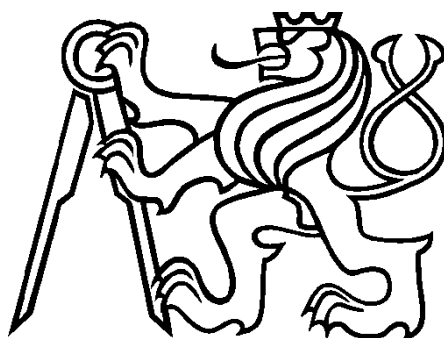


# ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

Fakulta elektrotechnická

Katedra radioelektroniky



Diplomová práce

## Použití směrových víceměřítkových transformací pro zpracování obrazu

Květen 2014

Vytvořil: Tomáš Fridrich

Vedoucí práce: Ing. Elena Anisimova

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto zadanou diplomovou práci zpracoval sám s přispěním vedoucího práce a používal jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé diplomové práce, nebo její části se souhlasem katedry.

Datum: 8. 5. 2014

.....

podpis



## **Anotace**

Během pořizování digitální fotografie pomocí nedokonalých optických soustav se do výsledného snímku zanesou mnoho chyb, jako je například rozostření, či šum. Proto je nutné aplikovat metody pro redukci těchto neduhů. Tato práce je zaměřena na zmenšení šumu ve výsledném snímku. Využity jsou pokročilé transformace extrahující směrové informace z obrázku, jako jsou wavelet, ridgelet, curvelet a další. Vybrané metody jsou simulovány v prostředí Matlab a porovnány mezi sebou na základě objektivních metod.

## **Klíčová slova**

Odšumění obrázku, vlnková, ridgelet, contourlet, curvelet, shearlet transformace, šum, zpracování obrazu.

## **Summary**

In process of digital photography acquisition using imperfect optical systems some distortions appear in final image. There are for example optical aberrations or noise. Therefore it is necessary to apply methods for eliminating these problems. This thesis focuses on noise reduction in image. Advanced directional transforms like wavelets, ridgelets and curvelets are used. Mentioned methods are simulated in Matlab and are compared with each other on the basis of objective criteria.

## **Key words**

Image noise reduction, wavelet, ridgelet, contourlet, curvelet, shearlet transform, noise, image processing.

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat vedoucí práce Ing. Eleně Anisimově, za vstřícný přístup, ochotu a čas strávený při vyřizování mých otázek. Dále všem, co jsem během vypracovávání práce zanedbal.

<b>1. Úvod</b> .....	8
<b>2. Modely šumu</b> .....	10
2.1. Časově nezávislý šum .....	10
2.2. Časově závislý šum.....	10
2.3.1. Dělení podle závislosti na obsahu obrazu .....	11
2.3.2. Dělení podle velikosti a rozložení šumu.....	11
2.3.3. Dělení podle vztahu k obrazu .....	11
2.3.4. Dělení podle charakteru šumu ve frekvenční oblasti.....	11
<b>3. Objektivní zhodnocení výsledků</b> .....	12
<b>4. Vlnková transformace</b> .....	15
4.1. Spojitá vlnková transformace .....	16
4.1.1. Prototyp vlnky .....	16
4.2. Diskrétní vlnková transformace .....	16
4.3. Odstranění šumu .....	19
<b>5. Ridgelet transformace</b> .....	21
5.1. Radonova transformace .....	22
5.2. 1D vlnková transformace .....	23
5.3. Lokální ridgelet transformace .....	25
<b>6. Curvelet transformace</b> .....	26
6.1. Digitální curvelet transformace.....	26
<b>7. Contourlet transformace</b> .....	29
<b>8. Shearlet transformace</b> .....	33
8.1. Spojitá Shearlet .....	34
8.2. Diskrétní Shearlet .....	35
<b>9. Implementace transformací</b> .....	37
9.1. Obrazové testy .....	37

9.2	Aplikace vlnkové transformace .....	38
9.3	Aplikace Ridgelet transformace.....	39
9.4	Aplikace Curvelet transformace .....	43
9.5	Aplikace Contourlet transformace .....	44
9.6	Aplikace Shearlet transformace .....	46
9.7	Vlastní funkce .....	47
<b>10.</b>	<b>Zhodnocení výsledků.....</b>	<b>49</b>
<b>11.</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>57</b>
<b>12.</b>	<b>Použitá literatura.....</b>	<b>59</b>

## 1. Úvod

S technologickým pokrokem a zlevňováním dostupné techniky přibývá i uživatelů, kteří moderní technologie využívají denně. Dříve patřil obor fotografie pouze nadšeným fotografům a profesionálům. Obě skupiny ale spojovala vášeň a cit pro detail, kompozici a světlo. V dnešní době je snímacím senzorem osazen téměř každý mobilní telefon a fotografování se velmi rozšířilo. Fotografují tak i lidé, kteří nechtějí snímkem něco říci a oslovit okolí, ale fotoaparát v jejich rukou slouží jako nástroj pro uchování vzpomínek. Snímky bývají často fotografované narychlo, bez rozmyslu a kvalita těchto snímků je tomu na úkor. Stále více je možné se setkat s neostrými, zašuměnými fotografiemi. Na druhou stranu je zde odvětví, ve kterém se šumu nevyhneme. Jde o astronomické snímání. Dlouhé expoziční časy s sebou nevyhnutelně nesou zvýšené množství šumu v obraze. Šumu jako takovému se nelze nikdy vyhnout. Lze ho pouze redukovat. Při dobrém osvětlení si ve výsledné fotografii nemusíme žádného šumu všimnout, avšak při zhoršených světelných podmínkách se šum začne více projevovat. Tím, jak se zvyšuje citlivost snímače a prodlužuje expoziční čas, nutné k zachycení více fotonů, ze scény se špatným osvětlením, roste i hladina šumu.

Cílem této práce je zaměřit se na snímky s šumem a pokusit se šum redukovat. Transformaci obrazu, do které redukce šumu patří, se v poslední době věnuje velká pozornost. Transformací obrazu se informace o obrazu uloží do tzv. transformačních koeficientů. Pro jejich určení potřebuje transformace tzv. bázi. Tvar báze je závislý na použité metodě a o jejím tvaru obvykle vypovídá i název transformace, např.: Wavelet, Contourlet, Ridgelet, Curvelet a Shearlet. Transformace hledá podobnost objektů obrazu s bází a podobnost je vyjádřena hodnotou transformačních koeficientů. Množství koeficientů je obvykle dáno počtem bodů obrazu. Není to však pravidlem. Když se koeficienty vhodně upraví, má to za následek redukci šumu. Každá transformace přitom přináší rozdílný přístup k obrázku. Některé pracují s obrázkem jako s celkem jako, wavelet a contourlet, jiné například jako Curvelet, rozdělí vstupní snímek na menší bloky a ty zpracovává zvlášť. Nakonec i tato transformace obrázků složí do původní podoby. Všechny tyto transformace ale spojuje schopnost extrahovat směrové informace z obrázku. Postupy jsou různé, ale cíl stejný, co nejvíce popsat linie ve fotografii. Lepší detekce kontur v obraze vede k dokonalejší redukci šumu.



Výsledné zhodnocení jaká metoda je lepší, či jaký snímek vypadá líp, se dá provést díky metrikám objektivně. V závislosti na volbě metriky budu dostávat různě věrohodné výsledky. K porovnání zde uvádím tři různé objektivní metody. Přičemž první dvě zmíněné metriky jsou velmi jednoduché a jsou pouze orientační. Třetí metoda už je sofistikovanější a více používaná. Nahlíží na snímek jako na bloky a tyto bloky porovnává.

Po přečtení této diplomové práce by měl být čtenář seznámen se základními typy šumu, kde šum vzniká a proč není možné se šumu vyhnout. Dále čtenáře seznámím s vybranými směrovými víceměřitkovými transformacemi. Na závěr jsou všechny výsledky uvedeny v přehledných tabulkách doplněných jak o slovní komentář, tak i o testované snímky.

## 2. Modely šumu

Šum je nežádoucí složka obrazu způsobená jeho snímáním. Zhoršuje zobrazovací výkon a určuje citlivost obrazového snímače. Šum může být definován jako jakákoliv změna signálu, která zhoršuje výsledný obraz nebo signál [11]. Šum je možno rozdělit do dvou skupin.

### 2.1. Časově nezávislý šum

Šum s pevným vzorkem je jedním z českých názvů pro tento fenomén. Vznikl jako překlad z anglického *Fixed Pattern Noise* a budeme ho dále značit FPN.

Šum objevující se v reprodukováném obraze, který je fixní v určité prostorové pozici, je označován jako FPN. Je mezi snímky konstantní. FPN představuje odezvu matice pixelů v případě tmavého nebo rovnoměrného osvětlení. FPN zahrnuje dvě různé složky: neuniformitu temného signálu (DSNU – *Dark signal nonuniformity*) to jest odezvu v temných podmínkách a *photo response nonuniformity* (PRNU), které představuje rozdílným způsob, s nímž bude pixel reagovat na jednotné ozáření. PRNU je vůči DSNU zanedbatelné, a tak se zde budu dále zmiňovat pouze o DSNU.

DSNU je aditivní a s délkou expozice a teplotou roste. U CCD snímačů je hlavní složkou FPN temný proud, který je způsoben generací elektronů v oblasti fotoaktivního PN přechodu. I když je temný proud v běžném provozu sotva znatelný, může být viděn v obrazech pořízených s dlouhou expoziční dobou nebo za vysoké teploty. U CMOS senzorů je hlavním zdrojem FPN temný proud a výkonové rozdíly aktivních tranzistorů uvnitř jednotlivých pixelů.

### 2.2 Časově závislý šum

Tento šum se mění rychle a náhodně s časem a proto není mezi snímky konstantní. Jeho zdrojů je hned několik a celkové rozdělení náhodného šumu se blíží ke Gaussovskému, jak je vysvětleno i v [11]. Skládá se z tepelného, výstřelového a blikavého šumu.

Tepelný šum vzniká průchodem proudu rezistorem o nenulové teplotě. Vzniká v elektronice výstupních obvodů CCD a CMOS snímačů. Spektrální výkonová hustota tepelného šumu je neměnná a má hodnotu:

$$PSD(f) = 4kTR[V^2Hz^{-1}], \quad (2.2.1)$$

kde  $R$  je odpor rezistoru,  $T$  teplota v Kelvinech a  $k$  Boltzmanova konstanta. Jde o bílý šum. Výstřelový šum vzniká v PN součástkách přechodem elektronů přes potenciálovou bariéru a jeho rozložení je Poissonovské. Vyskytuje se v součástkách, kde je tunelový přechod. Blikavý šum se také nazývá *růžový* šum, nebo  $1/f$  šum a to z důvodu, že jeho spektrální výkonová hustota je úměrná hyperbole  $1/f$ .

Šum se kromě dělení na časově závislý a nezávislý dá dělit i dle jiných kritérií. Vznik šumu je možné pozorovat i u kvantování, fotografování při zhoršených světelných podmínkách, ale i při kompresi obrazu a podobně. Charakter šumu v obraze je často neznámý, avšak některé vlastnosti jsou zjevné a snadno identifikovatelné. Na základě správného popsání charakteru šumu můžeme zvolit vhodný postup na jeho potlačení. Můžeme ho tak dělit dle těchto kritérií:

### 2.3.1. Dělení podle závislosti na obsahu obrazu

- *Šum nezávislý na obraze* (např. tepelný šum)
- *Šum závislý na obraze* (např. filmové zrnění) – vyskytuje se v obraze s menší pravděpodobností.

### 2.3.2. Dělení podle velikosti a rozložení šumu

- *Impulzní šum* (salt & pepper) – má téměř binární rozdělení. Obvykle postihuje jen izolované pixely nebo skupiny pixelů.
- *Šedý šum* (např. Gaussův šum) zasahuje všechny pixely v obraze. Hodnoty amplitud šumu bývají výrazně menší než hodnoty pixelů.

### 2.3.3. Dělení podle vztahu k obrazu

- *Aditivní šum* – nejběžnější případ, vzniká přičítáním k původním hodnotám.
- *Multiplikativní šum* – vzniká vynásobením každé hodnoty pixelu amplitudou šumu tohoto pixelu.
- *Ostatní typy* (např. konvoluční šum)

### 2.3.4. Dělení podle charakteru šumu ve frekvenční oblasti

- *Širokopásmový* – patří sem většina výše uvedených šumů. Má konstantní spektrální výkonovou hustotu v uvažované šířce zpracování signálu
- *Úzkopásmový šum* – vzniká kombinací vícero úzkopásmových aditivních nebo multiplikativních signálů s páskovou strukturou nebo moiré vzory.

### 3. Objektívni zhodnocení výsledků

Abychom byli schopni zhodnotit dosažené výsledky odšumovacích metod, je třeba aplikovat některou z metod vyhodnocení odšumění daného obrazu. Hojně využívanou metodou pro zjištění odlišnosti dvou obrazů je střední kvadratická odchylka MSE, která je pro barevný obraz v RGB prostoru definována následovně:

$$MSE = \frac{1}{3mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 [x(i, j, k) - y(i, j, k)]^2, \quad (3.1)$$

kde  $k$  značí součet přes všechny barevné složky  $R$ ,  $G$ ,  $B$  signálu,  $m$  a  $n$  jsou vstupní rozměry obrazu. Čím vyšší MSE bude, tím více se bude odšuměný  $y$  ( $m$ ,  $n$ ) lišit od vstupního obrazu  $x$  ( $m$ ,  $n$ ). Hodnotu MSE je tedy, pro naše účely, mít co nejvyšší. Další metodou je poměr signálu k šumu SNR (Signal to Noise Ratio), který je možný definovat při měření úrovně šumu pomocí jeho směrodatné odchylky  $\sigma(n)$  jako:

$$SNR = \frac{\sigma(u)}{\sigma(n)}, \quad (3.2)$$

kde  $\sigma(u)$  reprezentuje empirickou směrodatnou odchylku obrazu  $u$ ,

$$\sigma(u) = \left( \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} (u(i) - \bar{u})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

a  $\bar{u} = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} u(i)$  je průměrná hodnota úrovně šedi. Směrodatnou odchylku šumu lze získat empirickým měřením, případně výpočtem, pokud je znám model šumu a jeho parametry. Tato metoda počítá pouze s vstupním obrázkem v úrovních šedi. Což ale není vůbec na škodu. Protože hlavní informaci o obrázku nese jasová část obrazu. Je tedy vhodné si vstupní signál, který nese informace ve třech barevných kanálech  $R$ ,  $G$ ,  $B$  převést například do  $YCbCr$ . Kanál  $Y$  poté odpovídá jasu,  $Cb$  a  $Cr$  jsou modrý resp. červený chrominanční kanál. Špičkový poměr signálu  $PSNR$  (*Peak Signal to Noise Ratio*) udává poměr mezi maximální možnou energií signálu a energií šumu:

$$PSNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{(2^n - 1)^2}{MSE} \right), \quad (3.4)$$

kde  $n$  vyjadřuje počet bitů odstínů šedi. Nejčastěji je to 0 – 255 tzn. 256 bitů.

Výše zmíněné objektivní metody srovnávají hodnoty pixelů referenčního a testovaného snímku. Jsou velmi jednoduché na implementaci, ale nekorelují s výsledky subjektivních testů. Složitější metodou vhodnou při subjektivní zhodnocení výsledků může být *Structural Similarity* (SSIM) [14], která rozdělí referenční i hodnocený obraz na bloky a v každém bloku se porovnávají dílčí celky. Mezi ně patří jas  $I$ , kontrast  $C$  a podobnost struktury  $s$ :

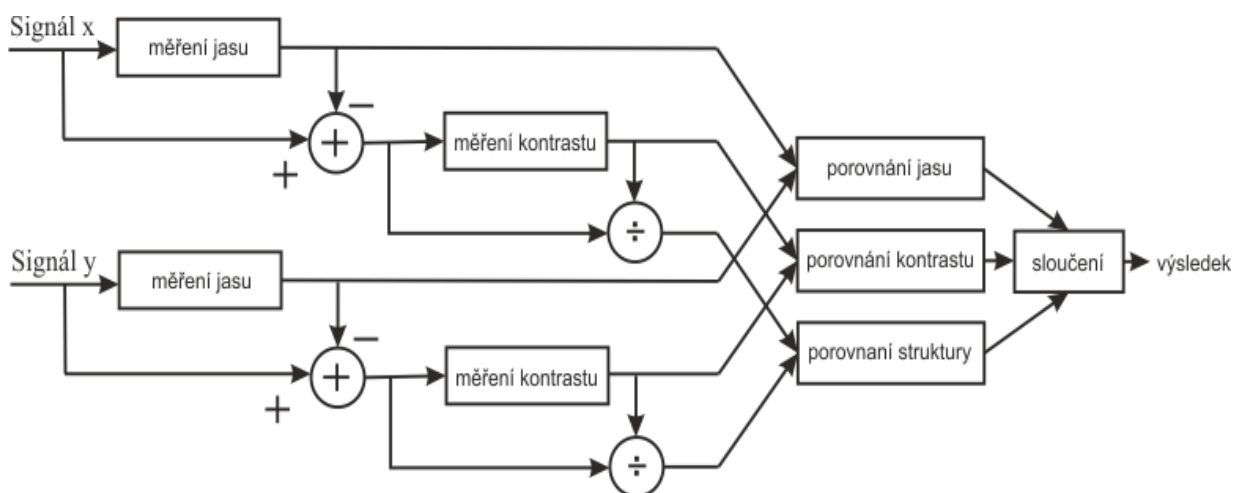
$$I(x, y) = \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1}, \quad (3.5)$$

$$C(x, y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2}, \quad (3.6)$$

$$s(x, y) = \frac{\sigma_x\sigma_y + C_3}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_3}. \quad (3.7)$$

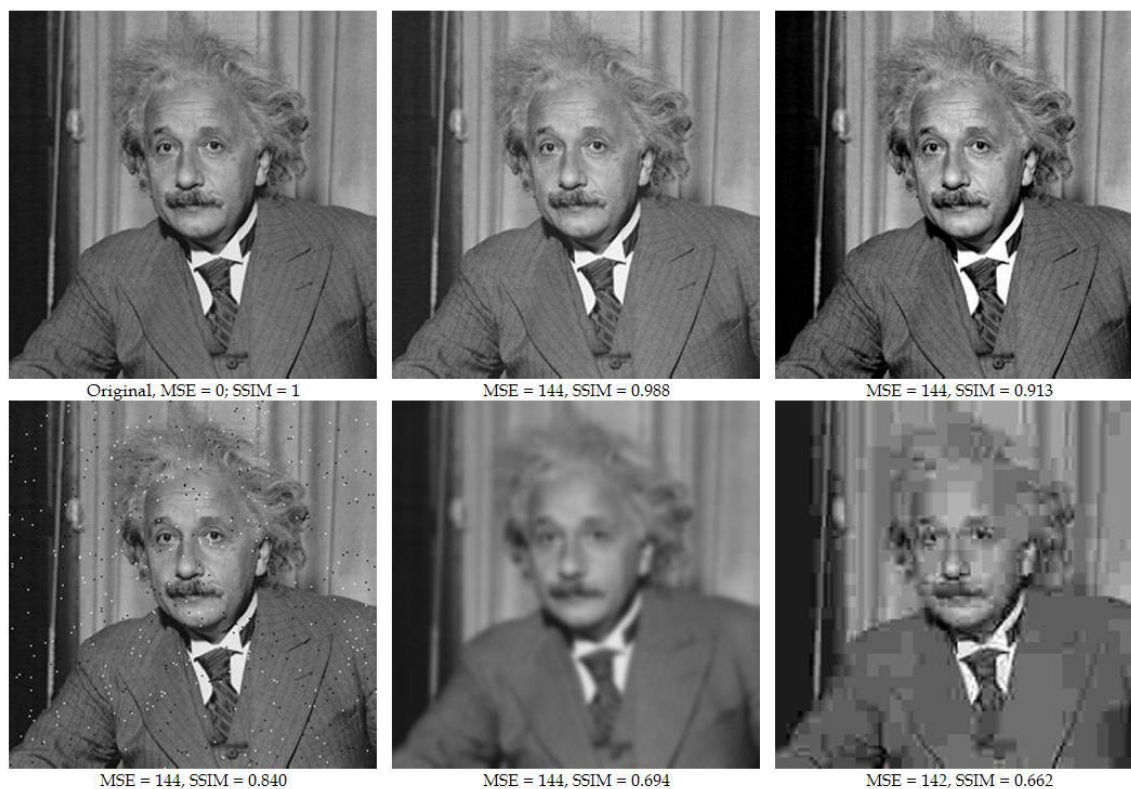
$$SSIM = \frac{(2 \cdot \mu_x \cdot \mu_y + C_1) \cdot (2 \cdot \sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1) \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (3.8)$$

Na následujícím obrázku je diagram zobrazující postup výpočtu metriky SSIM.



Obrázek 1. Blokové schéma výpočtu SSIM [14].

K porovnání výsledků se používají korelační konstanty. Nejvíce používané jsou tyto dva, jmenovitě: Pearsonův lineární korelační koeficient (PLCC) a Spearmanův pořadový korelační koeficient. Hodnoty těchto koeficientů se pohybují v rozmezí -1 až +1. Samotná metrika SSIM nabývá hodnot od 0 do 1. Přičemž 1 se rovná absolutní shodě [14].

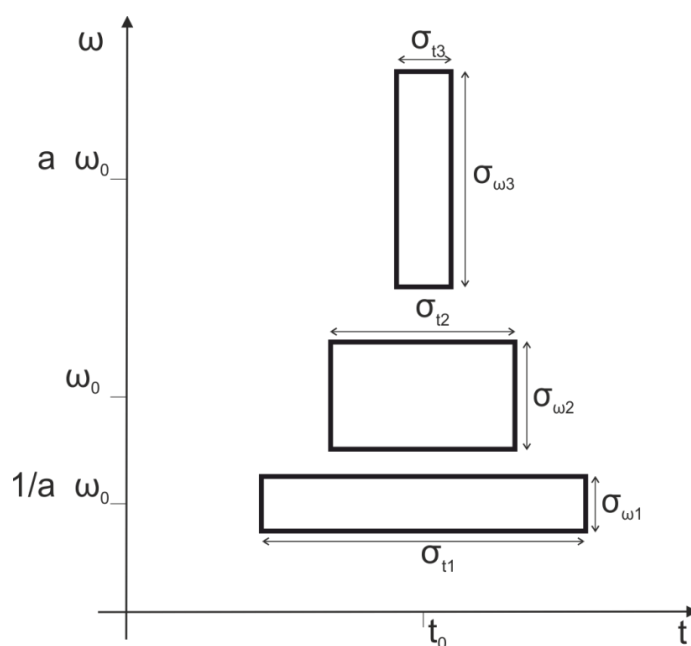


Obrázek 2. Výsledky metrik SSIM a MSE [15].

Na obrázku 2 je uveden příklad porovnání metod SSIM a MSE. Obrázky byly záměrně degradovány. Konkrétně šlo o změnu kontrastu, přičtení šumu sůl a pepř, rozmazání a vznik artefaktů při kompresi [15]. Bylo dbáno na to, aby při každé degradaci byla zachována přibližně stejná hodnota MSE. Už na první pohled je však patrné, že ačkoliv je MSE skoro neměnné, vizuální kvalita se liší. Výsledky metriky SSIM tak mají vyšší vypovídající hodnotu.

## 4. Vlnková transformace

Vlnková transformace (WT) vznikla z požadavku získat časově-frekvenční popis signálu. Vývojově starší Fourierova transformace dává informaci pouze o frekvencích, které se v signálu vyskytují, neříká však nic o jejich poloze v čase. Pro popis stacionárních signálů je to vhodné, ale pro nestacionární signály je toto řešení nepoužitelné. Řešením je použití okna, kterým si v časové oblasti vybereme krátký úsek signálu a z něj získáme spektrum daného okna. Na základě Heisenbergova principu neurčitosti je patrné, že je nemožné přesně určit frekvenci a její polohu v čase. S širokým oknem máme vysoké frekvenční rozlišení a malé rozlišení časové a naopak. Cílem vlnkové transformace je vhodnou změnou šířky okna v časové oblasti a jeho tvarem získat optimálního rozlišení v čase tak i frekvenci. U nízkých frekvencí je okno širší, pro vysoké frekvence je užší (Obrázek 3). Toto okno se nazývá mateřská vlnka  $\psi$  (*motherwavelet*).



Obrázek 3. Časové a frekvenční rozlišení vlnkové transformace [4].

Parametr  $a$  (měřítko) mění šířku okna (dilatace),  $b$  (poloha) nastavuje polohu vlnky na časové ose (translace). Členem  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  normalizujeme energii vlnky při změně měřítka. Báze  $\psi_{a,b}(x)$  vzniká z mateřské vlnky  $\psi(x)$ :

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (4.1)$$

## 4.1 Spojitá vlnková transformace

Spojitá vlnková transformace (CWT) je definována pro energetické signály, tedy signály splňující  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ , takto:

$$W f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt, \quad (4.1.1)$$

kde  $\overline{\psi}$  značí komplexně sdružené číslo. Výsledkem pro jednorozměrný signál je dvoudimenzionální funkce, označovaná jako vlnkové koeficienty  $W f(a, b)$ . Po dosazení do (4.1.1) dostaneme tvar:

$$W f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (4.1.2)$$

### 4.1.1 Prototyp vlnky

Funkce pro vlnku  $\psi$  musí splňovat určité podmínky [1] a její výběr, tak není zcela libovolný. Střední hodnota vlnky musí být rovna nule (4.1.1.1), musí mít vhodný i frekvenční obsah (4.1.1.2).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (4.1.1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (4.1.1.2)$$

kde  $\psi(\omega)$  je Fourierův obraz  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ .

## 4.2 Diskrétní vlnková transformace

Za předpokladu dvojkové závislosti parametrů  $a$  a  $b$  lze z vhodně zvolené vlnky  $\psi$  vytvořit ortonormální bázi:

$$a = 2^p, \quad b = 2^p k, \quad p, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.1)$$



Pak při dosazení do (4.1.1.1) dostaneme:

$$\psi_{k,p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^p}} \psi\left(\frac{t - 2^p k}{2^p}\right), \quad (4.2.2)$$

kde  $k$  je poloha a  $p$  je měřítko. Díky ortonormalitě lze s využitím této vlnky neredundantně rozložit signál, tzv. analýza s mnoha rozlišeními. Toto je principiálním základem diskrétní vlnkové transformace (*Discrete Wavelet Transform*, DWT). Vlnka  $\psi$  se chová jako filtr. Respektive pásmová propust filtrující signál na vstupu kolem centrálního kmitočtu, který je závislý na měřítku s druhou mocninou. V následujícím měřítku se filtruje horní polovina pásma předcházející dolnofrekvenční části signálu (Obrázek 4). Šířka pásma filtru roste současně s rostoucí frekvencí, činitel jakosti  $Q$  je tak konstantní. Problém představuje nepokryté pásmo od nižších kmitočtů do nuly. Proto je od vlnky  $\psi$  odvozena měřítková funkce  $\phi$  (*scaling function*), která se chová jako dolní propust. Měřítková funkce  $\phi$  musí splňovat podmínku přípustnosti:

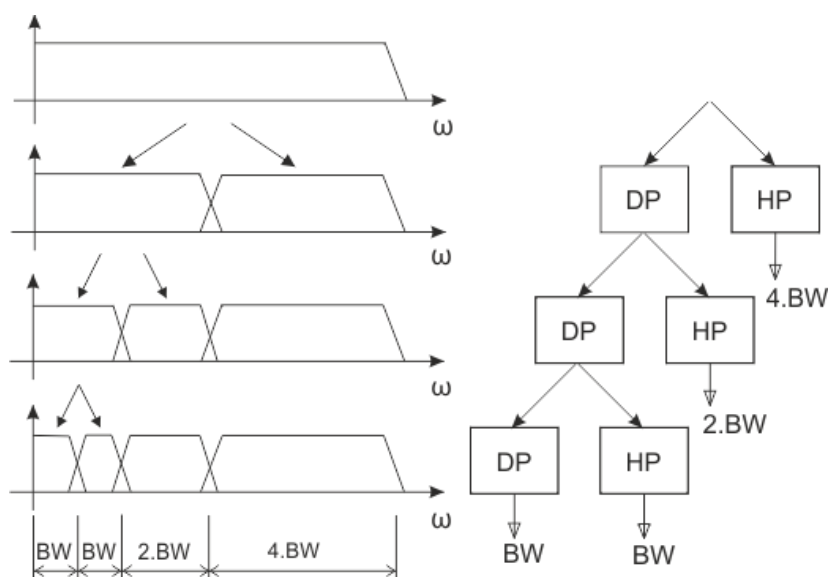
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (4.2.3)$$

Na DWT lze nahlížet jako na speciálně vzorkovanou CWT, jejíž vzorkování musí být na dvojkové mřížce. Užitá vlnka musí vytvářet ortonormální bázi analyzovaného prostoru. Pokud toto platí, lze DWT počítat Mallatovým algoritmem [1], založeným na dvojici FIR filtrů s následnou decimací. Oba FIR filtry, dolní propust  $h$  (*scaling filter*) a horní propust  $g$  (*wavelet filter*) společně vytvářejí kvadraturně zrcadlové filtry (frekvenční charakteristiky jsou zrcadlově symetrické kolem  $\frac{f_s}{4}$ ). Na výstupu filtrů je provedena decimace dvěma. Výstupem horní propusti jsou tzv. detailní koeficienty DWT ( $cD$ ), dolní propust poskytuje tzv. aproximační koeficienty DWT ( $cA$ ). Decimace dvěma zajistí, aby byl počet koeficientů po prvním stupni rozkladu stejný jako počet vzorků na vstupu. S aproximačními koeficienty  $cA$  lze dále pracovat. Dají se analyzovat totožným rozkladem filtry a získat tak další detailní a aproximační koeficienty, tedy další stupeň DWT. Takto jde postupovat až do vyčerpání vstupní sekvence. Dílčí konvoluce vstupního signálu s FIR filtry a následnou decimací lze popsat následovně [2]:

$$cA_{p+1}(k) = \sum_{m=1}^N h(m - 2k)cA_p(m), \quad (4.2.4)$$

$$cD_{p+1}(k) = \sum_{m=1}^N g(m - 2k)cA_p(m), \quad (4.2.5)$$

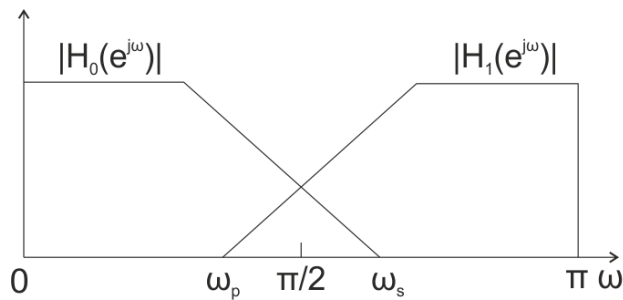
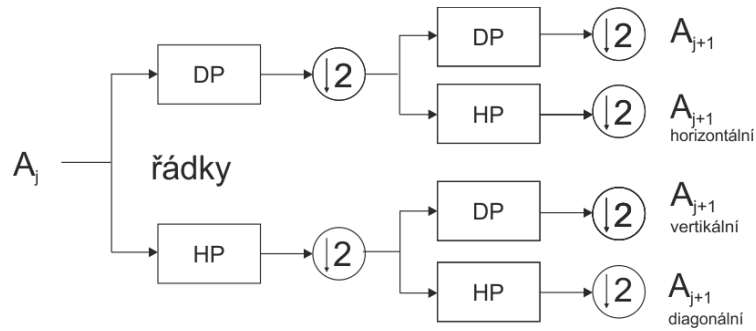
kde  $cA_p, cD_p$  jsou aproximační koeficienty respektive detailní koeficienty  $p \in \langle 0, P \rangle$  ( $P$  je stupeň rozkladu vstupního signálu) a  $N$  je délka vstupní sekvence  $cA_p, cA_0 = f(n)$ .



Obrázek 4. Frekvenční náhled na diskrétní vlnkovou transformaci [4].

Jelikož je počet koeficientů shodný s počtem vzorků vstupního signálu a nedochází ke ztrátě informací, je popis signálu úplný. Pomocí inverzního postupu lze přesně rekonstruovat původní signál. Pod vzorkované koeficienty transformace je nutné převzorkovat. Mezi sousední vzorky signálu se vloží nulový vzorek. Dále jsou místo původních filtrů použity rekonstrukční filtry.

Pro transformaci dvojrozměrného signálu se využívá stejný postup jako u jednorozměrného signálu. Na vstupu 2D DWT bude matice. Řádky matice projdou skrz dva FIR filtry a jsou následně decimovány přes sloupce (4.2.4), (4.2.5). Výstupní koeficienty sloupců znovu projdou dvojicí FIR filtrů a jsou decimovány přes řádky. Na výstupu dostaneme čtveřici různých koeficientů: aproximační, horizontální, vertikální a diagonální detailní koeficienty. Další stupeň DWT pracuje pouze s aproximačními koeficienty.



Obrázek 5. 2D dekompozice diskrétní vlnkové transformace [1].

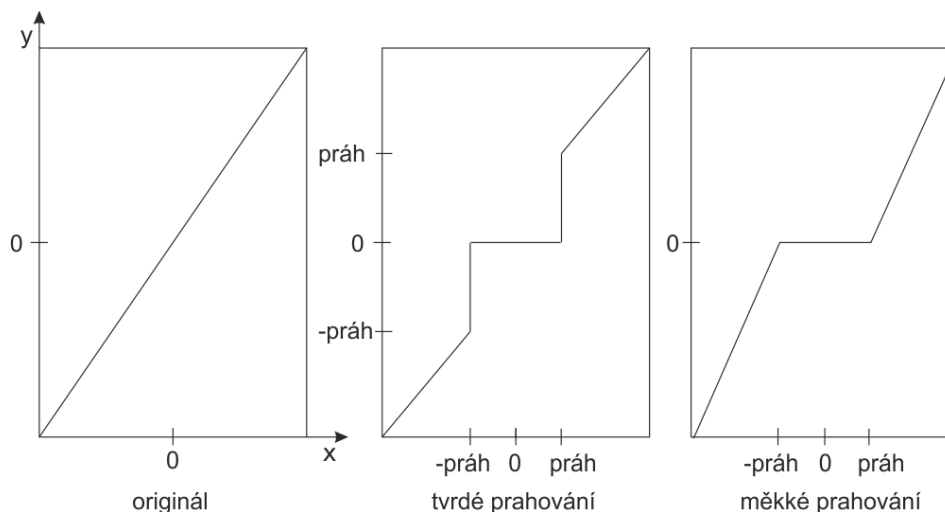
### 4.3 Odstranění šumu

Šum je možno odstranit ze signálu vícero způsoby. Jednou z metod je využití vlnkové transformace. Šum obecně reprezentuje prudké změny amplitudy signálu, což se negativně projeví jak v časové tak i frekvenční oblasti, jako výskyt nežádoucích spektrálních složek na vyšších frekvencích. Vlnková transformace nám vstupní obraz rozdělí na detailní a aproximační koeficienty. To je velmi výhodné, protože šum se soustředí především v detailních koeficientech. Tím že tyto detailní koeficienty vhodně zredukujeme, zbavíme se také šumu.

Nastavení prahu, které vlnkové koeficienty zanecháme, a tudíž považujeme za důležité a ty které obsahují šum, je dvojího typu: měkké a tvrdé.

Měkké prahování nejdříve vynuluje koeficienty, které mají absolutní hodnotu menší než stanovený práh. Zbýlé koeficienty se upraví dle vztahu:

$$w' = \begin{cases} \text{sgn}(w) * (|w| - th), & |w| \geq \text{práh} \\ 0, & |w| < \text{práh} \end{cases} \quad (4.3.1)$$



Obrázek 6. Grafické znázornění prahování [16].

Výhodou měkkého prahování je fakt, že po aplikaci nevznikají nespojitosti v obrázku. Tvrdé prahování také nejdříve nahradí nulami ty koeficienty, jejichž hodnota je menší než prahová, ale zbylé nechá beze změny. Právě toto, zapříčiní nechtěné nespojitosti v obraze, které se po zpětné rekonstrukci zobrazí jako nežádoucí artefakty. Určení prahu je velmi delikátní záležitost. A to zvláště v praxi, kde přesně neznáme tvar vstupního obrazu ani charakter šumu. Práh může být neměnný pro každou úroveň dekompozice a každý detailní koeficient. V našem případě však budeme znát charakter šumu. Půjde o bílý Gaussovský šum se známou směrodatnou odchylkou  $\sigma$ . Donoho a Johnstone [16] v rámci svého výzkumu navrhli univerzální práh  $t = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \log_2(M \cdot N)}$ , kde  $M$ ,  $N$  jsou rozměry vstupního obrázku a  $\sigma$  je směrodatná odchylka šumu.

## 5. Ridgelet transformace

Za Ridgelet transformací (RT) a spojitou Ridgelet transformací (*CRT Continuous Ridgelet transform*) je dvojice Candès a Donoho. 2D CRT v  $\mathbb{R}^2$  je definována dle [5]. Vezmeme si spojitou jednorozměrnou funkci  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi < \infty, \quad (5.1)$$

která splňuje podmínku  $\int \psi(t) dt = 0$ . Za předpokladu normování  $\psi$  bude rovnice (5.1) vypadat následovně:

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi^2} d\xi = 1. \quad (5.2)$$

Pro každé  $a > 0$  a  $b \in \mathbb{R}$  a každé  $\theta \in [0, 2\pi)$ , definujeme ridgelet  $\psi_{a,b,\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jako:

$$\psi_{a,b,\theta} = a^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a). \quad (5.3)$$

Tato funkce je konstantní, když platí  $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{konstanta}$ . Mějme integrační funkci  $f(x)$ , ridgelet koeficienty této funkce jsou definovány:

$$R_f(a, b, \theta) = \int \bar{\psi}_{a,b,\theta}(x) f(x) dx. \quad (5.4)$$

Inverzně lze z ridgelet koeficientů  $R_f(a, b, \theta)$  spočítat funkci  $f(x)$ :

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} R_f(a, b, \theta) \psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}. \quad (5.5)$$

Stejně jako u vlnkové nebo Fourierovy transformace, rovnice (5.5) vyjadřuje fakt, že libovolná funkce se dá vyjádřit jako superpozice ridgeletů. Ridgelet transformace se dá také zkonstruovat pomocí vlnkové analýzy v Radonové doméně. Radonová transformace funkce  $f$  je dána jako součet křivkových integrálů indexovaných přes  $(\theta, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$R_f(\theta, t) = \int f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2, \quad (5.6)$$

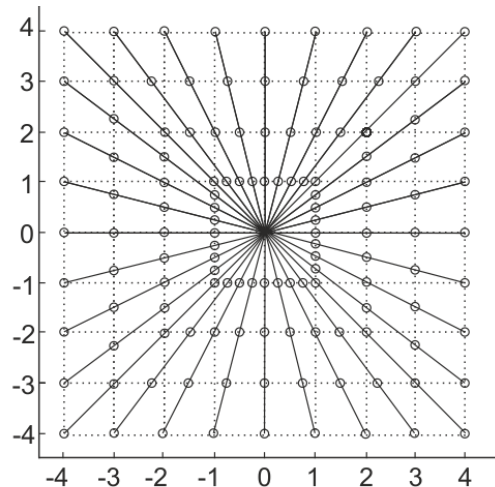
kde  $\delta$  je Diracova distribuce,  $t$  vzdálenost přímky od osy počátku,  $\theta$  úhel svírající normála s osou  $x_1$ . Ridgelet koeficienty  $R_f(a, b, \theta)$  funkce  $f$  se spočítají Radonovou transformací jako:

$$R_f(a, b, \theta) = \int R_f(\theta, t) a^{-\frac{1}{2}} \psi((t - b)/a) dt \quad (5.7)$$

Ridgelet transformaci poté získáme aplikací jednodimenzionální vlnkové transformace na ty části Radonové transformace, kde je úhel  $\theta$  neměnný a vzdálenost  $t$  je proměnná.

## 5.1 Radonova transformace

Způsob jak rychle spočítat ridgelet transformaci spočívá ve využití Fourierovy domény. Nejdříve aplikujeme na vstupní obraz 2D FFT (Fast Fourier Transform). Tím se dostaneme do frekvenčního spektra. Dále je nutné nahlížet na výsledek ve frekvenční oblasti nikoliv v kartézských, ale v polárních souřadnicích. S využitím interpolační šablony nahradíme hodnoty získané Fourierovou transformací na čtvercové mřížce za vzorky v pseudopolární mřížce (Obrázek 7). Na pseudopolární mřížku ve frekvenční oblasti můžeme nahlížet jako na soubor  $2n$  radiálních přímek spojujících vrcholy  $(k_1, k_2)$ , ležících na hranicích mřížky  $(k_1, k_2)$ , s počátkem. Tj.  $k_1, k_2 \in \{-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$ .



Obrázek 7. Pseudopolární Fourierova mřížka [17].

Pseudopolární mřížka  $\xi_{\ell,m}$  ( $\ell$  slouží k indexaci stanovené radiální přímky, zatímco pozice bodu na této přímce je značena  $m$ ) kterou budeme používat, je průsečík mezi souborem radiálních přímek a kartézských přímek rovnoběžných s osami. Hodnoty vzorků ležících na nové mřížce získáme interpolací hodnot z kartézské mřížky. Samotná interpolace je velmi choulostivá záležitost, protože Fourierova transformace obrázku je velmi oscilující a fáze nese kritické informace o obrázku [6]. Při nesprávné interpolaci by mohlo dojít ke ztrátě části informací. Metod jako interpolovat vzorky je více. Ta nejjednodušší metoda interpolace jednoduše přiřadí hodnotám  $\hat{f}(\xi_{lm})$  v kartézské mřížce tu nejbližší hodnotu v polární mřížce  $\xi_{\ell,m}$ . Jsou samozřejmě i mnohem sofistikovanější metody interpolace a ty jsou zmíněny v [8]. Po provedení interpolace aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci (*iFFT*) na každou radiální přímku. Tím se dostaneme do Radonové domény.

Proces konverze z Kartézských do polárních souřadnic je reverzibilní. To znamená, že z polárních hodnot je možné zcela přesně získat hodnoty Kartézské. Každému bodu Kartézské souřadnice je přiřazen alespoň jeden nejbližší soused v polárních souřadnicích, tím je zaručena stabilita celé konverze.

## 5.2 1D vlnková transformace

K dokončení ridgelet transformace je zapotřebí ještě aplikovat 1D vlnkovou transformaci na radiální proměnné v Radonové doméně. Algoritmus vlnkové transformace je založen na měřítkové funkci  $\phi$ . Měřítková funkce  $\hat{\phi}$  je definována jako  $B_3$  křivka (jde o aproximační křivku pro vyhlazování statistických dat)

$$\hat{\phi}(v) = \frac{3}{2} B_3(4v) \quad (5.2.1)$$

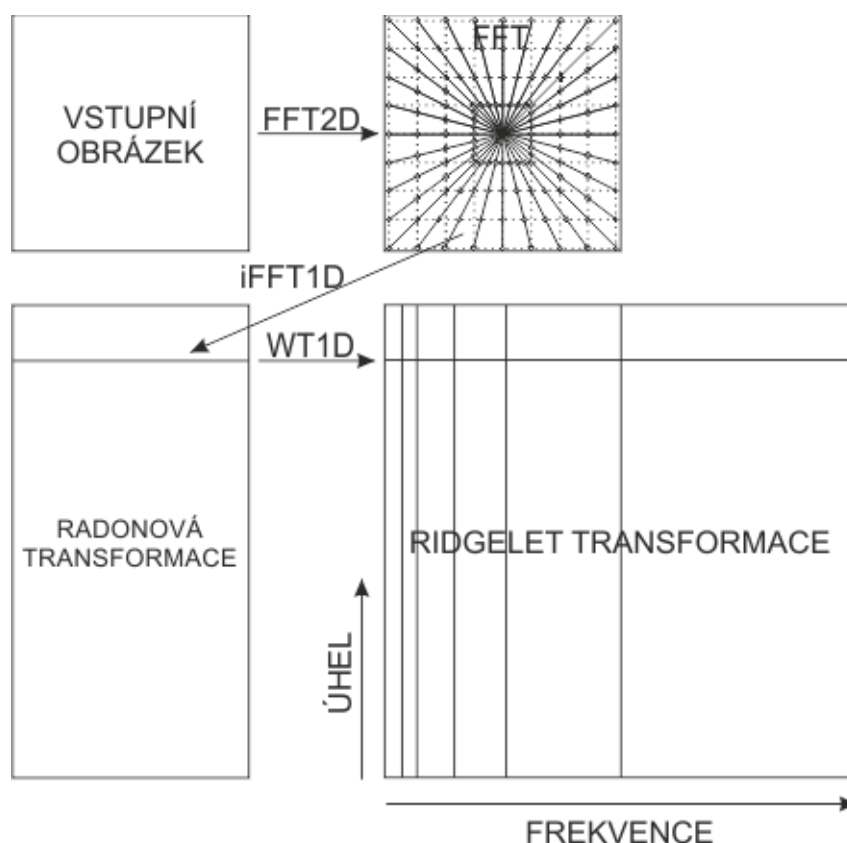
a vlnková funkce  $\hat{\psi}$  jako rozdíl mezi dvěma po sobě následujícími rozklady

$$\hat{\psi}(2v) = \hat{\phi}(v) - \hat{\phi}(2v). \quad (5.2.2)$$

Tato transformace má následující vlastnosti [16].:

- Koeficienty vlnkové transformace se spočítají přímo v Fourierovské doméně. To umožňuje vyhnout se výpočtu 1D IFFT každé radiální přímky.
- Každé sub pásmo je vzorkováno vyšší než Nyquistovskou frekvencí, tím se vyhneme aliasingu.
- Rekonstrukce je velmi jednoduchá. Vlnkové koeficienty se přiřadí k rekonstruovanému vstupnímu signálu v daném bodě. V naší aplikaci se ridgelet koeficienty přiřadí rekonstruovaným Fourierovým koeficientům.

Vlnková transformace přináší další redundanci. Je to vedlejší faktor, který je v odšumování nevyužitelný. Obrázek (Obrázek 8) zobrazuje postup vytvoření ridgelet transformace. Ridgelet transformace obrázku o rozměrech  $n \times n$  je obrázek o rozměrech  $2n \times 2n$ . Redundance je rovna 4. Tato transformace je vytvořena z řetězu kroků a každý krok je reverzibilní. Tudiž i celý postup je reverzibilní.



Obrázek 8. Postup vytvoření Ridgelet transformace [16].



### 5.3 Lokální ridgelet transformace

Ridgelet transformace je optimální k nalezení pouze křivek o velikosti obrázku. Aby bylo možné detekovat kratší úseky, musí se zavést rozdělení do bloků [5]. Vstupní obraz je dekomponován na nepatrně se překrývající bloky s délkou strany  $b$  pixelů tak, že překryv mezi dvěma sousedními vertikálními bloky je pravoúhlé pole o rozměrech  $b$  krát  $b/2$ ; překryvem se vyhneme nežádoucím artefaktům. Pro obrázek  $n \times n$  napočítáme  $2n/b$  takovýchto bloků v každém směru. Dekompozice vstupního obrazu přináší redundanci tak, jak pixel patří mezi čtyři sousední bloky. Zde jsou uvedeny dvě svébytné metody analýzy a syntézy:

- 1) Blokové hodnoty jsou váhovány oknem  $w$  (analýza) tak, že součet všech bloků přesně reprodukuje hodnotu původního pixelu (syntéza).
- 2) Blokové hodnoty jsou hodnoty z obrazových pixelů (analýza), ale jsou váhovány až po rekonstrukci obrazu (syntéza).

Experimenty ukázaly, že druhý přístup vede k lepším výsledkům. Spočítáme hodnotu pixelu  $f(i, j)$  ze čtyř příslušných blokových hodnot poloviční délky  $l = b/2$ , jmenovitě  $B_1(i_1, j_1)$ ,  $B_2(i_2, j_2)$ ,  $B_3(i_3, j_3)$  a  $B_4(i_4, j_4)$ ,  $i_1, j_1 > b/2$  a  $i_2 = i_1 - l, j_2 = j_1 - l$

$$f_1 = w(i_2/l)B_1(i_1, j_1) + w(1 - i_2/l)B_2(i_2, j_1) \quad (5.3.1)$$

$$f_2 = w(i_2/l)B_3(i_1, j_2) + w(1 - i_2/l)B_4(i_2, j_2) \quad (5.3.2)$$

$$f(i, j) = w(j_2/l)f_1 + w(1 - j_2/l)f_2, \quad (5.3.3)$$

kde  $w(x) = \cos^2(\pi x/2)$  je váhovací okno. Dala by se vybrat i jiná nerostoucí, hladká funkce (to je taková funkce, která má spojitě všechny parciální derivace prvního řádu) splňující podmínku  $w(0) = 1$ ,  $w(1) = 0$ ,  $w'(0) = 0$  a  $w(x) + w(1 - x) = 1$ .

## 6. Curvelet transformace

Standardní vlnková transformace dvourozměrné funkce  $f(x_1, x_2)$  velmi hrubě odhaluje směrové vlastnosti. Vlnky v ortonormální vlnkové transformaci mají převážně horizontální, vertikální a diagonální polohu. Vznik této transformace je spojen se snahou popsat větší rozsah poloh. Za zavedením curvelet transformace (CT), v roce 1999, stojí Candès a Donoho. Transformace byla navržena tak, aby efektivněji pracovala s hranami a nežádoucími artefakty podél různých křivek a odpovídala potřebám obrazové analýzy. CT potřebuje méně koeficientů k popsání dané křivky a hrany jsou také jemnější, než při použití vlnkové transformace. Curvelety popisují hrany spíše zakřivené a zaoblené. Curvelet transformace nám umožňuje analyzovat obraz pomocí různě velikých bloků, ale za užití pouze jedné transformace.

### 6.1 Digitální curvelet transformace

Idea je dekomponovat obraz do souboru wavelet pásem a analyzovat každé pásmo zvlášť lokální ridgelet transformací. Velikost bloků se může měnit v každé frekvenční hladině. Stručně řečeno, různé hladiny, ve více měřítkové ridgelet pyramidě, reprezentují jednotlivá kmitočtová sub pásma výstupní banky filtrů. Zároveň tento rozklad do sub pásem určuje vztah mezi výškou a šířkou rámcových prvků, takže jsou anizotropní a  $\text{šířka} = \text{délka}^2$ .

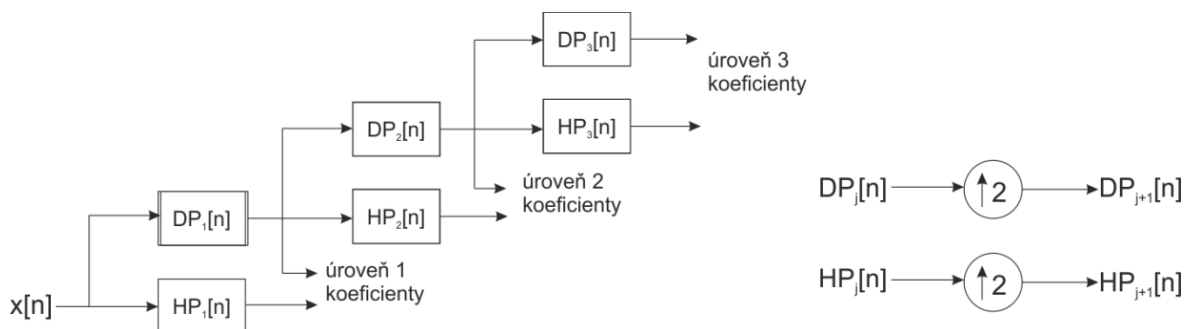
Diskrétní curvelet transformace kontinuální funkce  $f(x_1, x_2)$  využívá měřítko a banky filtrů s tím, že propustné pásmo  $\Delta_j$  je soustředěno v okolí frekvencí  $[2^{2j}, 2^{2j+2}]$

$$\Delta_j = \psi_{2^j} * f, \quad \widehat{\psi_{2^j} \xi} = \widehat{\psi}(2^{-2j} \xi). \quad (6.1.1)$$

Curvelet dekompozice se skládá z následujících kroků:

- *Dekompozice do sub pásem.* Prvek  $f$  rozložíme do více frekvenčních pásem užitím 2D vlnkové transformace.
- *Jemné rozdělení.* Na každé sub pásmo je aplikováno okno, tak abychom dostali čtvercová pole o odpovídajících velikostech (délka strany  $\sim 2^{-j}$ ).
- *Ridgelet analýza.* Každý čtverec je analyzován diskrétní ridgelet transformací.

Pro rozdělení vstupního obrazu do kmitočtových pásem se nepoužívá klasická vlnková transformace, ale využívá se tzv. à trous algoritmus, který je velmi výhodný pro potřeby digitální curvelet transformace. Tento algoritmus odstraňuje podvzorkování resp. převzorkování vlnkových koeficientů a interpoluje koeficienty filtru s krokem  $2^{(j-1)}$  v každé  $j$ -té úrovni rozkladu. Postup je znázorněn na obrázku (Obrázek 9).



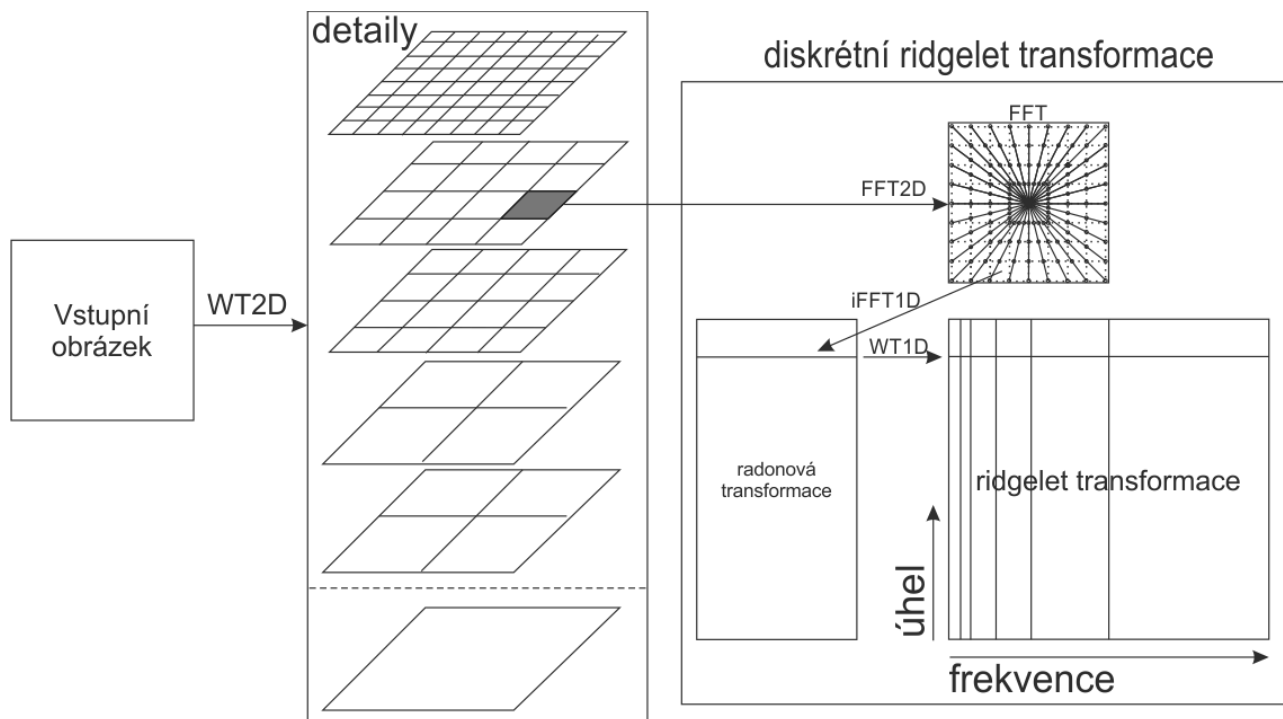
Obrázek 9. a) Diagram à trous algoritmu. Filtry v každé úrovni jsou interpolovanou verzí předcházejícího filtru. b) schéma filtru [7].

Jde vlastně o superpozici vstupního obrazu  $f [i_1, i_2]$  o rozměrech  $n$  krát  $n$  na jednotlivá frekvenční pásma

$$f [i_1, i_2] = c_J [i_1, i_2] + \sum_{j=1}^J w_j [i_1, i_2], \quad (6.1.2)$$

kde  $c_j$  je poslední dolno-frekvenční výstup celé kaskády filtrů zobrazené na obrázku (Obrázek 7 a) a  $w_j$  reprezentuje podrobnosti obrazu  $f$  v měřítku  $2^{-j}$ . Tudíž je na výstupu  $J+1$  sub pásem o velikosti  $n \times n$ . (Indexování je následující.  $J = 1$  odpovídá nejjemnějšímu měřítku (vysoké frekvence)). Postup u diskretní curvelet algoritmu je:

1. Aplikujeme „à trous algoritmus“ s měřítkem  $J$ .
2. Nastavím  $B_1 = B_{min}$ , kde  $B$  je velikost bloku
3. For  $j=1, \dots, J$  do:
  - Rozděl sub pásma  $w_j$  s bloky velikosti  $B_j$  a aplikuj digitální ridgelet transformaci na každý blok,
  - If  $j \bmod 2 = 1$  potom  $B_{j+1} = 2B_j$ ,
  - else  $B_{j+1} = B_j$ .

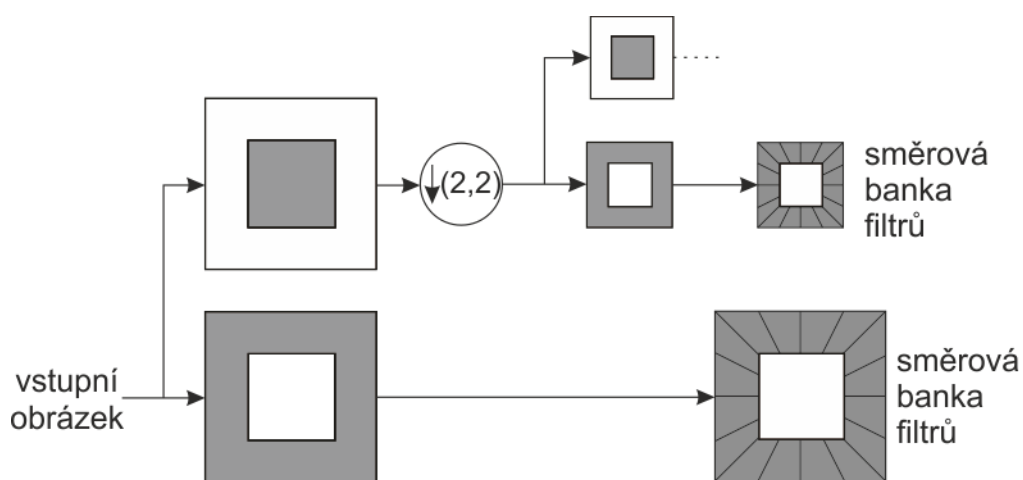


Obrázek 10. Celkový náhled na vytvoření Curvelet transformaci [6].

Délka boční strany lokalizačního okna je dvojnásobná v každém dalším sub pásnu. Tím je zachována základní vlastnost curvelet transformace, která tvrdí, že prvek o délce přibližně  $2^{-j/2}$  slouží pro analýzu a syntézu  $j$  – tého sub pásma  $[2^j, 2^{j+1}]$ . Za všimnutí stojí, že obecný popis obrázku  $c_j$  není nijak zpracován. Celkový náhled na algoritmus je na obrázku (Obrázek 10). Takto implementovaná curvelet transformace je redundantní. Redundance je rovna  $16J + 1$ , kde  $J$  reprezentuje každé dílčí sub pásno.

## 7. Contourlet transformace

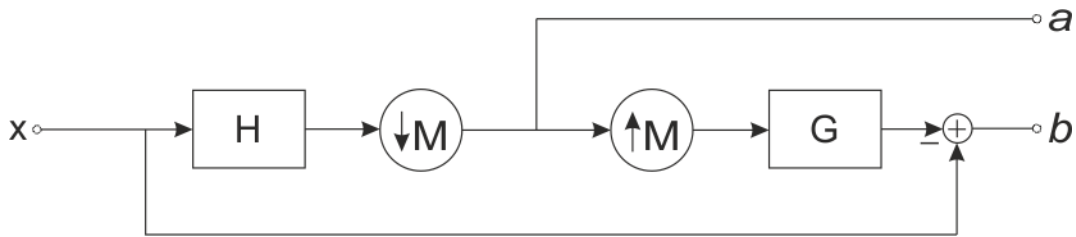
Curvelet transformace byla původně vyvinuta ve spojité doméně pomocí víceměřítkového filtrování a následně aplikaci blokové ridgelet transformace na každé sub pásmo vstupního obrazu. Transformace je založena na seskupení blízkých vlnkových koeficientů, které jsou vzájemně korelovány tak, aby vytvářely hladké kontury. Toho dosáhneme tak, že aplikujeme víceměřítkovou transformaci k odhalení hran a následně lokální směrovou transformaci, která po segmentech detekuje kontury. Na této základní myšlence je postavena banka filtrů (Obrázek 11) k získání řídké expanze v obrazech s hladkými konturami [9].



Obrázek 11. Contourlet banka filtrů [9].

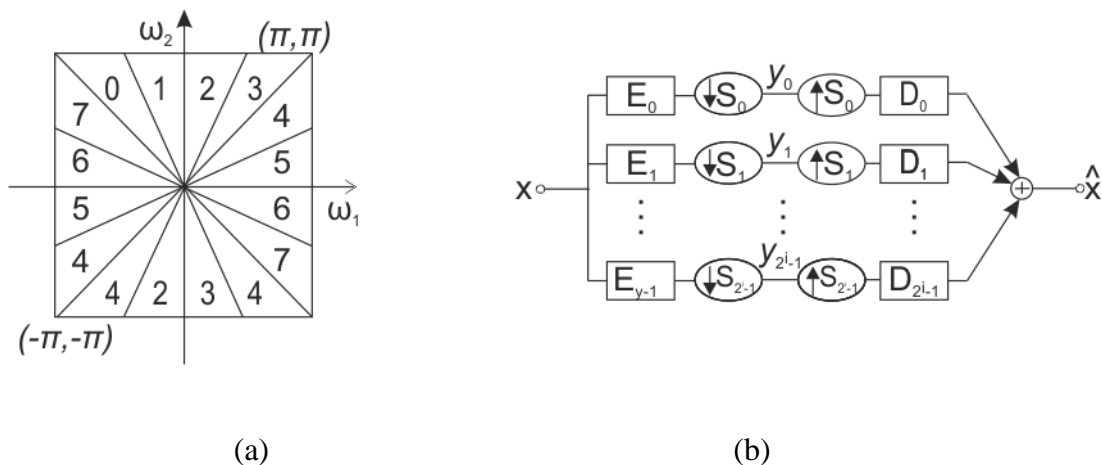
V uvedené bance filtrů se nejprve aplikuje Laplaceova pyramida (LP), znázorněná na obrázku (Obrázek 11), k určení diskontinuity bodů, následovaná směrovou bankou filtrů (Obrázek 12) spojující diskontinuitní body do lineární struktury. Výsledkem je rozšíření vstupního obrázku za užití základních prvků, jako jsou segmenty kontur.

Jeden ze způsobů jak dekomponovat vstupní obraz do více frekvenčních pásem je použít Laplaceovu pyramidu. LP produkuje na každé úrovni dekompozice podvzorkovanou nízkofrekvenční verzi vstupního obrázku a rozdíl mezi původním a predikovaným obrazem, který je na výstupu pásmové propusti.



Obrázek 12. Laplaceova pyramida. Výstup  $a$  představuje nízkofrekvenční verzi vstupního obrázku a  $b$  rozdílový obraz originál mínus predikce. Výstup  $a$  jde na vstup další úrovně dekompozice.  $H$  představuje analyzující a  $G$  syntetizující filtr [20].

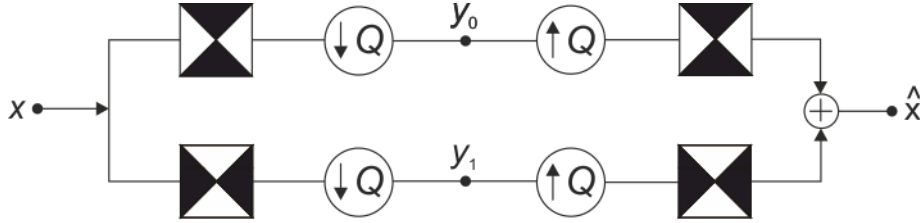
Směrová banka filtrů se vytvoří skrz  $n$  – úrovněový binární strom, který vede k rozdělení do  $2^n$  subpásem s klínovitým rozdělením frekvence, jak je znázorněno na obrázku (Obrázek 13).



Obrázek 13. (a) Směrová banka filtrů, kde  $n = 3$  tj.  $2^3 = 8$  reálných klínovitých frekvenčních pásem. Subpásma 0–3 odpovídají většině horizontálních směrů, zatímco subpásma 4–7 odpovídají většině vertikálních směrů. (b)  $n$  – úrovněová stromová struktura směrové banky filtrů [20].

Banka filtrů sestává ze dvou kroků. Zprv, vytvořím dvojici *quincunx* filtrů s tzv. *fan filtry* (Obrázek 13), které rozdělí 2-D spektrum do dvou směrů: horizontálního a vertikálního. Druhým krkokem je *shearing* operátor, což představuje pouze změnu pořadí vzorků obrazu. Jde vlastně o rotaci obrazu. Smyslem směrové banky filtrů je vhodně zkombinovat *shearing* operátor a dvourozměrné frekvenční dělení *quincunx* bankou filtrů

v každé větvi  $n$  – úrovně stromové struktury (Obrázek 13 b) tak, abychom získali požadované 2D kmitočtové dělení spektra dle (Obrázek 13 a). Na  $n$  – úrovně stromové strukturu směrové banky filtrů lze nahlížet jako na  $2^n$  kanálových paralelních filtrů s ekvivalentním filtrem a vzorkovací maticí, jak je znázorněno v obrázku (Obrázek 13 b).



Obrázek 14. Dvou dimenzionální dělení spektra pomocí quincunx banky filtrů s fan filtry. Černé oblasti značí ideální odezvu filtru.  $Q$  je quincunx vzorkovací matice [20].

Nechť jsou syntetizující filtry zapsány jako  $D_k^{(n)}, 0 \leq k \leq 2^n$ , kde  $n$  odpovídá jednotlivým sub pásmům  $z$  (Obrázek 13 a). Odpovídající vzorkovací matice má následující diagonální tvar:

$$S_k^{(n)} = \begin{cases} \text{diag}(2^{n-1}, 2) & \text{pro } 0 \leq k \leq 2^{n-1} \\ \text{diag}(2, 2^{n-1}) & \text{pro } 2^{n-1} \leq k \leq 2^n. \end{cases} \quad (7.1)$$

Tato rovnice popisuje jako horizontální tak vertikální sadu směrů. Jinými slovy skupina:

$$\left\{ d_k^{(n)} \left[ n - S_k^{(n)} m \right] \right\}_{0 \leq k < 2^n, m \in \mathbb{Z}^2} \quad (7.2)$$

získaná translací impulzové odezvy ekvivalentních syntetizujících filtrů  $D_k^{(n)}$  přes vzorkovací matici  $S_k^{(n)}$  vytváří báze diskrétního signálu v  $n^2$  ( $\mathbb{Z}^2$ ). Tyto báze mají jak směrové tak lokalizační vlastnosti.

Směrová banka filtrů, s ideálním kmitočtovým rozdělením pásem je vidět na obrázku (Obrázek 13 a), je navržena tak, aby nepropouštěla vysoké frekvence (reprezentující směrovost) vstupního obrázku. Ve skutečnosti frekvenční dělení do pásem (Obrázek 13 a) není ideální. V oblasti nízkých kmitočtů prosakují do několika subpásem. Samotná směrová banka filtrů tak neposkytuje řídkou reprezentaci obrazu. Toto je jeden z důvodů, proč se používá kombinace směrové banky filtrů s dekompozicí vstupního obrazu do více frekvenčních pásem, kde se nízké frekvence odstraní před použitím banky filtrů. Vstupní

obraz nejdříve přijde na vstup Laplaceovy pyramidy, která funguje jako horní propust. Tento signál dále pokračuje do směrové banky filtrů, kde se získá informace o směrovosti. Proces se opakuje znovu ovšem na méně detailním obrázku. Celý tento postup je znázorněn na obrázku (Obrázek 10). Konkrétně,  $a_0[n]$  je vstupníobrázek. Výstupem za LP bude  $J$  pásmově omezených obrázků  $b_j[n]$ ,  $j=1,2,\dots,J$  (od nejjemnější po nejhrubší obraz) a nízkofrekvenční obraz  $a_{j-1}[n]$ . To znamená že,  $j$  – tá úroveň Laplaceovy pyramidy rozloží obraz  $a_{j-1}[n]$  na hrubý obraz  $a_j[n]$  a detailní obraz  $b_j[n]$ . Každý pásmový obraz  $b_j[n]$  se dále dekomponuje  $l_j$  – urovňovou směrovou bankou filtrů do  $2^{l_j}$  pásmových směrových obrazů  $c_{j,k}^{(l,j)}[n]$ ,  $k = 0,1,\dots, 2^{l_j} - 1$  [9].



## 8. Shearlet transformace

Problematika vícerozměrných signálů v aplikované matematice je obvykle spjata s anizotropickými jevy, jako jsou například ostré přechody v digitálních obrázcích. Vlnková transformace se ukázala jako nevhodná k detekci anizotropních vlastností signálu. K překlenutí této nevýhody se vyvinulo několik metod, jako jsou ridgelety, curvelety a contourlety. Všechny tyto metody se ukázaly jako optimální. Avšak pouze shearlety jsou unikátní v tom, že zahrnují matematickou soustavu afinních systémů, a jsou jediným systémem schopným dosáhnout stejného zpracování dat jak ve spojitě, tak diskrétní oblasti [12]. Shearlet transformace je navržena k tomu, aby efektivně rozpoznala anizotropické vlastnosti signálů. Toho je dosaženo tak, že shearlety jsou normovány podle parabolického měřítkového zákona do *parabolické měřítkové matice*  $A_a$ ,  $a > 0$ , a *smykové matice*  $S_s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , obsahující informaci o směrovosti:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \quad a S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad M_{a,s} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} = S_s A_a. \quad (8.1)$$

Shearlet transformace je založena na třech základních parametrech:

- měřítkový parametr  $a$ , definující úroveň rozlišení,  $a > 0$ ,
- smykový parametr  $s$ , určuje směrovost,  $s \in \mathbb{R}$ ,
- translační parametr  $t$ , udávající pozici,  $t \in \mathbb{R}^2$ .

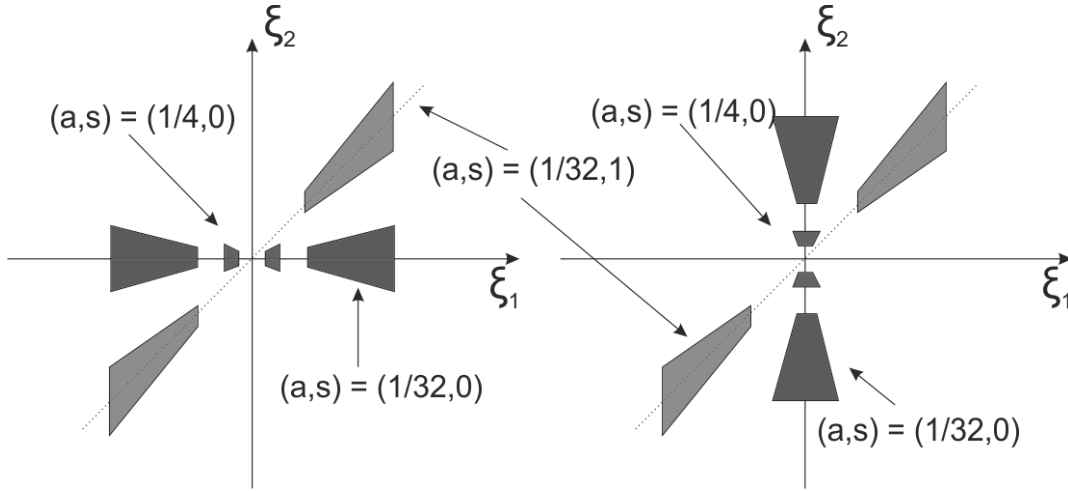
Pro každý parametr  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $s \in \mathbb{R}$  a  $t \in \mathbb{R}^2$ , jsou shearlety dány vztahem [13]:

$$\psi_{a,s,t}(x) = a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( M_{a,s}^{-1}(x - t) \right), \quad (8.2)$$

kde výraz  $a^{-\frac{3}{4}}$  odpovídá determinantu matice  $M_{a,s}^{-1/2}$ . Mateřská shearlet funkce  $\psi \in L^2$  je definována jako [13]:

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2 \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} \right), \quad (8.3)$$

kde  $\hat{\psi}$  je fourierovou transformací  $\psi$ ,  $\psi_1$  je spojitá vlnková transformace a  $\psi_2$  je mateřská funkce.



Obrázek 15. Frekvenční podpora horizontálních shearletů (vlevo) a vertikálních shearletů (vpravo) pro různé hodnoty  $a$  a  $s$  [12].

## 8.1. Spojitá Shearlet

Prostor definovaný třemi základními parametry  $R^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  je možné rozšířit grupovou operací

$$(a, s, t) * (a', b', t') = (aa', s + s'\sqrt{a}, t + M_{as}t'), \quad (8.1.1)$$

to vede k tzv. *shearlet skupině*  $S$ , na kterou je možno nahlížet jako na speciální případ obecné afinní skupiny. Spojitý shearlet systém vznikne z jednotné grupové operace

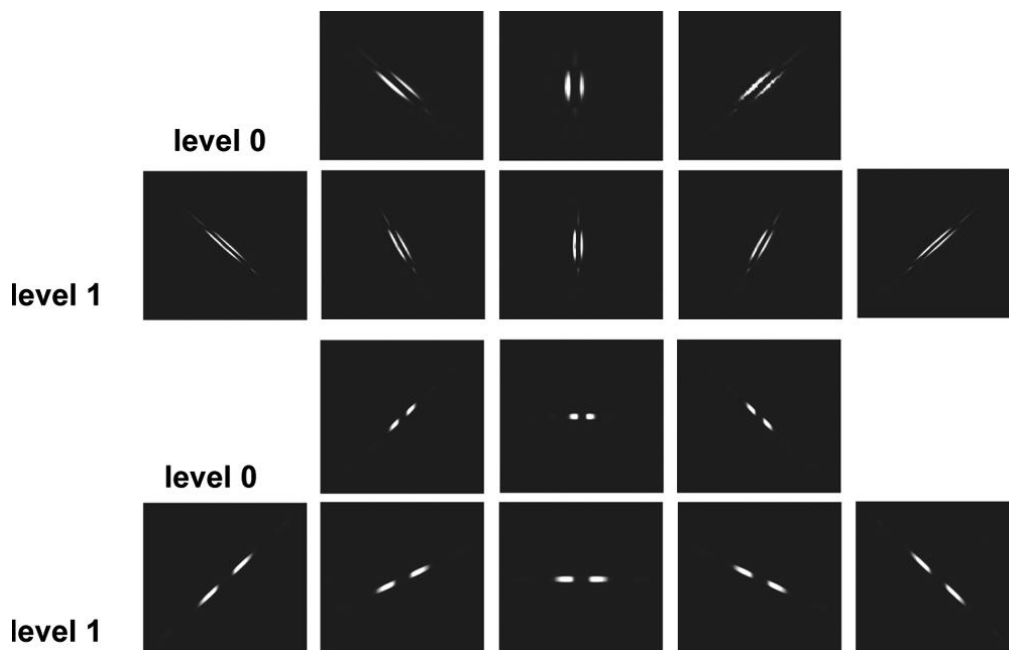
$$(\sigma(a, s, t)\psi)(x) = a^{-\frac{3}{4}}\psi(M_{a,s}^{-1}(x - t)). \quad (8.1.2)$$

Spojitá shearlet transformace je poté definována jako:

$$SH_f(a, s, t) = \langle f, \psi_{a,s,t} \rangle, \quad (8.1.3)$$

kde  $a > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , a  $t \in \mathbb{R}^2$ . Alternativně, raději než definovat smykový parametr  $s$  v  $\mathbb{R}$ , je možné definiční prostor omezit na  $|s| \leq 1$ . To vede ke vzniku tzv. *kónicky adaptované*

spojité shearlet transformace, která vnáší stejné zpracování dat ve všech směrech na rozdíl k mírně vychýlenému přístupu spojité shearlet transformace. Přestože spojitá shearlet transformace je směrově mírně vychýlená, je její aplikace snazší díky jednodušší matematické struktuře. Spojitá shearlet transformace vlastně tvoří soubor dobře lokalizovaných křivek s rozdílnou orientací, měřítkem a pozicí [13].



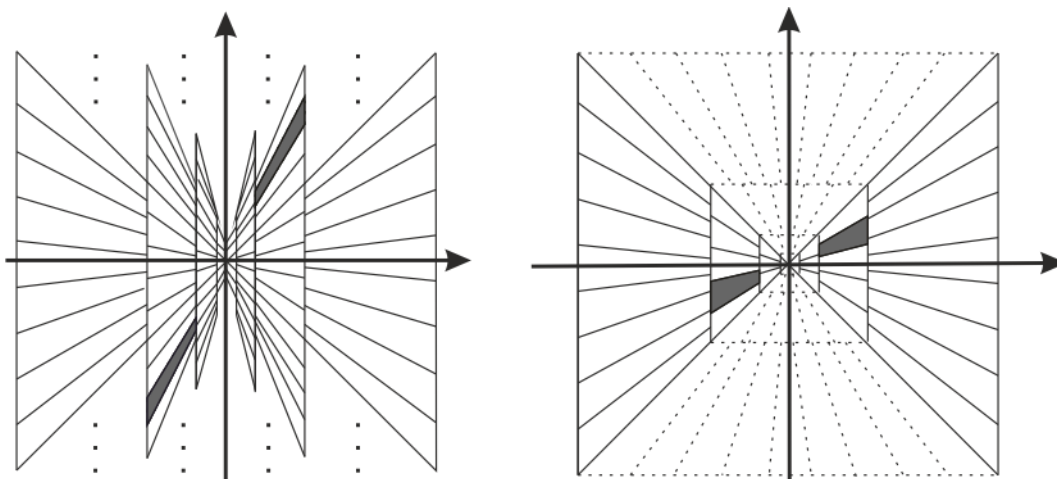
Obrázek 16. Příklad shearletů v prostorové a frekvenční doméně: Shearlety  $\psi_{jk0}^i$  sdružené s maticemi  $A_a$  a  $S_s$  (rovnice) jestliže  $j = 0, 1$  (horní řádky). Amplituda Fourierovy transformace shearletů  $|\widehat{\psi}_{jk0}^i|$  sdružené s maticemi  $A_a$  a  $S_s$  (rovnice) jestliže  $j = 0, 1$  (spodní řádky) [12].

## 8.2 Diskrétní Shearlet

Vzorkováním dříve uvedené spojité shearlet transformace  $SH_f(a, s, t)$  získáme diskrétní shearlet transformaci. Speciálně pro  $\psi \in \mathbb{R}^2$  je transformace definována následovně [12]:

$$\{\psi_{j,k,m} = 2^{\frac{3j}{4}} \psi(S_k A_{2^j} \cdot -m) : j \in \mathbb{Z}, k \in K \subset \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2\}, \quad (8.2.1)$$

kde  $K$  je indexování shearletů. Diskrétní shearlet systém definuje soubor křivek rozdílného měřítka  $j$ , orientace  $k$  a pozice závislé na  $m$ . Zejména, pokud  $K = \mathbb{Z}$  v (8.2.1),



Obrázek 17. Zleva doprava: Frekvenční dělení diskretního shearlet systému;  
 Frekvenční dělení kónicky adaptovaného diskretního shearlet systému [12].

shearlet systém zahrnuje prvky všech možných úhlů, jak zobrazuje (Obrázek 17). Volba této možnosti kdy  $K = \mathbb{Z}$  je v souladu se spojitým shearlet systémem vytvořeným grupovou operací. Abychom se vyhnuli již dříve zmíněnému směrovému vychýlení, které diskretní systém dědí po spojitém systému. Kónicky adaptovaná diskretní shearlet transformace je zapsána

$$\{\phi(\cdot - m) : m \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{\psi_{j,k,m}, \tilde{\psi}_{j,k,m} : j \geq 0, |k| \leq \lfloor 2^{\frac{j}{2}} \rfloor, m \in \mathbb{Z}^2\}, \quad (8.2.2)$$

kde  $\tilde{\psi}_{j,k,m}$  je generováno z  $\psi_{j,k,m}$  záměnou obou proměnných a  $\psi, \tilde{\psi}$ , a  $\phi$  jsou  $L^2$  funkcí. Obrázek (Obrázek 17.) ilustruje typické frekvenční dělení kónicky adaptované shearlet transformace. Výhodou je fakt, že všechny směry se rozevírají pod stejným úhlem a nedochází k potlačování určitých směrů, jak je tomu i u klasické shearlet transformace. Vhodnou volbou shearletů  $\psi$  a  $\tilde{\psi}$  můžeme dosáhnout dobře lokalizovaného shearlet systému, který formuje frame, nebo dokonce Parsevalův frame.

## 9. Implementace transformací

V předchozích kapitolách jsme popsali vybrané transformace extrahující směrovou informaci ze vstupního obrázku. Dalším a důležitějším úkolem bylo provést simulaci odšumění obrázku pomocí algoritmu vytvořeného v programu Matlab. V této kapitole se dozvíte, jak byly jednotlivé transformace implementovány.

### 9.1 Obrazové testy

Důležitým kritériem pro vhodnou volbu testovacích snímků je fakt, že pro transformace typu Contourlet, Curvelet a Ridgelet je nutné pracovat se vstupními obrázky čtvercové velikosti a o délce hrany  $N = 2^k$ , kde  $k$  je celé číslo. Proto jsem vybral tři obrázky v odstínech šedi a jeden barevný. Vybral jsem dva testovací snímky, ke kterým jsem uměle přidával šum, jeden snímek vyfocený astrologickým dalekohledem [23] a poslední snímek je focen za špatných světelných podmínek.



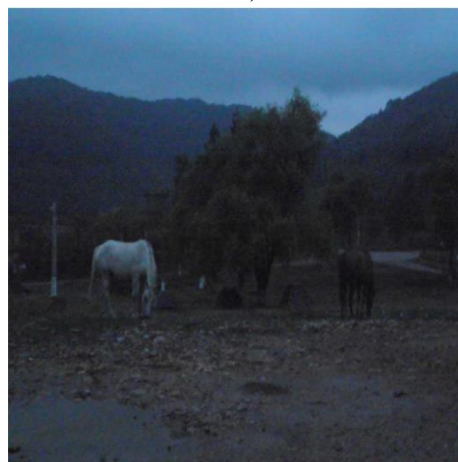
a)



b)



c)



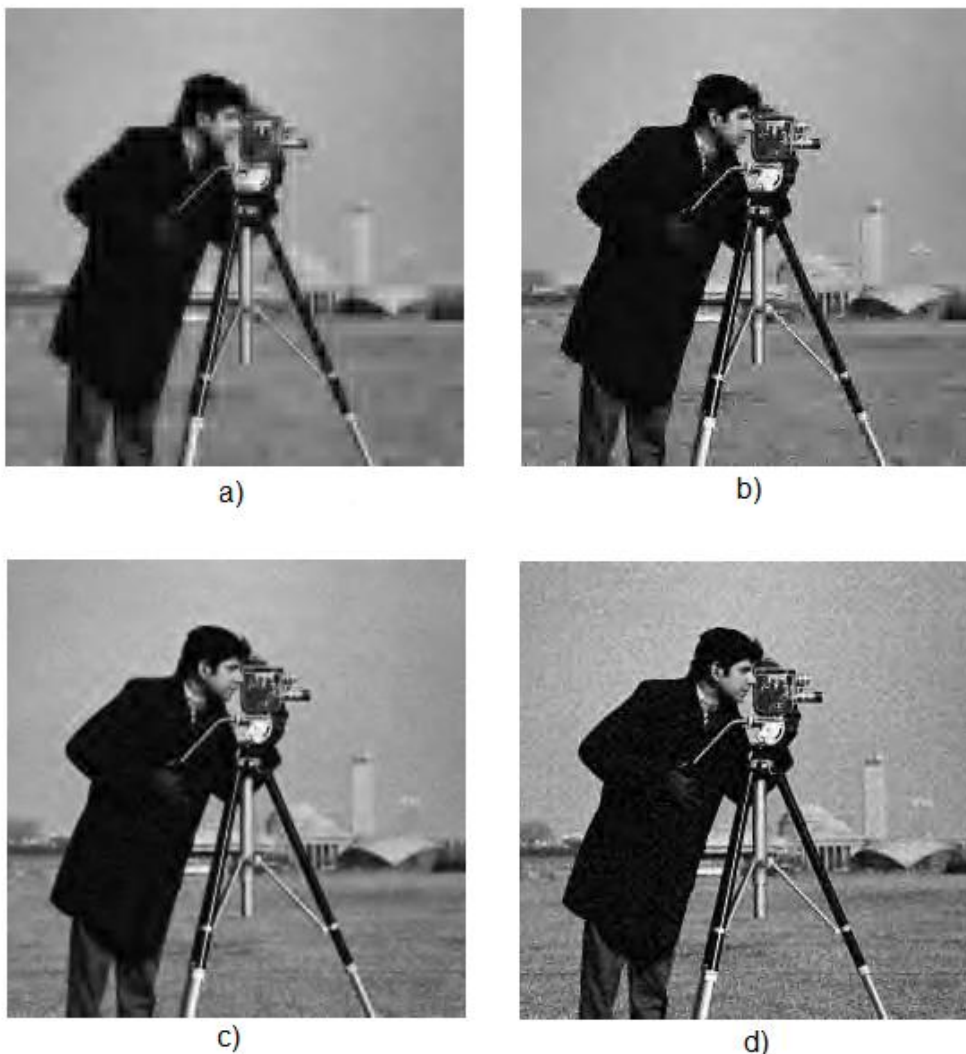
d)

Obrázek 18. Vybrané testovací snímky

## 9.2 Aplikace vlnkové transformace

Vlnkovou transformaci jsem pojal jako referenční transformaci, protože je v prostředí Matlab dobře dostupná. Pomocí příkazu *dwt2* dostaneme aproximační, vertikální, horizontální a diagonální koeficienty. Za předpokladu, že šum je obsažen nejvíce ve vysokofrekvenční části snímku, v našem případě v diagonálních koeficientech, se hodnota šumu spočte právě z diagonálních koeficientů. Koeficienty jsou následně prahovány měkkým, nebo tvrdým prahováním. Postup prahování je zmíněn v kapitole 4.3

Odstranění šumu. Funkce *vlnky.m*, která provádí redukci šumu pomocí vlnkové transformace, očekává na vstupu více proměnných. A to konkrétně vstupní obrázek, počet stupňů dekompozice snímku.



Obrázek 19. Příklady použití různých vlnek a prahování.

Je na výběr ze dvou možností. Dvě a tři úrovně dekompozice. Praktickými testy [18] se ukázalo, že dvě až tři úrovně dekompozice jsou dostačující. Přidáváním dalších stupňů dekompozice se výsledek liší minimálně, ale roste výpočetní náročnost [18].

Dále je třeba zadat typ prahování. Je na výběr „soft“ a „hard“ prahování. Další vstupní proměnnou je typ vlnky, která bude vstupní obraz rozkládat. Jsou podporovány všechny typy vlnek, které program Matlab obsahuje ve svých knihovnách. Pevně jsem žádnou vlnku ne zvolil záměrně. Jednotlivé mateřské vlnky jsou pro redukci šumu více či méně vhodné a je dobré vyzkoušet více variant. Na obrázku (Obrázek 19) jsou snímky po aplikaci rozdílných vlnek. K originálnímu snímku byl přičten Gaussovský šum s rozptylem  $\sigma = 10$ . Obrázek 19. a) je kameraman po aplikaci funkce *vlnka.m* s následujícími parametry: tři úrovně dekompozice, měkké prahování a jako mateřská vlnka byla zvolena ortogonální vlnka typu Daubechies 2. Obrázek 19. a) má stejné vstupní parametry jako verze a, jenom je použito prahování typu hard. Obrázek 19. c, d opět stejné vstupní proměnné, jen místo vlnky typu Daubechies2 je použita biortogonální rodina vlnek, konkrétně biortogonal 3.9. Je dobré si všimnout, že každá rodina vlnek výsledný obrázek zbavila šumu rozdílně. Obrázek 19 a) se zdá rozmazaný, a jsou na něm dobře patrné nežádoucí artefakty. Zdá se, že biortogonální vlnky si s odšumováním poradí lépe, avšak pouze za použití prahu typu „soft“, při užití tvrdého prahu jsou v obrázku 19. d) dobře patrné artefakty vzniklé nespojitostí jednotlivých bodů. Při tvrdém prahování se všechny hodnoty, které jsou nižší, než daný práh vynulují (ve formátu double i uint8 se kterými pracuji, se hodnota 0 zobrazí jako bílý bod) a tím paradoxně vytváří rušivou mozaiku, vypadající jako šum.

### 9.3 Aplikace Ridgelet transformace

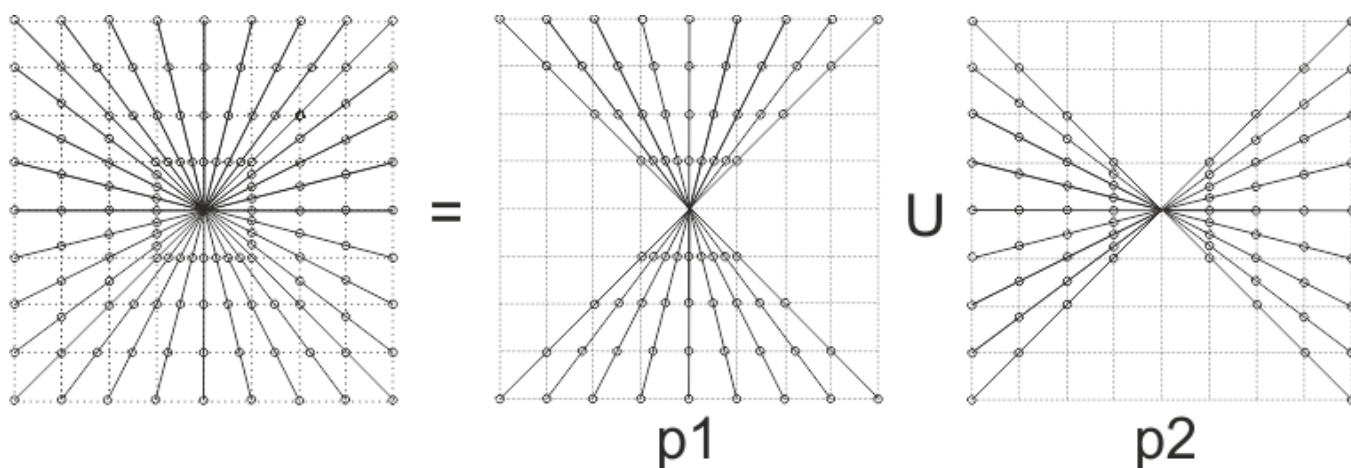
K dosažení koeficientů ridgelet transformace je třeba na vstupní snímek aplikovat dvourozměrnou FFT s tím, že přesuneme stejnosměrnou složku do středu. Dále je nutné převést spektrum signálu z kartézských do pseudopolárních souřadnic. Převod souřadnic je realizován vlastní funkcí. Interpolace jednotlivých radiál uvedená v kapitole 5.1 Radonova transformace je provedena následujícím způsobem. Pro 2(N-1) přímek jsem určil směrnici dané přímkou z rovnice:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad (9.3.1)$$

kde  $y_1$  a  $y_2$  jsou souřadnice přímky na ose  $y$  a  $x_1$  a  $x_2$  jsou souřadnice na ose  $x$ . Budeme-li mít úsečku  $u$  s krajními body  $A[y_1, x_1]$  a  $B[y_2, x_2]$  lze rozdíl  $y_1$  a  $y_2$  chápat jako vzdálenost mezi těmito body v ose  $y$ . A tím, že máme na vstupu pouze čtvercové snímky, je tím pádem tato vzdálenost neměnná. Z tohoto důvodu musí být na vstupu čtvercový obrázek, jiné než čtvercové rozměry obrázku mají za následek rozdílné vzdálenosti v osách  $x$  a  $y$ . To vede k ukončení programu. Ze znalosti hodnoty směrnice a souřadnice bodů na přímkách je možné určit, v jakém místě se protínají radiální přímky s horizontálními a přiřadit nejbližší bod, který odpovídá této radiále.

$$x_1 = \frac{y_1 - y_2}{k} + x_2. \quad (9.3.2)$$

Na následujícím obrázku 20. je znázorněn postup převodu kartézských souřadnic do pseudopolárních.



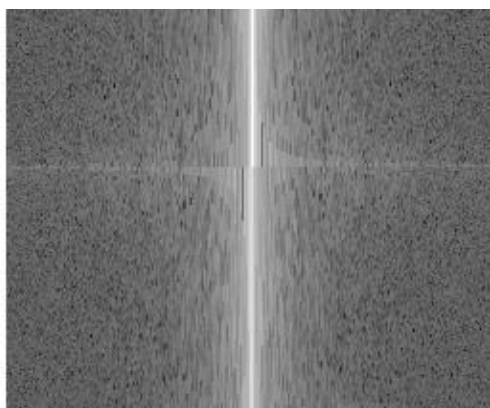
Obrázek 20. rozdělení pseudopolární mřížky [17].

Kartézskou mřížku si rozdělíme na dvě části [17]. Část  $p1$  obsahuje radiály pro úhly v rozmezí  $[(\pi/4), (3\pi/4)]$  a body které na nich leží, jsou určeny průsečíkem s horizontální osou. Část  $p2$  získáme obdobně. Radiální čáry jsou v rozmezí úhlů  $[(-\pi/4), (\pi/4)]$  a body určíme průsečíkem s vertikálami. Ty body na radiální přímce, které nenaléhají přesně určitému bodu v kartézské mřížce, a tak jsou na pomezí mezi dvěma body, je třeba věnovat pozornost. Špatné přiřazení hodnoty může mít za následek nemožnost zpětného postupu. Já jsem tento problém vyřešil jednoduchým zaokrouhlením k nejbližšímu bodu na mřížce a uložením hodnoty tohoto bodu do proměnné. Výsledkem po aplikaci pseudopolární mřížky je jak samotná nová mřížka, tak i navigace, jak postupovat při reverzním postupu.



K dosažení koeficientů ridgelet transformace zbývá pouze aplikovat jednorozměrnou inverzní FFT na každou radiálu zvlášť, následovanou 1D vlnkovou transformací, na ty proměnné, jejichž úhel je neměnný. Tento postup je zmíněn v kapitole 5.

Nicméně při praktické realizaci se mi nepodařilo dosáhnout kýženého odšumování. I když byl proces dosažení ridgelet koeficientů plně reverzibilní a podařilo se mi z koeficientů složit původní snímek se zanedbatelnou<sup>1</sup> odchylkou, tak ani přes veškeré snahy nebylo dosaženo odšumění snímku dle [16]. Při zkoumání příčin nezdaru jsem se zaměřil na rozložení šumu v radonové doméně. Dospěl jsem k závěru, že přičtením šumu s libovolně velkou hodnotou  $\sigma$  se hodnoty v radonově prostoru fakticky neměnní a je tím pádem těžké odhadnout odchylku šumu  $\sigma$ , potřebnou pro prahování. Řešení jsem našel v [16]. Je tam nastíněna možnost vyhnout se zpětné FFT, za předpokladu užití normalizované  $B_3$  křivky. Naneštěstí ani tato varianta se nejevila jako vhodná pro odšumování. Myšlenka vyhnout se iFFT se mi avšak líbila a vydal jsem se cestou redukce šumu v pseudopolárních souřadnicích.



Obrázek 21. Stejnosečná složka v pseudopolárních souřadnicích.

Na začátku jsme vstupní snímek převedli do Fourierovského prostoru a přesunuli stejnosečnou složku do středu. Převod do nových souřadnic Fourierovskou doménu nijak nenarušil. Naopak. Po převedení do nové soustavy souřadnic se stejnosečná složka, která předtím byla ve středu snímku, přesunula vždy doprostřed každé radiály, tím jak prochází každá přímka středem souřadnic ve stejné vzdálenosti. Na obrázku (Obrázek 21.) je tato skutečnost znázorněna. Středem snímku vede bílá linka, která reprezentuje stejnosečnou složku. Na základech toho zjištění jsem snímek rozdělil na detailní a hrubou část.

---

<sup>1</sup> Chyba mezi původním a zpětně složeným obrázkem byla  $MSE = 10^{-17}$ .



a)



b)

Obrázek 22. a) vstupní snímek s přidaným Gaussovským šumem  $\sigma = 15$ . b) Výsledek po aplikaci odšumění ridgeletovou transformací.

Hrubá část je v okolí stejnosměrné složky a nebude se s ní nijak zacházet. Detaily jsou zbytek snímku. Z podrobné části jsem spočetl směrodatnou odchylku šumu  $\sigma$  a vynuloval ty hodnoty, které byly menší než hodnota prahu  $t = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \log_2(M \cdot N)}$ , kde  $M, N$  jsou rozměry vstupního obrázku. K dokončení transformace složím normované detaily s hrubým snímkem a zpětným postupem dosáhnu opětovného složení snímku.

Na výsledném snímku je patrný nově vzniklý obrys vstupního snímku. Je dobře viditelný kolem rukávu kameramana. Samotné rozhodování jakou část spektra budu považovat za stejnosměrnou složku je velmi citlivé. Zprvu jsem vybral oblast 20% šířky vstupního snímku v okolí stejnosměrné složky na obě strany. Při vstupních rozměrech 256 x 256 obrazových bodů, tato hodnota odpovídá 51 pixelům na každou stranu. Tato volba je i na obrázku (Obrázek 22.). Zúžením této oblasti dochází sice k vizuálně lepšímu účinku odšumění, ale také se obrázek více rozmazává. Optimální se mi experimentálně zdála hodnota 14 – 20% šířky obrázku. Jak vypadá výsledek při výběru extrémní hodnoty, je znázorněn na (Obrázku 23.). Vybral jsem 6% šířky signálu. Jinými slovy, při rozměrech obrázku 256 x 256 obrazových bodů, budu považovat za stejnosměrnou složku pouze 6 bodů na každou stranu. Výsledek dopadl podle očekávání. Čím užší oblast vybereme, tím lépe ze snímku odstraníme šum, ale také přijdeme o tu část informace, která je nesena ve stejnosměrné složce.



a)



b)

Obrázek 23. a) vstupní snímek s přidaným Gaussovským šumem  $\sigma = 15$ . b) Výsledek po aplikaci odšumení Ridgeletovou transformací extrémním výběrem stejnosměrné složky.

#### 9.4 Aplikace Curvelet transformace

Postup získání koeficientů curvelet transformace z části využívá ridgelet transformaci. Funkce *curvelet.m* zprvu vypočte isotropickou nedecimovanou vlnkovou transformaci, také známou jako starlet transform [16]. Nedecimovaná vyjadřuje skutečnost, že každá další dekompozice není podvzorkovanou verzí předešlého výstupu. Na výstupu funkce dostaneme množinu stejně velkých snímků seřazených od toho nejdetailnějšího až po nejhrubší obrysy. Výhodou této transformace je dobrá detekce isotropických struktur a je tak vhodná pro aplikaci v oblasti zpracování astronomických snímků a dále fakt, že použité filtry nemusí být ortogonální či biortogonální [19]. Zvolil jsem šest stupňů rozkladu vstupního snímku. O výpočet starlet transformace se stará funkce *start.m*. Vyzkoušel jsem možnost částečně redukovat množství šumu v obraze již v této transformaci, ale bez výraznějších úspěchů. Takto předpřipravený soubor snímků se poté rozdělí do blokových struktur, tak jak je to zobrazeno na (Obrázku 10.). Rozklad začíná od nejmenšího čtverce, zvolil jsem velikost 16 x 16 bodů, a končí až je čtvercová oblast velká jako samotný vstupní snímek. Na každou čtvercovou oblast se aplikuje ridgelet transformace, v mém případě funkce *ridl.m*. Po úpravě jednotlivých koeficientů následuje složení do původní podoby. Výsledkem aplikace curvelet transformace je obrázek s redukováným množstvím šumu. Tím jak se snímek rozkládá na čtvercové bloky, je tato

struktura dobře patrná. Je zřejmé, že curvelety zanechávají linie kameramana neporušené. Kolem ostrých hran jsou vidět artefakty vznikající touto transformací.



Obrázek 24. Čtyři stupně dekompozice starlet transformace.

## 9.5 Aplikace Contourlet transformace

Tato transformace začíná rozložením vstupního signálu za užití Laplaceovy pyramidy. Podrobný postup vytvoření takové pyramidy je zmíněn v kapitole 7. a dále v [20]. Dále je v kapitole 7. zmíněna quincunx směrová banka filtrů. Nepodařilo se mi však najít dostatečné množství informací, potřebných k realizaci této směrové banky filtrů. Při hledání alternativního filtru jsem využil dobrých směrových vlastností duální komplexní vlnkové transformace (Dual -Tree Complex Wavelet Transform - DTCWT) [21]. Klasická vlnková transformace nabízí směrové rozlišení ve třech směrech: horizontální, vertikální a diagonální směr. DTCWT tuto vlastnost rozšířila na šest směrů. DTCWT se oproti klasické

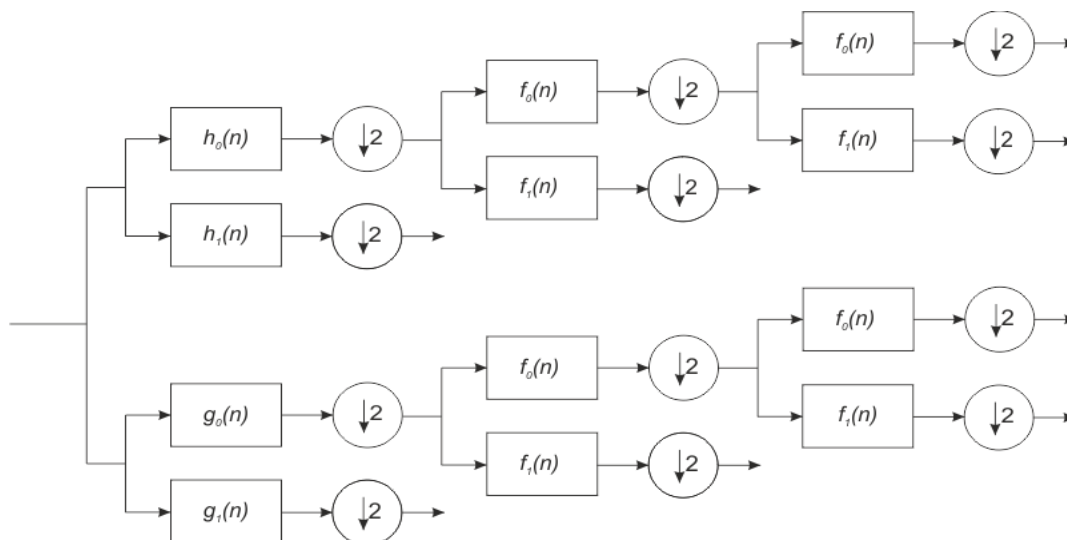


a)



b)

Obrázek 25. a) vstupní snímek s přidáním Gaussovským šumem  $\sigma = 15$ . b) Výsledek po aplikaci odšumení curvelet transformací.

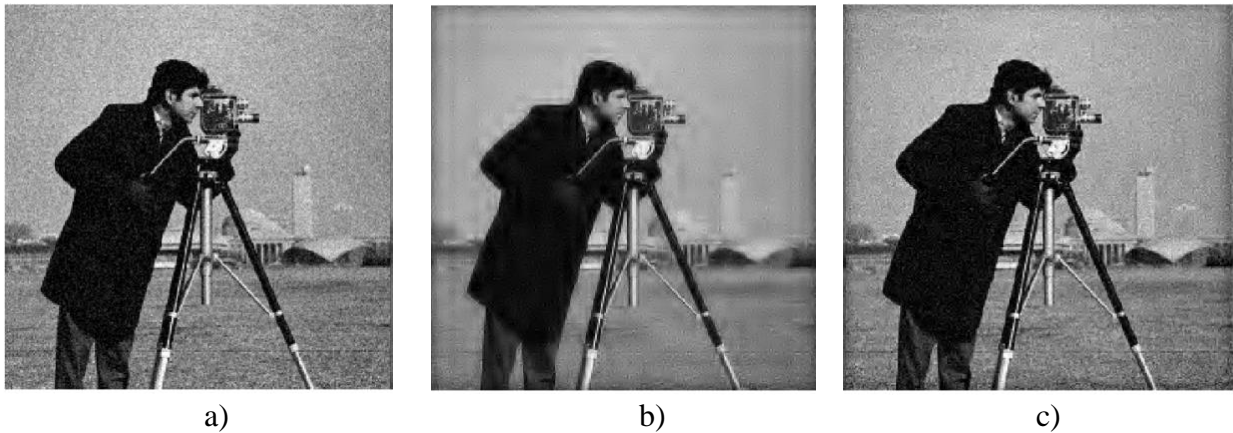


Obrázek 26. Tři stupně rozkladu duální komplexní vlnkové transformace [21].

vlnkové transformaci v mnoha věcech neliší. Implementovaná metoda využívá dvě paralelní vlnkové transformace, tak jak je to zobrazeno na (Obrázku 26.).

Kdyby obě větve používaly stejný filtr, nezískaly bychom nic. Ale když se filtry vhodně navrhnu, tak je možné vstupní signál rozdělit na dvě části, které se dají interpretovat jako reálná a komplexní část [21]. Filtry pro první část dekompozice  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$ , pro reálnou část a  $g_0(n)$ ,  $g_1(n)$ , pro imaginární část mají rozdílnou impulsovou odezvu od zbytku stromu. V součtu potřebují dolno-frekvenční a hornofrekvenční filtr pro první část dekompozice reálného i imaginárního stromu a dvojici komplementárních filtrů pro zbylé části dekompozice. Ve skriptu jsem však použil čtyři různé filtry pro každý stupeň rozkladu.

Samotnou redukci šumu jsem provedl již dříve zmíněnou metodou prahování. Ve skriptu *contourlet.m* je možné zvolit počet dekompozičních úrovní, ale také typ prahování. Při výběru počtu rozkládajících úrovní je třeba mít na paměti, že výstupy Laplaceovské banky filtrů jsou podvzorkovanou verzí vstupního snímku. A každá další úroveň dekompozice pomocí DTCWT zanáší další decimaci dvěma.



Obrázek 27. Výsledek odšumování Contourlet transformací.

Mohlo by tak dojít k chybě programu, kdy stupeň dekompozice bude tak velký, že snímek už nebude možné dále rozkládat. Navíc je to také výpočetně náročné. Máme totiž dvě větve. Dle vizuálního testování, stačí do čtyř úrovní dekompozice. Vyšší řád, už výraznější zlepšení signálu nepřináší. Na (Obrázku 27.) je vstupní snímek a) s přidáním Gaussovským šumem  $\sigma = 15$ , na snímcích b) a c) je prahování měkkým respektive tvrdým prahováním. U prahování typu soft je výsledek hladší, kontury jsou vyhlazené, ale také se snímek zdá rozmazaný. Zatímco druhý typ prahu zanechává nepříjemné artefakty, ale také je vše ostřejší.

## 9.6 Aplikace Shearlet transformace

Poslední realizovanou transformací je shearlet transformace. V [22] je nastíněn postup vytvoření diskrétní shearlet transformace. Nejprve jsem využil vlastností Laplaceovské pyramidy, která rozdělí signál na nízkofrekvenční a vysokofrekvenční části. Poté jsem spočetl fourierovu transformaci. Abych dodržel teoretické zázemí této transformace, následuje frekvenční dělení signálu. Tento problém jsem vyřešil díky pseudopolární mřížce. Tím, že mi nová mřížka radiální přímky uspořádá do řádků a postupně naskládá do matice, mohu vybrat frekvence, přesně jak je to znázorněno na obrázku (Obrázek 17.). Na každou jednotlivou takto vybranou skupinu frekvencí jsem aplikoval Mayerovu vlnku, přesně jak je to psáno v [22].



a)



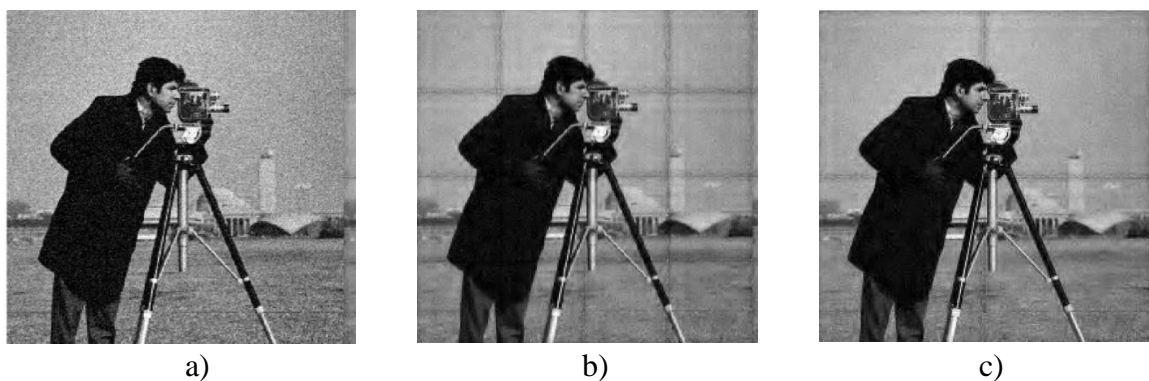
b)

Obrázek 28. Výsledek odšumování Shearlet transformací.

Samotné odšumování nedopadlo nejlépe. Dle vizuálního porovnání se šum prakticky nepodařilo odstranit, pouze se více rozmazal. Změnou velikosti okna aplikovaného k frekvenčnímu dělení se mi výsledek nepodařilo zlepšit. Pouze se zvýšila výpočetní náročnost a s tím spojená doba výpočtu programu. Veškeré numerické výsledky této a předešlých metod budou popsány a zhodnoceny v následující kapitole.

## 9.7 Vlastní funkce

Poté co jsem se vizuálně přesvědčil o výborných odšumovacích vlastnostech DTCW použité u contourlet transformace, rozhodl jsem se naprogramovat vlastní algoritmus k odšumení snímku. Snahou bylo využít rozdělení snímku do blokové struktury užitě u curvelet transformace a na tyto bloky aplikovat DTCW. Tak, jak je snímek rozdělen v blocích, se lépe počítá směrodatná odchylka šumu, tolik důležitá pro určení prahu. Respektive, kdybych měl ve snímku lokální šum, lépe bych ho detekoval a odstranil. Velikost bloků se dá měnit s krokem  $2^N$ , kde  $N$  je celé číslo. Čím menší číslo zvolím, tím více budu bloků ve snímku mít. To s sebou nese i negativum této funkce. Do výsledného obrázku se promítá zvolená čtvercová struktura.



Obrázek 29. Vlastní metoda, při přidání aditivního šumu s hodnotou  $\sigma = 15$ .

Na obrázcích 29. b) a c) je struktura 32 x 32 bodů respektive 128 x 128 bodů. Tuto rušivou mozaiku jsem se snažil vymaskovat. Kdy jsem nejprve vynuloval hodnoty bodů v původním snímku, kudy má vést mřížka. Předpokládal jsem, že konvoluce filtru se signálem v DTCW zapříčiní rozmazání mřížky. Toto se však nepotvrdilo. Dalším pokusem bylo vymaskovat vstupní signál tak, že snímek byl všude nulový, pouze tam kde měla být mřížka, sem nechal původní hodnoty. Od výstupního snímku jsem poté mřížkovou strukturu odečetl a nahradil jí dříve připravenou mřížkou. Tento pokus také nebyl ideální. I tentokrát byla mřížka ve výstupním signálu rušivá. Bylo to zapříčiněno nespojitostí hodnot nové mřížky a výstupního snímku. Ani jiné pokusy s různě modifikovanou mříží se mi nepodařilo úspěšně aplikovat.



## 10. Zhodnocení výsledků

Pro různé úrovně přidaného šumu v hodnotách  $\sigma = 5, 10, 15$ , které jsem aplikoval na dva testovací snímky, *Lena* a *Kameraman*. Ke zbylé dvojici snímků jsem žádný šum nepřidával. Všechny výsledné snímky budou součástí CD odevzdaného spolu s touto prací. Testovací snímky jsem vybral záměrně každý jiný, s rozdílnými konturami a pořízené za velmi specifických světelných podmínek. *Kameraman* je klasický testovací obrázek. Jsou zde ostré přechody a silueta člověka, na které se dá pozorovat, jak se daná transformace vypořádá s ostrými přechody a liniemi. Obrázek *Lena* je lidský obličej zblízka. Na snímku je mnoho rozdílných tvarů. Astronomický snímek (Obrázek 18c - *Hvezda*) je specifický tím, že jde o klasický výstup z astrologického dalekohledu. Při pořizování se používají dlouhé expoziční časy, a tak je zde dostatek prostoru pro akumulaci značného množství šumu. Také je zde skoková změna jasu. Snímek je převážně šedočerný, ale vystupující hvězdy tuto monotonii značně narušují. Velké množství obrazových transformací se zaměřuje právě na redukci šumu fotek z vesmíru. Poslední fotka je barvená (Obrázek 18d) označená jako *Kone*. Zařadil jsem ji pro porovnání se snímky v odstínech šedi. Fotografie je pořízena za špatných světelných podmínek. Respektive není zde žádný výrazný zdroj světla. Tento fakt a nedostatek výrazných hran má velmi důležitý význam ve zpracování šumu.

Tabulka 1. Srovnání jednotlivých metod pro obrázek *Cameraman.tif*

$\sigma = 5$	metoda						vlastní [o=128]**	
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*			shearlet
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	93,3	66,35	258,64	92,32	76,43	61,72	236,77	59,45
PSNR [dB]	4,36	5,84	-0,06	4,41	5,23	6,16	0,32	6,32
SSIM	0,72	0,75	0,62	0,74	0,77	0,77	0,68	0,85

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Tabulka 2. Snímek *Cameraman.tif* a přidaný šum o hodnotě  $\sigma = 10$ .

$\sigma = 10$	metoda						vlastní [o=128]**	
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*			shearlet
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	200,39	178,96	352,69	191,21	191,47	189,56	326,78	118,54
PSNR [dB]	1,05	1,53	-1,41	1,24	1,24	1,29	-1,07	3,33
SSIM	0,52	0,53	0,45	0,53	0,54	0,53	0,49	0,72

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Tabulka 3. Snímek *Cameraman.tif* a přidaný šum o hodnotě  $\sigma = 15$ .

$\sigma = 15$	metoda							vlastní [o=128]**
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	348,20	350,46	491,19	339,51	355,11	385,11	492,82	212,8
PSNR [dB]	-1,35	-1,38	-2,85	-1,24	-1,44	-1,79	-2,86	0,79
SSIM	0,38	0,39	0,33	0,41	0,39	0,4	0,37	0,64

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Soubor tří tabulek číselně shrnuje výsledky získané aplikací vybraných transformací na snímek *Kameraman* při rozdílné úrovni přidaného šumu. Dle očekávání s rostoucí hodnotou šumu klesají všechny ukazatele kvality snímku, PSNR, MSE tak i SSIM. Pro ilustraci přikládám i výsledné snímky některých transformací při  $\sigma = 10$ .



a)



b)



c)



d)

Obrázek 30. Výsledné snímky po aplikaci transformací.

Na snímku 30. a) je vstupní snímek. Obrázky 30. b), c), d) jsou výstupy od nejhoršího výsledku (ridgelet), přes countourlet transformaci s měkkým prahováním, až po numericky nejlepší transformaci, obrázek d) bráno dle SSIM, a to vlastní pokus o odšumování. Už při relativně malé hodnotě  $\sigma = 10$ , jsou výsledky napříč transformacemi veliké. Ridgelet a shearlet transformace dopadly ve všech třech testech nejhůře. Přičítám to tomu, že se mi nepodařilo ridgelet transformaci naprogramovat přesně dle uvedeného postupu. Zajímavé však je, že curvelet transformace, která z ridgelet transformace vychází, si tak špatně nevedla. U shearlet transformace jsem asi použil nesprávné frekvenční dělení, a nepodařilo se mi tak lépe vyfiltrout vyšší frekvence od těch nižších.

V následujícím odstavci prezentuji výsledky dosažené na snímku *Lena*, znovu pro tři varianty  $\sigma$ .

Tabulka 4. Srovnání jednotlivých metod pro obrázek *Lena.png*

$\sigma = 5$	metoda							
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	vlastní [o=128]**
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	49,89	46,81	81,56	45,42	55,77	54,2	71,66	52,22
PSNR [dB]	7,09	7,36	4,95	7,49	6,6	6,75	5,51	6,88
SSIM	0,92	0,92	0,91	0,93	0,92	0,93	0,92	0,85

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Tabulka 5. Snímek *Lena.png* a přidaný šum o hodnotě  $\sigma = 10$ .

$\sigma = 10$	metoda							
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	vlastní [o=128]**
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	141,44	152,42	165,86	143,45	154,4	183,26	182,58	104,91
PSNR [dB]	2,56	2,23	1,86	2,5	2,18	1,43	1,45	3,86
SSIM	0,81	0,79	0,8	0,81	0,81	0,8	0,79	0,88

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Tabulka 6. Snímek *Lena.png* a přidáný šum o hodnotě  $\sigma = 15$ .

$\sigma = 15$	metoda							
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	vlastní [o=128]**
práh	soft	hard			soft	hard		
MSE	282,6	321,09	302,78	305,91	305,05	396,9	366,45	187,45
PSNR [dB]	-0,44	-1	-0,74	-0,79	-0,77	-1,92	-1,57	1,33
SSIM	0,69	0,66	0,69	0,69	0,69	0,67	0,66	0,82

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 bodů.

Zajímavé je zjištění, že s tím jak se zvětšily rozměry obrázku z 256 x 256 pixelů na 512 x 512 bodů se zlepšily i numerické výsledky všech transformací, jak dokládají tabulky 3 až 6. Pro porovnání nejhorší shearlet transformace u snímku *Kameraman* s  $\sigma = 15$  mělo SSIM hodnotu 0,37 u obrázku *Lena* je hodnota rovna 0,66. Což je skoro dvojnásobek. Obecně se výsledky více vyrovnaly. Pro vizuální srovnání přidávám čtveřici výstupních signálů.



a)



b)



c)



d)

Obrázek 31. Výsledné snímky *Lena* po aplikaci transformací.

Už na první pohled je vidět že všechny transformace dosahují stejného vizuálního výsledku, při rozptylu šumu  $\sigma = 10$ . Obrázek 31 a) je referenční snímek. Obrázky b), c), d), jsou výstupy curvelet, wavelet s hard prahováním respektive contourlet transformace také s tvrdým prahováním. Všechny tyto transformace mají stejné hodnoty SSIM a to 0,8. I když se mi osobně zdá, že výsledek d) je ze všech nejlepší. Dobré je povšimnout si, jak hodnoty MSE i PSNR jsou i těchto snímků rozdílné. Proto je vždy lepší mít více vyhodnocovacích metrik a nespoléhat pouze na jednu variantu.

Tyto dva snímky jsem však měl pouze pro testování, kdy jsem zvolený rozptyl šumu uměle ke snímku přičetl. Šum měl Gaussovské rozložení a byl po celém snímku rovnoměrně rozložen. V reálných podmínkách tomu tak málo kdy je a teprve na těchto snímcích se ukáže praktický přínos té, či oné metody. Jako první exemplář reálné scény jsem si vybral snímek s názvem *Kone*. Je velmi málo osvětlen a nejsou v něm výraznější hrany a zdroj světla. Byl focen po západu slunce klasickým automatickým fotoaparátem Olympus *fe*. Snímek jsem si nejprve z prostoru RGB převedl do Ycbr, abych oddělil jasovou a barevnou složku. Na každou část jsem aplikoval danou metodu a obrázek zpětně složil. Po prohlédnutí výsledků jsem se rozhodl, že do výsledků zanesu hodnoty měřené pouze na jasové složce *Y*. Vedla mě skutečnost, že odchylka jak MSE tak SSIM byla u barevného kanálu vždy okolo hodnoty 1/10 jasové složky. Při pohledu na výsledky v tabulce 7. je vidět, jak málo se výsledný obrázek liší od vstupního.

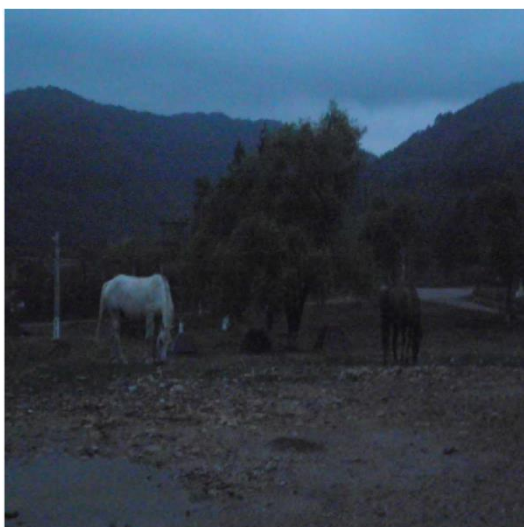
Tabulka 7. Výsledné numerické hodnoty u snímku *Kone.jpg*

	metoda								
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	vlastní [o=128]**	vlastní [o=512]**
práh	soft	hard			soft	hard			
MSE	0,56	0,26	1,13	0,27	1,75	1,38	1,85	7,59	1,83
PSNR [dB]	21,67	21,61	21,7	29,74	21,71	21,7	21,71	21,73	21,71
SSIM	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,96	0,99

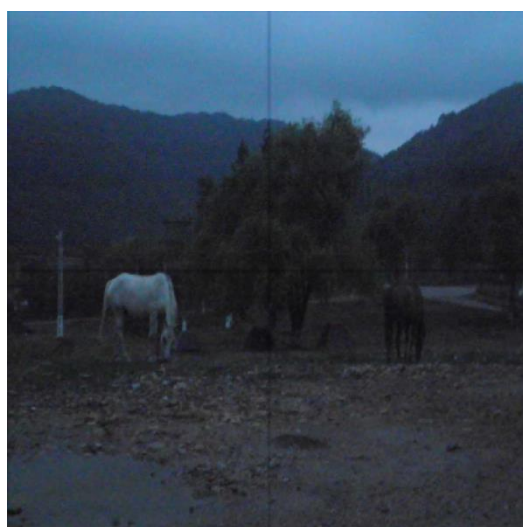
\* Hodnota *J* značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 respektive 512 x 512 bodů

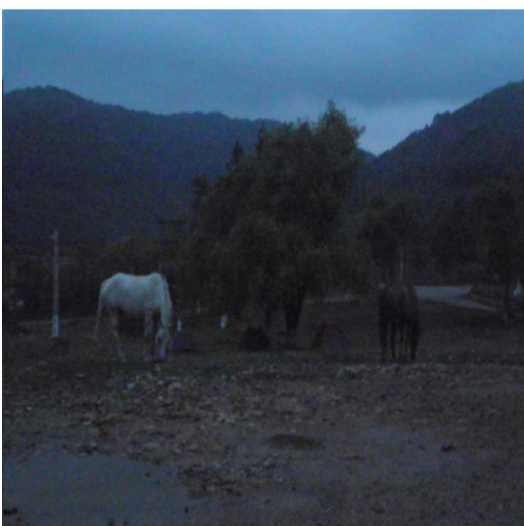
Hodnota SSIM, je až na jednu výjimku, vždy rovna 0,99. Tou výjimkou je návrh vlastní transformace s oknem 128 x 128. Tam je hodnota SSIM 0,96, ale to je způsobeno rušivou mozaikou, než vylepšením snímku. Pro názornou ukázkou výsledků opět přikládám foto dokumentaci.



a)



b)



c)



d)

Obrázek 32. Snímky po průchodu transformacemi

Ač všechny snímky (32) vypadají jako jeden totožný, ve skutečnosti jde o výstupy transformací b) – vlastní s oknem 512 x 512; c) – curvelet a d) – ridgelet. Ani jedna z transformací se s nedostatkem světla a ostrých přechodů nedokázala vypořádat. Toto je důležité zjištění. Všechny mé metody potřebují mít ve snímku aspoň nějaké ostré hrany a výrazné zdroje světla.

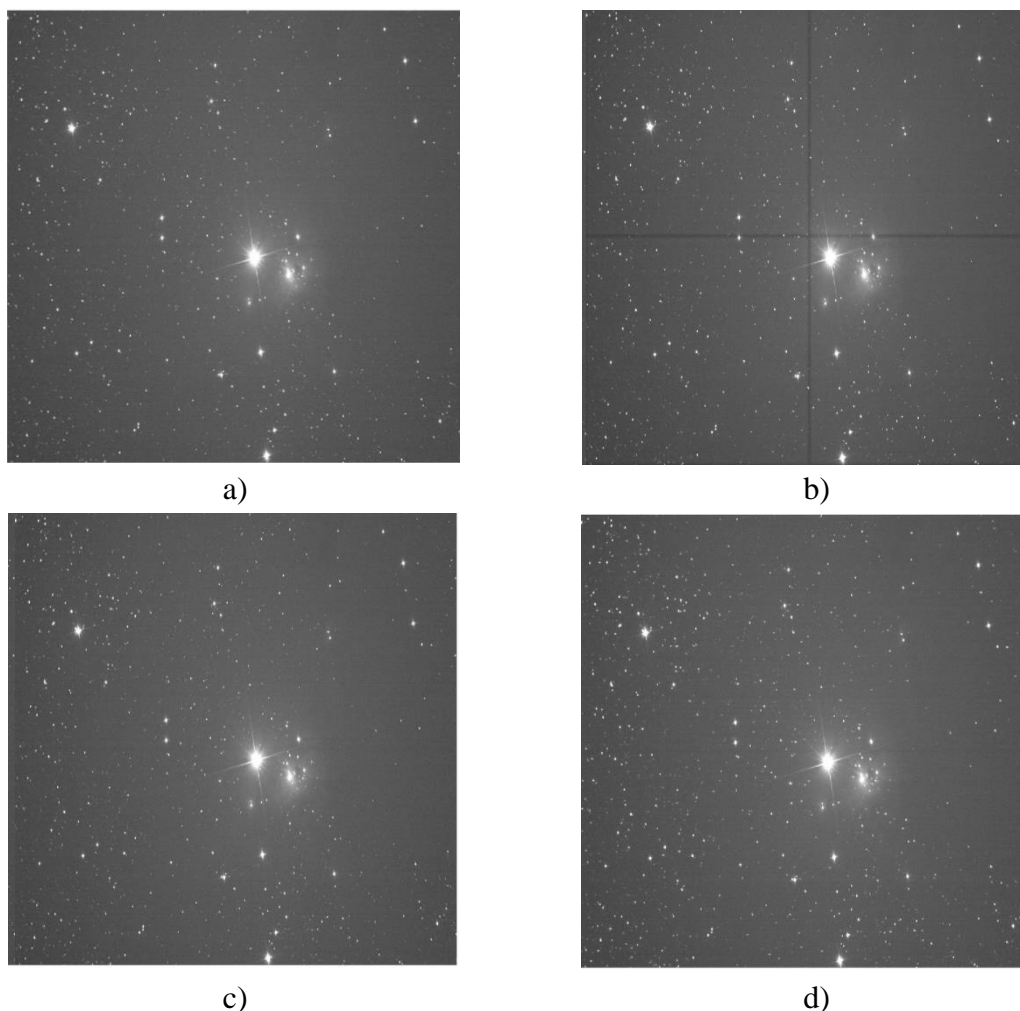
Tabulka 8. Výsledné numerické hodnoty u snímku *Hvezda.jpg*

	metoda								
	wavelet [J=3]* vlnka - bior3.9		ridgelet	curvelet	contourlet [J=2]*		shearlet	vlastní [o=128]**	vlastní [o=512]**
práh	soft	hard			soft	hard			
MSE	4,03	2,037	19,86	3,63	5,56	2,59	18,16	12,58	3,53
PSNR [dB]	18,01	20,95	11,08	18,45	15,53	19,92	11,47	13,06	18,58
SSIM	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,94	0,99

\* Hodnota  $J$  značí počet stupňů dekompozice.

\*\* Odpovídá velikosti okna o velikosti 128 x 128 respektive 512 x 512 bodů

U snímku *Hvezda.jpg* vyšlo výsledné vyhodnocení o něco lépe. I vizuálně se snímky zdají být „lepší“. Hodnoty SSIM jsou stále velmi blízké jedné, což značí téměř naprostou shodu, ale hodnota MSE vzrostla.



Obrázek 33. Astronomické snímky

Na obrázku (Obrázek 33.) výsledné fotografie. Zleva originál a vlastní transformace, ve spodní řadě jsou výstupy curvelet a shearlet transformace. Bohužel na těchto malých

obrázcích není rozdíl viditelný. Avšak na CD přiloženém k této práci budou snímky v plném rozlišení a budou tak více zřetelné odlišnosti mezi transformacemi. Při hlubším zkoumání snímků je patrné, že hvězdy jsou jasnější.



## 11. Závěr

Použití směrových víceměřítkových transformací má široké spektrum využití v oblasti zpracování obrazu. V této práci jsem se zaměřil zejména na redukci šumu. Všechny uvedené transformace mají společný cíl, vylepšit nějakým způsobem degradovaný obraz. Ridgelet, curvelet, contourlet a shearlet, to jsou názvy transformací, které do jisté míry z vlnkové transformace vychází. Jsou zaměřeny na lepší extrakci a reprezentaci vlastností signálu. Vhodnou úpravou koeficientů daných transformací je možné docílit kvalitativnímu zlepšení výsledného snímku. V kapitole 4.3 Odstranění šumu je tato úprava koeficientů zmíněna. Samozřejmě je možné, neopatrnou úpravou koeficientů, snímek také degradovat. S tím souvisí vznik artefaktů v obrázku.

Všechny zmíněné transformace jsou detailně popsány. Jsou zmíněny nejen jejich vlastnosti, ale také postup jak takovou transformaci vytvořit. Aby bylo možné rozhodnout, která transformace podává lepší výsledky při redukci šumu v obraze, bylo nutné se zmínit o objektivních metrikách vyhodnocování. Lidské oko však vnímá podněty různě, a tak je možné že se nám vizuálně líbí fotografie, která má horší numerické výsledky. Proto je vhodné korelovat výsledky dosaženého měření se subjektivními hodnoceními.

Při samotné realizaci transformací v prostředí Matlab, jsem se musel vypořádat s mnoha překážkami, které se v teoretickém rozboru problémem nejevily. Hned první problém se vyskytl u ridgelet transformace. Kde jsem po dodržení postupu pospaného v teoretické části, nedostal snímek s redukováným šumem. Náhlý problém jsem se snažil citlivě vyřešit, tak abych nenarušil vlastnosti této metody. Výsledek je možné zhlédnout v tabulkách 1 až 8, nebo na snímcích pod tabulkami. Součástí CD dodaného s touto prací budou i výsledné snímky v plné velikosti a rozlišení. U contourlet transformace je v teoretickém rozboru zmíněna směrová banka filtrů. Možností jak takovou banku vytvořit je vícero. Já jsem vybral komplexní vlnkovou transformaci, která oproti klasické vlnkové transformaci, přináší rozlišení šesti směrů, oproti třem směrům. Takovýchto možných variant jednoho problému jsem využil u shearlet transformace. Teoretický rozbor ukazuje jaké stavební bloky dát k sobě dohromady. Praktická realizace nabízí vícero možností. Při programování jednotlivých metod jsem si všiml výborných výsledků komplexní vlnkové transformace. Naprogramoval jsem proto vlastní metodu odstranění šumu a přidal jsem ji k ostatním metodám.

Testování transformací probíhalo na čtveřici snímků o třech různých velikostech obrazu. Důležitou podmínkou bylo dodržení rozměrů vstupního snímku. Snímek musí být čtverec s délkou hrany  $2^N$ , kde  $N$  je celé číslo. Tato podmínka je dána převody mezi souřadnicovými soustavami. Tři testovací fotografie jsou černobílé a jedna je barevná. Zajímavým výstupem měření byl fakt, že s větším rozlišením vstupního signálu se zlepšovaly odšumovací vlastnosti všech fotografií. Toto dokládá porovnání tabulky 2. a tabulky 3. Obecně, numericky nejhůře dopadla shearlet transformace. To příkládám faktu, že jsem nevhodně dělil frekvenční spektrum a tím došlo ke špatné separaci vyšších a nižších frekvencí. Nejlépe dopadla má metoda. U této metody je však problém s rušivou čtvercovou mozaikou, která se do obrazu dostane. Porovnáním výsledků dosažených u reálných a testovacích snímků, ke kterým jsem přidával šum o dané směrodatné odchylce, je zřejmé, že pokud ve snímku nejsou výrazné hrany, či přechody a je v obrázku nedostatek výrazných světelných zdrojů, odšumování selhává. Všechny transformace najdou uplatnění v oblasti astronomických snímků, kde jsou výrazné zdroje světla.

## 12. Použitá literatura

- [1] MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2nd ed. San Diego, USA: AcademicPress, 1999. 637 s. ISBN 012466606X.
- [2] Kozumplík J., *Vlnkové transformace a jejich využití pro filtraci signálu EKG*, VUTIUM, 2005, 28 s., ISSN 1213-418X. Dostupné online z: <http://www.vutium.vutbr.cz/tituly/pdf/ukazka/80-214-3045-1.pdf>
- [3] Šmíd R., *Úvod do vlnkové transformace*, ČVUT FEL katedra měření, Praha, 2001, 9 s. Dostupné online z: <http://measure.feld.cvut.cz/groups/diag/download/Wavelet-intro8859.pdf>
- [4] Shadi A. a spol., *Multiresolution Analysis Using Wavelet, Ridgelet, and Curvelet Transforms for Medical Image Segmentation*, Brunel University, London, 2011, 18 s. Dostupné online z: <http://www.hindawi.com/journals/ijbi/2011/136034/>
- [5] E. J. Candès, *Harmonic analysis of neural networks*, Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 6, str. 197–218, 1999.
- [6] Starck., *The Curvelet Transform for Image Denoising*, IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, Vol. 11, No. 6, Červen 2002, str. 670 – 684. Dostupné online z: <http://authors.library.caltech.edu/1381/1/STAieetip02.pdf>
- [7] Mallat, *Mallat's fast wavelet algorithm: RECURSIVE COMPUTATION OF CONTINUOUS-TIME WAVELET COEFFICIENTS*. Dostupné online z: <http://web.eecs.umich.edu/~aey/eecs551/lectures/mallat.pdf>
- [8] D. L. Donoho, “Fast ridgelet transforms in dimension 2,” Stanford Univ., Dept. Statist., Stanford, CA, Tech. Rep., 1997
- [9] Do, M.N. *The Contourlet Transform: An Efficient Directional Multiresolution Image representation*. 2005. [cit. 12.11.2013] DOI: 10.1109/TIP.2005.859376. Dostupné online z: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1532309>
- [10] Malý P.: *Optika*, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 2008, str. 209

- [11] Nakamura J.: *IMAGE SENSORS and SIGNAL PROCESSING for DIGITAL STILL CAMERAS*, CRC Press, 2005, str. 350
- [12] KUTYNIOK, GITTA A DEMETRIO LABATE. *MINI-WORKSHOP: SHEARLETS*. Oberwolfach Reports. s. 2573-2611. DOI: 10.4171/OWR/2010/44.
- [13] Qianq G. a spol., *Shearlet-Based Image Denoising Using Bivariate Shrinkage with Intra-band and Opposite Orientation Dependencies*, Shanghai University, 2009, 4.s
- [14] WANG, Z.; BOVIK, A. C.; SHEIKH, H. R.; SIMONCELLI, E. P. *Image Quality assessment: From error visibility to structural similarity*. IEEE. Trans. Image Process., vol. 13, no. 4, pp. 600-612, Apr. 2004 [Online]. [cit.12.10.2013]. Dostupné online z: <http://ece.uwaterloo.ca/~z70wang/research/ssim/>
- [15] National Instruments, *Picture Quality Analysis: Real-Time Measurements for Objective Video Quality*, [online]. 2012 [cit.5.5.2014]. Dostupné online z: <http://www.ni.com/white-paper/12703/en/>
- [16] STARCK, Jean-Luc; Fionn MURTAGH a Jalal M. FIDILI. *Sparse Image Signal Processing: Wavelets, Curvelets, Morphological Diversity* Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 336 s. ISBN 9780521119139.
- [17] AVERBUCH, Amir; Ronald COIFMAN; David DONOHO; Moshe ISRAELI a Johan WALDÉN. *The pseudopolar FFT and its application*. 1999. Dostupné online z: <http://cpse.yale.edu/sites/default/files/files/tr1178.pdf>
- [18] STARCK, Jean-Luc; Fionn MURTAGH. *Astronomical Image and Data Analysis*. 2. vydání. Springer: Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006. 360s. ISBN-10 3-540-33024-0

- [19] STARCK, Jean-Luc; Jalal FADILI a Fionn MURTAGH. *The Undecimated Wavelet Decomposition and its Reconstruction*. [online]. 2007  
[cit. 2014-5-5]. DOI: 10.1109/TIP.2006.887733. Dostupné online z:  
<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=4060954>
- [20] Do, M.N. ; Vetterli, M. *Framing Pyramids*, [online]. 2003. [cit 5.5.2014].  
DOI: 10.1109/TSP.2003.815389. Dostupné online z:  
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1223545>
- [21] Selesnick, I.W., Baraniuk, R.G., Kingsbury, N.C. *The dual-tree complex wavelet transform*, [online] 2005. [cit 6.5.2014]. DOI: 10.1109/MSP.2005.1550194.  
Dostupné online z:  
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1550194>
- [22] Kutyniok G., Lim Q. W., Zhuang X. *Digital Shearlet Transform* [online] 2011.  
[cit. 7.5.2014] Dostupné online z: <http://arxiv.org/abs/1108.0454>
- [23] Skála P., *Soukromá fotografie*