České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Katedra elektroenergetiky

Provozně - ekonomická optimalizace vodní elektrárny

Diplomová práce

Student: Martin Voříšek

Vedoucí: Ing. Petr Kujan, Ph.D.

Rok: 2015

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra elektroenergetiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Martin Voříšek**

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management
Obor: Elektroenergetika

Název tématu: **Provozně - ekonomická optimalizace vodní elektrárny**

Pokyny pro vypracování:

1) Popište a seznamte se s fyzikálním principem přeměny kinetické energie vody na elektrickou energii v soustrojí vodní elektrárny.
2) Parametry a charakteristiky zařízení uvažujte pro modelovou vodní elektrárnu se středně velkým instalovaným výkonem.
3) Formulujte optimalizační problém maximalizující ekonomický zisk z prodeje elektřiny s dodržením všech technických a provozních omezení. V případě, že je možné problém formulovat několika způsoby, tak je navzájem porovnejte.
4) Pomocí vhodného nástroje řešte tento optimalizační problém a diskutujte obdržené výsledky.

Seznam odborné literatury:

[1] W. S. Janna. Introduction to Fluid Mechanics. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2010. ISBN: 978-1420085242
[2] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, ISBN: 0521833787, 2009
[3] Hydro-Power Planning Optimization, Matthias Bucher, 2011, EEH - Power Systems Laboratory, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich

Vedoucí: Ing. Petr Kujan, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2015/2016

L.S.

Ing. Jan Švec Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 1. 4. 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickym pokynem o dodržování etickych principů při přípravě vysokoškolskych závěrečnych prací.

V Praze dne _____ _____

podpis

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval Ing. Petru Kujanovi, Ph.D. za cenné rady a trpělivost při vypracování diplomové práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá provozně ekonomickou optimalizací výroby vodní elektrárny. V práci jsou podrobně rozebrány podmínky výrobního procesu, podmínky výroby vodní elektrárny a optimalizační metody, kterými byl problém řešen. Řešení bere ohled na aktuální vývoj cen na trhu s elektřinou, kde se ceny v průběhu dne výrazně liší. Práce zahrnuje řešení optimalizačního problému metodou smíšeného celočíselného programování (Mixed-Integer linear programming) a pomocí metod nekonvexního kvadratického programování. Obě metody jsou v práci srovnány a jsou zohledněny jejich výhody a nevýhody s ohledem na přesnost výpočtu a jeho rychlost.

Klíčová slova

Optimalizace výroby, vodní elektrárna, Smíšené celočíselné lineární programování, kvadratické programování, nekonvexní programování, Matlab, Gurobi, Yalmip, Branch & Bound

Abstract

The goal of this master thesis is to solve an operational and economic optimization of the hydroelectric power plant production. In this work are analyzed in detail the physical conditions of the generating process and the conditions of production and hydroelectric power optimization methods which were used to solve this problem. The solution takes into account the current price on the wholesale electricity market, which is variable due to market conditions. Presented master thesis involves the problem optimization using method Mixed-Integer linear programming and using nonconvex quadratic programming. Both methods are compared and the work names their advantages and disadvantages with respect to the calculation accuracy and speed.

Keywords

Hydropower optimization, profit maximization, Mixed-Integer linear programming, quadratic programming, Matlab, Gurobi, Yalmip

Obsah

1 Úvod **13**

2 Cíl práce **14**

3 Zadání úlohy **16**

3.1 Seznam významných parametrů VE 16

3.2 Konkrétní parametry středně velké VE 16

3.2.1 Model tvaru nádrže 18

4 Provoz vodní elektrárny **19**

4.1 Výkon vodní elektrárny a její účinnost 20

4.1.1 Účinnost přeměny vodní energie 21

4.2 Matematický model optimalizační úlohy 22

4.3 Účelová funkce výroby VE 25

4.4 Celkový matematický model 26

4.5 Prodej elektřiny 27

4.6 Vodní přítoky 28

5 Úvod do optimalizačního problému VE **30**

5.1 Optimalizační metody využívané pro řešení plánování VE 31

5.2 Rozbor optimalizačních metod 33

5.2.1 Lineární programování 33

5.2.2 Smíšené celočíselné lineární programování 35

5.2.3 Kvadratické programování 36

5.2.4 Smíšené celočíselné kvadratické programování 37

5.2.5 Dynamické programování 37

5.2.6 Branch & Bound 38

6 Využité výpočetní programy 39

6.1 Gurobi 39

6.2 Yalmip 40

6.2.1 Optimalizační nástroje v Yalmipu 40

7 Specifika plánování výroby VE 41

8 Výsledky práce a doporučení vhodné optimalizační metody 44

8.1 Řešení lineárního optimalizačního problému 45

8.1.1 Lineární úloha - Denní plánování 46

8.1.2 Lineární úloha - Týdenní plánování 47

8.1.3 Lineární úloha - Měsíční plánování 49

8.1.4 Lineární úloha - Výsledky 50

8.2 Řešení kvadratického optimalizačního problému 51

8.2.1 Kvadratická úloha - Denní plánování 52

8.2.2 Kvadratická úloha - Týdenní plánování 53

8.2.3 Kvadratická úloha - Měsíční plánování 53

8.2.4 Kvadratická úloha - Výsledky 54

8.3 Srovnání výpočtu lineární a kvadratické úlohy 56

8.3.1 Srovnání výpočtových časů lineární a kvadratické úlohy 57

8.3.2 Srovnání hodnoty účelové funkce 59

8.4 Speciální případy uvažované elektrárny 59

8.4.1 Lineární úloha - 3 měsíce 60

8.4.2 Lineární úloha - 6 měsíců 61

8.4.3 Pokles hladiny v průběhu měsíce 61

8.4.4 VE s kolísavou výškou hladiny 63

9 Závěr **66**

10 Přílohy **69**

Seznam obrázků

1 Kaplanova turbína 17

2 Model tvaru nádrže 19

3 Průtok vody turbínou 20

4 Lineární úloha - Denní plánování 46

5 Lineární úloha - Týdenní plánování 48

6 Lineární úloha - Měsíční plánování 49

7 Kvadratická úloha - Denní plánování 52

8 Kvadratická úloha - Týdenní plánování 54

9 Kvadratická úloha - Měsíční plánování 55

10 Časová náročnost lineárně definované úlohy 57

11 Časová náročnost kvadraticky definované úlohy 58

12 Rozdíly v hodnotě účelové funkce 60

13 Pokles hladiny v průběhu měsíce - Lineární úloha 62

14 Pokles hladiny v průběhu měsíce - Kvadratická úloha 63

15 Vysoká variabilita ve spádu VE - Lineární úloha 64

16 Vysoká variabilita ve spádu VE - Kvadratická úloha 65

17 Graf závislosti výkonu na průtoku turbínou a výšce hladiny 69

18 Lineární úloha - 3 měsíce 70

19 Lineární úloha - 6 měsíců 71

Seznam tabulek

1 Lineární úloha 50

2 Kvadratická úloha 54

3 Srovnání lineární a kvadratické úlohy 56

4 Srovnání hodnoty účelové funkce 59

5 Srovnání hodnoty účelové funkce 64

Seznam symbolů

Seznam nejdůležitějších symbolů používaných v práci:

q_t ... průtok turbínou v čase t

s_t ... průtok přepadem v čase t

h_t ... výška spádu na turbínu v čase t

u_t ... binární proměnná definující stav turbíny v čase t (turbína je v chodu nebo v odstávce)

h_{min} ... minimální výška hladiny v nádrži

h_{max} ... maximální výška hladiny v nádrži

q_{min} ... minimální průtok turbínou

q_{max} ... maximální průtok turbínou

q_z ... maximální změna průtoku vody turbínou mezi hodinami

a ... konstanta respektující výrobu vodní turbíny

b ... výtokový součinitel

v ... objem nádrže

Seznam zkratek

LP ... Lineární programování (Linear programming)

QP ... Kvadratické programování (Quadratic programming)

MILP ... Smíšené celočíselné lineární programování (Mixed-Integer linear programming)

MIQP ... Smíšené celočíselné kvadratické programování (Mixed-Integer quadratic programming)

MIQCP ... Smíšené celočíselné kvadratické programování s kvadratickými omezeními (Mixed Integer quadratic constrained programming)

VE ... Vodní elektrárna

ČHMÚ ... Český hydrometeorologický ústav

ERÚ ... Energetický regulační úřad

1 Úvod

Vodní elektrárny jsou dnes jedním z vysoce ceněných zdrojů v energetickém mixu každého státu. Díky současnému stavu energetiky, který upřednostňuje obnovitelné zdroje s proměnlivým výkonem, jejich význam i nadále roste.

Vodní elektrárny mají řadu výhod. Jejich výroba je relativně dobře plánovatelná, protože záleží pouze na schopnosti efektivně nakládat s obsahem vodní nádrže. Jejich reakce na aktuální potřeby elektrizační soustavy je velice rychlá, proto mohou vyrovnávat nedostatky výkonu v soustavě způsobené proměnlivými obnovitelnými zdroji, jako jsou solární a větrné elektrárny.

Provozní náklady výroby VE jsou nízké, vyžadují minimální obsluhu a nízká je i jejich vlastní spotřeba elektřiny, která se v ČR dle statistiky Energetického regulačního úřadu (ERÚ) pohybuje pod jedním procentem z množství vyrobené elektřiny viz. [4].

Nezanedbatelnou výhodou VE je fakt, že spadají do kategorie obnovitelných zdrojů energie a jejich výroba je zcela bez emisí. Vzhledem k životnímu prostředí je ale nutné poukázat na fakt, že se jedná o obrovský zásah do přírodní krajiny. Zejména v případě velkých nádrží, kdy přehrada vznikla zatopením údolí řeky.

Stále jsou jednoznačným protikladem ke konvenčním výrobním zdrojům, mezi které lze zařadit především uhelné elektrárny.

Hlavním důvodem, proč nejsou v současné době v ČR budovány vodní elektrárny větších výkonů, je již zmiňovaný zásah do přírody a nedostatek vhodných oblastí pro vybudování VE.

Naproti tomu existují evropské státy, které jsou schopny většinu své elektřiny vyrábět ve vodních elektrárnách. Mezi takové země můžeme zařadit zejména Norsko a Rakousko. Ze světových je možné zmínit Kostariku, která díky vodním elektrárnám a příhodným klimatickým podmínkám vyráběla elektřinu prvních 75 dní roku 2015 pouze z obnovitelných zdrojů, zejména z vodních elektráren, jak je uvedeno v [5].

Stále častěji se ale vyskytují malé vodní elektrárny, které jsou zákonem podporovány a je na ně vyplácena podpora na obnovitelné zdroje energie. Malé vodní elektrárny se

již dnes dají označit za směr, který má v oblasti energetiky budoucnost a nasvědčuje tomu i podpora decentrální výroby elektřiny v ČR, která je zakotvena v [15].

Z výše uvedených důvodů je zřejmé, že vodní elektrárny mají své místo v energetice stále jisté. S vyšší konkurencí mezi výrobci elektřiny bude sílit motivace k maximalizaci zisku z výroby a toho lze dosáhnout jeho optimalizací resp. maximalizací.

2 Cíl práce

Jak již bylo řečeno, výroba vodních elektráren je ve srovnání s jinými obnovitelnými zdroji relativně dobře plánovatelná. Přesto vyžaduje určité úsilí a správnou volbu mechanismu, který výrobu naplánuje. Při správném plánování výroby vodní elektrárna přispěje jak ke stabilizaci výkonů v síti, tak k ekonomickému zisku provozovatele vodní elektrárny. Zájem na správně plánované výrobě je tedy oboustranně zřejmý.

Běžná obsluha vodní elektrárny bez sofistikovaného rozhodovacího algoritmu by mohla vést nejen k nízkým výnosům vodního díla, ale i k případnému nesplnění závazných environmentálních omezení a nasmlouvaných kontraktů na dodávku elektřiny. Kromě toho je při výrobě nutné dodržovat i technická omezení turbín a jejich kapacitu průtoku. Obdobné podmínky se vztahují i na odtok vody přepadem, tedy mimo turbínu, který slouží pro odvod vody při zvláštních situacích, kdy jsou přítoky vyšší než je možný odtok přes turbíny. Složitost řešení je tedy zřejmá.

Pro řešení této optimalizační úlohy je v odborné literatuře doporučeno několik metod. V této práci budou jednotlivé metody popsány a porovnány.

Účelem této práce je v souladu s výše uvedeným najít ideální rozhodovací postup plánování výroby vodní elektrárny středního výkonu. Při řešení jsou použity známé nebo predikované ceny elektřiny na trhu s elektřinou pro období, na které je optimalizace plánována. Predikovány jsou i přítoky do vodní elektrárny a to díky tomu, že předpokládáme umístění VE do kaskády. V této predikci jsou zahrnuty i hodnoty přirozených přítoků, které plynou z hydrologických podmínek v daném regionu, a které byly pro účely této práce získány z průměrných hodnot Českého hydrometeorologického ústavu. V reálném provozu tyto hodnoty musí být vhodně predikovány.

Tato úloha je značně komplexní vzhledem k tomu, že existuje řada omezení, která vychází jak z provozních vlastností elektrárny, tak z environmentálních požadavků. Tato omezení musí být splněna v každém okamžiku provozu VE, což do úlohy zavádí velké množství proměnných.

Vzhledem ke složitosti a náročnosti optimalizačního algoritmu, do kterého při delším plánování vstupují stovky až tisíce proměnných, je nutné se při výběru optimalizační metody orientovat i podle doby, která je pro výpočet potřebná. To se týká především plánování na středně dlouhé a dlouhé období. V případě krátkodobého plánovaní je možné využít výpočetně náročnějších a přesnějších metod. Pro plánování střednědobé nebo dlouhodobé je potřeba použít jednodušších a méně přesných metod a to proto, aby byl výsledek spočten v rozumném čase.

S ohledem na důležitost výpočetní náročnosti problému se část práce věnuje i výběru vhodného výpočetního programu, který je pro výpočet použit. V dnešní době je totiž dostupná celá řada optimalizačních nástrojů a některé nemusí být pro tento typ úlohy vhodné.

Výsledkem práce je určení metody, která v přijatelném čase dokáže určit výhodný a dostatečně přesný plán výroby při predikovaných cenách elektřiny na trhu s elektřinou a při predikovaných přítocích do nádrže, které jsou vypočtené díky uspořádání vodní elektrárny do přehradní kaskády a vhodné predikci hydrologických podmínek v dané lokalitě.

Pro jednotlivé horizonty mohou být vhodné různé optimalizační metody. S delším časovým horizontem se náročnost úlohy a její výpočetní doba zvyšuje. Některé metody proto mohou vyhovovat v krátkém období, ale nikoliv v dlouhém období. V tomto ohledu je důležitá zejména přesnost celého výpočtu a rychlost dosažení výsledku.

3 Zadání úlohy

Hlavním objektem této práce bude vodní elektrárna středně velkého výkonu. Dle dostupných internetových dat je zde popsán a vytvořen matematický model fiktivní vodní elektrárny, která bude podrobena optimalizaci. Takto vytvořený matematický model je použitelný na jakoukoliv jinou vodní elektrárnu středního výkonu.

V této části práce jsou rozebrány klíčové hodnoty, které vodní dílo charakterizují.

3.1 Seznam významných parametrů VE

Pro jakoukoliv vodní elektrárnu a její matematický model jsou důležité zejména následující parametry:

Instalovaný výkon ... Celkový instalovaný výkon $[MW]$

Spád přehrady ... Rozdíl mezi spodní a horní hladinou $[m]$

Objem přehrady ... Celkový objem nádrže $[m^3]$

Limit výšky hladiny ... Maximální a minimální výška hladiny $[h]$

Limity objemového průtoku turbínou ... Maximální a minimální průtok $[m^3/s]$

Množství přítoků ... Hydrologické přítoky a přítoky z nadřazené VE $[m^3/s]$

Tyto parametry patří mezi nejdůležitější a budou v další části podrobně rozebrány. Budou zde také definovány základní parametry úlohy, ze kterých budeme vycházet při výpočtu optimálního plánu provozu.

3.2 Konkrétní parametry středně velké VE

Pro účely této práce je modelována fiktivní středně velká vodní elektrárna, která je sestavena z veřejně dostupných dat takovým způsobem, aby odpovídala reálným parametrům VE. Díky tomu jsou výsledky práce relativně přesné a ukazují reálné možnosti optimalizace, včetně reálných výsledků.

Vodní elektrárna na přehradě, kterou v této práci uvažujeme, využívá k výrobě elektrické energie dvě Kaplanovy turbíny. Základním údajem dle předchozí části je instalovaný výkon turbíny, který uvažujeme 36 MW při maximálním průtoku a střední hladině.

Obrázek 1: Kaplanova turbína

V závislosti na výšce hladiny se výkon pohybuje v rozmezích od 36 MWe do 38 MWe při maximálním průtoku turbínou 150 m^3/s. Při minimální hodnotě průtoku a minimální výšce hladiny klesne výkon turbíny až na 11 MW. V kapitole 4.1 jsou rozebrány důvody, proč je výkon na výšce hladiny přehrady závislý. Tyto údaje jsou odečteny z přílohy A.

Průměrný spád na turbínu je 24,1 m. Při provozu je uvažován pohyb výšky hladiny o cca 1,7 m (pro další modelování uvažujeme výšku hladiny v rozmezí 22,35 m a 24,95 m).

Klíčovým údajem o vodní elektrárně je její pravidelný střední přítok a maximální možný průtok turbínou, resp. odtok vody z nádrže přepadem mimo turbínu. VE modelovaná v této práci má průměrný přítok 35,6 m^3/s. Vzhledem k tomu, že maximální odtok je 150 m^3/s, je patrné, že vodní elektrárna musí vodu propouštět v optimální dobu, aby dosáhla maximálního výnosu. Přesný výpočet vodních přítoků do nádrže je

uveden v kapitole 4.6.

Dalším důležitým parametrem středně velké VE je maximální průtok řeky, na které se vodní elektrárna nachází. Ten může být v mimořádných situacích až v tisících m^3/s, přičemž maximální průtok přes jednu turbínu je pro účely této práce pouze 150 m^3/s. Kvůli tomu je nutné do výpočtu zahrnout odtok vody přepadem, aby se zamezilo možnému přeplnění nádrže. Takový případ může nastat například v jarních měsících nebo v případě povodňových situací. Tento stav je samozřejmě nežádoucí, a proto je nutné výrobu dobře naplánovat a těmto stavům předcházet.

3.2.1 Model tvaru nádrže

Pro správnou konstrukci matematického modelu je nutné vhodně definovat tvar nádrže. To je důležité zejména pro zavedení vztahu mezi výškou hladiny, množstvím vody v nádrži, přítoky do nádrže a odtokem z ní.

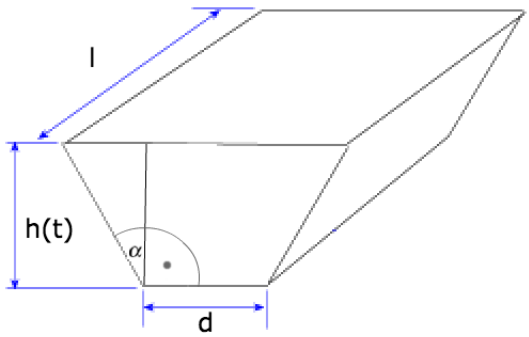
Určit přesný model nádrže je velice obtížné, a proto se v modelech používá některých zjednodušení. Výšku hladiny je možné ve vztahu k objemu po částech linearizovat, případně navrhnout přibližný vlastní tvar nádrže a vypočítat její objem. Tato část úlohy bude vždy zdrojem určitých nepřesností.

V tomto konkrétním případě bylo nutné navrhnout přibližný tvar nádrže. V této úloze byl jako vhodný zjednodušený tvar nádrže zvoleno koryto s lichoběžníkovou přední stranou. Velikosti stran byly vhodně zvoleny pro středně velkou vodní elektrárnu.

Objem nádrže pro středně velkou VE se pohybuje v nižších desítkách mil. m^3. Konkrétně pro tuto úlohu je uvažován objem $18,15$ mil. m^3 při celkové délce nádrže $4000m$.

Na obrázku 2 je jednoduše načrtnut uvažovaný tvar nádrže.

Při formulaci rovnic pro výpočet objemu nádrže práce vychází z toho, že výška je proměnná v závislosti na průtoku turbínou a přítocích. Proto byla část horní strany hladiny nahrazena výrazem $tan(\alpha)h_t$ (pozn. celý vzorec pro výpočet objemu nádrže uvádí rovnice (1)). Díky tomu je v rovnici proměnná pouze výška hladiny, což má pozitivní



Obrázek 2: Model tvaru nádrže

vliv na počet podmínek a výpočtový čas. Nevýhodou je naopak fakt, že v důsledku této úpravy vstupuje do podmínek kvadratická proměnná. Ta je pro zjednodušenou variantu této úlohy následně linearizována pomocí Taylorova rozvoje.

Výsledná funkce pro výpočet objemu nádrže vodní elektrárny je následující:

$$v = h_t^2 tan(\alpha) l + dlh_t \tag{1}$$

Při maximální výšce hladiny nádrže je celkový objem 19,7 mil. m^3, naopak při nejnižší hladině je objem roven 16,6 mil. m^3.

4 Provoz vodní elektrárny

Při provozu vodní elektrárny je hlavní motivací vlastníka generovat elektřinu, kterou následně prodá na trhu s elektřinou za co nejvyšší ceny. Specifikem krátkodobého trhu s elektřinou je to, že v každou hodinu je cena jiná a liší se podle aktuální situace dodávek a odběrů elektřiny.

Pokud by ceny elektřiny byly stálé, postrádala by optimalizace hlubší smysl. Mezi cenami elektřiny mohou být velké rozdíly, a proto je vhodné optimalizovat výrobu a distribuovat ji do vhodných časových úseků. Zejména se to vyplatí v případě, kdy je obvyklý vtok do přehrady nižší, než možný odtok turbínami. To je případ vodní elektrárny uvažované v této práci, kde je průměrný vtok téměř čtvrtinový oproti možnému

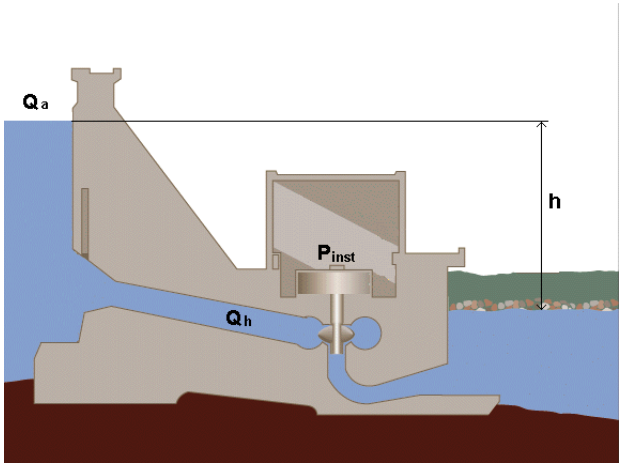
průtoku turbínami.

Při reálném provozu však není možné hledět pouze na zisk a maximální výrobu, protože VE je svázána řadou provozních a environmentálních podmínek. To vše je zahrnuto v následujících částech, kde je vytvořen podrobný matematický model úlohy.

4.1 Výkon vodní elektrárny a její účinnost

Vodní elektrárna využívá přeměny polohové energie vody k výrobě elektřiny. Obvyklým provedením je, že vodní elektrárna má vybudovanou nádrž, ve které se po omezenou dobu voda akumuluje. Rozdílem mezi spodní a horní hladinou vzniká spád, který je výškovým rozdílem hladin ve vtokové části nad vodní elektrárnou a v odpadu pod ní.

Pří výrobě elektrické energie ve vodní elektrárně je využíván hydroenergetický potenciál vody, která je umístěná v nádrži. Pomocí přivaděče je voda přes česle dopravována do turbíny. Na konci přivaděče se mění polohová energie vody na energii tlakovou. Ta se v rozváděcím zařízení turbíny mění na kinetickou, která se pomocí oběžného kola změní v mechanickou práci. Energie vody se tímto způsobem využije pro výrobu elektrické energie v generátoru.



Obrázek 3: Průtok vody turbínou

Základní rovnice pro výkon turbíny při zanedbání účinnosti, která je probrána v následující části, je vyjádřena pomocí rozdílu tlakových energií a časového průtoku následovně:

$$P = \triangle pQ = \rho ghQ \quad [W] \tag{2}$$

$\triangle p \ldots$ tlakový spád na oběžném kole turbíny $[Pa]$

$\rho \ldots$ hustota vody $[kg/m^3]$

$h \ldots$ spád $[m]$

$g \ldots$ tíhové zrychlení $[m/s^2]$

$Q \ldots$ průtok turbínou $[m^3/s]$

Z této rovnice se bude dále vycházet při formulaci optimalizační úlohy a účelové funkce úlohy. Již nyní je vidět, že úloha bude mít v účelové funkci dvě proměnné (výšku hladiny a průtok turbínou). Hlavním problém, který při formulaci této úlohy nastává, je bilineární člen v rovnici pro výkon. Ten vzniká násobením objemového průtoku turbínou a výškou hladiny.

Více o bilinearitě účelové funkce této úlohy bude řečeno v části věnující se kvadratickému programování a v kapitole 7.

4.1.1 Účinnost přeměny vodní energie

Celý proces přeměny energie není pochopitelně bezeztrátový. Ztráty, které mají vliv na celkovou účinnost lze rozdělit na dvě skupiny:

- Účinnost vodní turbíny
- Účinnost hydroalternátoru

Účinnost vodní turbíny bývá zpravidla poměrně vysoká. Pohybuje se v rozmezí 0,8 - 0,96 a je ovlivněna především velikostí turbíny, jejím typem a dalšími faktory. Pro účely této práce je uvažována účinnost vodní turbíny o velikosti 0,9, která je typická pro Kaplanovu turbínu.

Dalším zdrojem ztrát, který ovlivňuje celkovou účinnost přeměny energie, je účinnost hydroaleternátoru. Hodnoty účinností nejsou pro námi uvažovanou vodní elektrárnu veřejně dostupné. Účinnost hydroalternátoru se pohybuje zpravidla mezi hodnotou 0,95 a 0,98. Pro účely této práce jsme zvolili hodnotu 0,96.

4.2 Matematický model optimalizační úlohy

Tato část práce je klíčová pro definici celé optimalizační úlohy a takto bude předávána v potřebné formě optimalizačním nástrojům (solverům). Zde jsou uvedeny veškeré závislosti, které vyplývají z charakteru úlohy, jak jsme ji popsali v předchozí části textu.

Při formulaci úlohy je nutné definovat sadu podmínek, které musí provozovatel reálné VE dodržovat. Mezní hodnoty již byly jmenovány v popisu vodního díla. Tyto podmínky a maximalizovaná účelová funkce jsou součástí následujícího matematického modelu.

Stěžejní je pro matematický model určit časový horizont, na kterém se plánování výroby bude optimalizovat. Uvažujeme tedy VE, pro kterou plánujeme výrobu na horizont dělený na časové úseky t = 1,2.....T. Dále zavádíme následující proměnné:

q_t ... průtok turbínou v čase t

s_t ... průtok přepadem v čase t

h_t ... výška spádu na turbínu v čase t

uc_t ... binární proměnná definující nulový průtok turbínou v čase t

Z modelu koryta nádrže, který byl uveden výše v části 3.2.1 vyplývá, že závislost objemu na výšce hladiny je kvadratickou konvexní funkcí. Obvykle mají nádrže velice nízký sklon, díky kterému se přítoky do nádrže na výšce hladiny podepisují velice pomalu, což platí zejména u velkých vodních elektráren. U středně velké elektrárny tato podmínka nemusí být splněna.

V každém časovém okamžiku t se mění objem nádrže resp. výška hladiny. Pro správnou kontrolu výšky hladiny je potřeba v každém časovém úseku znát hodnotu

objemu nádrže. Zde práce vychází z výpočtu objemu pro modelový tvar uvedený v části 3.2.1.

$$v_t = v_{t-1} + v_{in,t} - v_{out,t} - v_{s,t} \tag{3}$$

kde:

$v_t \ldots$ objem vody v nádrži v čase t

$v_{in,t} \ldots$ objem vody, který v čase t přitekl do nádrže

$v_{out,t} \ldots$ objem vody, který v čase t odtekl z nádrže

$v_{s,t} \ldots$ objem vody, který v čase t odtekl z nádrže přepadem

Do matematického modelu musí být zahrnuty podmínky technického a environmentálního charakteru. Průtoky, výšky hladiny apod. mají vždy spodní a horní hranici, která nesmí být při běžném provozu překročena.

Výška hladiny je v každém okamžiku t uvažovaného období vázána maximální a minimální hodnotou. Matematicky je možné zapsat omezení pomocí této sady podmínek:

$$\begin{gathered} h_{min,1} \leq h_1 \leq h_{max,1}, \\ \vdots \\ h_{min,t} \leq h_t \leq h_{max,t}. \end{gathered} \tag{4}$$

Další podmínkou je maximální a minimální možný průtok turbínou. Především na průtoku závisí hodnota účelové funkce, tudíž je důležité pevně zafixovat horní hranici průtoku. Omezení je dáno technickou konstrukcí VE a je zavedeno následujícím způsobem:

$$\begin{gathered} q_{min} \leq q_1 \leq q_{max}, \\ \vdots \\ q_{min} \leq q_t \leq q_{max}. \end{gathered} \tag{5}$$

Obdobně platí maximální a minimální průtok pro odvod vody mimo turbínu, který slouží především v mimořádných situacích, kdy jsou přítoky vyšší než je možný odtok. Dá se předpokládat, že bude využíván zejména v jarních měsících, nebo při vytrvalých deštích. Obdobně jako turbína i odtok mimo ni je dimenzován pouze na jisté množství

vody. Podmínky průtoku jsou matematicky zapsány následovně.

$$\begin{gathered} s_{min} \leq s_1 \leq s_{max}, \\ \vdots \\ s_{min} \leq s_t \leq s_{max}. \end{gathered} \tag{6}$$

Horní hranice průtoku přepadem je zařazena pouze formálně. Z logiky problému může být libovolně vysoká a je tímto způsobem definována i v optimalizační úloze.

Do matematického modelu vodní elektrárny o středním velikosti je zařazeno i omezení, které znemožňuje změnit mezi hodinami průtok o více než určité množství. To vychází z předpokladu, že veškeré změny průtoku neprobíhají skokově, ale mají určitou setrvačnost. Matematická formulace je následující:

$$|q_t - q_{t-1}| \leq q_z. \tag{7}$$

Poslední podmínkou, která definuje úlohu optimalizace vodní elektrárny je rovnice, která v sobě váže změnu výšky hladiny v závislosti na přítocích a odtocích. Stejně jako v minulé rovnici musí být splněna v každém časovém úseku t. Vychází z rovnice (1) a (3).

$$\begin{gathered} tan(\alpha)l(h_t^2 - h_0^2) + dl(h_t - h_0) = 3600(q_{in,t} - q_{out,t} - q_{s,t}), \\ \vdots \\ tan(\alpha)l(h_t^2 - h_{t-1}^2) + dl(h_t - h_{t-1}) = 3600(q_{in,t} - q_{out,t} - q_{s,t}). \end{gathered} \tag{8}$$

kde α je sklon klesání nádrže, h_t je výška hladiny v čase t, d je šířka hladiny, l je délka hladiny, $q_{in,t}$ je přítok v čase t, $q_{out,t}$ je průtok turbínou a $q_{s,t}$ je odtok přepadem v m^3/s. Hodnoty d a l vychází z části 3.2.1. Konstanta h_0 je výška hladiny na začátku optimalizace, tzn. v čase t_0.

Kompletní matematický model včetně účelové funkce je uveden v části 4.4.

4.3 Účelová funkce výroby VE

Účelem této práce je optimalizovat výrobu vodní elektrárny a maximalizovat její zisky. Zisk elektrárny vychází zejména z rovnice pro výpočet výkonu vodní turbíny, který je násoben cenou za MWe. Výnos v každé hodině je tedy následující:

$$R = C_t q_t h_t \alpha \tag{9}$$

kde α je konstanta zahrnující zejména účinnost turbíny, gravitační konstantu a převod jednotek na MW. C_t je cena elektřiny v příslušné hodině, q_t je průtok turbínou a h_t spád v čase t.

Z hlediska optimalizace je zajímavý zejména celkový výnos v určitém období T, který je vyjádřen:

$$\sum_{t=1}^{T} C_t q_t h_t \alpha \tag{10}$$

kde proměnné mají stejný význam jako v rovnici 9.

Účelová funkce optimalizační úlohy vychází především z rovnice pro výpočet elektrického výkonu instalované turbíny, kterému se text této práce již věnoval v části 4.1, a z vývoje cen v čase. Více se cenám elektřiny věnuje kapitola 4.5.

4.4 Celkový matematický model

Celkový model je složen ze zadaných provozních podmínek a účelové funkce, podle které se určují výsledné zisky a ty jsou předmětem optimalizace. Úlohu popsanou výše je možné zapsat ve zkráceném znění následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
max \sum_{t=1}^{T} C_t h_t (q_{out,t} a + b) \\
h_{min,t} \leq h_t \leq h_{max,t} \\
uc_t q_{min,t} \leq q_t \leq uc_t q_{max,t} \\
s_{min,t} \leq s_t \leq s_{max,t} \\
|q_t - q_{t-1}| \leq q_z \\
v_t - v_{t-1} = v_{in,t} - v_{out,t} - v_{s,t} \\
v_t = tg(\alpha) h_t^2 l + dl h_t
\end{aligned}
$$

kde

$C_t \ldots$ vektor cen elektřiny

$h_t \ldots$ výška hladiny v čase t

$q_{out,t} \ldots$ průtok turbínou v čase t

$a \ldots$ souhrnná konstanta turbíny

$b \ldots$ výtokový součinitel

$h_{min,t} \ldots$ minimální výška hladiny v čase t

$h_{max,t} \ldots$ maximální výška hladiny v čase t

$s_{min,t} \ldots$ minimální průtok přepadem

$s_{max,t} \ldots$ maximální průtok přepadem

$s_t \ldots$ průtok přepadem v čase t

$uc_t \ldots$ binární proměnná definující nenulový minimální průtok turbínou

$q_{min,t} \ldots$ minimální průtok turbínou t

$q_{max,t} \ldots$ maximální průtok turbínou t

$q_z \ldots$ maximální hodinová změna průtoku vody turbínou

$v_t \ldots$ objem vody v nádrži v čase t

$v_{in,t} \ldots$ objem vody, který v čase t přitekl do nádrže

$v_{out,t}$ ... objem vody, který v čase t odtekl z nádrže

$v_{s,t}$ ... objem vody, který v čase t odtekl z nádrže přepadem

4.5 Prodej elektřiny

Způsob, jakým je elektřina z VE prodávána, je určující pro výsledný zisk elektrárny. Díky specifikům trhu s elektřinou je mnoho prostoru k optimalizaci prodeje vyrobené elektřiny. Pomocí volby správného produktu je možné zisky efektivně zvýšit.

Díky správné predikci cen elektřiny, které jsou vstupem do matematického modelu, je možné výrobu naplánovat takovým způsobem, aby byly maximalizovány zisky a zároveň dodrženy veškeré smluvní závazky z dlouhodobých kontraktů.

Základním rozdělením v produktech je podle času dodávky elektřiny na baseload a peakload. Produktem typu baseload je pokryt celý den, zatímco v případě produktu peakload se vztahuje dodávka na období mezi 8:00 a 20:00.

Obchodování s elektřinou je možné realizovat na následujících platformách

- Power Exchange Central Europe (PXE)
- Organizovany krátkodoby trh
- Bilaterální trh

Na PXE se obchoduje s elektřinou s místem dodání v České republice, Slovensku nebo Maďarsku. Jsou zde přesně definované typy kontraktů, které jsou následující:

- Baseload roční
- Baseload čtvrtletní
- Baseload měsíční
- Peakload roční
- Peakload čtvrtletní
- Peakload měsíční

Například při volbě produktu "Peakload - měsíc" je povinen výrobce dodávat elektřinu v období od 8 do 20 hodin o sjednaném výkonu po celý kalendářní měsíc.

Druhou možností je využití organizovaného krátkodobého trhu, který je organizován společností OTE a.s. Tento trh je dále složen z několika dílčích trhů: z blokového, denního a vnitrodenního trhu.

Poslední možností je bilaterální trh, který je ze všech trhů nejméně vázaný na typy kontraktů, jejich trvání apod. Obsah kontraktu uzavřeného na bilaterálním trhu je ponechán na vůli stran. Nejsou zde limity na množství, které se obchoduje, ani na minimální délku období. Rizikovým faktorem zde zůstává fakt, že pro specificky definovaný kontrakt nemusí být nalezena obchodní protistrana.

Jak již bylo řečeno výše, důležitým bodem je správné ocenění výrobního diagramu uvažované vodní elektrárny. Při zohlednění všech variant prodeje elektřiny je následně možné výrobu naplánovat efektivně a zvolit správnou kombinaci dlouhodobých a krátkodobých kontraktů resp. prodejů a dokupů na denním trhu.

V této práci se vychází z vývoje reálných cen elektřiny v roce 2014. V rámci optimalizace je však možné zadat libovolné hodnoty, které vyplynou z ocenění výrobního diagramu. Ocenění výrobního diagramu je složitý proces, který přesahuje rozsah této práce a je blíže popsáno v [6].

4.6 Vodní přítoky

Další predikovanou sadou hodnot, která do úlohy vstupuje, jsou přítoky vody do nádrže vodní elektrárny. Na reálných přítocích je závislá rychlost doplňování vody v nádrži a tudíž možnost využívat hydroenergetický potenciál vody k výrobě elektrické energie.

V případě, že uvažujeme elektrárnu umístěnou do přehradní kaskády, jsou přítoky ve velké míře závislé na nadřazené přehradě.

V úloze je možné definovat přítoky dvojího druhu:

- Přítoky propouštěné nadřazenou elektrárnou v kaskádě
- Přirozené hydrologické přítoky

Při formulaci úlohy se vychází ze dvou podstatných zdrojů dat. Prvním zdrojem dat je průměrný roční průtok řeky v místě vodní elektrárny. V rámci této práce uvažujeme průměrný průtok 35,6 m^3/s.

Druhým zdrojem jsou data získaná z Českého hydrometeorologického ústavu (dále také ČHMÚ). Zde byla využita historická data o průměrných měsíčních srážkách. Na základě těchto průměrných dat byly vyhodnoceny srážkově nadprůměrné a podprůměrné měsíce. Přítoky v jednotlivých dnech byly v rozumných mezích náhodně generovány a podle uvažovaného měsíce poměrně zvýšeny nebo sníženy na základě dat z ČHMÚ.

Procentní změny byly aplikovány na jednotlivé měsíce, ve kterých optimalizace probíhala. Výsledkem je situace, kdy je každý měsíc jinak bohatý na srážky.

5 Úvod do optimalizačního problému VE

Úkolem této diplomové práce je najít optimální plán provozu vodní elektrárny při uvažování závislosti výkonu turbíny na spádu VE. Výška spádu má vliv na výkon elektrárny a nejvíce se projevuje u elektráren s menší nádrží, kde se vypouštěné množství na výšce viditelně projevuje. Proto je u menších elektráren nutné proměnnou výšku spádu zahrnout do optimalizační úlohy.

Optimální provoz a management zásoby vody v nádrži bez ovlivnění budoucích zisků je pro VE obrovskou výhodou při střetu s konkurencí na trhu. Plánování výroby je podkladem pro zadávání nabídek na trhu s elektřinou.

Při uvažování krátkodobého plánování se jedná o problém trvající maximálně sedm dní (střednědobé je v řádu několika měsíců, dlouhodobé na rok a více). Vhodné je dělit časový úsek po jednotlivých hodinách, protože cena elektřiny je taktéž určena pro jednu hodinu. Jeden z nejdůležitějších úseků plánovaní je denní plánování, které je jednou z částí práce.

Jelikož do matematického modelu optimalizační úlohy vstupují budoucí hodnoty, musí být zohledněn fakt, že se mohou v čase měnit. V případě krátkodobého plánovaní (tj. 7denní provoz) se považují hodnoty za stálé a úloha je považována za deterministickou. V případě střednědobého a dlouhodobého plánování je pro přesnost vhodné uvažovat možnou změnu parametrů, zejména ceny elektřiny a přítoky. V takovém případě se užije vhodná předpověď pomocí různých scénářů vývoje.

Nejčastěji se jedná o scénář vysoký, nízký a střední, který je nejpravděpodobnější. V této práci je použit pouze scénář střední, který vyhovuje účelům práce v tom smyslu, že dokáže porovnat rozdíly mezi optimalizačními metodami. Při uvažování jiného scénáře je jediným rozdílem jiná sada vstupních dat, na kterých je optimalizace realizována.

Z důvodů uvedených v minulém odstavci vycházíme v této úloze z deterministického zadání a uvažujeme střední scénář vývoje i pro střednědobé a dlouhodobé plánování.

5.1 Optimalizační metody využívané pro řešení plánování VE

Pro účely optimalizace výroby vodních elektráren se jako jedna z prvních využívala metoda dynamického programování (DP). DP má tu výhodu, že je díky ní možné řešit úlohy s nekonvexní účelovou funkci, jako je optimalizace výroby vodní elektrárny. Její využití není vhodné z časových důvodů, které s optimalizovaným obdobím neúnosně narůstá. Důvodem je tzv. prokletí dimenze.

Při použití dynamického programování se již počítá se vstupními pravděpodobnostmi a jsou zahrnuté různé vývojové scénáře pro ceny elektřiny, resp. přítoky vody do nádrže. Vzhledem k tomu mohou být i výsledky úlohy značně odlišné.

Pro řešení problému byly v minulosti použity i evoluční algoritmy, particle swarm optimization nebo hybridní metody. Tyto algoritmy kladly vysoké nároky na hardwarové vybavení. Vzhledem k heuristickému přístupu nemuselo být vždy dosaženo globálního extrému, ale pouze lokálního. Tomu se blíže věnuje [10] [12] [13] [14].

Jedním z přijatelných přístupů ke zmíněnému optimalizačnímu problému je lineární programování (LP). Úlohu je však nutné linearizovat, případně linearizovat po částech, což může vnést do úlohy nepřesnosti, které ovlivňují výsledek úlohy. Jednoznačnou výhodou LP je čas výpočtu, který je oproti jiným metodám nesrovnatelně kratší.

Další výhodou LP je dostupnost výpočetních programů, přičemž některé je možné využívat i bezplatně. Některé jsou zdarma ke stažení na internetu (viz. lpsolve), některé špičkové optimalizační nástroje mají zdarma akademickou licenci (Gurobi).

Často užívanou metodou pro krátkodobé plánování výroby vodní elektrárny je smíšené celočíselné lineární programování neboli Mixed-Integer linear programming (dále také MILP). Celočíselné proměnné typu *integer* umožňují modelovat výrobu diskrétně, tzn. je možné turbínu "vypnout" v časech, kdy je cena elektřiny nízká a je výhodnější přitékající vodu skladovat v nádrži. To souvisí se skutečností, že minimální průtok turbínou je nenulový.

Nicméně řešení metodou MILP oproti LP výrazně zvyšuje náročnost celého výpočtu a zvyšuje jeho čas. Vyšší časovou náročnost způsobují zejména zavedené binární proměnné. Proto musí být pro řešení úloh MILP použity specializované solvery, které

užívají heuristické přístupy.

Obecným problémem řešení úlohy pomocí lineárního programování je linearizace celého problému. Maximální hodnota účelové funkce je závislá pouze na objemovém průtoku turbínou a je zanedbán vliv výšky spádu na výrobu elektřiny. Opět je nutné uvažovat rozměry nádrže a to, jak se může výška hladiny měnit. Je možné předpokládat, že u velkých přehrad s objemem ve vyšších desítkách mil. metrů krychlových je změna výšky hladiny zanedbatelná.

Naproti tomu kvadratický matematický model úlohy má značné výhody. Vyjadřuje mnohem přesněji optimalizační problém a zohlední i měnící se výšku hladiny v čase, která do výpočtu reálně vstupuje. Přesnost výpočtu je vyvážena časem výpočtu, který u nelineární úlohy značně roste. Přesto je dnes možné díky pokroku v oblasti rychlosti počítačů tuto úlohu vyřešit (zejména pro krátké horizonty, které mají pro provoz VE značný užitek).

Některé zdroje uvádí, že rozdíl mezi výpočtem nelineární a lineární úlohy, může být až 3 % se zanedbatelným časovým rozdílem, jak uvádí [11]. Při optimalizaci kvadratické úlohy se může stát, že malá změna v ceně elektřiny způsobí velkou změnou v objemovém toku turbínou. Z toho důvodu se často zavádí do modelu podmínka, která limituje maximální možnou změnu průtoku mezi hodinami.

V této práci uvažujeme řešení úlohy definované jako MILP (smíšené celočíselné lineární programování) a MIQP(smíšené celočíselné kvadratické programování) a její výsledky srovnáváme na modelových příkladech.

Metoda Mixed-Integer quadratic programming (MIQP) je využita pro krátkodobé plánování s horizontem několika dnů až maximálně jednoho měsíce. Výhodou je zde přesnost vzhledem k reálnému stavu, nevýhodou naopak dlouhý výpočetní čas, který se blíží při měsíčním plánování až ke dvěma hodinám.

Lineární programování je z výše uvedených důvodů navrženo pro dlouhodobé plánování, které může horizontem dosáhnout až na 12 měsíců. V takovém případě můžeme v zájmu výpočetní rychlosti zanedbat vliv změny spádu VE a linearizovat model vodní nádrže při zachování přijatelných výsledků v rozumném čase.

5.2 Rozbor optimalizačních metod

V této části práce jsou podrobně rozepsány optimalizační metody, které byly pro řešení optimalizačního problému využity. Je podrobně rozebrána a popsána matematická funkce, vhodnost řešení a typické problémy, které se metodou řeší.

Probrány budou tyto optimalizační metody:

- Lineární programování (LP)
- Smíšené celočíselné lineární programování (MILP)
- Kvadratické programování(QP)
  - Kvadrát v účelové funkci
  - Kvadrát v podmínce
- Smíšené celočíselné kvadratické programování (MIQP)

5.2.1 Lineární programování

Lineární programování je v podstatě způsob řešení matematického optimalizačního problému, jehož účelová funkce obsahuje pouze lineární funkci. V tom se odlišuje od programování kvadratického.

Pro optimalizační úlohu je klíčová sada omezujících podmínek a účelová funkce.

Obecné zadání optimalizační úlohy směřující na lineární programování má následující tvar:

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{t=0}^{n} x_t c_t \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered} \tag{11}$$

Jak účelová funkce, tak i omezující podmínky jsou vyjádřeny lineárními funkcemi s konstantními koeficienty. Konstantní jsou i pravé strany rovnic omezujících podmínek. Vektor x = $x_1, x_2, x_3, \ldots$,x$_n$ je vektor řešení, při kterém je optimalizovaná účelová funkce maximální.

Tyto podmínky mohou vyjadřovat jednotlivé omezení proměnných vstupujících do účelové funkce. Není to ale pravidlem. Mohou vázat i proměnné, které do účelové funkce nevstupují, ale jsou zahrnuty pouze v rovnicích omezujících podmínek. V případě optimalizace VE jde o omezení spodní a horní výšky hladiny nebo maximálního a minimálního průtoku turbínou. Proměnná, která do účelové funkce nevstupuje, je odtok mimo turbíny. Velikost odtoku nijak neovlivňuje výnosy VE, které se snažíme optimalizovat, a proto do funkce nevstupují. Vždy je ale přednější propouštět vodu turbínou a propouštění vody mimo ni vždy snižuje možnost vyrábět elektřinu.

Zjednodušeně je možné úlohu zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (x \in R^+) \end{aligned} \tag{12}$$

$c \ldots$ vektor koeficientů (např. vektor cen)
$x \ldots$ vektor neznámých (např. výkon VE)
$A \ldots$ m x n matice definující omezující podmínky
$b \ldots$ vektor pravých stran rovnice omezujících podmínek

Simplexová metoda

Pomocí simplexové metody je možné řešit příklady směřující na lineární programování. Jedná se o iterativní postup, který poskytne globální optimum účelové funkce řešeného problému.

Základem simplexové metody je převedení nerovnic omezujících podmínek na rovnice, které jsou k tomu účelu doplněny přídavnými proměnnými. Z počátečního řešení se jednotlivými iteracemi řešení přibližuje optimu až do chvíle, kdy se algoritmus v op-

timu přeruší a vrátí optimální hodnotu účelové funkce.

Metodu základního lineárního programování (použita bude metoda smíšeného celočíselného programování) nebudeme v naší úloze používat. Rozbor slouží jako základ pro další části textu. V případě, že bychom řešili zadanou optimalizační úlohu pouze pomocí LP, došlo by k nepřesnostem, které by byly od reality značně vzdálené.

5.2.2 Smíšené celočíselné lineární programování

Smíšené celočíselné lineární programování (MILP) je metoda vycházející z lineárního programování, které bylo popsáno v předcházející části práce a z metody celočíselného programování.

Celočíselné programování je specifické tím, že do řešení vstupují pouze celá čísla, nikoliv hodnoty z reálného oboru, jako tomu bylo u lineárního programování. Obvykle reference na celočíselné programování znamená celočíselné lineární programování.

Pokud je použita optimalizační metoda Mixed-Integer linear programming, vstupují do úlohy dva druhy proměnných. Jsou jimi celočíselné hodnoty ale i reálné.

Zápis úlohy je obdobný jako při řešení LP:

$$\begin{gathered} \min c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (x_1 \in R^+ \wedge x_2 \in B^+) \end{gathered} \tag{13}$$

Jak již bylo řečeno výše, celočíselné jsou pouze některé proměnné, proto mohou vstupovat pouze do omezujících podmínek. To je i případ optimalizační úlohy vodní elektrárny, kdy se celočíselnou proměnnou definuje dvojí stav průtoku turbínou (zapnuto/vypnuto). Do úlohy tedy vstupuje pouze celočíselná binární proměnná, která nabývá pouze hodnot 0 nebo 1. Užití binárních proměnných v omezující podmínce může vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
uc_1 q_{min} \leq & q_1 \leq uc_1 q_{max} \\
& \vdots \\
uc_t q_{min} \leq & q_t \leq uc_t q_{max}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

kde uc_t ... je binární proměnná v čase t

Binární proměnná ve výše uvedeném případě zajistí, že proměnná se bude pohybovat v mezích určených hodnotami q_{min} a q_{max} nebo bude nulová. Tímto způsobem je možné matematicky modelovat vypnutí turbíny, motoru apod.

5.2.3 Kvadratické programování

Kvadratické programování je jedním z typů nelineárního programování. V účelové funkci se objevuje druhá mocnina některé z proměnných. Je i možnost mít kvadrát složený ze dvou různých proměnných. V takovém případě se jedná o bilineární funkci, jejíž řešení je složitější, protože funkce nemá ani konvexní, ani konkávní tvar.[1] To je případ optimalizace výroby vodní elektrárny, které do účelové funkce vstupuje součin proměnné průtoku a výšky hladiny.

Ideálním případem je kvadratické programování, kdy je funkce konvexní. V takovém případě je možné obecné matematické zadání zapsat následovně

$$
min\ x^T C x + p^T x \tag{15}
$$

kde $x^T C x$ ... je kvadratický člen úlohy
$p^T x$ ... skalární součin vektoru p a vektoru x
C ... pozitivně/negativně semidefinitní matice o rozměru n
x ... vektor neznámých
x^T ... transponovaný vektor x
p ... vektor koeficientů

Omezující podmínky zde vystupují obdobně jako v lineárním programování. Proto

mohou podmínky vypadat následovně:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered} \tag{16}$$

Je nutné podotknout, že řešení úlohy kvadratického programování je znatelně časově a výpočetně náročnější (více v části 8).

Pokud jde o čistě konvexní úlohu, musí být použity speciální solvery, které zvládnou úlohu tohoto typu vyřešit v obstojném čase. Problém nastává v případě, kdy funkce není ani konvexní ani konkávní. Úloha se stává nelineárním problémem, kde může vzniknout více lokálních extrémů. V takovém případě tuto úlohu běžné komerční solvery nejsou schopny vyřešit, což bylo v průběhu této práce potvrzeno.

5.2.4 Smíšené celočíselné kvadratické programování

Metoda vychází z kvadratického programování. Obdobně jako u metody MILP je rozdíl pouze v tom, že některé z proměnných jsou celá čísla.

Při řešení úlohy tohoto typu vzrůstá oproti kvadratickému programování nárok na výpočetní čas. Některé solvery v modelovacím jazyku Yalmip sice dokáží vyřešit problém kvadratického programování, ale nedokáží si poradit se smíšeným celočíselným programováním. Příkladem takového solveru je KKTQP (interní solver Yalmip).

5.2.5 Dynamické programování

Odlišnou metodou programování, která je pro optimalizaci výroby taktéž využívána, je dynamické programování. [2] Obecně lze říci, že dynamické programování se používá pro řešení optimalizace rozhodovacího procesu, což tato úloha splňuje.

Dynamické programování (dále také "DP") je založeno na rozložení problému na subproblémy, které se vzájemně překrývají. V porovnání s jinou optimalizační metodou,

nazývanou "rozděluj a panuj" je dynamické programování mnohem efektivnější, protože algoritmus DP je schopný pamatovat si předchozí výsledky pro opakované subproblémy.

Jak již bylo řečeno, dynamické programování není vhodné z toho důvodu, že je mimořádně náročné na výpočet. U DP se projevuje problém tzv. "prokletí dimenzionality", který by při delším časovém horizontu překračoval meze časově vhodného řešení. Dalším problémem je fakt, že řešená úloha má bilineární funkci. Z toho vyplývá, že není konvexní a řešení pomocí DP by s velkou pravděpodobností směřovalo pouze do lokálního minima.

Hlavním rozdílem při použití DP je to, že do něj vstupují i pravděpodobnosti a jsou součástí optimalizace. Při řešení optimalizační úlohy v této práci jsou brány hodnoty jako deterministické. Kvůli pravděpodobnostem zařazeným do výpočtu by i hodnota účelové funkce při užití DP byla odlišná od řešení, které prezentuje tato práce.

5.2.6 Branch & Bound

Optimalizační metoda Branch & Bound (v češtině "metoda větví a mezí") je algoritmus, který hledá optimální řešení na celém intervalu možných řešení (výsledné řešení je globální). Hlavní výhodou celého algoritmu je, že dokáže velké podmnožiny nevhodných řešení vyřadit hned v prvním kroku algoritmu, čímž je výrazně zrychlen postup optimalizace.

Při optimalizaci se vychází z dolní a horní hranice optimalizované hodnoty a ty se postupně zpřesňují. Při optimalizaci této úlohy metoda využívala jako dolní solver FMINCON (součástí Matlabu) a jako horní solver externí Gurobi.

6 Využité výpočetní programy

Optimalizační úloha, která je předmětem této práce, je při plánování delších období velice náročná. Již při týdenním plánování výroby vstupuje do výpočetního algoritmu 672 proměnných a z toho je 168 proměnných binárních. To je pro nesofistikované výpočetní programy mimořádná zátěž. Při řešení problémů o této složitosti je nutné využít speciálních optimalizačních nástrojů, které dokáží pomocí heuristických metod výpočet urychlit.

V této sekci je uveden krátký popis nástrojů, které byly v průběhu práce vybrány jako nejvhodnější pro řešení úlohy.

Úloha samotná byla řešena v prostředí programu Matlab za využití licence poskytované studentům FEL ČVUT.

6.1 Gurobi

Gurobi je komerční optimalizační nástroj k řešení business modelů a matematických modelů. Při řešení úlohy dosahuje Gurobi přijatelných časů díky užití heuristických metod. To je výhodou zejména při řešení smíšených celočíselných problémů, které lze bez heuristického přístupu řešit jen s obtížemi. Bez heuristického přístupu byl problém řešen např. ve výpočetní programu Wolfram Mathematica, který ale nebylo možné použít vzhledem k nepřijatelnému času výpočtu (již při optimalizaci na desetihodinovém časovém horizontu úloha vykazovala nepřijatelné výpočetní časy).

Pomocí Gurobi je možné řešit tyto typy úloh:

- Lineární programování (LP)
- Smíšené celočíselné lineární programování (MILP)
- Smíšené celočíselné kvadratické programování (MIQP)
- Kvadratické programování s kvadratickými podmínkami(QCP)
- Kvadratické programování (QP)

- Smíšené celočíselné kvadratické programování s kvadratickými podmínkami (MIQCP)

Gurobi poskytuje tzv. "Gurobi Interface" pro Matlab, který značně usnadní práci při formulaci problému. Díky komunikaci s programem Matlab se jeho prostřednictvím sníží náročnost formulace úlohy a na dobu výpočtu to nemá žádný, resp. zanedbatelný vliv.

Nespornou výhodou pro tuto práci je fakt, že společnost Gurobi Optimization poskytuje akademickou licenci zdarma. Díky tomu je pro výpočet úlohy použit špičkový komerční nástroj, což zpřesňuje výsledky práce. Běžná tržní cena nástroje pro jeden počítač je $12 000.

Není však možné pomocí Gurobi řešit nekonvexní typy úloh. Takové úlohy musí být řešeny pomocí speciálních nekonvexních solverů, které jsou dostupné díky prostředí Yalmip. Tento typ solverů pak Gurobi využívá pouze jako součást řešení (viz předchozí kapitoly práce o Branch & Bound)

6.2 Yalmip

Yalmip [8] je modelovací jazyk pro modelování složitých úloh a řešení konvexních a nekonvexních problémů. Distribuován je jako toolbox pro Matlab, který je zdarma. Výhodou Yalmipu je jednoznačně relativně jednoduchá formulace problémů, která umožňuje modelování složitých úloh.

Syntaxe je prakticky totožná se syntaxí Matlabu. Oproti Matlabu implementuje Yalmip řadu zjednodušení, které umožní např. psaní zjednodušených podmínek nebo definici úlohy pro více optimalizačních nástrojů.

6.2.1 Optimalizační nástroje v Yalmipu

Hlavní výhoda Yalmipu je především v tom, že dokáže úlohu zadanou v modelovacím jazyku Yalmip přeložit do vhodného jazyku pro téměř 55 externích a interních solverů (pozn. interní solvery jsou dodávány přímo s Yalmipem, externí nikoliv).

Z externích solverů je v práci použit solver Gurobi, který byl představen v minulé

části této práce. Z interních je využit solver BMIBNB(více o BMIBNB v [9]) a FMINCON, které byly využity pro globální nekonvexní programování.

7 Specifika plánování výroby VE

Jak již bylo několikrát zmíněno výše, specifikem úlohy optimalizace VE je to, že její účelová funkce zahrnuje bilineární člen, který generuje indefinitní matici kvadratické formy, což je potvrzeno v [7] a zkráceně v této kapitole práce.

Běžné optimalizační programy (včetně výše zmíněného Gurobi), jsou určeny pouze pro řešení kvadratického problému, který má formu uvedenou v rovnici (15), tzn. následující formu:

$$min\ x^T C x + p^T x \tag{17}$$

Což je možné v maticovém zápisu zapsat následovně:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{p}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix} \tag{18}$$

V této funkci vystupuje matice C, která obsahuje koeficienty funkce (v úloze řešené v této práci to budou ceny elektřiny, účinnost, gravitační konstanta apod.). Aby byla funkce konvexní resp. konkávní musí mít matice C všechny vlastní čísla nezáporná resp. nulová nebo záporná. To znamená, že je matice pozitivně semidefinitní, resp. negativně semidefinitní. V takovém případě je funkce relativně lehce řešitelná pomocí Gurobi. V opačném případě se jedná o nekonvexní úlohu, matice C je indefinitní a solver Gurobi tuto úlohu není schopen vyřešit.

Účelová funkce VE je závislá na dvou různých vektorech proměnných. Při zjedno-

dušené formulaci účelové funkce VE je účelová funkce následující:

$$min\ x^T C y + p^T x \tag{19}$$

a v maticové formě:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{p}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

Aby měla účelová funkce potřebný tvar podle rovnice (17), je nutné ji upravit do následujícího tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \\ \mathrm{y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n \\ C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \\ \mathrm{y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

Po úpravách je v rovnici (21) uvedena matice, která je indefinitní, což lze dokázat pomocí výpočtu vlastních čísel matice. V případě indefinitní matice vstupuje do optimalizace nekonvexní funkce, která zpravidla obsahuje několik lokálních extrémů.

Řešení indefinitní funkce je případ optimalizace výroby vodní elektrárny, a to kvůli bilinearitě v účelové funkci, viz [3] nebo předchozí rozbor úlohy. Tím se z kvadratického konvexního programování stává nekonvexní, které není možné řešit běžnými kvadratickými solvery. V tomto případě musí být aplikován globální solver (např. BMIBNB), který za cenu vyššího výpočetního času najde globální řešení.

V další části práce bude kvadraticky formulovaná úloha řešena pomocí solveru

BMIBNB a optimalizační metody Branch & Bound.

8 Výsledky práce a doporučení vhodné optimalizační metody

Předchozí část práce se věnovala teoretickému úvodu do optimalizační problematiky. Úloha byla v části 4.2 řádně popsaná a nadefinovaná. S ohledem na důležitost této části jsme rozebrali i fyzikální základ úlohy a základ přeměny energie vody na energii elektrickou.

Následující část této práce se dále zaobírá reálnou aplikací úlohy na vodní elektrárnu podle kapitoly 3.2 se všemi specifiky této úlohy. V jednotlivých sekcích této části budou diskutovány výhody a nevýhody jednotlivých přístupů řešení a případně zanedbání některých parametrů, které bude náležitě objasněno.

Postupně budou rozebrány následující přístupy k řešení úlohy na uvedených časových horizontech:

- Smíšené celočíselné lineární programování
  - 24 hodin
  - 7 dní
  - 31 dní
- Smíšené celočíselné kvadratické programování
  - 24 hodin
  - 7 dní
  - 31 dní

V další části budou modelovány speciální případy, které mohou v průběhu roku nastat. Jedním z těchto zvláštních případů budou i modelace postupného snižování hladiny vody, které může být typické pro jarní resp. podzimní měsíce.

V poslední části této práce budou jednotlivé optimalizační postupy vzájemně porovnány a bude vyhodnocen nejvhodnější postup optimalizace.

8.1 Řešení lineárního optimalizačního problému

Jedním z možných přístupů k řešení úlohy definované v kapitole 4.2 této práce je využití lineárního programování. Obecný postup metody byl popsán a vysvětlen v teoretické části této práce, proto zde budou vyzdvižena pouze konkrétní specifika algoritmu a vypočtené hodnoty.

Zjednodušení výpočetního modelu

Vzhledem k tomu, že úloha ve své korektní formě není lineární, je nutné úlohu linearizovat. Díky tomu je sice možné úlohu řešit požadovaným způsobem, ale výsledky úlohy se vzdalují realitě.

V prvé řadě musí být zjednodušena účelová funkce úlohy. Podle části 4.4 je funkce následující:

$$max \sum_{t=1}^{T} C_t h_t (q_{out,t} a + b) \tag{22}$$

V této rovnici je součin dvou proměnných ($q_{out,t}$ a h_t). Tím se do úlohy dostává kvadratický člen, který nemůže účelová funkce lineární úlohy obsahovat. Při uvážení variability proměnné q_{out} a proměnné h_t je zřejmé, že vhodné je zafixovat proměnnou h_t. Místo této proměnné je v účelové funkci střední hodnota výšky hladiny, která je 24,1 m. Výsledná funkce tedy bude:

$$\sum_{t=1}^{T} C_t h_{str} (q_{out,t} a + b) \tag{23}$$

Kromě toho musí být pro účely použití lineárního programování přizpůsobeny i omezení úlohy. V případě optimalizované VE se jedná o podmínky svázání výšky hladiny a objemu vody v nádrži, jak je uvedeno v rovnici (**??**). Do této rovnice vstupuje kvadrát v podobě h_t^2.

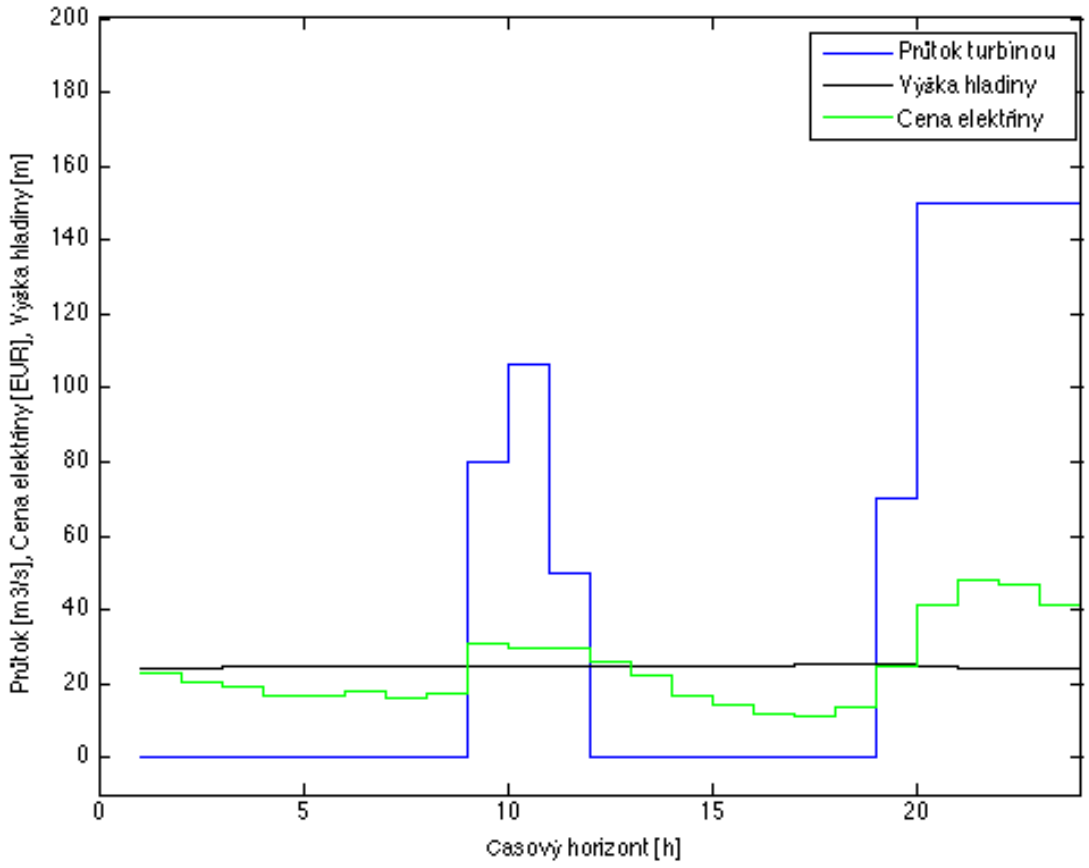
Tento kvadratický člen je nahrazen linearizací funkce v bodě h_{str}, kterým je určena střední výška hladiny. Za použití Taylorova rozvoje je funkce aproximována na následující tvar:

$$v_t = hl(2\tan\alpha h_{str} + d) - \tan\alpha h_{str}^2 l \tag{24}$$

V této části práce bude úloha rozebrána na třech nejběžnějších časových obdobích, kterými jsou den, týden a měsíc. V další části práce (část 8.4) budou probrány ještě dva delší horizonty lineárního programování. Bude řešena úloha čtvrtroční a půlroční, která může pomoct při výběru dlouhodobých kontraktů na dodávku elektřiny.

8.1.1 Lineární úloha - Denní plánování

Při linearizaci výše zmíněných kvadratických proměnných je možné úlohu řešit pomocí běžných lineárních solverů. Pro účely této práce byl použit solver Gurobi, který byl popsán v kapitole 6.1.



Obrázek 4: Lineární úloha - Denní plánování

Data zobrazená v grafu 4 jsou zřetelně ovlivněna tím, že je plánování provedeno pouze na 24 hodin a není uvažován další vývoj po uplynutí časového horizontu. Výška hladiny klesne na minimální možnou hodnotu, což je negativní pro další vývoj.

V grafu jsou ve výrobě zřetelné dva peaky, které reagují na vysoké ceny elektřiny v dané hodině. V 9 hodin je cena vysoká (31,4 €), přesto nemůže být průtok maximální, protože má omezený nárůst (viz. podmínka (7)). Pro 21 hodinu je cena 48 €, což je nejvyšší hodnota za celý horizont, a proto je také výroba v tuto dobu nejvyšší.

Z grafu je zároveň patrné, že elektrárna vyrábí elektřinu pouze v některé hodiny. Průtok turbínou je aktivní pouze od 9:00 do 13:00 a od 19:00 do 24:00. Díky tomu je možné akumulovat dostatečné množství vody, aby byla výroba realizována v hodinách s vysokou cenou elektřiny.

Z grafu je také vidět, že dle algoritmu je průtok turbínou organizován na časy s vysokou cenou elektřiny, což je účel celé optimalizace. Výsledná hodnota optimalizace na 24 hodin je 8 272 €.

Celkový čas výpočtu optimalizační úlohy byl 1,3 vteřiny, přičemž solver Gurobi na výpočet spotřeboval pouze 0,08 z celkového času. Zbylý čas spotřeboval program Yalmip pro formulaci úlohy a předání dat solveru.

8.1.2 Lineární úloha - Týdenní plánování

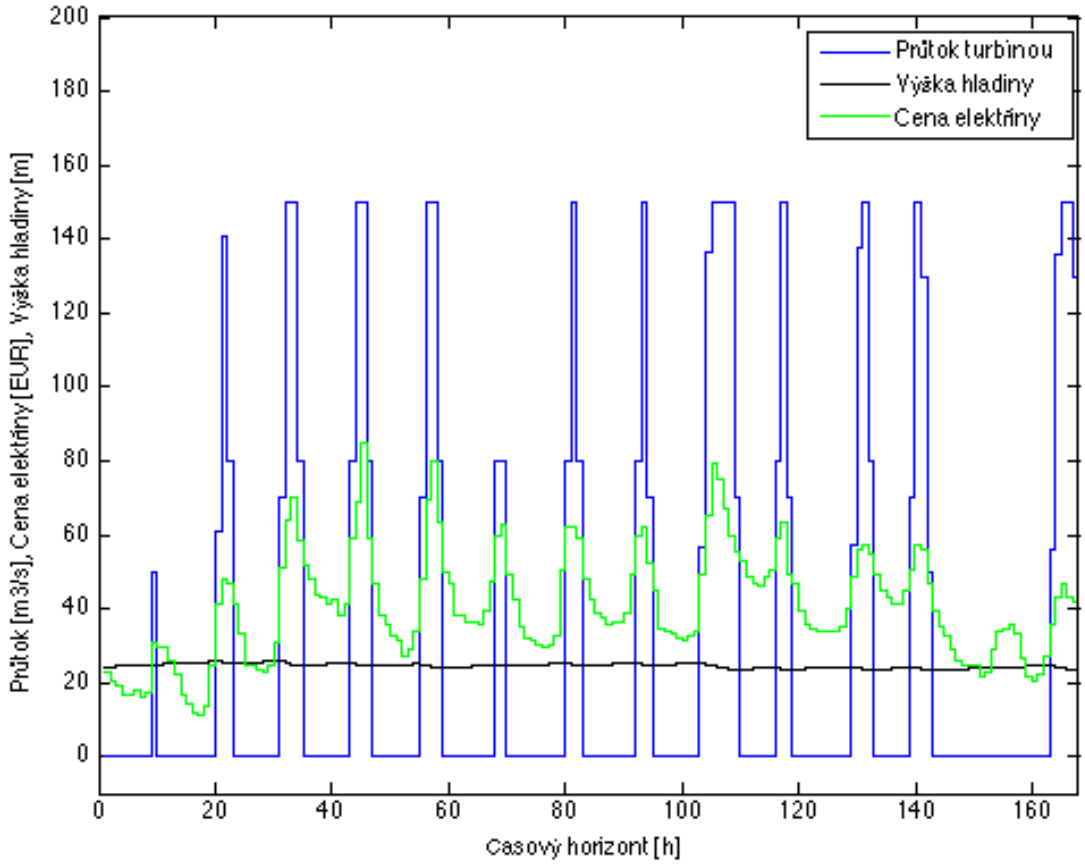
Režim týdenního plánování je krajním případem, který se ještě považuje za plánování v krátkém období. Časové rozmezí je v tomto případě 168 hodin a do modelu vstupuje 672 proměnných (z toho 168 binárních).

V případě týdenního plánování pomocí lineárního programování je v případě použití solveru Gurobi a modelovacího jazyka Yalmip čas výpočtu zanedbatelný. Celý výpočet časově zabere pouze cca 1,5 vteřiny, přičemž solver Gurobi z celého algoritmu zabere pouze 0,23 vteřiny.

Výsledná hodnota účelové funkce na optimalizovaném jednotýdenním období je 61 779 €.

Z grafu 5 je názorně vidět, jak jsou ceny elektřiny spojené s aktuální výrobou

elektřiny.



Obrázek 5: Lineární úloha - Týdenní plánování

Nejvyšší výrobu elektřiny je z logiky věci možné vidět v období nejvyšších cen elektřiny. Ve dvou oddělených hodinách ceny elektřiny přesahují 80 €.

Stejně jako v minulém případě je vidět, že ke konci časového horizontu se optimalizační algoritmus snaží vypustit veškerou vodu z nádrže, aby maximalizoval zisky. To však může být nevýhodné, protože není uvažován další vývoj.

Tomu je možné jednoduše zabránit změnou podmínek algoritmu, kdy se do omezení úlohy přidá podmínka, která definuje konkrétní výšku v poslední hodině:

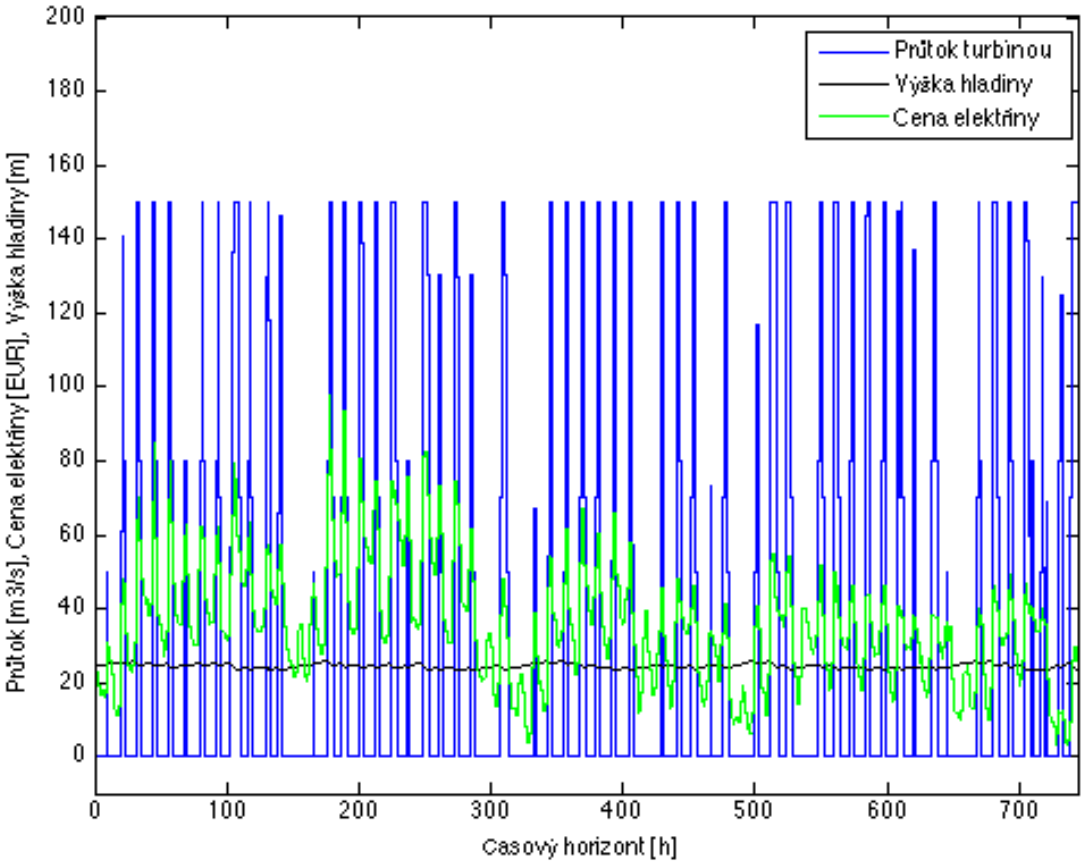
$$h_T = h_{st} \tag{25}$$

kde: h_T je výška hladiny na konci uvažovaného období a h_{st} je střední hodnota výšky hladiny.

8.1.3 Lineární úloha - Měsíční plánování

Měsíční plánování je zařazeno do oblasti střednědobého plánování. V tomto období se již mohou výrazně projevit změny v přítocích podle aktuálních hydrologických podmínek. Proto je vhodné dle vybraného měsíce uvažovat vysoký nebo nízký scénář přítoků. Nejvíce se na přítocích podepíše roční období, kdy například na jaře budou přítoky vyšší než v létě.

Při uvažování středního scénáře jako referenčního jsou výsledky optimalizace zobrazeny v následujícím grafu. I přesto, že konkrétní hodnoty nejsou z grafu tak čitelné, jako tomu bylo v případě denního plánování, jsou zde jasně patrné trendy ve výrobě.



Obrázek 6: Lineární úloha - Měsíční plánování

V období 13-tého dne (kolem 300-té hodiny) je zřejmý propad cen a z něj vyplývající nízká výroba, která pouze udržuje hladinu VE na maximální úrovni. Díky tomu jsou splněny environmentální podmínky úlohy a nedochází k překročení, resp. ohrožení

případnou sankcí za nedodržení provozních podmínek.

Při měsíčním plánování výroby a využití sady dat pro přítoky a ceny elektřiny je výpočetní čas úlohy stále zanedbatelný. Celkový čas výpočtu byl téměř 5 vteřin, což je naprosto bezproblémová hodnota. Z celkových téměř 5 vteřin je čas rozdělen vcelku rovnoměrně na Yalmip a Gurobi.

Dále bude vidět, že úloha, která přesahuje jeden měsíc již potřebuje určitou dobu pro výpočet. V kapitole 8.4 této práce bude rozebrána úloha plánování na tři měsíce a šest měsíců, kde bude možné pozorovat ještě násobně větší hodnotu výpočtového času.

Maximální hodnota účelové funkce je pro tuto úlohu se zadanými konstantami 241 085 €.

8.1.4 Lineární úloha - Výsledky

Zhodnocení výsledků optimalizace pomocí lineárního programování je uvedeno v následující tabulce:

Lineární úloha	Den	Týden	Měsíc
Hodnota účelové fce [€]	8 272	61 779	241 085
Yalmip - čas [s]	1,21	1,26	3,05
Solver - čas[s]	0,08	0,23	2,61

Tabulka 1: Lineární úloha

Z výše uvedené tabulky je vidět, že u lineárního programování a horizontu výpočtu do jednoho měsíce nehraje výpočtový čas prakticky žádnou roli. Díky heuristickým metodám, které výpočtový čas značně zkrátí, je možné ve velice krátké době naplánovat výrobu až na měsíční období.

Co se týče hodnoty účelové funkce, ke srovnání dojde až ve srovnání s kvadraticky zadanou úlohou, kde dává poměřování výsledků větší smysl.

8.2 Řešení kvadratického optimalizačního problému

V této části práce budeme řešit kvadraticky zadanou úlohu podle kapitoly 4.4. Využijeme pro to optimalizační metodu Branch & Bound, která byla ve své obecné formě rozebrána v kapitole 5.2.6. Tato část je již zaměřena na konkrétní problematiku optimalizace vodní elektrárny specifické pro naši úlohu.

Jak již bylo řečeno, obecná účelová kvadratická funkce má následující tvar:

$$min\ x^T Cx + p_t x \tag{26}$$

Kde matice C je pozitivně semidefinitní matice koeficientů (tzn. všechny její vlastní čísla jsou nezáporná). Úloha řešená v této práci má bilineární formu, tzn. má ve zjednodušené formě následující tvar:

$$min\ x^T Cy + p_t x \tag{27}$$

Matice C v rovnici (27) obsahující koeficienty funkce je pozitivně semidefinitní. V tomto tvaru ale není přijatelná pro solver Gurobi. Pokud je rovnice přeformulována do vhodného tvaru pro Gurobi (podle rovnice (26)), pozitivně semidefinitní nebude.

Dle rovnice (27) závisí výkon vodní turbíny bilinéarně na výšce spádu přehrady a na průtoku turbínou. Bilinearita vstupující do této funkce dělá z úlohy úlohu nekonvexní a nekonkávní.[1] Její řešení je proto mimořádně obtížné a běžný solver určený pro kvadratické programování tuto úlohu nedokáže vyřešit. To bylo rozebráno v kapitole 7.

Výsledkem toho je využití globálního solveru BMIBNB, který používá k řešení úlohy metodu větví a mezí (Branch & Bound), kterou jsme popsali v části 5.2.6.

Dle očekávání bude úloha výpočetně řádově náročnější, ale je garantované nalezení globálního maxima úlohy. V úloze kvadratického programování se vychází ze stejných vstupních dat, jako je tomu v případě lineárního programování. Díky tomu je možné po prezentaci výsledku provést srovnání obou metod.

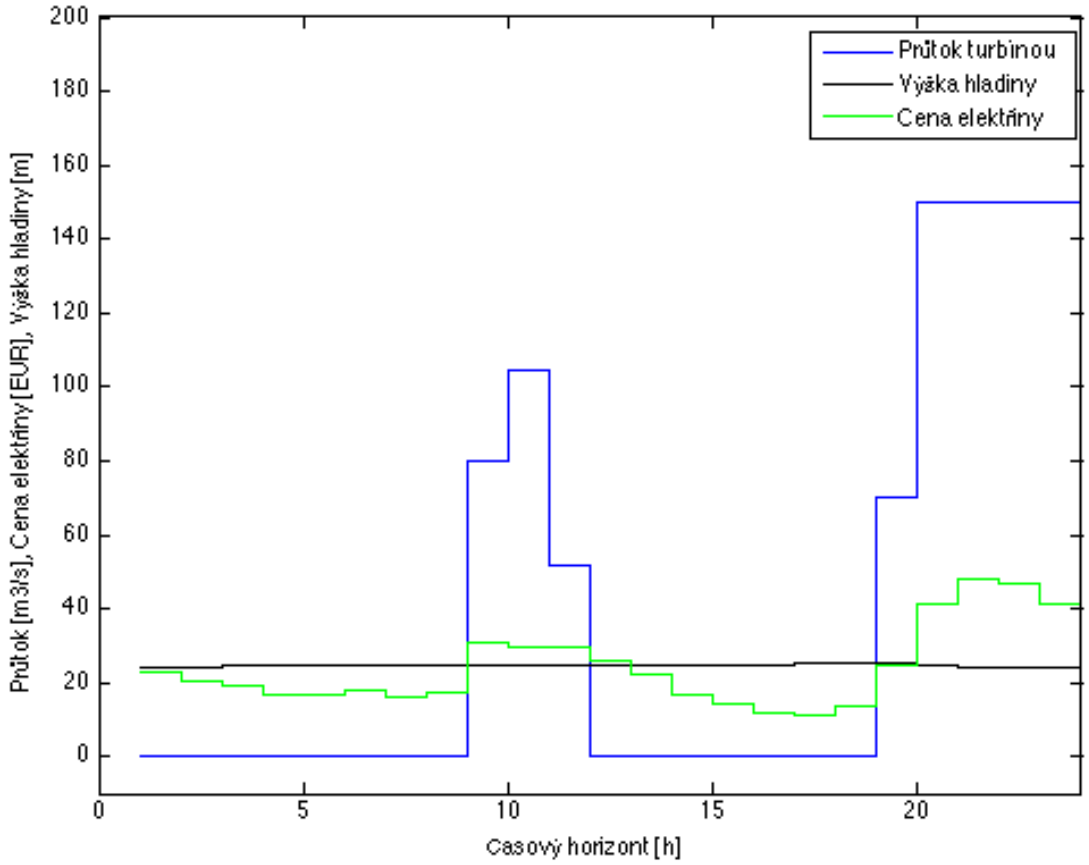
Zjednodušení kvadratického programování

Oproti lineárnímu programování není u kvadratického zanedbána proměnlivá výška spádu na turbínu, což zvyšuje přesnost výsledku optimalizace.

Zjednodušení, které je ponecháno i v případě kvadratického programování, je linearizace v omezení úlohy definující objem nádrže. Při ponechání tohoto omezení to v rámci testování vedlo na neúměrně dlouhé výpočtové časy.

8.2.1 Kvadratická úloha - Denní plánování

Základním krátkodobým plánováním výroby elektrárny je denní plánování. Pro tento typ plánování je typické, že se vypouští větší množství vody, protože algoritmus ke konci odpustí takové množství vody, aby hladina zůstala na minimu.



Obrázek 7: Kvadratická úloha - Denní plánování

Vzhledem k tomu, že jsou zdrojová data pro optimalizaci totožná pro lineární i kvadratické programování, jsou vidět výrobní maxima ve stejnou dobu. Výpočet je ale

přesnější vzhledem k zanedbání menšího počtu parametrů.

Kvadratická úloha má při denním plánování relativně krátkou dobu výpočtu. Formulace úlohy modelovacím jazykem Yalmip zabere pouze 0,88 vteřiny, zatímco solver BMIBNB potřebuje na najití globálního optima 1,73 vteřin.

Hodnota účelové funkce pro kvadratickou úlohu zadanou na 24 hodin je 8 307 €.

8.2.2 Kvadratická úloha - Týdenní plánování

Při týdenním plánování výroby již je zřetelný čas výpočtu. Do úlohy vstupuje celkem 672 proměnných, z toho je 168 proměnných binárních.

Týdenní plánování již je na výpočet náročnější. To je způsobeno především tím, že se jedná o bilineární úlohu, která musí být řešena metodou Branch & Bound, která nemá tak sofistikovaný přístup, jako tomu je u simplexové metody lineárního programování.

Výpočetní čas potřebný pro modelovací jazyk Yalmip je prakticky totožný jako při denním plánování (1,36 s). Diametrální rozdíl je v čase, který potřebuje celá optimalizace. Pro týdenní plánování je výsledný čas 23,05 s.

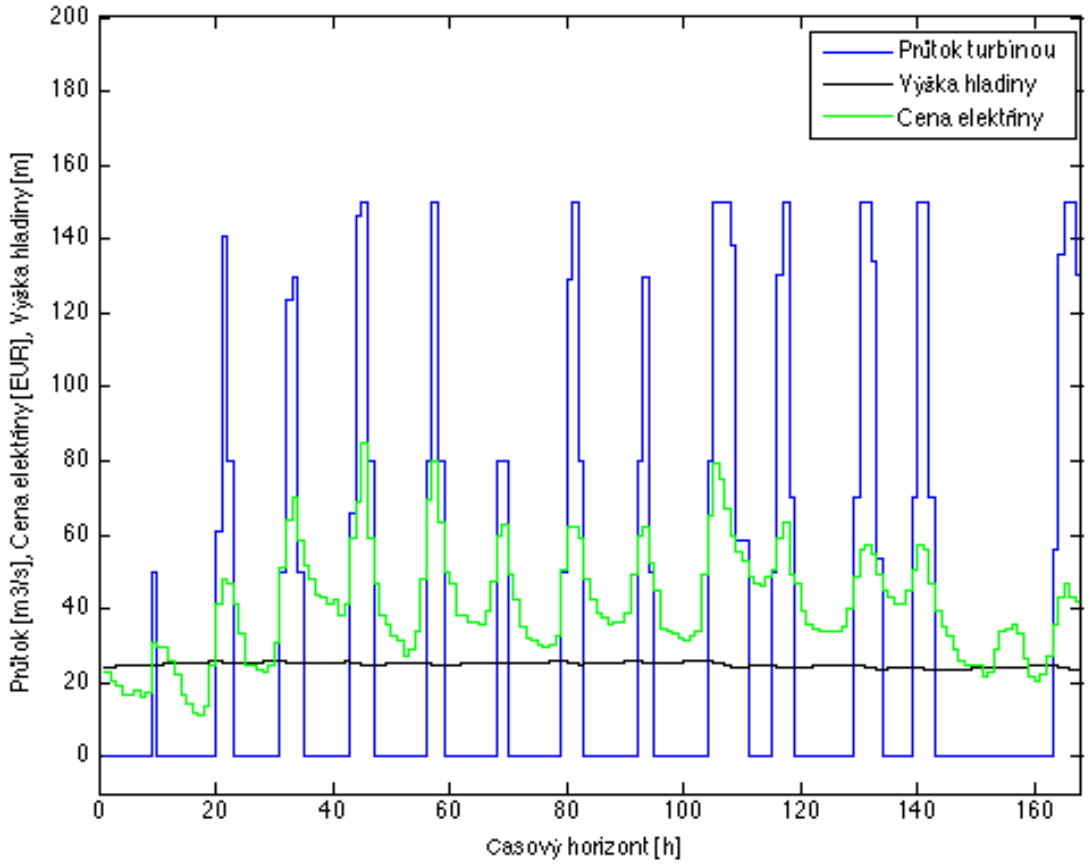
Celková výsledná hodnota účelové funkce je 62 804 €.

8.2.3 Kvadratická úloha - Měsíční plánování

Zatímco u lineárního programování začaly být vyšší časy výpočtu pozorovatelné až u plánování přesahující jeden měsíc, při řešení kvadratické úlohy se delší výpočetní čas projevil již v týdenním plánování, jak bylo uvedeno výše.

S plánováním měsíčním se výpočetní čas násobně zvyšuje. Důvodem tak vysokého času je zejména nutnost použití optimalizační metody Branch & Bound a nikoliv klasického kvadratického programování, které je v tomto případě nepoužitelné. Na druhou stranu máme zajištěno řešení na celém intervalu a nikoliv pouze lokální maximum.

To, co bylo předpokládáno, se ukázalo i na výsledcích úlohy. Formulace úlohy pomocí modelačního jazyka zabrala pouze 2 vteřiny, což je pouze nepatrný nárůst oproti jiným horizontům plánování. Výpočetní čas solveru BMIBNB se však blíží hranici po-



Obrázek 8: Kvadratická úloha - Týdenní plánování

užitelnosti celého algoritmu. Řešení trvalo téměř 1h a 40 minut.

Maximalizovaná hodnota účelové funkce byla pro měsíční plánování rovna 244 826 €.

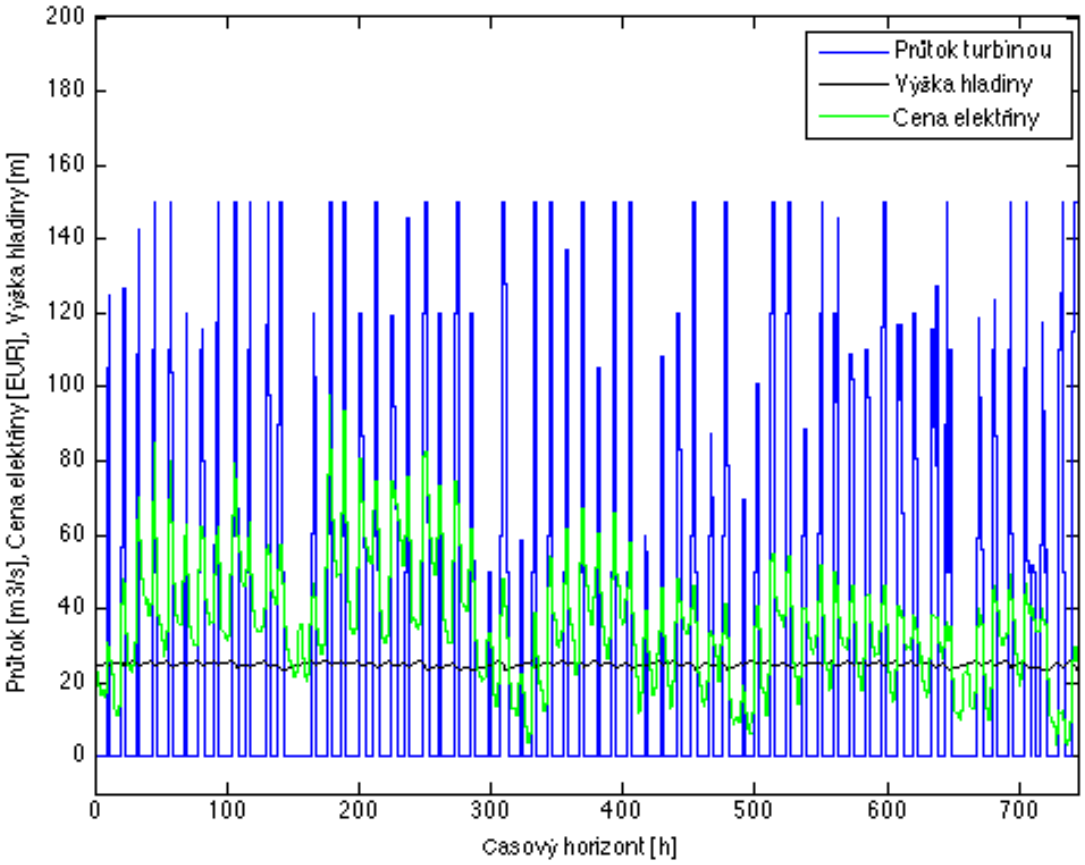
8.2.4 Kvadratická úloha - Výsledky

Hodnocení zásadních výsledků optimalizace kvadratické úlohy pomocí metody Branch & Bound shrnuje následující tabulka:

Kvadratická úloha	Den	Týden	Měsíc
Hodnota účelové fce [€]	8 307	62 804	244 826
Yalmip - čas [s]	0,88	1,36	2,33
Solver - čas [s]	1,73	23,05	6 039

Tabulka 2: Kvadratická úloha

Z výše uvedených výsledků je jasně patrné, co je základním problémem při řešení



Obrázek 9: Kvadratická úloha - Měsíční plánování

kvadratické úlohy. Její bilineární forma určuje její nekonvexní tvar, a proto je nutné užití vhodných solverů, které ale prodlužují čas výpočtu.

Toto se potvrdilo v případě měsíčního plánování.

Pro období krátkodobého plánování se čas výpočtu pohybuje okolo 25 vteřin, což je na tomto horizontu zanedbatelný výpočetní čas. V případě časového horizontu jeden měsíc už je čas výpočtu cca 1 hodinu a 40 minut.

Veškeré výstupy optimalizace, včetně jednotlivých hodinových průtoků jsou obsahem přiloženého CD.

8.3 Srovnání výpočtu lineární a kvadratické úlohy

V první, teoretické části práce, se text věnoval úvodu do úlohy a do metod optimalizace. Byly zmíněny základní vlastnosti jednotlivých přístupů optimalizace, které byly v předchozí části aplikovány na vodní elektrárnu definovanou podle kapitoly 3.2.

Dle zadání a cílů této práce jsme v předchozích částech práce problém řešili pomocí lineárně a kvadraticky zadané úlohy. Výsledky jednotlivých úloh jsou zobrazeny v následující tabulce.

Dle výsledků této úlohy je možné určit optimalizační postup vhodný pro konkrétní plánovací období. V kapitole 8.4 jsou pak výsledky porovnány na odlišných případech plánování. To znamená, že v odlišných případech se může výsledné doporučení lišit.

Lineární úloha	Den	Týden	Měsíc
Hodnota účelové fce [€]	8 272	61 779	241 085
Yalmip - čas [s]	1,21	1,26	3,05
Solver - čas[s]	0,08	0,23	2,61
Kvadratická úloha			
Hodnota účelové fce [€]	8 307	62 804	244 826
Yalmip - čas [s]	0,88	1,36	2,33
Solver - čas [s]	1,73	23,05	6 039

Tabulka 3: Srovnání lineární a kvadratické úlohy

Z výsledků úlohy je zřetelně vidět výhody použití jednotlivých algoritmů pro provozní optimalizaci výroby vodní elektrárny. Dle předpokladů uvedených v kapitole 5.1 je přibližný rozdíl v řešení kvadratické a lineární úlohy rozdíl v řádu jednotek procent.

Zatímco při denním plánování jsou obě úlohy vyřešeny během několika málo vteřin, s narůstajícím časovým horizontem se časy zvyšují. Díky vstupnímu vzorku dat, který byl použit v této práci, jsou rozdíly v maximálních hodnotách jen velmi malé. Řádově se podle tabulky uvedené výše pohybují do dvou procentních bodů.

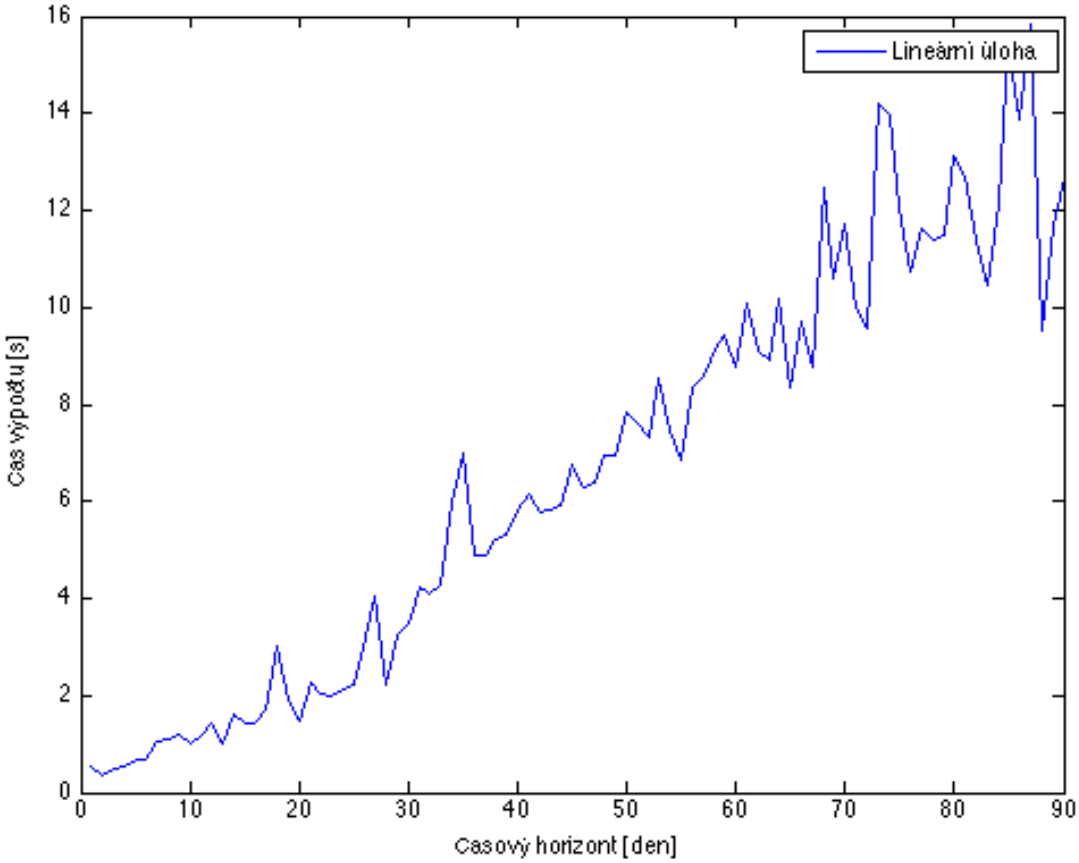
Zatímco rozdíly v hodnotě účelové funkce se liší minimálně, rozdíly v čase jsou při delším časovém období obrovské. Při měsíčním plánování je více než 2000 krát vyšší. Vzhledem k tomu je pro delší období jednoznačně vhodnější použít lineární programování i přesto, že výsledné hodnoty jsou ovlivněny chybou kvůli zanedbání vlivu výšky hladiny.

To je pro řešení úlohy provozní optimalizace VE klíčové zjištění. Vzhledem k tomu, že k řešení úlohy lineárního programování je dnes vyvinuta řada špičkových solverů, je relativně jednoduché výrobu naplánovat.

8.3.1 Srovnání výpočtových časů lineární a kvadratické úlohy

Jelikož je klíčovým problémem optimalizační úlohy výpočtový čas, byl prozkoumán na více časových horizontech. Z předchozích částí vyplývá, že výpočet lineární úlohy je řádově méně náročný na čas výpočtu.

Následující graf z programu Matlab zobrazuje náročnost výpočtu pro jednotlivé časové intervaly. Intervaly byly hodnoceny v rozmezí 1 den až 31 dní pro kvadratickou úlohu a 1 den až 90 dní pro lineární úlohu.



Obrázek 10: Časová náročnost lineárně definované úlohy

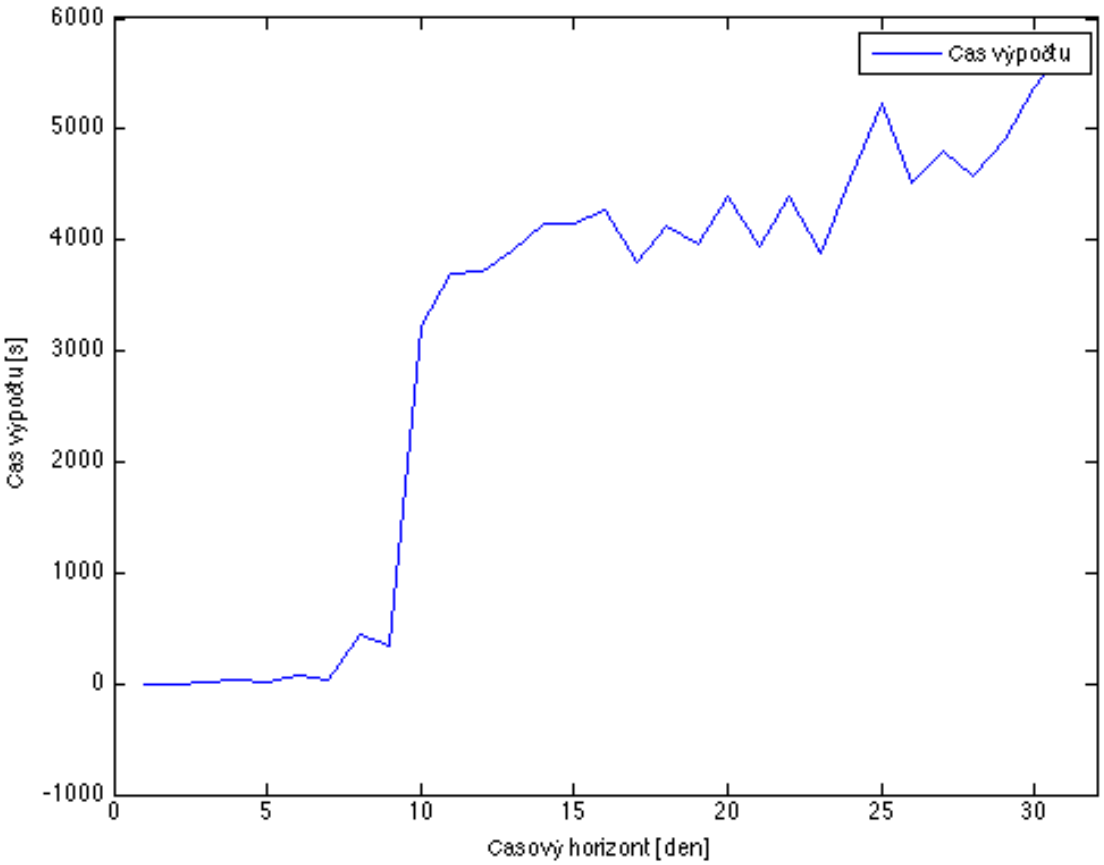
V případě lineárně definované úlohy nebyl problém srovnat čas výpočtu pro období

až 90 dnů bez většího časového zatížení. Jak je vidět, v průměru se výpočtový čas i u nejdelších horizontů pohyboval mezi 10 a 15 vteřinami.

Při výpočtu je nutné zmínit, že určující je sada dat, ze které se vychází. Je pravděpodobné, že při jiné sadě dat mohou být výsledky odlišné. Nedá se však předpokládat, že by se výsledky lišily řádově.

Následující graf zobrazuje čas výpočtu kvadraticky definované úlohy. Z toho je vidět, že kvadratickou úlohu je možné řešit bez větších problémů na krátkém období, což vyplývá i z výsledků minulých kapitol.

Zlom nastává pro tuto sadu dat u plánování výroby na 10 dní, kdy čas výpočtu prakticky skokově vzroste na téměř desetinásobek (z 346 s na 3235 s). Od desetidenního časového horizontu roste obdobně až do hodnoty 5 474 s při plánování 31 dní.



Obrázek 11: Časová náročnost kvadraticky definované úlohy

8.3.2 Srovnání hodnoty účelové funkce

Při srovnání hodnot účelové funkce vycházíme z dat, které byly vypočteny v předchozích částech práce. Obě tyto úlohy měly stejná vstupní data a byly optimalizovány na stejný časový horizont.

Dle předpokladů a informací v literatuře může být rozdíl mezi výpočtem kvadratické a lineární úlohy rozdíl až 3 %. [11] V případě této modelové vodní elektrárny dosahujeme zpravidla polovičních hodnot rozdílu. Jak je vidět v tabulce níže, největší rozdíl je 1,6 %, které bylo pozorováno u týdenního plánování.

Srovnání hodnoty účelové funkce	Den	Týden	Měsíc
Lineární úloha [€]	8 272	61 779	241 085
Kvadratická úloha [€]	8 307	62 804	244 826
Procentní změna [%]	0,43	1,64	1,53

Tabulka 4: Srovnání hodnoty účelové funkce

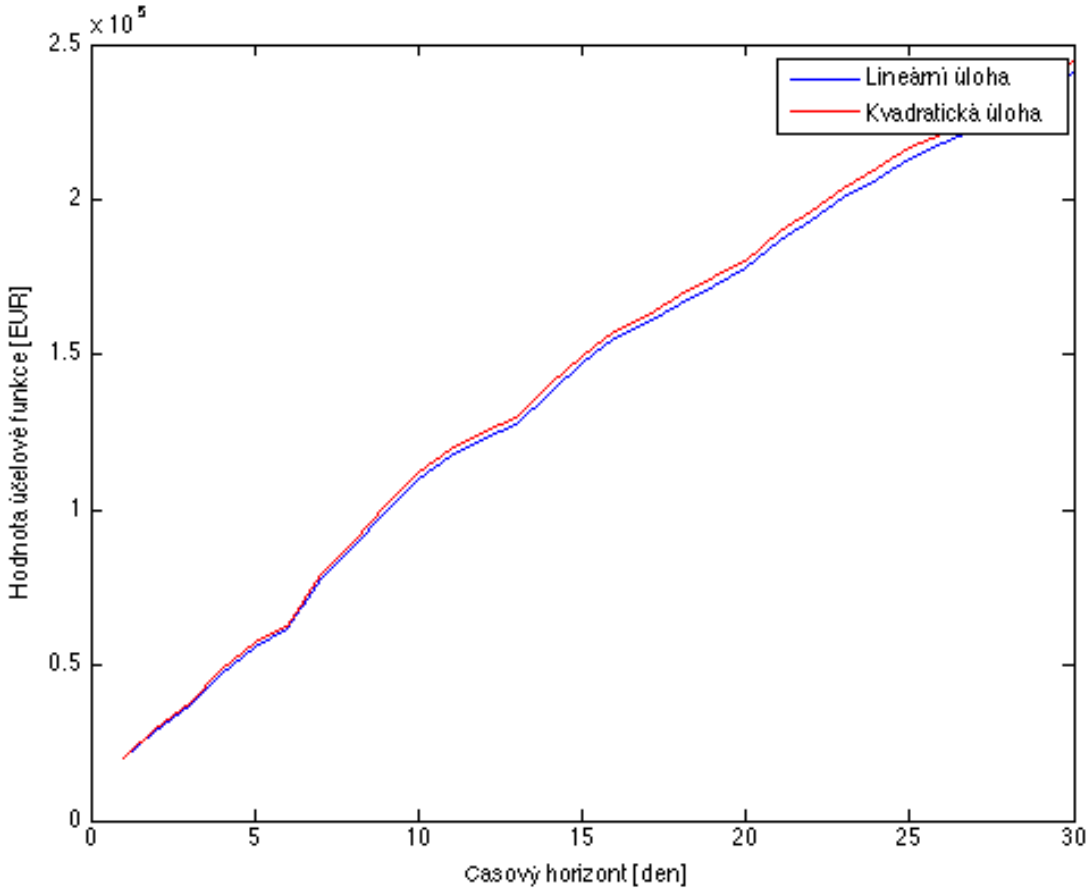
Následující graf srovnává rozdíl hodnoty účelové funkce pro lineárně a kvadraticky definovanou úlohu. Jsou vidět pouze nepatrné rozdíly, a proto je možné bez velké ztráty na přesnosti zanedbat kvadratický člen v účelové funkci.

8.4 Speciální případy uvažované elektrárny

V této části práce jsou blíže porovnány algoritmy na specifických případech, které mohou v průběhu roku nastat. Mimo to je úloha také prezentována na specifických vodních elektrárnách.

V první části se budeme věnovat extrémně dlouhému plánování optimalizační úlohy, zejména ve vztahu k výpočetnímu času a ke skutečnosti, zda je úloha stále ještě reálně přínosná. Budou pomocí lineárního programování provedeny optimalizace na období 3 a 6 měsíců.

Další bude přehrada s většími limity mezi maximální a minimální výškou hladiny, kde budou porovnány výsledky při řešení lineární a kvadratické úlohy.



Obrázek 12: Rozdíly v hodnotě účelové funkce

8.4.1 Lineární úloha - 3 měsíce

Pro dlouhodobé plánování výroby VE je z důvodů uvedených výše úloha formulována lineárně a využit způsob smíšeného celočíselného lineárního programování. I vzhledem k náročnosti procesu byla úloha vypočtena relativně rychle. Díky vhodným predikcím přítoků je možné podle plánu nakupovat dlouhodobé produkty na trhu s elektřinou, jak je popsáno v kapitole 4.5.

Celkový čas výpočtu na půl roku byl zanedbatelný a byl **13,6** s. Celková hodnota účelové funkce byla 825 818 €.

V této podobě je již graf přikládán pouze v příloze B této práce a na přiloženém CD.

8.4.2 Lineární úloha - 6 měsíců

Obdobně jako v předchozí části je modelována úloha pro jeden půlrok. Na tomto horizontu je již nutné brát optimalizaci s ohledem na predikované hodnoty, které jsou pochopitelně zdrojem nepřesností.

Je nutné podotknout, že optimalizace probíhá na nejpravděpodobnější scénář, který jsme do úlohy vložili jako vstup. Při změně skutečných podmínek oproti těm vstupním provozovateli VE nic nebrání v tom, aby dodal nasmlouvaný výkon do sítě formou nákupu elektřiny na denním trhu (viz kapitola 4.5).

Celkový čas výpočtu na půl roku byl stále v mezích v poměru k plánovacímu období a byl **55,8** s. Celková hodnota účelové funkce byla 1 888 420 €.

V této podobě je již graf přikládán pouze v příloze C této práce a na přiloženém CD.

8.4.3 Pokles hladiny v průběhu měsíce

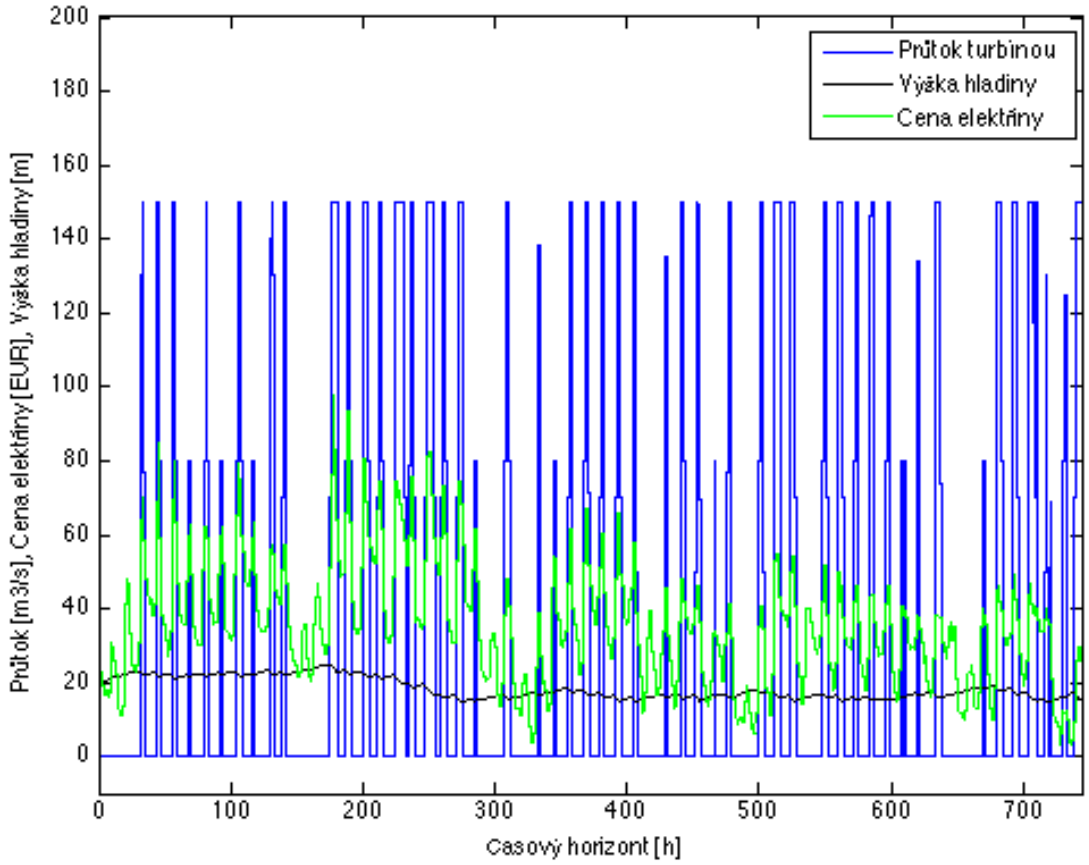
Jako jeden ze specifických případů optimalizace byl vybrán pokles hladiny, který může být typický např. při vypouštění přehrady před očekávanými velkými přítoky v jarních měsících. Tato situace může být typická i v případech, kdy je vytvářena dostatečná rezerva před očekávanými povodňovými situacemi.

Byl vytvořen postupný model poklesu hladiny VE, který skončí na 15 metrech z původních 25. Přestože to je značný pokles, pro některé speciální VE může být reálný. Aby nedošlo k situaci, že na konci algoritmu je vypuštěna veškerá voda v jeden okamžik, byl stanoven maximální denní pokles hladiny o 1 metr.

V tomto případě jsou vidět značné rozdíly jak v grafu zobrazujícím průtok tak v hodnotě účelové funkce. Z těchto výsledků je vidět, že při větší variabilitě ve výšce hladiny je kvadratická úloha vhodnější.

Lineární úloha

Při lineární úloze je funkce linearizovaná pomocí Taylorova rozvoje v průměrné hodnotě výšky hladiny, která je v tomto případě 20 m.



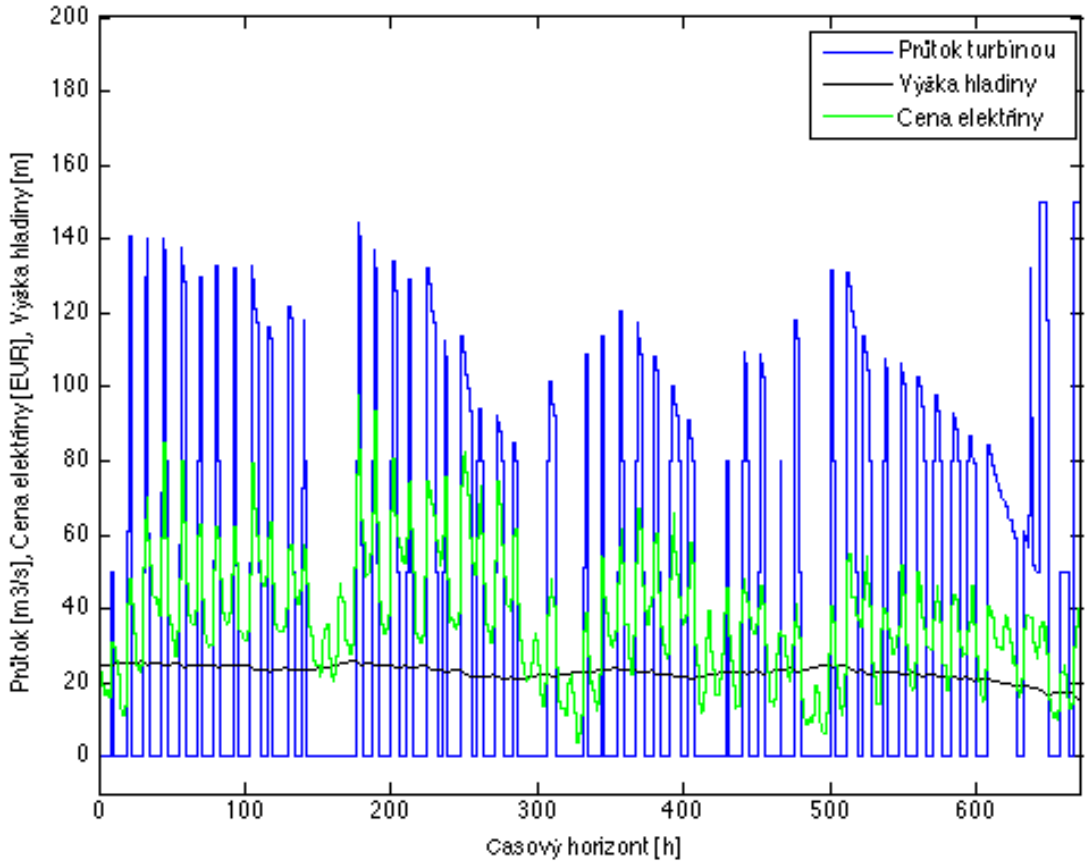
Obrázek 13: Pokles hladiny v průběhu měsíce - Lineární úloha

Výsledná hodnota maximalizované účelové funkce je v této úloze 249 404 €. Čas výpočtu byl jako v minulých případech při řešení MILP zanedbatelný a byl 3,83 s.

Kvadratická úloha

Při porovnání dvou předchozích grafů je vidět jednoznačný rozdíl mezi jednotlivými hodnotami hodinových průtoků. Zřejmé je to především od hodiny cca 500, kdy u kvadratické úlohy klesá vypouštěný objem postupněji.

Celková hodnota maximalizované účelové funkce je 262 339 €. Celkový čas je opět vyšší než u lineární úlohy a v Matlabu trval cca 1h a 30 minut.



Obrázek 14: Pokles hladiny v průběhu měsíce - Kvadratická úloha

8.4.4 VE s kolísavou výškou hladiny

Aby bylo srovnání kompletní, je v této práci prozkoumáno chování optimalizačních algoritmů na vodní elektrárně, která má rozsah pohybu hladiny vyšší, než na hlavním modelovém případě, který prezentuje tato práce. Díky tomu je možné prověřit, jak velký vliv na výsledky úlohy má proměnlivost velikosti spádu.

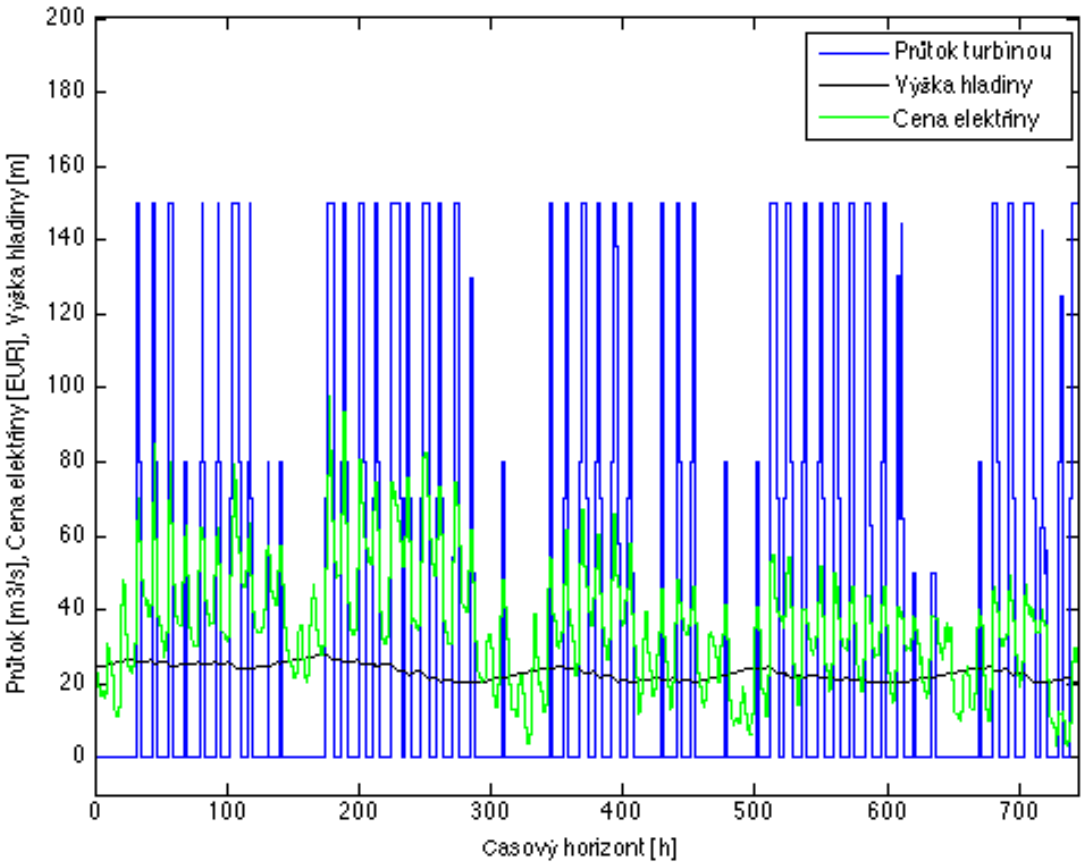
V této úloze byla výška proměnná o ± 4 m. Z výsledků práce lze odečíst, že v horizontu měsíčního plánování při zvýšené variabilitě ve výšce hladiny jsou prakticky stejné rozdíly, jako v základní modelované úloze.

Lineární úloha

Lineární úloha byla vypočtena v celkovém čase 2,94 vteřiny. Hodnota účelové funkce byla 260 970 €.

Srovnání úloh	Čas výpočtu	Účelová funkce
Lineární úloha [€]	3,83	249 404
Kvadratická úloha [€]	5 383	262 339
Procentní změna [%]	–	4,94 %

Tabulka 5: Srovnání hodnoty účelové funkce

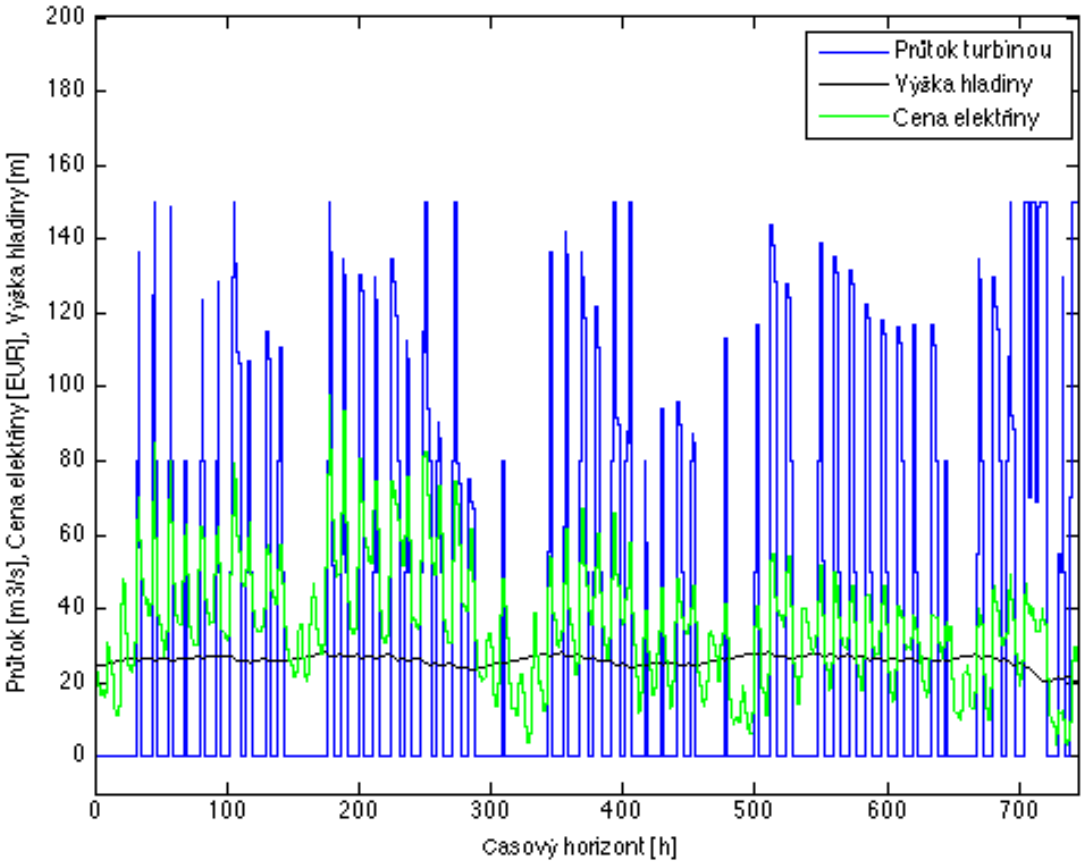


Obrázek 15: Vysoká variabilita ve spádu VE - Lineární úloha

Hlavní rozdíly jsou vidět v grafech výroby. Zatímco u kvadratického programování je vidět postupný pokles průtoku turbínou, u lineární úlohy jsou změny více skokové.

Kvadratická úloha

Čas výpočtu při měsíčním plánování kvadratické úlohy je prakticky totožný, jako v případě základního modelu VE a pohybuje se opět kolem 1h a 40 min. Z následujícího grafu je vidět odlišné rozdělení průtoku turbínou v jednotlivé hodiny. I přesto je maximální hodnota účelové funkce prakticky totožná. Výsledek této úlohy je 265 142 €, což je oproti lineární úloze rozdíl o 1,6 %.



Obrázek 16: Vysoká variabilita ve spádu VE - Kvadratická úloha

9 Závěr

Účelem této práce bylo najít optimální plán provozu středně velké vodní elektrárny. Vzhledem ke specifikům, které jsou pro VE typické, bylo od počátku předpokládáno, že úloha bude značně složitá kvůli kvadratické závislosti výkonu vodní turbíny na výšce spádu a průtoku turbínou.

V kapitole 4.1 je popsán princip přeměny energie vody v nádrži na energii elektrickou. Dále jsou zde popsány základní možnosti prodeje elektřiny na trhu s elektřinou a je zde popsán způsob, který byl využit pro predikci přítoků do nádrže VE a který byl založen na historických datech z ČHMÚ.

Řešení bylo přizpůsobeno jednotlivým časovým horizontům, na které je možné výrobu plánovat. Pro tyto účely bylo rozděleno období na krátkodobé a střednědobé až dlouhodobé.

Výsledné řešení bylo úspěšně aplikováno na model středně velké VE, která byla podrobně namodelována a popsána v kapitole 3.2. V práci je vytvořen model elektrárny, který je při změně vstupních parametrů použitelný na libovolnou středně velkou vodní elektrárnu, což je jeden z hlavních přínosů této práce.

Na základě rozboru optimalizačních metod byla vybrána jako nejvhodnější úloha smíšeného celočíselného lineárního programování (MILP) a smíšeného celočíselného kvadratického programování (MIQP). Druhá jmenovaná metoda musela být řešena pomocí nekonvexních solverů a to z důvodů, které jsou popsány v kapitole 7. Tyto dvě metody byly v kapitole 8 vyhodnoceny a vzájemně porovnány.

Jak již bylo řečeno, klíčovým výsledkem této práce bylo určit vhodnou metodu optimalizace pomocí porovnání jednotlivých přístupů a na praktické úloze optimalizaci analyzovat. V této práci byl pro každý z časových horizontů zvolen jiný algoritmus výpočtu.

Pro plánování krátkodobé (maximálně 7 dní) je doporučeno k výpočtu optimálního plánu výroby smíšené celočíselné kvadratické programování, které více respektuje závislosti výkonu na jednotlivých proměnných. V krátkodobém plánování navíc čas výpočtu není překážkou výpočtu. Při týdenním plánování byl výsledek vypočten za pouhých 23

vteřin, což je přijatelná hodnota.

Pro plánování dlouhodobé je situace opačná. Již při plánování střednědobém na 1 měsíc je kvadratická úloha velice složitě řešitelná a čas jejího výpočtu se blíží k 1 h a 40 min. I přesto, že ve srovnání času výpočtu a plánovaného období je velký rozdíl, je nutné podotknout, že rozdíl v hodnotě účelové funkce je v jednotkách procent. Zejména kvůli tomu vyznívá výsledné doporučení pro zafixování výšky hladiny a řešení zjednodušené lineární úlohy pomocí MILP.

Navíc lineární úloha je i v případě optimalizace na delší období relativně přesná a čas výpočtu je praktický okamžitý, což ukazuje i řešení lineární úlohy na čtvrtročním a půlročním horizontu, které bylo 13,6 s resp. 55 s.

Největším problémem optimalizace jsou predikované hodnoty přítoků a cen elektřiny. Je nutné podotknout, že tyto hodnoty do modelu vstupují při každém plánování, a proto zahrnují vždy určitou nejistotu. Zejména vodní přítoky jsou velice těžko predikovatelné. Kvůli tomu jsme vybrali střední hydrologické hodnoty z ČHMÚ a úloha je tedy řešena na středním scénáři.

Jak je vidět u specifických případů optimalizace, zejména v kapitole 8.4.3, v průběhu roku může dojít k událostem, které naruší běžný průběh plánování. Proto jsou v práci zahrnuty i tyto případy a je na nich porovnána kvadraticky a lineárně definovaná úloha.

Nejdůležitějším závěrem práce je, že i přes závislost výroby vodní elektrárny na výšce spádu, je výška při optimalizaci bez větší chyby zanedbatelná. Při množství predikovaných hodnot, které do výpočtu vstupují je rozdíl v hodnotě účelové funkce o velikosti 2 % snadno zanedbatelný. I přesto je nutné vzít v úvahu konkrétní VE, protože v některých provozech i rozdíl v této míře může být klíčový.

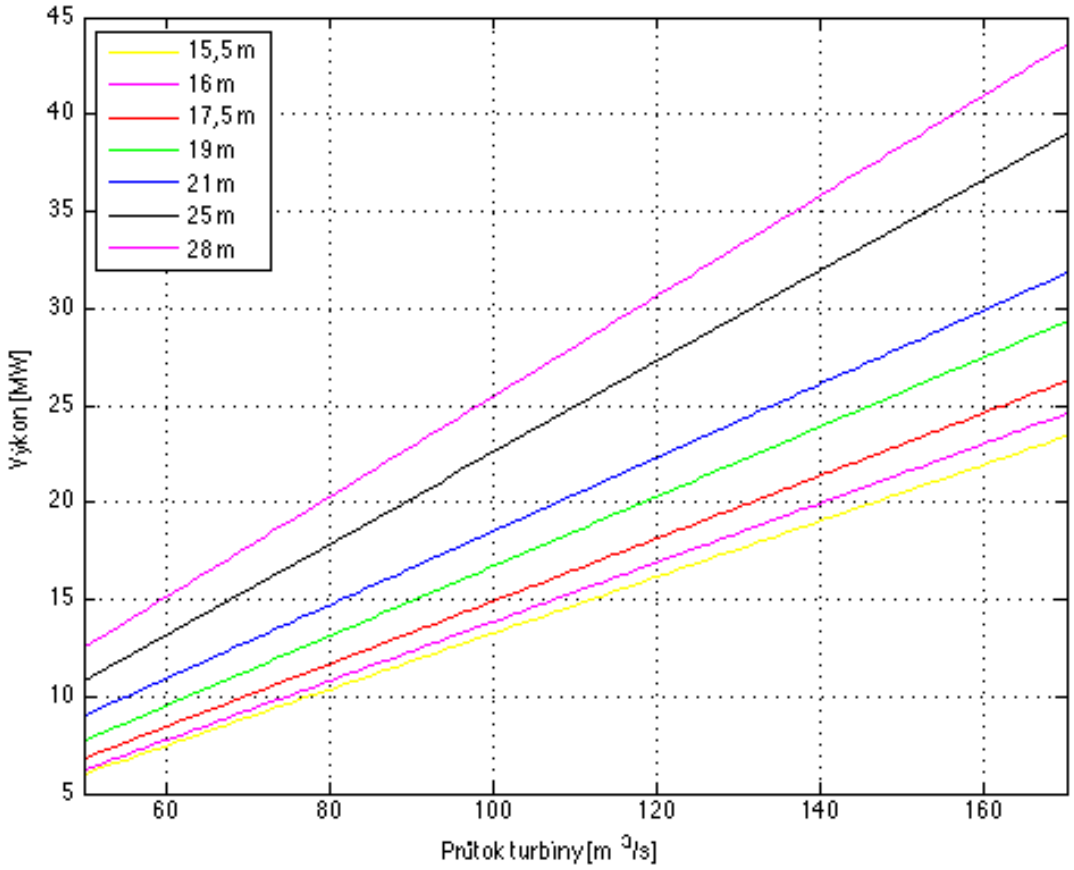
Tento výsledek je pro optimalizaci velice důležitý zejména proto, že řešení kvadratického problému je pro dlouhodobé plánování kvůli vysokému času výpočtu problematické. Díky tomu je možné využít pouze řešení s fixní hodnotou výšky hladiny bez větší odchylky ve výsledku.

Výsledky této práce lze dále využít a rozvíjet v ucelený optimalizační nástroj pro plánování výroby VE. Při tom by měly být zohledněny výsledky práce a doporučení

vhodné optimalizační metody. Tím bylo naplněno zadání práce ve všech bodech.

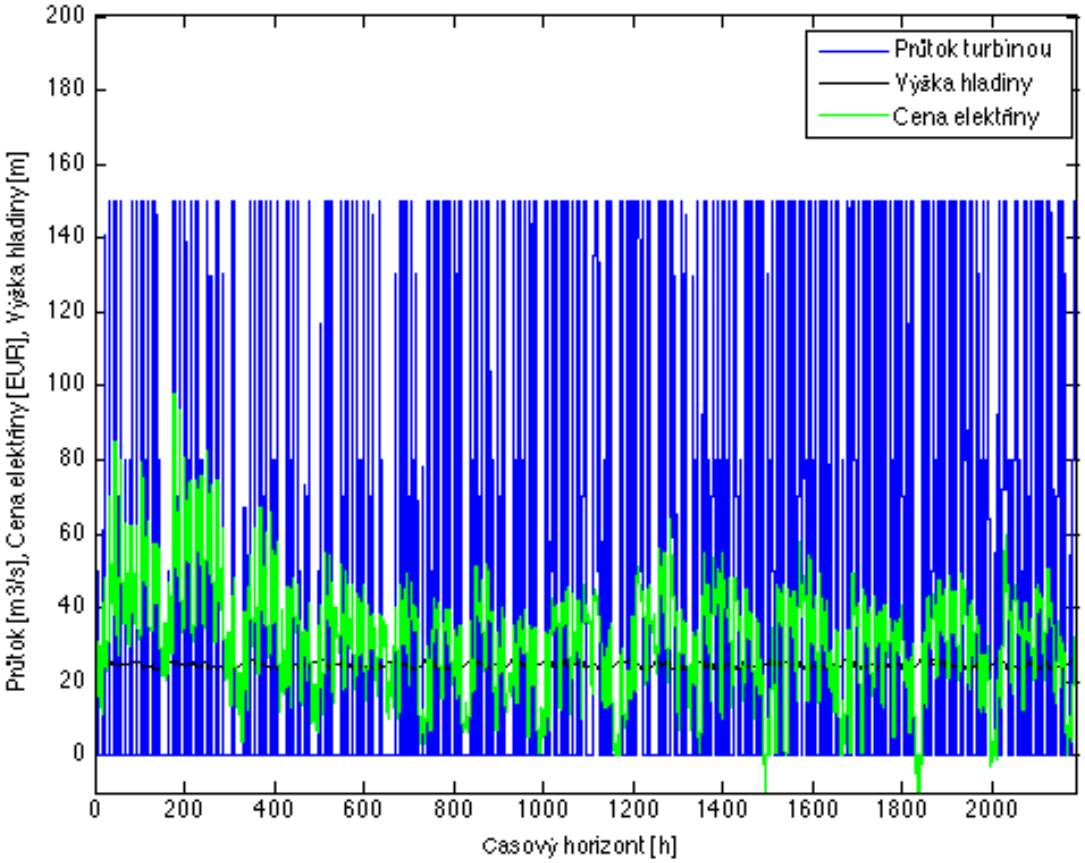
10 Přílohy

Příloha A



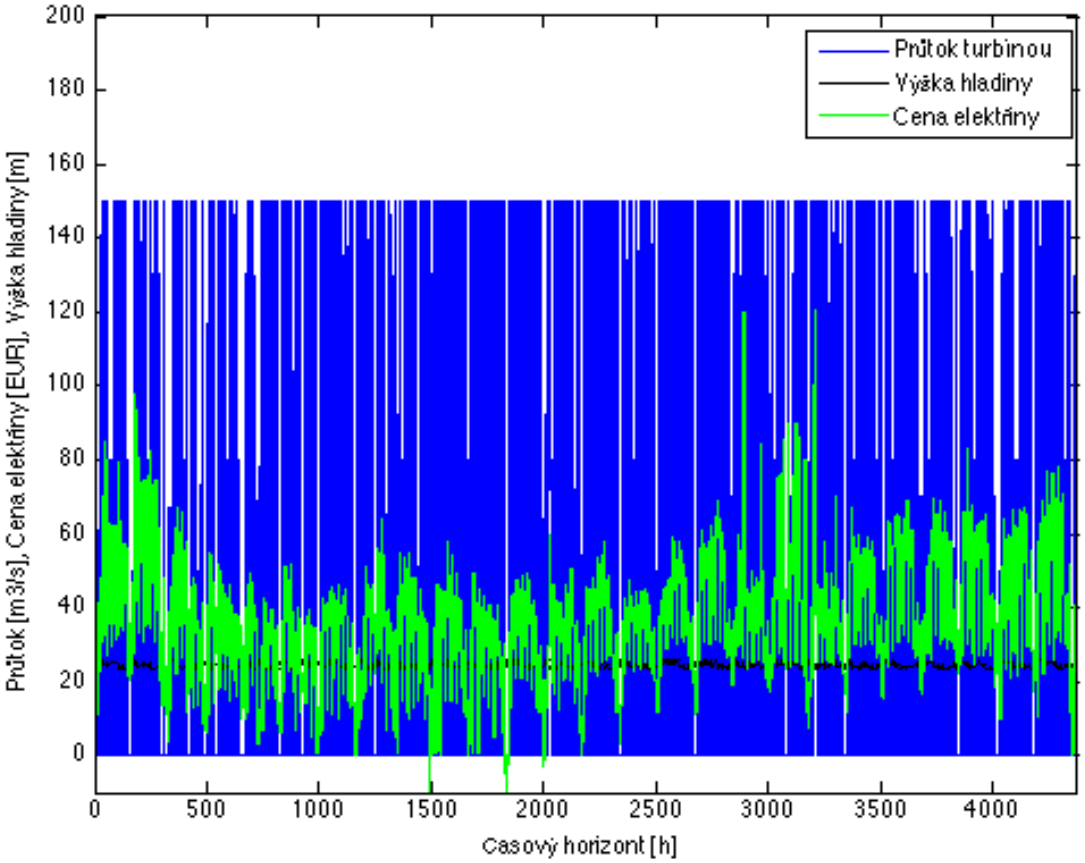
Obrázek 17: Graf závislosti výkonu na průtoku turbínou a výšce hladiny

Příloha B



Obrázek 18: Lineární úloha - 3 měsíce

Příloha C



Obrázek 19: Lineární úloha - 6 měsíců

Seznam použité literatury

[1] A P. O. Lindberg, S. F. Network methods for head-dependent hydro power scheduling.

[2] Bucher, M. Hydro-power planning optimization.

[3] Burer, J. C. S. Globally solving nonconvex quadratic programming problems via completely positive programming.

[4] ERÚ. Roční zprávy o provozu es Čr, 2013, [online]. dostupné z www: http://www.eru.cz/, 2014.

[5] Independent, Z. Costa rica goes 75 days powering itself using only renewable energy, [online]. dostupné z www: http://www.independent.co.uk/news/world/americas/costa-rica-goes-75-days-powering-itself-using-only-renewable-energy-10126127.html, 2015.

[6] Král, F. Diplomová práce: Ocenění odběrového diagramu velkého železničního dopravce [2013].

[7] Leon, S. J. Maximizing bilinear forms subject to linear constraints.

[8] Löfberg, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference* (Taipei, Taiwan, 2004).

[9] Löfberg, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, 2004.

[10] Mandal KK, C. N. Differential evolution technique-based short-term economic generation scheduling of hydrothermal systems.

[11] Mariano SJPS, Catalão JPS, M. V. F. L. Optimising power generation efficiency for head-sensitive cascaded reservoirs in a competitive electricity market.

[12] Wu JK, Zhu JQ, C. G. Z. H. A hybrid method for optimal scheduling of short-term electric power generation of cascaded hydroelectric plants based on particle swarm optimization and chance-constrained programming.

[13] Yuan XH, Cab B, Y. B. Y. Y. Hydrothermal scheduling using chaotic hybrid differential evolution.

[14] Yuan XH, Wang L, Y. Y. Application of enhanced pso approach to optimal scheduling of hydro system.

[15] zákonů ČR, S. Zákon o podporovaných zdrojích energie a o změně některých zákonů, [online]. dostupné z www: http://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=165r=2012, 2013.