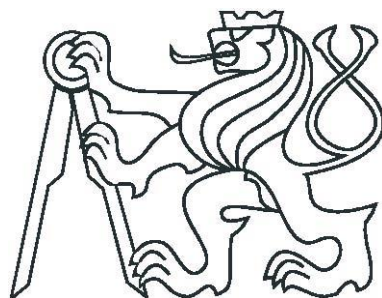


**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Návrh pokročilých systémů řízení pro malý RC letoun

Praha, 2014

Autor: Bc. Jan KMENT



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Jan Kment**

Studijní program: **Kybernetika a robotika**
Obor: **Letecké a kosmické systémy**

Název tématu česky: **Návrh pokročilých systémů řízení pro malý RC letoun**

Název tématu anglicky: **Advanced Flight Control Laws for a Small RC Airplane**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s programem XFLR a návrhem regulátorů v programu Matlab Simulink.
2. Sestavte matematický nelineární model letadla pomocí programu XFLR.
3. Analyzujte model letu, proveďte trimování a vygenerujte linearizované modely pro potřeby návrhu řídicích zákonů.
4. Navrhněte řídicí zákony pro stabilizaci polohových úhlů a úpravu dynamiky pomocí hierarchického přístupu i s využitím modernějších MIMO metod (LQ).
5. Proveďte ověření na nelineárním modelu. Diskutujte výsledky.
6. Proveďte experimentální ověření. Využijte běžící projekt studentského UAV prostředku na katedře řídicí techniky.
7. Navrhněte adaptační mechanismus pro úpravu konstant flight control systému při havarijních stavech jako ulomená směrovka nebo výpadek aktuátoru. Otestujte Vaše řešení na nelineární simulaci.

Seznam odborné literatury:

- [1] Stevens, Lewis: Aircraft Simulation and Control. Springer, 2010.
- [2] XFLR 5 [online]. [cit. 2012-11-13]. Manuály. Dostupné z: <http://www.xflr5.com>
- [3] Cessna 182 RC [online]. [cit. 2012-11-13]. Dostupné z: <http://www.pelikandaniel.com>

Vedoucí diplomové práce: Ing. Martin Hromčík, Ph.D. (K13135)

Datum zadání diplomové práce: 12. listopadu 2012

Platnost zadání do¹: 30. června 2014

Prof. Ing. Vladimír Haasz, CSc.
vedoucí katedry



Prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 12. 11. 2012

¹ Platnost zadání je omezena na dobu tří následujících semestrů.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....

podpis

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. Ing. Martinu Hromčíkovi, Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce, za cenné rady a odbornou pomoc. Také bych poděkoval své rodině a přítelkyni za psychickou podporu, kterou mi poskytovali během celého studia.

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je návrh řízení pro malý RC letoun. Návrhu řízení předchází sestavení modelu letadla v prostředí Matlab. Ten bude získán z modelu sestaveného v prostředí XFLR a z měření v laboratořích.

The Abstract

Aim this thesis is design control for small RC airplane. At first it is necessary create a model of aircraft. This model is design in the environment XFLR and laboratory measurements.

Obsah

1.	Teoretická část	1
1.1	Úvod.....	1
2.	Dynamika letadla	2
2.1	Souřadný systém letadla	2
2.1.1	Převod ze zemské souřadné soustavy do letadlové	2
2.1.2	Převod z aerodynamické souřadné soustavy do letadlové	3
2.2	Pohybové rovnice	5
2.2.1	Základní tvary pohybových rovnic.....	5
2.2.2	Složkové tvary pohybových rovnic	6
2.2.3	Aerodynamika	9
2.2.4	Souhrn pohybových rovnic.....	10
2.2.5	Linearizace rovnic letadla.....	11
2.3	Podélný pohyb	15
2.3.1	Podélné pohybové rovnice.....	15
2.3.2	Podélná stabilita a její koeficienty.....	16
2.3.3	Stavový popis podélného pohybu.....	17
2.3.4	Přenosová funkce.....	18
2.4	Stranový pohyb	19
2.4.1	Rovnice silové a momentová.....	19
2.4.2	Příčná stabilita a její koeficienty	20
2.4.3	Stavový popis stranového pohybu	21
2.4.4	Přenosová funkce.....	22
3.	Model letadla	23
3.1	Základní parametry letadla	23
3.2	Avionika letadla	24
3.3	Měření momentů setrvačnosti.....	25
3.4	XFLR model letadla.....	27
3.4.1	VLM – panelová metoda	27
3.4.2	XFoil.....	27
3.4.3	Simulace XFLR 5	28
3.5	AVL model letadla.....	30
3.5.1	Získ aerodynamických dat pro model	32
3.5.2	Určení těžiště letounu	33
4.	Stabilizace a řízení	34
4.1	Hierarchie řízení	34
4.2	Trimování letounu.....	34
4.3	Nelineární model letounu.....	36
4.3.1	Porovnání modelů.....	37
4.4	Podélný pohyb	37
4.4.1	Analýza polohy pólů.....	37
4.4.2	Stabilizace rychlosti klopení – <i>Short-period</i>	39
4.4.3	Stabilizace úhlu náběhu	40
4.4.4	Autopilot podélného sklonu – <i>Phugoid</i>	40
4.5	Stabilizace stranového pohybu	42
4.5.1	Analýza polohy pólů.....	42
4.5.2	Návrh tlumiče kymácivé složky – <i>Dutch roll damper</i>	44
4.5.3	Koordinace – <i>kymácivé složky</i>	45

4.5.4	Návrh tlumiče klonivé složky – <i>Roll damper</i>	46
4.5.5	Stabilizace příčného náklonu	47
4.5.6	Stabilizace kurzu	48
4.6	Návrh LQ regulátoru	49
4.6.1	Návrh podélného LQ regulátoru	50
4.6.2	Návrh příčného LQ regulátoru	51
4.6.3	Návrh řízení při poruše	53
5.	Experimentální měření na RC letounu	55
5.1	Vybavení letadla	55
5.2	Měřená data	55
5.3	Porovnání reálného letadla s modelem	57
6.	Závěr	59

Seznam obrázků

Obrázek 2.1:	Převod souřadné soustavy ze zemské do letadlové	2
Obrázek 2.2:	Převod souřadné soustavy z aerodynamické do tělesové	3
Obrázek 3.1:	Rádiem řízený model letadla	23
Obrázek 3.2:	Modul se standartními senzory	24
Obrázek 3.3:	Moment setrvačnosti	25
Obrázek 3.4:	Ukázka měření momentů setrvačnosti	26
Obrázek 3.5:	Profil modelu N-panelů křídla	27
Obrázek 3.6:	Převod souřadné soustavy z aerodynamické do tělesové	28
Obrázek 3.7:	Výpočet pro profil křídla NACA2412	28
Obrázek 3.8:	3D model křídla a ocasních ploch	29
Obrázek 3.9:	Ukázka simulace letu v programu XFLR 5	29
Obrázek 3.10:	Průběhy CL, CD, Cm, CL/CD	30
Obrázek 3.11:	Model křídla a ocasních ploch v prostředí AVL	30
Obrázek 3.12:	Osy letadla UAV	33
Obrázek 4.1:	Postup pro získání lineárního modelu	35
Obrázek 4.2:	Trimování pomocí XFLR5	35
Obrázek 4.3:	Zjednodušená vnitřní struktura modelu letadla	36
Obrázek 4.4:	Nelineární model letadla	36
Obrázek 4.5:	Nelineární model letadla	37
Obrázek 4.6:	Umístění pólů podélného pohybu	38
Obrázek 4.7:	Umístění pólů podélného pohybu	38
Obrázek 4.8:	Blokové schéma stabilizace rychlosti klopení	39
Obrázek 4.9:	Přechodové charakteristiky	39
Obrázek 4.10:	Blokové schéma stabilizace rychlosti klopení	40
Obrázek 4.11:	Autopilot podélného sklonu	41
Obrázek 4.12:	Přechodová charakteristika podélného sklonu	41
Obrázek 4.13:	Umístění pólů příčného pohybu	43
Obrázek 4.14:	Umístění pólů příčného pohybu	43
Obrázek 4.15:	Blokové schéma tlumiče kymácivé složky	44
Obrázek 4.16:	Přechodová charakteristika tlumiče kymácivé složky	44
Obrázek 4.17:	Blokové schéma tlumiče kymácivé složky	45
Obrázek 4.18:	Přechodová charakteristika kymácivé složky	45
Obrázek 4.19:	Blokové schéma tlumiče klonivé složky	46
Obrázek 4.20:	Přechodová charakteristika tlumiče klonivé složky	46
Obrázek 4.21:	Blokové schéma stabilizace příčného náklonu	47

Obrázek 4.22:	Přechodová charakteristika stabilizace příčného náklonu	47
Obrázek 4.23:	Blokové schéma stabilizace kurzu	48
Obrázek 4.24:	Stabilizace kurzu	48
Obrázek 4.25:	Blokové schéma LQ regulátoru	49
Obrázek 4.26:	Blokové schéma LQ regulátoru podélného pohybu	50
Obrázek 4.27:	Odezvy LQ regulátoru podélného pohybu.....	50
Obrázek 4.28:	Blokové schéma LQ regulátoru příčného pohybu	51
Obrázek 4.29:	Odezvy LQ regulátoru příčného pohybu	51
Obrázek 4.30:	Blokové schéma LQ regulátoru směrového autopilota.....	52
Obrázek 4.31:	Odezvy LQ regulátoru směrového autopilota.....	52
Obrázek 4.32:	Odezvy porucha křidélek	53
Obrázek 4.33:	Výchylka směrovky, rychlost zatačení	53
Obrázek 4.34:	Odezvy porucha směrovky	54
Obrázek 4.35:	Výchylka křidélek, rychlost zatačení	54
Obrázek 5.1:	Let s RC modelem	56
Obrázek 5.2:	Let s RC modelem	56
Obrázek 5.3:	Porovnání měření s matematickým modelem.....	56
Obrázek 5.4:	Porovnání změn úhlů náběhu	56
Obrázek 5.5:	Porovnání rychlosti stoupání	56

Seznam tabulek

Tabulka 2.1:	Letové veličiny a jejich značení.....	4
Tabulka 3.1:	Základní parametry UAV	23
Tabulka 3.2:	Tabulka momentů	26
Tabulka 3.3:	Výstupní data AVL	31
Tabulka 3.4:	Nastavení různých úhlů náběhů XFLR5.....	31
Tabulka 3.5:	Ukázka výstupních dat z XFLR5	31
Tabulka 3.6:	Souhrn aerodynamických koeficientů	33

Kapitola 1

1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Úvod

Obsahem diplomové práce je vytvoření modelu a návrhu řízení pro malý RC letoun. Pro návrh řízení a simulaci systému je použit program MATLAB (Simulink). Před samotným návrhem řízení je zvolený model RC letounu vymodelován v programech XFLR a AVL. Z těchto programů jsou získány důležité konstanty pro nelineární model. Na závěr, pomocí měření na reálném RC modelu, dostáváme momenty setrvačnosti pro nelineární model.

Hlavním cílem této práce je návrh regulátorů pro získaný nelineární model RC letadla a porovnání s návrhem „odhadem“ konstant. Regulátory mají usnadnit a zpříjemnit pilotovi ovládání letounu pomocí rádiové vysílačky. Takto vybavené letadlo lze použít jako UAV prostředek vybavený funkcemi jako je trackování, let z místa A do místa B. Diplomová práce je vypracována v rámci projektu studentského UAV prostředku na katedře řídicí techniky ČVUT Fakulty elektrotechnické.

Bezpilotní letoun (též UAV z anglického Unmanned Aerial Vehicle) je letadlo bez posádky, které může být řízeno buď na dálku, nebo je naprogramované pro samostatný let (letový plán, návratová trať). V dnešní době jsou stále častěji využívány bezpilotní prostředky jak k soukromým (zemědělství, hašení požárů, policejnímu sledování), tak k vojenským účelům (průzkumné i útočné lety). Za první bezpilotní prostředek lze považovat již balony nesoucí bomby, které roku 1849 použila rakousko-uherská armáda. Opravdový bezpilotní letoun, jak si ho mnoho z nás představuje, byl roku 1917 zkonstruován Archibaldem Montgomery Lowou (British Army) a jmenoval se Aerial Target (radiově řízený).

Kapitola 2

2. DYNAMIKA LETADLA

Znalost dynamiky letadla je nezbytná jednak pro řízení letadla, a jednak také pro jeho stabilizaci. Systém, se kterým chceme pracovat, je nutno nejprve matematicky a fyzikálně popsat. Fyzikální popis vychází z Newtonových pohybových rovnic. Poloha a pohyb letadla jsou popsány Eulerovy úhly. Tyto rovnice pak tvoří základ pro simulační model.

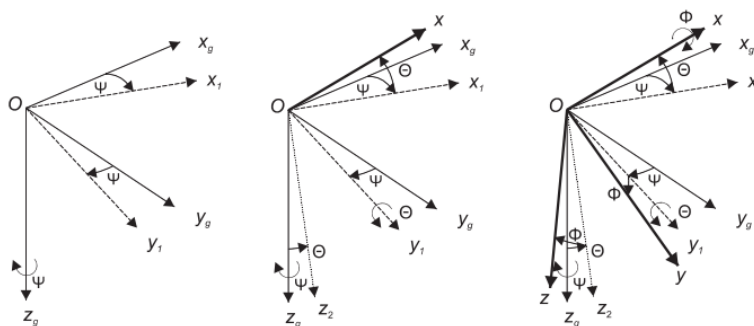
2.1 Souřadný systém letadla

Předtím než použijeme Newtonovy zákony k vytvoření dynamického modelu letadla, musíme definovat souřadný systém. V definovaném systému můžeme využít Newtonových zákonů. Pohyb letadla kolem jeho těžiště vztahujeme k pravouhlému souřadnému systému. Ten tvoří počátek a podélnou, příčnou a kolmou osu. U normy ISO, kladný směr kolmé osy směřuje dolů a u normy GOST, kde kladný směr svislé osy směřuje nahoru. Při vyjádření dynamiky a kinematiky letu využíváme tři základní systémy:

- letadlovou souřadnou soustavu (O, x, y, z)
- aerodynamickou souřadnou soustavu (O_a, x_a, y_a, z_a)
- zemskou souřadnou soustavu (O_g, x_g, y_g, z_g)

2.1.1 Převod ze zemské souřadné soustavy do letadlové

Transformace ze zemské souřadné soustavy do letadlové souřadné soustavy se provádí postupným otáčením všech okolo os, jak ukazuje (Obr. 2-1).



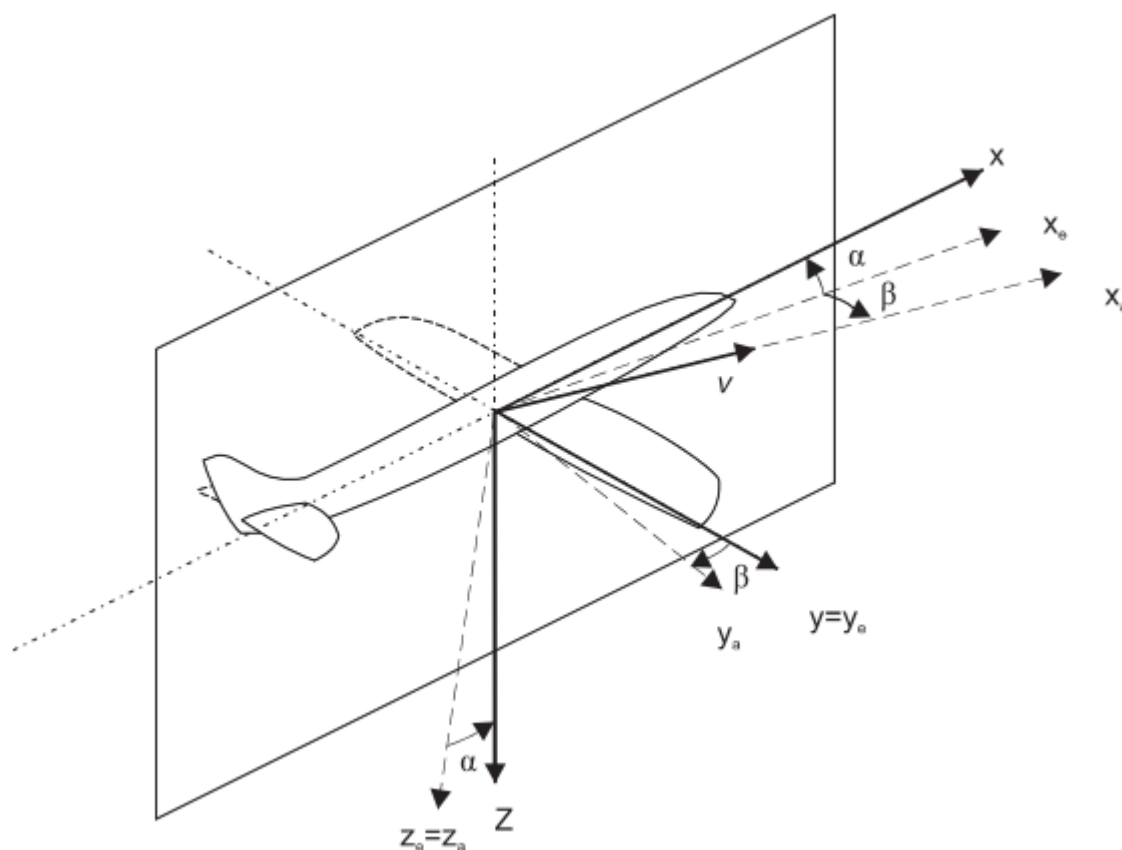
Obrázek 2.1: Převod souřadné soustavy ze zemské do letadlové

Nejprve otáčíme zemskou souřadnou soustavu kolem kolmé osy z_g do roviny symetrie letadla tvořené podélnou a kolmou osou letadla, tím získáme **kursový úhel letadla** ψ . Tímto pootočením získáme nový souřadný systém O, x_1, y_1, z_g (Obr. 2-1a)). Druhým otáčením tohoto souřadného systému kolem příčné pomocné osy y_1 do podélné osy letadla x získáme úhel **podélného sklonu letadla** θ . Nový souřadný systém O, x, y_1, z_2 lze vidět na Obr. 2-1b). Třetím pootočením o úhel **příčného náklonu** ϕ převedeme do letadlové souřadné soustavy O, x, y, z , tato celková transformace je vidět na Obr. 2-1 c).

2.1.2 Převod z aerodynamické souřadné soustavy do letadlové

Pro určení dalších veličin jsou podstatné úhly ofukování. Zmíněné úhly získáme dvěma pootočeními aerodynamické souřadné soustavy (její svíslá osa leží v rovině symetrie letadla). Prvním otočením aerodynamické souřadné soustavy kolem její kolmé osy z_a do roviny symetrie letadla dostaneme úhel vybočení β a souřadný systém O, x_e, y, z_a .

Dalším otočením tohoto souřadného systému kolem příčné osy y letadlové souřadné soustavy o úhel náběhu α dosáhneme jeho splnutí s letadlovou souřadnou soustavou O, x, y, z . Zde jsou také znázorněny osy experimentální souřadné soustavy O, x_e, y_e, z_e (Obr. 2-2).



Obrázek 2.2: Převod souřadné soustavy z aerodynamické do tělesové

Literatura uvádí rozdílné značení vybraných veličin. Pro účely této diplomové práce uvádím značení ISO (viz. Tab. 2-1). Polohové úhly, úhlové rychlosti a úhlu ofukování představují letové veličiny.

		Norma	Název	
		ISO	Česky	Anglicky
LETOVÉ VELIČINY	Souřadné veličiny	x	podélná	longitudinal
		y	příčná	lateral
		z	kolmá	normal
	Polohové úhly	θ	podélný sklon	Pitch angle
		ϕ	příčný sklon	Roll angle
		ψ	kurz	Yaw angle
	Úhlové rychlosti/derivace	$p=\omega_x=\dot{\phi}^*$	klonění	Roll rate
		$q=\omega_y=\dot{\theta}^*$	klopení	Pitch rate
		$r=\omega_z=\dot{\psi}^*$	zatačení	Yaw rate
	Úhly ofukování	α	úhel náběhu	Angle of attack
		β	úhel vybočení	Sideslip angle
	Úhly ofukování	a_z	normálové	
		a_y	stranové	
		Síly	$X, D=q \cdot S \cdot C_D$	odporová síla
$Z, L=q \cdot S \cdot C_L$			vztlaková síla	Lift
$Y=q \cdot S \cdot C_Y$			stranová síla	Sideforce
Momenty		$M_x=q \cdot S \cdot b \cdot C_L$	klonivý moment	Rolling moment
		$M_z=q \cdot S \cdot b \cdot C_N$	zatačivý moment	Yawing moment
		$M_y=q \cdot S \cdot c \cdot C_M$	klopivý moment	Pitching moment
Úhel sklonu trajektorie letu		$\gamma=\vartheta-\alpha$	ve vertikální rovině	Flight path angle
		$\gamma_S=\psi-\beta$	v horizontální rovině	
Výchylky kormidel		δ_e, η	výškovka	elevator
	δ_a, ξ	křidélka	aileron	
	δ_r, ζ	směrovka	rudder	

Tabulka 2.1: Letové veličiny a jejich značení

2.2 Pohybové rovnice

Nyní, máme-li definované souřadnicové systémy, je možné odvodit pohybové rovnice z druhého Newtonova zákona. Pro studium vlastností letadla, návrhů systémů automatického řízení a rozbor jejich vlastností se vychází ze soustavy šesti linearizovaných pohybových rovnic. Existují pravidla pro použití pohybových rovnic. Jejich zjednodušené znění uvádím níže.

- 1) Letadlo je tuhé těleso (šest stupňů volnosti), je geometricky a hmotově souměrné.
- 2) Hmotnost letadla je konstantní (neuvažujeme např. úbytek paliva za letu)
- 3) Hlavní osy setrvačnosti jsou totožné s letadlovou souřadnou soustavou (zjednodušením momentových rovnic)
- 4) Vektor tahu motorů leží v podélné ose letadla (zjednodušením silových i momentových rovnic zjednoduší se silové i momentové rovnice)
- 5) Tíhové zrychlení je konstantní
- 6) Zemská souřadná soustava je inerciální soustavou. Neuvažuje se Coriolisovo zrychlení.

2.2.1 Základní tvary pohybových rovnic

Rovnice letadla vycházejí ze základních principů Newtonovy mechaniky. Pomocí druhého Newtonova pohybového zákona (zákona síly).

$$a = \frac{F}{m} \quad \rightarrow \quad F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt} = \frac{dh}{dt} \quad (2.1)$$

Druhý vztah definuje momenty, které působí na letadlo v jednotlivých osách.

$$M = I \cdot \varepsilon = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{dH}{dt} \quad (2.2)$$

Výslednou vnější sílu a výsledný vnější moment působící na těleso vyjádříme ve vektorovém tvaru (pomocí rovnic 2.1 a 2.2):

$$F = m \frac{dv}{dt} + m[\omega \times v] \quad (2.3)$$

$$M = \frac{dH}{dt} + [\omega \times H] \quad (2.4)$$

První členy obou rovnic jsou vztaženy k tělesové souřadné soustavě, druhé členy charakterizují rotační pohyb letadla. Tyto vektorové rovnice budeme dále řešit ve složkovém tvaru v letadlové souřadné soustavě.

2.2.2 Složkové tvary pohybových rovnic

Rovnice 2.3 a 2.4 rozepíšeme pro každou osu souřadného systému (x,y,z). Z nichž dostaneme tři silové a tři momentové rovnice.

Silové rovnice

V těchto osách bude potřeba definovat rychlost (v jednotlivých složkách):

$$v_x = u = v \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (2.5)$$

$$v_y = v = v \cdot \sin \beta \quad (2.6)$$

$$v_z = w = v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \quad (2.7)$$

Složky úhlové rychlosti jsou odvozeny z Eulerových úhlů letadlové souřadné soustavy:

$$\omega_x = p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \cos \theta \quad (2.8)$$

$$\omega_y = q = \dot{\theta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \quad (2.9)$$

$$\omega_z = r = \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \quad (2.10)$$

Nejprve v rovnici 2.3 vyjádříme vektorový součin $[\omega \times v]$ pomocí směrových vektorů a složek úhlové a posuvné rychlosti do jednotlivých os letadlové souřadné soustavy

$$F = m \frac{dv}{dt} + m[\omega \times v] \quad (2.11)$$

$$[\omega \times v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} i(\omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y) \\ -j(\omega_x \cdot v_z - \omega_z \cdot v_x) \\ +k(\omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x) \end{matrix} \quad (2.12)$$

Složky sil pohybu tuhého tělesa (letadla) v osách tělesové souřadné soustavy pak mají tvar:

$$F_x = m \cdot (\dot{v}_x - v_y \cdot \omega_z + v_z \cdot \omega_y) \quad (2.13)$$

$$F_y = m \cdot (\dot{v}_y + v_x \cdot \omega_z - v_z \cdot \omega_x) \quad (2.14)$$

$$F_z = m \cdot (\dot{v}_z - v_x \cdot \omega_y + v_y \cdot \omega_x) \quad (2.15)$$

Složky vnějších sil jsou tvořeny silami:

- 1) aerodynamickými: - odporová síla – D
- vztlaková síla – L
- boční síla - Y

- 2) tahovou silou $T \equiv T_x$, dle předpokladu nemá složky v osách y, z

$$G_x = -m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (2.16)$$

- 3) tíhovou - gravitační

$$G_y = m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \quad (2.17)$$

$$G_z = m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi \quad (2.18)$$

Po dosazení vztahů pro aerodynamické síly G (2.17, 2.18, 2.19) do rovnic pro složky rychlosti letu letadla v (2.13, 2.14, 2.15), dostaneme soustavu **nelineárních diferenciálních rovnic**:

$$F_x = X - m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot (\dot{v}_x + \omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y) \quad (2.19)$$

$$F_y = Y + m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi = m \cdot (\dot{v}_y + \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z) \quad (2.20)$$

$$F_z = Z + m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi = m \cdot (\dot{v}_z + \omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x) \quad (2.21)$$

Momentové rovnice

Vektorovou momentovou rovnici (2.4) vyjádříme opět ve složkách tělesové soustavy. Rozepíšeme pro každou osu souřadného systému (x, y, z). Nejprve určíme složky momentu hybnosti H :

$$H = r \times v \cdot m = r \times h \quad \rightarrow \quad dH = r \times dh \quad (2.22)$$

$$dh = [\omega \times r] \cdot dm \quad (2.23)$$

v němž vektorový součin představuje obvodovou – tangenciální rychlost. Vše vyjádříme opět ve složkovém tvaru:

$$[\omega \times r] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} i(\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y) \\ -j(\omega_x \cdot z - \omega_z \cdot x) \\ +k(\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x) \end{matrix} \quad (2.24)$$

Tyto složky tvoří třetí řádek determinantu pro výpočet vektorového součinu ve vztahu (2.22) pro složky elementu momentu hybnosti dH .

$$dH = r \times dh = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y & \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z & \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{vmatrix} \cdot dm \quad (2.25)$$

Rozepsaný vztah (2.25) pomocí integrace přes hmotnost tělesa získáme momenty hybnosti v jednotlivých složkách.

$$H_x = \int \left[(y^2 + z^2) \omega_x - xy \omega_y - xz \omega_z \right] \cdot dm = I_x \cdot \omega_x - I_{xy} \cdot \omega_y - I_{xz} \cdot \omega_z \quad (2.26)$$

$$H_y = \int \left[(x^2 + z^2) \omega_y - xy \omega_x - xz \omega_z \right] \cdot dm = I_y \cdot \omega_y - I_{yx} \cdot \omega_x - I_{yz} \cdot \omega_z \quad (2.27)$$

$$H_z = \int \left[(x^2 + y^2) \omega_z - xz \omega_x - yz \omega_y \right] \cdot dm = I_z \cdot \omega_z - I_{zx} \cdot \omega_x - I_{zy} \cdot \omega_y \quad (2.28)$$

Tyto momenty hybnosti obsahující momenty setrvačnosti kolem os letadlové souřadné soustavy a deviační momenty. Z těchto rovnic definujeme matici setrvačnosti I :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Matice I je konstantní, symetrická, pozitivně definitivní. Pomocí matice I můžeme rovnice (2.26, 2.27 a 2.28) vyjádřit ve tvaru:

$$H = I \cdot \omega \quad (2.30)$$

Tento vztah využijeme též pro vyjádření vnějšího momentu M v rovnici 2.4 působící na letadlo:

$$M = \frac{dH}{dt} + [\omega \times H] = I \cdot \dot{\omega} + [\dot{\omega} \times I \cdot \dot{\omega}] \quad (2.31)$$

a jeho složek M_i , kde používáme úsporného zápisu k vyjádření složek úhlových rychlostí pohybu letadla:

$$M = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ p \cdot I_x - q \cdot I_{xy} - r \cdot I_{xz} & q \cdot I_y - p \cdot I_{xy} - r \cdot I_{yz} & r \cdot I_z - p \cdot I_{xz} - q \cdot I_{yz} \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

Po dosazení dostaneme soustavu dalších tři **nelineárních diferenciálních rovnic**:

$$M_x = I_x \cdot \dot{p} - (I_y - I_z) \cdot r \cdot q + (p \cdot r - \dot{q}) \cdot I_{xy} - (p \cdot q + \dot{r}) \cdot I_{xz} - (q^2 - r^2) \cdot I_{yz} \quad (2.33)$$

$$M_y = I_y \cdot \dot{q} - (I_z - I_x) \cdot r \cdot p + (p \cdot q - \dot{r}) \cdot I_{yz} - (r \cdot q + \dot{p}) \cdot I_{xy} - (r^2 - p^2) \cdot I_{xz} \quad (2.34)$$

$$M_z = I_z \cdot \dot{r} - (I_x - I_y) \cdot p \cdot q + (q \cdot r - \dot{p}) \cdot I_{xz} - (p \cdot r + \dot{q}) \cdot I_{yz} - (p^2 - q^2) \cdot I_{xy} \quad (2.35)$$

Popsané momenty působí kolem těžiště letadla a jsou vyvolány aerodynamickými silami (propulsní síla působí, dle předpokladu, v podélné ose tělesové soustavy). Momenty sil neobsahují příspěvky od gravitačních sil. Vzhledem k tomu, že tyto rovnice byly odvozeny v tělesové soustavě a rovinou symetrie je rovina xz , pro deviační momenty platí $I_{yz} = I_{xy} = 0$, deviační moment $I_{xz} \neq 0$.

2.2.3 Aerodynamika

Analýza aerodynamika letadla je omezena na dvoudimenzionální, podzvukové nestlačitelné proudění. Dvourozměrné proudění znamená, že rychlost proudění v každém bodě na profilu je rovnoběžné s referenční rovinou. Proto se řešení aerodynamických sil omezí pouze na vztakovou a odporovou složku. Rychlost letadla se bude pohybovat pod 0,4 Machu. Základem pro pochopení vzniku aerodynamických sil je Bernoulliho rovnice kontinuity pro stlačitelné tekutiny.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \bar{V}_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \bar{V}_2^2$$

Když proud nabíhajícího vzduchu a tlak označíme \bar{V} a p , lokální proudění \bar{V}_A a p_A . Dosadíme do Bernoulliho rovnice výše:

$$p_A - p = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[1 - \left(\frac{\bar{V}_A}{\bar{V}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{A_L}, \quad \text{kde } C_{A_L} \text{ je bezrozměrný koeficient}$$

úměrnosti. Výsledkem je, že v podzvukovém, nestlačitelném proudění je rozdíl mezi lokálním a statickým tlakem je úměrný dynamickému tlaku nabíhajícího proudu.

$$F_A = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S_A C_A, \quad \text{kde } S_A \text{ je plocha křídla a } C_A \text{ je aerodynamický koeficient}$$

Potom aerodynamické síly a momenty mohou být popsány následovně:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_x & Y_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_y & Z_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_z \\ L_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b C_l & M_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \bar{c} C_m & N_A &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b C_n \end{aligned}$$

kde S je plocha křídla, b je rozpětí křídla a \bar{c} je střední geometrická tětiva křídla. Pro zjednodušení aerodynamického modelu je letadlo rozděleno na čtyři hlavní aerodynamické plochy, což jsou křídla, trup, výškovka a směrovka. Poté lze tedy rozdělit analýzu letadla na podélný C_x, C_z, C_m a příčný pohyb C_y, C_l, C_n .

2.2.4 Souhrn pohybových rovnic

Zde zrekapitulujeme již odvozené pohybové rovnice pro letadlo a síly a momenty rozepíšeme do složek podle příčiny vzniku:

$$X - m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot (\dot{v}_x + \omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y)$$

$$Y + m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi = m \cdot (\dot{v}_y + \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z)$$

Silové rovnice

$$Z + m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi = m \cdot (\dot{v}_z + \omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x)$$

$$L = I_x \cdot \dot{p} - \dot{r} \cdot I_{xz} - (I_y - I_z) \cdot r \cdot q - p \cdot q \cdot I_{xz}$$

$$M = I_y \cdot \dot{q} - (I_z - I_x) \cdot r \cdot p - (r^2 - p^2) \cdot I_{xz}$$

Momentové rovnice

$$N = I_z \cdot \dot{r} - \dot{p} \cdot I_{xz} - (I_x - I_y) \cdot p \cdot q + q \cdot r \cdot I_{xz}$$

$$p = \dot{\phi} + 0 \quad -\dot{\psi} \cdot \sin \theta$$

$$q = 0 + \dot{\theta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi$$

Kinematické rovnice

$$r = 0 - \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

$$\dot{\phi} = p + q \cdot \sin \phi \cdot \tan \theta + r \cdot \cos \phi \cdot \tan \theta$$

$$\dot{\theta} = 0 + q \cdot \cos \phi \quad - r \cdot \cos \phi$$

Eulerovy úhly

$$\dot{\psi} = 0 + \frac{q \cdot \sin \phi + r \cdot \cos \phi}{\cos \theta}$$

Diferenciální rovnice jsou nelineární, dají se řešit pouze pomocí numerických metod. My je pro naše účely linearizujeme.

2.2.5 Linearizace rovnic letadla

Rovnice 2.33, 2.34, 2.35 jsou rovnice nelineární, jejichž analytické řešení je komplikované. Pro řízení se používají linearizované rovnice za určitých referenčních letových podmínek v charakteristických bodech letové obálky. Linearizace se zpravidla provádí ve třech krocích s různou rozlišovací úrovní ovlivňující přesnost výsledného matematického modelu letadla:

- 1) Zavedení odchylových rovnic platných pro určité charakteristické referenční letové podmínky uvnitř letové obálky
- 2) Uvažování malých veličin, pak $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 0$, součiny malých veličin zanedbáme. Tento krok budeme provádět současně s prvním krokem pro odchylky od referenčních hodnot
- 3) Linearizace aerodynamických sil a momentů

2.2.5.1. Odchylové rovnice

Rovnice budeme upravovat pro případ, že se letadlo pohybuje v malých odchylkách kolem referenčních letových podmínek. Toto představuje jisté omezení platnosti dále odvozených pohybových rovnic letadla, ale při správně navrženém systému automatického řízení se tyto malé odchylky předpokládají a jsou dokonce i požadovány. Všechny proměnné v předcházejících pohybových rovnicích jsou nahrazeny referenčními hodnotami a odchylkami od nich.

$$u = u_0 + \Delta u \quad v = v_0 + \Delta v \quad w = w_0 + \Delta w \quad (2.36)$$

$$p = p_0 + \Delta p \quad q = q_0 + \Delta q \quad r = r_0 + \Delta r \quad (2.37)$$

$$X = X_0 + \Delta X \quad Y = Y_0 + \Delta Y \quad Z = Z_0 + \Delta Z \quad (2.38)$$

$$M_x = M_{x_0} + \Delta M_x \quad M_y = M_{y_0} + \Delta M_y \quad M_z = M_{z_0} + \Delta M_z \quad (2.39)$$

$$\theta = \theta_0 + \Delta \theta \quad \phi = \phi_0 + \Delta \phi \quad \psi = \psi_0 + \Delta \psi \quad (2.40)$$

Referenční letové podmínky se předpokládají symetrické a propulsní síly konstantní, z čehož plyne:

$$\begin{aligned} v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0 \\ F_{X_d} + F_{Y_d} + F_{Z_d} + M_{X_d} + M_{Y_d} + M_{Z_d} = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Silové odchytkové rovnice

získáme z rovnic 2.19, 2.20, 2.21 nahrazením jednotlivých proměnných jejich ustálenými referenčními hodnotami a odchylkami od těchto hodnot (2.41):

$$X_0 + \Delta X - m \cdot g \cdot \sin(\theta_0 - \Delta\theta) = m \left[\frac{d}{dt}(u_0 + \Delta u) + (q_0 + \Delta q) \cdot (w_0 + \Delta w) - (r_0 + \Delta r) \cdot (v_0 + \Delta v) \right] \quad (2.42)$$

Od tohoto vztahu odečteme rovnici ustáleného referenčního letu, která po provedeném rozvoji goniometrické funkce a náhradě $\cos \Delta\theta \cong 1$ má tvar:

$$X_0 - m \cdot g \cdot \sin \theta_0 = m \cdot [0 + q_0 \cdot w_0 - r_0 \cdot v_0] \quad (2.43)$$

Silová odchytková rovnice F_x po zanedbání nulových referenčních hodnot. (2.41) a

Součinů malých hodnot odchylek je tvaru:

$$m \cdot (\Delta \dot{u} + g \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta) = X_a + X_g + X_c + X_p = \Delta X \quad (2.44)$$

Obdobným způsobem získáme další dvě silové rovnice:

$$m \cdot (\Delta \dot{v} - g \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \phi + u_0 \cdot \Delta r) = Y_a + Y_g + Y_c + Y_p = \Delta Y \quad (2.45)$$

$$m \cdot (\Delta \dot{w} + g \cdot \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta - u_0 \cdot \Delta q) = Z_a + Z_g + Z_c + Z_p = \Delta Z \quad (2.46)$$

Momentové odchytkové rovnice

získáme z rovnic 2.33, 2.34, 2.35 náhradou jejich proměnných odpovídajícími referenčními hodnotami ustáleného letu a dostatečně malými odchylkami od těchto hodnot. Pro složku momentu M_x platí:

$$M_{x_0} + \Delta M_x = I_x \cdot \frac{d}{dt} \cdot (p_0 + \Delta p) - (I_y - I_z) \cdot (q_0 + \Delta q) \cdot (r_0 + \Delta r) - I_{zx} \left(\frac{d}{dt} (r_0 + \Delta r) + (p_0 + \Delta p) \cdot (q_0 + \Delta q) \right) \quad (2.47)$$

Rovnice ustáleného stavu je:

$$M_{x_0} = I_x \cdot 0 - (I_y - I_z) \cdot q_0 r_0 - I_{zx} (0 + p_0 q_0) \quad (2.48)$$

Po odečtení rovnice ustáleného stavu a zanedbání nulových referenčních hodnot 2.41 a součinu malých hodnot odchylek, momentová rovnice nabyde tvaru:

$$I_x \cdot (\Delta \dot{p}) - I_{xz} (\Delta \dot{r}) = L_a + L_g + L_c + L_p = \Delta M_x \quad (2.49)$$

Obdobným způsobem získáme další dvě momentové rovnice:

$$I_y \cdot (\Delta \dot{q}) = M_a + M_g + M_c + M_p = \Delta M_y \quad (2.50)$$

$$I_z \cdot (\Delta \dot{r}) - I_{xz} \cdot (\Delta \dot{p}) = N_a + N_g + N_c + N_p = \Delta M_z \quad (2.51)$$

2.2.5.2. Linearizace sil a momentů

Aerodynamické síly (2.19, 2.20, 2.21) a momenty (2.33, 2.34, 2.35) jsou nelineárními funkcemi dalších veličin, na jejichž počtu bude záviset přesnost výsledného matematického modelu letadla. Je zřejmé, že vliv veličin na vlastnosti letadla je různý. Přesnost modelu dále bude záviset na počtu členů Taylorovy řady, již v použitelné oblasti (uvnitř letové obálky) aproximujeme nelineární průběh dané veličiny. K našemu účelu nám vystačí použití pouze pro členy prvního řádu. Členy vyšších řádů zanedbáme. Pro složky sil se zpravidla uvažují následující funkční závislosti:

$$\Delta X = \Delta X (\Delta u, \Delta w, \Delta \delta_T, \Delta \delta_V) \quad (2.52)$$

$$\Delta Y = \Delta Y (\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_S) \quad (2.53)$$

$$\Delta Z = \Delta Z (\Delta u, \Delta w, \Delta w', \Delta q, \Delta \delta_T, \Delta \delta_V) \quad (2.54)$$

Složky momentů jsou funkcemi následujících veličin:

$$\Delta M_x = \Delta M_x (\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_k, \Delta \delta_S) \quad (2.55)$$

$$\Delta M_y = \Delta M_y (\Delta u, \Delta w, \Delta w', \Delta q, \Delta \delta_T, \Delta \delta_V) \quad (2.56)$$

$$\Delta M_z = \Delta M_z (\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_k, \Delta \delta_S) \quad (2.57)$$

Linearizace těchto funkčních (2.52 až 2.57) závislostí pomocí Taylorovy věty je pro ΔX včetně zavedené symboliky pro aerodynamické derivace následující – Taylorův rozvoj:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T + \frac{\partial X}{\partial \delta_V} \Delta \delta_V = \\ &= X^u \Delta u + X^w \Delta w + X^{\delta_T} \Delta \delta_T + X^{\delta_V} \Delta \delta_V \end{aligned} \quad (2.58)$$

Obdobným způsobem vyjádříme ostatní odchylky sil a momentů, které se následně vložíme do silových a momentových rovnic:

$$\Delta Y = Y^v \Delta v + Y^p \Delta p + Y^r \Delta r + Y^{\delta_s} \Delta \delta_s \quad (2.59)$$

$$\Delta Z = Z^u \Delta u + Z^w \Delta w + Z^{\dot{w}} \Delta \dot{w} + Z^q \Delta q + Z^{\delta_r} \Delta \delta_r + Z^{\delta_v} \Delta \delta_v \quad (2.60)$$

$$\Delta M_x = M_x^v \Delta v + M_x^p \Delta p + M_x^r \Delta r + M_x^{\delta_k} \Delta \delta_k + M_x^{\delta_s} \Delta \delta_s \quad (2.61)$$

$$\Delta M_y = M_y^u \Delta u + M_y^w \Delta w + M_y^{\dot{w}} \Delta \dot{w} + M_y^q \Delta q + M_y^{\delta_r} \Delta \delta_r + M_y^{\delta_v} \Delta \delta_v \quad (2.62)$$

$$\Delta M_z = M_z^v \Delta v + M_z^p \Delta p + M_z^r \Delta r + M_z^{\delta_k} \Delta \delta_k + M_z^{\delta_s} \Delta \delta_s \quad (2.63)$$

Z výše uvedených šesti rovnic je zřetelné, že jsou rozděleny na dvě skupiny odlišných výstupních a vstupních proměnných, které charakterizují dva pohyby letadla: **pohyb podélný** ($\Delta u, \Delta w, \Delta w', \Delta q, \Delta \delta_r, \Delta \delta_v$) a **pohyb stranový** ($\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_k, \Delta \delta_s$). Tyto pohyby jsou oddělitelné za předpokladu, že:

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial u} = \frac{\partial \Delta M_x}{\partial u} = \frac{\partial \Delta M_z}{\partial u} = 0 \quad (2.64)$$

Tato závislost, která platí pro podzvuková letadla, je pro náš model UAV dostačující.

Dosažením do předchozího vztahu dostaneme soustavu šesti diferenciálních rovnic. Na pravé straně jsou členy zasahujících kormidel a vlevo síly a momenty, které působí na letadlo.

2.3 Podélný pohyb

2.3.1 Podélné pohybové rovnice

Pohybové rovnice podélného pohybu letadla můžeme vyjádřit dvěma silovými rovnicemi (F_x, F_z) v ose x a ose z a jednou momentovou rovnicí kolem osy y (M_y). Pohyby, které nejsou omezeny v podélné rovině, zde nehrají roli, a proto $v = p = r = \dot{v} = 0$. Aerodynamické stabilizační derivace související s těmito proměnnými, které nejsou podélné, položíme taktéž nule $X^v, X^p, X^r, Z^v, Z^p, Z^r, M^v, M^p, M^r = 0$. A stejně tak můžeme zanedbat i vliv křidélek a směrovky. Tímto způsobem dostaneme zmíněné dvě silové a jednu momentovou rovnici. K těmto dvěma rovnicím přidáme poslední tedy čtvrtou kinematickou rovnici:

$$\begin{aligned} m \cdot (\Delta \dot{u} + g \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta) - X^u \Delta u - X^w \Delta w &= X^{\delta_T} \Delta \delta_T + X^{\delta_v} \Delta \delta_v \\ m \cdot (\Delta \dot{w} + g \cdot \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta - u_0 \cdot \Delta q) - Z^u \Delta u - Z^w \Delta w - Z^{\dot{w}} \Delta \dot{w} - Z^q \Delta q &= Z^{\delta_T} \Delta \delta_T + Z^{\delta_v} \Delta \delta_v \\ I_y \cdot (\Delta \dot{q}) - M_y^u \Delta u - M_y^w \Delta w - M_y^{\dot{w}} \Delta \dot{w} - M_y^q \Delta q &= M_y^{\delta_T} \Delta \delta_T + M_y^{\delta_v} \Delta \delta_v \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned}$$

Tímto jsme dostali soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu o čtyřech neznámých v, α, q, θ . Další úpravou je vyjádření pomocí bezrozměrných rovnic, v nichž si definujeme bezrozměrné aerodynamické koeficienty. Další způsob vyjádření dynamických vlastností letadla vychází z bezrozměrných rovnic a spočívá ve snížení počtu koeficientů rovnic osamostatněním nejvyšších derivací v rovnicích, jejichž rozměr mají všechny složky uvažované rovnice.

2.3.2 Podélná stabilita a její koeficienty

Základním předpokladem pro nás bude zanedbání machova efektu

$\frac{\partial C_L}{\partial u} = \frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{\partial C_m}{\partial u} = 0$, pak rovnice rychlosti v axiálním směru jsou ($u = v$):

$$\begin{aligned} X_v &= -\frac{\bar{q}S}{mv_0}(2C_D + C_{Dv}) \\ Z_v &= -\frac{\bar{q}S}{mv_0}(2C_L + C_{Lv}) \\ M_v &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Rovnice pro normálovou rychlost-úhel náběhu (změna značení $w = \alpha$):

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \frac{\bar{q}S}{mv_0}(C_L - C_{D\alpha}) \\ Z_\alpha &= -\frac{\bar{q}S}{m}(C_D + C_{L\alpha}) \\ M_\alpha &= \frac{\bar{q}S\bar{c}}{v_0 I_Y}(C_{m_\alpha}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Koeficienty pro klopení:

$$\begin{aligned} X_q &= 0 \\ Z_q &= -\frac{\bar{q}S\bar{c}}{2mv_0}(C_{Lq}) \\ M_q &= \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_Y} \frac{\bar{c}}{2v_0}(C_{mq}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Koeficienty pro normálové zrychlení (změna značení $\dot{w} = \dot{\alpha}$):

$$\begin{aligned} X_{\dot{\alpha}} &= 0 \\ Z_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\bar{q}S\bar{c}}{2mv_0}(C_{L\dot{\alpha}}) \\ M_{\dot{\alpha}} &= \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_Y} \frac{\bar{c}}{2v_0}(C_{m_{\dot{\alpha}}}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Koeficienty pro výškové kormidlo:

$$\begin{aligned} X_{\delta_v} &= -\frac{\bar{q}S}{m}(C_{D\delta_v}) = 0 \\ Z_{\delta_v} &= -\frac{\bar{q}S}{m}(C_{L\delta_v}) \\ M_{\delta_v} &= \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_Y}(C_{m_{\delta_v}}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

2.3.3 Stavový popis podélného pohybu

Pohybové rovnice podélného pohybu letadla můžeme vyjádřit stavovým popisem. Ten představuje jeho vnitřní popis, známe zde kromě vstupů a výstupů vnitřní stavové proměnné.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.70}$$

x je vektor stavových proměnných: (v, α, q, θ)

u je vektor vstupů: $(\delta_v, \delta_r) = (\text{výchylka výškovky, přípust' motoru})$

y je vektor výstupů

Nyní převedeme popis systému pomocí soustavy lineárních diferenciálních rovnic na popis ve stavovém prostoru. Členy s derivacemi pohybových proměnných převedeme na levou stranu, další členy na stranu pravou. Pak tedy A, B, C, D jsou matice stavového popisu mající tvar:

$$M\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \quad x^T = [v, \alpha, q, \theta] \quad u^T = [\delta_v, \delta_r]$$

$$M = \begin{bmatrix} m & -X_{\dot{w}} & 0 & 0 \\ 0 & (m - Z_{\dot{w}}) & 0 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{w}} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{2.71}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (X_v + X_{T_v} \cos \alpha_v) & X_\alpha & 0 & -m \cdot g \cdot \cos \theta_0 \\ (Z_v - X_v \sin \alpha_v) & Z_\alpha & (m \cdot u_0 + Z_q) & -m \cdot g \cdot \sin \theta_0 \\ (M_v + M_{T_v}) & M_\alpha & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.72}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} X_{\delta_v} & X_{\delta_r} \cos \alpha_v \\ Z_{\delta_v} & Z_{\delta_r} \sin \alpha_v \\ M_{\delta_v} & M_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.73}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{vynásobíme zleva inverzní maticí} \quad A = M^{-1}\tilde{A} \quad B = M^{-1}\tilde{B}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^u & x^w & x^q & x^\theta \\ z^u & z^w & z^q & z^\theta \\ m_y^u & m_y^w & m_y^q & m_y^\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^{\delta_v} & x^{\delta_T} \\ z^{\delta_v} & z^{\delta_T} \\ m_y^{\delta_v} & m_y^{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad C = I, D = 0 \quad \rightarrow \quad y(t) = Ix(t) \equiv x(t)$$

$$y(t) = Ix(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Výstupní matice C, D volíme podle typu úlohy, pro naši potřebu volíme matici C jednotkovou.

2.3.4 Přenosová funkce

Přenos popisuje vztah mezi vstupními a výstupními proměnnými dynamické soustavy, zapisuje se jako zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynom v komplexní proměnné s . Abychom mohli určit přenos, musíme nejdříve odvozené diferenciální rovnice v proměnné t převést pomocí Laplaceovy transformace na algebraické rovnice v proměnné s . Odezva v proměnné $\theta(s)$ na změnu polohy výkovky $\delta_e(s)$ je popsána:

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{(V_T M_{\delta_e} + Z_{\delta_e} M_{\dot{\alpha}}) \cdot s + (M_\alpha Z_{\delta_e} - Z_\alpha M_{\delta_e})}{V_T \cdot s^2 - (Z_\alpha + V_T M_q + V_T M_{\dot{\alpha}}) \cdot s + M_q Z_\alpha - V_T M_\alpha} \quad (2.76)$$

Přenosová funkce pro $\delta_e(s)$ a $\alpha(s)$ vypadá následovně:

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{Z_{\delta_e} \cdot s + (V_T M_{\delta_e} - M_q Z_{\delta_e})}{V_T \cdot s^2 - (Z_\alpha + V_T M_q + V_T M_{\dot{\alpha}}) \cdot s + M_q Z_\alpha - V_T M_\alpha} \quad (2.77)$$

Výpočet frekvence a tlumení bude uveden u jednotlivých módů systému.

2.4 Stranový pohyb

2.4.1 Rovnice silové a momentová

Při linearizaci a úpravách stranového pohybu budeme postupovat stejným způsobem jako u odvozování pohybu podélného. Stranový pohyb je popsán dvěma rovnicemi momentovými podél osy x a z M_x, M_z a jednou silovou rovnicí podél osy y . Neuvažujeme-li tedy podélný pohyb, pak $u = w = q = \dot{u} = 0$. Poté aerodynamické stabilizační derivace související s těmito proměnnými, které nejsou příčné, položíme taktéž nule $Y^u, Y^w, Y^{\dot{w}}, Y^q, L^u, L^w, L^{\dot{w}}, L^q, N^u, N^w, N^{\dot{w}}, N^q = 0$. A samozřejmě tak i vliv tahu a výškovky. Poté dostaneme již zmíněné dvě momentové a jednu silovou rovnici, k těmto třem rovnicím přidáme další dvě kinematické rovnice:

$$\begin{aligned}
 m \cdot (\Delta \dot{v} - g \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \phi + u_0 \cdot \Delta r) - Y^v \Delta v - Y^p \Delta p - Y^r \Delta r &= Y^{\delta_s} \Delta \delta_s \\
 I_x \cdot (\Delta \dot{p}) - I_{xz} (\Delta \dot{r}) - M_x^v \Delta v - M_x^p \Delta p - M_x^r \Delta r &= M_x^{\delta_k} \Delta \delta_k + M_x^{\delta_s} \Delta \delta_s \\
 I_z \cdot (\Delta \dot{r}) - I_{xz} \cdot (\Delta \dot{p}) - M_z^v \Delta v - M_z^p \Delta p - M_z^r \Delta r &= M_z^{\delta_k} \Delta \delta_k + M_z^{\delta_s} \Delta \delta_s \\
 \dot{\phi} &= p \\
 \dot{\psi} &= r
 \end{aligned}$$

Tímto jsme dostali soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu o pěti neznámých v, p, r, ψ, ϕ . Další úpravou je vyjádření pomocí bezrozměrných rovnic, v nichž si definujeme bezrozměrné aerodynamické koeficienty. Další způsob vyjádření dynamických vlastností letadla vychází z bezrozměrných rovnic a spočívá ve snížení počtu koeficientů rovnic osamostatněním nejvyšších derivací v rovnicích, jejichž rozměr mají všechny složky uvažované rovnice.

2.4.2 Příčná stabilita a její koeficienty

Výpočet příčné stability a řídicích derivací budeme provádět z výše uvedených aerodynamických sil a momentů.

Rovnice úhel vybočení ($v = \beta$):

$$\begin{aligned} Y_\beta &= \frac{\bar{q}S}{m} (C_{Y_\beta}) \\ L_\beta &= \frac{\bar{q}Sb}{I_x} (C_{l_\beta}) \\ N_\beta &= \frac{\bar{q}Sb}{I_z} (C_{n_\beta}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Rovnice pro klonění:

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{\bar{q}Sb}{2mv_0} (C_{Y_p}) = 0 \\ L_p &= \frac{\bar{q}Sb}{I_x} \frac{b}{2v_0} (C_{l_p}) \\ N_p &= \frac{\bar{q}Sb}{I_z} \frac{b}{2v_0} (C_{n_p}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Rovnice pro zatáčení:

$$\begin{aligned} Y_r &= \frac{\bar{q}Sb}{2mv_0} (C_{Y_r}) \\ L_r &= \frac{\bar{q}Sb}{I_x} \frac{b}{2v_0} (C_{l_r}) \\ N_r &= \frac{\bar{q}Sb}{I_z} \frac{b}{2v_0} (C_{n_r}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Koeficienty pro křídélka:

$$\begin{aligned} Y_{\delta_K} &= \frac{\bar{q}S}{m} (C_{Y_{\delta_K}}) \\ L_{\delta_K} &= \frac{\bar{q}Sb}{I_x} (C_{l_{\delta_K}}) \\ N_{\delta_K} &= \frac{\bar{q}Sb}{I_z} (C_{n_{\delta_K}}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Koeficienty pro směrovku:

$$\begin{aligned} Y_{\delta_s} &= \frac{\bar{q}S}{m} (C_{Y_{\delta_s}}) \\ L_{\delta_s} &= \frac{\bar{q}Sb}{I_x} (C_{L_{\delta_s}}) \\ N_{\delta_s} &= \frac{\bar{q}Sb}{I_z} (C_{N_{\delta_s}}) \end{aligned} \quad (2.82)$$

2.4.3 Stavový popis stranového pohybu

Pohybové rovnice stranového pohybu letadla můžeme vyjádřit stavovým popisem. Ten představuje jeho vnitřní popis, známe zde kromě vstupů a výstupů vnitřní stavové proměnné.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

x je vektor stavových proměnných: (β, p, r, ϕ)

u je vektor vstupů: $(\delta_K, \delta_S) = (\text{výchylka křidélek}, \text{výchylka směrovky})$

y je vektor výstupů

Nyní převedeme popis systému pomocí soustavy lineárních diferenciálních rovnic na popis ve stavovém prostoru. Členy s derivacemi pohybových proměnných převedeme na levou stranu, další členy na stranu pravou. Pak tedy A, B, C, D jsou matice stavového popisu mající tvar:

$$M\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad x^T = [\beta, p, r, \phi] \quad u^T = [\delta_K, \delta_S]$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & -I_{xz} & 0 \\ 0 & -I_{xz} & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} Y_\beta & Y_p & (Y_r - mv_0) & g \cdot \cos \theta_0 \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} Y_{\delta_K} & Y_{\delta_S} \\ L_{\delta_K} & L_{\delta_S} \\ N_{\delta_K} & N_{\delta_S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{vynásobíme zleva inverzní maticí} \quad A = M^{-1}\tilde{A} \quad B = M^{-1}\tilde{B}$$

Analogicky jako u podélného pohybu vyjádříme matice stavového popisu u příčného pohybu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^v & y^p & y^r & y^\phi \\ m_x^v & m_x^p & m_x^r & m_x^\phi \\ m_z^v & m_z^p & m_z^r & m_z^\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^{\delta_K} & y^{\delta_S} \\ m_x^{\delta_K} & m_x^{\delta_S} \\ m_z^{\delta_K} & m_z^{\delta_S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_K \\ \delta_S \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$y(t) = Ix(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Výstupní matice C, D volíme podle typu úlohy, pro naši potřebu volíme matici C jednotkovou. Pro koeficienty kurzu (yaw) přidáme do matic A, B, C, D další řádek. Pro matici A to bude $0 \ 0 \ 1 \ 0$, pro B $0 \ 0$, pro C $0 \ 0 \ 0 \ 1$.

2.4.4 Přenosová funkce

Přenos popisuje vztah mezi vstupními a výstupními proměnnými dynamické soustavy, zapisuje se jako zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynom v komplexní proměnné s . Abychom mohli určit přenos, musíme nejdříve odvozené diferenciální rovnice v proměnné t převést pomocí Laplaceovy transformace na algebraické rovnice v proměnné s .

Přenosové funkce vypadají následovně:

$$\frac{N_\zeta^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{p(s)}{\zeta(s)} = \frac{s\phi(s)}{\zeta(s)} = \frac{N_\zeta^p(s)}{\Delta(s)} \quad (2.88)$$

Kapitola 3

3. MODEL LETADLA

Pro návrh regulátorů potřebujeme určit jednotlivé proměnné (stavy), případně vstupy. Tyto proměnné lze zjistit tak, že model našeho letadla vytvoříme ve 3D programech jako je XFLR nebo AVL. Příslušnými programy zjistíme jen část proměnných, další část určíme například měřením momentů setrvačnosti.

3.1 Základní parametry letadla

Pro projekt řešený v této diplomové práci byl vybrán model letadla Cessna 182 (obr.: 3.1), vyráběný firmou PELIKAN DANIEL. Oproti reálnému letadlu je tento model v poměru 1:9. Je vybaven střídavým motorem, šesti servomotory pro ovládání klapek, křidélek, směrovky, výškovky a světel.



Obrázek 3.1: Rádiem řízený model letadla

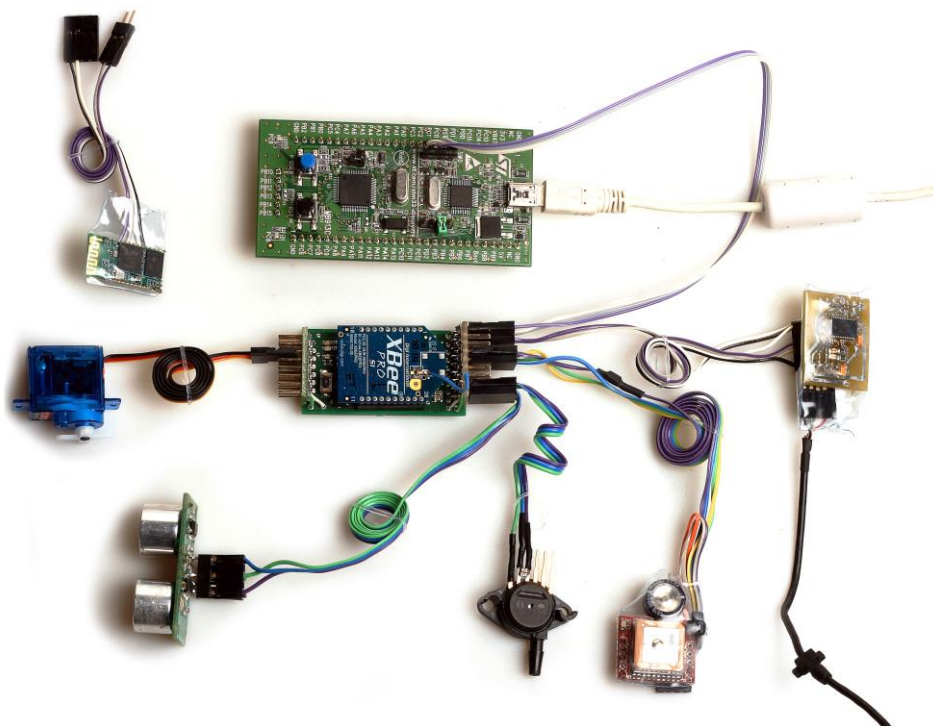
Plocha křídla	S	27.5	dm ²
Rozpětí	b	1410	mm
Tětiva křídlo	Cw	198.5	mm
Tětiva křídélka	Ca	156.8	mm
Délka	l	1100	mm
Hmotnost	m	1.6	kg

Tabulka 3.1: Základní parametry UAV

3.2 Avionika letadla

RC model je osazen avionikou vytvořenou Jaroslavem Halgašíkem v rámci jeho diplomové práce. Obrázek 3.2 zobrazuje základní modul se standartními senzory:

- snímač sběru dat, které je umístěn uvnitř letadla ovládá procesor *ARM Cortex M3, 24MHz – STM32F100RB*.
- 3-osý akcelerometr (*MPU6000*)
- 3-osý magnetometr (*HMC5883L*)
- 3-osý gyroskop (*LSM330*)
- inerciální měřicí jednotka (*IMU*)
- senzor tlaku (*MPX4115A*)
- 5Hz GPS modul
- senzor vzdušné rychlosti



Obrázek 3.2: Modul se standartními senzory

3.3 Měření momentů setrvačnosti

Momenty setrvačnosti celého letadla i se zabudovaným motorem je zapotřebí zjistit experimentálně - pomocí dvojitého kyvadla (Obr. 3.3). Poloha těžiště našeho UAV a jeho momenty setrvačnosti jsou nezbytné pro matematický model.

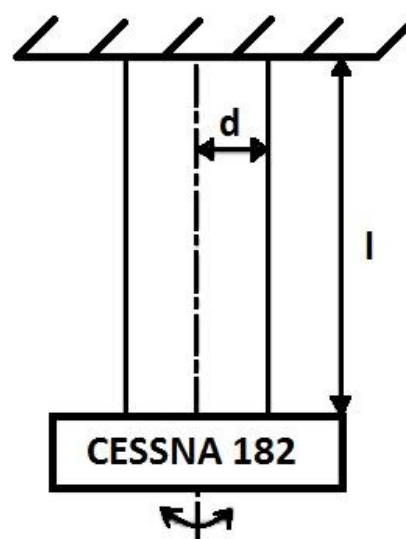
Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvání tělesa (v našem případě letadla) při otáčivém pohybu. Pro stanovení momentů setrvačnosti existují dva základní principy měření.

První z nich je výpočet pomocí rozložení jednotlivých hmot z hmotnostního rozboru letounu. Tato metoda je přibližná a její správnost je velmi závislá na přesnosti určení hmotnostního rozboru.

Druhou možností je metoda nepřímá. Tato metoda využívá měření doby kyvu zavěšeného letounu podle principu fyzikálního kyvadla. I při měření touto metodou dochází k nepřesnostem, a to v podobě zanedbání odporu vzduchu (i když se jedná o velmi malé kmity). Momenty setrvačnosti byly zjištěny experimentálně pomocí zavěšení letounu. V případě letu v rovině symetrie by nám postačil moment setrvačnosti kolem osy y, momenty jsme ale určili pro všechny tři osy.

Výpočet momentu je popsán následujícím vztahem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} \rightarrow I = \frac{m \cdot g \cdot d^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l}$$



Obrázek 3.3: Moment setrvačnosti

kde T je doba kmitu, za kterou kyvadlo přejde z jedné krajní polohy na druhou a zpět, l je délka závěsu (lana), d je poloměr otáčení (vzdálenost těžiště od osy otáčení kyvadla - rameno). Pro přesnější výsledky je důležité, aby délka závěsu byla větší než poloměr otáčení. $d \ll l$.



Obrázek 3.4: Ukázka měření momentů setrvačnosti

Osa	Moment [kg/m ²]
Roll, I_{xx}	0,04963
Pitch, I_{yy}	0,04106
Yaw, I_{zz}	0,08987

Tabulka 3.2: Tabulka momentů

Matice I_B , kde $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zy} = 0$ vypadá následovně:

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yz} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049 & 0 & 0 \\ 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0 & 0.089 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

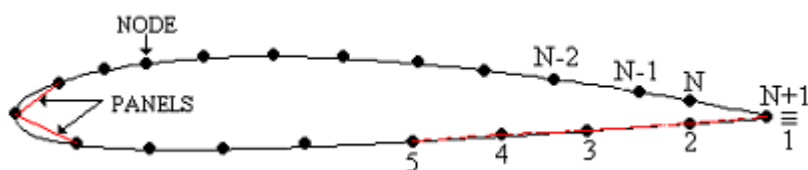
3.4 XFLR model letadla

XFLR5 je analytický nástroj pro tvorbu profilů, křídel a letadel provozovaných při nízkých Reynoldsových číslech. Aby bylo možné odhadnout aerodynamické rovnice pro řízení stability letounu, musíme vytvořit 3D model letadla v programu XFLR5, který používá metodu Vortex Lattice Method (VLM) - panelovou metodu 3D a XFOil.

3.4.1 VLM – panelová metoda

Vortex lattice method je numerická metoda výpočtu dynamiky letadla, používaná zejména v počátečních fázích návrhu konstrukce letadla. Byla vyvinuta v NASA Bartem Rademakerem. VLM je rozšíření Prandtlovy teorie vztakové čáry, kde křídlo je modelováno nekonečným počtem vírů. VLM je obdoba metody panelové, kdy je námi určená plocha rozdělena na N částí, tzv. panelů (Obr. 3.5). Každý z panelů má singularitu (algebraické funkce, řešení jsou rovnice), kde je použita Laplaceova transformace. To nám poskytne sadu algebraických rovnic. Dále jsou potřeba rovnice pro $N+1$ a N uzlů, ty se řeší pomocí podmínek Kutta – tok proudu musí být na odtokové hraně hladký, tangenciální rychlost na první a poslední desce musí být stejné. Rozdíl mezi VLM a panelovou metodou jsou zejména v okrajových podmínkách, kde vír který se tvoří, je prodloužen do nekonečna.

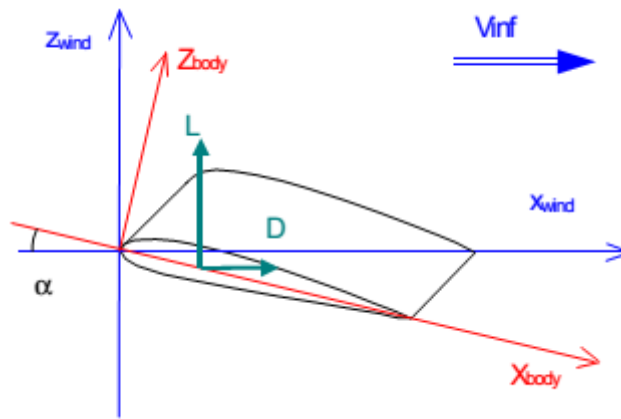
Simulací je tedy možné extrahovat rozložení tlaku i rozdělení sil kolem simulovaného tělesa. Tyto znalosti pak použijeme pro výpočet aerodynamických koeficientů a jejich derivací, které jsou velice důležité pro posouzení vlastností letadla.



Obrázek 3.5: Profil modelu N-panelů křídla

3.4.2 XFOil

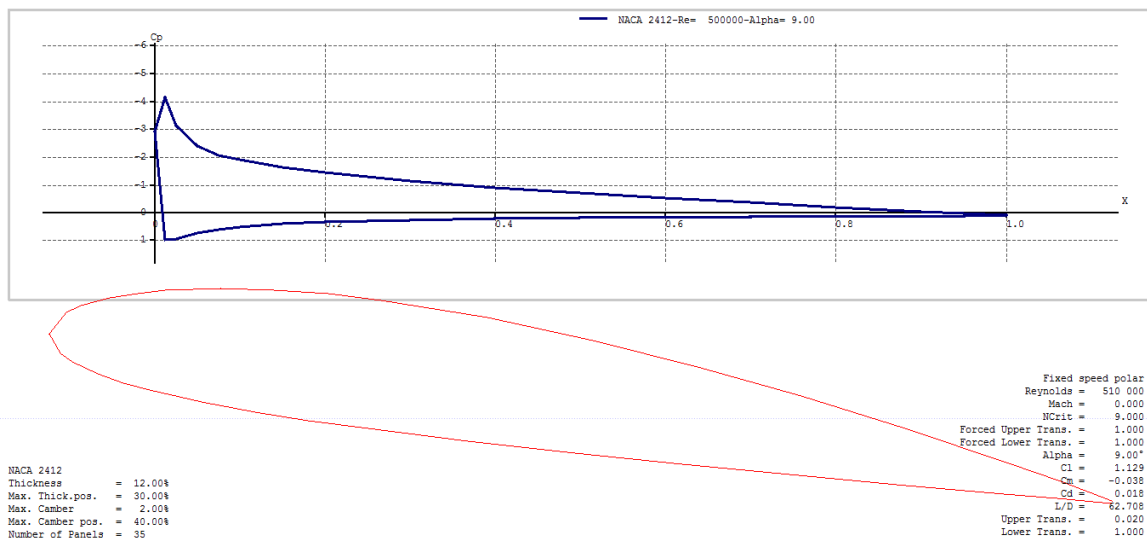
XFOil je program pro návrh a analýzu podzvukových izolovaných profilů. Byl vyvinut na MIT jako konstrukční nástroj Markem Drelou. Je naprogramován v jazyce FORTRAN. Tvar 2D modelu profilu specifikují jeho souřadnice, Reynoldsovo a Machovo číslo, díky těmto údajům lze vypočítat rozložení tlaku na profilu - charakteristiku vztlaku a tahu.



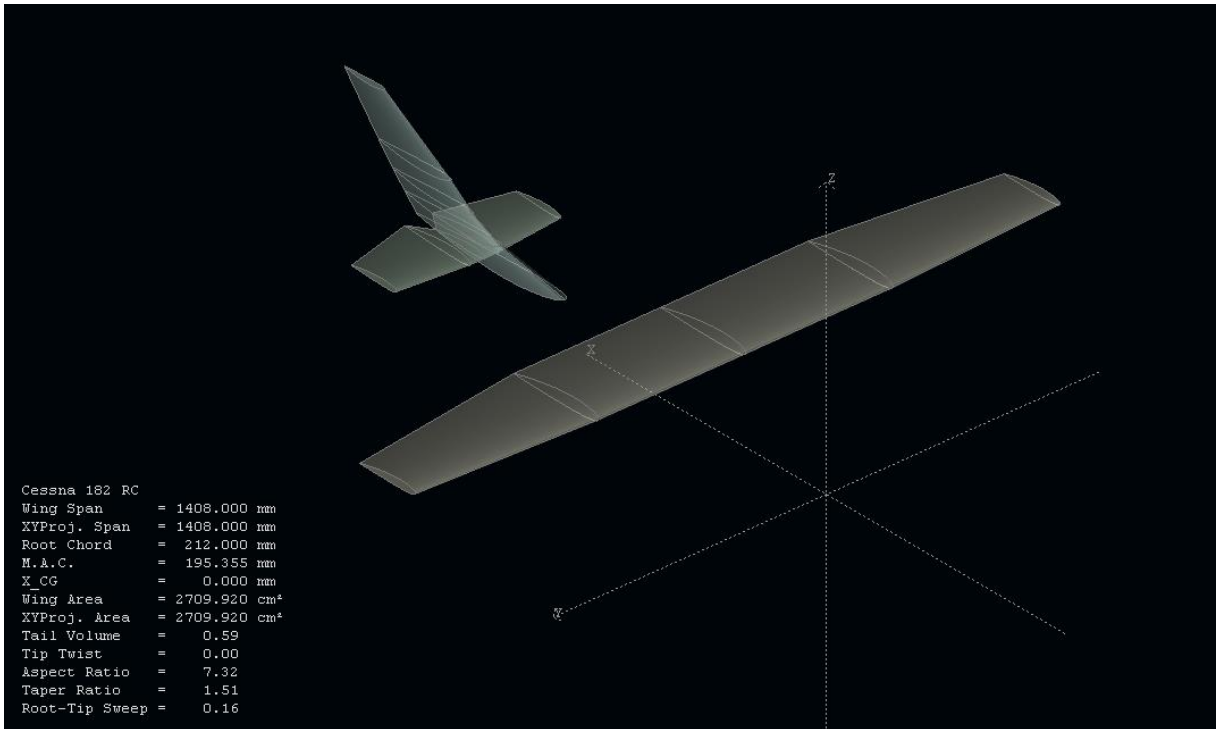
Obrázek 3.6: Převod souřadné soustavy z aerodynamické do tělesové

3.4.3 Simulace XFLR 5

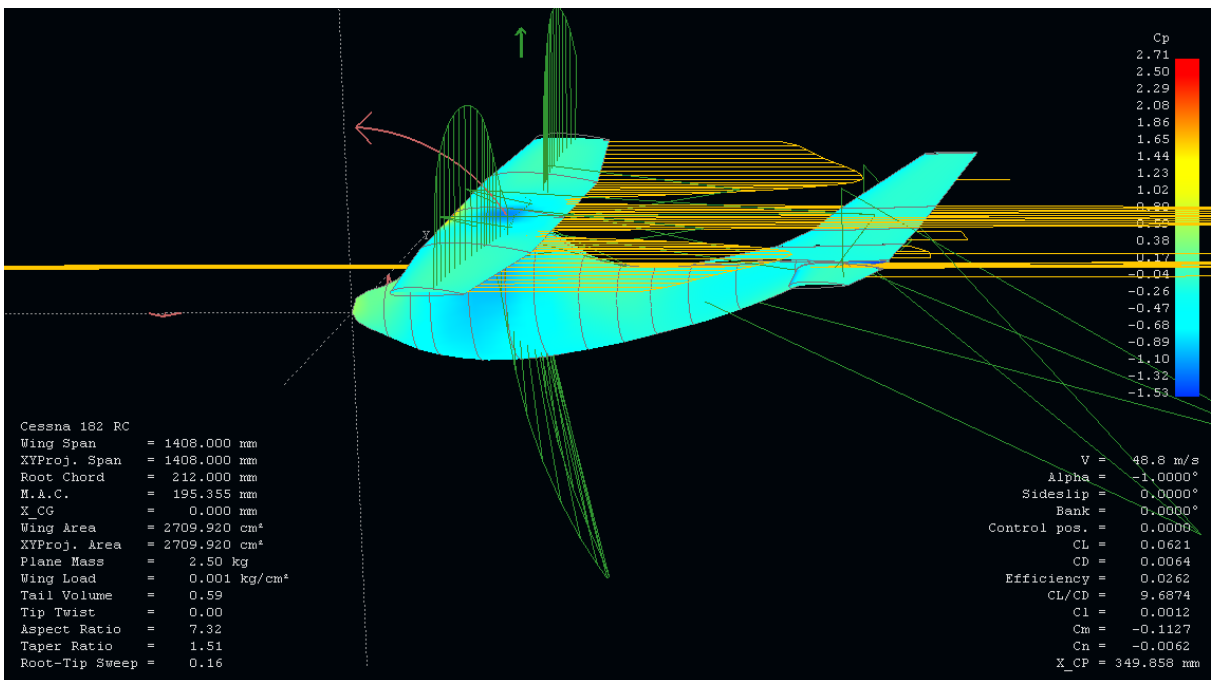
Před simulací jsme model letadla odměřili a poté data přenesli do prostředí XFLR 5. V tomto programu se z 3D modelu získají potřebné koeficienty. Nejprve byl zjištěn profil křídla, který odpovídá NACA2412 (Obr. 3.7), a poté byly vymodelovány ocasní plochy. A nakonec byl vymodelován trup letadla. Pro účely této diplomové práce modelujeme pouze křídla a ocasní plochu. Na následujících obrázcích je znázorněna výsledná modelace.



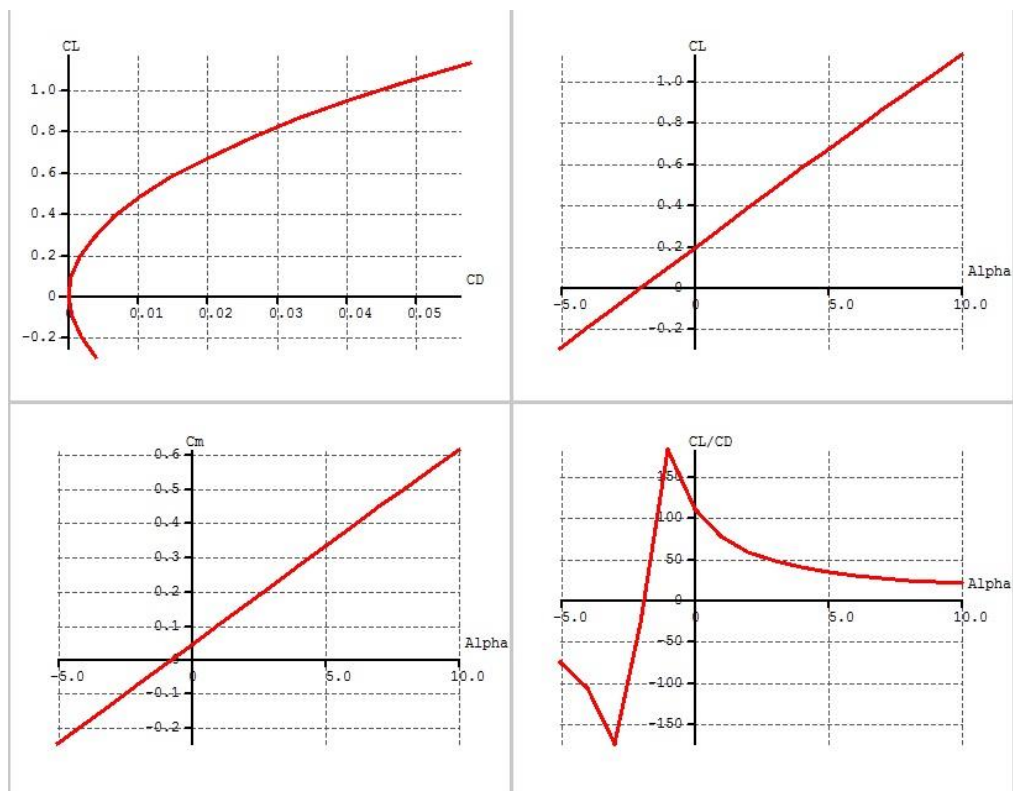
Obrázek 3.7: Výpočet pro profil křídla NACA2412



Obrázek 3.8: 3D model křídla a ocasních ploch



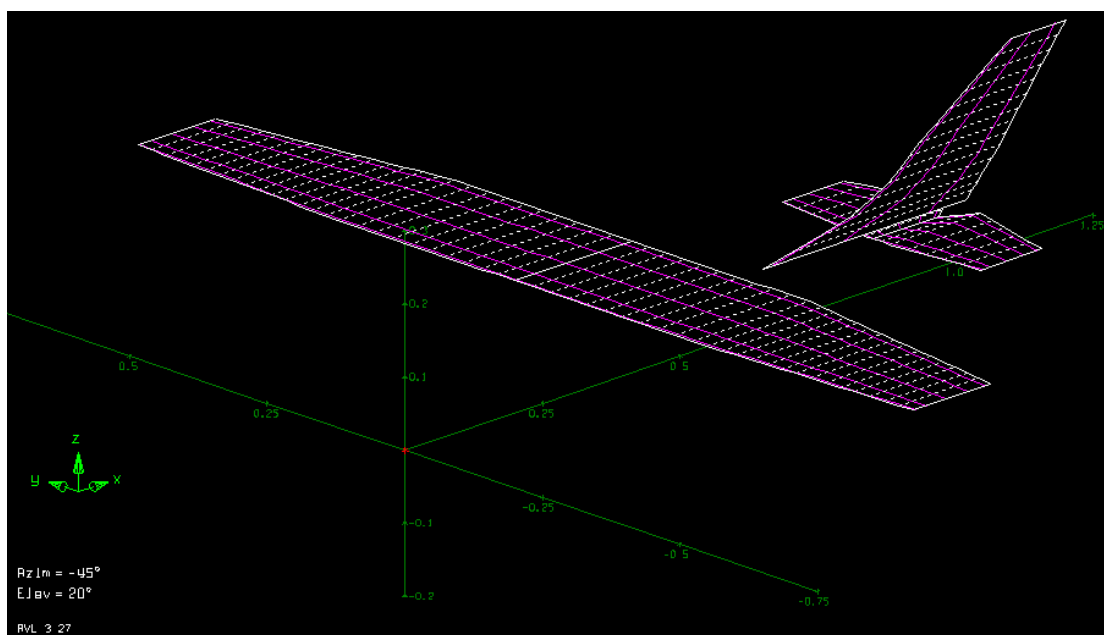
Obrázek 3.9: Ukázka simulace letu v programu XFLR 5



Obrázek 3.10: Průběhy CL, CD, Cm, CL/CD

3.5 AVL model letadla

Jelikož program XFLR 5 neposkytuje všechny koeficienty a rovnice v podobě jakou bychom si představovali, použijeme program AVL, který je v porovnání s XFLR 5 jednodušší. Požadované konstanty v něm nalezneme snáz (výstupní soubor).



Obrázek 3.11: Model křídla a ocasních ploch v prostředí AVL

<i>Stability derivatives AVL</i>			<i>Control derivatives AVL</i>	
$C_{L\alpha} = 5,03$	$C_{Yp} = 0,01$	$C_{Yr} = 0,20$	$C_{Y\delta_a} = 0$	$C_{Y\delta_r} = 0,02$
$C_{m\alpha} = -0,89$	$C_{lp} = -0,49$	$C_{lr} = 0,09$	$C_{l\delta_a} = -0,073$	$C_{l\delta_r} = 0$
$C_{Y\beta} = -0,63$	$C_{np} = -0,08$	$C_{nr} = -0,10$	$C_{n\delta_a} = 0$	$C_{nr} = -0,10$
$C_{l\beta} = -0,11$	$C_{Lq} = 4,11$		$C_{m\delta_e} = -0,09$	
$C_{n\beta} = 0,087$	$C_{mq} = -10,6$			

Tabulka 3.3: Výstupní data AVL

alpha	CL	ICD	PCd	TCd
-1,000	0,223	0,002501	0,000	0,002501
0,000	0,311	0,004397	0,000	0,004397
1,000	0,398	0,006981	0,000	0,006981
2,000	0,486	0,010248	0,000	0,010248
3,000	0,572	0,014189	0,000	0,014189
4,000	0,659	0,018795	0,000	0,018795
5,000	0,744	0,024053	0,000	0,024053
6,000	0,829	0,029950	0,000	0,029950
7,000	0,913	0,036469	0,000	0,036469
8,000	0,996	0,043594	0,000	0,043594
9,000	1,078	0,051303	0,000	0,051303
9,200	1,095	0,052914	0,000	0,052914
9,300	1,103	0,053727	0,000	0,053727
9,400	1,111	0,054546	0,000	0,054546
10,000	1,159	0,059577	0,000	0,059577

Tabulka 3.4: Nastavení různých úhlů náběhů XFLR5

Longitudinal derivatives	
Xu= -0.0051283	Cxu= -0.00062967
Xw= 0.21938	Cxa= 0.026936
Zu= -0.60783	Czu= -7.7053e-06
Zw= -45.552	CLa= 5.593
Zq= -9.9764	CLq= 12.385
Mu= 3.2244e-07	Cmu= 2.0014e-07
Mw= -3.3452	Cma= -2.0764
Mq= -3.9112	Cmq= -24.546

Tabulka 3.5: Ukázka výstupních dat z XFLR5

3.5.1 Zisk aerodynamických dat pro model

Matematický model letadla (aerodynamické koeficienty) lze získat metodou CFD (Computational Fluid Dynamics), kdy pomocí 3D výpočetního softwaru dostaneme požadované koeficienty, nebo pomocí panelové metody. Pro tento projekt stačila panelová metoda výpočtu aerodynamických koeficientů. Z programu AVL získáme konstanty $C_L, C_Y, C_l, C_m, C_n, \dots$ a konstanty C_D získáme z programu XFLR5, jelikož program AVL nám tyto konstanty nevygeneruje. Tyto konstanty dosadíme do následujících aerodynamických rovnic charakterizujících letadlo:

Podélné koeficienty

Vztlakový součinitel:
$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha + C_{L_q} \cdot \frac{q \cdot \bar{c}}{2 \cdot V} + C_{L_{\delta_e}} \cdot \delta_e$$

Odporový součinitel:
$$C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \cdot \alpha + C_{D_{\alpha^2}} \cdot \alpha^2 + C_{D_{\delta_e}} \cdot \delta_e$$

Klopivý součinitel:
$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_q} \cdot \frac{q \cdot \bar{c}}{2 \cdot V} + C_{m_{\delta_e}} \cdot \delta_e$$

Stranové koeficienty

Boční koeficient:
$$C_Y = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \cdot \beta + C_{Y_p} \cdot \frac{p \cdot b}{2 \cdot V} + C_{Y_r} \cdot \frac{r \cdot b}{2 \cdot V} + C_{Y_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \cdot \delta_r$$

Klonivý koeficient:
$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_p} \cdot \frac{p \cdot b}{2 \cdot V} + C_{l_r} \cdot \frac{r \cdot b}{2 \cdot V} + C_{l_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r$$

Zatáčivý koeficient:
$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_p} \cdot \frac{p \cdot b}{2 \cdot V} + C_{n_r} \cdot \frac{r \cdot b}{2 \cdot V} + C_{n_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \cdot \delta_r$$

	$X = qSC_x$	$L = qSbC_l$
Aerodynamické síly:	$Y = qSC_Y$	Aerodynamické momenty: $M = qS\bar{c}C_m$
	$Z = qSC_Z$	$N = qSbC_n$

Po zjištění jednotlivých rovnic bychom pomocí metody nejmenších čtverců aproximovali přímkou a linearizovali, poté převedli do maticového tvaru. Další možností je získání konkrétních derivačních členů pomocí programu, kde máme model letadla vymodelovaný. Jednotlivé koeficienty, matice pro náš UAV prostředek jsou uvedeny níže. V našem případě zanedbáváme koeficienty vyšších řádu.

3.5.1.1. Souhrn aerodynamických parametrů získaných ze simulací

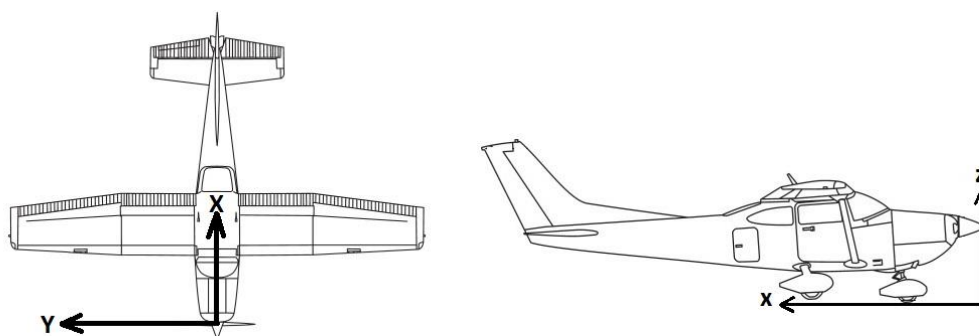
<i>All derivatives from simulators</i>		

$C_{L_0} = 0,22$	$C_{Y\delta_r} = 0,02$	$C_{m_0} = 0,152$
$C_{L\alpha} = 5,03$	$C_{Yp} = 0,01$	$C_{m\alpha} = -0,89$
$C_{Lq} = 4,11$	$C_{Yr} = 0,20$	$C_{m\delta_e} = -0,09$
$C_{L_{\min}} = 0,23$	$C_{l\beta} = -0,11$	$C_{mq} = -10,6$
$C_{D_0} = 0,051$	$C_{l\delta_a} = -0,073$	$C_{n\beta} = 0,087$
$C_{D\delta_e} = 0,012$	$C_{l\delta_r} = -0,002$	$C_{n\delta_r} = -0,01$
$C_{D\delta_r} = 0,042$	$C_{lp} = -0,49$	$C_{np} = -0,08$
$C_{Y\beta} = -0,63$	$C_{lr} = 0,09$	$C_{nr} = -0,10$

Tabulka 3.6: Souhrn aerodynamických koeficientů

3.5.2 Určení těžiště letounu

Programu XFLR5 spočetl výslednici aerodynamických a polohu těžiště. Obrázek 3.12 zobrazuje osy letadla. Poloha těžiště, musí být stanovena v obou osách X a Z. Samozřejmě, že vzhledem k symetrii letadla je Y-ová osa nulová.



Obrázek 3.12: Osy letadla UAV

Těžiště letounu – program Ss and CoG

Polohu těžiště jsem též určil pomocí programu pro tvorbu RC modelu Static stability and Center of Gravity position for model airplane, kde jsem zadal změřené parametry letounu, které jsou vypsány v tabulce 3.1. Pro oba případy měření vyšlo těžiště 59mm od náběžné hrany křídla, to znamená 322 mm od vrtulového vřetena.

Kapitola 4

4. STABILIZACE A ŘÍZENÍ

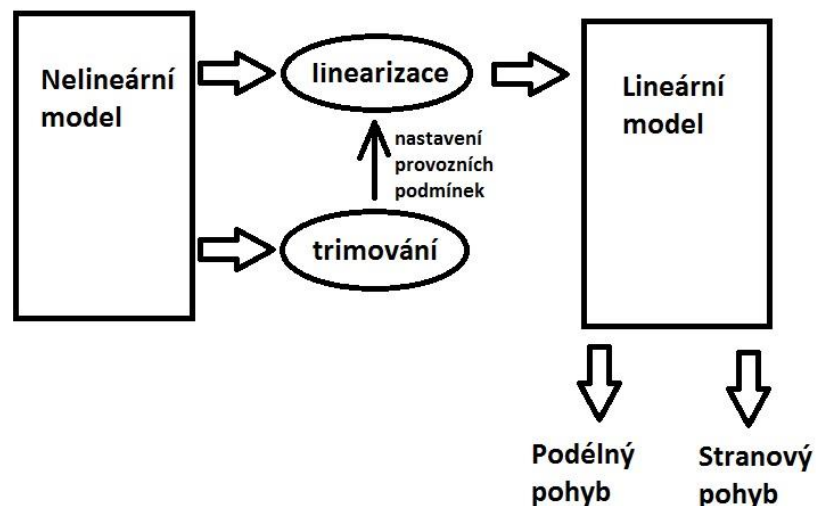
V této kapitole se zabýváme stabilizací dynamiky letadla, která spočívá ve stabilizaci polohových úhlů, jejich derivací a úhlu ofukování. Systémy, které toto realizují, se nazývají autopiloty. Tyto systémy představují první a druhou hierarchickou úroveň řízení. Pro návrh systému, z hlediska požadavků na dynamické vlastnosti, se používá metoda geometrického místa kořenů. Tato metoda má přímou souvislost s časovou oblastí a umožní nám postupný návrh jednotlivých hierarchických smyček řízení. Jak je již z předchozího textu patrné, pohyb letadla rozdělíme na podélný a stranový pohyb. Přičemž pro podélný pohyb použijeme rovnice stavového popisu a pro pohyb stranový rovnice stranového popisu.

4.1 Hierarchie řízení

Systémy letu představují vyšší stupeň řízení letadla zajišťující optimalizaci letu ve všech jeho fázích. Je zřejmé, že systém tohoto typu nelze řešit jako celek. Proto jej řešíme na úrovni jednotlivých jednodušších podsystémů, a ty rozlišujeme podle hierarchických úrovní řízení (zpětnovazebních smyček). V závislosti na druhu stabilizované veličiny dělíme řízení letadla na čtyři hierarchické úrovně.

4.2 Trimování letounu

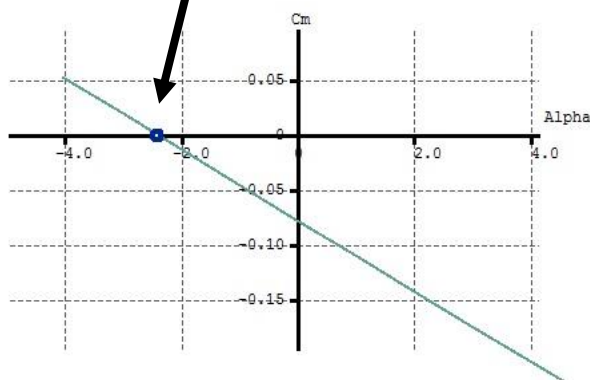
Jelikož pohybové rovnice letounu mají nelineární charakter, je nutné letadlo vytrimovat. To znamená nastavení úhlu náběhu, podélného sklonu, výchylku výškovky a tahu motoru tak, aby byl následný pohyb letounu ustálený přímočarý. Trimovat letoun můžeme, jak pomocí programu XFLR5 nebo pomocí skriptu v Matlabu. Na obrázku 4.1 je zobrazen proces získání lineárního modelu z nelineárního.



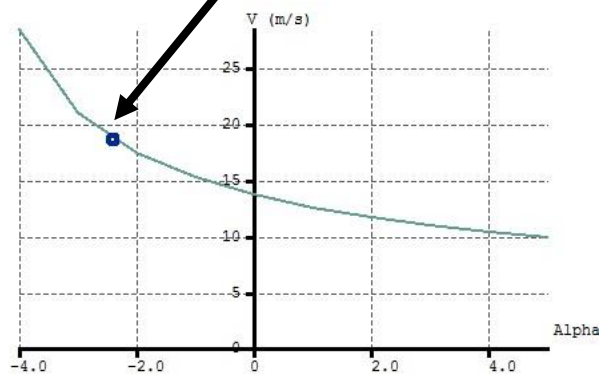
Obrázek 4.1: Postup pro získání lineárního modelu

Linearizovaný model má poté tvar: $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx + Du$, kde vektor x obsahuje rychlost, polohové úhly, úhlové derivace ve všech třech osách, výšku. Vektor u obsahuje vstup od křidélek, výškovky, motoru a směrovky. A výstupní vektor y obsahuje rychlost, úhly ofukování, polohové úhly a výšku. Trimování lze provést i pomocí programu XFLR5, kde po vymodelování letadla spustíme analýzu pro příslušná Reynoldsova čísla a analýzu při fixním vztlaku. Poté dostaneme grafy na obrázku 4.2, kde je zřejmé, že moment $C_m = 0$. Rovnovážný stav AoA, rychlost, klouzavost jsou velmi citlivé na sklon křivky $C_m = f(\alpha)$, tudíž i na polohu těžiště.

podmínka podélné stability $\alpha = -2,38^\circ$



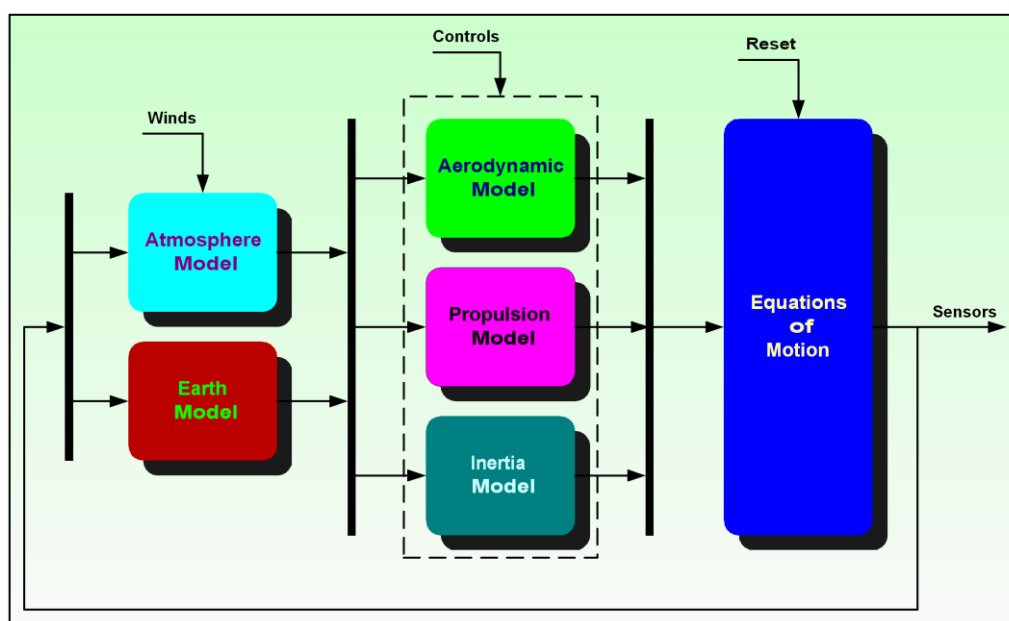
příslušná rychlost pro tento úhel $V = 18,4 \text{ m/s}$



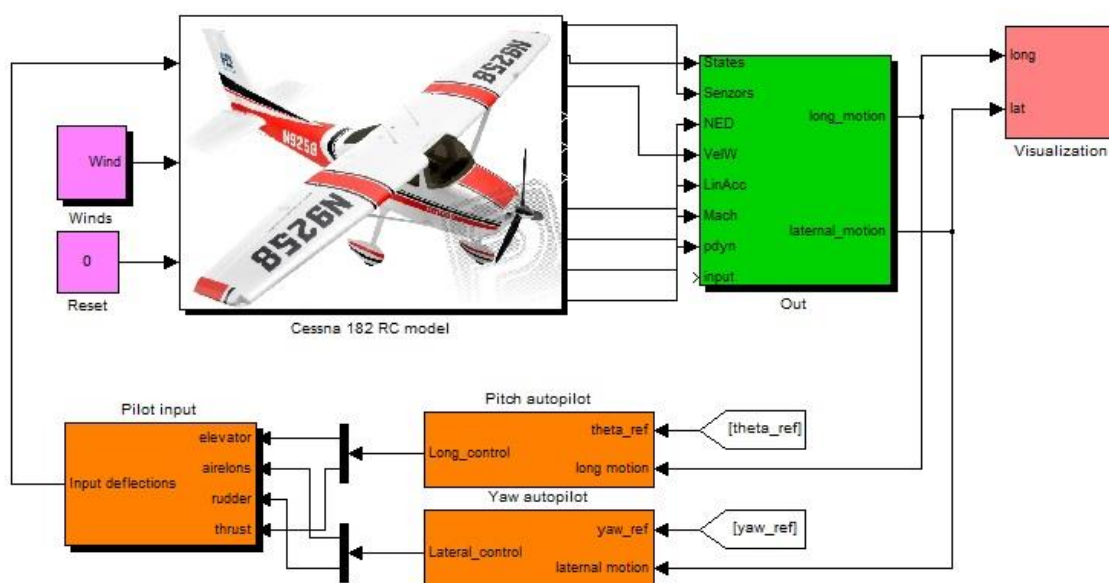
Obrázek 4.2: Trimování pomocí XFLR5

4.3 Nelineární model letounu

Tato část popisuje dynamiku nelineárního modelu. Pro výpočet nelineárního modelu byly použity bloky z AeroSim toolbox a Aerospace toolbox určené pro Matlab/Simulink. Tyto bloky poskytují standartní komponenty modelu letadla pro rychlejší návrh našeho modelu. Kromě bloků aerodynamiky, prostředí a modelu země nalezne zde i bloky pro vizualizaci a propojení s programem FlightGear.



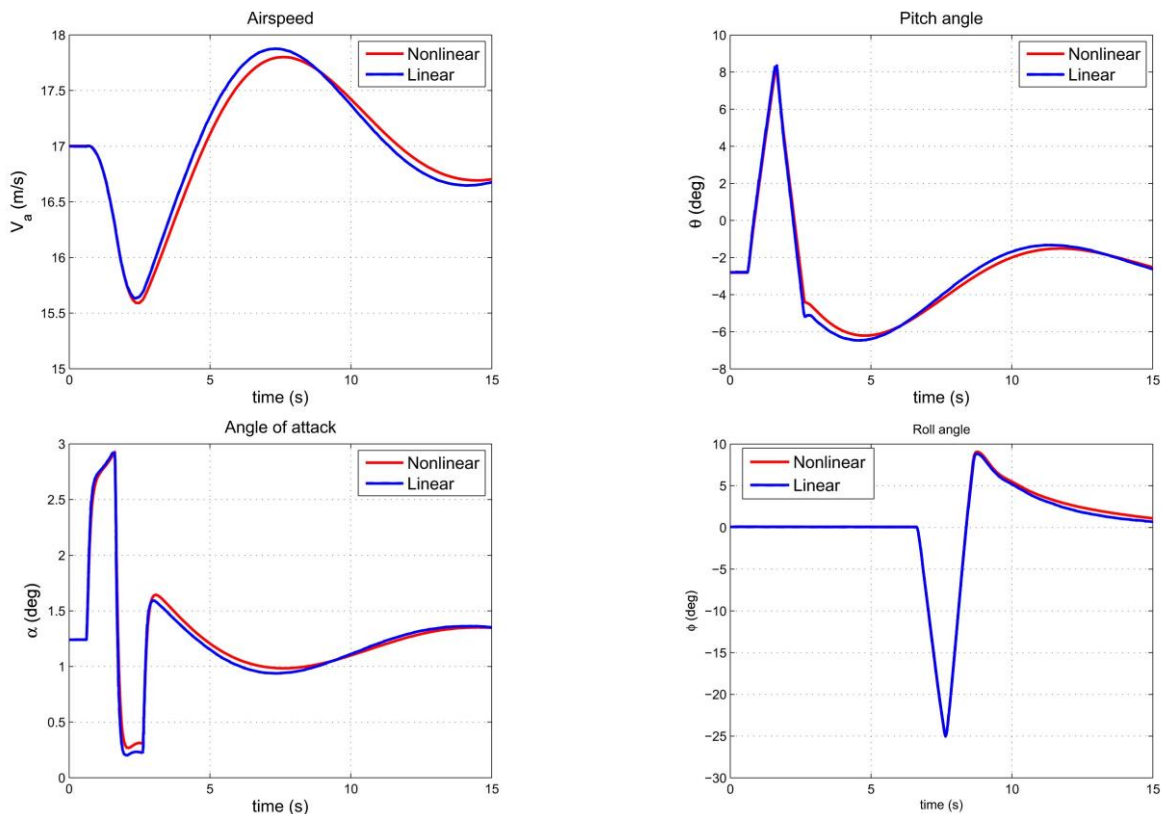
Obrázek 4.3: Zjednodušená vnitřní struktura modelu letadla



Obrázek 4.4: Nelineární model letadla

4.3.1 Porovnání modelů

Na obrázku 4.5 je zobrazené porovnání nelineárního modelu s lineárním modelem. Z grafů je vidět, že rozdíly mezi modely není nijak zásadní. Jelikož lineární model vychází ze stejných výchozích dat.



Obrázek 4.5: Nelineární/lineární model letadla

4.4 Podélný pohyb

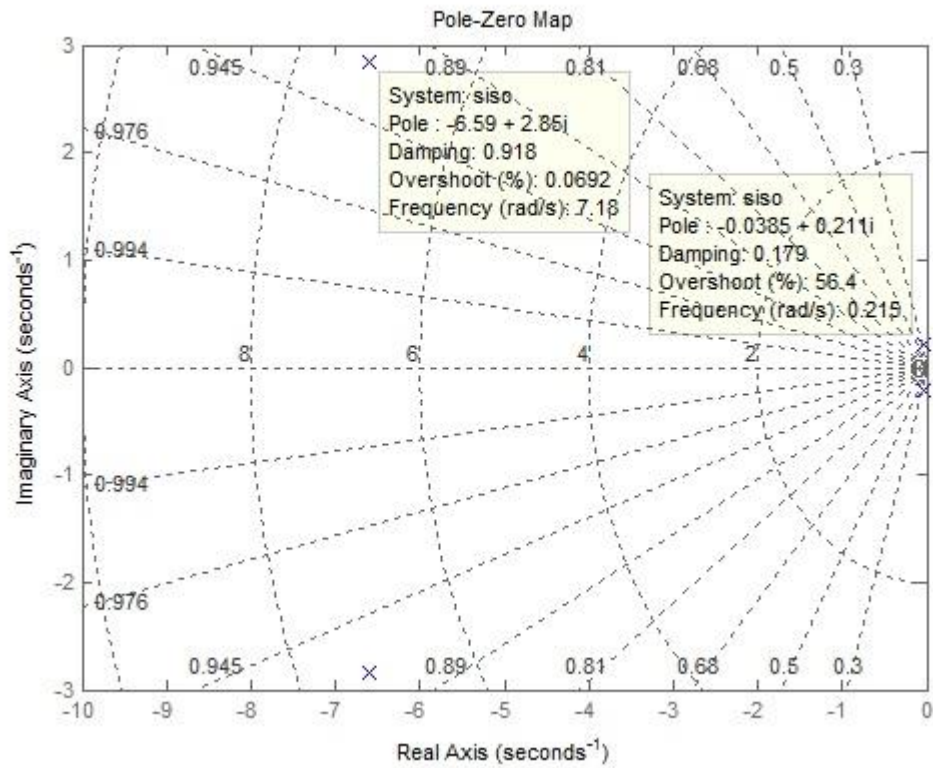
4.4.1 Analýza polohy pólů

Vlastnosti podélného pohybu lze vyjádřit stavovým a vnějším popisem. Matice přenosu podélného pohybu má dva vstupy a tři výstupy tedy rozměr 3×2 . Charakteristický polynom, který získáme, je pak čtvrtého řádu:

$$N(s) = \sum_{i=0}^4 A_i \cdot s^i = (\lambda^2 + 2 \cdot \xi_p \cdot \omega_{np} \cdot \lambda + \omega_{np}^2) \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \xi_{sp} \cdot \omega_{nsp} \cdot \lambda + \omega_{nsp}^2)$$

Obsahuje dvě kmitavé pohybové složky, frekvenčně od sebe vzdálené (řádově). První složku nazýváme *Short-period* (rychlá pohybová složka). Druhou složkou podélného pohybu nazýváme *Phugoid* (pomalá pohybová složka). Vyznačuje se velmi malým tlumením, může

být i nestabilní nebo se může rozpadat na dvě exponenciální složky, z nichž jedna je stabilní a druhá nestabilní.



Obrázek 4.6: Umístění pólů podélného pohybu

Short – period :

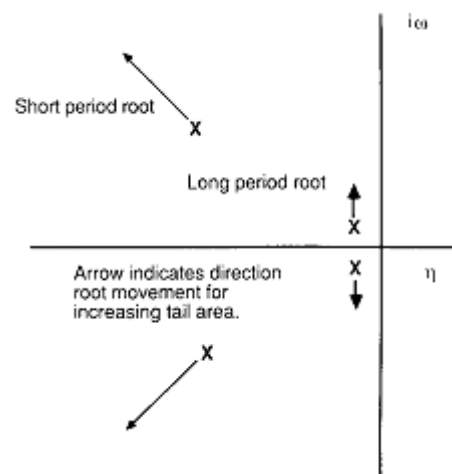
$$\omega_{nsp} = \sqrt{\frac{Z_{\alpha} \cdot M_q - M_{\alpha}}{v_0}}$$

$$\xi_{sp} = \frac{M_q + M_{\alpha} + \frac{Z_{\dot{\alpha}}}{v_0}}{2 \cdot \omega_{nsp}}$$

Phugoid :

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{-Z_u \cdot g}{v_0}}$$

$$\xi_p = \frac{-X_u}{2 \cdot \omega_{np}}$$



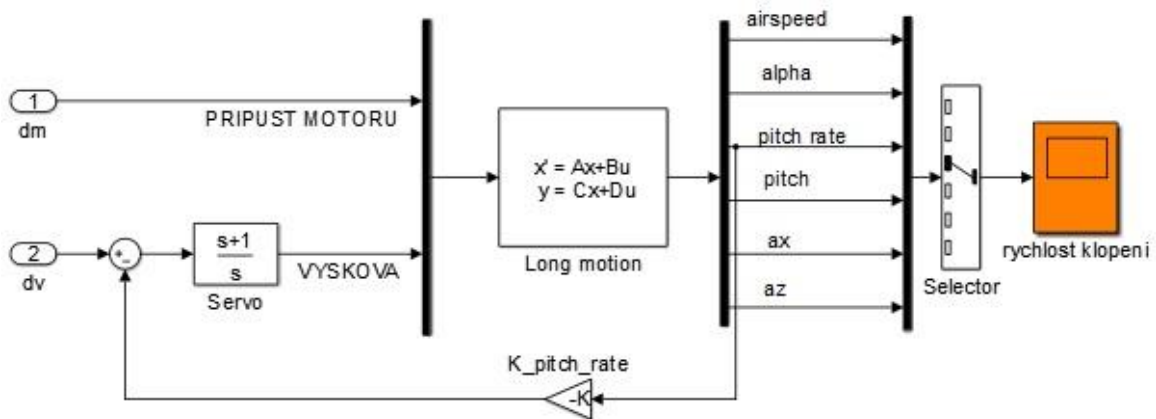
Obrázek 4.7: Umístění pólů podélného pohybu

Pro náš model UAV Cessna 182, vyšla hodnota rychlé pohybové složky tlumení $\xi_{nsp} = 0,918$ a přirozená frekvence $\omega_{nsp} = 7,18 \text{ rad/sec}$. Pomalá pohybová složka má pak hodnotu tlumení $\xi_p = 0,175$ a přirozenou frekvenci $\omega_{np} = 0,218 \text{ rad/sec}$. Pro shrnutí jsme dostali dva komplexně sdružené kořeny s hodnotami: $-6.592 \pm 2.8466i$ a $-0.0385 \pm 0.2114i$.

4.4.2 Stabilizace rychlosti klopení – *Short-period*

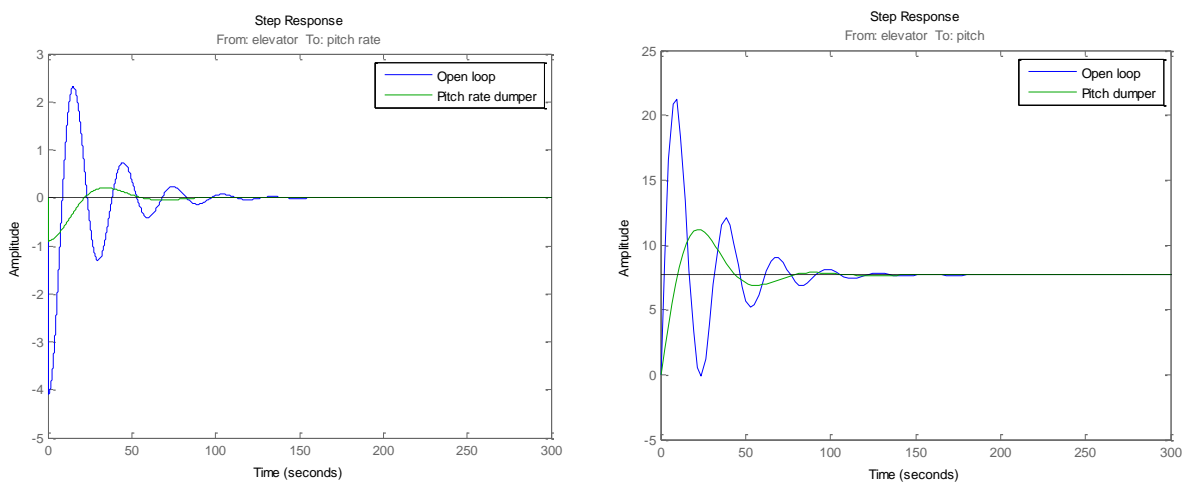
Návrh tlumiče Short-period je vytvořen pro stabilizaci rychlosti klopení $\dot{\theta}$. Návrh tlumiče vychází z přenosu otevřené smyčky, kdy přenos je:

$$F(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$



Obrázek 4.8: Blokové schéma stabilizace rychlosti klopení

Korekčním členem je zde K_pitch_rate . Tato konstanta je navržena tak, tlumení celého systému bylo větší. Funkce Matlabu *sisotool*. $K_pitch_rate = 0,86$.

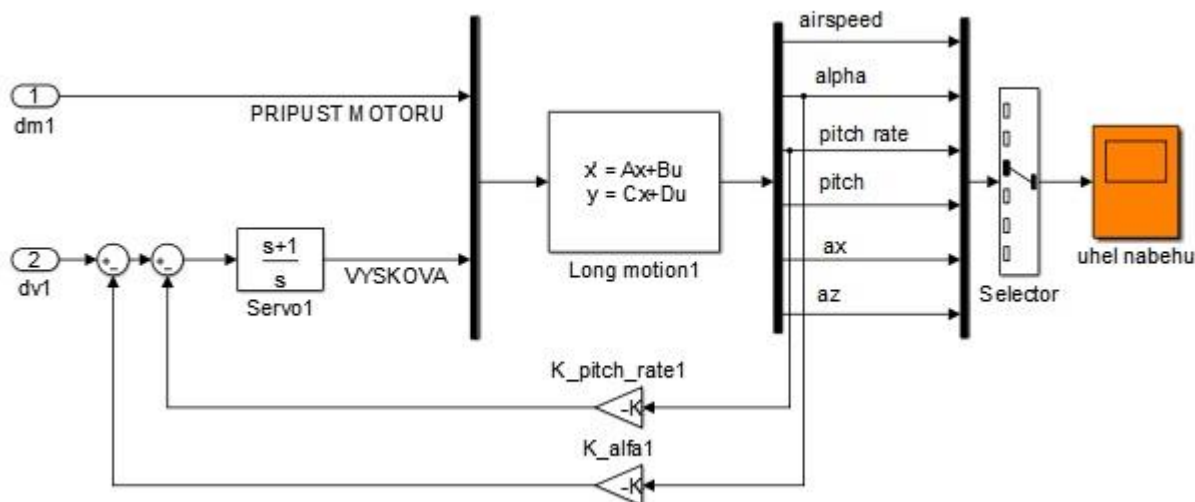


Obrázek 4.9: Přejchodové charakteristiky

4.4.3 Stabilizace úhlu náběhu

Po stabilizaci rychlosti klopení, je potřeba stabilizovat úhel náběhu. To znamená, že k vše uvedenému modelu přidáme zpětnovazební člen K_alfa . Vychází z přenosu:

$$F(s) = \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{b_4 \cdot s^4 + b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_5 \cdot s^5 + a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s}$$



Obrázek 4.10: Blokové schéma stabilizace rychlosti klopení

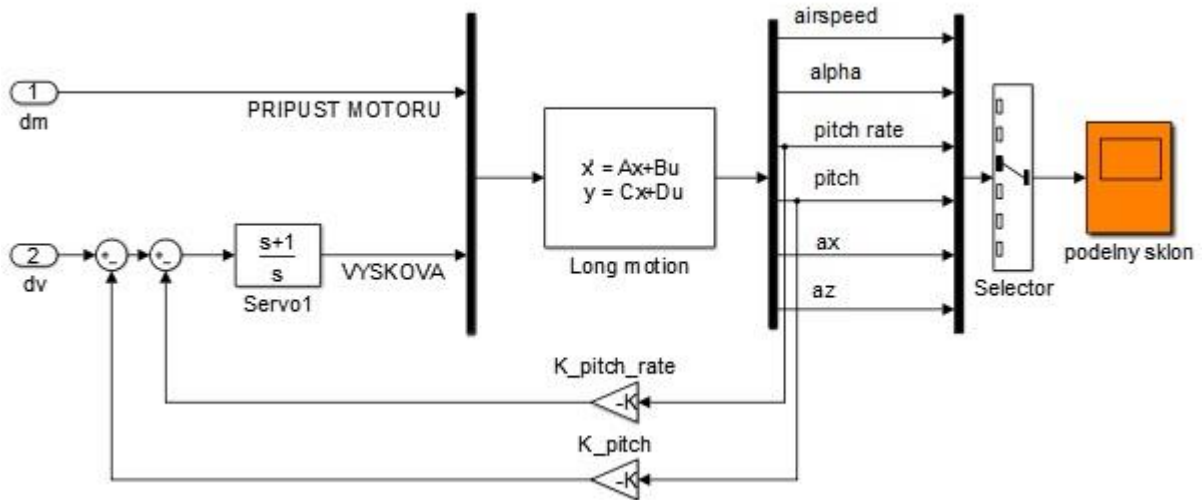
Nalezení konstanty K_alfa zpětnovazebního členu je stejná jako u předchozího případu, jen s tím rozdílem, že konstanta mění pouze svou přirozenou frekvenci systému $K_alfa = 1,41$.

4.4.4 Autopilot podélného sklonu – *Phugoid*

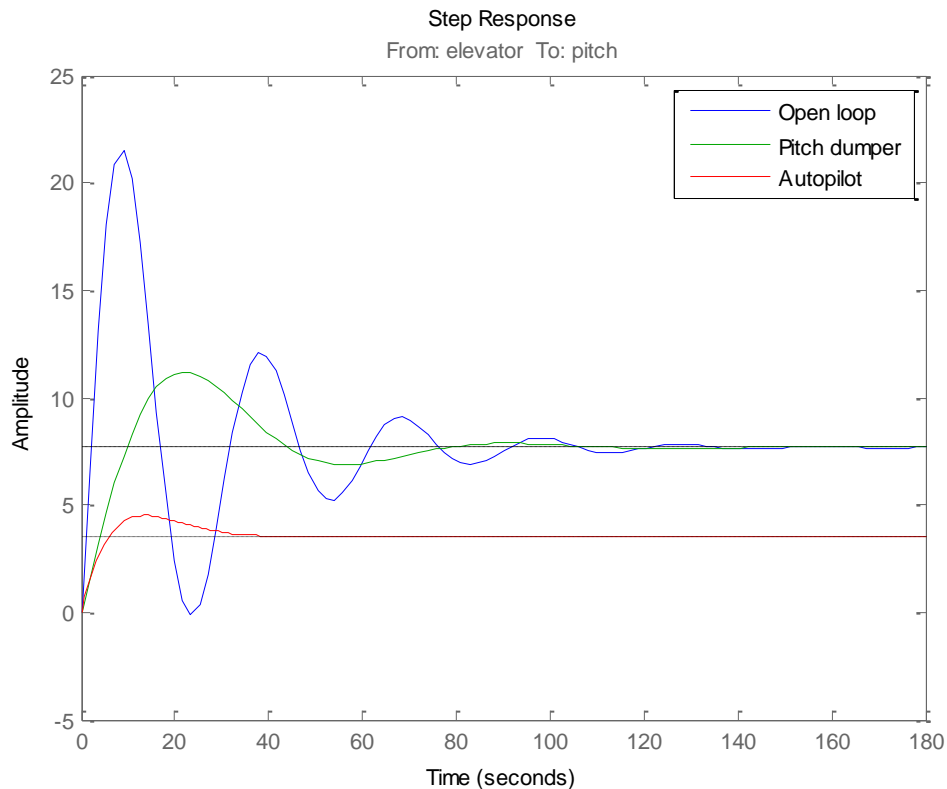
Stabilizace podélného sklonu patří hierarchicky do druhé úrovně řízení. Jedná se o běžný autopilot. Především stabilizace ovlivňovaly chování letadla na vyšších frekvencích, tato stabilizace (zpětná vazba od podélného sklonu) ovlivňuje chování letadla na nízkých frekvencích. Přenos systému je:

$$F(s) = \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_5 \cdot s^5 + a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s}$$

Blokové schéma na obr. 4.7 je doplněno o zpětnovazební člen $K_{pitch} = 0.15$. Předchozí zapojení není použito pro jeho špatné vlastnosti.



Obrázek 4.11: Autopilot podélného sklonu



Obrázek 4.12: Přejchodová charakteristika podélného sklonu

4.5 Stabilizace stranového pohybu

Při stabilizaci stranového pohybu letadla uvažujeme součinnost všech kormidel primárního řízení. Stranový pohyb je pohyb složený ze tří pohybů (klonění - roll, zatáčení - yaw a klopení - pitch).

Vlastnosti stranového pohybu můžeme vyjádřit pomocí přenosové matice rozměru 3x2, jejíž prvky tvoří přenosy mezi jednotlivými výstupy a vstupy, dále pomocí frekvenčních charakteristik, rozložení pólů a nul (časové oblasti podle různých odezev, nejčastěji pomocí přechodových charakteristik). Matice (koeficienty) linearizovaných rovnic jsou uvedeny v kapitole 3.3.4.

4.5.1 Analýza polohy pólů

K popisu systému nám jako u podélného pohybu pomůže k pochopení vlastností stranového pohybu charakteristický polynom. Matice přenosu stranového pohybu má dva vstupy a tři výstupy, tedy rozměr 3x2 jak je již výše zmíněno. Charakteristický polynom, který získáme, je pak tedy pátého řádu s jednonásobným pólem v počátku:

$$N(s) = \sum_{i=0}^4 A_i \cdot s^i = \lambda \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \xi_{DR} \cdot \omega_{nDR} \cdot \lambda + \omega_{nDR}^2) \cdot (\lambda + \lambda_{roll}) \cdot (\lambda - \lambda_{spiral})$$

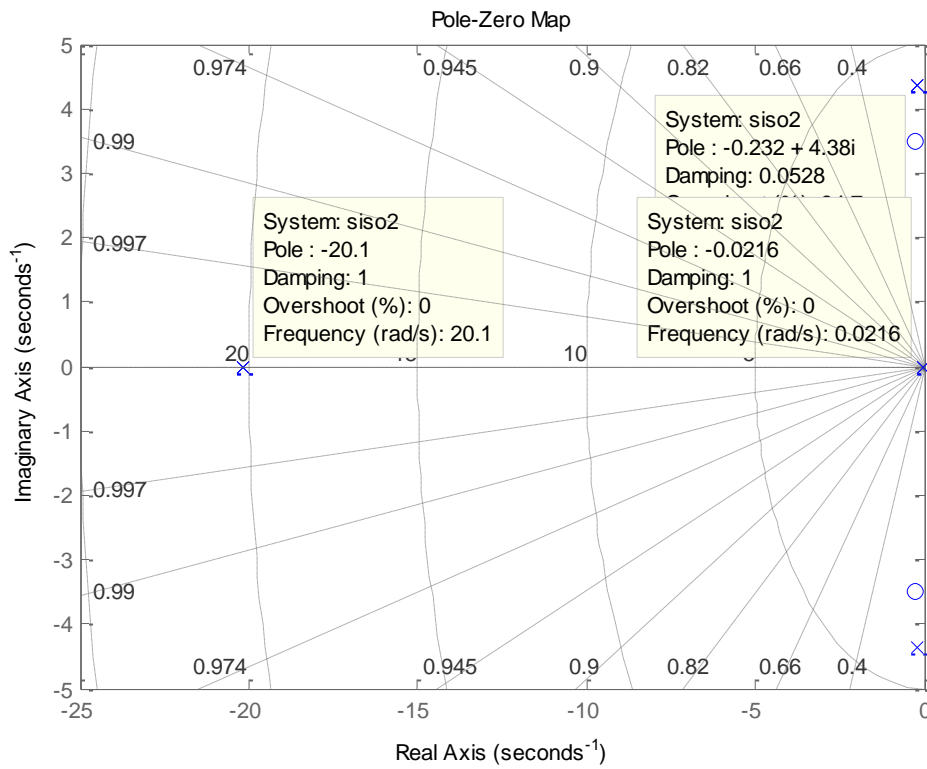
Rozmístění pólů lze rozdělit na několik částí.

První kvadratický trojčlen obsahuje dynamické parametry rychlé pohybové složky typu *Dutch roll mode*. Jedná se o kymácvý pohyb s menší hodnotou poměrného tlumení.

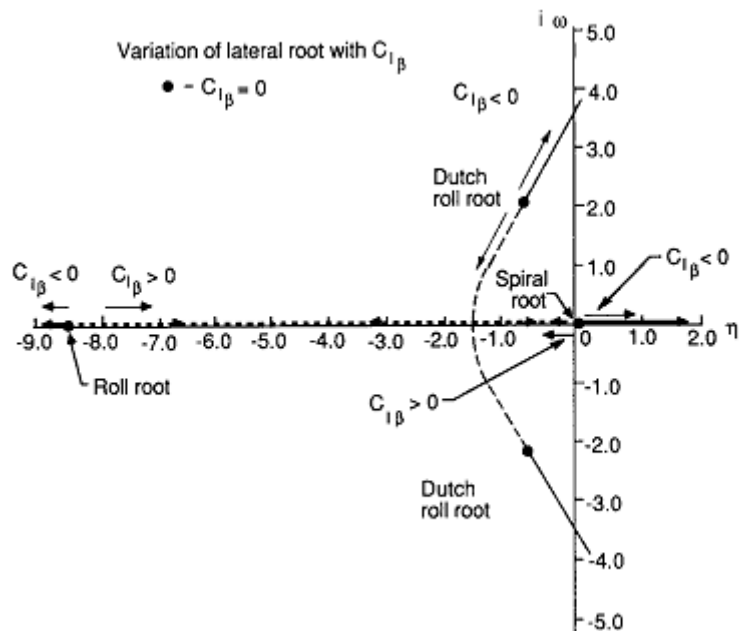
Další člen představuje exponenciálně tlumenou klonivou složku stranového pohybu *Roll mode*.

Poslední člen je tvořen složkou typu spirální nestabilita *Spiral mode*, je to pomalá divergující složka, jejíž kladný pól leží blízko počátku.

Pól v počátku charakterizuje necitlivost letadla vůči směrové orientaci jeho letu. Rozdílnost charakteru jednotlivých složek pohybu letadla umožňuje jeho rozdělení na jednotlivé složky.



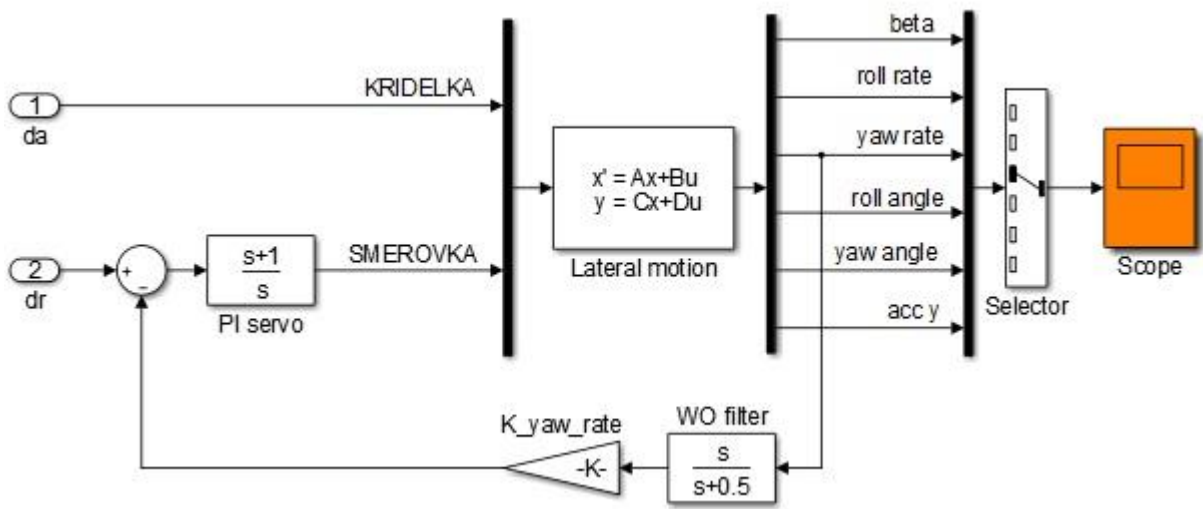
Obrázek 4.13: Umístění pólů příčného pohybu



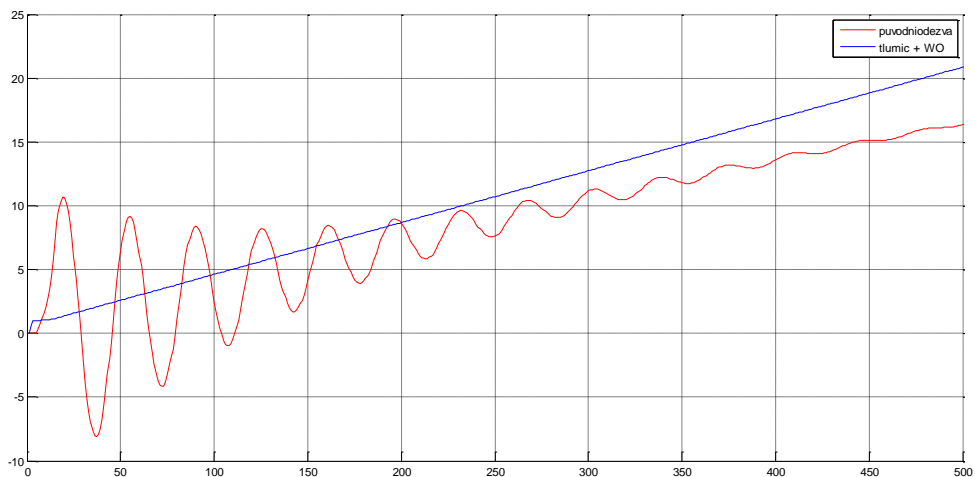
Obrázek 4.14: Umístění pólů příčného pohybu

4.5.2 Návrh tlumiče kymácivé složky – *Dutch roll damper*

Při návrhu tlumiče *Dutch roll damper* použijeme jako vstup řízení směrovky a výstupem bude změna kurzu. Tento tlumič plní funkci tlumení *Dutch roll* složky a umožňuje správné zatáčení. Zde opět použijeme výše uvedené funkce z Matlabu, kde vlastní frekvenci ponecháme, ale změníme tlumení. V našem případě má zpětnovazební konstanta hodnotu $K_yaw_rate = 1,7$. Dále přidáme do zpětnovazebního obvodu nízkofrekvenční filtr (Wash out), který nepropustí nízké frekvence (ustálenou složku rychlosti zatáčení).



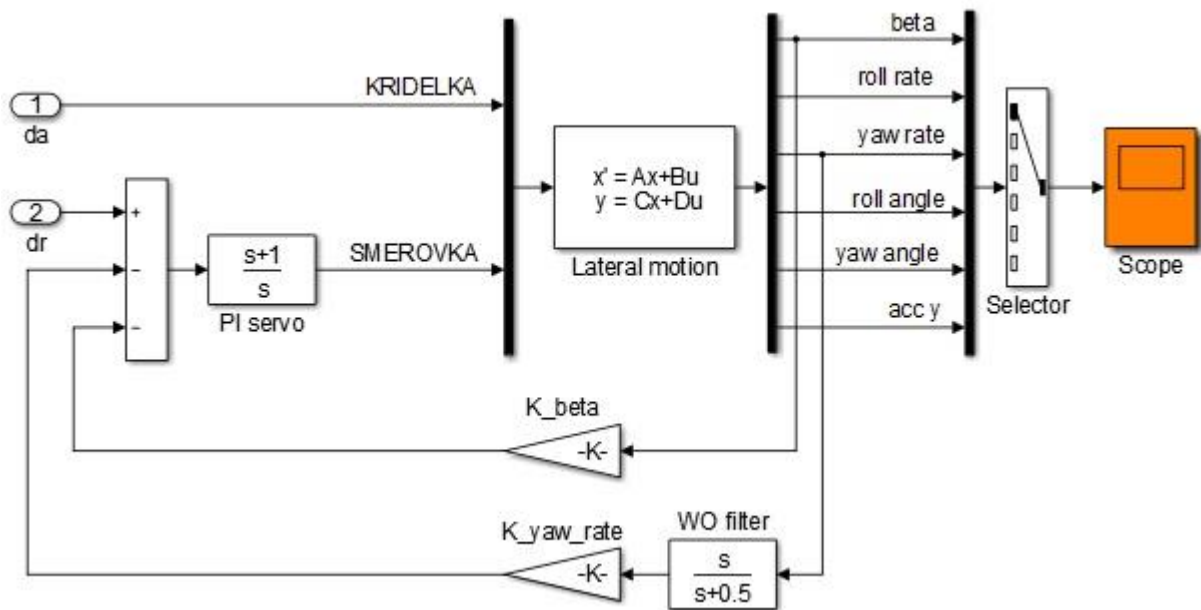
Obrázek 4.15: Blokové schéma tlumiče kymácivé složky



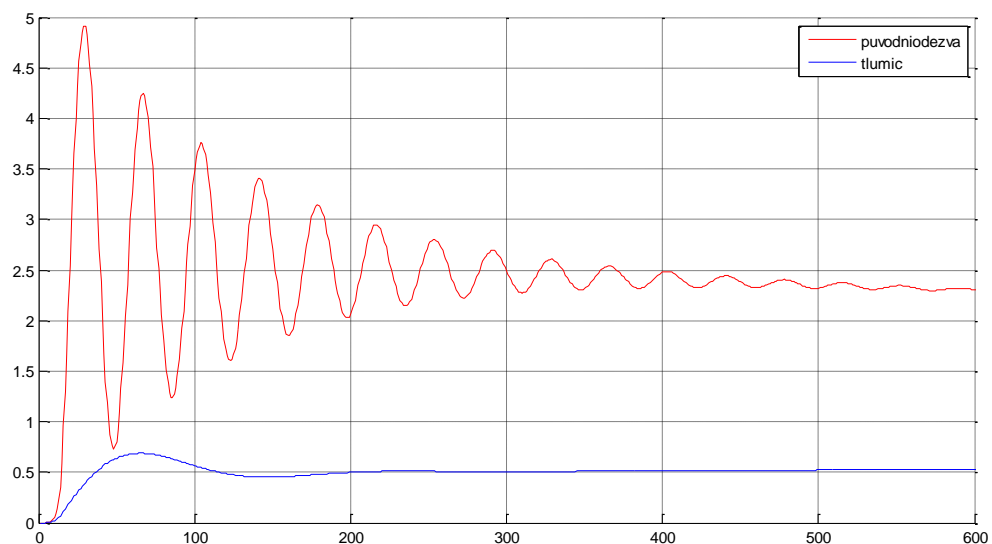
Obrázek 4.16: Přejchodová charakteristika tlumiče kymácivé složky

4.5.3 Koordinace – kymácivé složky

Pro návrh koordinace kymácivé složky stranového pohybu (úhel vybočení β) použijeme jako vstup směrovku. Návrh provedeme jako v předchozích případech pomocí funkce *sgrid*. Dále funkcí *rlocfind* získáme konstantu tlumení. Do předchozího obvodu zavedeme další zpětnou vazbu v podobě tlumení $K_beta = 1,4$.



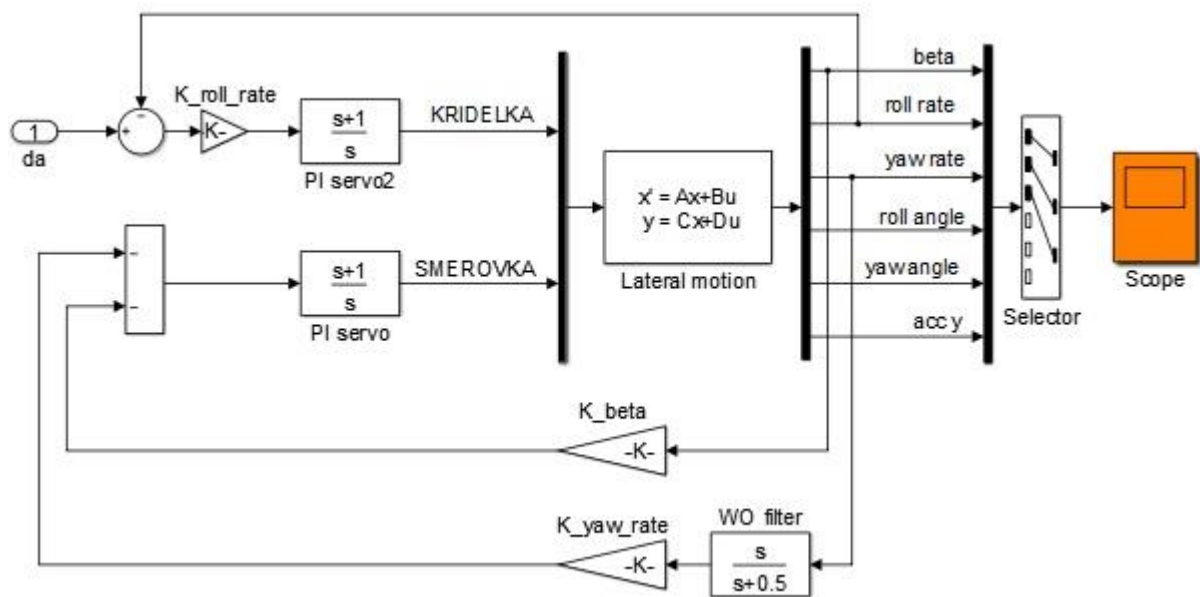
Obrázek 4.17: Blokové schéma tlumiče kymácivé složky



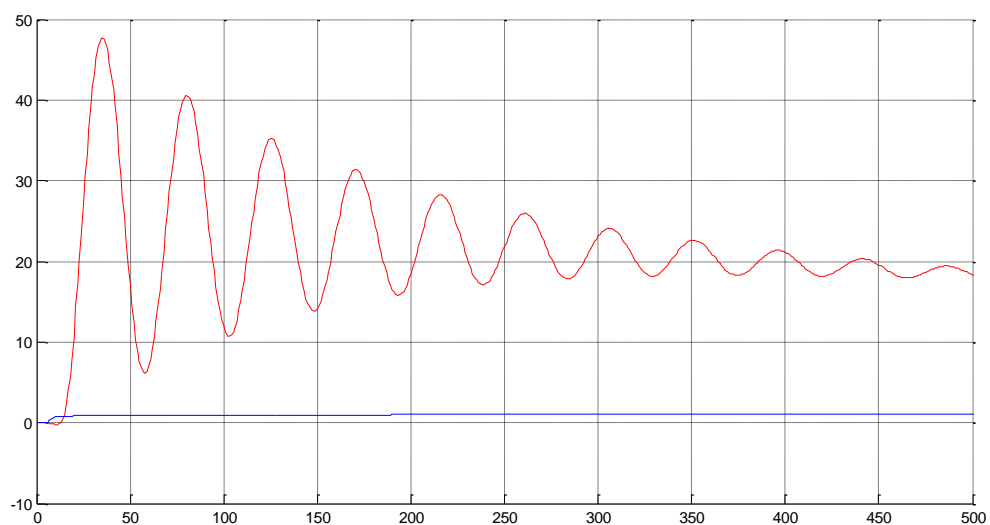
Obrázek 4.18: Přejchodová charakteristika kymácivé složky

4.5.4 Návrh tlumiče klonivé složky – *Roll damper*

Pro návrh tlumiče klonivé složky (spirální nestabilita) použijeme jako vstup řízení křídélek. Hledáme geometrické místo kořenů (pomocí *rltool*) takové, aby výsledná amplituda byla poloviční oproti amplitudě otevřené smyčky. Zavedeme zpětnou vazbu z klonění na křídélka $K_{roll_rate} = 0,4$.



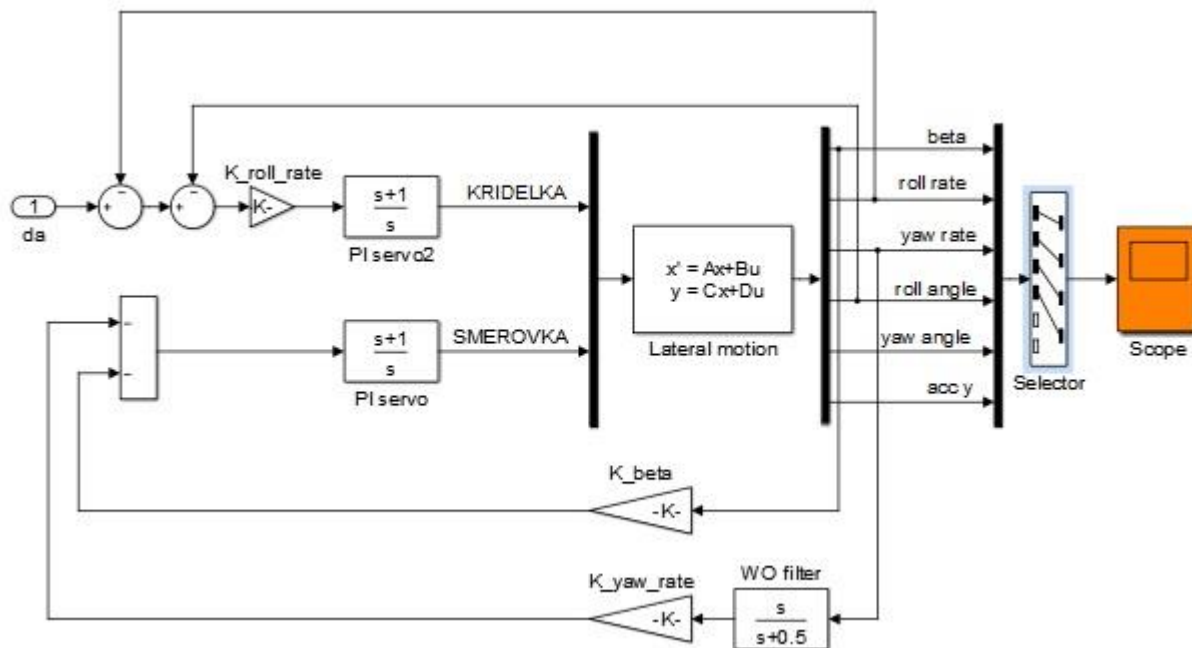
Obrázek 4.19: Blokové schéma tlumiče klonivé složky



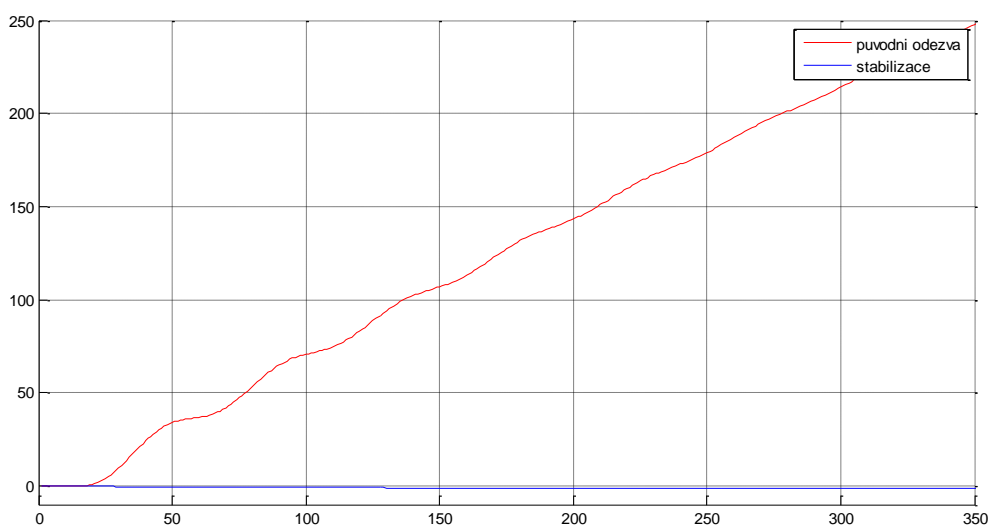
Obrázek 4.20: Přechodová charakteristika tlumiče klonivé složky

4.5.5 Stabilizace příčného náklonu

Pro stabilizaci příčného náklonu použijeme jako vstup řízení křidélek. Zavedeme zápornou zpětnou vazbu z příčného náklonu na křidélka.



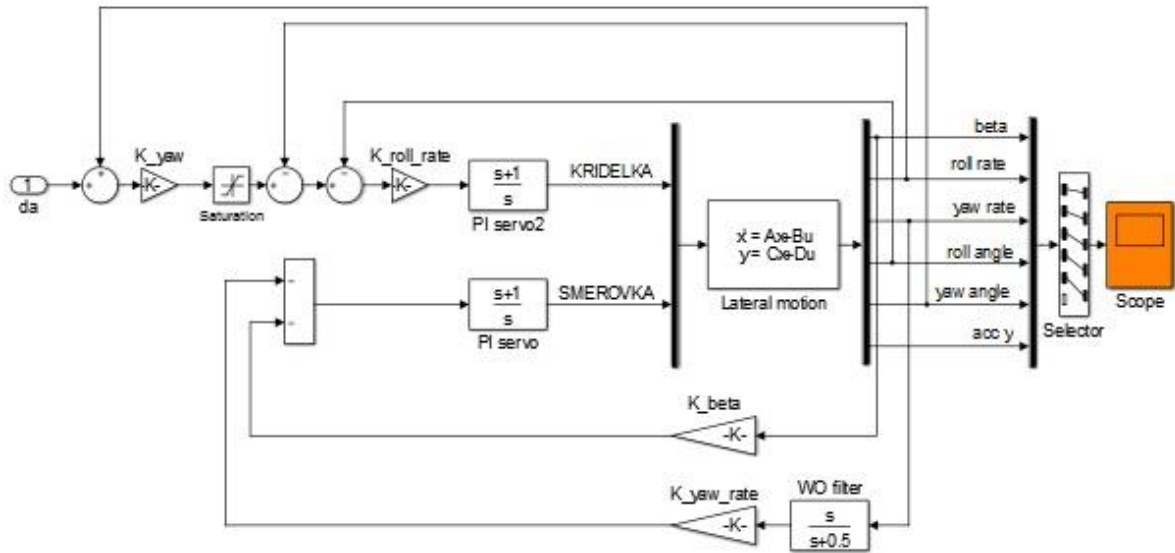
Obrázek 4.21: Blokové schéma stabilizace příčného náklonu



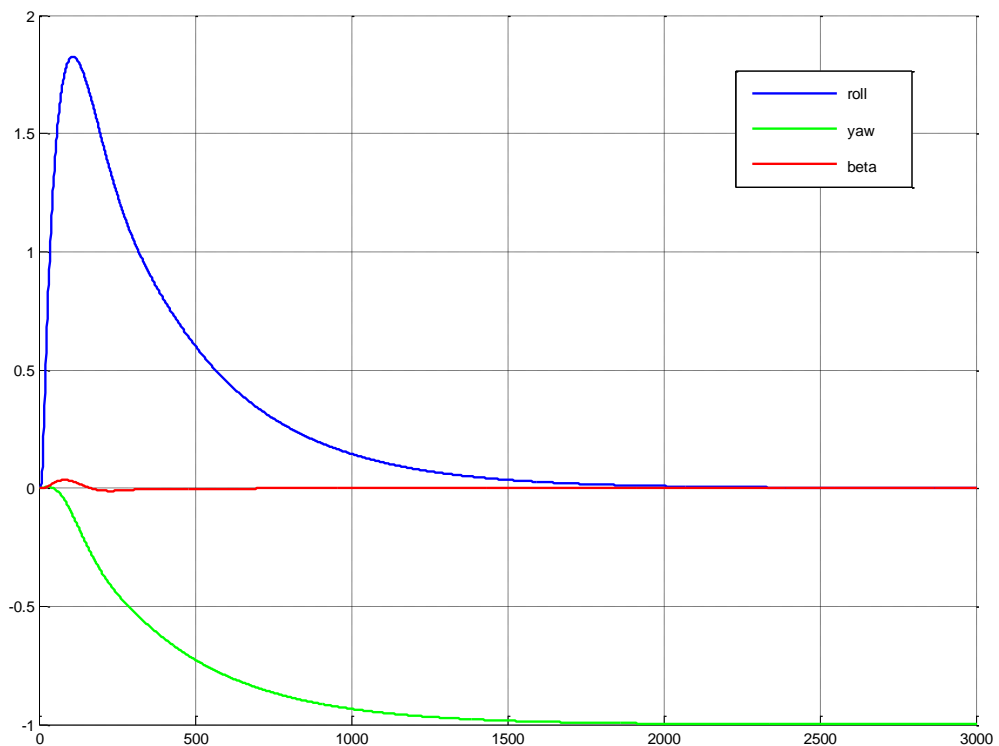
Obrázek 4.22: Přechodová charakteristika stabilizace příčného náklonu

4.5.6 Stabilizace kurzu

Pro stabilizaci kurzu použijeme jako vstup řízení křidélek. Zavedeme kladnou zpětnou vazbu z kurzu na křídélka, protože kurz reaguje na kladný vstupní signál křidélek vychýlením do negativních hodnot. Do obvodu jsme navíc přidali omezovač, kvůli konstrukčním vlastnostem letadla.



Obrázek 4.23: Blokové schéma stabilizace kurzu



Obrázek 4.24: Stabilizace kurzu

4.6 Návrh LQ regulátoru

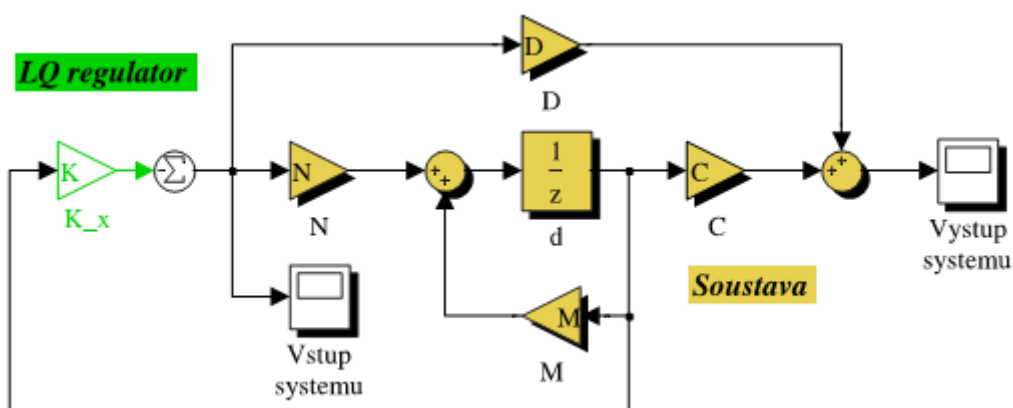
Lineárního kvadratického regulátor (LQR), je optimální regulátor pro lineární systémy. Předpokládáme, že je říditelný i pozorovatelný a můžeme tak použít regulátor.

$$u = -K \cdot x$$

Tento regulátor řeší problém optimálního přechodu z daného stavu x_0 do počátku. Návrhem regulátoru je myšleno nalezení $n \times 1$ vektoru zesílení K . Řiditelnost (pozorovatelnost) systému lze ověřit Matlabem (*ctrb*, *obsv*). V našem případě model vyhovuje, LQ regulátor využívá kvadratické kritérium optimality a snaží se určit vektor zesílení K minimalizací tohoto kritéria.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) d\tau$$

Konkrétní kritéria určují matice Q a R , kde matice Q je pozitivně semidefinitní a matice R je pozitivně definitní. Pokud hodnoty v matici R jsou mnohem větší, než u Q znamená to, že se preferuje malá vynaložená energie na akční zásah před rychlostí ustálení. Pokud jsou naopak hodnoty v matici R malá, preferujeme rychlé ustálení. Prvky na diagonále matice váží jednotlivé stavy nebo výstupy. Pro návrh byla využita funkce Matlabu *lqr*.

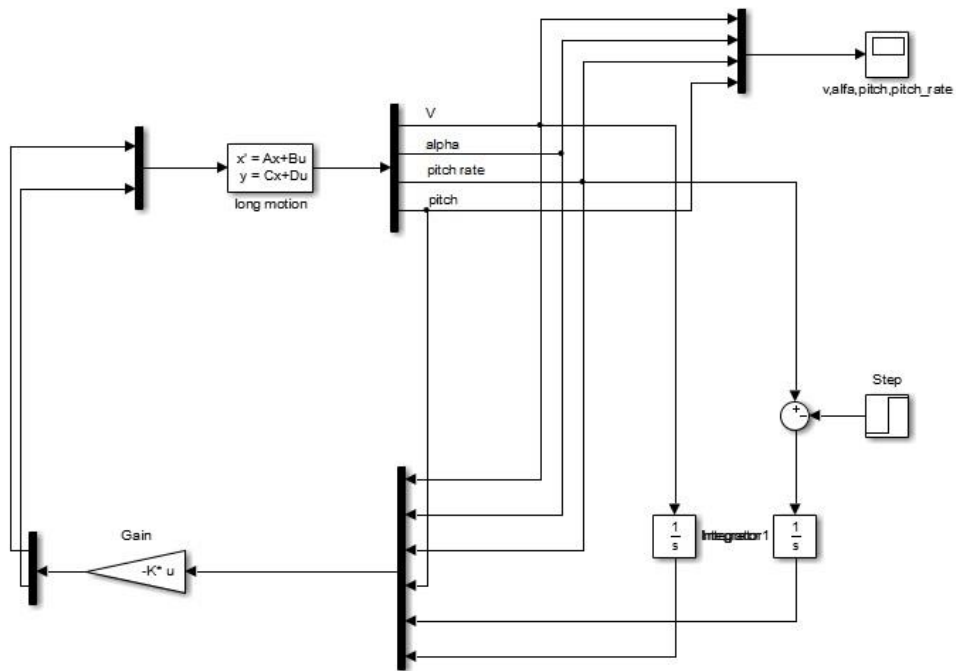


Obrázek 4.25: Blokové schéma LQ regulátoru

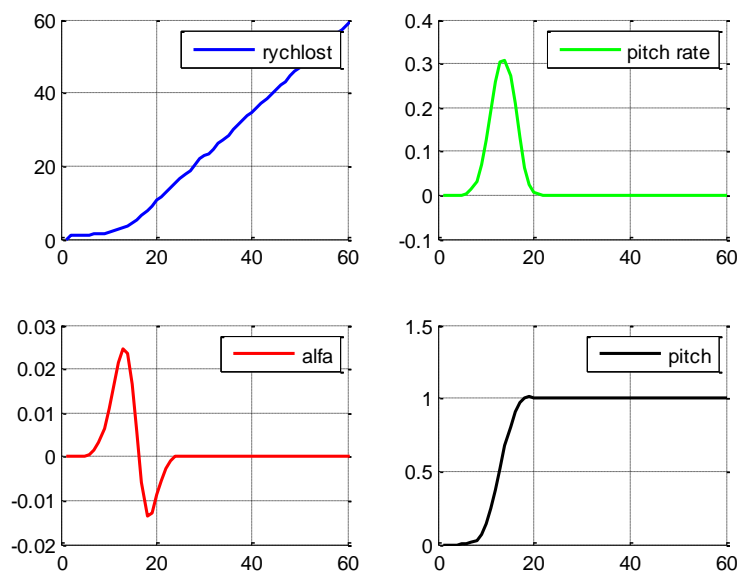
4.6.1 Návrh podélného LQ regulátoru

Pro návrh regulátoru podélného pohybu byla využita funkce matlab *lqr*. Výstupní matice K , která je zapojena na obr.4.22 má hodnotu:

$$K = \begin{pmatrix} 2.304 & 0.200 & -0.342 & -0.023 & 0.093 & 0.995 \\ -0.1735 & -0.591 & 2.229 & 0.882 & 0.995 & -0.0936 \end{pmatrix}$$



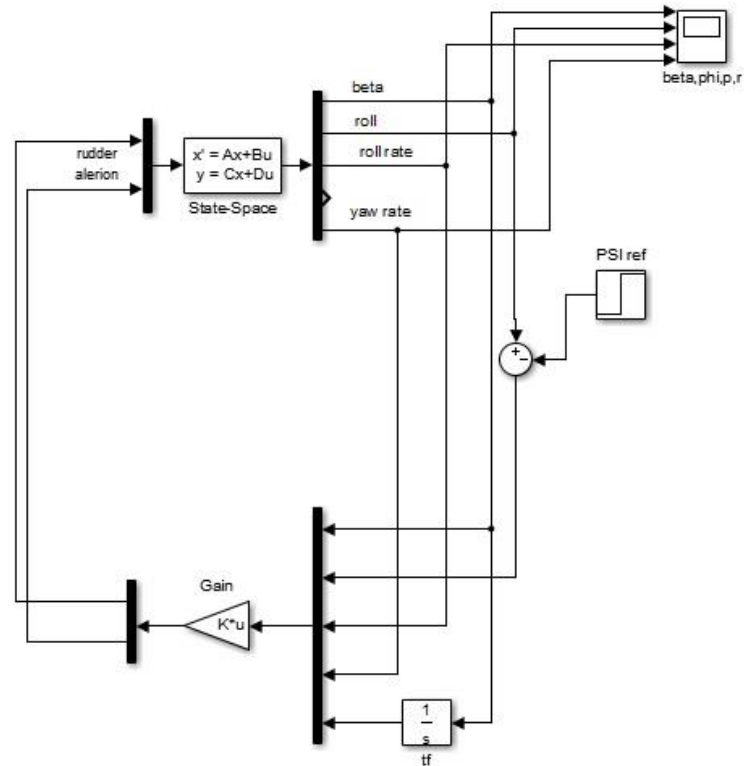
Obrázek 4.26: Blokové schéma LQ regulátoru podélného pohybu



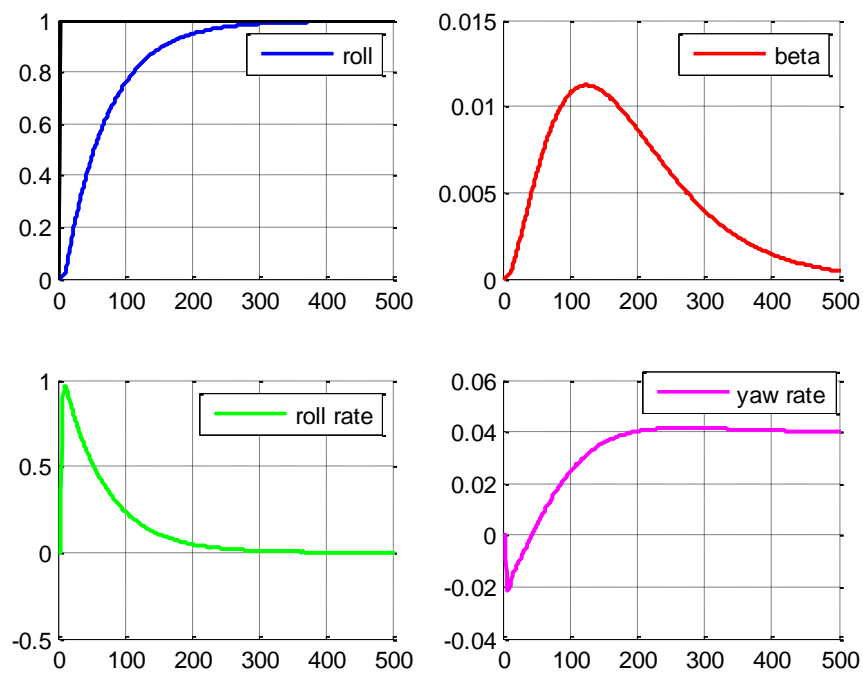
Obrázek 4.27: Odezvy LQ regulátoru podélného pohybu

4.6.2 Návrh příčného LQ regulátoru

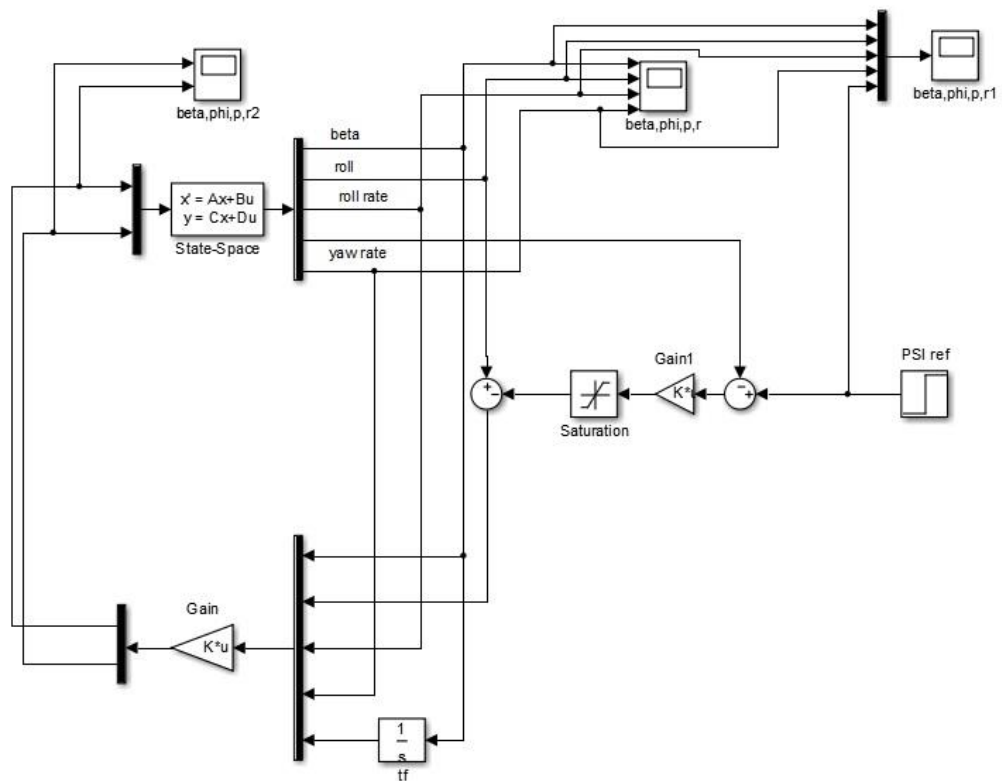
Pro návrh regulátoru příčného pohybu byl nejprve navrhnout autopilot náklonu, poté byl navrhnout směrový autopilot.



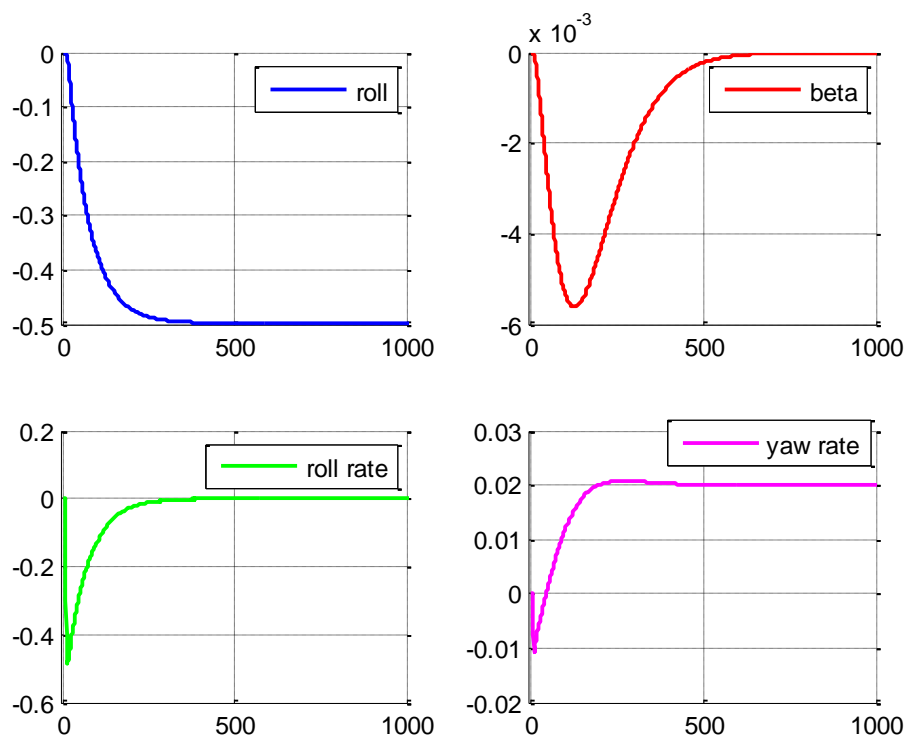
Obrázek 4.28: Blokové schéma LQ regulátoru příčného pohybu



Obrázek 4.29: Odezvy LQ regulátoru příčného pohybu



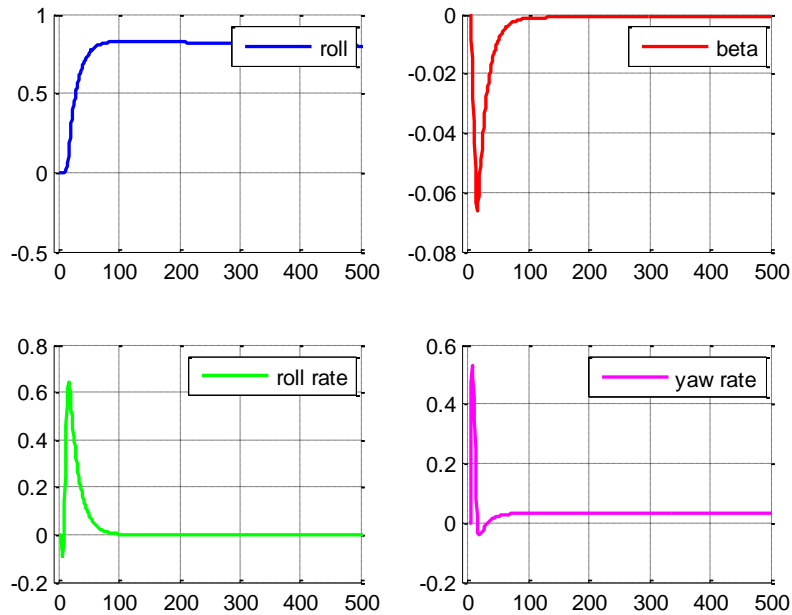
Obrázek 4.30: Blokové schéma LQ regulátoru směrového autopilota



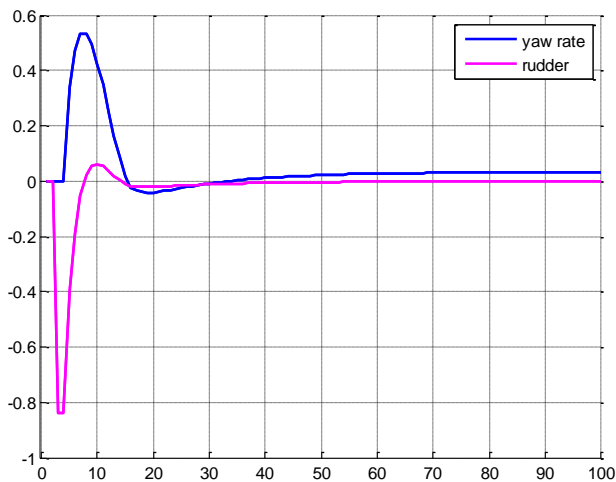
Obrázek 4.31: Odezvy LQ regulátoru směrového autopilota

4.6.3 Návrh řízení při poruše

Z předchozích návrhů, jsem pro návrh řízení použil metodu LQR. Při poruše křidélek jsem postupoval tak, že jsem v matici B její první sloupec vztahující se ke křidélkům odstranil. Z výstupních grafů je patrné, že letadlo je ovladatelné pomocí směrovky, i když má zablokována křidélka.



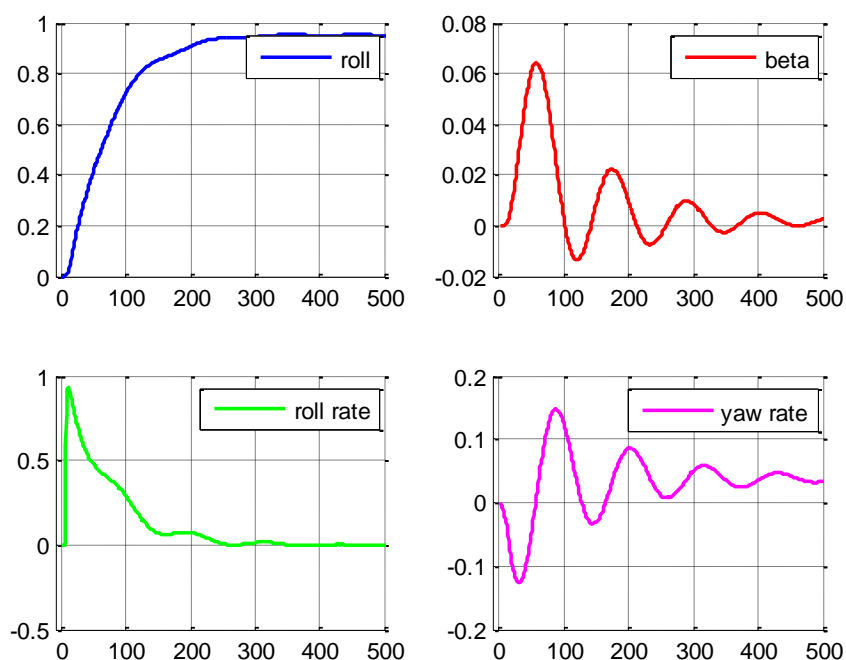
Obrázek 4.32: Odezvy porucha křidélek



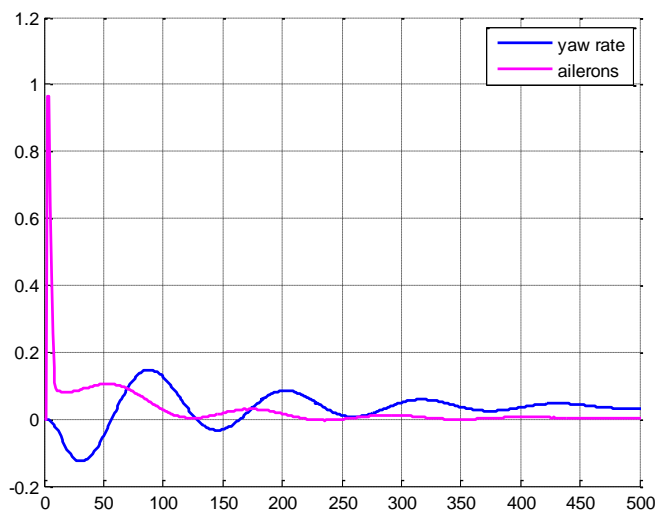
Obrázek 4.33: Výchylka směrovky, rychlost zatáčení

Mezi další možné poruchy letounu můžeme zařadit nemožnost ovládat směrové kormidlo. V tomto případě bude letadlo ovladatelné, jen s tím rozdílem, že změny směru letu stroje budou řízeny pomocí křidélek. Grafy znázorňují, že s letounem lze změnit směr i v

případě nefunkčního směrového kormidla. K zatočení do požadovaného směru dospějeme opakovaným jemným vychylováním křidélek a to tak, aby nedocházelo k velkému klonění.



Obrázek 4.34: Odezvy porucha směrovky



Obrázek 4.35: Výchylka křidélek, rychlost zatačení

Dalšími poruchami může být poškození motoru. Za předpokladu, že zbytek řídicích ploch je funkční, stroj může plachtit a lze ho ovládat. Jako poslední možný defekt uvádíme nefunkční výškové kormidlo. Z teoretického hlediska lze v tomto případě stroj řídit přípustí motoru a zbylými kormidly. Neuvádíme zde však žádný výstup, jelikož měření tahu motoru vykazovalo veliké chyby (viz výše).

Kapitola 5

5. EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ NA RC LETOUNU

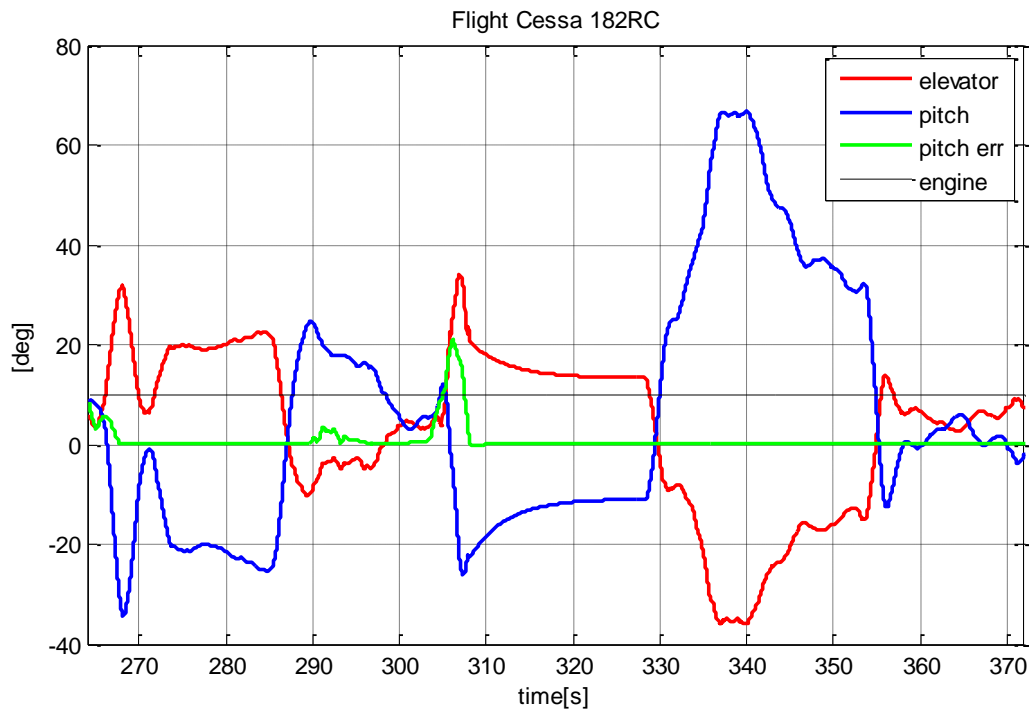
5.1 Vybavení letadla

Letoun Cessna 182 RC je vybavena střídavým motorem s rotačním pláštěm *C3536-KV900* s výkonem 9000RPM/V. Stroj je napájen akumulátorem *RAY G3 11,1V 2200mAh*. Původně byl osazen třílistou vrtulí, dnes je již osazen dostupnější dvoulistou.

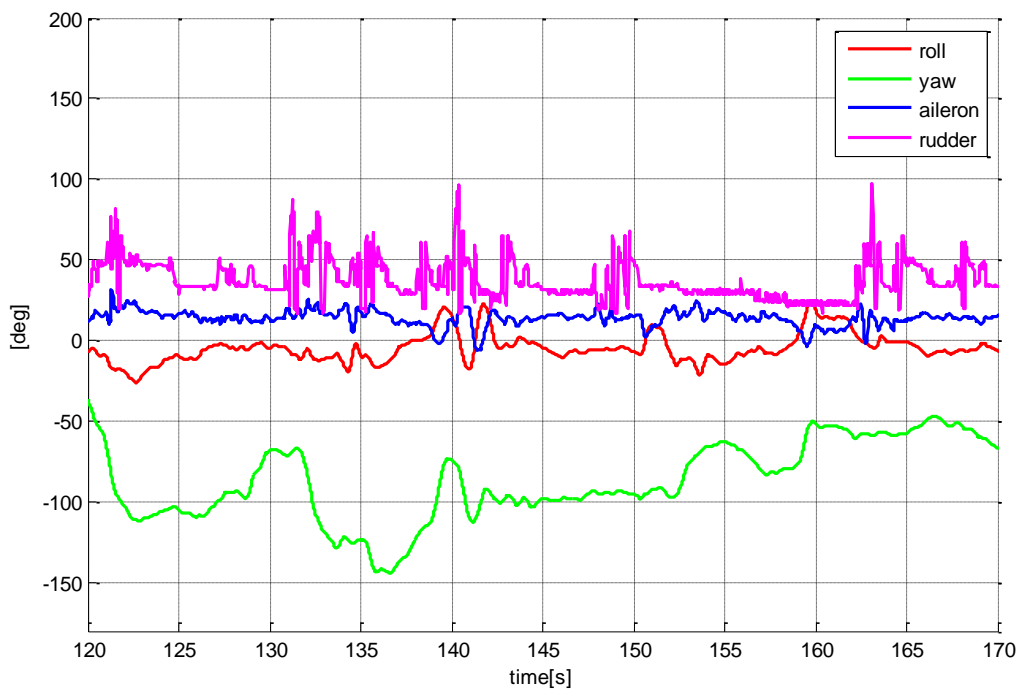
Snímač sběru dat, které je umístěn uvnitř letadla ovládá procesor *ARM Cortex M3, 24MHz – STM32F100RB*. Pro snímání dat zrychlení, úhlové rychlosti a směru k magnetickému pólu poskytuje inerciální měřicí jednotka (IMU) *MPU6000, LSM330* (třiosý akcelerometr a třiosý gyroskop fungující na principu MEMS). Dalším senzorem je pak třiosý magnetometr *HMC5883L*. Měření tlaku *MPX4115A*.

5.2 Měřená data

Měřená data jsme získali díky jednotce vyvinuté na katedře řídicí techniky s kolegou Halgašíkem. Data byla ukládána na SD kartu ve formátu .csv. Tyto data jsme upravovali pomocí Matlab skriptu. Kde byla nejprve chybná data smazána a poté byl na průběh použit filtr, který průběh vyfiltroval obrázek 5.1 a 5.2. Jak je patrné, z obou průběhů bylo měření ovlivněno vnějšími vlivy, zejména pak větrem. Na měření v příčném směru je ovlivnění větrem znatelnější.



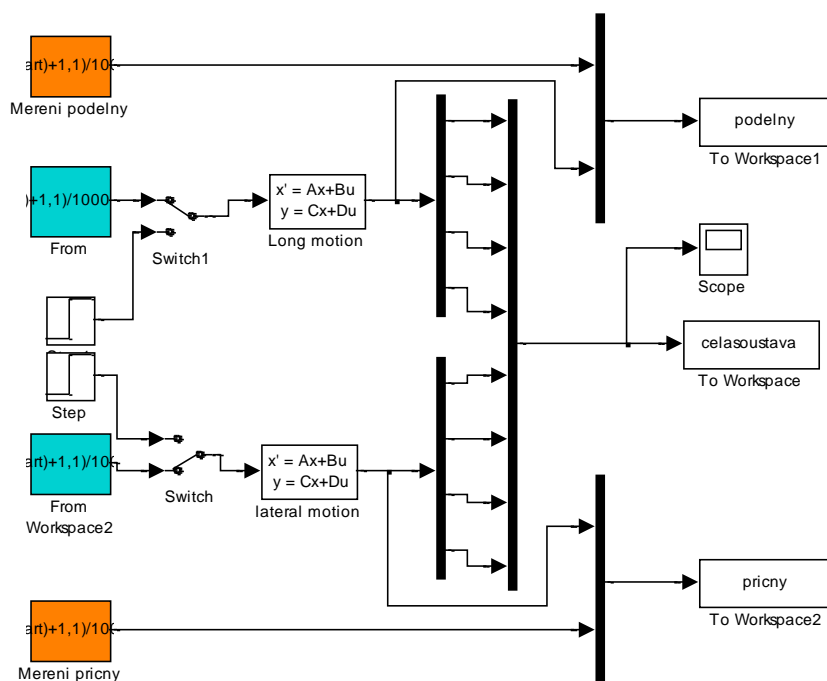
Obr. 5.1: Let s RC modelem



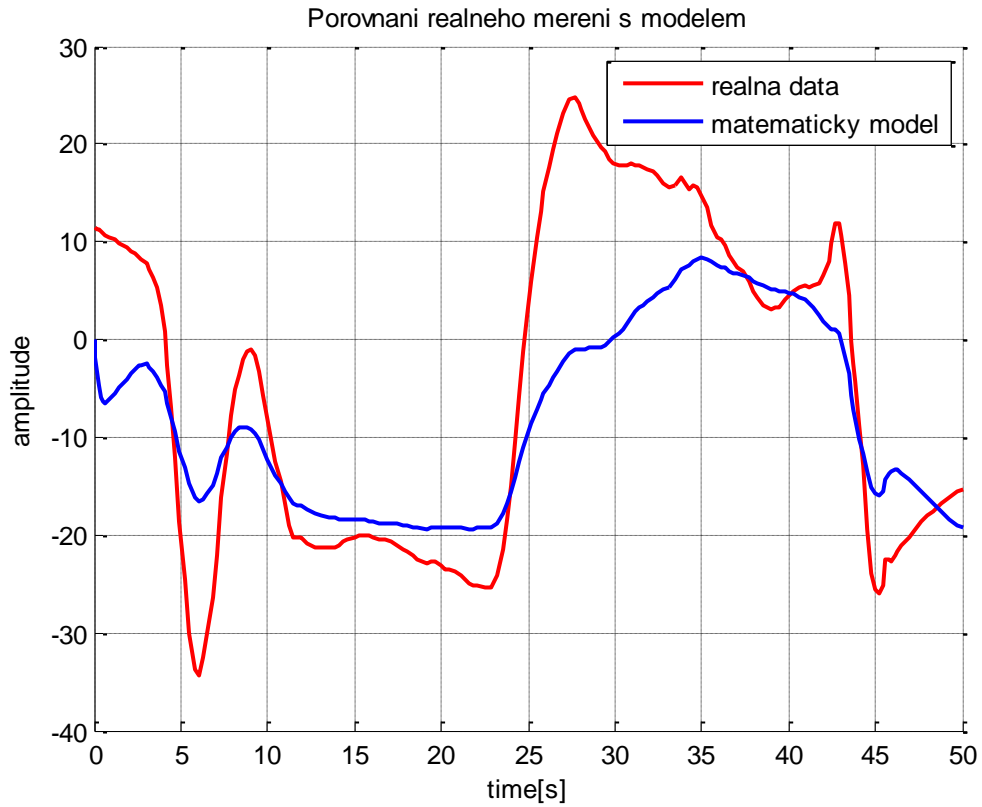
Obr. 5.2: Let s RC modelem

5.3 Porovnání reálného letadla s modelem

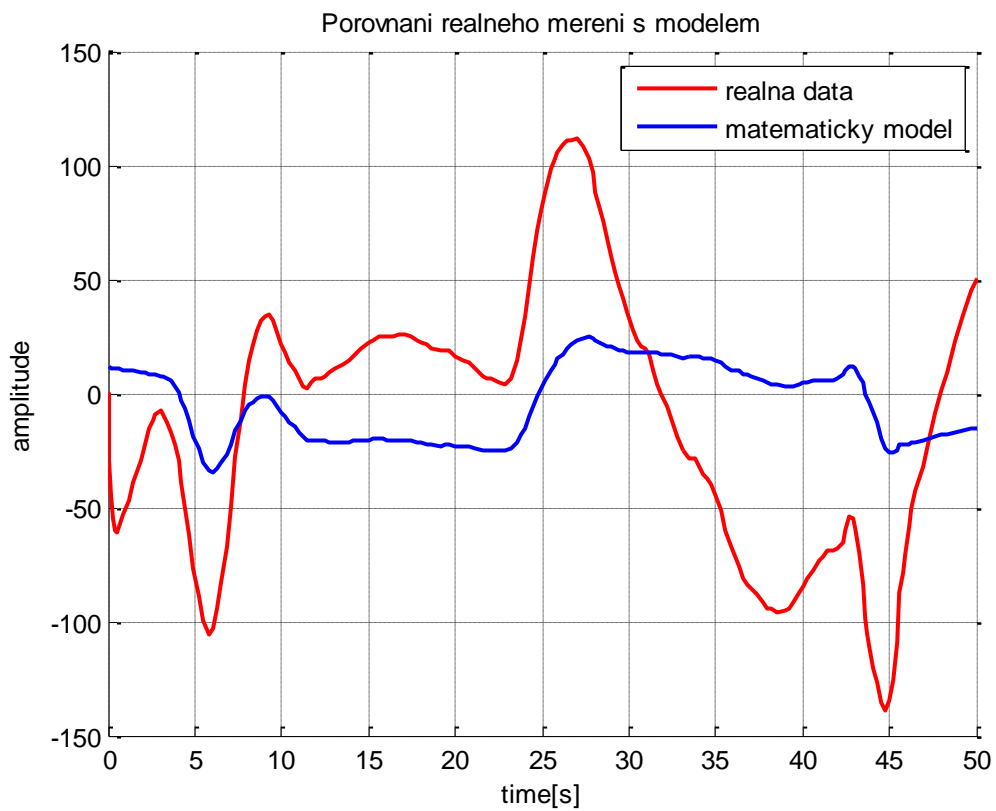
Letová data podélného pohybu můžeme vidět na obrázcích níže, na kterých je vidět porovnání letu reálným modelem letadla s matematickým modelem. Let s reálným letadlem se uskutečnil za podmínek, které měli být co nejblíže simulovaným. To znamená co nejmenší ovlivnění letadla větrem. Bohužel naše letadlo není vybaveno korouhvičkou nebo pokročilou pitot-statickou sondou pro měření úhlu náběhu, popřípadě úhlu vybočení. A tak není možné udat z reálného letu odečíst/přičíst aktuální podmínky (směr, rychlost větru) v poloze, kde se letadlo nacházelo. Z těchto důvodů nejsou modely totožné.



Obr. 5.3: Porovnání měření s matematickým modelem



Obr. 5.4: Porovnání změn úhlů náběhu



Obr. 5.5: Porovnání rychlosti stoupání

Kapitola 6

6. ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo sestavit matematický model RC letounu, navrhnout řídicí algoritmy jako jsou tlumiče, stabilizátory a autopiloty. Návrhy pro řízení letu jsou zprvu řešeny tradičními metodami a posléze využíváme i pokročilejších metod LQR. Mimo jiné se též zabýváme havarijními situacemi, při kterých by na letadle došlo k závadě na některé z řídicích ploch. V první části práce bylo nutné vytvořit 3D model letadla pomocí programu XFLR5. Pro vytvoření modelu jsme proměřili a zvážili jednotlivé části letadla, které jsme pak přenesli do programu XFLR5 a AVL. Simulací jsme z tohoto modelu dostali konstanty pro matematický model letadla. Dalším dílčím úkolem bylo změřit momenty setrvačnosti na fyzickém modelu. Ze změřených momentů a konstant byl sestaven matematický model letounu. Pro kompletní model jsme provedli měření v aerodynamickém tunelu ve VZLÚ Letňanech, pro získání převodní charakteristiku motoru. Bohužel, převodní charakteristiku jsme nezískali z důvodu nevhodně zvoleného měřicího přípravku a proto model motoru neodpovídá reálnému. Pro model pak byly nastaveny výchozí podmínky.

V další části byl matematický model rozdělen na dvě části (část podélná a příčná). Pro každou z nich byly navrženy regulační smyčky a autopiloty klasickou metodou pomocí programu Matlab a Simulink. Dalším úkolem byl návrh řídicích smyček pomocí hierarchického přístupu modernější metodou LQR. Zde bylo navrženo řízení pro základní autopiloty pro podélnou a příčnou osu. Modernější metodou LQR bylo též navrženo řízení při havarijních stavech na řídicích plochách. Kdy řízení směrovým kormidlem s poruchou křidélek je mnohem snazší, než v opačném případě.

Poslední úlohou bylo ověření návrhu matematického modelu na reálném letadle. Z přiložených grafů vyplývá, že reálný model není s matematickým plně identický. Je to zapříčiněno vlivem okolního prostředí. Jelikož reálný letoun váží pouhých 1,6 kg, je vliv větru na letoun zcela zásadní. I když jsme se snažili měřit/letět s model v podmínkách blížících se bezvětří, přesto byl letoun ovlivněn. Bylo by vhodné pro budoucí lety měřit aktuálními povětrnostními podmínkami přímo na letadle. Nebo zvolit jiný model letadla s vyšší hmotností, kde nebude síla a směr větru zásadně ovlivňovat reálný model.

Literatura

- [1] STEVENS, Brian L. *Aircraft Control and Simulation*. New York: John Wiley, 1992, 617 s. ISBN 04-716-1397-5.
- [2] *XFLR 5* [online]. [cit. 2014-02-13]. Manuály. Dostupné z: <http://www.xflr5.com>
- [3] *Cessna 182 RC* [online]. [cit. 2014-02-13]. Dostupné z: <http://www.pelikandaniel.com>
- [4] PECH, Zdislav a Vratislav VĚK. *Systémy řízení letu*. Vyd. 1. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006, 114 s. ISBN 80-010-3374-0.
- [5] HOSPODÁŘ, P.: *Závěrečná fáze letu podrovnání*. Diplomová práce ČVUT – FEL, Praha 2008
- [6] HROMČÍK, M., HOSPODÁŘ, P.: *Přednášky A3N35SRL*, Praha 2012
- [7] ŠEBEK, M.: *Přednášky X35SRI*, Praha 2009
- [8] AeroSim Blockset. [online]. [cit. 2014-03-08]. Dostupné z: <http://www.u-dynamics.com/aerosim/default.htm>
- [9] ROUBAL, J.: *Přednášky X35MTR*, Praha 2007
- [10] NELSON, Robert C. *Flight stability and automatic control*. New York: McGraw-Hill, c1989, xii, 284 p. ISBN 00-704-6218-6.
- [11] DRELA, Mark. *XFOIL: Subsonic airfoil* [online]. [cit. 2014-05-08]. Dostupné z: <http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/>
- [12] Letové vlastnosti stabilita. [online]. [cit. 2014-05-08]. Dostupné z: <http://www.rcmodely.com/index.php/teorie/92-letove-vlastnosti-stabilita>
- [13] Měření momentu setrvačnosti. [online]. [cit. 2014-05-08]. Dostupné z: <http://youtu.be/m9iHEanmNWc>

Přílohy

A – Seznam použitých zkratk a symbolů

A	[-]	štíhlost křídla
a	[m.s ⁻²]	zrychlení
b	[m]	rozpětí křídla
c_D	[-]	součinitel odporové síly
c_{Da2}	[rad ⁻²]	derivace součinitele odporové síly podle mocniny úhlu náběhu
c_L	[-]	součinitel vztlakové síly
$c_{L\alpha}$	[rad ⁻¹]	sklon vztlakové čáry letounu
c_m	[-]	součinitel momentu klopení
c_X	[-]	součinitel podélné síly
c_Z	[-]	součinitel kolmé síly
S	[m ²]	plocha křídla
l_{SAT}	[m]	střední aerodynamická tětiva
c	[-]	součinitel aerodynamické síly
g	[m.s ⁻²]	tíhové zrychlení
m	[kg]	hmotnost
t	[s]	čas
q	[Pa]	dynamický tlak
ρ	[kg.m ⁻³]	hustota vzduchu
F	[N]	síla
X,D	[N]	síla odporová
Y,L	[N]	síla vztlaková
Z	[N]	boční síla
v	[m.s ⁻¹]	vektor translační rychlost
ω	[rad.s ⁻¹]	vektor translační rychlost
ε	[rad.s ⁻²]	vektor translační rychlost
M	[N.m]	moment aerodynamických sil
I	[kg.m ²]	moment setrvačnosti
h	[kg.m.s ⁻¹]	hybnost
H	[kg.m ² .s ⁻¹]	moment hybnost
u,v,w	[m.s ⁻¹]	rychlosti v osách x,y,z

p, q, r	[m.s ⁻¹]	úhlové rychlosti v osách x,y,z
A,B,C,D	[-]	matice stavového modelu letadla
α (alfa)	[°,rad]	úhel náběhu letounu
β (beta)	[°,rad]	úhel vybočení letounu
ϕ (gama)	[°,rad]	úhel příčného náklonu letounu
θ (theta)	[°,rad]	úhel podélného sklonu letounu
ψ (psi)	[°,rad]	kurzový úhel
δ_T	[-]	tah motoru
δ_V	[°,rad]	výchylka výškovky
δ_S	[°,rad]	výchylka směrovky
δ_K	[°,rad]	výchylka křidélek

Seznam použitých indexů

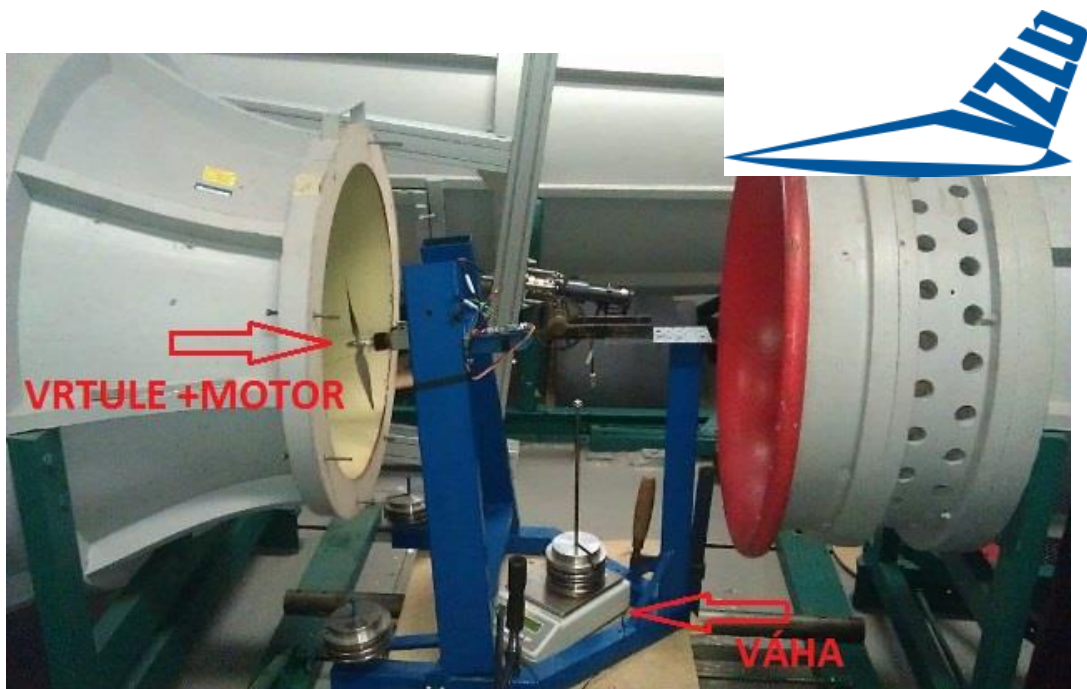
0	součinitel při nulovém náběhu
g	souřadnicová soustava zemská
L	souřadnicová soustava letadlová
a	souřadnicová soustava aerodynamická
q	derivace podle rychlosti klopení
α, a	derivace podle úhlu náběhu
δ, d	derivace podle výchylky výškového kormidla
Δ	odchylka
*pozn.	aerodynamické derivace podle *
	derivace podle času (pozn. jedná se o derivaci podle rychlostí, jejich derivací a podle řídicích veličin)

Převodní vztahy jednotek

	Anglosaská jednotka	Metrická jednotka
Čas	1[s]	1[s]
Délka	1[ft]	0,3048[m]
Úhel	1[rad]	$180/\pi$ [°]
Rychlost	1[MPH]	1,609[km.h ⁻¹], 0,447[m.s ⁻¹]
Rychlost otáčení	1[rad.s ⁻¹]	$30/\pi$ [ot.min ⁻¹]

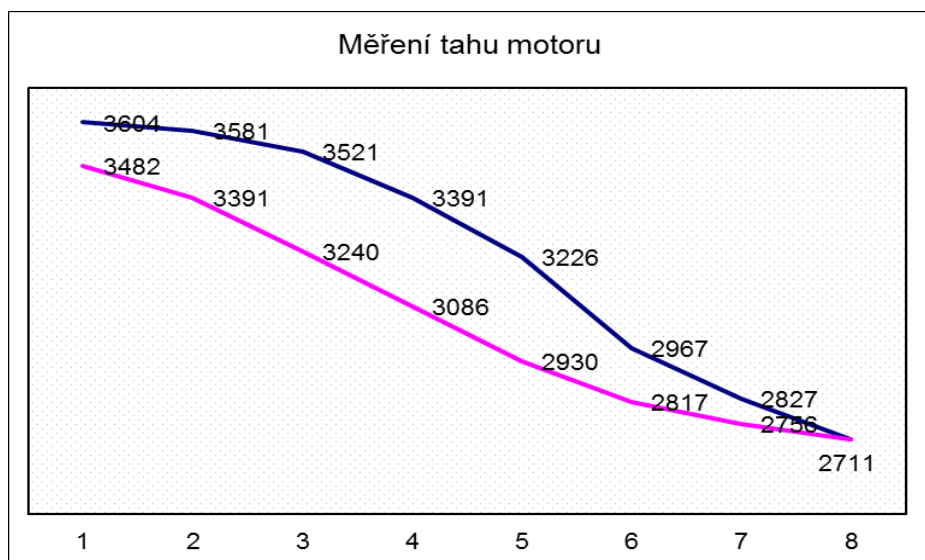
B – Obrazová část měření





C – Měření v aerodynamickém tunelu

Původním záměrem bylo naměřit v aerodynamickém tunelu tahovou charakteristiku elektromotoru, který je v našem letadle. Proměřili jsme motor po deseti stupních výkonu a při čtyřech režimech tunel (0, 5, 10, 15 m/s). Při vyhodnocení jsem zjistil velkou hysterzi v řádech desítek procent. Příčina všeho bylo převodní zařízení (modrá konstrukce), které mělo velice vysoké tření v místech ohybu. Proto jsem se rozhodl toto měření bohužel nepoužít.



D – CD s dokumentací