



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky , biomechaniky a mechatroniky

ANALÝZA MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ PEROVÉHO HRIADEĽOVÉHO SPOJA

ANALYSIS OF MECHANICAL PROPERTIES OF A SHAFT TONGUE JOINT

Bakalárska práca

Študijný program: B2342 TEORETICKÝ ZÁKLAD STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Študijný obor: 2301R000 Studijní program je bezoborový

Vedúci práce: Ing. Karel Vítek, CSc.

Ján Dubiš

Praha 2015



ČVUT v Praze
Fakulta strojní

Ústav mechaniky
biomechaniky a
mechatroniky





ČVUT v Praze
Fakulta strojní

Ústav mechaniky
biomechaniky a
mechatroniky





Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne, s využitím uvedenej literatúry a konzultácií, pod vedením pána Ing. Karla Vítka CSc.

V Prahe dňa: 19. 6. 2015

Ján Dubiš



PodĎakovanie

Ďakujem môjmu vedúcemu bakalárskej práce Ing. Karlovi Vítkovi a môjmu konzultantovi bakalárskej práce Ing. Jaromírovi Fumferovi za cenné rady a pripomienky pri vypracovaní bakalárskej práce.



Anotační list

meno autora:	Ján Dubiš
Názov BP:	Analýza mechanických vlastností perového hriadeľového spoja
Anglický názov:	Analysis of mechanical properties of a shaft tongue joint
Rok:	2015
Študijní program:	B2342 Teoretický základ strojního inženýrství
Obor štúdia:	2301R000 Studijní program je bezoborový
Ústav:	Ústav mechaniky , biomechaniky a mechatroniky
Vedúci BP:	Ing. Karel Vítek CSc.
Konzultant:	Ing. Jaromír Fumfera
Bibliografické údaje:	počet strán 44 počet obrázkov 34 počet tabuliek 0 počet príloh 0
Kľúčová slova:	krútiaci moment, hrubo stenná nádoba, hriadeľ, náboj
Keywords:	torque, thick cylinder, shaft, hub
Anotácie:	Analyzovanie napätia v náboji a hriadeľi pri prenose krútiaceho momentu. Porovnanie rôznych typov prevedenia prenosu. Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov.
Abstract	Analyzing mises on the hub and the shaft in the transmission torque. Comparison of different types of transmission. Evalution of the reesults obtained.



Obsah

1	Úvod.....	8
1.1	Náplň bakalárskej práce.....	8
2	Hrubo stenné valcové nádoby.....	8
2.1	Účel teórie hrubo stenných nádob.....	8
2.2	Predpoklady pre riešenie hrubo stenných nádob.....	8
2.3	Delenie hrubo stenných nádob.....	8
2.4	Odvozenie základnej diferenciálnej rovnice riešenia napätostí hrubo stenných valcových tlakových nádob.....	9
2.5	Výpočet osového napätia v hrubo stenných nádobách.....	14
2.6	Deformácia plášťa hrubo stenných nádob.....	14
2.7	Dimenzovanie hrubo stenných nádob – pevnostné podmienky.....	15
2.7.1	Otvorená nádoba s vnútorným pretlakom ($p_1 > p_2$).....	15
2.7.2	zatvorená nádoba s vnútorným pretlakom ($p_1 > p_2$).....	16
2.7.3	Otvorená nádoba s vonkajším pretlakom ($p_2 > p_1$).....	17
2.7.4	zatvorená nádoba s vonkajším pretlakom ($p_2 > p_1$).....	18
2.8	Zvláštne prípady hrubo stenných nádob.....	19
2.8.1	Nádoba bez otvoru ($r_1=0$, $p_1=0$).....	19
2.8.1	Nádoba s malým otvorom ($r_1 \rightarrow 0$, $p_1=0$).....	20
2.9	Nalisované hrubostenné nádoby.....	21
2.9.1	Určenie presahu Δr_2 u dvojvrstvovej nalisovanej nádoby.....	21
3	Prenos krútiaceho momentu z náboja na hriadel'.....	22
3.1	Prenos krútiaceho momentu pomocou trenia.....	23
3.2	Prenos Krútiaceho momentu pomocou pera.....	24
3.2.1	Obyčajné pero.....	25
3.2.2	Pero s drážkou.....	30
3.2.3	Pero so zrazenými hranami.....	35
4	Záver.....	40
5	Použitá literatúra.....	42
6	Zoznam použitých označení.....	43
7	Zoznam obrázkov.....	44

1 Úvod

1.1 Náplň bakalárskej práce

Bakalárska práca sa zaoberá spôsobom prenosu krútiaceho momentu z hriadeľa na náboj. Porovnáva metódu nalisovania s metódou prenosu krútiaceho momentu cez pero a analyzuje namáhanie súčastí hriadeľového spoja pri rôznych prevedeniach prenosu.

2 Hrubo stenné valcové nádoby

2.1 Účel teórie hrubo stenných nádob

Pochopiť teóriu hrubo stenných nádob je dôležité pri analyzovaní namáhania hriadeľa a náboja, ktoré vzniká pri ich vzájomnom nalisovaní za účelom prenosu krútiaceho momentu pomocou trenia.

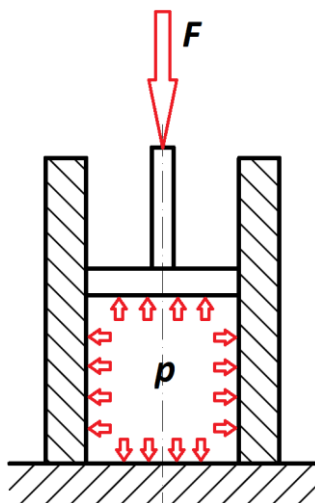
2.2 Predpoklady pre riešenie hrubo stenných nádob.

- Platí Hookeov zákon – všetky uvažované deformácie sú vratné.
- Napätia nesmú prekročiť medzu úmernosti σ_u , resp. medzu sklzu σ_k .
- Všetko platí v dostatočnej vzdialenosti od imperfekcií.

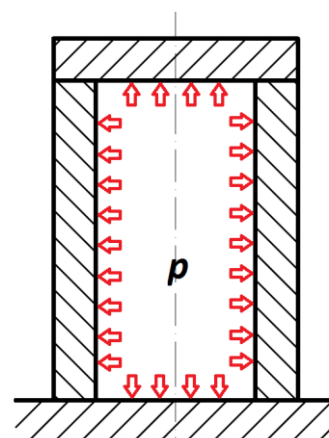
2.3 Delenie hrubo stenných nádob

Otvorené -sú to nádoby pri ktorých nevzniká osovú napätie σ_o v plášti. tlakový priestor nádoby je uzavretý iným telesom ktoré s nádobou nie je pevne spojené.

Uzavreté- sú nádoby pri ktorých vzniká osovú napätie σ_o v plášti dôsledkom rozdielu vnútorného tlaku p_1 a vonkajšieho tlaku p_2 ,respektíve vnútorného pretlaku $p = p_1 - p_2$. Dno alebo veko je pevnou súčasťou nádoby.



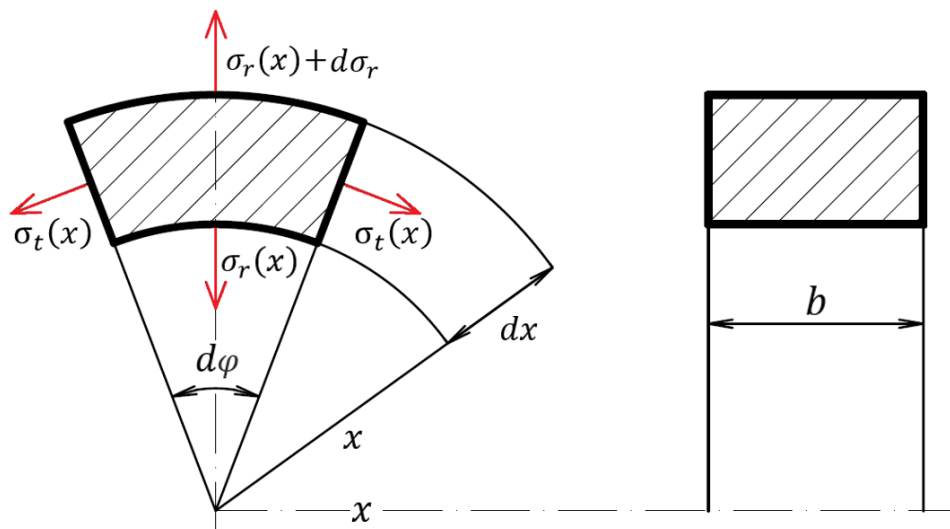
Obr. 1 Nádoba otvorená



Obr. 2 Nádoba zatvorená

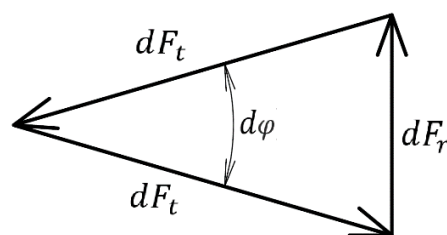
2.4 Odvodenie základnej diferenciálnej rovnice riešenia napätostí hrubo stenných valcových tlakových nádob

Na začiatok sa pri odvodení budeme zaoberať hrubo stennou nádobou otvorenou. Zo steny valcovej nádoby vyberieme element dĺžky b , o vnútornom polomere x , pod uhlom $d\varphi$ a hrúbke dx , ktorý je zobrazený na obr.3. Pri otvorenej nádobe je osovú napätie $\sigma_o = 0$, preto na element pôsobí len rovinná napätosť kde je tangenciálne napätie $\sigma_t(x)$ a radiálne napätie sa mení z $\sigma_r(x)$ na $\sigma_r + d\sigma_r$.



Obr. 3 Zložky napätia pôsobiace na element

Aby vyňatý element ostal v rovnováhe, musí sa výslednica síl pôsobiacich na element rovnať nule.



Obr. 4 Rovnováha elementu

Za týchto predpokladov zostavíme silovú rovnicu elementu podľa obr. 4.

$$dF_t \cdot d\varphi = dF_r \quad (1)$$

Sily dF_t a dF_r vyjadríme z obr. 3.

Výsledná elementárna tangenciálna sila je

$$dF_t = \sigma_t(x) \cdot b \cdot dx \quad (2)$$

Výsledná elementárna radiálna sila je

$$\begin{aligned}
 F_r &= [(\sigma_r(x) + d\sigma_r) \cdot b \cdot (x + dx)d\varphi] - [\sigma_r(x) \cdot b \cdot x \cdot d\varphi] \\
 &= \sigma_r(x) \cdot dx \cdot d\varphi \cdot b + d\sigma_r \cdot x \cdot d\varphi \cdot b + d\sigma_r \cdot dx \cdot d\varphi \cdot b \\
 &= (\sigma_r(x) \cdot dx + d\sigma_r \cdot x + d\sigma_r \cdot dx) \cdot d\varphi \cdot b .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dvojitú deriváciu môžeme považovať za rovnú nule a preto $d\sigma_r \cdot dx = 0$.

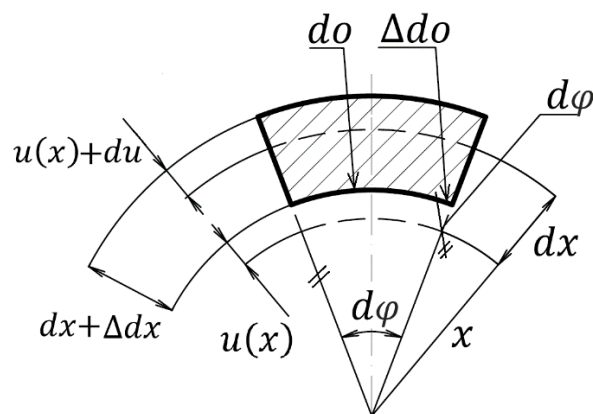
Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned}
 dF_r &= (\sigma_r(x) \cdot dx + d\sigma_r \cdot x) \cdot d\varphi \cdot b \\
 &= [d(\sigma_r(x) \cdot x)] \cdot d\varphi \cdot b .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Po dosadení (2) a (4) do rovnice (1) za predpokladu, že $d\varphi \neq 0$ a $b \neq 0$ dostávame výslednú rovnicu :

$$d(\sigma_r(x) \cdot x) - \sigma_t(x) dx = 0 . \tag{5}$$

Táto diferenciálna rovnica má dve neznáme .Úloha je staticky neurčitá a preto treba doplniť deformačnú podmienku. Deformačnú podmienku určíme z deformácie vyňatého elementu pred a po deformácii z obr. 5.



Obr. 5 Deformácie elementu

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx + [u(x) + du] - [(u(x) + d(x))]}{dx} = \frac{du}{dx} = u'(x) \tag{6}$$

$$\varepsilon_t(x) = \frac{\Delta do}{do} = \frac{u(x) \cdot d\varphi}{x \cdot d\varphi} = \frac{u(x)}{x} \tag{7}$$

Vzťahy (6) a (7) dosadíme do rozšíreného Hookeovho zákona, aby sme vyjadrili tangenciálne napätie $\sigma_t(x)$ a radiálne napätie $\sigma_r(x)$.

$$\sigma_t(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot [\varepsilon_t(x) + \mu \cdot \varepsilon_r(x)] = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \mu \cdot u'(x) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_r(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot [\varepsilon_r(x) + \mu \cdot \varepsilon_t(x)] = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right] \quad (9)$$

A z toho:

$$\begin{aligned} d[\sigma_r(x) \cdot x] &= d \left\{ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right] \cdot x \right\} \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot [u''(x) \cdot dx \cdot x + u'(x) dx + \mu \cdot u'(x) dx] . \end{aligned} \quad (10)$$

Členy (8) a (10) dosadíme do rovnice (5) z čoho dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[u''(x) \cdot dx \cdot x + u'(x) dx + \mu \cdot u'(x) dx - \frac{u(x)}{x} dx - \mu \cdot u'(x) dx \right] &= 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[u''(x) \cdot dx \cdot x + u'(x) dx - \frac{u(x)}{x} dx \right] &= 0 . \end{aligned} \quad (11)$$

A pokiaľ sa $\frac{E}{1-\mu^2} \neq 0$ a diferenciál dx je nekonečne malý ale nenulový tak dostávame vzťah:

$$u''(x) \cdot x + u'(x) - \frac{u(x)}{x} = 0 . \quad (12)$$

Získali sme diferenciálnu rovnicu druhého rádu s jednou neznámou $u(x)$. Riešenie tejto rovnice je vždy v tvare $u(x) = x^n$.

Diferenciálne riešenie rovnice je:

$$u'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (13)$$

$$u''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} . \quad (14)$$

(13) a (14) dosadíme do diferenciálnej rovnice (12) a dostávame:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot x + n \cdot x^{n-1} - \frac{u(x)}{x} &= 0 \\ x^{n-1} [n \cdot (n-1) + n - 1] &= 0 . \end{aligned} \quad (15)$$

Za predpokladu že $x^{n-1} \neq 0$ musí platiť:

$$n^2 - 1 = 0 . \quad (16)$$

Z rovnice vyplýva že $n = \pm 1$ a jednotlivé riešenia sústavy sú x^1 a x^{-1} . Výsledná hľadaná funkcia $u(x)$ je lineárnou kombináciou týchto dvoch riešení .

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} \quad (17)$$

Rovnicu (15) teraz upravíme pre dosadenie.

$$u'(x) = C_1 - \frac{C_2}{x^2} \quad (18)$$

$$\frac{u(x)}{x} = C_1 + \frac{C_2}{x^2} \quad (19)$$

(18) a (19) dosadíme do rovníc rozšíreného Hookeovho zákona (8),(9).

$$\sigma_t(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \mu \cdot u'(x) \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \mu \cdot C_1 - \mu \cdot \frac{C_2}{x^2} \right] \quad (20)$$

$$\sigma_r(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[u'(x) + \mu \cdot \frac{u(x)}{x} \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \mu \cdot C_1 + \mu \cdot \frac{C_2}{x^2} \right] \quad (21)$$

Pre rovnaké vyskytujúce sa členy v oboch rovniciach zavádzame konštanty K a C .

$$K = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (C_1 + \mu \cdot C_1) = \frac{E \cdot C_1}{1-\mu} \quad (22)$$

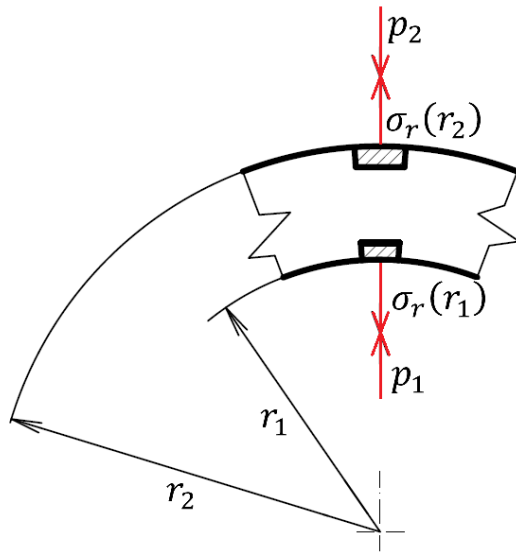
$$C = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (C_2 - \mu \cdot C_2) = \frac{E \cdot C_2}{1+\mu} \quad (23)$$

Výsledné tangenciálne $\sigma_t(x)$ a radiálne $\sigma_r(x)$ napätie zapíšeme v tvare :

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} \quad (24)$$

$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} \quad (25)$$

Čo sú rovnice polytrop, ktoré vyjadrujú napätia ako funkcie súradnice x . Konštanty K a C určíme z okrajových podmienok, ktoré nádoba musí spĺňať na vnútornom polomere ($x = r_1$) a vonkajšom polomere ($x = r_2$) podľa obr. 6.



Obr. 6 Rovnováha elementu

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 = K - \frac{C}{r_1^2} \quad (26)$$

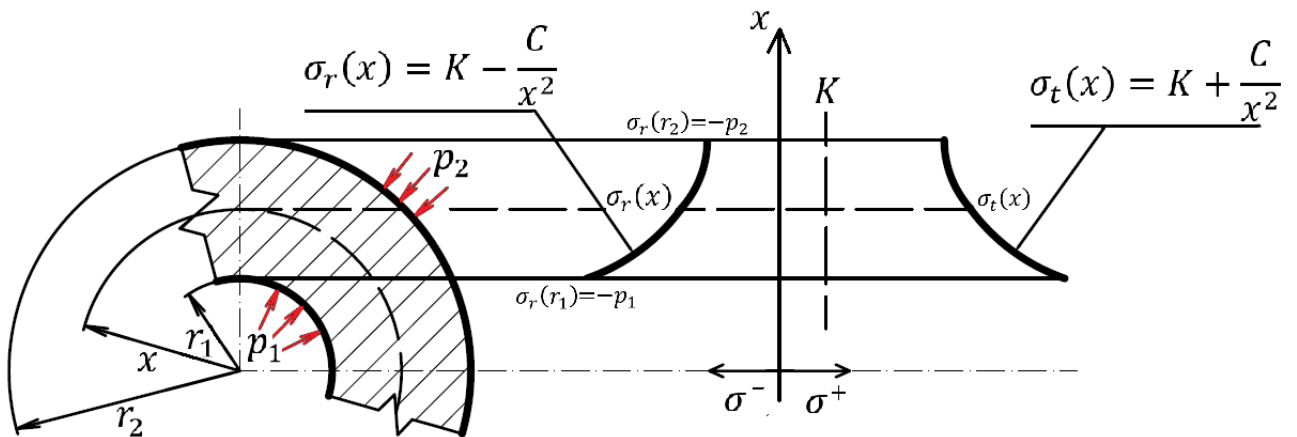
$$\sigma_r(r_2) = -p_2 = K - \frac{C}{r_2^2} \quad (27)$$

Potom konštanty K a C budú:

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (28)$$

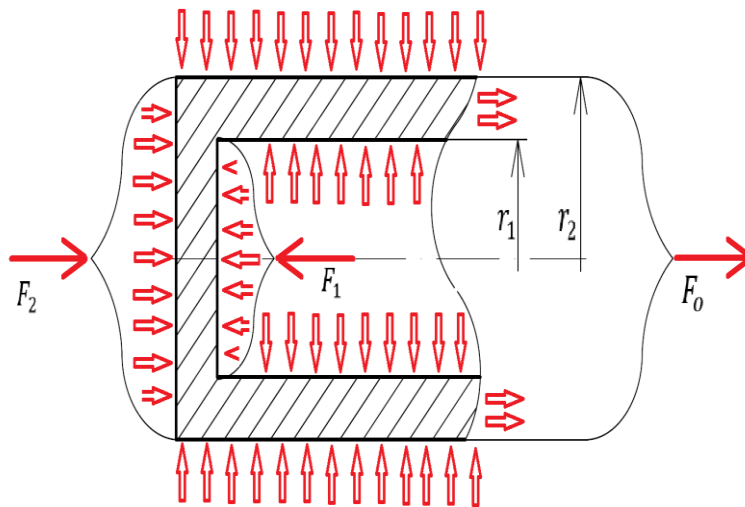
$$C = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (29)$$

Rozmery týchto konštant sú $K[MPa]$ a $C[N]$. Priebeh tangenciálneho $\sigma_t(x)$ a radiálneho $\sigma_r(x)$ napätia je zobrazený na obr.7 .



Obr. 7 Rozloženie tečného a radiálneho napätia v stenách nádoby

2.5 Výpočet osového napätia v hrubo stenných nádobách



Tlaky p_1 a p_2 pôsobia nie len na steny nádoby, ale aj na dno, čím vytvárajú osovú napätie σ_o v plášti nádoby, pri ktorom predpokladáme, že pôsobí konštantne po celej hrúbke steny. Pôsobenie tlakových síl na nádobu je zobrazené na obr. 8.

Obr. 8 Pôsobenie tlakových síl na nádobu

Silová rovnica rovnováhy do smeru osy nádoby je :

$$F_o - F_1 + F_2 = 0 . \quad (30)$$

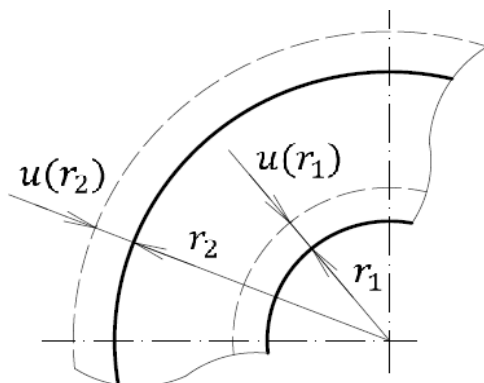
V rovnici za jednotlivé členy dosadíme :

$$F_o = \sigma_o \cdot A_t , \quad F_1 = p_1 \cdot A_1 , \quad F_2 = p_2 \cdot A_2 , \quad A_t = \pi \cdot (r_2 - r_1)^2 , \quad A_1 = \pi \cdot r_1^2 , \quad A_2 = \pi \cdot r_2^2 .$$

Z čoho dostávame

$$\sigma_o \cdot \pi \cdot (r_2 - r_1)^2 - p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 + p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 = 0 \rightarrow \sigma_o = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} . \quad (31)$$

2.6 Deformácia plášťa hrubo stenných nádob



Obr. 9 Radiálna deformácia nádoby

U hrubo stenných nádob vzniká obecná priestorová alebo rovinná napätosť, preto k výpočtu deformácií (k výpočtu zmeny polomerov Δr_1 a Δr_2 , viz. Obr. 9), použijeme rozšírený Hookeov zákon.

$$\varepsilon_t(x) = \frac{1}{E} \cdot \{ \sigma_t(x) - \mu \cdot [\sigma_r(x) + \sigma_o(x)] \} \quad (32)$$

Pretože $u(x)$ je posunutie obecného miesta popísaného súradnicov x v smere tejto súradnice, musí platiť :

$$\varepsilon_t(r_1) = \frac{\Delta r_1}{r_1}, \quad \varepsilon_t(r_2) = \frac{\Delta r_2}{r_2} \quad \rightarrow \Delta r_1 = \varepsilon_t(r_1) \cdot r_1, \quad \Delta r_2 = \varepsilon_t(r_2) \cdot r_2.$$

Dosadenie do Hookovho zákona pre polomer r_1 je

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E} \cdot \{\sigma_t(r_1) - \mu \cdot [\sigma_r(r_1) + \sigma_o(r_1)]\}. \quad (33)$$

A obdobne pre polomer r_2 je

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} \cdot \{\sigma_t(r_2) - \mu \cdot [\sigma_r(r_2) + \sigma_o(r_2)]\}. \quad (34)$$

Zmenu dĺžky Δl tiež počítame z Hookeovho zákona

$$\Delta l = \frac{l}{E} \cdot \{\sigma_o - \mu \cdot [\sigma_t(x) + \sigma_r(x)]\}. \quad (35)$$

2.7 Dimenzovanie hrubo stenných nádob – pevnostné podmienky

Hrubo stenné nádoby z húževnatého materiálu dimenzujeme podľa teórie Trescovi, τ_{MAX} . Z rovníc napätí vyplýva, že vždy najväčšie napätie je na vnútornom polomere nádoby.

Máme 4 rôzne prípady namáhania hrubo stenných nádob a to sú :

- otvorená nádoba s vnútorným pretlakom,
- zatvorená nádoba s vnútorným pretlakom,
- otvorená nádoba s vonkajším pretlakom,
- zatvorená nádoba s vonkajším pretlakom.

2.7.1 Otvorená nádoba s vnútorným pretlakom ($p_1 > p_2$)

Pre otvorenú nádobu s vnútorným pretlakom podľa obr.10 platí:

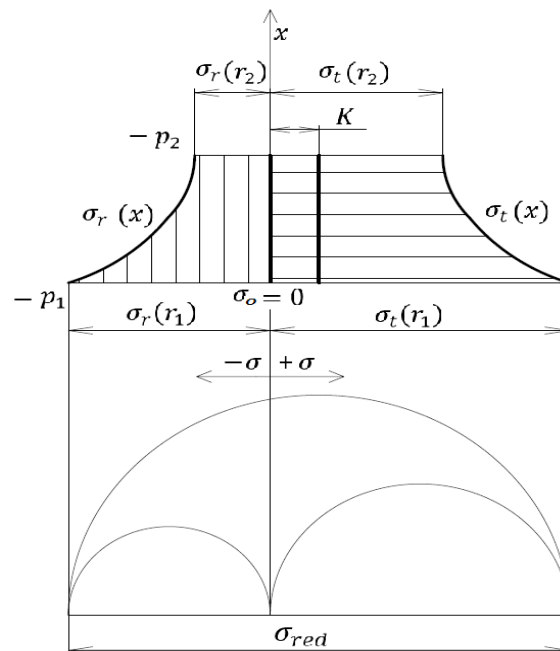
$$\sigma_D > \sigma_{red} = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1).$$

Po dosadení

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad a \quad \sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1$$

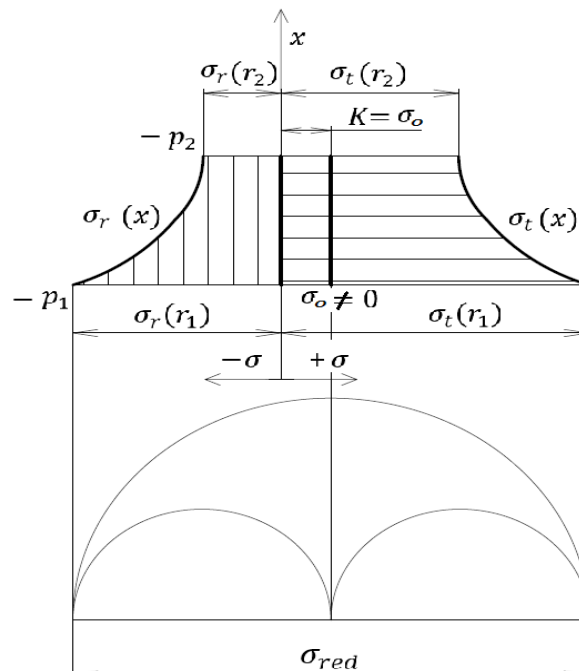
dostávame výslednú rovnicu pre dimenzovanie otvorenej nádoby s pretlakom:

$$(p_1 - p_2) < \frac{\sigma_D}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (36)$$



Obr. 10 Priebeh napätia v otvorenej nádobe s vnútorným pretlakom

2.7.2 zatvorená nádoba s vnútorným pretlakom ($p_1 > p_2$)



Obr. 11 Priebeh napätia v zatvorenej nádobe s vnútorným pretlakom

Pre zatvorenú nádobu s vnútorným pretlakom podľa obr.11 platí:

$$\sigma_D > \sigma_{red} = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1).$$

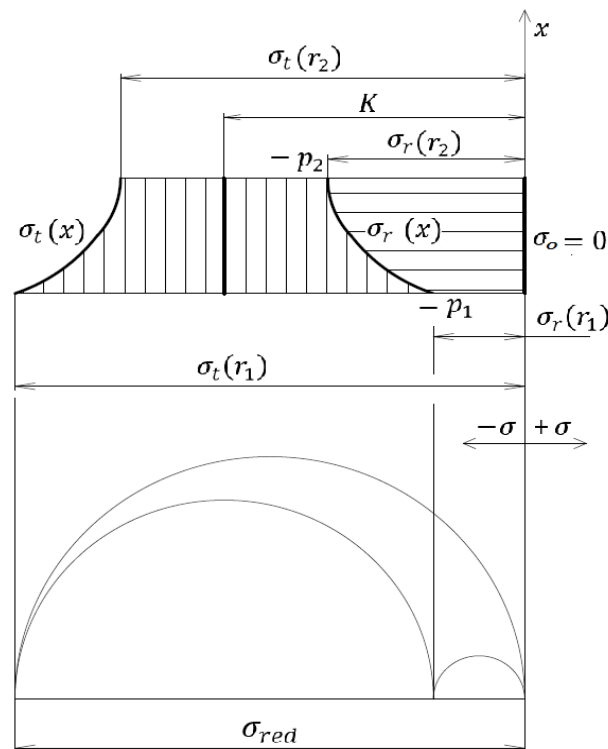
Po dosadení

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad a \quad \sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1$$

dostávame výslednú rovnicu pre dimenzovanie zatvorenej nádoby s pretlakom:

$$(p_1 - p_2) < \frac{\sigma_D}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (37)$$

2.7.3 Otvorená nádoba s vonkajším pretlakom ($p_2 > p_1$)



Obr. 12 Priebeh napätia v otvorenej nádobe s vonkajším pretlakom

Pre otvorenú nádobu s vonkajším pretlakom podľa obr.12 platí:

$$\sigma_D > \sigma_{red} = -\sigma_t(r_1).$$

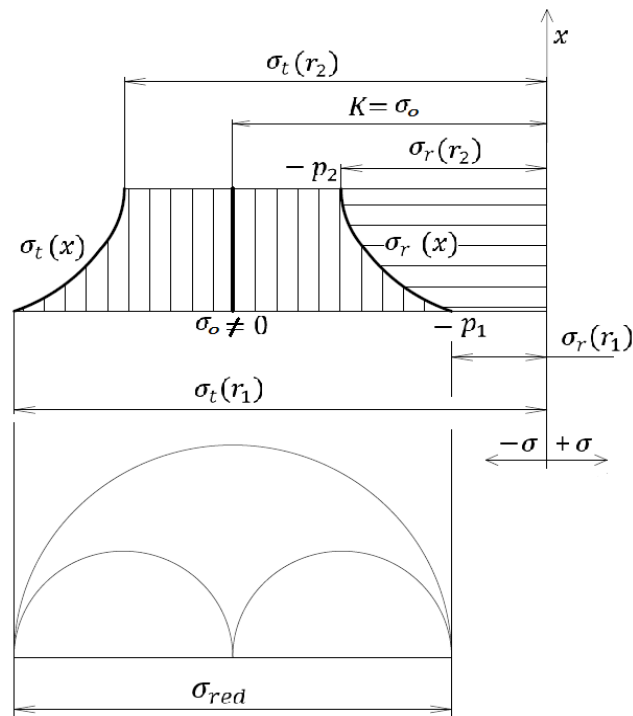
Po dosadení

$$\sigma_t(r_1) = 2K + p_1 = 2 \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1$$

dostávame výslednú rovnicu pre dimenzovanie otvorenej nádoby s vonkajším pretlakom:

$$-\left(2 \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1\right) < \sigma_D. \quad (38)$$

2.7.4 zatvorená nádoba s vonkajším pretlakom ($p_2 > p_1$)



Obr. 13 Priebeh napätia v zatvorenej nádobe s vonkajším pretlakom

Pre zatvorenú nádobu s vonkajším pretlakom podľa obr.13 platí

$$\sigma_D > \sigma_{red} = \sigma_r(r_1) - \sigma_t(r_1) .$$

Po dosadení

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \text{ a } \sigma_t(r_1) = (2K + p_1)$$

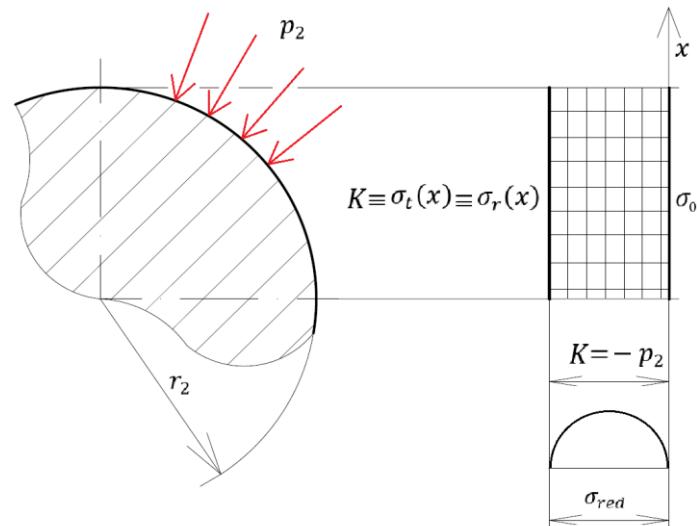
dostávame výslednú rovnicu pre dimenzovanie zatvorenej nádoby s vonkajším pretlakom :

$$(p_2 - p_1) < \frac{\sigma_D}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (39)$$

2.8 Zvláštne prípady hrubo stenných nádob

2.8.1 Nádobu bez otvoru ($r_1=0$, $p_1=0$)

S týmto prípadom namáhania sa môžeme v praxi stretnúť pri hriadeľoch, na ktoré lisujeme náboj. Priebeh napätia v danom prípade bude ako je zobrazený na obr.14.



Obr. 14 Nádobu bez otvoru

Pre tlaky v nádobe platia vzťahy (24), (25).

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2} \quad (40)$$

$$C = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 0. \quad (41)$$

Po dosadení dostávame výsledné napätie pre nádobu bez otvoru .

$$\sigma_t(x) = -p_2 \quad (42)$$

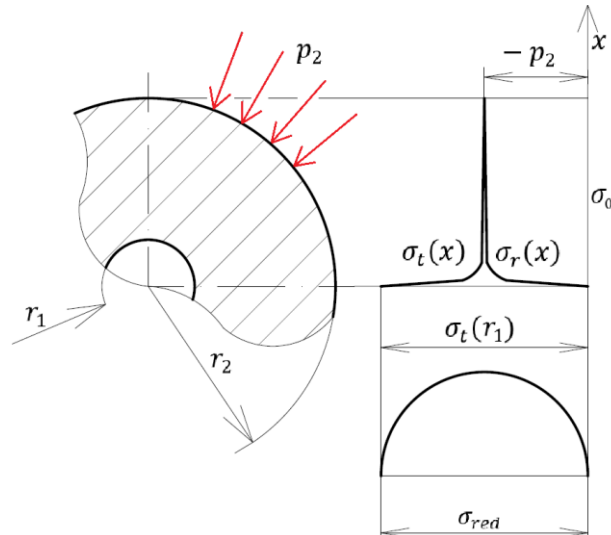
$$\sigma_r(x) = -p_2 \quad (43)$$

Vidíme že napätia $\sigma_t(x)$ a $\sigma_r(x)$ sú si rovné a zároveň sa rovnajú mínusovej hodnote tlaku p_2 . Redukované napätie v nádobe bez otvoru je

$$\sigma_{red} = p_2 . \quad (44)$$

2.8.1 Nádoba s malým otvorem ($r_1 \rightarrow 0$, $p_1 = 0$)

V praxi sa s týmto prípadom môžeme stretnúť pri hriadeľoch s malým otvorom v ich ose, keď vnútorný polomer bude oproti polomeru vonkajšiemu zanedbateľný. Priebek napätia v danom prípade je zobrazený na obr.15



Obr. 15 Priebek napätia v nádobe s malým otvorom

Pre tlaky v nádobe platia vzťahy(24), (25) kde:

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2} \quad (45)$$

$$C = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2} = -p_2 \cdot r_1^2 \quad (46)$$

Tlaky v nádobe musíme posudzovať z pohľadu súradnice x .

$$x \approx r_1$$

$$\frac{C}{x^2} = \frac{-p_2 \cdot r_1^2}{r_1^2} = -p_2 \rightarrow \sigma_t(x) = -2 \cdot p_2 \quad (47)$$

$$\sigma_r(x) = 0 \quad (48)$$

$$x > r_1$$

$$\frac{C}{x^2} = \frac{-p_2 \cdot r_1^2}{x^2} \approx 0 \rightarrow \sigma_t(x) = -p_2 \quad (49)$$

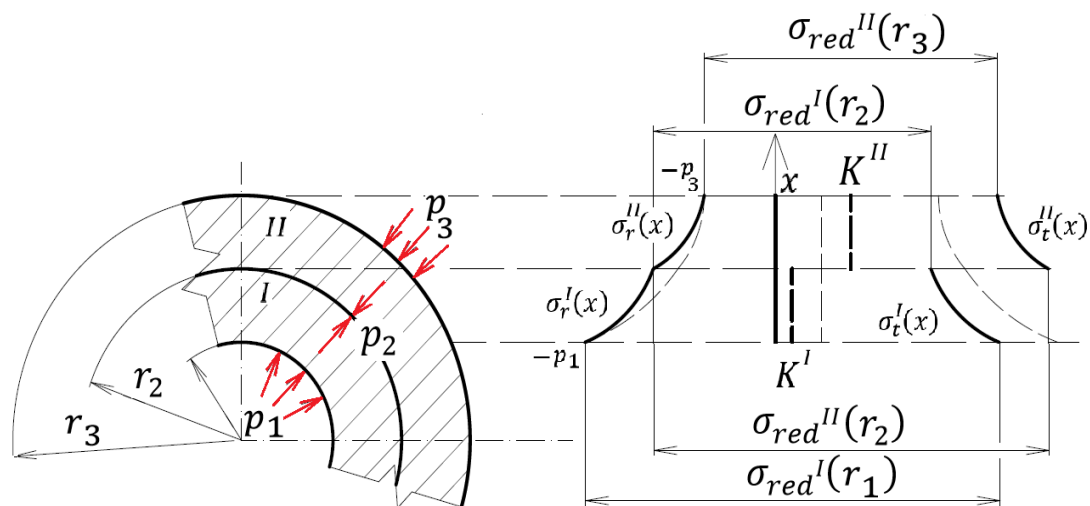
$$\sigma_r(x) = -p_2 \quad (50)$$

Z rovníc vychádza , že ak je polomer r_1 dostatočne malý, tak potom platí:

$$\sigma_{red} = 2p_2 \cdot \quad (51)$$

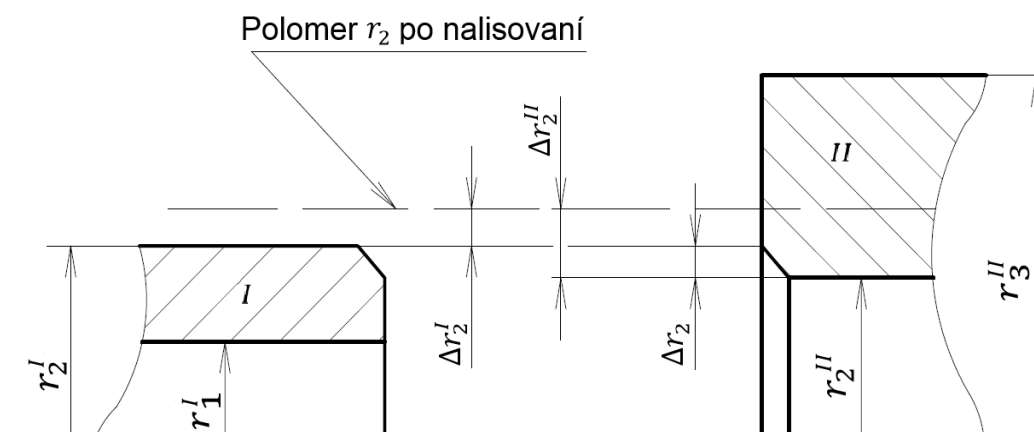
2.9 Nalisované hrubostenné nádoby

Účelom nalisovania je vniesť predpätie do nádoby a tým dosiahnuť zvýšenia dovoleného pretlaku pôsobiaceho na nádobu. Predpätie v nádobe vytvoríme pomocou presahu Δr_2 na polomeri r_2 . Priebeh výsledného napätia pri nalisovaní dvoch hrubo stenných nádob na seba je zobrazený na obr. 16.



Obr. 16 Rozloženie napätia v stenách dvoch na seba nalisovaných nádob

2.9.1 Určenie presahu Δr_2 u dvojvrstvovej nalisovanej nádoby



Obr. 17 Presah pri nalisovaní dvoch nádob na seba

Pri riešení presahu Δr_2 uvažujeme, že sú nádoby vyrobené z rovnakého materiálu ($E^I = E^{II}$), osovú napätie nádob je nulové ($\sigma_0^I = \sigma_0^{II} = 0$), deformácie sú malé a $r_2^I \approx r_2^{II} \approx r_2$.

Hľadaný presah vyjadríme z obr.17 a rovnicu vydelíme r_2 .

$$\Delta r_2 = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I$$

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2} = \varepsilon_t^{II}(r_2) - \varepsilon_t^I(r_2) \quad (52)$$

Tangenciálne deformácie vyjadríme pomocou rozšíreného Hookeovho zákona(6), (7).

$$\varepsilon_t^I(r_2) = \frac{1}{E} [\sigma_t^I(r_2) - \mu \cdot \sigma_r^I(r_2)] = \frac{1}{E} [\sigma_t^I(r_2) - \mu \cdot p_2] \quad (53)$$

$$\varepsilon_t^{II}(r_2) = \frac{1}{E} [\sigma_t^{II}(r_2) - \mu \cdot \sigma_r^{II}(r_2)] = \frac{1}{E} [\sigma_t^{II}(r_2) - \mu \cdot p_2] \quad (54)$$

Rozdiel tečných deformácií je

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^{II}(r_2) - \varepsilon_t^I(r_2) &= \frac{1}{E} \{ [\sigma_t^{II}(r_2) - \mu \cdot p_2] - [\sigma_t^I(r_2) - \mu \cdot p_2] \} \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_t^I(r_2)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Po dosadení $\sigma_t^I(r_2) = 2 \cdot K^I + p_2$ a $\sigma_t^{II}(r_2) = 2 \cdot K^{II} + p_2$ do vzťahov, dostávame

$$\varepsilon_t^I(r_2) - \varepsilon_t^{II}(r_2) = \frac{2}{E} [K^{II} - K^I]. \quad (56)$$

Teraz vyjadríme Δr_2 a dostávame výsledný vzťah pre presah nalisovaných nádob.

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E} [\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_t^I(r_2)] = \frac{2r_2}{E} [K^{II} - K^I] \quad (57)$$

3 Prenos krútiaceho momentu z náboja na hriadeľ

Ako sme už na začiatku práce spomínali, budeme sa zaoberať dvomi spôsobmi prenosu krútiaceho momentu z náboja na hriadeľ. Prvý spôsob bude pomocou trenia a druhý pomocou pera voľne uloženého v drážke. Na základe teórie hrubo stenných nádob a našej predstavy rozloženia tlaku v drážke pre pero porovnáme maximálne napätia vzniknuté v náboji a hriadeli a tým vyhodnotíme, ktoré riešenie je pre nás výhodnejšie.

3.1 Prenos krútiaceho momentu pomocou trenia

Aby sme zabezpečili prenos krútiaceho momentu, musíme v mieste styku vytvoriť dostatočný tlak, ktorý vzniká pri nalisovaní náboja na hriadeľ s určitým vzájomným presahom. Krútiaci moment, ktorý je schopný nalisovaný spoj preniesť vyjadríme :

$$M_k = F_T \cdot r_2 \quad (58)$$

r_2 je polomer hriadeľu.

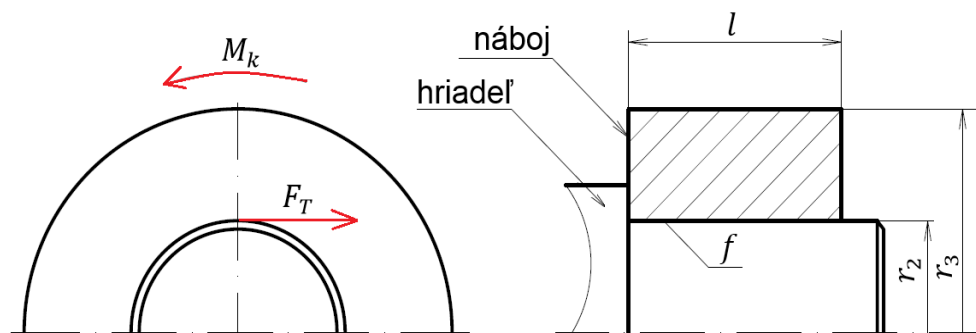
Tangenciálna sila sa rovná

$$F_T = f \cdot S \cdot p_2 \quad (59)$$

f je súčiniteľ trenia medzi nábojom a hriadeľom, S je plocha na ktorej dochádza ku kontaktu a tlak p_2 , je tlak, ktorý vznikne nalisovaním náboja na hriadeľ v mieste ich dotyku.

Po dosadení dostávame vzťah, z ktorého si vyjadríme tlak p_2 .

$$M_k = f \cdot S \cdot p_2 \cdot r_2 = f \cdot p_2 \cdot 2\pi \cdot r_2^2 \cdot l$$
$$p_2 = \frac{M_k}{f \cdot 2\pi \cdot r_2^2 \cdot l} \quad (60)$$



Obr. 18 Nalisovaný spoj náboj na hriadeľ

Rozmery pre náš prípad, ktorý je zobrazený na obr.18 som si zvolil

$$M_k = 4590 \text{ N} \cdot \text{mm} , l = 100 \text{ mm} , r_2 = 20 \text{ mm} , r_1 = 0 \text{ mm} , r_3 = 40 \text{ mm} , f = 0,14.$$

$$p_2 = \frac{M_k}{f \cdot 2\pi \cdot r_2^2 \cdot l} = \frac{4590}{0,14 \cdot 2\pi \cdot 20^2 \cdot 100} = 0,13 \text{ Mpa} \quad (61)$$

Keď už máme určený tlak p_2 , môžeme pomocou teórie hrubo stenných nádob vypočítať maximálne napätie v hriadeľi a v náboji. Nie je potrebné určovať presah nádob, pretože tlak p_2 je tlak práve týmto presahom spôsobený. Ako prvé spočítame

redukované napätie v hriadeli. To spočítame podľa rovnice pre redukované napätie v nádobe bez otvoru (43) .

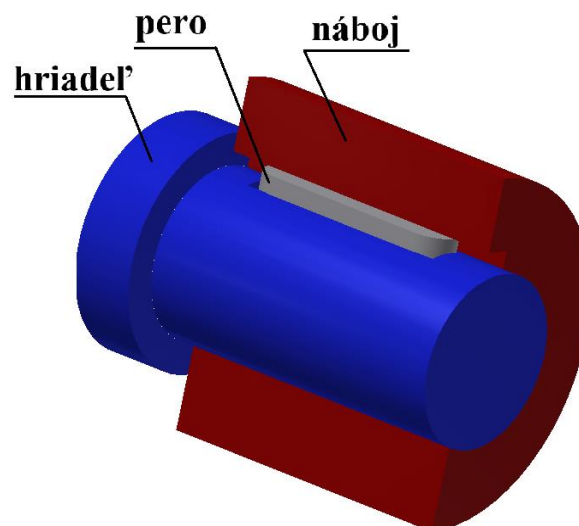
$$\sigma_{red}^H = p_2 = 0,13 \text{ N.mm}^{-2} \quad (62)$$

Teraz pomocou rovnice pre nádobu otvorenú s vnútorným pretlakom (36) spočítame redukované napätie v náboji, kde p_3 je tlak atmosférický, ktorý je podstatne menší ako tlaky, ktorými sa zaoberáme a preto ho zanedbávame. Teraz si môžeme vyjadriť σ_{red}^N v náboji:

$$(p_2 - p_3) = \frac{\sigma_{red}}{2} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]$$
$$\sigma_{red}^N = \frac{2 \cdot p_2}{\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]} = \frac{2 \cdot 0,13}{\left[1 - \left(\frac{20}{40} \right)^2 \right]} = 0,35 \text{ N.mm}^{-2} . \quad (63)$$

Napätia σ_{red}^H a σ_{red}^N , ktoré sme vypočítali, sú napätia, ktoré vznikli v dôsledku nalisovania náboja na hriadeľ. Nemôžeme zabudnúť, že účelom nalisovania je prenos točivého momentu, ktorý napätia v hriadeli aj v náboji ešte určite zväčší.

3.2 Prenos Krútiaceho momentu pomocou pera



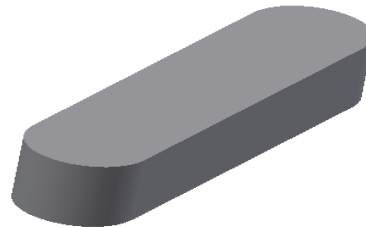
Obr. 19 Polovičný pohľad na spoj hriadeľ, pero a náboj

Pri prenose krútiaceho momentu pomocou pera sa nebudeme zaoberať analýzou napätia v pere, ale budeme skúmať redukované napätie v náboji a hriadeli na základe náhradných modelov simulácií, pri použití našej teórie rozloženia tlaku na stene drážky, ku ktorému dôjde po zaťažení náboja krútiacim momentom. Uvažujeme, že pri prenose krútiaceho momentu z hriadeľa na náboj dochádza k natočeniu pera, ktoré spôsobuje nerovnomerné zaťaženie drážky ako na hriadeli, tak aj na náboji. Predpokladáme, že tuhosť drážky sa po celej jej výške výrazne nemení a pero je

dokonale tuhé. Rozloženie tlaku na drážke by v takomto prípade mohlo byť lineárne. Pri našej analýze sa budeme tiež zaoberať úpravami pera za účelom zníženia namáhania hriadeľa a náboja. Pomocou jednoduchých úprav pera je možné zmeniť rozloženie tlaku na drážke a tým aj rozloženie napätia v danom telese. Budeme sa snažiť o zmenšenie maximálneho redukovaného napätia v telese a tým zvýšiť jeho schopnosť prenosu krútiaceho momentu. Spojenie hriadeľa a náboja pomocou pera je zobrazené na obr. 19.

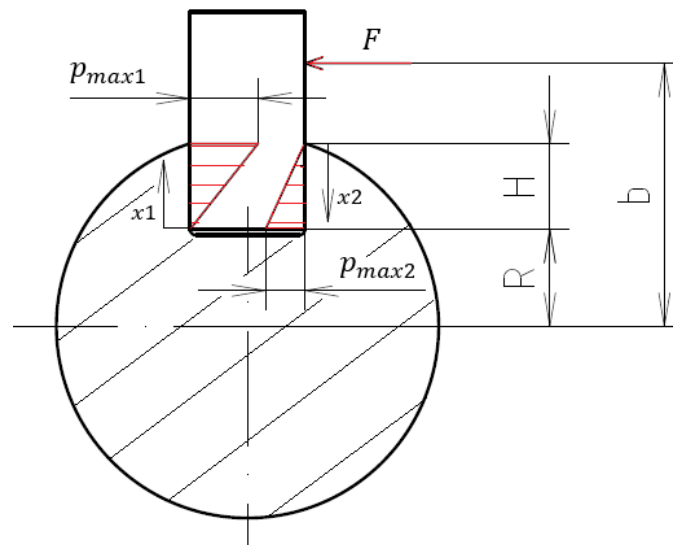
3.2.1 Obyčajné pero

Prvý prípad, ktorým sa budeme zaoberať je obyčajné pero bez akýchkoľvek úprav, viz. obr. 20. Pero sa opiera celou plochou strán o drážku hriadeľa a náboja.



Obr. 20 Pero bez úprav

Pri analýze hriadeľa budeme postupovať nasledovne:



Obr. 21 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa po kontakte s obyčajným perom

Na obr.21 vidíme našu predstavu rozloženia tlaku na drážke hriadeľa po kontakte s perom. Ak je dĺžka pera $l=100\text{mm}$, priemer hriadeľa $d=40\text{mm}$, Výška drážky, na

ktorej dochádza ku kontaktu pera s hriadeľom $H=2,58\text{ mm}$, vzdialenosť pera od stredu hriadeľa $R = 16,5\text{ mm}$ a vzdialenosť $b=20,6\text{ mm}$, nám určuje približnú vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom náboji, tak potom maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k = 4590\text{ N/mm}$ na hriadeli vypočítame (vzdialenosť b sme dostali jednoduchou úvahou, že výslednica síl sa bude nachádzať približne v strede plochy dotyku spolu zaberajúceho telesa s perom. Vzdialenosť b , dostaneme v každom prípade z rovnakej úvahy):

$$M_k = F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b}$$
$$F = \frac{4590}{20,6} = 222,82\text{ N} \quad (64)$$

$$F \cdot (b - R) = l \cdot \int_0^H \left(\frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^H$$
$$= l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \frac{H^3}{3} \quad (65)$$

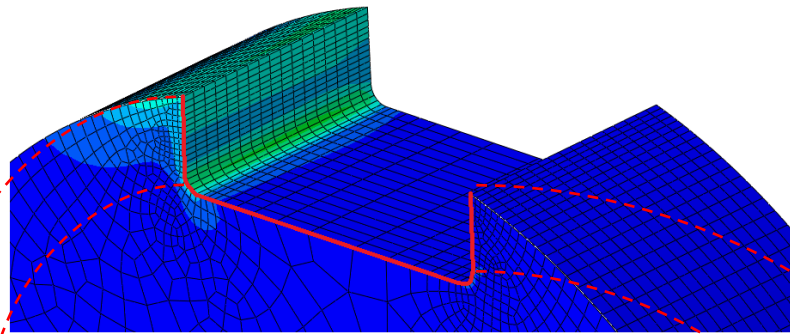
$$p_{max1} = \frac{3 \cdot F \cdot (b - R)}{l \cdot H^2} = \frac{3 \cdot 222,82 \cdot (20,6 - 16,5)}{100 \cdot 2,58^2} = 4,11\text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$F \cdot (b - R - H) = l \cdot \int_0^H \left(\frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{H} \cdot \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^H$$
$$= l \cdot \frac{p_{max2}}{H} \cdot \frac{H^3}{3} \quad (66)$$

$$p_{max2} = \frac{3 \cdot F \cdot (b - R - H)}{l \cdot H^2} = \frac{3 \cdot 222,82 \cdot (20,6 - 16,5 - 2,58)}{100 \cdot 2,58^2}$$
$$= 1,53\text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

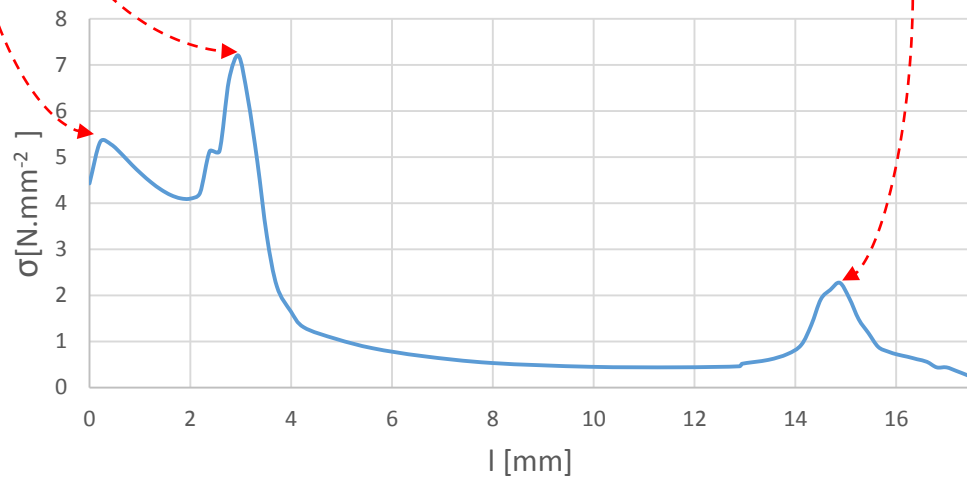
Z obrázka 21. môžeme vyčítať, že ľavá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f_{(x1)} = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a pravá strana tlakom $p_2 = f_{(x2)} = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$.

Tlaky p_1 a p_2 spoločne vytvoria Napätie v hriadeli ako je zobrazené na obr. 22. Môžeme vidieť že najväčšie napätie vzniká na povrchu telesa a práve preto má zmysel analyzovať len body, ktoré sa na povrchu nachádzajú. Hodnoty napätia pozdĺž celej dĺžky krivky „I“, ktorá je zobrazená na obrázku červenou, sú zobrazené v grafe.



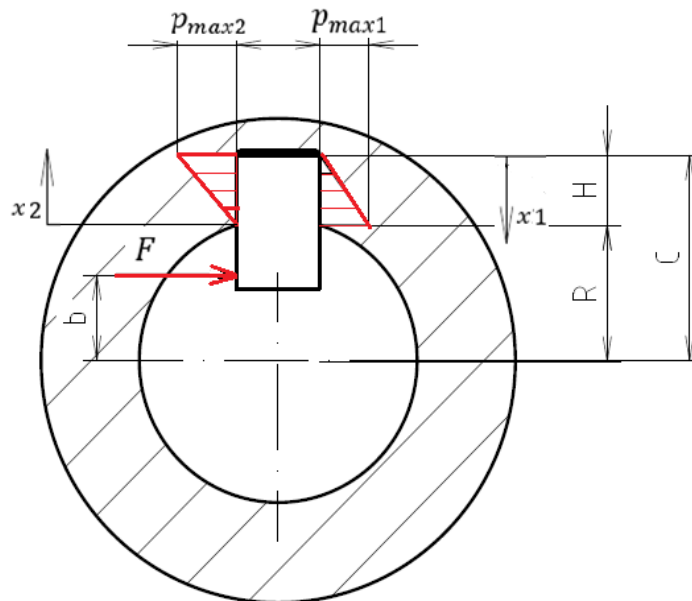
Obr. 22 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom bez úprav

Rozloženie napätia v hriadeľi pozdĺž krivky "I"
pri použití pera bez úprav



Podľa grafu môžeme vidieť, že najviac zaťažené miesto hriadeľa je v ľavom dolnom rohu drážky, kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{LD} = 7,20 \text{ N.mm}^{-2}$. V ľavom hornom rohu dosahuje napätie $\sigma_{LH} = 5,33 \text{ N.mm}^{-2}$, v pravom dolnom $\sigma_{PD} = 2,27 \text{ N.mm}^{-2}$ a v pravom hornom $\sigma_{PH} = 0,11 \text{ N.mm}^{-2}$.

Teraz nám ešte ostáva analyzovať zaťaženie náboja :



Obr. 23 Rozloženie tlaku na drážke náboja po kontakte s obyčajným perom

Na obr.23 vidíme našu predstavu rozloženia tlaku na drážke náboja po kontakte s perom. Ak je Dĺžka náboja $l=100\text{mm}$, vnútorný priemer náboja $d=40\text{mm}$, výška drážky, na ktorej dochádza ku kontaktu pera s nábojom $H=3,04\text{ mm}$, vzdialenosť kde pero dochádza ku kontaktu s nábojom a stred náboja $R=19,08\text{mm}$, vzdialenosť konca pera od stred náboja $C= 22,12$ a vzdialenosť $b=17,79\text{mm}$, nám určuje približnú vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom hriadeli, tak potom maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k = 4590\text{N/mm}$ na náboji vypočítame:

$$(53) M_k = F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b}$$

$$F = \frac{4590}{17,79} = 258,01\text{N} \quad (67)$$

$$F \cdot (C - b) = l \cdot \int_0^H \left(\frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^H$$

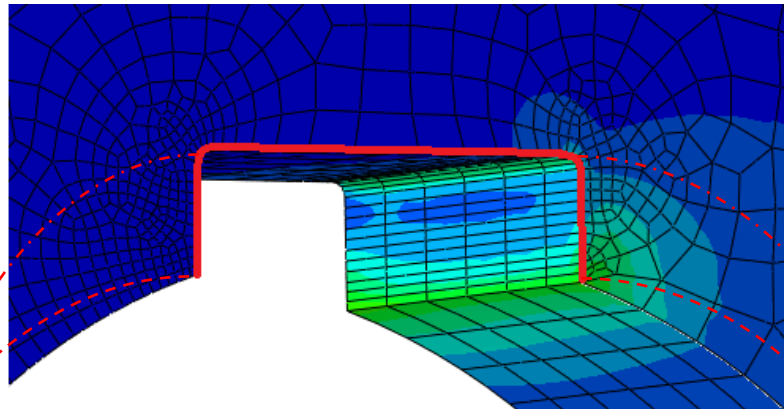
$$= l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \frac{H^3}{2} \quad (68)$$

$$p_{max1} = \frac{3 \cdot F \cdot (C - b)}{l \cdot H^2} = \frac{3 \cdot 258,01 \cdot (22,12 - 17,79)}{100 \cdot 3,04^2} = 3,63 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

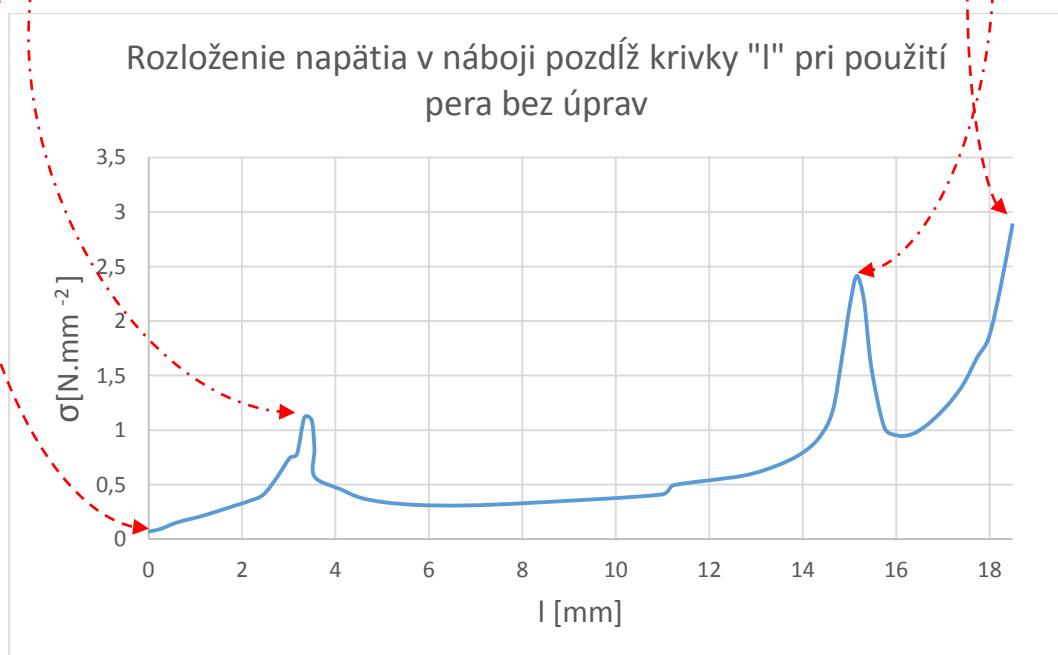
$$\begin{aligned} F \cdot (R - b) &= l \cdot \int_0^H \left(\frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{H} \cdot \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^H \\ &= l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \frac{H^3}{2} \end{aligned} \quad (69)$$

$$p_{max2} = \frac{3 \cdot F \cdot (R - b)}{l \cdot H^3} = \frac{3 \cdot 258,01 \cdot (19,08 - 17,79)}{100 \cdot 3,04^3} = 1,08 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Pravá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f(x_1) = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a ľavá strana tlakom $p_2 = f(x_2) = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$. Tlaky p_1 a p_2 spoločne vytvoria Napätie v náboji ako je zobrazené na obr. 24. Môžeme vidieť, že najväčšie napätie vzniká opäť na povrchu telesa. Hodnoty napätia pozdĺž krivky „I“, ktorá je na obrázku zvýraznená červenou, sú zobrazené v grafe.



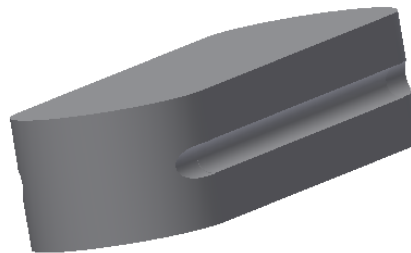
Obr. 24 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom bez úprav



Na grafe môžeme vidieť, že najviac zaťažené miesto náboja je v pravom dolnom rohu drážky, kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{PD} = 2,88 N \cdot mm^{-2}$. V pravom hornom rohu dosahuje napätie taktiež pomerne vysokých hodnôt $\sigma_{PH} = 2,41 N \cdot mm^{-2}$, v ľavom dolnom dosahuje napätie $\sigma_{LD} = 0,07 N \cdot mm^{-2}$ a v ľavom hornom $\sigma_{LH} = 1,11 N \cdot mm^{-2}$.

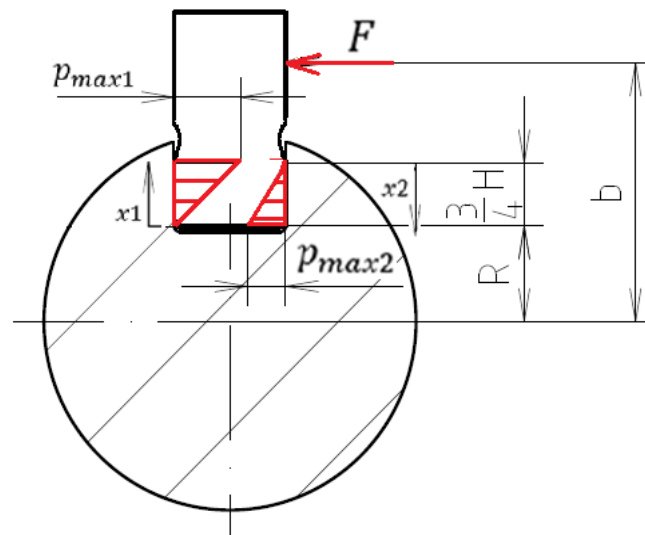
3.2.2 Pero s drážkou

Vytvorením drážky na pere v mieste kontaktu medzi nábojom a hriadeľom obmedzíme kontakt pera s nábojom a hriadeľom, viz obr. 25.



Obr. 25 Pero s drážkou

Na obr.26 vidíme našu predstavu rozloženia tlaku na drážke hriadeľa po kontakte s perom s drážkou. Stanovili sme si, že po úprave pera, výška drážky, ktorá je v kontakte s perom, je $3/4H$. Za rovnakých predpokladov ako v predošlom prípade, rozloženie tlaku po úprave pera na drážke hriadeľa bude vyzeráť takto:



Obr. 26 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa spôsobené kontaktom s perom s drážkou

Dĺžka hriadeľa $l=100mm$, Priemer hriadeľa $d=40mm$, Výška drážky $H=2,58 mm$, vzdialenosť pera od stredu hriadeľa $R = 16,5mm$ a vzdialenosť $b=20,98mm$, nám určuje približnú vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom náboji, tak potom

maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k = 4590 \text{ N/mm}$ na hriadelí vypočítame:

$$\begin{aligned} M_k &= F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b} \\ F &= \frac{4590}{20,98} = 218,78 \text{ N} \end{aligned} \quad (70)$$

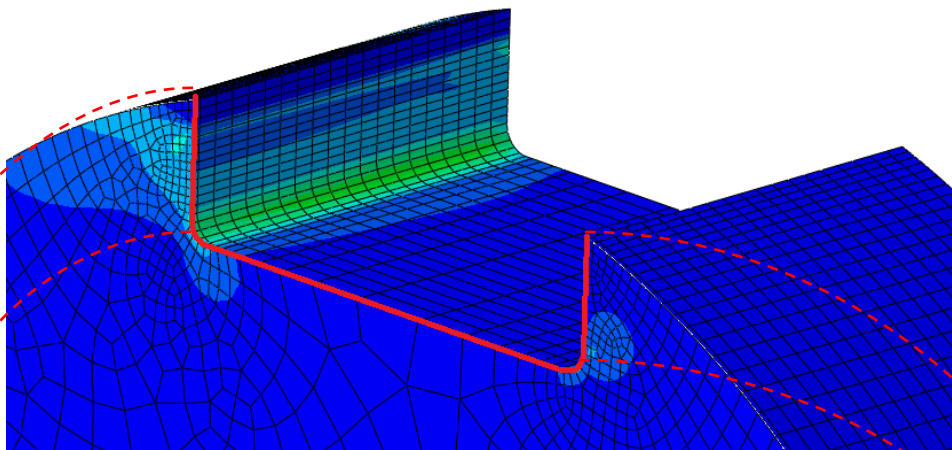
$$\begin{aligned} F \cdot (b - R) &= l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H} \\ &= l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} p_{max1} &= \frac{16 \cdot F \cdot (b - R)}{3 \cdot l \cdot H^2} = \frac{16 \cdot 218,78 \cdot (20,98 - 16,5)}{3 \cdot 100 \cdot 2,58^2} \\ &= 7,85 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \end{aligned}$$

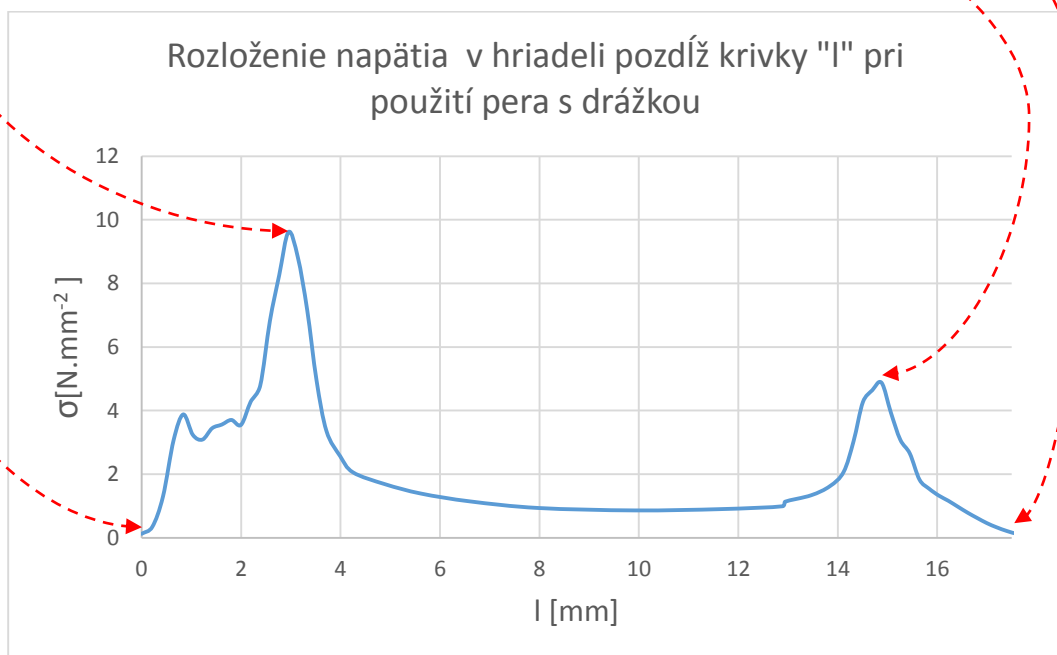
$$\begin{aligned} F \cdot \left(b - R - \frac{3}{4}H \right) &= l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H} \\ &= l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} p_{max2} &= \frac{16 \cdot F \cdot \left(b - R - \frac{3}{4}H \right)}{3 \cdot l \cdot H^2} \\ &= \frac{16 \cdot 218,78 \cdot \left(20,98 - 16,5 - \frac{3}{4} \cdot 2,58 \right)}{3 \cdot 100 \cdot 2,58^2} \\ &= 4,46 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} . \end{aligned}$$

Ľavá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f(x_1) = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a pravá strana tlakom $p_2 = f(x_2) = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$. Na obr. 27 môžeme vidieť napätie v telese po úprave pera. Hodnoty pozdĺž krivky „I“, ktorá je zvýraznená červenou, sme zaznamenali do grafu.



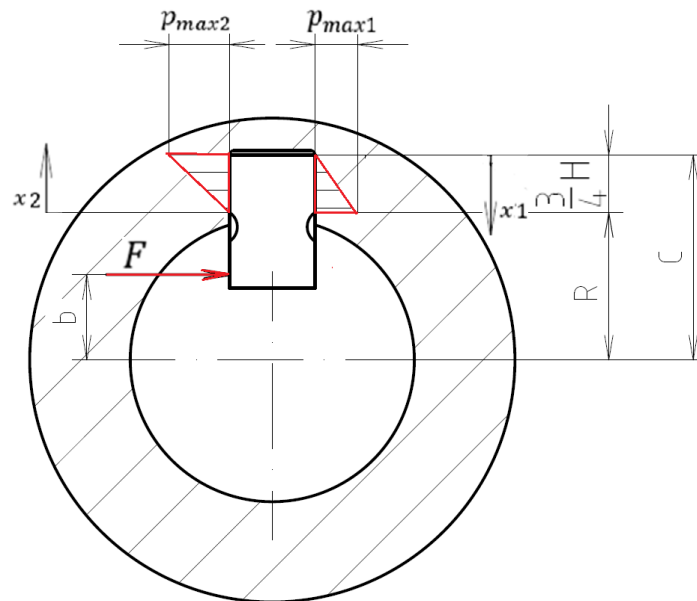
Obr. 27 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom s drážkou.



Podľa grafu môžeme vidieť, že napätia v horných rohoch σ_{PH} a σ_{LH} sú zanedbatelné. Najviac zaťažené miesto hriadeľa je opäť v ľavom dolnom rohu kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{LD} = 9,62 \text{ N.mm}^{-2}$. V pravom dolnom rohu dosahuje napätie $\sigma_{PD} = 4,87 \text{ N.mm}^{-2}$. Podľa výsledkov môžeme povedať, že sa nám podarilo zredukovať napätie σ_{LH} avšak napätie σ_{LD} sa nám ešte zväčšilo a tým môžeme toto riešenie považovať za nevhodné.

Teraz môžeme prejsť k analýze náboja:

Na obr.28 vidíme našu predstavu rozloženia tlaku na drážke náboja po kontakte s perom s drážkou. Stanovili sme si, že po úprave pera, výška drážky, ktorá je v kontakte s perom, je $3/4H$.



Obr. 28 Rozloženie tlaku na drážke náboja spôsobené kontaktom s perom s drážkou

Ak je Dĺžka náboja $l=100\text{mm}$, vnútorný priemer náboja $d=40\text{mm}$, výška drážky $H=3,04\text{mm}$, vzdialenosť kde pero dochádza ku kontaktu s nábojom a stred náboja $R = 19,84\text{mm}$, vzdialenosť konca pera od stred náboja $C= 22,12\text{mm}$ a vzdialenosť $b=17,47\text{mm}$, nám určuje približnú vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom hriadeli, tak potom maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k = 4590\text{N/mm}$ na náboji vypočítame:

$$M_k = F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b}$$

$$F = \frac{4590}{17,47} = 262,74\text{N} \quad (73)$$

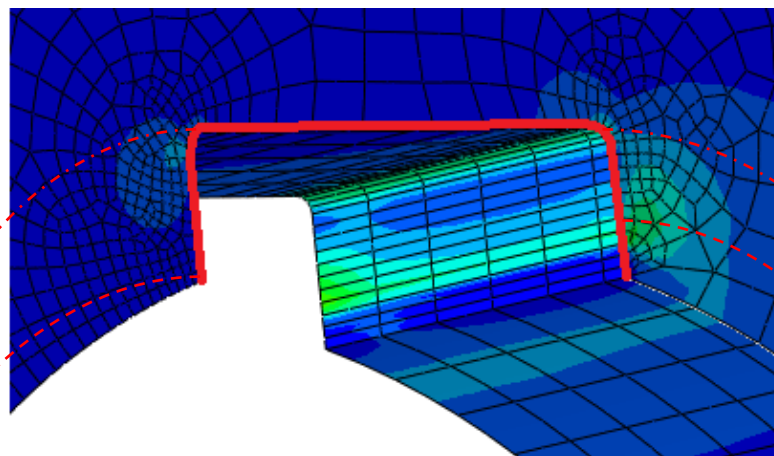
$$F \cdot (C - b) = l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H} = l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3}$$

$$p_{max1} = \frac{16 \cdot F \cdot (C - b)}{3 \cdot l \cdot H} = \frac{16 \cdot 262,74 \cdot (22,12 - 17,47)}{3 \cdot 100 \cdot 3,04^2} = 7,05 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \quad (74)$$

$$F \cdot (R - b) = l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{H} \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{4}H} = l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^2}{2} \quad (75)$$

$$p_{max2} = \frac{16 \cdot F \cdot (R - b)}{3 \cdot l \cdot H^2} = \frac{16 \cdot 262,74 \cdot (19,84 - 17,47)}{3 \cdot 100 \cdot 3,04^2}$$
$$= 3,59 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \quad (75)$$

Pravá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f(x_1) = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a ľavá strana tlakom $p_2 = f(x_2) = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$. Tlaky p_1 a p_2 spoločne vytvoria Napätie v náboji ako je zobrazené na obr. 29. Môžeme vidieť že najväčšie napätie vzniká na povrchu telesa. Hodnoty napätia pozdĺž krivky „I“, ktorá je na obrázku zvýraznená červenou, sú zobrazené v grafe .



Obr. 29 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom s drážkou

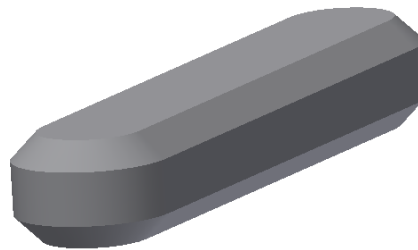


Podľa grafu môžeme vidieť, že najviac zaťažené miesto už nie je pravý dolný, ale pravý horný roh kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{pH} = 3,63 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$. Ďalšie pre nás významné

zhromaždisko napätia vzniklo na pravej stene drážky kde napätie dosahuje hodnotu $\sigma_{SP} = 3,29 N.mm^{-2}$ a v ľavom hornom rohu kde je napätie $\sigma_{LH} = 2,79 N.mm^{-2}$. Napätie v ľavom dolnom rohu σ_{LD} je zanedbateľné. Ako môžeme vidieť na výsledkoch, maximálne napätie nám v náboji ešte stúplo a týmto toto riešenie môžeme považovať za nevhodné.

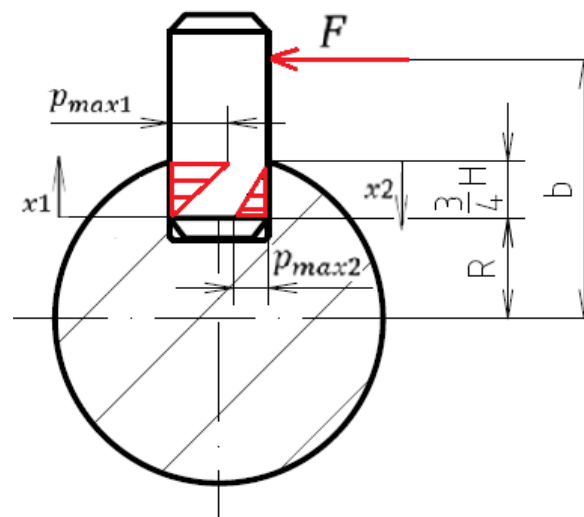
3.2.3 Pero so zrazenými hranami

V predošlých prípadoch sme mohli vidieť, že napätie sa koncentruje vo vnútorných hranách nami analyzovaných elementov. Skúsime tomu zamedziť zrazením hrán pera.



Obr. 30 Pero so zrazenými hranami

Stanovili sme si, že po úprave pera výška drážky, ktorá je v kontakte s perom je $3/4H$. Po úprave pera bude tlak na drážke hriadeľa vyzeráť takto:



Obr. 31 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa spôsobené kontaktom s perom so zrazenými hranami

Našu predstavu rozloženia tlaku na drážke hriadeľa po kontakte s perom so zrazenými hranami vidíme na obr. 31. Dĺžka hriadeľa $l=100mm$, Priemer hriadeľa $d=40mm$, Výška drážky $H=2,58 mm$, vzdialenosť pera od stredu hriadeľa $R = 17,15mm$ a vzdialenosť

$b=20,22\text{mm}$, nám určuje približne vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom náboji, tak potom maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k=4590\text{N/mm}$ na hriadelí vypočítame :

$$M_k = F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b}$$
$$F = \frac{4590}{20,22} = 227,00\text{N} \quad (76)$$

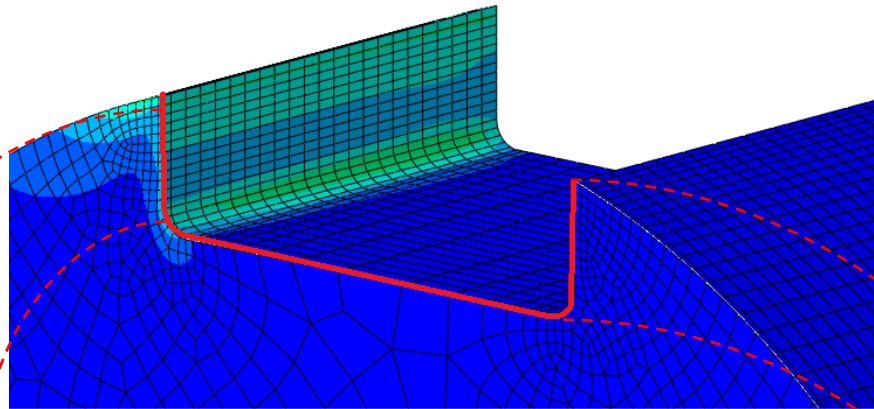
$$F \cdot (b - R) = l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H}$$
$$= l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3} \quad (77)$$

$$p_{max1} = \frac{16 \cdot F \cdot (b - R)}{3 \cdot l \cdot H^2} = \frac{16 \cdot 227 \cdot (20,22 - 17,15)}{3 \cdot 100 \cdot 2,58^2} = 5,58 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

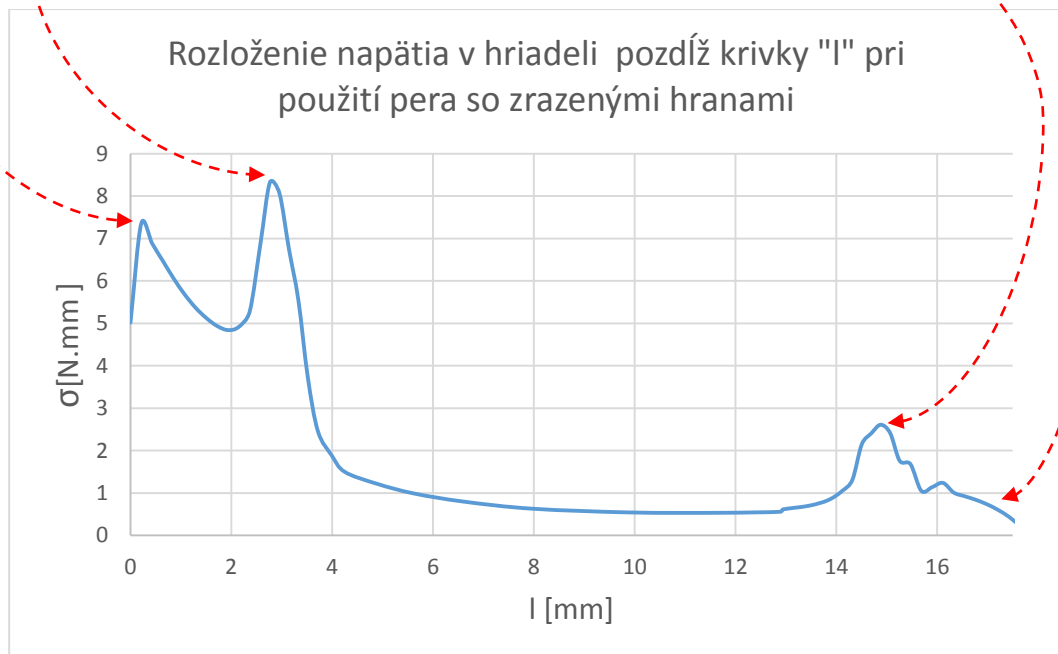
$$F \cdot \left(b - R - \frac{3}{4}H \right) = l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H}$$
$$= l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3} \quad (78)$$

$$p_{max2} = \frac{16 \cdot F \cdot \left(b - R - \frac{3}{4}H \right)}{3 \cdot l \cdot H^2} = \frac{16 \cdot 227 \cdot \left(20,22 - 17,15 - \frac{3}{4} \cdot 2,58 \right)}{3 \cdot 100 \cdot 2,58^2}$$
$$= 2,06 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

Ľavá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f_{(x1)} = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a pravá strana tlakom $p_2 = f_{(x2)} = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$. Na obr. 32. môžeme vidieť napätie v telese po úprave pera. Hodnoty pozdĺž krivky „I“, ktorá je zvýraznená červenou, sme zaznamenali do grafu.



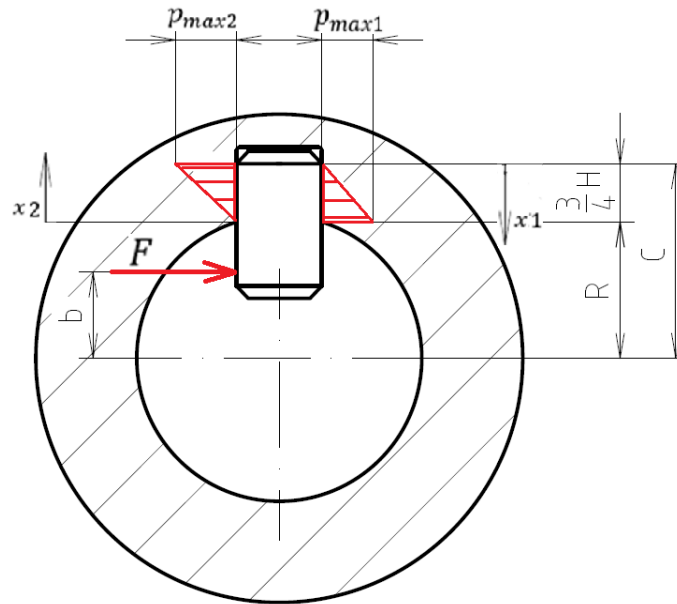
Obr. 32 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom so zrazenými hranami



Podľa grafu môžeme vidieť , že najviac zaťažené miesto hriadeľa je opäť v ľavom dolnom rohu kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{LD} = 8,32 N.mm^{-2}$. V pravom dolnom rohu dosahuje napätie $\sigma_{pD} = 2,61N.mm^{-2}$. V ľavom hornom rohu dosahuje napätie $\sigma_{LH} = 7,35 N.mm^{-2}$ a v pravom hornom $\sigma_{pH} = 0,13N.mm^{-2}$. Maximálna hodnota napätia je opäť vyššia ako pri pere bez úprav, preto aj túto variantu považujeme za nevhodnú.

Teraz môžeme prejsť k analýze náboja :

Stanovili sme si, že po úprave pera výška drážky , ktorá je v kontakte s perom je $3/4H$. Podľa obrázka obr.33 bude po úprave pera tlak na drážke náboja vyzerat takto:



Obr. 33 Rozloženie tlaku na drážke náboja spôsobené kontaktom s perom so zrazenými hranami

Ak je dĺžka náboja $l=100\text{mm}$, vnútorný priemer náboja $d=40\text{mm}$, výška drážky $H=3,04\text{ mm}$, vzdialenosť kde pero prichádza ku kontaktu s nábojom a stred náboja $R = 19,08\text{ mm}$, vzdialenosť konca pera od stred náboja $C= 21,36\text{ mm}$ a vzdialenosť $b=18,11\text{mm}$, nám určuje približne vzdialenosť výslednice síl na spolu zaberajúcom hriadeli, tak potom maximálny tlak p_{max1} a p_{max2} pri danom krútiacom momente $M_k = 4590\text{N/mm}$ na náboji vypočítame :

$$(66) M_k = F \cdot b \rightarrow F = \frac{M_k}{b}$$

$$F = \frac{4590}{18,11} = 253,45\text{N} \quad (79)$$

$$(67) F \cdot (C - b) = l \cdot \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_1 \right) \cdot x_1 dx_1 = l \cdot \frac{p_{max1}}{H} \cdot \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{4}H}$$

$$= l \cdot \frac{p_{max1}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^3}{3} \quad (80)$$

$$p_{max1} = \frac{16 \cdot F \cdot (C - b)}{3 \cdot l \cdot H} = \frac{16 \cdot 253,45 \cdot (21,36 - 18,11)}{3 \cdot 100 \cdot 3,04^2}$$

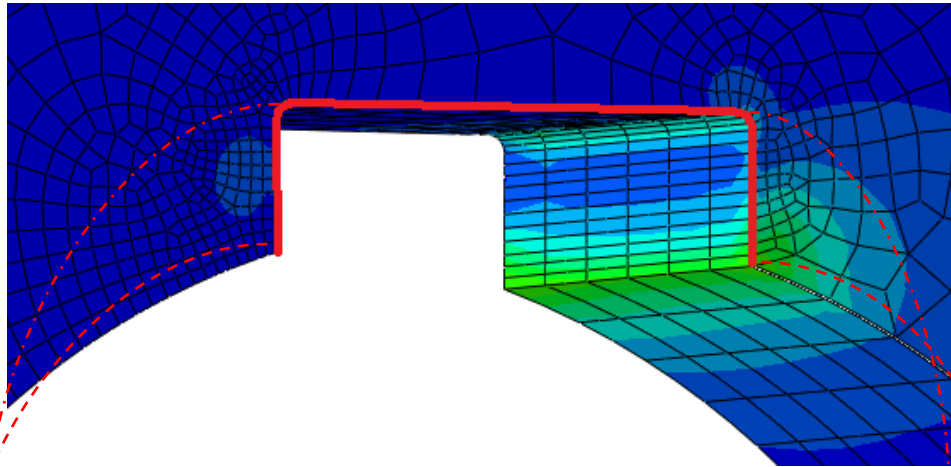
$$= 4,75 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$(68) F \cdot (R - b) = l \int_0^{\frac{3}{4}H} \left(\frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 = l \cdot \frac{p_{max2}}{H} \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{4}H}$$
$$= l \cdot \frac{p_{max2}}{\frac{3}{4}H} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}H \right)^2}{2}$$
(81)

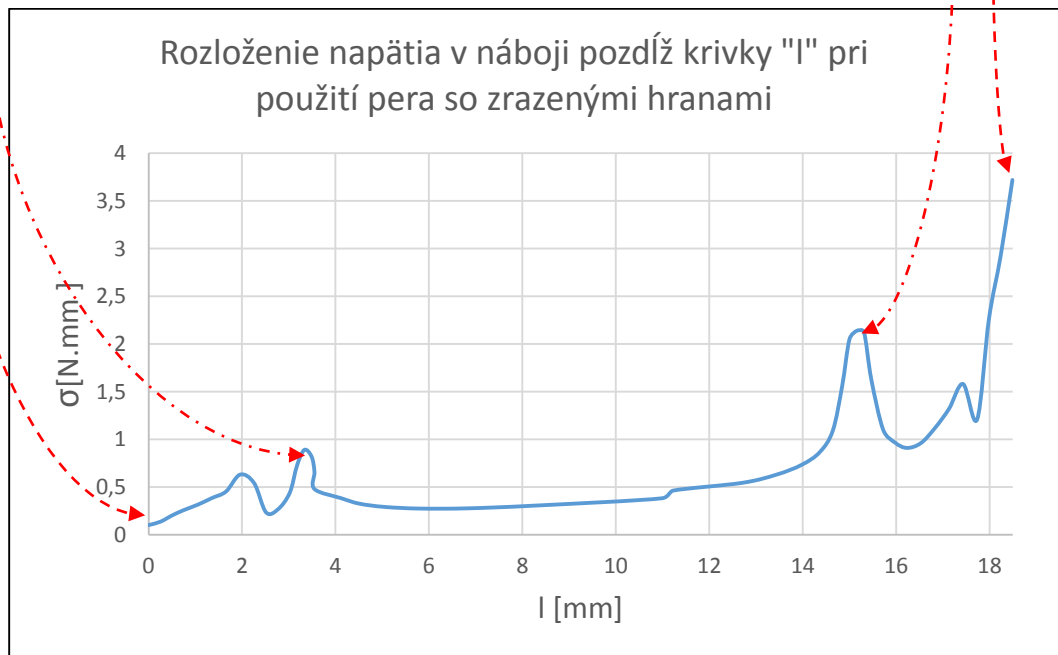
$$p_{max2} = \frac{16 \cdot F \cdot (R - b)}{3 \cdot l \cdot H^2} = \frac{16 \cdot 253,45 \cdot (19,08 - 18,11)}{3 \cdot 100 \cdot 3,04^2}$$
$$= 1,42 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

Pravá strana drážky je zaťažená tlakom $p_1 = f_{(x_1)} = \frac{p_{max1}}{H} \cdot x_1$ a ľavá strana tlakom $p_2 = f_{(x_2)} = \frac{p_{max2}}{H} \cdot x_2$. Tlaky p_1 a p_2 spoločne vytvoria Napätie v náboji ako je zobrazené na obr.34. Môžeme vidieť že najväčšie napätie vzniká opäť povrchu na telesa. Hodnoty napätia pozdĺž krivky „I“, ktorá je zvýraznená červenou sú zobrazené v grafe.

Na grafe vidíme, že najviac zaťažené miesto je pravý dolný roh kde napätie dosahuje $\sigma_{max} = \sigma_{PD} = 3,72 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$. v Pravom hornom rohu dosahuje napätie $\sigma_{PH} = 2,14 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$. V ľavom hornom rohu dosahuje napätie $\sigma_{LH} = 0,63 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ a v ľavom dolnom rohu dosahuje napätie zanedbateľné hodnoty. Aj v tomto prípade sú hodnoty maximálneho napätia väčšie ako pri použití pera bez úprav.



Obr. 34 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom so zrazenými hranami



4 Záver

Náplňou mojej bakalárskej práce bolo analyzovať rôzne varianty prenosu krútiaceho momentu z náboja na hriadeľ. Pre porovnanie som podľa teórie hrubo stenných nádob ako prvé určil napätie, ktoré vzniká pri nalisovaní náboja na hriadeľ, za účelom preniesť mnou zvolený krútiaci moment trením $M_k = 4590 \text{ Nmm}$. Maximálne redukované napätie, ktoré vznikalo v hriadeli, bolo $\sigma_T^H = 0,13 \text{ mm}^{-2}$ a maximálne redukované napätie, vznikajúce v náboji, bolo $\sigma_T^N = 0,34 \text{ N.mm}^{-2}$. V ďalších prípadoch som sa zaoberal analýzou napätia v náboji a hriadeli pri prenose rovnako veľkého krútiaceho momentu za využitia náhradného modelu hriadeľového spoja, ale tentokrát pomocou



pera. Vyskúšal som tri rôzne varianty a boli to pero bez úprav, pero s drážkou a pero so zrazenými hranami. Ako najvhodnejšia varianta pre prenos krútiaceho momentu perom sa ukázala prvá, a tou je pero bez úprav, ktorá najvhodnejšie vplývala na rozloženie napätia v hriadeli aj v náboji. Pri prenose krútiaceho momentu bolo v hriadeli maximálne redukované napätie $\sigma_p^H = 7,20 \text{ N.mm}^{-2}$ a v náboji bolo maximálne redukované napätie $\sigma_p^N = 2,88 \text{ N.mm}^{-2}$. Pri porovnávaní napätí vzniknutými prenosom trením a perom nemôžeme zabudnúť, že pri zaťažení náboja krútiacim momentom by sa u prenose trením maximálne hodnoty napätia mohli ešte podstatne zväčšiť, zatiaľ čo pri prenose perom sme dostali finálne hodnoty zaťaženia súčastí. Výrazne vyššie hodnoty napätia pri prenose krútiaceho momenta perom taktiež ovplyvňuje výška drážky a pri zmene jej veľkosti by sme mohli dosiahnuť priaznivejších výsledkov.



5 Použitá literatura

- [1] Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost I. skripta ČVUT v Praze, 2006
- [2] Michalec, J. a kolektiv: Pružnost a pevnost II. skripta ČVUT v Praze, 2006
- [3] Řežníček, J. : Pružnost u nás, Stránky podpory výuky pružnosti a pevnosti na FS ČVUT v Praze [online]. Dostupný z WWW:
<<http://pruznost.unas.cz/>>

6 Zoznam použitých označení

Symbol	Jednotka	Popis
σ_u	[N·mm ⁻²]	medza úmernosti
σ_k	[N·mm ⁻²]	medza sklzu
σ_t	[N·mm ⁻²]	Napätie tangenciálne
σ_r	[N·mm ⁻²]	Napätie radiálne
σ_o	[N·mm ⁻²]	Napätie osovú
F_r	[N]	Radiálna sila
F_t	[N]	Tangenciálna sila
ε_r	[-]	pomerné predĺženie radiálne
ε_t	[-]	pomerné predĺženie tangenciálne
E	MPa	modul pružnosti v ťahu
μ	[-]	Poissonovo číslo
F_o	[N]	Osovú sila
σ_D	[N·mm ⁻²]	Dovolené napätie
σ_{red}	[N·mm ⁻²]	Redukované napätie
p	Mpa	Tlak
M_k	N.mm	Krútiaci moment
F_T	[N]	Sila trecia
f	[-]	Súčiniteľ trenia
S	[mm ²]	Styková plocha
F	[N]	Sila



7 Zoznam obrázkov

Obr. 1 Nádoba otvorená	8
Obr. 2 Nádoba zatvorená	8
Obr. 3 Zložky napätia pôsobiace na element	9
Obr. 4 Rovnováha elementu.....	9
Obr. 5 Deformácie elementu	10
Obr. 6 Rovnováha elementu.....	13
Obr. 7 Rozloženie tečného a radiálneho napätia v stenách nádoby.....	13
Obr. 8 Pôsobenie tlakových síl na nádobu	14
Obr. 9 Radiálna deformácia nádoby	14
Obr. 10 Priebeh napätia v otvorenej nádobe s vnútorným pretlakom.....	16
Obr. 11 Priebeh napätia v zatvorenej nádobe s vnútorným pretlakom	16
Obr. 12 Priebeh napätia v otvorenej nádobe s vonkajším pretlakom	17
Obr. 13 Priebeh napätia v zatvorenej nádobe s vonkajším pretlakom.....	18
Obr. 14 Nádoba bez otvoru	19
Obr. 15 Priebeh napätia v nádobe s malým otvorom	20
Obr. 16 Rozloženie napätia v stenách dvoch na seba nalisovaných nádob.....	21
Obr. 17 Presah pri nalisovaní dvoch nádob na seba.....	21
Obr. 18 Nalisovaný spoj náboj na hriadeľ.....	23
Obr. 19 Polovičný pohľad na spoj hriadeľ, pero a náboj.....	24
Obr. 20 Pero bez úprav	25
Obr. 21 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa po kontakte s obyčajným perom	25
Obr. 22 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom bez úprav	27
Obr. 23 Rozloženie tlaku na drážke náboja po kontakte s obyčajným perom	28
Obr. 24 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom bez úprav.....	29
Obr. 25 Pero s drážkou	30
Obr. 26 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa spôsobené kontaktom s perom s drážkou	30
Obr. 27 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom s drážkou.....	32
Obr. 28 Rozloženie tlaku na drážke náboja spôsobené kontaktom s perom s drážkou	33
Obr. 29 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom s drážkou	34
Obr. 30 Pero so zrazenými hranami.....	35
Obr. 31 Rozloženie tlaku na drážke hriadeľa spôsobené kontaktom s perom so zrazenými hranami.....	35
Obr. 32 Rozloženie napätia v drážke hriadeľa po kontakte s perom so zrazenými hranami	37
Obr. 33 Rozloženie tlaku na drážke náboja spôsobené kontaktom s perom so zrazenými hranami.....	38
Obr. 34 Rozloženie napätia v drážke náboja po kontakte s perom so zrazenými hranami	40



•
•









