosti všech elementů.

Stejně jako u analýzy tuhosti je potřeba zavést okrajové podmínky. Okrajovými podmínkami jsou pevné vazby některých uzlů. Matice hmotnosti a tuhosti se násobí uzlovými zrychleními a posuvy, je-li některý stupeň volnosti zbaven volnosti pevnou vazbou, je jeho posuv i zrychlení nulové. Příslušné sloupce matice se tedy násobí nulami a je možné je odstranit. Zároveň se musí odstranit i dané prvky z vektoru uzlových posuvů a uzlových zrychlení. Stejně tak nejsou známy reakční síly v místech kde je vazba, proto je nejjednodušší odstranit i příslušné řádky matice a příslušné prvky zátěžného vektoru. Tím se získá hledaný model soustavy. Kompletní model by navíc obsahoval matici tlumení, která se násobí uzlovými rychlostmi, ale jak bylo napsáno, v této práci se uvažuje netlumený systém.

Modální analýza se zabývá studiem kmitání systému, především hledáním vlastních frekvencí. Vlastní frekvence systému je frekvence, kterou systém volně kmitá, například je-li vybuzen počátečními podmínkami, ale není buzen vnějším účinkem. Ukazuje se, že při vnějším buzení závisí amplituda vynucených kmitů na budící frekvenci. Při budící frekvenci

blízké vlastní frekvenci amplituda vynucených kmitů výrazně roste a pro budící frekvenci shodnou s vlastní frekvencí jde amplituda k nekonečnu. To je velice důležité, systém je téměř vždy buzen. Budící účinky bývají harmonické, a i když harmonické nejsou, tak jdou rozložit na součet harmonických složek. Při návrhu stroje je nezbytné zajistit, aby se významné budící složky neblížily k vlastním frekvencím. To by téměř jistě znemožnilo využití mechanismu, pouze v případě velice silně tlumeného systému by tento problém nenastal.

Při kmitání volnými kmity není systém buzen. Vektor budících sil na pravé straně soustavy diferenciálních rovnic je tedy nulový.

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \mathbf{K}\Delta = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

Nejsnazší způsob nalezení řešení je metoda odhadu. Jako dobrý odhad se ukazuje součin konstantního vektoru a exponenciální funkce času. Vektor musí být nenulový, v případě nulového vektoru by bylo řešení nulové (triviální) a nepopisovalo by vůbec kmitání.

$$\Delta = \mathbf{u}e^{\lambda t} \quad (5.62)$$

$$\ddot{\Delta} = \lambda^2 \mathbf{u}e^{\lambda t} \quad (5.63)$$

Odhad se dosadí do soustavy rovnic. Skalární člen se může pokrátit a vektor se může vytknout.

$$\mathbf{M}\lambda^2 \mathbf{u}e^{\lambda t} + \mathbf{K}\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad (5.64)$$

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.65)$$

Vzniklý vztah je součin matice s nenulovým vektorem, který musí dát nulový vektor. To je možné pouze v případě, že matice je singulární. Singulární matice má vždy nulový determinant, z toho plyne podmínka.

$$\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}) = 0 \quad (5.66)$$

Levému členu v této rovnici se říká frekvenční determinant. V případě, že by se předešlá soustava rovnic vynásobila zleva inverzí matice hmotnosti, přešel by frekvenční determinant do tvaru, ze kterého je jasně vidět, že se jedná o problém vlastních čísel.

$$\det(\lambda^2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) = 0 \quad (5.67)$$

Z vlastností matice hmotnosti a tuhosti plyne, že hodnoty λ vždy vyjdou ryze imaginární, v případě tlumeného systému by obsahovaly i reálnou složku. A jejich počet je roven počtu stupňů volnosti n , mohou být však násobné. Dále se bude předpokládat, že násobné nejsou, protože se to stává jen výjimečně. Pro určené hodnoty λ se určí hodnoty \mathbf{u} .

Vektory \mathbf{u} nejsou určeny jednoznačně, ale je možné je vynásobit libovolnou konstantou a . Řešení je superpozicí všech nalezených řešení frekvenčního determinantu.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i e^{\lambda_i t} \quad (5.68)$$

Jelikož hodnoty λ jsou vždy ryze imaginární, je možné řešení upravit do známého tvaru, který je názornější.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i (A_i \cos(\lambda_i t) + B_i \sin(\lambda_i t)) \quad (5.69)$$

Z tohoto tvaru je jasné vidět, že hodnoty λ_i jsou hledané vlastní úhlové frekvence. Vektory \mathbf{u}_i se nazývají vlastní tvary kmitu. Každá vlastní frekvence má svůj tvar kmitu, který říká, v jakém poměru jsou amplitudy výchylek jednotlivých stupňů volnosti při volných kmitěch danou frekvencí. Vlastní tvary kmitu tvoří systém lineárně nezávislých vektorů, řešení v daném časovém okamžiku je vždy lineární kombinací vlastních tvarů. Vlastní tvary kmitu, jak už bylo napsáno, nejsou určeny jednoznačně, je vhodné je nějakým způsobem normovat. Nejjednodušší způsoby normování jsou například, aby první člen byl roven jedné, nebo aby Euklidova norma byla rovna jedné. V praxi nejpoužívanější způsob normování je normovat vzhledem k matici hmotnosti [11], to znamená, aby platilo (5.70). Toto normování přináší mnohé výhody, ale pro tuto práci nejsou vlastní vektory významné, proto se to dále nebude rozebírat.

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i = 1 \quad (5.70)$$

Při buzení vnějšími účinky harmonického průběhu je na pravé straně soustavy diferenciálních rovnic například vektor (určující kde působí buzení a jak je silné) vynásobený jednotkovou budící silou.

$$\mathbf{M} \ddot{\Delta} + \mathbf{K} \Delta = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (5.71)$$

Odhad řešení je téměř shodný jako u volných kmitů, pouze se předpokládá kmitání budící frekvencí.

$$\Delta = \mathbf{r} e^{i\omega t} \quad (5.72)$$

$$\ddot{\Delta} = -\omega^2 \mathbf{r} e^{i\omega t} \quad (5.73)$$

Po dosazení a několika málo úpravách se získá vztah pro amplitudy vynucených kmitů.

$$\mathbf{r} = (\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)^{-1}\mathbf{F} \quad (5.74)$$

Amplitudy vynucených výchylek závisí na budící frekvenci. Kdyby se vykreslila grafická závislost velikosti vynucených amplitud na frekvenci, obsahovala by místa, kde amplitudy divergují k nekonečnu. Při těchto frekvencích je invertovaná matice singulární a je třeba použít jiný odhad řešení. Je jasné, že těmito frekvencemi se soustava nesmí budít. Způsob jak tyto frekvence nalézt je položit determinant invertované matice roven nule. Při porovnání tohoto determinantu s frekvenčním determinantem je patrné, že jsou naprosto totožné. Toto dokazuje pravdivost tvrzení, že kritické budící frekvence jsou rovny vlastním frekvencím soustavy.

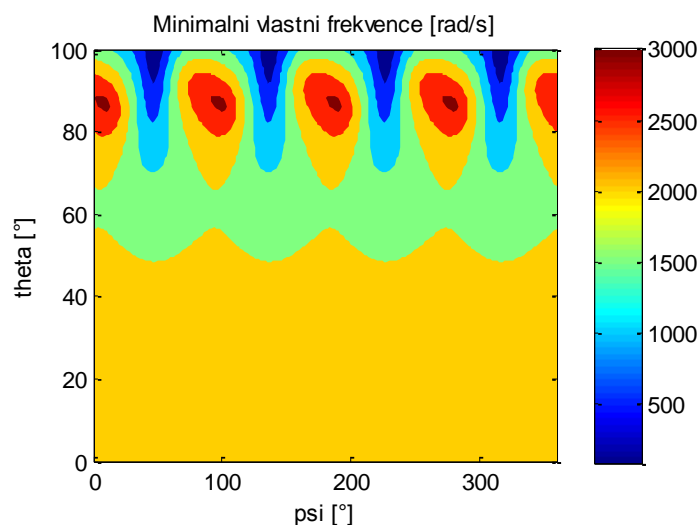
Z této modální analýzy se získají vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu. Je složité vyhodnocovat tvary kmitu, protože se nedá jednoduše říci jaký tvar kmitu je problematický a jaký není. V některých případech jdou rozlišit problematické a méně problematické tvary kmitu, ale stejně je problém napsat program který je rozliší. Proto se v této práci vyhodnocují pouze vlastní frekvence.

V praxi jsou stroje v podstatě vždy buzeny celým spektrem frekvencí. Většinou jsou jen některé budící frekvence významné a ostatní jsou natolik slabé, že i když se shodují s vlastní frekvencí, tak nedokážou soustavu vybudit do nebezpečného stavu. To je dáno tím, že soustava je vždy tlumená a slabé buzení je utlumeno. Důležité je, aby významné budící frekvence se neshodovaly s vlastními frekvencemi. Je složité odhadnout, jaké budící frekvence budou dominantní. Lze například odhadnout, že když stroj nese vřeteno, které se otáčí známou rychlostí a nástroj má známý počet břitů, tak bude systém buzen frekvencí, která je dána součinem počtu břitů a úhlovou rychlostí vřetena. Problém je, že je soustava buzena mnoha dalšími frekvencemi, které nemusí být takto snadno odhadnutelné.

Obecně platí, že spektrální výkonová hustota budících účinků spíše klesá s rostoucí frekvencí. Nejnebezpečnější jsou téměř vždy nejnižší vlastní frekvence, protože je lze nejsnáze vybudit. Naopak velmi vysoko položené vlastní frekvence je mnohdy téměř nemožné vybudit. Z toho plyne, že se musí sledovat především nejnižší vlastní frekvence.

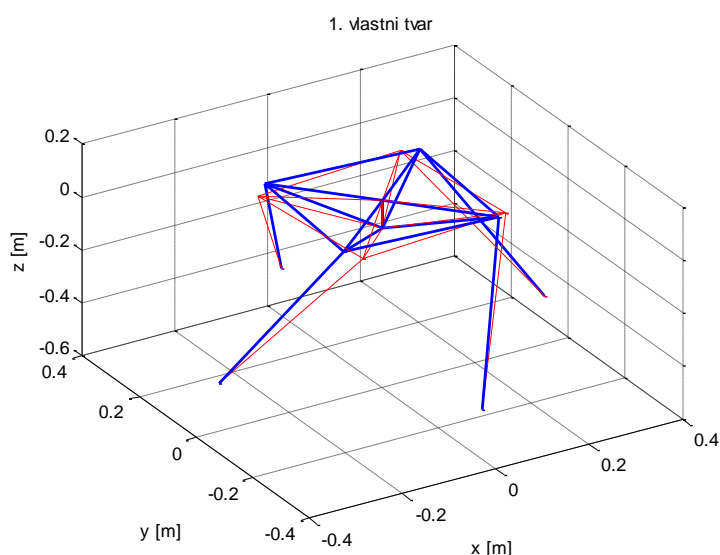
Vlastní frekvence nezávisí pouze na tuhostních a hmotnostních vlastnostech soustavy, ale i na konfiguraci, v tomto případě poloze mechanismu. Chce-li se najít nejnižší vlastní frekvence, je nutné provést výpočet v celém pracovním prostoru. Výpočet se provede jako u výpočtu dexterity nebo tuhosti. V pracovním prostoru mechanismu se zvolí dostatek hodnot

nezávislých souřadnic a pro všechny jejich kombinace se provede výpočet. Výsledek je znovu výhodně vykreslit v contourf grafu. Ilustrativní příklad výsledků je na obrázku 5.4.



Obr. 5.4 Ukázka výsledků modální analýzy

Stejně jako vlastní frekvence jsou i vlastní tvary kmitu funkcí polohy. Na obrázku 5.5 je jen pro zajímavost zobrazen 1. vlastní tvar kmitu v základní poloze mechanismu (ve středu pracovního prostoru). Je vidět, že tento tvar kmitu představuje torzní kmit platformy, to je zrovna nebezpečný tvar kmitu, protože ho lze snadno vybudit momentem působící v ose vřeten (který vznikne, nese-li platforma rotující vřeten). Ale jak bylo napsáno, v této práci se tvary kmitu nebudou vyhodnocovat.



Obr. 5.5 Příklad vykreslení 1. vlastního tvaru kmitu

6 Optimalizace

Klíčovým krokem při návrhu strojů je jejich optimalizace. Je to proces hledání nejuvhodnějšího (optimálního) konstrukčního řešení. Optimalizace může být prováděna analytickým výpočtem, ale to je možné jen u velice jednoduchých problémů. Mnohem častěji se využívají numerické metody, kterých existuje velké množství. Optimalizace je velmi obecný pojem, který se netýká pouze strojů, optimalizovat jde téměř cokoli. Stroje, různé procesy, počítačové programy a existují i strukturní optimalizace či programy, které se samy vylepšují za chodu [12]. Optimalizační metody je možné také využít pro hledání kořenů složitých rovnic a jejich soustav bez znalosti jejich Jacobiho matic, ale není to nejefektivnější způsob řešení.

K provádění optimalizace je potřeba umět konkrétní řešení ohodnotit skalární hodnotou, která objektivně hodnotí vlastnosti stroje. K tomu lze výhodně využít výše popisované analýzy (pracovní prostor, dexterita, tuhost, modální analýza a globální dynamika). Způsob, kterým se výsledky těchto analýz převedou do jednoho skaláru, není jednoznačný a výpočtář zde má volné pole působnosti. Této hodnotě se říká různými pojmy např. ohodnocující funkce, fitness, v této práci se bude používat pojem cílová funkce. Cílová funkce se sestavuje takovým způsobem, aby pro nejlepší možnou variantu řešeného problému nabyla svého globálního extrému. Většina optimalizačních metod hledá minimum, v takovém případě cílová funkce reflektuje například nějaké nedostatky hodnocené varianty. Menší množství optimalizačních metod hledá maximum, pak může být cílová funkce složena z kladných vlastností a ty negativní jsou od ní odečtené. V případě, že metoda hledá maximum, pak se pro cílovou funkci často používá název fitness, u tohoto názvu je celkem jasné, že se maximalizuje. V principu je jedno, jestli se hledá maximum nebo minimum, je to jenom věc znaménka, pokud může cílová funkce nabývat libovolných hodnot a nevadí, že je například záporná. Teoreticky není problém vymyslet optimalizační metodu, která pracuje s cílovou funkcí, která není skalárem, ale například vektorem nebo čímkoliv jiným, ale v praxi se standardně pracuje s cílovou funkcí ve formě skaláru.

Každému řešení se tedy přiřazuje cílová funkce, k tomu je potřeba příslušné řešení jednoznačně definovat. Tato definice musí být taková, že libovolné dvě řešení musí být díky ní odlišitelné. Dále musí být taková, aby na jejím základě šla vyčíslit cílová funkce. Teoreticky ani zde nejsou meze jakým způsobem tuto definici řešení provést, pokud je k tomu přizpůsoben optimalizační algoritmus. Nejjednodušší a nejuniverzálnější způsob definice

konkrétního řešení je definice pomocí optimalizačních parametrů. Optimalizační parametry jsou čísla, kterými je řešení specifikováno, mohou to být například rozměry stroje nebo materiálové charakteristiky. Optimalizační parametr musí být samozřejmě minimálně jeden, jinak jejich počet není omezen, musí se však počítat s tím, že výpočetní náročnost roste s jejich počtem. Parametrů, které mají vliv na cílovou funkci, bývá zpravidla velmi mnoho, proto se některé pevně volí a jen některé se využijí pro optimalizaci. Volba optimalizačních parametrů není jednoznačná a výsledek optimalizace na ní významně závisí, proto zde mají významný vliv zkušenosti výpočtáře. Všechny optimalizační parametry se sdružují do vektoru optimalizačních proměnných, tento vektor tvoří jedno možné řešení. Nejčastěji jsou jednotlivé optimalizační parametry reálná čísla, to se hodí například na rozměry, ale v jiných případech se hodí třeba celá čísla, například pro počet zubů ozubeného kola, nebo jen logické hodnoty ano/ne a samozřejmě jsou možné kombinace. Optimalizační proměnné mohou být nezávislé, nebo mezi nimi mohou platit restriční podmínky, ať už ve tvaru rovnic nebo nerovnic [13]. Pokud existují vedlejší podmínky, pak se musí zvolit vhodná metoda, která je dokáže respektovat, nebo je zohlednit v cílové funkci [13].

Jsou-li definované optimalizační parametry a cílová funkce těchto parametrů, je možné provést optimalizaci. Na řadě je tedy zvolit optimalizační metodu, těch je nepřeberné množství. V [13] je popsáno dokonce několik desítek optimalizačních metod. Metody mohou být analytické, ty lze použít jen na jednodušší problémy, nebo numerické. Numerické metody je ještě dobré rozdělit na lokální a globální. Lokální metody jsou založeny na jasně deterministickém postupu, kdy se z počátečního stavu (zvolené počáteční optimalizační parametry) postupně daným algoritmem mění optimalizační parametry tak, aby se cílová funkce zlepšila až do nalezení extrému. Problém je, že nalezený extrém nemusí být globální a závisí pouze na zvoleném počátečním stavu. Zatímco globální metody se snaží nalézt globální extrém, ale ani ty nezaručují, že nalezený extrém je globální, ale šance na jeho nalezení je vyšší. Globální optimalizační metody umožňují nalézt globální extrém především díky heuristice. Například někdy mohou udělat zdánlivě chybný krok, kdy se dostanou do horšího stavu, než byl předešlý. Takovéto kroky mohou nakonec umožnit nalézt lepší řešení, než by našla lokální metoda. Jedna z typických globálních metod jsou genetické algoritmy.

6.1 Genetické algoritmy

Asi nejznámější globální optimalizační metoda jsou genetické algoritmy. Jsou to evoluční algoritmy, které se snaží napodobit darwinovský princip evoluce [12]. Princip metody je takový, že existuje populace jedinců, kde každý jedinec představuje možné řešení. Z této generace vznikne nová generace, obsahující nové jedince, které vznikly z původních jedinců. Při vzniku nových jedinců se uplatňují podobné principy jako v přírodě. Nový jedinec (potomek) vždy přejímá vlastnosti dvou jedinců z předcházející generace (rodičů). Dále může nový jedinec stochasticky zmutovat. Stejně jako v přírodě i v genetických algoritmech mají nejsilnější jedinci největší šanci se reprodukovat a nejslabší jedinci ji mají nejmenší. K vyhodnocení vlastností jedince se využije cílová funkce, v genetických algoritmech se využívá zmíněného pojmu fitness, protože genetické algoritmy standardně maximalizují cílovou funkci. Nejlepší jedinec se může přenést do nové generace beze změny. Po vzniku nové generace původní generace zaniká a proces reprodukce se opakuje. Tento cyklus se opakuje do splnění ukončující podmínky, tou může být maximální počet generací, dosažení určité hodnoty cílové funkce nebo cokoliv jiného. Hledané řešení je jedinec s největší cílovou funkcí.

Postup genetických algoritmů není jednoznačný a může se dle potřeby upravovat, ale ve většině případů je následující [12]:

1. Vynulování hodnoty počítadla generací.
2. Náhodné vygenerování počáteční populace.
3. Výpočet cílové funkce každého jedince z počáteční populace.
4. Tvorba dvojic jedinců a tvorba jejich potomků.
5. Výpočet cílové funkce nových jedinců.
6. Tvorba nové populace z původní populace a z potomků.
7. Zvýšení hodnoty počítadla generací o jedna.
8. Výpočet cílové funkce každého jedince z nové populace.
9. Pokud není splněno ukončovací kritérium, pokračuje se bodem 4, pokud je splněno ukončovací kritérium, cyklus se ukončí a jako výsledek se vrátí nejlepší jedinec, poslední generace nebo všechny generace.

První generace je náhodně vygenerována. Většina současných programovacích jazyků obsahuje generátor náhodných čísel. Toho se dá s výhodou využít. Generátor náhodných čísel

implementovaný v Matlabu vrací náhodná čísla z intervalu od nuly do jedné s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti. Za předpokladu, že jednotlivé optimalizační parametry jsou omezené, je snadné s takovýmto generátorem vyjádřit náhodnou hodnotu z daného intervalu.

$$x = x_{min} + r(x_{max} - x_{min}) \quad (6.2)$$

Znázorněný vztah ukazuje nejjednodušší způsob generování hodnoty optimalizačního parametru x pro jedince z první generace. Parametry x_{max} a x_{min} jsou maximální a minimální hodnoty daného parametru, číslo r je náhodně vygenerované číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Tímto způsobem se postupně vygenerují optimalizační parametry po celou první generaci. Samozřejmě je možné použít jiný způsob generování, teoreticky není nutné, aby první generace byla náhodně vygenerována, může být určena i metodou, která není stochastická.

Po výpočtu cílové funkce pro každého jedince následuje tvorba párů. Při tvorbě párů je nutno zohlednit cílové funkce jedinců. Je jasné, že jedinec se špatnými vlastnostmi má jen malou šanci na přežití, zatímco silný jedinec vysokou. K tomu je výhodné zavést nový parametr a to podíl cílové funkce jedince vůči součtu cílových funkcí celé generace [12].

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j} \quad (6.3)$$

V tomto vztahu hodnota p_i je onen podíl cílové funkce a f_i je hodnota cílové funkce i -tého jedince, N je počet jedinců v generaci. Tímto způsobem se každému jedinci přidělí číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a součet těchto čísel pro všechny jedince je roven jedné. Vlastně se tím rozdělí interval $\langle 0,1 \rangle$ pro všechny jedince. Dále je výhodné zavést takzvané kumulované ohodnocení [12].

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^i p_j \quad (6.4)$$

Toto kumulované ohodnocení zjednoduší výběr jedinců. Stačí vygenerovat znovu náhodné číslo a tím se vybere i -tý jedinec, tedy jedinec u kterého platí (6.5) [12].

$$\bar{f}_{i-1} < r \leq \bar{f}_i \quad (6.5)$$

Takto se vytvoří potřebné páry a následuje tvorba jejich potomků. To je část procesu optimalizace genetickými algoritmy, kde jsou největší možnosti pro vymyšlení vlastních metod a postupů. Mezi nejběžnější metody tvorby potomků patří křížení a mutace, i tyto metody je možné různě upravovat a experimentovat s nimi [12]. Jeden jedinec je definovaný

pouze hodnotami optimalizačních parametrů. Pokud se u každého optimalizačního parametru zavede maximální a minimální hodnota (tento předpoklad je zaveden už před vygenerováním první generace) a dále rozlišení, po kterém lze hodnoty měnit, tak potom existuje konečný počet unikátních jedinců. Volba rozlišení závisí na požadované přesnosti výpočtu, pokud se optimalizační parametr bude moci měnit po krocích je jasné, že přesnost výpočtu je omezena velikostí tohoto kroku. Tím, že počet unikátních jedinců je pevně dán, je možné jedince charakterizovat místo optimalizačními parametry takzvaným chromozomem [12]. Tento chromozom je složen z genů, každý gen je tvořen binárním číslem 1 nebo 0. Těchto genů je v chromozomu daný počet, který závisí na počtu unikátních jedinců. Například jsou-li dva optimalizační parametry, tak první polovina chromozomu má v sobě zakódovanou hodnotu prvního parametru a druhá polovina má v sobě zakódovaný druhý parametr. Nejčastější způsob kódování hodnot optimalizačních parametrů do jednotlivých genů je obyčejné binární kódování, jako efektivnější se ale ukazuje použití Grayova kódu, který má tu vlastnost, že sousedící hodnoty parametrů se po zakódování liší pouze v jednom genu [12]. Když jsou optimalizační parametry zakódované do chromozomů, pak je možné tvořit potomky. Tvorba potomků pomocí křížení je nejčastější, princip je takový, že se pomocí generátoru náhodných čísel určí jeden gen v chromozomu a všechny následující geny se mezi chromozomy rodičů jednoduše prohodí, tím vzniknou dva noví potomci. Takto vzniklí jedinci mohou mutovat, mutace je proces, kdy je náhodně vybraný gen změněn na opačnou hodnotu. Podle [12] se operace křížení provádí v 75%-95% případů, v ostatních případech se za potomky použijí přímo rodiče a operace mutace se provádí v 0.1%-5% případů.

Z původní generace a z potomků se vytváří nová generace. Nová generace může vzniknout tak, že původní generace zcela vymře a novou generaci tvoří pouze potomci. Jiný způsob je využít stejný algoritmus, kterým se sestavovaly páry rodičů, nebo je možné novou generaci sestavit jen z nejschopnějších jedinců minulé generace a potomků. Po sestavení nové generace se cyklus opakuje a vznikají další populace až do splnění ukončovací podmínky. Ukončovací podmínka je typicky počet generací, nebo dosažení potřebné hodnoty cílové funkce.

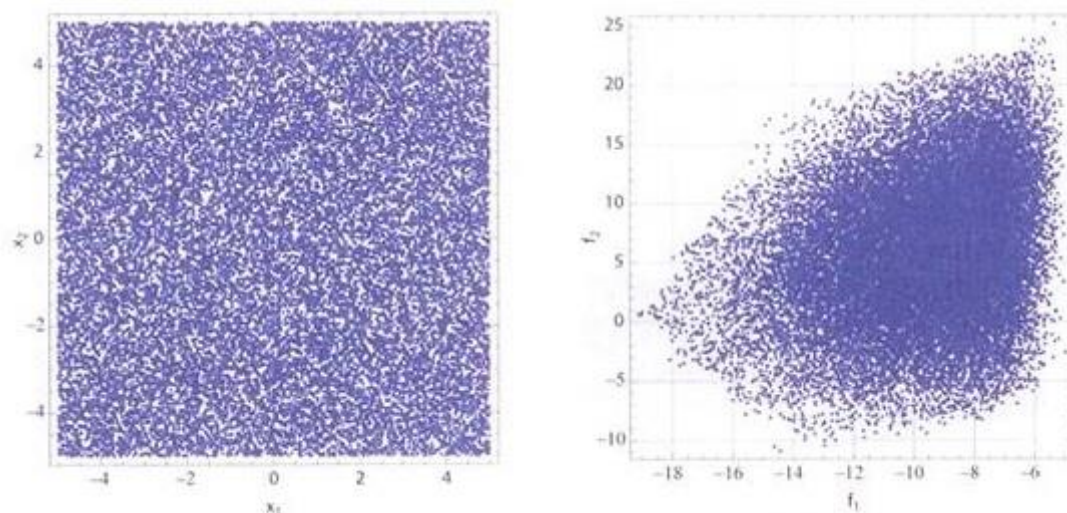
Jak už bylo několikrát napsáno, v genetických algoritmech existuje velký volný prostor pro úpravy a experimenty. Tvorba programu provádějící optimalizaci genetickými algoritmy není v principu složitý problém, ale je to časově náročné, protože se musí zkoušet různé možnosti a experimentovat. To je důvod, kvůli kterému byl pro optimalizaci použit již

hotový program GAOT (Genetic Algorithms for Optimization Toolbox), který je napsán v Matlabu a je podrobně popsán v [14].

6.2 Pareto množina

Při řešení optimalizační úlohy s více kritérii se může pracovat s Paretovo množinou. Tato množina není nic jiného než zobrazení všech možných řešení v prostoru jednotlivých kritérií. Tato množina je mnohdy šikovní, protože u vícekritériální optimalizace běžnými optimalizačními metodami nastává problém jak sestavit jedinou cílovou funkci z dílčích kritérií. Nejjednodušší je vytvořit ji jako vážený součet, ale to přináší další problémy jak zvolit váhové koeficienty. Jejich volba samozřejmě ovlivní výsledné řešení. Společným jmenovatelem různých řešení optimalizační úlohy provedené s různými váhovými koeficienty je, že se všechna nachází na hranici Paretovy množiny. Těchto řešení je nekonečně mnoho a nazývají se Paretova optimální řešení [15]. Všechna tato řešení mají tu vlastnost, že není možné je upravit takovým způsobem, aby se jim některé kritérium vylepšilo, aniž by došlo ke zhoršení jiného kritéria. Výběr jednoho řešení z Paretově optimálních řešení je problematika volby váhy jednotlivých kritérií a je závislá na konkrétní úloze a nemusí mít jednoznačné řešení. Určení a vykreslení Paretovy množiny je významné především u kritérií, která jsou v konfliktu [15] (pro mechanismy typicky dynamika – tuhost), pokud nejsou, pak existuje jedno optimální řešení bez ohledu na váhové koeficienty.

Určení Paretovy množiny je obecně složitý problém. U jednoduchých problémů je ji možné získat analytickým výpočtem, u složitých problémů je to nereálné. Spolehlivý ale prakticky neproveditelný způsob je určení hodnot kritérií pro všechny možné řešení, to je ale nemožné, protože možných řešení je nekonečně mnoho. Proveditelné je spočítat hodnoty kritérií pro konečný počet řešení, to znamená propočítat co největší počet řešení tak, aby tato řešení rovnoměrně pokryla množinu přípustných optimalizačních parametrů a poté ji vykreslit v prostoru kritérií (obr. 6.1). Nevýhodou této metody je, že hranice množiny nemusí být příliš výrazná, většina bodů v prostoru kritérií se totiž z pravidla nenachází v blízkosti hranice Pareto množiny. To je zásadní problém, protože hranice Pareto množiny je její nejdůležitější část, jejím určením se zabývá [18]. Tyto metody nenaleznou hranici dostatečně přesně, pokud na ní neleží dostatečný počet řešení. Další nevýhodou této metody je, když optimalizační parametry nejsou omezené, potom lze jen těžko zanalyzovat dostatek kombinací optimalizačních parametrů.



Obr. 6.1 Znázornění mnoha řešení v prostoru optimalizačních parametrů (vlevo) a ta samá řešení v prostoru kritérií (vpravo) [15]

Trochu výhodnější způsob získání Pareto množiny je použití optimalizační metody. Cílová funkce se sestaví jako vážený součet kritérií, kde váhové koeficienty se variují. Neprovede se tedy pouze jedna optimalizace, ale více vždy s jinými váhovými koeficienty. Během optimalizace se ukládají všechna řešení, která se během optimalizace počítala a nejen výsledné řešení. A tato řešení se použijí na zobrazení Pareto množiny. Výhoda tohoto postupu spočívá v lepším vykreslení významné části hranice Pareto množiny na úkor vnitřku množiny a ostatních částí hranice Pareto množiny (těch kde kritéria nejsou nejlepší). Tento postup se obzvláště hodí při optimalizaci genetickými algoritmy, kde se využijí jedinci ze všech generací. Pro lokální optimalizační metody příliš vhodný není.

7 Optimalizace mechanismu TetraSphere

Hlavním cílem diplomové práce je využít vytvořené programy pro analýzy mechanismu k jeho optimalizaci. Optimalizace mechanismu obnáší několik kroků.

1. Volba optimalizační metody.
2. Volba optimalizačních parametrů.
3. Určení všech potřebných parametrů pro všechny analýzy z optimalizačních parametrů.
4. Upravení programů pro analýzy do vhodného tvaru pro optimalizaci a sestavení cílové funkce z výsledků analýz.
5. Výpočet optimalizační úlohy a vyhodnocení výsledků.

Volba optimalizační metody je v tomto případě jednoduchá. Metoda je určena zadáním, kde se vyžadují genetické algoritmy. V minulé kapitole bylo zmíněno, že se využije hotový optimalizační program GAOT [14], který využívá genetické algoritmy a je psán v jazyce Matlab. Volba je to rozumná, protože genetické algoritmy se na optimalizace robotů běžně využívají a osvědčily se. Při použití lokálních metod by bylo nutné zkoušet mnoho různých odhadů řešení, protože se dá očekávat, že lokálních extrémů bude mnoho.

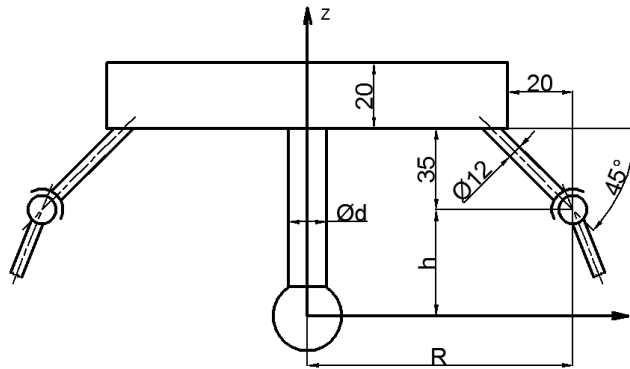
7.1 Optimalizační parametry

Volba optimalizačních parametrů je v principu jednoduchá činnost, ale nemá jednoznačné řešení. Špatná volba parametrů může vést ke složitému sestavování cílové funkce. Nejúplnější je využít každý parametr, který jde při návrhu stroje měnit jako optimalizační. V takovém případě má optimalizace možnost nalézt opravdu nejlepší možné řešení, ale za cenu vysoké výpočetní náročnosti a náročného vytvoření analýz potažmo cílové funkce. Z tohoto důvodu je potřeba počet optimalizačních parametrů redukovat na přijatelný počet. Nejjednodušší je zjistit, které parametry mají nejmenší vliv na cílovou funkci a ty vyřadit. Nebo je možné vymyslet si parametry bez přímého fyzikálního významu a skutečné parametry mechanismu z nich dopočítávat, musí to však mít racionální význam. V případech, kdy například změna měřítka nemá vliv na výsledky, je vhodné jeden rozměr (ne úhlový rozměr) volit pevně. To je výhodné udělat i v případě, kdy hrozí zkolabování rozměrů k nulovým nebo téměř nulovým hodnotám, pokud hrozí naopak zvětšování mechanismu, pak je výhodné zavést například penalizaci za příliš velké rozměry do cílové funkce.

U mechanismu TetraSphere se předpokládá symetrie. Tato symetrie je myšlená tím způsobem, že mechanismus má 4 nohy a všechny rozměry nohou a uchycení nohou k rámu nebo platformě jsou vždy stejné pro každou nohu. Díky tomu k výpočtu dexterity (a dosažitelného prostoru) postačí znát 4 rozměry. Všechny nezávislé souřadnice tohoto mechanismu jsou úhlové, důsledkem je, že měřítko nemá vliv na výsledky dexterity. Proto bylo přistoupeno k volbě jednoho pevného rozměru a ostatní rozměry jsou zahrnuty mezi optimalizační parametry. Je pravda, že ostatní analýzy by měly být závislé na změně měřítka, ale potom by hrozilo, že se mechanismus bude zmenšovat až k nulovým rozměrům. První rozměr, který ovlivňuje dexteritu je vzdálenost sférických vazeb mezi vozíky a nohami od globální osy z (H), tento rozměr byl právě volen jako pevný, protože je to jediný rozměr na rámu, jeho hodnota byla zvolena jako 0.35m. Důvod volby takového rozměru je, že cílem optimalizace není řešení, které by se dalo přímo využít v průmyslu, ale spíše řešení, které je vhodné pro experimentální stavbu modelu robota stejného typu jako je tento [8]. Další rozměr je vzdálenost vazeb mezi platformou a nohami od lokální osy z platformy (R) a průmět vzdálenosti mezi hlavním sférickým kloubem a vazbami mezi platformou a nohami do osy z platformy (h). Tyto rozměry jsou znázorněny na obr. 3.1. Posledním optimalizačním rozměrem je délka nohou (L). To jsou všechny potřebné rozměrové parametry pro výpočet dexterity. Pro výpočet je ještě potřeba znát koeficienty ze vztahu (3.1). Tím je dáno 6 optimalizačních parametrů.

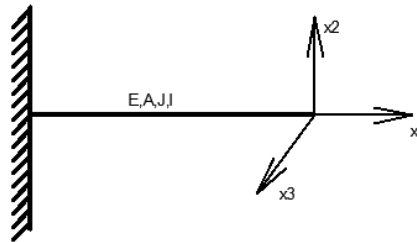
Pro výpočet tuhosti je potřeba znát rozměry potřebné pro vytvoření prutové soustavy. To jsou přesně ty rozměry, které se využívají pro výpočet dexterity. Z tohoto důvodu není potřeba zavádět další rozměry jako optimalizační parametry. Dále je potřeba znát tuhosti všech prutů, kvůli tomu je nutné zavést další optimalizační parametry. Prutová soustava, ze které vychází výpočet tuhosti je složena z 21 prutů. Díky zmíněné symetrii je potřeba určit jen 5 různých tuhostí, které se potom opakují u různých prutů. Nejmenším problémem je určit tuhost prutů, které představují nohy mechanismu, zde stačí zavést jako novou optimalizační proměnou průřez nohou a modul pružnosti jako konstantu. Větší problém je s pruty tvořícími platformu. Bez určitých zjednodušení by bylo téměř nereálné určit jejich tuhost. Platforma robota je tvořena deskou, ke které jsou připevněny stopky, na kterých jsou jednotlivé vazby (obr. 7.1). Pro snížení počtu optimalizačních parametrů jsou některé rozměry konstantní, jak je vidět na obr. 7.1, konstrukčně by to neměl být problém dodržet. Dále se předpokládá, že deska je absolutně tuhá a stopky k vazbám jsou poddajné, protože nemají velký průřez. Průřez

stopky mezi hlavním sférickým kloubem a deskou platformy je další optimalizační parametr a rozměry ostatních stopek jsou konstanty.



Obr. 7.1 Platforma mechanismu se zakotovanými některými rozměry

Tuhost prutu, který představuje stopku hlavního sférického kloubu (k_1 viz. obr. 7.3), je také jednoduché určit, když je známá délka, průřez i modul pružnosti. Tuhosti ostatních prutů byly určeny následující způsobem. Za předpokladu, že deska platformy je tuhá, jsou stopky vlastně vetknuté nosníky (obr. 7.2) namáhané tahem/tlakem a ohybem.



Obr. 7.2 Vetknutý nosník s vyznačeným souřadným systémem

U takového nosníku (předpokládá se prizmatický nosník s průřezem, který má nulové deformační momenty) se deformace dá spočítat podle vztahu (7.1). Vztahy lze snadno odvodit nebo najít v tabulkách příčinkových činitelů. Tuhost tohoto nosníku ve směru jednotkového vektoru \mathbf{n} je převrácená hodnota z průmětu posunutí do směru \mathbf{n} od jednotkové síly působící ve směru \mathbf{n} a je dána vztahem (7.4).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EJ} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{DF} \quad (7.2)$$

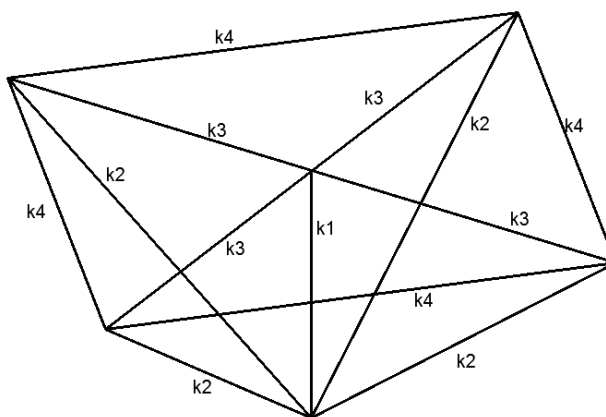
$$k_n = (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{n})^{-1} \quad (7.3)$$

$$k_n = \left(\frac{l}{EA} n_1^2 + \frac{l^3}{3EJ} (n_2^2 + n_3^2) \right)^{-1} \quad (7.4)$$

Jeli známý tento vztah, stačí už jen určit jednotkové směrové vektory prutů vyjádřené v souřadných systémech z obr. 7.2. Tím se získají tuhosti stopek ve směru prutů. Pak už stačí jen využít vztahu pro sčítání tuhostí řazených sériově pro získání výsledků tuhosti prutů.

$$k_{12} = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1} \quad (7.5)$$

Takto se jednoduše mohou získat tuhosti všech zbylých prutů. Nastává ale malý problém, prutová soustava je totiž 2x staticky neurčitá. Jeden stupeň statické neurčitosti je daný redundantním pohonem a to netvoří problém, druhý stupeň statické neurčitosti je daný strukturou prutové soustavy. Důsledkem je, že když se například soustava zatíží takovou silou, aby byl namáhán pouze jeden prut o tuhosti k_4 (umístění prutu je naznačeno na obr. 7.3) a z výsledných posunutí se spočítá skutečná tuhost soustavy mezi konci tohoto prutu, tak vyjde větší.



Obr. 7.3 Diskretizace platformy mechanismu

Je to dané tím, že se na výsledné tuhosti podílí i některé ostatní pruty. Běžným pohledem je vidět, že pruty o tuhosti k_1 a k_2 jsou uloženy staticky určitě a tento problém nevzniká. To znamená, že spočítané tuhosti se mohou přímo využít ve výpočtu. Pruty o tuhosti k_3 a k_4 se vzájemně ovlivňují. Symbolickým odvozením se podařilo získat vztah, jakým se tyto pruty ovlivňují.

$$k_{3ef} = \frac{2k_3^2 + 4k_3k_4}{2k_3 + 3k_4} \quad (7.6)$$

$$k_{4ef} = \frac{8k_4^2 + 4k_3k_4}{3k_3 + 8k_4} \quad (7.7)$$

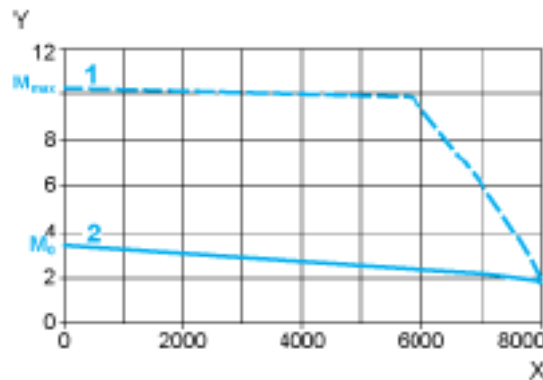
Hodnoty tuhosti s indexem ef znamenají tuhosti, které opravdu jsou mezi konci prutu. Jsou vždy o něco vyšší než tuhosti příslušných prutů, protože v sobě zahrnují i vliv jiných prutů. Tuhosti, které byly určeny z optimalizačních parametrů, jsou právě tyto skutečné tuhosti měřitelné mezi konci prutů. Z optimalizačních parametrů se tedy získají hodnoty k_{3ef} a k_{4ef} a z nich se inverzním výpočtem určí k_3 a k_4 .

Další analýza je modální analýza. Ta se ve velkém podobá výpočtu tuhosti, pracuje se stejnou prutovou soustavou, jediný podstatný rozdíl pro optimalizační parametry je, že nestačí znát pouze tuhosti prutů, ale jsou potřeba i jejich hmotnosti. V metodě konečných prvků se často matice hmotnosti různě upravuje s cílem zefektivnit výpočet. Typické je využití nekonzistentní matice hmotnosti a ukazuje se, že vliv takové úpravy na výsledky není tak dramatický jako podobné úpravy v matici tuhosti. V této práci se pracuje s konzistentní maticí hmotnosti, ale identifikace hmotností jednotlivých prutů není prováděna tak důsledně jako u matice tuhosti. Hmotnosti prutů představující nohy mechanismu lze spočítat snadno. Hmotnost prutu představujícího stopku hlavního sférického kloubu se určí stejně tak jednoduchým způsobem. Pruty, které spojují hlavní sférický kloub s klouby mezi platformou a nohami nejsou na platformě nijak fyzicky přítomné. Proto jejich hmotnosti jsou uvažovány nulové. Problém je přerozdělit hmotnost desky platformy mezi pruty ležící v rovině desky platformy. Bylo zvoleno jednoduché řešení, kdy se hmotnost desky platformy rozdělí mezi příslušné pruty rovným dílem. Deska platformy se předpokládá hliníková, zatímco ostatní součásti mechanismu ocelové. Tloušťka desky není konstantní v celé ploše (vychází se ze skutečné desky platformy mechanismu HexaSphere), proto se ve výpočtech pracuje s jinou hodnotou než je zakreslena na obrázku 7.1. Malé stopky platformy, ke kterým jsou připevněny nohy mechanismu, se uvažují jako nehmotné.

Poslední analýzou je globální dynamika, pro její výpočet je třeba znát rozměry, hmotnosti, momenty setrvačnosti a polohy středisek hmotnosti. Určit tyto hodnoty není v principu složité, když jsou známy hlavní rozměry. I zde se zanedbávají hmotnosti stopek, ke kterým jsou připevněny nohy mechanismu. Pouze u vozíků je situace trochu složitější. Ve výpočtu globální dynamiky se nepoužívá souřadnice pro natočení hřídele motoru, místo toho je použita metoda redukce pro celý motor a vozík, vše se redukuje na posuvnou souřadnici vozíku. Předpokládá se použití pohybového šroubu se stoupáním 16mm z čehož vyplývá převod mezi vozíkem a motorem. Předpoklad právě tohoto stoupání je založen na předpokladu, že se optimalizuje laboratorní model mechanismu a právě toto stoupání bylo

použito u modelu mechanismu QuattroSphere. Ve výpočtu kinetické energie vozíku se tedy využívá vyšší hmotnost, než je hmotnost použitá pro výpočet zatěžující tíhové síly vozíku.

Znalost hmotových charakteristik těles pro výpočet globální dynamiky nestačí. Ještě je potřeba znát model pohonů. Stejně jako u pohybového šroubu se předpokládá stejný pohon jako u mechanismu QuattroSphere. U něj byly použity motory Schneider Electric BMH0703P01F2A [16].



Obr. 7.4 Charakteristika uvažovaného motoru (X – otáčky [rpm], Y – kroučící moment [Nm], 1 – špičkový kroučící moment, 2 – trvalý kroučící moment) [16]

Charakteristika motoru je zobrazena na obr. 7.4. Zobrazeny jsou dvě charakteristiky, jedna je pro trvalou zátěž, druhá je pro špičkovou. Ve výpočtu se pracuje s charakteristikou pro trvalou zátěž, výpočet je na straně bezpečnosti. Kroučící moment klesá v závislosti na otáčkách lineárně, díky tomu nevzniká chyba při použití lineárního modelu motoru (5.12). Tento model závisí pouze na dvou parametrech, které je možné z charakteristiky motoru snadno odečíst. Pomocí metody redukce se tyto dva parametry přepočítají ze souřadnice hřídele motoru na souřadnici vozíku. Tím jsou známy všechny parametry potřebné k výpočtu globální dynamiky.

Výpočet globální dynamiky je vždy vztažen k poloze na dané trajektorii. Pro optimalizaci bylo rozhodnuto, že každou vyšetřovanou polohou povedou dvě trajektorie. Jedna trajektorie je vždy ve směru proměnné nutace a konstantní precese a u druhé je to naopak. Tyto trajektorie jsou na sebe kolmé. V dané poloze se vždy určí maximální a minimální dosažitelné zrychlení na obou trajektoriích. Výpočet se provádí při jedné dané rychlosti pohybu po trajektorii. Na každé trajektorii se výpočet provede pro pohyb v obou směrech. Z těchto 8 výsledků se jako směrodatný uvažuje ten nejhorší.

7.2 Cílová funkce

Z výsledků analýz mechanismu s danými optimalizačními parametry je potřeba sestavit cílovou funkci, která se bude optimalizovat. Použitý optimalizační program GAOT provádí pouze jednokriteriální optimalizaci, proto je nutné převést vícekriteriální optimalizační problém na jednokriteriální.

Nejprve je třeba určit details provádění analýz. Tím je myšleno zvolit polohy, ve kterých se analýzy provádí a určit způsob zpracování jejich výsledků. Optimalizace je výpočetně náročná, proto není rozumné provádět analýzy ve zbytečně velkém počtu poloh. Na druhou stranu při příliš malém počtu analyzovaných poloh se může ukázat, že zdánlivě vynikající jedinec je velmi špatný. Když je vzdálenost analyzovaných příliš vysoká, optimalizační program dokázal s úspěchem problematické jevy (typicky singularity) umístit mezi analyzované polohy. Jako ideální kompromis se ukázalo použít na obou nezávislých souřadnicích krok mezi polohami 5° . Tento krok byl použit u výpočtu dexterity, tuhosti a minimální vlastní frekvence. Pro výpočet globální dynamiky byl s ohledem na vyšší výpočetní náročnost použit větší krok. Rozsah úhlu precese byl pro výpočet globální dynamiky rozdělen na jedenáct hodnot a pro úhel nutace byly použity pouze dvě hodnoty 30° a 100° . Pro zvýšení rychlosti výpočtu se využilo faktu, že se mechanismus ponechal symetrický. Důsledkem je, že výsledky všech analýz se v jednotlivých kvadrantech opakují. Na výsledcích zobrazených v contourf diagramech se to ukazuje tím, že výsledné obrazce jsou složeny ze 4 stejných obrazců vedle sebe. Obdobné jevy jsou pozorovatelné i na výsledcích globální dynamiky. Díky tomu nebylo potřeba analyzovat celý pracovní prostor, ale pouze jeden jeho kvadrant, to zvýšilo rychlost výpočtu 4krát.

Pro danou variantu řešení (jedince) se pro každé kritérium z výsledků pro všechny polohy určila průměrná hodnota, směrodatná odchylka a výsledek v nejhorší poloze. Tím se získalo 12 hodnot pro každého jedince. Pro použitou optimalizační metodu bylo potřeba z těchto hodnot vytvořit skalární cílovou funkci. Směrodatný je především nejhorší výsledek, kdyby se optimalizovalo podle průměrných hodnot, hrozilo by, že ve výsledku by byly například singulární polohy, přestože průměrné hodnoty by byly dobré. Proto největší vliv v cílové funkci musí mít nejhorší hodnoty.

Nejpoužívanější způsob jak sestavit skalární cílovou funkci z více kritérií je provést vážený součet. To je součet výsledků analýz (vždy se použije výsledek z nejhorší polohy),

kde je každý výsledek vynásoben konstantou udávající váhu daného kritéria. Součet váhových koeficientů by měl být roven jedné. Váhové koeficienty je možné libovolně volit, jejich volba může být jednoduchá, jsou-li jasné požadavky na výsledný produkt. V jiných případech nemusí být jasné jak je zvolit, potom je nutné zkoušet více variant a z výsledků si vybrat. V případě že se hledají mechanické schopnosti, nebo Pareto množina, pak je nutné zkoušet různé kombinace váhových koeficientů. V takových případech se tedy optimalizační výpočet opakuje vícekrát. Při optimalizaci mechanismu TetraSphere není jednoznačně jasné jak volit váhové koeficienty, proto se musí jít cestou více optimalizací s různými kombinacemi váhových koeficientů.

Použití váhových koeficientů je efektivní především, když hodnoty všech kritérií jsou podobné. Je v podstatě nezbytné, aby byly stejné alespoň řádově. Kdyby jedno kritérium nabývalo výrazně vyšších hodnot než ostatní, tak by vliv váhových koeficientů nemusel být dostatečný a v podstatě by se optimalizovalo jen jedno dominantní kritérium. Řešením je zjistit jakých hodnot nabývají kritéria, a před vynásobením váhovými koeficienty je vynásobit jinými koeficienty, které zajistí, že hodnoty kritérií budou podobné.

S takto sestavenou cílovou funkcí je možné provádět optimalizaci. Ale v takovém případě se optimalizují pouze nejhorší výsledky v pracovním prostoru, to je správné, protože ty jsou nejvíce limitující. Je vhodné nějakým způsobem zohlednit i rozložení vlastností v pracovním prostoru. Zde se přistoupilo k přičtení dodatečného ohodnocení za dobré průměrné hodnoty a malé směrodatné odchylky kritérií v pracovním prostoru. Cílová funkce tedy vypadá následovně.

$$CF = \sum_{i=1}^4 (v_i \min(k_i)) + 0.01 \sum_{i=1}^4 (v_i \text{mean}(k_i)) + \frac{0.01}{\sum_{i=1}^4 (v_i \text{std}(k_i)) + 1} \quad (7.8)$$

Ve vztahu pro cílovou funkci parametr v_i představuje váhu i -tého a parametr k_i představuje i -té kritérium. Operátory \min , mean a std představují minimální hodnotu, průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku. Dodatečné ohodnocení za dobré průměrné hodnoty a malé směrodatné odchylky kritérií jsou sníženy o dva řády, aby dominantní význam v optimalizaci stále měly minimální hodnoty kritérií.

Žádná z analýz neřeší kolize, předpokládá se, že konstruktér bude schopný mechanismus navrhnout s danými parametry bezkolizní. To by neměl být velký problém, na mechanismu není mnoho míst, kde by hrozily kolize, které nejdou konstrukčně řešit při

zachování podstatných rozměrů, které ovlivňují vlastnosti stroje. Jediný kritický bod je kolize některé z vazeb mezi platformou a nohami se sloupkem držícím hlavní sférickou vazbu. Proto se vždy spočítá minimální vzdálenost mezi těmito vazbami a tímto sloupkem, která může v pracovním prostoru nastat. Pokud tato vzdálenost klesne pod určitou mez, tak je cílová funkce penalizována.

Mezi kritérii použitými v cílové funkci se vůbec nevyskytuje analýza dosažitelného prostoru. Důvod je ten, že na okraji dosažitelného prostoru je mechanismus singulární. Dexterita je tam vždy nulová, to se ukázalo praktickými výpočty. V singulárních polohách jsou všechny analyzované vlastnosti mechanismu špatné (nulové nebo konvergují k nule), proto nehrozí, že by se ve výsledcích objevovala řešení, kde se vyskytují nedosažitelné polohy.

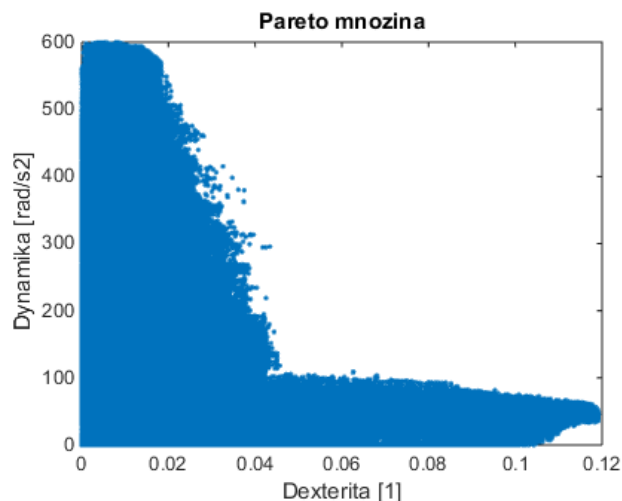
7.3 Výsledky optimalizace

Po sestavení cílové funkce z analýz je možné optimalizovat. Použitý optimalizační program nabízí určitá nastavení. Tato nastavení se týkají operátorů křížení, mutace, výběru jedinců, ukončovacích podmínek nebo přesnosti výpočtu. Ve většině případů bylo ponecháno nastavení defaultní. Jako ukončovací podmínka bylo zvoleno dosažení 600. generace. Každá generace obsahuje 10 jedinců. Tato volba byla provedena systémem pokusu a omylu, kde se na jedné optimalizaci zkoušely různé kombinace počtu jedinců a generací a sledoval se vývoj cílové funkce nejlepšího jedince v závislosti na generaci. Samozřejmě čím vyšší počet jedinců i generací, tím lepší výsledky, ale je potřeba nalézt kompromis mezi kvalitou řešení a časovou náročností výpočtu. Dále byly určeny intervaly, ve kterých se nachází jednotlivé optimalizační proměnné.

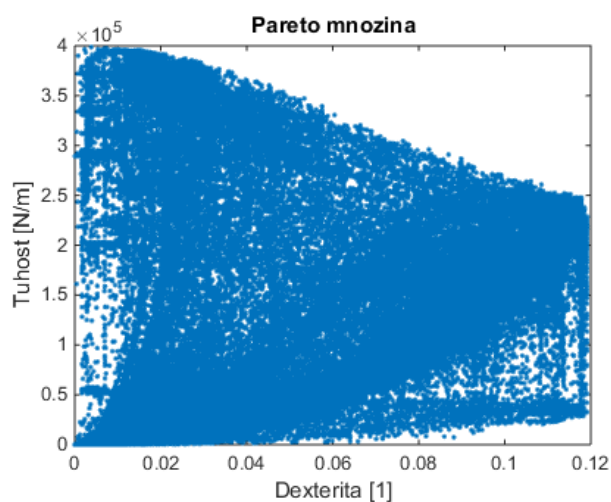
Cílová funkce je sestavena jako vážený součet. Počet kritérií je 4, jsou tedy i 4 váhové koeficienty, ty je potřeba různě kombinovat. Váhové koeficienty by měly být z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a jejich součet by vždy měl být jedna. Jako hodnoty váhových koeficientů byly zvoleny hodnoty 0, 0.1, 0.2 ... 0.9, 1. Každý koeficient může tedy nabývat 11 hodnot. Protože jsou 4 koeficienty, je celkový počet kombinací 11^4 , to je 14 641 kombinací. Vyřadí-li se všechny kombinace, které nesplňují podmínku, že jejich součet je roven jedné, zbyde 256 různých kombinací.

Celkem se muselo provést 256 různých optimalizací. Protože každá optimalizace trvala přes hodinu, využily se fakultní výpočetní servery. Celkem se získalo 256 výsledných jedinců a v každé optimalizaci se ještě ukládali i všichni ostatní jedinci. Dohromady se takto získalo skoro dva miliony jedinců.

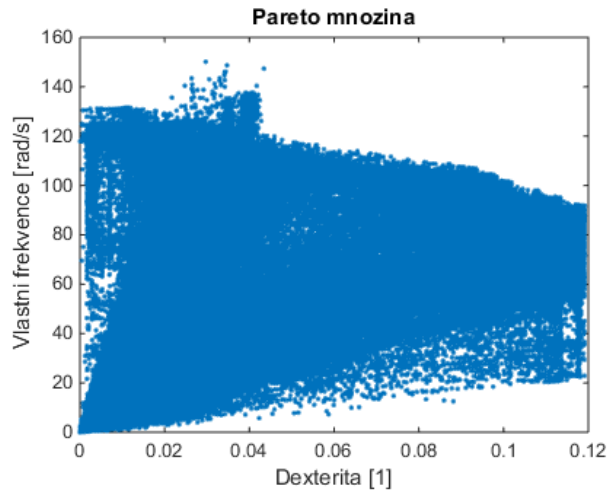
Výsledky je třeba nějak intuitivně zobrazit. Ke každému jedinci se ukládaly nejenom jeho optimalizační parametry, ale i výsledky jednotlivých analýz. Proto se nabízí možnost vykreslit Pareto množinu mechanismu. Problém je, že počet kritérií je 4 a čtyřdimenzionální prostor se nedá dobře zobrazit. Výsledky byly zobrazeny tak, že se jedinci vždy zobrazili ve dvoudimenzionálním diagramu, kde na osách jsou vždy kritéria. Takovýchto diagramů je zapotřebí zobrazit 6. Tato zobrazení představují pohled na nalezenou Pareto množinu z různých směrů.



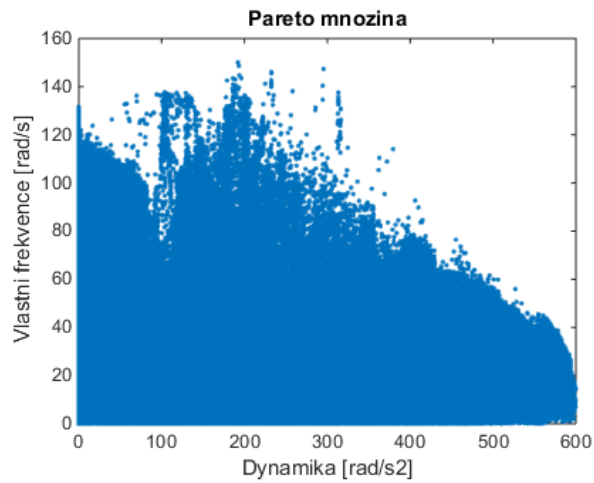
Obr. 7.5 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií dexterity a dynamiky



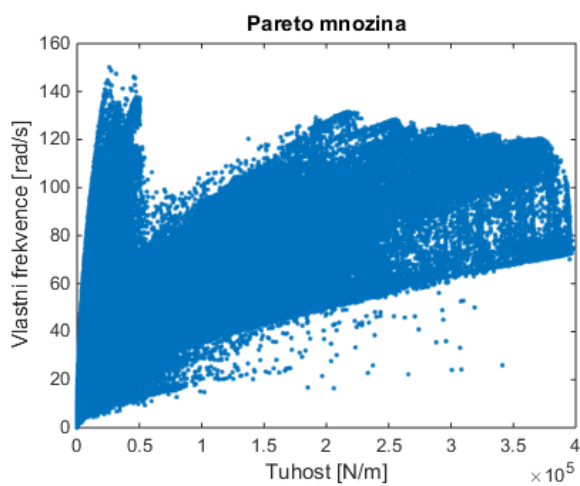
Obr. 7.6 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií dexterity a tuhosti



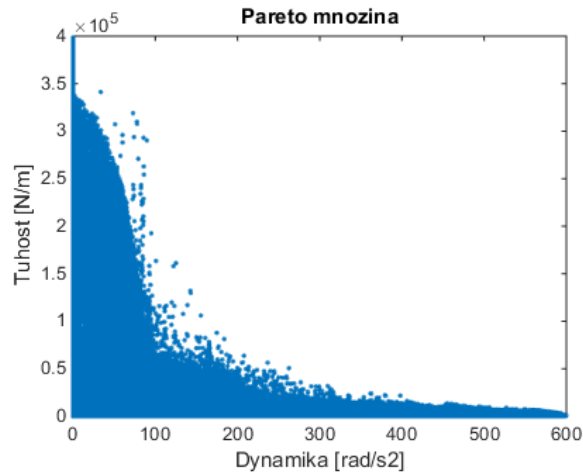
Obr. 7.7 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií dexterity a nejnižší vlastní frekvence



Obr. 7.8 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií dynamiky a nejnižší vlastní frekvence

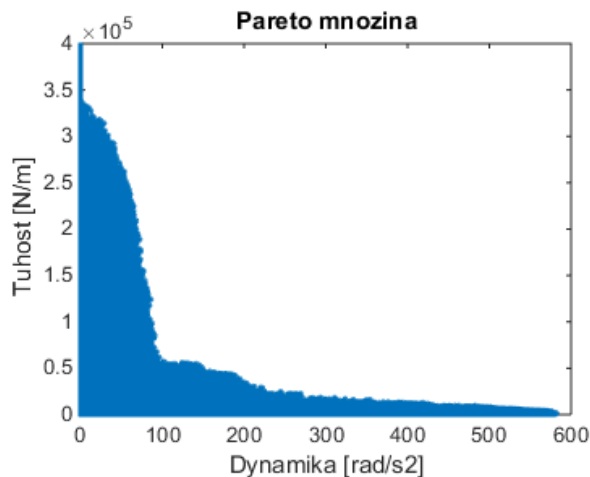


Obr. 7.9 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií tuhosti a nejnižší vlastní frekvence



Obr. 7.10 Zobrazení všech jedinců v prostoru kritérií dynamiky a tuhosti

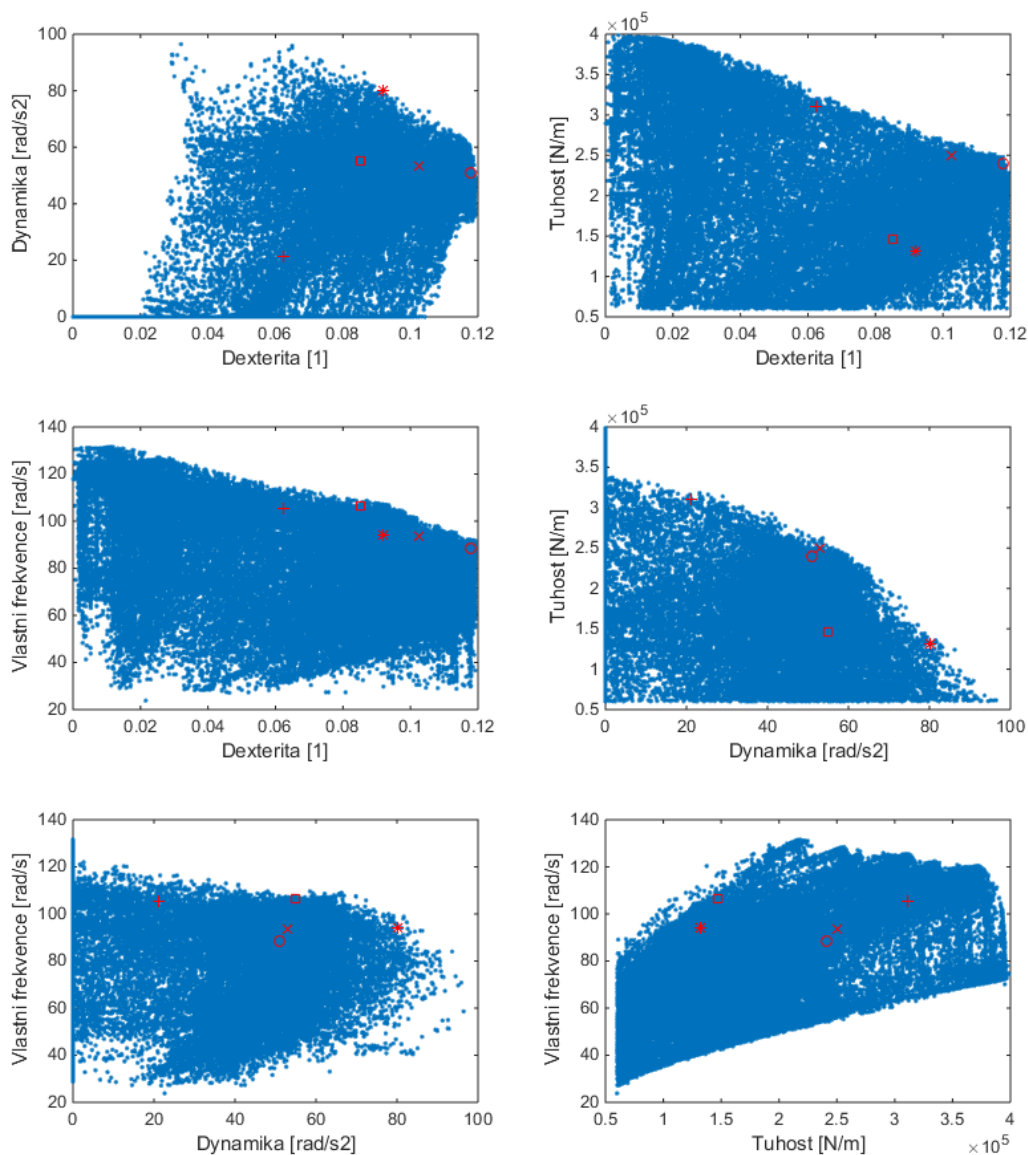
Na obrázcích 7.5-7.10 je vykreslena celá nalezená Pareto množina v různých osách. Zvykem je výsledky z různých optimalizací od sebe odlišit například barevně nebo používat značky pro jedince. Při počtu 256 optimalizací a celkovém počtu skoro dvou milionů jedinců by takovéto zobrazení bylo spíše nepřehledné, proto jsou všichni jedinci zobrazeni jako stejné tečky. Výsledky nevypadají úplně podle očekávání. Pareto množiny bývají často konvexní, v tomto případě je vidět, že množina konvexní není. Je to vidět především na obr. 7.5 a 7.10. Zvláštní na výsledcích také je, že se ne vždy dobře zobrazila hranice Pareto množiny. Například obr. 7.6 vypadá dobře podle předpokladů, u 7.7 je celkem zvláštní oblast okolo dexterity 0.04 a vl. frekvence 140rad/s, kde to vypadá, jakoby někteří jedinci vystupovali za hranici Pareto množiny. Nejzvláštnější je obr. 7.8, kde se žádná zřetelná hranice Pareto množiny nevytvořila. Na obr. 7.10 se celkem dobře vytvořila hranice Pareto množiny, ale v části s vyšší tuhostí a nižší dynamikou se vyskytují jedinci i za touto hranicí. Tyto jedinci mají společné to, že se u nich uplatnila penalizace cílové funkce kvůli geometrii, při které by mohly vznikat kolize. Tito jedinci mají sice dobré vlastnosti, ale penalizací jejich cílové funkce se zajistilo, že nemají velkou šanci přežít, a proto je jich málo a jsou takto osamoceni. Po odstranění všech penalizovaných jedinců se zobrazení Pareto množiny výrazně zlepšilo. Z pohledů zmizí osamocení jedinci, největší zlepšení je u obr. 7.8-7.10, na obr. 7.11 je zobrazení v prostoru dynamika-tuhost po odstranění těchto jedinců. Zlepšení je vidět na první pohled, hranice množiny je naprosto zřetelná.



Obr. 7.11 Zobrazení Pareto množiny v prostoru kritérií dynamiky a tuhosti po odebrání penalizovaných jedinců

Z obr. 7.11 je patrné, že u tohoto mechanismu je dynamika s tuhostí v silném konfliktu. A je třeba si zvolit, která z těchto vlastností se upřednostní. Dosažitelné zrychlení se může pohybovat až okolo $500\text{-}600\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$, ale potom je tuhost jen okolo 10Nmm^{-1} a to je opravdu málo, přestože se jedná jen o laboratorní model. Druhá varianta je, že se dynamika bude pohybovat okolo $50\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ a tuhost okolo 270Nmm^{-1} . Je celkem jasné, že významnější je část Pareto množiny s vyšší tuhostí a nižší dynamikou. Při pohledu na obr. 7.5 je zřejmé, že tato volba umožní dále počítat s dexteritou až 0.12. Kdyby se upřednostnila část Pareto množiny s lepší dynamikou, pak by byla dexterita omezena hodnotou zhruba 0.04. Při zvýraznění jedinců s dynamikou okolo $500\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ ve všech pohledech, se ukazuje, že tito jedinci mají ostatní vlastnosti špatné. Zatímco jedinci s vysokou tuhostí mají špatnou pouze dynamiku a ostatní vlastnosti mohou mít dobré. To potvrzuje, že lepší jedinci jsou v části s lepší tuhostí.

Protože je důležitá pouze část Pareto množiny s vyšší tuhostí, vyplatí se jedince ve zbylé části odstranit. Význam takové úpravy je ten, že se podstatná část množiny lépe vykreslí a z diagramů zmizí části Pareto množiny, které nejsou významné. Celkově se tím zlepší a zpřehlední vykreslení Pareto množiny. Výsledek těchto úprav je zobrazen na obr. 7.12. V obr. 7.12 je navíc zobrazeno umístění 5 jedinců, tito jedinci byli vybráni tak, aby co nejlépe pokryli významnou část Pareto množiny. Díky těmto jedincům je možné udělat si představu například o tom, jaké části Pareto množiny z jednotlivých pohledů spolu souvisí. Je zde například vidět, že jedinci, kteří se zobrazí na hranici množiny v pohledu dynamika-tuhost, se nachází uprostřed množiny v pohledu tuhost-vlastní frekvence.

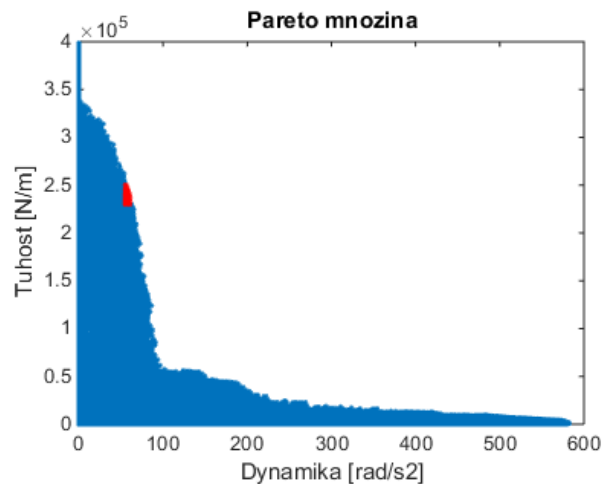


Obr. 7.12 Zobrazení významné části Pareto množiny v prostoru kritérií s vyznačenými 5 jedinci

Pro zobrazení významné části Pareto množiny byly použity všichni jedinci, kteří měli tuhost vyšší než 60Nmm^{-1} . Na vzniklých pohledech (obr. 7.12) je docela dobře zřetelná hranice maximálních hodnot jednotlivých kritérií. Kdyby Pareto množina byla celá konvexní, pravděpodobně by hranice byla ještě více zřetelná. To souvisí s formulací cílové funkce jako váženého součtu, taková formulace selhává v úlohách s nekonvexní Pareto množinou. Bylo by možné provést další optimalizace s upravenou cílovou funkcí tak, aby se zobrazení hranice ještě zlepšilo. Nemá to však velký smysl, protože počet jedinců je už tak velký, že to postačuje na dostatečné zobrazení. Další důvod je ten, že jedinec, který je na hranici Pareto

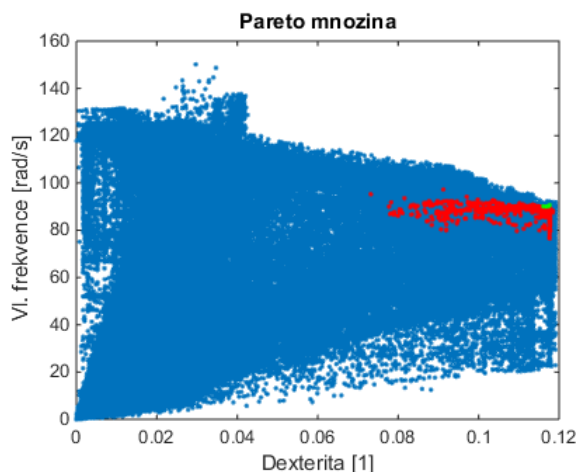
množiny, se v těchto 6 pohledech může zobrazit uvnitř množiny, přestože je na hranici. Tento fakt jde ukázat ve 3D prostoru, kdy se na povrch tělesa umístí bod a poté se těleso pozoruje z různých směrů. Tento bod se jen výjimečně objeví na vnějším obrysu tělesa, ale většinou se nachází uvnitř obrysu. Proto snaha o zpřesnění zobrazení hranic Pareto množiny z obr. 7.12 nemá příliš význam.

Výsledkem optimalizace ale není množina možných řešení (jedinců) nebo Pareto množina, ale jedno optimální řešení. Jako logický postup se nabízí vybrat jednoho ze získaných jedinců z optimalizace. Postupů, jak ho zvolit, je více. Zde se použije postup popsáný v [17]. Zvolí se dvě kritéria, u kterých se zvolí minimální požadované hodnoty. Jedinci, kteří tato kritéria nemají dostatečná, se vyřadí z výběru. Zbylí jedinci se zobrazí v prostoru zbylých dvou kritérií. Pokud je jedinců mnoho, pak se mohou zase zavést minimální hodnoty zbylých kritérií, a tím se postupně snižuje počet jedinců ve výběru. Když je jedinců přiměřený počet, může se přímo zvolit jeden výsledný jedinec. Může se vyplatit rovnou nezvolit toho, který má nejlepší vlastnosti, někdy jedinec, který má o trochu horší vlastnosti může mít nějakou jinou dobrou vlastnost, která nebyla předmětem optimalizace a kvůli které se vyplatí ho zvolit. Jako kritéria, u kterých se volí minimální hodnoty, byly vybrány dynamika a tuhost. U těchto kritérií se dají lépe odhadnout vhodné minimální hodnoty na rozdíl od dexterity a nejnižší vlastní frekvence.



Obr. 7.13 Zobrazení Pareto množiny v prostoru kritérií dynamiky a tuhosti s vyznačenými jedinci kteří splňují minimální dynamiku a tuhost

Bylo zvoleno, že minimální požadované zrychlení je $55\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ a minimální tuhost 230Nmm^{-1} . Jedinci, kteří tato kritéria splňují, jsou zobrazeni na obr. 7.13 červeně. Dohromady jich je 2182. Tito jedinci se mohou zobrazit v prostoru zbylých dvou kritérií (obr. 7.14).

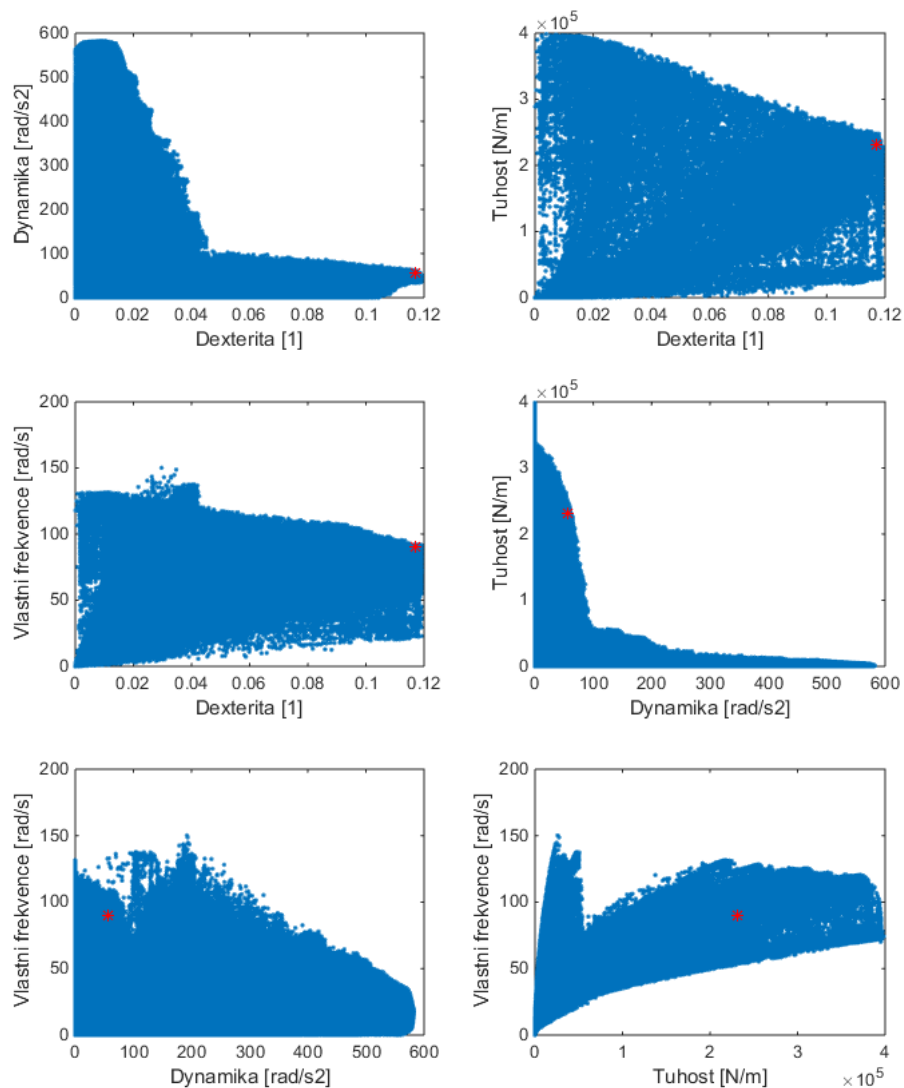


Obr. 7.14 Zobrazení Pareto množiny v prostoru kritérií dexterity a nejnižší vlastní frekvence s vyznačenými jedinci, kteří splňují minimální dynamiku, tuhost, dexteritu a vlastní frekvenci

Červeně vyznačení jedinci z obr. 7.13 jsou stejným způsobem vyznačeni i v obr. 7.14. Protože jich je příliš mnoho, zavedly se podmínky pro minimální tuhost a minimální nejnižší vlastní frekvenci. Minimální požadovaná dexterita byla zvolena jako 0.115 a minimální požadovaná nejnižší vlastní frekvence $90\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Jedinci, kteří splňují všechna tato 4 kritéria jsou na obr. 7.14 zobrazeni zeleně, těchto jedinců je už jen 6. Z takového počtu jedinců je možné přímo zvolit výsledného jedince. Parametry zvoleného jedince jsou uvedeny v tabulce 7.1.

Tab. 7.1 hodnoty optimalizačních parametrů výsledné varianty

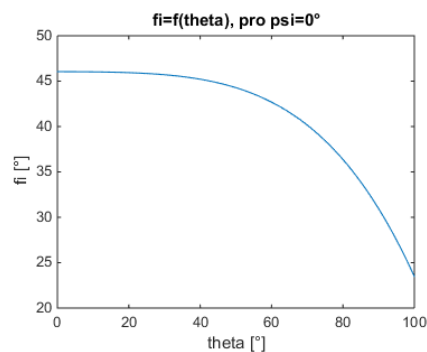
Poloměr roztečné kružnice vazeb mezi platformou a nohami	0.2985m
Délka stopky hlavního sf. kloubu	0.1144m
Délka nohou	0.5458m
Koeficient k_1 ze vztahu (3.1)	-0.0389rad^{-3}
Koeficient k_2 ze vztahu (3.1)	-0.0108rad^{-1}
Koeficient k_3 ze vztahu (3.1)	0.8036rad
Průřez stopky hlavního sf. kloubu	0.002m^2
Průřez nohou	0.0001m^2



Obr. 7.15 Zobrazení Pareto množiny v prostoru kritérií s vyznačeným výsledným jedincem

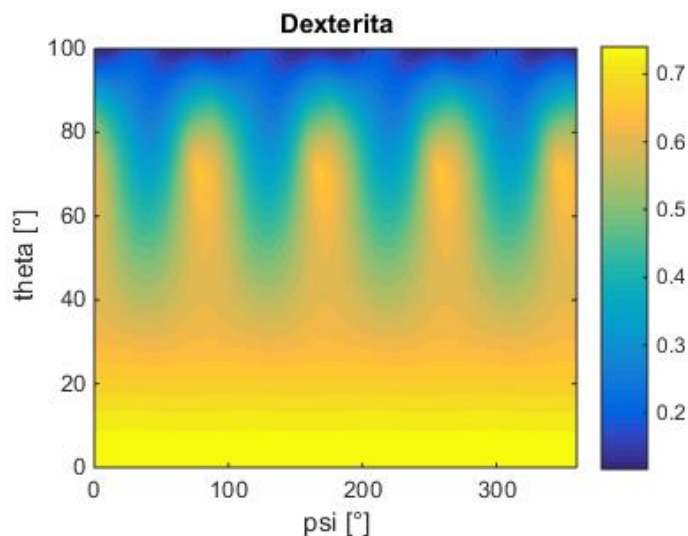
Umístění výsledného jedince mezi ostatními jedinci je zobrazeno na obr. 7.15. Je zde vidět, že ve čtyřech z šesti pohledů se výsledný jedinec nachází na hranici Pareto množiny, pouze ve dvou pohledech je vzdálený od viditelné hranice. Dále je vidět, že při zvýšení libovolného ze čtyř kritérií, by výsledný jedinec musel vystoupit z Pareto množiny, což nemůže. To dokazuje, že tento jedinec se opravdu nachází na hranici Pareto množiny nebo v její těsné blízkosti. Z obr. 7.15 je možné odečíst vlastnosti výsledného jedince, z těchto diagramů je možné odečíst pouze nejhorší výsledek v pracovním prostoru. Pro zjištění vlastností výsledného jedince je vhodnější znovu provést jeho analýzu a zobrazit jeho vlastnosti v celém pracovním prostoru.

Jako první se řešila analýza kinematicky dosažitelného prostoru. Požadovalo se, aby se mechanismus mohl do libovolného směru naklopit o 100° . Jinak řečeno, aby všechny polohy s nutací z intervalu $\langle 0^\circ-100^\circ \rangle$, precesí z intervalu $\langle 0^\circ-360^\circ \rangle$ a rotací vyjádřenou pomocí precese a nutace byly smontovatelné. Tuto podmínku zvolený jedinec splňuje. Poslední Eulerův úhel je vyjádřen z předešlých Eulerových úhlů podle vztahu (3.1), koeficienty z tohoto vztahu byly přímo jedny z optimalizačních parametrů. Na obr. 7.16 je graficky zobrazen vztah mezi úhlem rotace a úhlem nutace za předpokladu nulového úhlu precese. Při nenulovém úlu precese se tvar tohoto grafu nezmění, pouze se úhel rotace změní o konstantu.

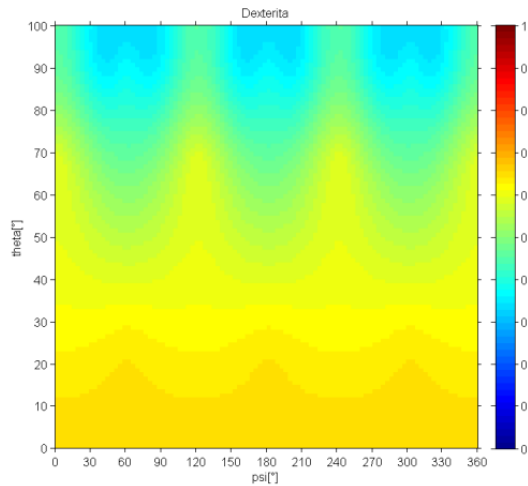


Obr. 7.16 Vztah mezi Eulerovými úhly rotace a nutace při nulovém úhlu precese

Další analýzou byl výpočet dexterity. Výsledky dexterity jsou zobrazeny na obr. 7.17. Z výsledků je vidět že dexterita se pohybuje v intervalu od 0.117 do 0.759, nejlepší je při nulové nutaci a s rostoucí nutací přibližně lineárně klesá. Nejsou to vůbec špatné výsledky, při porovnání s dexteritou podobného mechanismu HexaSphere (obr. 7.18) je vidět, že rozložení a maximální hodnota dexterity jsou podobné. HexaSphere má lepší hodnoty minimální dexterity, ale potřebuje k tomu 6 pohonů a to je velká nevýhoda.

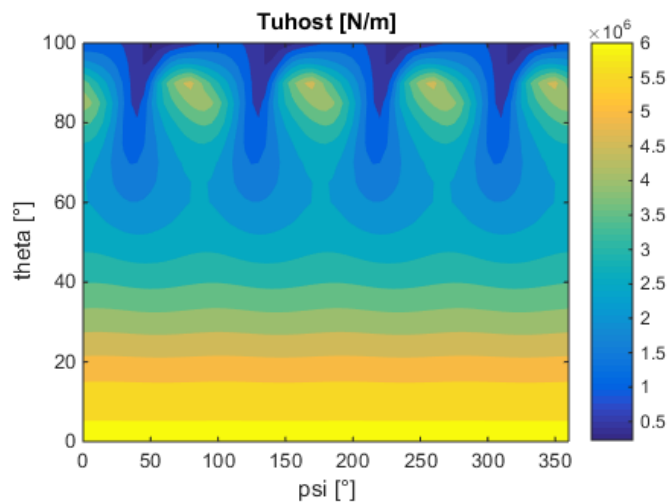


Obr. 7.17 Dexterita mechanismu TetraSphere



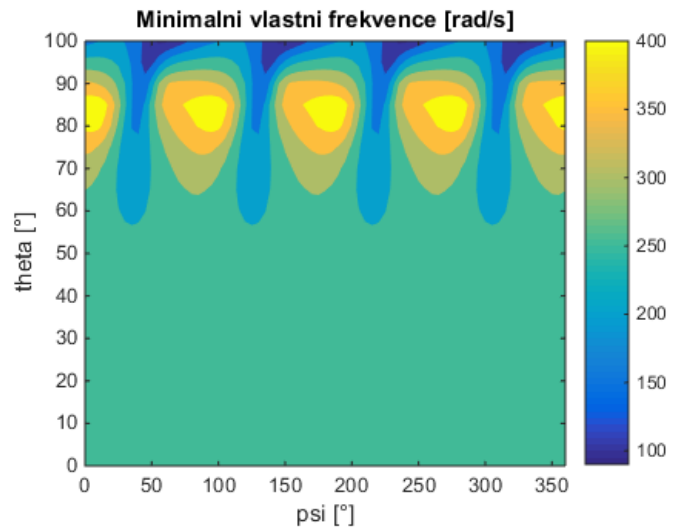
Obr. 7.18 Dexterita mechanismu HexaSpheres [8]

Dalšími analýzami byl výpočet tuhosti a modálních vlastností. Z modálních vlastností se optimalizovala pouze nejnižší vlastní frekvence, protože má zásadní význam pro použitelnost stroje. Výsledky výpočtu tuhosti jsou zobrazeny na obr. 7.19, výsledky mají zhruba stejné rozložení jako u dexterity. Nejvyšší tuhost je v poloze s nulovou nutací 6079Nmm^{-1} a s rostoucí nutací klesá až k minimální hodnotě 231Nmm^{-1} .



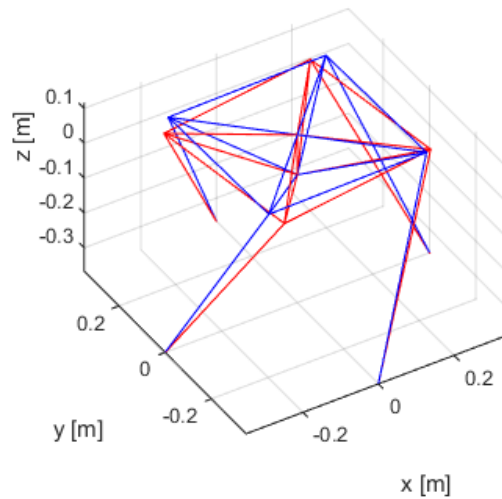
Obr. 7.19 Tuhost mechanismu TetraSphere

Nejnižší vlastní frekvence v pracovním prostoru je zobrazena na obr. 7.20. Její hodnoty se pohybují mezi 434rad.s^{-1} a 90rad.s^{-1} . Zajímavé je, že nejlepší výsledky nejsou v oblasti s nulovou nutací, kde nejnižší vlastní frekvence je pouze 287.5rad.s^{-1} . Výsledky jsou velice rovnoměrně rozložené, až do nutace 50° jsou zhruba konstantní, a až pro větší nutace se výrazně mění. Pravděpodobně to souvisí s tvary kmitu, pro úhel nutace do zhruba 50° je první vlastní tvar kmitu zhruba stejný (obr. 7.21). S většími nutacemi se začne první vlastní tvar měnit, tvar kmitu v poloze s nejvyšší první vlastní frekvencí je zobrazen na obr. 7.22.



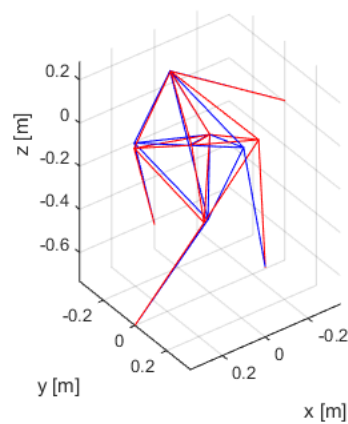
Obr. 7.20 Nejnižší vlastní frekvence mechanismu TetraSphere

1. vl. tvar kmitu pro $\psi=0^\circ$ $\theta=0^\circ$



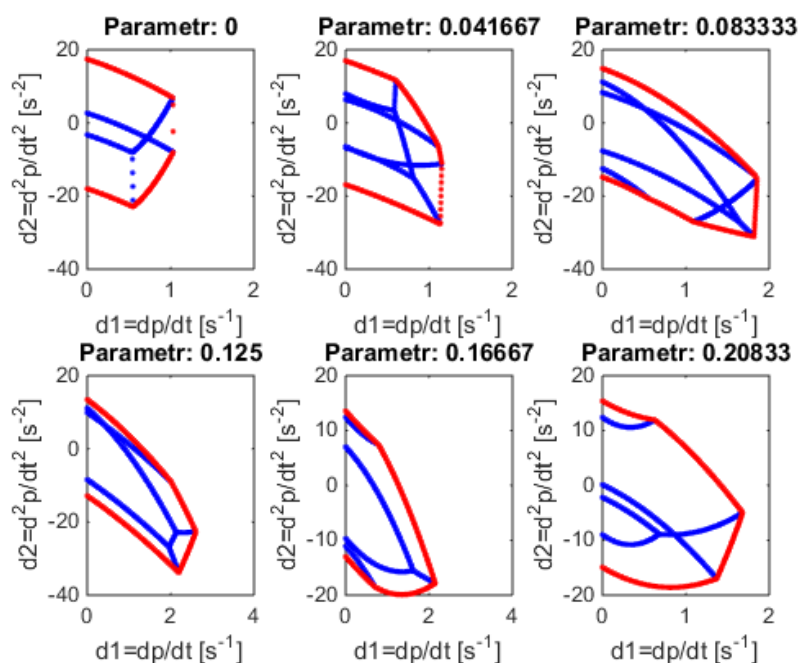
Obr. 7.21 První vlastní tvar kmitu mechanismu TetraSphere v poloze s nulovou nutací

1. vl. tvar kmitu pro $\psi=100^\circ$ $\theta=85^\circ$



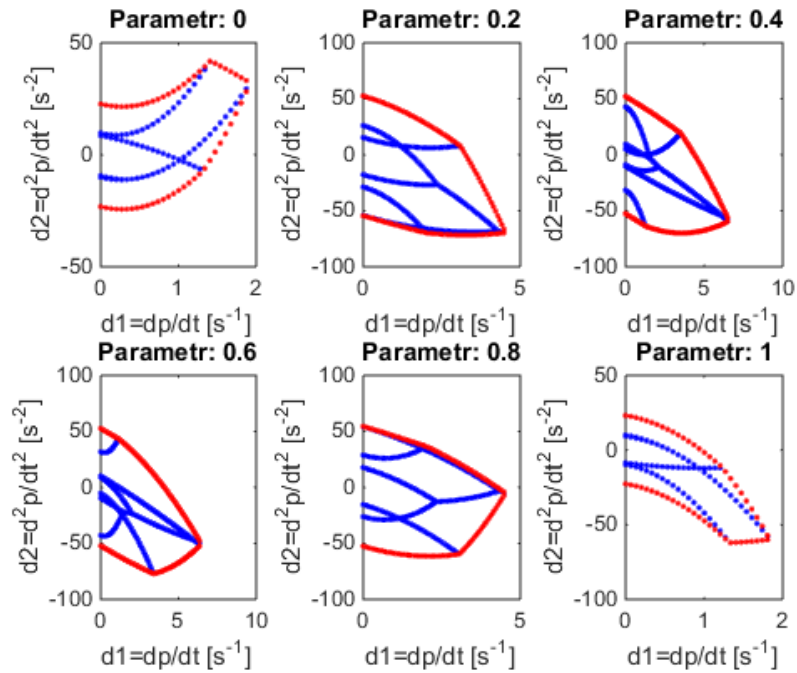
Obr. 7.22 První vlastní tvar kmitu mechanismu TetraSphere v poloze s nejvyšší první vlastní frekvencí

Poslední prováděná analýza je výpočet globální dynamické úlohy, která hledá dosažitelná zrychlení v daných polohách na daných trajektoriích v závislosti na rychlosti pohybu po těchto trajektoriích. To s sebou přináší problémy se zobrazením výsledků, protože nestačí pouze každé poloze přiřadit hodnotu jako je tomu u ostatních analýz. Výpočet se prováděl na dvou trajektoriích. V první trajektorii se neměnila nutace a měnila se precese. V této trajektorii se mechanismus otáčel okolo globální osy z. Protože jsou na mechanismu určité symetrie, výsledky na této trajektorii se periodicky opakují a stačí zobrazit výsledky pouze pro jednu čtvrtinu trajektorie. V každé poloze se výsledky zobrazují ve formě grafu, na obr. 7.23 jsou zobrazeny výsledky pro tuto trajektorii s úhlem nutace 100° . Jsou zde uvedeny výsledky pro 6 poloh z první čtvrtiny trajektorie. V titulku diagramu je vždy hodnota parametru, který udává polohu na trajektorii, hodnota 0 je počáteční poloha a hodnota 1 je konečná poloha.



Obr. 7.23 Výsledky globální dynamické úlohy mechanismu TetraSphere pro trajektorii s konstantní nutací

Je důležité podotknout, že ve výsledcích nejsou hodnoty na osách přímo úhlové rychlosti a zrychlení. Význam těchto hodnot souvisí s použitou parametrizací trajektorie. Na ose x je první derivace parametru podle času a na ose y druhá derivace parametru podle času. Pro získání přímo úhlové rychlosti a zrychlení je třeba hodnoty na osách vynásobit správnou konstantou, která vychází z dané parametrizace trajektorie.



Obr. 7.24 Výsledky globální dynamické úlohy mechanismu TetraSphere pro trajektorii s konstantní precesí

Druhá analyzovaná trajektorie předpokládá konstantní úhel precese a proměnný úhel nutace. Výsledky pro tuto trajektorii jsou zobrazeny na obr. 7.24, výpočet byl proveden s úhlem precese rovným 0° . U této trajektorie nejsou výsledky nijak symetrické ani periodické, proto uvedených 6 diagramů rovnoměrně pokrývá celou trajektorii.

Z výsledků globální dynamiky lze vyčíst, že stejně jako u ostatních analýz jsou výsledky nejlepší v oblasti s malou nutací. Dosažitelné rychlosti jsou vysoké, obě trajektorie by mechanismus měl zvládnout projet za méně než jednu sekundu, a hodnoty zrychlení jsou přibližně o řád vyšší než hodnoty dosažitelných rychlostí.

8 Závěr

Cílem práce bylo analyzovat a optimalizovat mechanické vlastnosti mechanismu TetraSphere. Mechanismus TetraSphere se řadí do skupiny sférických mechanismů s paralelní kinematickou strukturou využívající redundantní pohony. Je to nový mechanismus, vznikl zjednodušením mechanismu HexaSphere [8].

První část práce se zaměřila na kinematické analýzy. Nejzákladnější analýza hledala kinematicky dosažitelný prostor. Tato analýza vyhodnocovala dosažitelnost polohy na základě existence řešení inverzní kinematické úlohy v oboru reálných čísel. Ve výpočtu dosažitelného prostoru se předpokládalo, že mechanismus je bezkolizní. Druhá kinematická analýza počítala dexteritu mechanismu. Rotace platformy okolo vlastní osy neovlivňuje orientaci roviny platformy v prostoru, proto se na ni pohlíželo jako na nadbytečný stupeň volnosti. Ukázalo se, že aby mechanismus nebyl singulární, je třeba správným způsobem řídit tento nadbytečný stupeň volnosti, jinak je mechanismus velice singulární.

Jedinou prováděnou analýzou ze skupiny elastostatických analýz byl výpočet tuhosti robota. Tento výpočet využíval diskretizaci mechanismu prutovou soustavou. To umožnilo k výpočtu tuhosti využít metodu konečných prvků. Při výpočtu tuhosti robota se použil předpoklad absolutně tuhého rámu.

Poslední skupina analýz byly dynamické analýzy. Zde se prováděl výpočet globální dynamické úlohy, který určuje dosažitelná zrychlení na daných trajektoriích v závislosti na poloze a rychlosti pohybu mechanismu. Pro výpočet byly použity dvě trajektorie. Další dynamickou analýzou byl výpočet modálních vlastností. Z modálních vlastností byla vyhodnocována pouze nejnižší vlastní frekvence.

Vytvořené analýzy byly použity pro optimalizaci mechanismu. K optimalizaci byly použity genetické algoritmy. Optimalizace byla provedena vícekrát tak, aby se co nejlépe zmapovaly potenciální schopnosti robota. Z výsledků byla zobrazena Pareto množina. Výsledky nebyly úplně ideální, ale byly postačující k zjištění schopností tohoto robota. Nakonec byla z výsledků vybrána jedna varianta stroje, která se zanalyzovala. Dexterita této varianty v celém pracovním prostoru neklesla pod 0.117, minimální tuhost byla 231Nmm^{-1} a nejnižší vlastní frekvence byla vždy vyšší než $90\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Tato varianta by při pohybu úhlovou rychlostí $\pi/2\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ měla být schopná vždy dosáhnout úhlového zrychlení $55\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

Použitá literatura

- [1] Valášek M., Šika Z.: *Evaluation of dynamics capabilities of machines and robots*. Multibody System Dynamics 6, 2001
- [2] Stejskal V., Valášek M.: *Kinematics and dynamics of machinery*. Marcel Dekker, New York 1996
- [3] Španiel M., Horák Z.: *Úvod do metody konečných prvků*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2011
- [4] Kurtz R., Hayward V.: *Multiple-Goal Kinematics Optimization of a Parallel Spherical Mechanism with Actuator Redundancy*. IEEE Transactions on robotics and automation Vol. 8, No. 5, October 1992
- [5] Štorkán J.: *Kinematické a dynamické řešení rovinného mechanismu*. Bakalářská práce ČVUT 2013
- [6] Valášek M., Bauma V., Šika Z.: *Mechanika B*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2006
- [7] Valášek M.: *Zařízení pro řízení sférického pohybu tělesa*. Užité vzor, č. přihlášky: 2012 – 25589, č. dokumentu: 23772, zapsáno: 10. 5. 2012
- [8] Karásek M., Večera F.: *Funkční model HexaSphere*. Závěrečná zpráva, ČVUT Media Lab 2008
- [9] Valášek M.: *Dynamics time parametrization of manipulator trajectories*, Kybernetika vol. 23, number 2, 1983
- [10] Čermák L.: *Algoritmy metody konečných prvků*, Učební texty vysokých škol FSI VUT Brno 2005
- [11] Jiroušek O.: *Metoda konečných prvků, poznámky k přednáškám*, FD ČVUT, Praha 2006
- [12] Hynek J.: *Genetické algoritmy a genetické programování*, Grada, Praha 2008
- [13] Lederer P.: *Teorie a optimalizace mechanických systémů I*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1987
- [14] Houck R., Joines A., Kay G.: *A Genetic Algorithm for Function Optimization: A Matlab Implementation*, NCSU-IE TR 95-09, 1995
- [15] Zelinka I., Oplatková Z. a kol.: *Evoluční výpočetní techniky - Principy a aplikace*, BEN - Technická literatura, Praha 2008
- [16] Product data sheet, Schneider Electric: BMH0703P01F2A
- [17] Valášek M., Bauma V., Šika Z., Belda K., Piša P.: *Design-by-Optimization and Control of Redundantly Actuated Parallel Kinematics Sliding Star*, Multibody System Dynamics, 2005 vol. 14
- [18] Valášek M., Šika Z.: *Pareto Set Determination And Manipulation From Multiobjective Optimization*, In: proc. of AED 2003. Praha 2003