

Bakalárska práca



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra fyziky

Rozklad tvaru kmitu osovo symetrického akustického meniča do rady Gaussových funkcí

Multiple-Gaussian-Function Expansion of the Vibration
Pattern of an Axisymmetric Acoustic Transducer

Adam Beňo

Kybernetika a Robotika
benoadam@fel.cvut.cz

December 2013

Vedúci práce: Ing. Milan Červenka, Ph.D.

Pod'akovanie / Prehlásenie

Rád by som touto cestou vyjadril pod'akovanie Ing. Milanovi Červenkovi, Ph.D. za jeho cenné rady, čas a trpezlivosť pri vedení mojej bakalárskej práce. Tiež by som rád pod'akoval svojim rodičom, nielen za materiálnu, ale aj za psychickú podporu počas celej dĺžky môjho štúdia.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne a použil som len podklady (literatúru, projekty, SW a pod.) uvedené v priloženom zozname.

Abstrakt / Abstract

Cieľom mojej bakalárskej práce je navrhnúť a vytvoriť program v jazyku C++ pre rozklad funkcie, ktorá popisuje tvar kmitu rovinného, osovo symetrického akustického meniču do radu Gaussových funkcií a pre zvolené distribúcie nájsť koeficienty tohoto rozkladu. Na nájdenie koeficientov rozkladu využívam variantu heuristického algoritmu typu „Evolučné stratégie“ pri ktorom na vykonávanie čiastkových numerických výpočtov využívam funkcie z knižnice Numerical Recipes.

The goal of this Bachelor's thesis is to design and implement a program in C++ for decomposition of a function into series of Gaussian functions and to find coefficients of this expansion. Function describes a shape of planar, axisymmetric acoustic transducer. To find the coefficients of the decomposition, the „Evolution strategy“ variant of the heuristic algorithm is used, applying functions from the Numerical Recipes library for the partial mathematical calculations.

Obsah /

1 Fyzikálny popis problému1	
1.1 Helmholtzova rovnica.....1	
1.2 Reyleighov integrál.....2	
1.3 Fresnelova aproximácia v Reyleighovom integrále.....3	
1.4 Aproximácia radou Gausso- vých funkcií.....4	
1.5 Výpočet koeficientov Gaus- sových funkcií.....4	
2 Optimalizácia6	
2.1 Úvod.....6	
2.2 Numerické výpočtové techniky ..7	
2.3 Enumeratívne algoritmy.....7	
2.4 Deterministické algoritmy.....7	
2.5 Stochastické algoritmy.....8	
2.6 Kombinované algoritmy.....8	
3 Evolučné algoritmy 10	
3.1 Úvod..... 10	
3.2 Základná terminológia..... 11	
3.2.1 Jedinec..... 11	
3.2.2 Populácia..... 12	
3.2.3 Generácia..... 12	
3.2.4 Evolúcia..... 12	
3.3 Spoločné rysy..... 12	
3.4 Varianty evolučných algorit- mov..... 13	
3.4.1 Gradientný algoritmus... 13	
3.4.2 Simulované žihanie..... 14	
4 Implementácia riešenia pomo- cou evolučných stratégií 15	
4.1 Všeobecný popis..... 15	
4.2 Reprezentácia funkcie..... 15	
4.2.1 Prvý spôsob riešenia..... 15	
4.2.2 Druhý spôsob riešenia ... 16	
4.3 Reprezentácia algoritmu..... 17	
4.3.1 Kríženie..... 17	
4.3.2 Implementácia straté- gie $(\mu, \lambda) - ES$ 18	
4.3.3 Implementácia straté- gie $(\mu + \lambda) - ES$ 21	
5 Rozklad 23	
5.1 Popis programu..... 23	
5.2 Popis rozkladu..... 24	
5.3 Rozklad $f(x) = 1 - x^2H(1-r)$. 25	
5.3.1 Dimenzia $n=24$ 25	
5.3.2 Dimenzia $n=32$ 26	
5.3.3 Dimenzia= 40 27	
5.4 Rozklad $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot$ $H(1 - r)$ 29	
5.4.1 Dimenzia= 24 29	
5.4.2 Dimenzia $n=32$ 30	
5.4.3 Dimenzia $n=40$ 31	
5.5 Rozklad $f(x) = H(1 - x)$ 32	
5.5.1 Dimenzia $n=24$ 32	
5.5.2 Dimenzia $n=32$ 33	
5.5.3 Dimenzia $n=40$ 35	
5.6 Rozklad $f(x) = e^{-x^8}$ 36	
5.6.1 Dimenzia $n=24$ 36	
5.6.2 Dimenzia $n=32$ 37	
5.6.3 Dimenzia $n=40$ 39	
5.7 Rozklad $f(x) = e^{-x^{16}}$ 40	
5.7.1 Dimenzia $n=24$ 40	
5.7.2 Dimenzia $n=32$ 41	
5.7.3 Dimenzia $n=40$ 42	
5.8 Rozklad $f(x) = e^{-x^{32}}$ 43	
5.8.1 Dimenzia $n=40$ 43	
5.9 Záver..... 45	
Literatura 46	

Tabuľky / Obrázky

<p>4.1. Parametre $(\mu, \lambda) - ES$ 21</p> <p>4.2. Parametre $(\mu, \lambda) - ES$ 22</p> <p>5.1. Parametre $(\mu, \lambda) - ES$ 24</p> <p>5.2. Koeficienty $f(x) = 1 - x^2 H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 25</p> <p>5.3. Koeficienty $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=32$ 27</p> <p>5.4. Koeficienty $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=40$ 28</p> <p>5.5. Koeficienty $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 29</p> <p>5.6. Koeficienty $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n = 32$ 30</p> <p>5.7. Koeficienty $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=32$ 31</p> <p>5.8. Koeficienty $f(x) = H(1-x)q$ dimenzia $n=24$ 33</p> <p>5.9. Koeficienty $f(x) = H(1-x)$ dimenzia $n=32$ 34</p> <p>5.10. Koeficienty $f(x) = H(1-r)$ dimenzia $n=40$ 35</p> <p>5.11. Koeficienty $f(x) = e^{-x^8}$ dimenzia $n=24$ 36</p> <p>5.12. Koeficienty $f(x) = e^{-x^8}$ dimenzia $n=32$ 38</p> <p>5.13. Koeficienty $f(x) = e^{-x^8}$ dimenzia $n=40$ 39</p> <p>5.14. Koeficienty 40</p> <p>5.15. Koeficienty $f(x) = e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=40$ 41</p> <p>5.16. Koeficienty $f(x) = e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=40$ 42</p> <p>5.17. Koeficienty $f(x) = e^{-x^{32}}$ dimenzia $n=40$ 44</p> <p>5.18. Záverečné parametre 45</p>	<p>1.1. Rayleighov integrál 2</p> <p>2.1. Nemecko 6</p> <p>2.2. Eratosthenovo sito 8</p> <p>3.1. Diagram evolučného algoritmu 11</p> <p>3.2. Horolezecký algoritmus 13</p> <p>3.3. Simulované žihanie 14</p> <p>4.1. Kríženie dvoch jedincov 18</p> <p>4.2. Rekombinácia bez rodičov 19</p> <p>4.3. Griewankova funkcia 20</p> <p>4.4. ES griewankova funkcia 20</p> <p>4.5. Rekombinácia s rodičmi 21</p> <p>4.6. ES keep griewankova funkcia .. 22</p> <p>5.1. Vívin hodnôt 24</p> <p>5.2. aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 26</p> <p>5.3. Vypočet integrálu $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=24$. 26</p> <p>5.4. aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=32$ 27</p> <p>5.5. Vypočet integrálu $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=32$. 27</p> <p>5.6. aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1-r)q$ dimenzia $n=40$ 28</p> <p>5.7. Vypočet integrálu $f(x) = 1 - x^2 H(1-r)$ dimenzia $n=40$. 28</p> <p>5.8. aproximácia $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 29</p> <p>5.9. Vypočet integrálu $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 30</p> <p>5.10. aproximácia $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n = 32$ 30</p> <p>5.11. Vypočet integrálu $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=32$ 31</p> <p>5.12. aproximácia $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=40$ 32</p> <p>5.13. Vypočet integrálu $f(x) = (1-x^2)^2 \cdot H(1-r)$ dimenzia $n=40$ 32</p> <p>5.14. aproximácia $f(x) = H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 33</p> <p>5.15. Vypočet integrálu $f(x) = H(1-r)$ dimenzia $n=24$ 33</p>
---	---

5.16.	aproximacia $f(x) = H(1 - r)$ dimenzia $n=32$	34
5.17.	Vypočet integralu $f(x) =$ $H(1 - r)$ dimenzia $n=32$	34
5.18.	aproximacia $f(x) = H(1 - r)$ dimenzia $n=40$	35
5.19.	Vypočet integralu $f(x) =$ $H(1 - r)$ dimenzia $n=40$	36
5.20.	aproximacia $f(x) = e^{-x^8}$ di- menzia $n=24$	37
5.21.	Vypočet integralu $f(x) =$ e^{-x^8} dimenzia $n=24$	37
5.22.	aproximacia $f(x) = e^{-x^8}$ di- menzia $n=32$	38
5.23.	Vypočet integralu $f(x) =$ e^{-x^8} dimenzia $n=32$	38
5.24.	aproximacia $f(x) = e^{-x^8}$ di- menzia $n=40$	39
5.25.	Vypočet integralu $f(x) =$ e^{-x^8} dimenzia $n=40$	40
5.26.	aproximacia $f(x) = e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=24$	40
5.27.	Vypočet integralu $f(x) =$ $e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=24$	41
5.28.	aproximacia $f(x) = e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=32$	42
5.29.	Vypočet integralu $f(x) =$ $e^{-x^{16}}$ dimenzia $n=32$	42
5.30.	aproximacia	43
5.31.	ES keep griewankova funkcia ..	43
5.32.	aproximacia $f(x) = e^{-x^{32}}$ dimenzia $n=40$	44
5.33.	Vypočet integralu $f(x) =$ $e^{-x^{32}}$ dimenzia $n=40$	44

Kapitola 1

Fyzikálny popis problému

1.1 Helmholtzova rovnica

Zvukové pole v tekutinách najčastejšie popisujeme pomocou akustického tlaku p' , ktorý je definovaný ako rozdiel celkového tlaku p a rovnovážneho tlaku p_0 , teda

$$p'(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) - p_0, \quad (1)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor daného bodu a t je čas. Aj keď rovnovážny tlak môže všeobecne závisieť na polohe a pomaly sa meniť s časom, na tomto mieste budeme predpokladať, že je konštantný.

K popisu šírenia zvukových vln v tekutinách používame vlnovú rovnicu, viď napr. [1–2], ktorá má tvar

$$\Delta p' = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}, \quad (2)$$

kde symbol Δ reprezentuje Laplaceov operátor a c_0 je rýchlosť zvuku. Rovnica (2) platí za predpokladu, že akustický tlak nadobúda len malé hodnoty v porovnaní s rovnovážnym tlakom,

$$\frac{|p'|}{p_0} \ll 1,$$

ďalej, že môžeme zanedbať disipáciu akustickej energie v dôsledku tepelnej vodivosti a viskozity a za predpokladu, že tekutinu, v ktorej sa zvuk šíri, môžeme považovať za homogénnu. Pre rýchlosť zvuku v ideálnom plyne môžeme napísať, viď napr. [1–2]

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad (3)$$

kde γ je adiabatický exponent a ρ_0 je rovnovážna hustota prostredia (plynu).

Pri popise zvuku hrajú veľmi dôležitú úlohu harmonické zvukové polia, kedy sa akustický tlak v čase mení harmonicky

$$p'(\mathbf{r}, t) = p'_0(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \phi(\mathbf{r})], \quad (4)$$

kde ω je kruhový kmitočet a $\phi(\mathbf{r})$ je fáza. Popis harmonických zvukových polí veľmi zjednodušuje zavedenie komplexných veličín – tzv. komplexorov. V prípade vzťahu (4) tak môžeme napísať

$$p'(\mathbf{r}, t) = \Re[\tilde{p}'(\mathbf{r}, t)], \quad \text{kde } \tilde{p}'(\mathbf{r}, t) = p'_0(\mathbf{r})e^{j[\omega t - \phi(\mathbf{r})]} = p'_0(\mathbf{r})e^{-j\phi(\mathbf{r})}e^{j\omega t} = \hat{p}'(\mathbf{r})e^{j\omega t}, \quad (5)$$

kde $\Re(\cdot)$ je reálna časť argumentu a

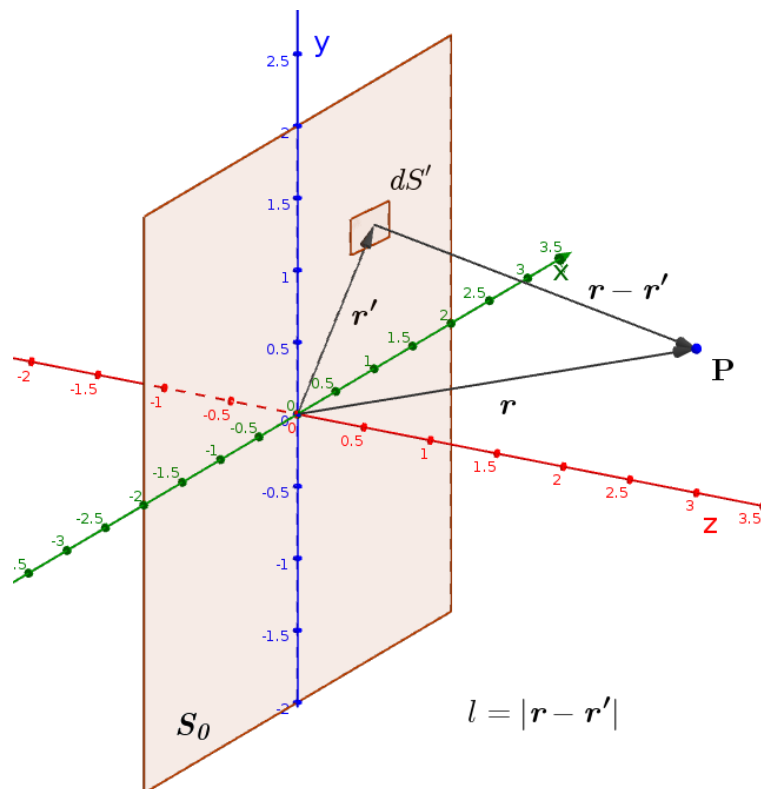
$$\hat{p}'(\mathbf{r}) = p'_0(\mathbf{r})e^{-j\phi(\mathbf{r})}$$

je tzv. fázor akustického tlaku. Ak dosadíme vzťah (5) do vlnovej rovnice (2), prejde do tvaru

$$\Delta \hat{p}' + k^2 \hat{p}' = 0, \quad (6)$$

kde $k = \omega/c_0$ je vlnové číslo. Rovnica (6) je tzv. Helmholtzova rovnica pre fázor akustického tlaku.

V technickej praxi sú najčastejšími zdrojmi zvuku vibrujúce objekty, nech už sa jedná o nežiadúci zvuk generovaný strojnými zariadeniami, alebo (žadúci) zvuk generovaný pomocou elektroakustických meničov. Výpočet zvukového poľa generovaného vibrujúcimi objektami je tak z technického hľadiska nesmierne praktickou, užitočnou a dôležitou úlohou. K tomuto účelu je možné použiť Helmholtzovu rovnicu spolu s príslušnými okrajovými podmienkami. Z matematického hľadiska sa jedná o veľmi komplikovanú úlohu, kedy sa riešenie Helmholtzovej rovnice hľadá pomocou numerických metód.



Obrázok 1.1. Obrázok k Rayleighovmu integrálu.

1.2 Rayleighov integrál

U niektorých jednoduchších úloh je možné hľadať riešenie Helmholtzovej rovnice výpočtom integrálu. Typickým príkladom je výpočet zvukového poľa generovaného rovinným kmitajúcim zdrojom (meničom) zasadeným do nekonečne tuhej steny vyžarujúcim do nekonečného polopriestoru, viď obrázok 1.1. Fázor akustického tlaku môžeme vypočítať pomocou tzv. Rayleighovo integrálu, viď napr. [1-2] v tvare

$$\hat{p}'(x, y, z) = \frac{jk\rho_0c_0}{2\pi} \int \int_{S_0} \hat{v}_n(x', y') \frac{e^{-jkl}}{l} dx' dy', \quad (7)$$

kde \hat{v}_n reprezentuje fázor normálovej zložky vektoru rýchlosti kmitania zdroja, S_0 jeho povrch a

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \quad (8)$$

je vzdialenosť medzi plošným elementom zdroja $dS' = dx'dy'$, ležiacom na súradnici $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ a bodom $\mathbf{r} = (x, y, z)$, v ktorom je zvukové pole počítané.

Presné analytické riešenie integrálu (7) je známe napríklad pre zvukové pole v osi kruhového piestovo kmitajúceho meniča o polomere a , pre ktorého fázor rýchlosti kmitania môžeme písať

$$\hat{v}_n(x, y) = \begin{cases} v_{0n} & \text{pre } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{pre } \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases}$$

Pre amplitúdu akustického tlaku $p'_0 = |\hat{p}'|$ môžeme nájsť riešenie, viď [1], v tvare

$$p'_0 = 2\rho_0 c_0 v_{0n} \left| \sin \frac{k\sqrt{a^2 + z^2} - kz}{2} \right|. \quad (9)$$

1.3 Fresnelova aproximácia v Reyleighovom integrále

Analytické riešenie integrálu (7) je známe len pre niekoľko jednoduchých prípadov. Z tohto dôvodu pre všeobecné použitie pristupujeme k jeho aproximácii. V tzv. Fresnelovej aproximácii, viď napr. [3], aproximujeme v argumente exponenciály vzdialenosť (8) pomocou vzťahu

$$\begin{aligned} l &= z\sqrt{1 + \left(\frac{x - x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z}\right)^2} = \\ &= z \left[1 + \frac{(x - x')^2}{2z^2} + \frac{(y - y')^2}{2z^2} + \dots \right] \approx z + \frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z}, \end{aligned} \quad (10)$$

kde bol použitý Taylorov rozvoj

$$\sqrt{1 + b} = 1 + \frac{b}{2} + \dots,$$

z ktorého boli zachované len prvé dva členy. Je teda zrejmé, že Fresnelova aproximácia je použiteľná len za predpokladu, že platí

$$\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{z^2} \ll 1.$$

Táto táto podmienka je teda najlepšie splnená vo väčšej vzdialenosti od zdroja zvuku a blízko jeho osi.

V rámci Fresnelovej aproximácie aproximujeme vzdialenosť l v menovateli integrálu (7) vzťahom $l \approx z$, ktorý je opäť dobre splnený vo väčších vzdialenostiach od zdroja a blízko jeho osi. Dosadením príslušných aproximácií do vzťahu (7) teda dostaneme

$$\hat{p}'(x, y, z) = \frac{jk\rho_0 c_0 e^{-jkz}}{2\pi z} \int \int_{S_0} \hat{v}_n(x', y') \exp \left\{ -jk \left[\frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z} \right] \right\} dx' dy'. \quad (11)$$

Integrál (11) nachádza v akustike použitie v prípadoch, keď platí $ka_{ef} \gg 1$, kde a_{ef} je efektívny polomer meniča, kedy zvukové pole je veľmi smerové, je sústredené v blízkosti osi zdroja a tvorí tzv. zvukový zväzok.

1.4 Aproximácia radou Gaussových funkcií

Integrál (11) je možné vypočítať analyticky za predpokladu, že fázor rýchlosti kmitania zdroja má kruhovú symetriu, teda

$$\hat{v}_n(x, y) = \hat{v}_n(\sqrt{x^2 + y^2}) = \hat{v}_n(r)$$

a že ho podľa [4–5] aproximujeme radou Gaussových funkcií

$$\hat{v}_n(r) \approx v_{0n}g(r), \quad \text{kde } g(r) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-B_i r^2/a^2}, \quad (12)$$

kde a je polomer zdroja, koeficienty A_i a B_i sú komplexné čísla a $\Re(B_i) \geq 0$.

Dosadením vzťahu (12) do integrálu (11) dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{p}'(x, y, z) &= \frac{jk\rho_0 c_0 v_{0n} e^{-jkz}}{2\pi z} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N A_i e^{-B_i(x'^2+y'^2)/a^2} \exp\left\{-jk\left[\frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}\right]\right\} dx' dy' = \\ &= \frac{jk\rho_0 c_0 v_{0n} e^{-jkz}}{2\pi z} \sum_{i=1}^N A_i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{B_i x'^2}{a^2} - jk\frac{(x-x')^2}{2z}\right] dx' \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{B_i y'^2}{a^2} - jk\frac{(y-y')^2}{2z}\right] dy'. \quad (13) \end{aligned}$$

Pretože platí ¹⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{B_i x'^2}{a^2} - jk\frac{(x-x')^2}{2z}\right] dx' = a\sqrt{\frac{2\pi z}{2B_i z + jka^2}} \exp\left(\frac{-jkB_i x^2}{2B_i z + jka^2}\right),$$

môžeme vzorec (13) prepísať do tvaru

$$\hat{p}'(x, y, z) = jka^2 \rho_0 c_0 v_{0n} e^{-jkz} \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{2B_i z + jka^2} \exp\left[-\frac{jkB_i(x^2 + y^2)}{2B_i z + jka^2}\right]. \quad (14)$$

Vzťah (14) predstavuje približný analytický vzorec pre výpočet fázoru akustického tlaku vyžarovaného osovo symetrickým zdrojom, ktorého platnosť je podmienená platnosťou predpokladov Fresnelovej aproximácie. Aby tento vzorec bolo možné používať, je potrebné pre dané rozloženie fázoru rýchlosti kmitania zdroja zvuku vypočítať príslušné koeficienty A_i , B_i .

1.5 Výpočet koeficientov Gaussových funkcií

Za účelom nájdenia koeficientov A_i , B_i najskôr funkciu popisujúcu fázor rýchlosti kmitania zdroja znormujeme do tvaru

$$f(r) = \frac{\hat{v}_n(r/a)}{v_{0n}} \quad (15)$$

¹⁾ Integrál bol vypočítaný za pomoci programu Maple.

a koeficienty A_i , B_i budeme hľadať tak, aby platilo

$$f(r) \approx \sum_{i=1}^N A_i e^{-B_i r^2} \quad (16)$$

pre dané N . Tohto môžeme dosiahnuť, viď [4], minimalizáciou funkcie

$$Q = Q(A_1, B_1, \dots, A_N, B_N) = \int_0^\infty \left| f(r) - \sum_{i=1}^N A_i e^{-B_i r^2} \right|^2 dr, \quad (17)$$

keďže funkcia $f(r)$ spravidla nadobúda nenulové hodnoty na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a Gaussove funkcie pre $\Re(B_i) > 0$ rýchlo konvergujú k nule, stačí hornú hranicu integrálu obmedziť na nejakú rozumnú hodnotu r_{max} . Hľadanie minima funkcie (17) predstavuje optimalizačný problém na $4N$ -dimenzionálnom priestore reálnych čísel.

Kapitola 2

Optimalizácia

2.1 Úvod

V technickej a vedeckej praxi sa mnohokrát stretávame s problémami, v ktorých je potrebné nájsť najvhodnejšie riešenie z množstva rôznych možností. Ilustračným príkladom z technickej praxe môže byť napríklad nájdenie optimálnej cesty robota, najvhodnejšie nastavenie konštánt regulátora, či nastavenie parametrov rýchlosti výrobnjej linky. Problémy však nemusia byť len z čisto technickej oblasti. Rovnako v ekonómii sa často stretávame s úlohami, kde je potrebné nájsť vhodné parametre v závislosti na požadovanom výsledku. Ako príklad môžeme uviesť stanovenie ceny tovaru pri požiadavke maximálneho zisku, keď berieme do úvahy systémové parametre, napr. výrobná cena tovaru a odhadovaná kúpyschopnosť zákazníka. Asi najznámejším problémom v oblasti optimalizácie je problém obchodného cestujúceho, viď obrázok 2.1. Situáciu môžeme zdefinovať takto: Nech máme N miest a nech je z každého možnosť dostať sa do ľubovoľne iného priamo alebo cez iné mesto. Nech každá cesta medzi mestami má svoju hodnotu (číslo vyjadrujúce cenu, vzdialenosť, atď...). Naš cieľ je prejsť všetky mestá a vrátiť sa do východiskového bodu tak, aby výsledná suma hodnôt bola čo najnižšia.



Obrázok 2.1. Modrá čiara predstavuje optimálnu cestu navštívenia 15 najväčších miest v Nemecku. [6]

Všetky tieto úlohy je možné zdefinovať ako matematické problémy. Daný problém má väčšinou formu matematickej funkcie, ktorej optimalizácia vedie k nájdeniu argumentov optima a teda riešenia daného problému. Optimum problému môže pre nás predstavovať lokálny či globálny extrém funkcie. Spôsoby hľadania extrému môžeme rozdeliť do dvoch skupín, a to:

- analytické,
- numerické.

Prvá skupina, analytické riešenia, je v technickej praxi často nepoužiteľná, a to kôli svojej všeobecnosti a prílišnej zložitosti. Práve preto v praxi používame riešenia založené na numerických metódach.

2.2 Numerické výpočtové techniky

V dnešnej dobe, vďaka relatívnej dostupnosti výpočtovej sily, predstavujú numerické metódy silné a rýchlo sa rozvíjajúce odvetvie optimalizačných techník. Rozdeliť by sme ich mohli do troch základných skupín:

- enumeratívne,
- deterministické,
- stochastické.

2.3 Enumeratívne algoritmy

Enumeratívne algoritmy predstavujú síce najjednoduchší, no z hľadiska optimalizácie a časovej a výpočtovej náročnosti, najnevhodnejší postup. Algoritmus prehľadáva všetky možné stavy, ktoré môžu nastať a spomedzi nich vyberie najvhodnejší. Výhoda takéhoto algoritmu je, že nachádza konečné a najlepšie možné riešenie spomedzi všetkých daných. V praxi však nastávajú situácie, keď počet riešení nie je známy alebo je riešení tak astronomicky veľké číslo, že by výpočtový čas na súčasných prostriedkoch trval nezmyselne dlhú dobu (doba zániku slnečnej sústavy a pod...).

2.4 Deterministické algoritmy

Termínom **deterministický algoritmus** označujeme algoritmus postavený striktne na metódach klasickej matematiky. Algoritmus vždy vytvorí za rovnakých vstupných podmienok rovnaké výstupné hodnoty, a teda ho môžeme nazvať predvídateľný. Taktiež ho môžeme rozdeliť na jednotlivé kroky, pričom z každého kroku je vždy presne a jasne definovaný ďalší krok na základe predom danej podmienky. Formálne môžeme algoritmus zdefinovať ako matematickú funkciu, ktorá ma vždy konkrétnu funkčnú hodnotu (výstup algoritmu) pre dané argumenty (vstup algoritmu). Deterministické algoritmy, podobne ako algoritmy enumeratívne, vyžadujú značne obmedzené predpoklady na to, aby dosiahly efektívne výsledky. Niektoré z uvedených predpokladov sú:

- problém je lineárny,
- prehľadávaný priestor možných riešení je malý a súvislý,
- sú dostupné informácie o gradiente v danom bode,
- je k dispozícii analytická definícia problému.

Príkladom problému deterministického algoritmu je test prvočíselnosti pomocou *Eratosthenoveho síta*, viď napr. [7–8]. Príklad implementácie môže vyzerať nasledovne 2.2:

```
void sieveOfEratosthenes(int upperBound){
    bool * sieve = new bool[upperBound];
    for(int i = 0; i < upperBound; i++){
        sieve[i] = false;
```

```

}
//true == je zložené číslo
//false == je prvočíslo
sieve[0] = sieve[1] = true; //nula a jedna nie sú prvočísla
for(int i = 2; i <= sqrt((double)upperBound); i++){
    if(sieve[i] == true) continue;
    for(int j = 2*i; j < upperBound; j += i){
        sieve[j] = true; //nemôže byť z definície prvočíslom
    } //je násobkom iného čísla
}
printSieve(sieve, upperBound); //na záver vypíšeme prvočísla
delete[] sieve;
}

```

Obrázok 2.2. Implementácia Eratosthenoveho sita v jazyku C++.

Na začiatku prehlásime všetky čísla 2 až n za prvočísla.

- zoberieme prvé prvočíslo (2) a vyradíme všetky jeho násobky,
- zoberieme v poradí ďalšie prvočíslo a opäť vyradíme všetky jeho násobky,
- opakujeme krok b dovtedy, kým neprídeme k číslu n , ktoré buď prehlásime za prvočíslo alebo ho vyškrtne ako násobok predošlého čísla

Tento postup nájde všetky prvočísla pre zadanú hornú hranicu, no pre veľké čísla sa asymptotická zložitost algoritmu mení podľa vzťahu $O(n \cdot \log(\log n))$, kde n je horná hranica. Práve preto sa tento deterministický algoritmus stáva nepoužiteľným pre veľké čísla a je potrebné hľadať iné riešenia. Vhodnou alternatívou sa ukazujú byť Stochastické metódy založené na teórii pravdepodobnosti a náhodných procesoch.

2.5 Stochastické algoritmy

Stochastické algoritmy sú založené na princípe využitia náhodných veličín. Metóda vyhodnocuje náhodné argumenty účelovej funkcie a následne, najlepšia nájdená funkčná hodnota, pri stanovení podmienky skončenia algoritmu, je určená za výsledok programu. Čiste stochastické metódy sú veľmi pomalé, neefektívne a k vhodným výsledkom sa dopracujú len za veľmi vymedzených podmienok. Preto v praxi často dochádza k ich kombinácii s deterministickými metódami. Ako príklad môžeme uviesť *evolučné algoritmy* kombinujúce v sebe uvedené vlastnosti.

2.6 Kombinované algoritmy

Kombinované alebo zmiešané algoritmy tvoria skupinu silne efektívnych metód, ktoré kombinujú výhody deterministických a stochastických prístupov a naopak potlačujú ich negatívne vlastnosti. Medzi ich hlavné charakteristiky môžeme spomenúť:

- nevyžadujú čiste analytický popis problému,
- je potrebná len malá miera počiatočných informácií,
- často krát su schopné hľadať efektívne riešenia v reálnom čase, tam kde deterministické metódy zlyhávajú,
- náhodnosť v tomto prípade nie je použitá úplne bezhlavo, ale vhodným usmernením za pomoci determinizmu sa algoritmus stáva silne efektívny.

Skupinu metód, ktoré v sebe zahŕňajú vyššie zmieňované vlastnosti, nazývame *Evolučné výpočtové techniky*. V nasledujúcej kapitole rozoberieme tieto metódy podrobnejšie, spolu s rôznymi variantmi implementácií.

Kapitola 3

Evolučné algoritmy

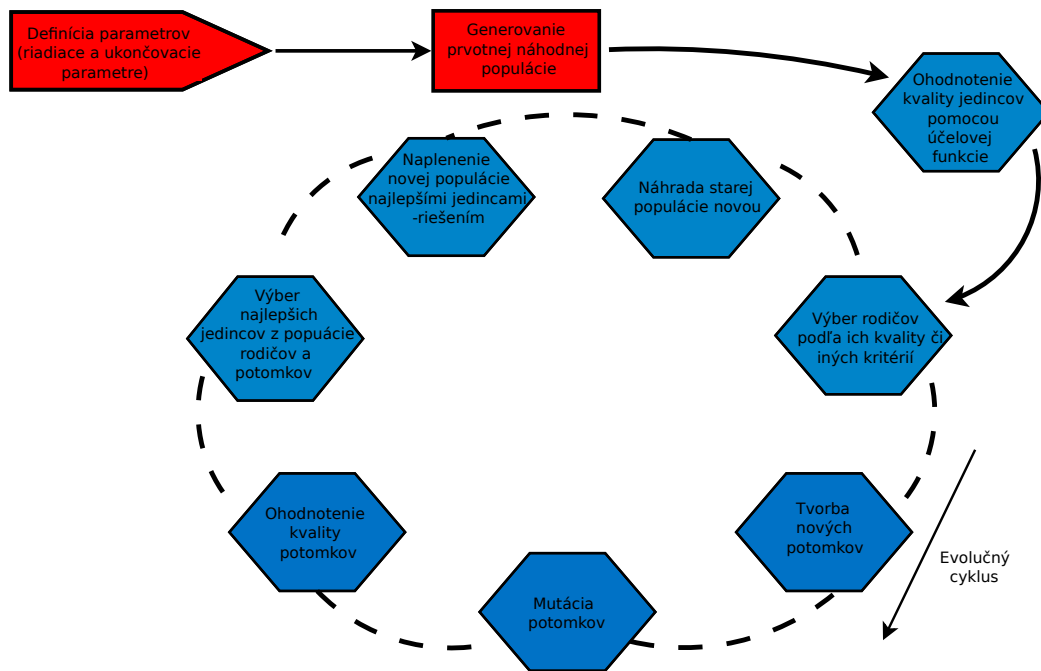
3.1 Úvod

Modernou, silne efektívnou a rýchlo sa rozvíjajúcou podmnožinou numerických metód sú **evolučné algoritmy**. Princípy evolučných techník sú inšpirované prírodnými zákonitosťami, ktoré v 19. storočí popísal *Charles Darwin* vo svojom diele *Pôvod druhov*.¹⁾ Darwinova teória evolúcie je založená na princípoch variability jednotlivých jedincov. Medzi týmito variantmi prirodzene existujú jedinci, ktorí su viac prispôsobení prostrediu, než ostatní. Z toho vyplýva, že títo jedinci majú väčšiu pravdepodobnosť prežitia v danom prostredí a teda vyššiu šancu mať potomstvo. Toto potomstvo bude mať v dôsledku dedičnosti podobné vlastnosti vyhovujúce danému prostrediu. Vďaka tejto charakteristike evolúcie, zastúpenie variantov vyhovujúcich danému prostrediu, bude v každej ďalšej generácii vyššie, než zastúpenie variantov, ktoré prostrediu nevyhovujú. Tento mechanizmus evolúcie nazývame prirodzeným vývinom populácie. Obdobným spôsobom môžeme postupovať pri vytváraní evolučných algoritmov. Základná možná schéma jednotlivých krokov evolučného algoritmu je zachytená na obrázku 3.1

Postup jednotlivých krokov môžeme rozpisovať, viď napr. [9], nasledovne:

1. Vymedzenie parametrov evolúcie: pre každý beh algoritmu musia byť definované parametre, ktoré riadia beh algoritmu, alebo ho regulárne ukončia, ak sú naplnené predom stanovené kritériá ukončenia (napr. počet generácií či dosiahnutie požadovanej hodnoty). Súčasťou tohoto bodu je i stanovanie účelovej funkcie, prípadne tzv. vhodnosti (*fitness*). Účelovou funkciou sa rozumie obvykle matematický model problému, ktorého nájedenie extrému vedie k riešeniu problému. Táto funkcia s prípadnými obmedzujúcimi podmienkami je akýmsi ekvivalentom „životného prostredia“, v ktorom sa vyhodnocuje kvalita aktuálnych jedincov.
2. Generovanie prvej populácie (*population* - všeobecne matica $N \times M$, kde N je počet parametrov jedinca): podľa počtu optimalizovaných argumentov účelovej funkcie a užívateľských kritérií je vygenerovaná prvotná populácia tzv. jedincov (*individuals*). Jedincom sa rozumie vektor čísel, ktorý má toľko zložiek, koľko je optimalizovaných parametrov účelovej funkcie. Tieto zložky sú nastavené náhodne a každý jedinec tak predstavuje jedno možné konkrétne riešenie problému. Množine jedincov hovoríme populácia (*population*).
3. Všetci jedinci sa ohodnotia pomocou definovanej účelovej funkcie a každému z nich sa priradí:
 - buď priama hodnota vrátená účelovou funkciou,
 - alebo vhodnosť, čo je upravená (obvykle normalizovaná) hodnota účelovej funkcie.
4. Nastáva výber rodičov podľa ich kvality (funkčnej hodnoty), prípadne i podľa ďalších kritérií.

¹⁾ Charles Darwin: On the Origin of Species, 1859



Obrázok 3.1. Základný cyklus evolučného algoritmu.

5. Krížením rodičov sa tvoria potomkovia. Proces kríženia je u každého algoritmu odlišný. V klasických genetických algoritmoch sú prehodené časti rodičov, v diferenciálnej evolúcii je kríženie istou vektorovou operáciou, a pod. .
6. Každý potomok je zmutovaný (*mutation*). Inak povedané, nový jedinec je pozmenený pomocou vhodného náhodného procesu. Tento krok je ekvivalentom biologickej mutácie génov jedinca.
7. Každý nový jedinec sa ohodnotí rovnako ako v kroku 3.
8. Vybraní najlepší jedinci sa použijú ako rodičia pre novú generáciu.
9. Stará populácia je zlikvidovaná a na jej miesto nastupuje populácia nová a pokračuje sa opäť krokom 4.

3.2 Základná terminológia

Evolučné algoritmy majú niekoľko spoločných rysov a spoločných termínov.

Medzi základne charakteristiky popisujúce evolučné algoritmy patria:

- jedinec,
- generácia,
- evolúcia.

3.2.1 Jedinec

Základná „stavebná jednotka“ evolučného algoritmu je **jedinec**. V obvyklom ponímaní predstavuje jedinec vektor N argumentov a následnú funkčnú hodnotu z nich vypočítanú. Vektor argumentov môže obsahovať rôzne numerické dátové typy reálnych či celých čísel (integer, double, ...). Taktiež môže obsahovať nenumerické hodnoty (napr. boolean hodnotu true či false), táto reprezentácia si však vyžaduje použitie špeciálnych techník.

3.2.2 Populácia

Vektor M jedincov v jednej generácii nazývame **populácia**. Jedince v populácii majú väčšinou rad spoločných vlastností, ako napríklad počet argumentov alebo niektoré spoločné konštanty, či premenné ovplyvňujúce vývin v jednotlivých generáciách.

3.2.3 Generácia

Pri procese evolučného vývinu sa cyklicky obmieňajú jedince v populácii. Jednu takúto zmenu populácie a následné vyhodnotenie funkčných hodnôt jej jedincov nazývame **generácia**. V evolučnom procese sa cyklicky obmieňajú parametre jedincov jednotlivých generácií tak, aby sa našlo riešenie čo najviac vyhovujúce zadanej podmienke. Všetky zmeny parametrov podliehajú prísne matematicky definovaným pravidlám vývoja. To, o aké pravidlá ide a ako sú definované, závisí na jednotlivých typoch evolučných algoritmov.

3.2.4 Evolúcia

Evolúciou či evolučným procesom nazývame vývin všetkých generácií od prvotného nástreľu náhodných argumentov v prvej generácii až po splnenie podmienky na zastavenie a ukončenie vývoja v poslednej generácii. Môže sa stať, že priestor, v ktorom prehľadávame, obsahuje mnoho lokálnych miním. V takýchto prípadoch je vhodné spustiť celé evolúcie viackrát, čím vygenerujeme mnoho počiatočných náhodných nástreľov a znížime pravdepodobnosť uviaznutia v lokálnom extréme.

3.3 Spoločné rysy

Medzi základné rovnaké charakteristiky evolučných algoritmov patrí napríklad:

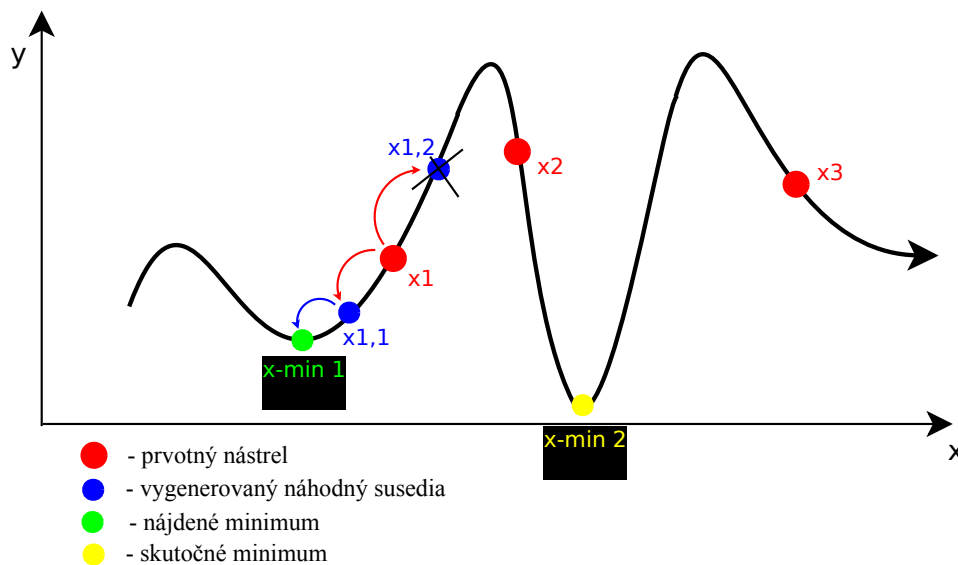
- **jednoduchosť** a relatívne nenáročná implementácia v programovacom jazyku;
- **hybridnosť**. Algoritmy dokážu pracovať s rôznymi typmi čísel (integer, real, ...);
- **používanie čísel v dekadickom vyjadrení**. Pri obvyklom použití v genetických algoritmoch je potrebné jedinca vyjadriť v binárnom kóde. Postupnosť núl a jednotiek vyjadrujúcich jedinca sa v tomto prípade nazýva *chromozóm*. Pri prevode do binárneho kódu však nastávajú skreslenia čísel zapríčinené obmedzenou dĺžkou reprezentujúceho reťazca. Rovnako mutácia čísla v binárnom kóde môže znamenať skokovú zmenu čísla v dekadickom vyjadrení a tým výrazne negatívne ovplyvniť priebeh celej evolúcie. Preto možnosť pracovať priamo s dekadickými hodnotami je jedným z výrazných kladov evolučných metód.
- **rýchlosť**. Evolučné algoritmy sú zvlášť v porovnaní s klasickými deterministickými metódami rýchlejšie pri hľadaní požadovaného výsledku, pri multimodálnych funkciách.¹⁾
- **viacnásobné riešenie**. Pri funkciách s viacnásobnými extrémami môžeme očakávať, že algoritmus tieto extrémny objaví. Konečný zoradený priebeh najlepších riešení môžeme považovať za riešenia daného problému s rozdielnou kvalitou.

¹⁾ Multimodálna funkcia je funkcia obsahujúca viacero lokálnych extrémov.

3.4 Varianty evolučných algoritmov

3.4.1 Gradientný algoritmus

Gradientný algoritmus tiež nazývaný *horolezecký algoritmus* ¹⁾ je jedným z najjednoduchších evolučných algoritmov.



Obrázok 3.2. Obrázok k horolezeckému algoritmu.

Popis algoritmu môžeme zapísať v nasledujúcich krokoch:

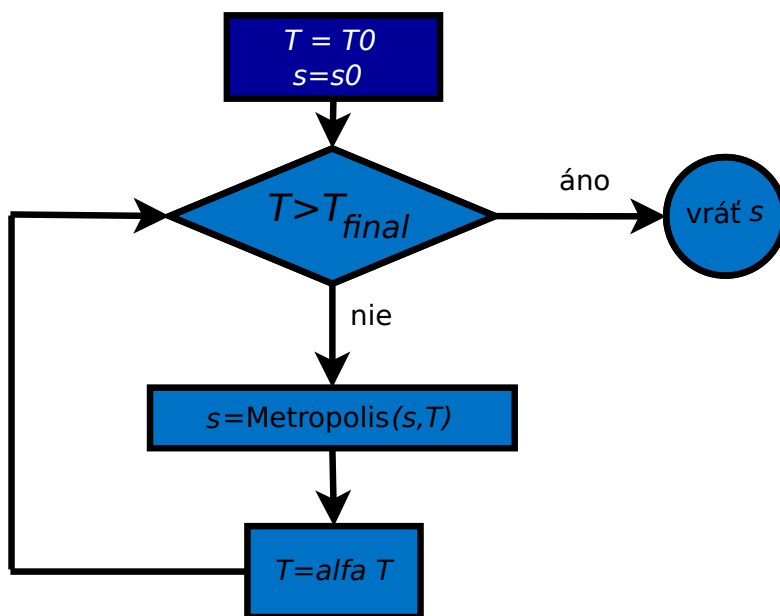
1. Na začiatku vygenerujeme náhodným rovnomerným rozdelením prvotnú množinu jedincov $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a určíme najlepšieho jedinca.
2. Presunieme sa do tohoto bodu a vygenerujeme susedných jedincov, určíme ich funkčné hodnoty a ak je funkčná hodnota niektorého jedinca lepšia než súčasná nájdená minimálna hodnota, presúvame sa do tohoto bodu ($\text{if } f(x_k) < \text{min} \Rightarrow \text{min} = f(x_k)$), ak nieje, generujeme susedov zo súčasného jedinca znova
3. Bod 2 opakujeme pokiaľ nieje splnená ukončovacia podmienka (naplnenie počtu iterácií, nájdenie požadovanej hodnoty, ...).

Ako môžeme vidieť z obrázku 3.2, ak použijeme horolezecký algoritmus pri multimodálnej funkcii, hrozí riziko uviaznutia v jednom z lokálnych extrémov funkcie. Pri opakovaných iteráciách už algoritmus nenašle svoje minimum a je fixovaný v lokálnom extréme.

¹⁾ ang. Hill-climbing

3.4.2 Simulované žihanie

Simulované žihanie je metóda, ktorú nezávisle na sebe objavili S. Krikpatrick, C. Gelatt, M. Vecch a V. Černý, vid' napr. [10]. Metóda patrí medzi stochastické algoritmy a postup tejto metódy je inšpirovaný fyzikálnym procesom žihania. Žihanie je proces, pri ktorom rozhorúčené teleso pomalým ochladzovaním odstraňuje svoje defekty vnútorných štruktúr. Význam pojmu *energia* je z hľadiska algoritmu funkcia, ktorej minimum hľadáme. *Teplota* predstavuje v systéme konštantu, pomocou ktorej určíme veľkosť zmeny nového kroku, a teda to, s akou pravdpodobnosťou sme schopní prijať horšie riešenie. Na začiatku algoritmus vykonáva veľké zmeny, čím predchádza uviaznutiu v lokálnom extréme [9]. Postupne sa systém ochladzuje a ustáľuje. Chovanie algoritmu sa na konci podobá horolezeckému algoritmu.



Obrázok 3.3. Vývojový diagram simulovaného žihania.

Jednoduché znázornenie simulovaného žihania môžeme vidieť na obrázku 3.3.

- Na začiatku zvolíme teplotu T a vygenerujeme náhodný stav s .
- Na vygenerovanie nového stavu systému použijeme algoritmus Metropolis.
- Postupným znižovaním teploty $T_{i+1} = \alpha T_i$ sa ochladzovanie spomaľuje, môžeme teda hodnoty α obmedziť intervalom $0,8 < \alpha < 1$.

Kapitola 4

Implementácia riešenia pomocou evolučných stratégií

4.1 Všeobecný popis

Evolučná stratégia je evolučná výpočtová technika vyvinutá v šesťdesiatych rokoch v Nemecku, vedcami P. Bienertom, I. Rachenbergom, H. P. Schwefelom. [9]. Vtedajším zámerom bolo vytvoriť algoritmus na riešenie problémov z oblasti strojárstva. Pri používaní pojmov *evolučný* a *genetický* algoritmus dochádza často k ich stotožňovaniu. Avšak, genetické algoritmy sú podmnožinou evolučných metód. Hlavné znaky odlišujúce vtedajšie evolučné algoritmy od genetických sú:

- v evolučných stratégiách definujeme jedinca v obore reálnych čísel, naproti tomu v genetických algoritmoch sa jedná o binárnu formu reprezentácie,
- evolučné stratégie poznali len operácie mutácie a selekcie jedincov, operácie kríženia neboli používané.

Evolučné stratégie sa delia na niekoľko možných variánt. Pri značení, o aký typ stratégie ide, budeme používať syntax: „,“, „+“, „ λ “, „ μ “, kde μ predstavuje potomkov a λ označujeme rodičov v populácii. Zápis $(\lambda + \mu)$ – ES označuje typ stratégie, kde sa do nasledujúcej generácie vyberajú najlepší jedinci spomedzi potomkov aj rodičov, kdežto zápis (λ, μ) – ES predstavuje výber najlepších jedincov do novej populácie len z množiny potomkov.

4.2 Reprezentácia funkcie

4.2.1 Prvý spôsob riešenia

Pri reprezentácii funkcie

$$Q = Q(A_1, B_1, \dots, A_N, B_N) = \int_0^\infty \left| f(x) - \sum_{k=1}^N A_k e^{-B_k x^2} \right|^2 dx,$$

v programe som z výpočtových dôvodov upravil funkciu nasledovným spôsobom. Suma, ktorou aproximujeme zadanú funkciu, vyzerá takto

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{-B_k x^2},$$

kde koeficienty A_k a B_k majú svoju reálnu a imaginárnu časť

$$A_k = ar_k + jai_k$$

$$B_k = br_k + jbi_k,$$

teda

$$\sum_{k=0}^{N-1} (ar_k + jai_k) e^{-(br_k + jbi_k)x^2}.$$

Výsledok rozpišeme na reálnu a imaginárnu časť

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} e^{-x^2 br_k} [ar_k \cos(x^2 bi_k) + ai_k \sin(x^2 bi_k)] \\ & + j \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} e^{-x^2 br_k} [ai_k \cos(x^2 bi_k) - ar_k \sin(x^2 bi_k)] \right\}. \end{aligned}$$

Pomocou tejto sumy môžeme aproximovať nejakú funkciu $f(x)$, ktorá je reálna. Koeficienty ar_k , ai_k , br_k , bi_k hľadáme tak, že hľadáme minimum výrazu

$$\begin{aligned} Q = \int_0^\infty & \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-x^2 br_k} [ar_k \cos(x^2 bi_k) + ai_k \sin(x^2 bi_k)] \right\}^2 \\ & + \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} e^{-x^2 br_k} (ai_k \cos(x^2 bi_k) - ar_k \sin(x^2 bi_k)) \right\}^2 dx. \end{aligned}$$

4.2.2 Druhý spôsob riešenia

Vychádzame z toho, že funkcia $f(x)$, ktorú aproximujeme radou Gaussových funkcií

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^N A_k e^{-x^2 B_k}$$

je reálna. To môžeme priamo vynútiť nasledujúcim spôsobom. Napríklad pre prvú exponenciálu platí

$$\begin{aligned} A_1 e^{-B_1 x^2} &= (ar_1 + jai_1) e^{-x^2 (br_1 + jbi_1)} = \\ &= (ar_1 + jai_1) [\cos(x^2 bi_1) - j \sin(x^2 bi_1)] e^{-x^2 br_1} = \\ &= e^{-x^2 br_1} \{ [ar_1 \cos(x^2 bi_1) + ai_1 \sin(x^2 bi_1)] + j [ai_1 \cos(x^2 bi_1) - ar_1 \sin(x^2 bi_1)] \}, \end{aligned}$$

takže môžeme A_2 voliť ako komplexne združené číslo k A_1 , a teda

$$A_2 = A_1^* = ar_1 - jai_1$$

a analogicky

$$B_2 = B_1^* = br_1 - jbi_1,$$

takže dostávame

$$\begin{aligned} A_2 e^{-B_2 x^2} &= (ar_1 - jai_1) e^{-x^2 (br_1 - jbi_1)} = \\ &= (ar_1 - jai_1) [\cos(x^2 bi_1) + j \sin(x^2 bi_1)] e^{-x^2 br_1} = \\ &= e^{-x^2 br_1} \{ [ar_1 \cos(x^2 bi_1) + ai_1 \sin(x^2 bi_1)] - j [ai_1 \cos(x^2 bi_1) - ar_1 \sin(x^2 bi_1)] \}. \end{aligned}$$

Ak posledné dva výrazy sčítame, dostaneme

$$\begin{aligned} & A_1 e^{-B_1 x^2} + A_2 e^{-B_2 x^2} = \\ & = 2e^{-x^2 b r_1} [a r_1 \cos(x^2 b i_1) + a i_1 \sin(x^2 b i_1)], \end{aligned}$$

z toho vidíme že výsledok je rýdzo reálny. Funkciu je teda možné aproximovať sumou

$$f(x) \approx 2 \sum_{k=1}^{N/2} e^{-x^2 b r_k} [a r_k \cos(x^2 b i_k) + a i_k \sin(x^2 b i_k)].$$

Koeficienty $a r_k$, $a i_k$, $b r_k$, $b i_k$ hľadáme opäť minimalizáciou tentokrát funkcie

$$\begin{aligned} & Q'(A_1, B_1, \dots, A_{N/2}, B_{N/2}) = \\ & = \int_0^\infty \left\{ f(x) - 2 \sum_{k=1}^{N/2} e^{-x^2 b r_k} [a r_k \cos(x^2 b i_k) + a i_k \sin(x^2 b i_k)] \right\}^2 dx, \end{aligned}$$

kde platí $a r_i \in \mathbb{R}$ a $a i_k, b r_i, b i_k \geq 0$. K nájdeným $N/2$ koeficientom pridáme ďalších $N/2$ združených a všetky koeficienty použijeme vo vzorci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{-B_k x^2}.$$

4.3 Repräsentácia algoritmu

V moderných evolučných stratégiách je jedinec reprezentovaný, viď napr. [11], vektorom reálnych čísel

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde každý prvok x_i vektora predstavuje jeden z argumentov jedinca. Každý jedinec tiež obsahuje parameter σ , ktorý predstavuje smerodajnú odchýlku Gaussovho náhodného rozdelenia. Táto odchýlka môže byť v rôznych stratégiách rôzne interpretovaná. V najjednoduchšej verzii evolučných stratégií má celý algoritmus jednu konštantne danú σ , pomocou ktorej sa postupne mutujú jedince v jednotlivých generáciách. V modernejších variantách evolučných stratégií a tiež v implementácii riešenia, ktoré volíme, sa σ vyvíja spolu s jedincom. V každej generácii je smerodajná odchýlka pre daného jedinca zmenená pomocou parametra τ , ktorý sa nastaví v počiatočných podmienkach algoritmu.

4.3.1 Kríženie

Krížením nazývame operáciu v evolučnom vývoji, ktorá pomáha zabraňovať uviaznutiu algoritmu v lokálnom extrémne funkcii. Jeden z možných postupov kríženia, viď napr. [11], môžeme popísať nasledovne:

- vyberieme *rodičov* potomka,
- argumenty potomka (x_1, \dots, x_n) získame nahodným výberom jednotlivých argumentov z rodičov,
- sigmu potomka, označujeme σ' , získame aritmetickým priemerom sigiem rodičov a následnou mutáciou

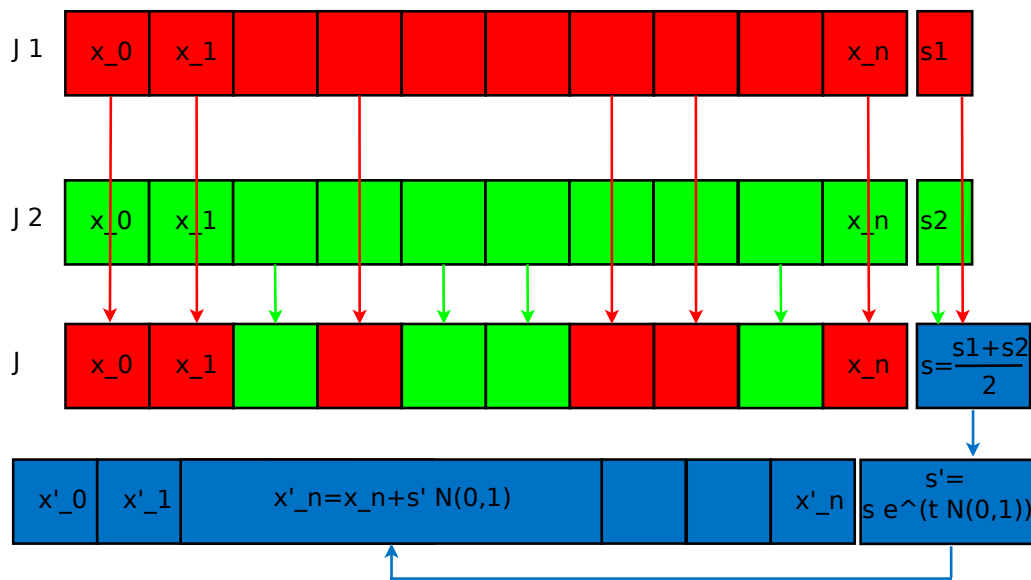
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\sigma' = \sigma \cdot e^{(\tau \cdot N(0,1))},$$

kde $N(0, 1)$ je náhodné číslo z Gaussovo rozdelenia pravdepodobnosti.
 - vybrané argumenty do nového jedinca zmutujeme práve získanou σ'

$$x'_i = x_i + \sigma' \cdot N_i(0, 1)$$

Proces kríženia je načrtnutý na obrázku 4.1. ¹⁾

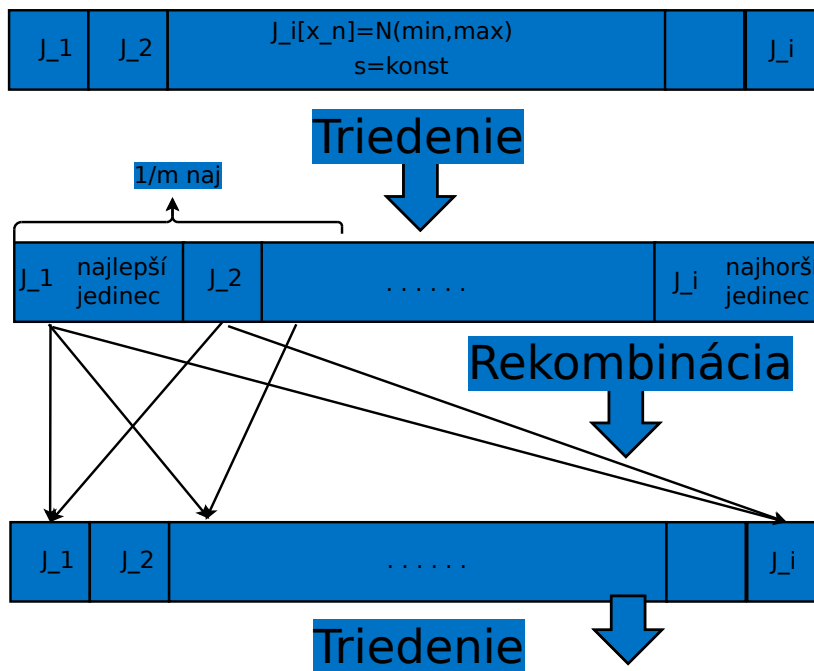


Obrázok 4.1. Kríženie jedinca, ktoré sme použili v algoritme.

4.3.2 Implementácia stratégie $(\mu, \lambda) - ES$

Stratégia, ktorú značíme $(\mu, \lambda) - ES$, znamená, že pri naplnení každej novej generácie používame len potomkov vzniknutých z rekombinácie a kríženia rodičov. Samotných predkov pritom po každej generácii vyradujeme. Takáto stratégia je menej náchylná na uviaznutie v lokálnom extréme než stratégia so zachovaním rodičov. Na druhej strane, tento algoritmus neuchováva automaticky najlepšie riešenia, a teda nepostupuje k výsledku tak priamočiaro ako stratégia $(\mu + \lambda) - ES$. Náčrt priebehu algoritmu môžeme vidieť na obrázku 4.2.

¹⁾ V obrázkoch z technických dôvodov značíme smerodatnú odchytku σ písmenom s , x_n označuje n -tý argument jedinca, výraz j_i predstavuje i -teho jedinca v populácii, $N(0,1)$ označuje Gaussovo rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou smerodatnou odchytkou a $N(\min, \max)$ je náhodne číslo s rovnomerným pravdepodobnostným rozdelením z intervalu $\langle \min, \max \rangle$



Obrázok 4.2. Proces rekombinácie bez zachovania rodičov.

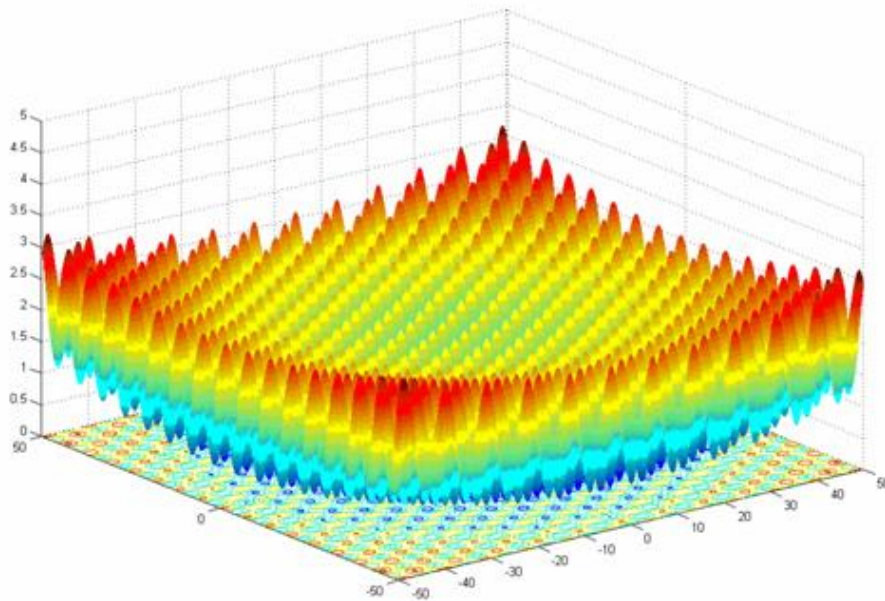
Jednotlivé kroky sú:

1. V prevej generácii dostane každý jedinec vygenerované argumenty z rovnomerného náhodného rozdelenia v zadanom intervale hodnôt.
2. V ďalšom kroku sa tieto jedince utriedia podľa kvality. Následne zvolíme počet rodičov. Empiricky je zistené, že dobrá voľba je tzv. pravidlo 1/7, viď napr. [11], ktoré ako rodičov určuje 1/7 najlepších jedincov z predchádzajúcej populácie.
3. Z množiny rodičov sa následne náhodným spôsobom vyberajú jedinci, ktorí sa vždy dvaja medzi sebou krížia, viď obr. ?? a takto sa zaplní celá nová populácia.
4. Pokračujeme krokom 2 a cyklicky opakujeme postup až do splnenia podmienky ukončenia algoritmu.

Demonštráciu použitia si môžeme ukázať na *Griewankovej funkcii*. Táto funkcia má predpis

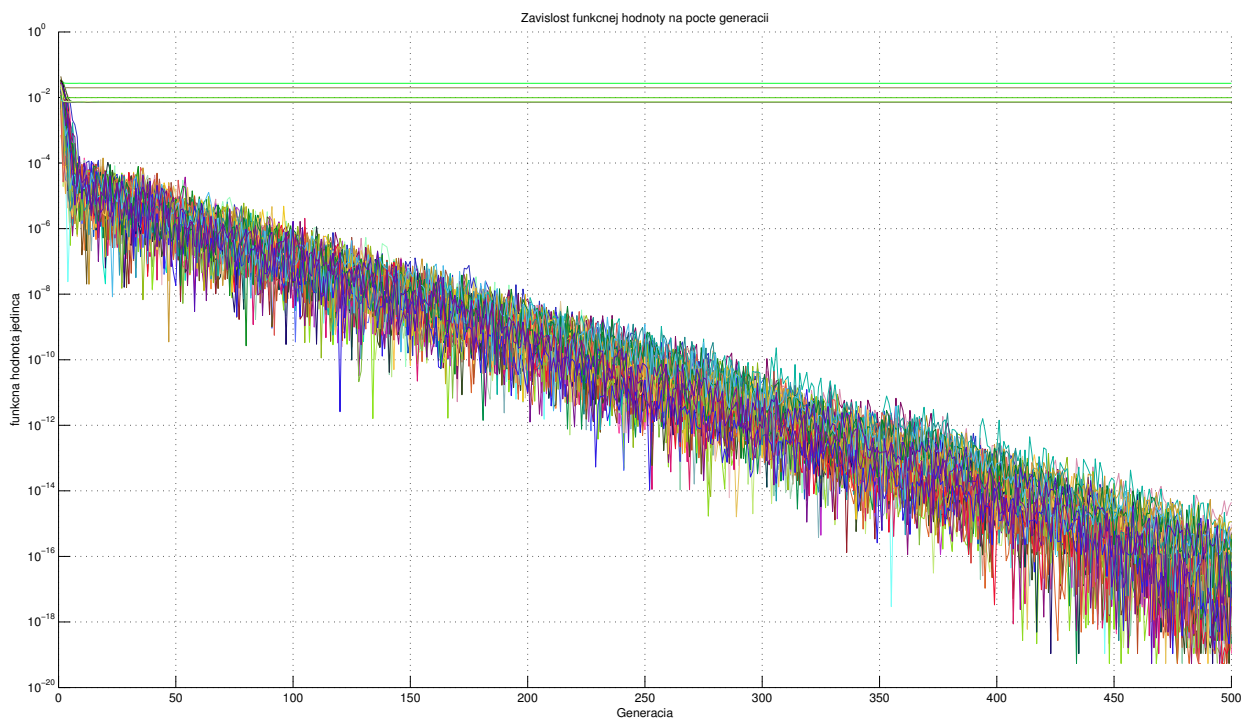
$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 + \left(\frac{1}{4000}\right) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) \quad (1)$$

a jej zobrazenie v dvojdimenzionálnom priestore je na obrázku 4.3



Obrázok 4.3. Multimodálna Griewankova funkcia.

Ako z vidíme z obrázku 4.3 funkcia je multimodálna, a teda obsahuje mnoho lokálnych extrémov, preto je vhodné použiť algoritmus *evolučných stratégií*. Pribeh hľadania minima znázorňuje graf 4.4



Obrázok 4.4. Vývin najlepšieho jedinca v jednotlivých generáciách.

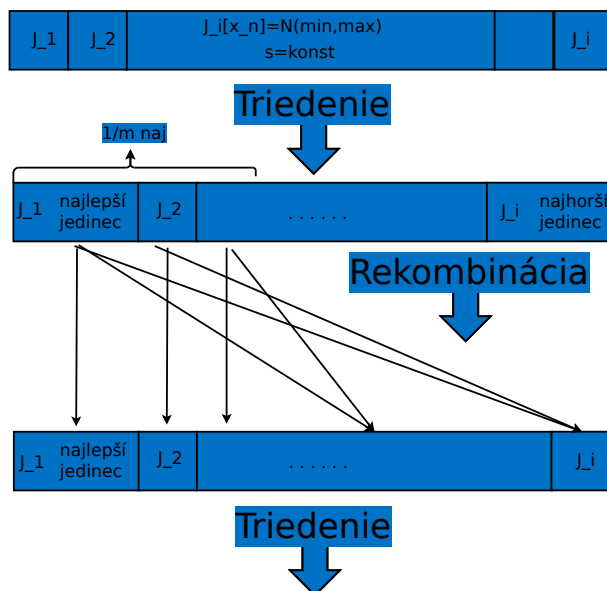
V algoritme som implementoval mechanizmus ukončenia evolúcie pri splnení podmienky indikujúcej uviaznutie v lokálnom minime, no v tomto prípade bol zámerné vypnutý. V hornej časti grafu teda môžeme vidieť pár priebehov evolúcií, ktoré aj napriek kríženiu uviazli v lokálnom extréme. Štatisticky sa tomuto javu nedá nikdy vyhnúť, no vhodnou konfiguráciou parametrov sa dá tento nežiadúci efekt výrazne obmedziť. Hodnoty parametrov algoritmu uvádzame v tabuľke 4.1.

parametre algoritmu	hodnoty
dimenzia	2
počet jedincov	210
počet rodičov	30
počet generácií	500
počet evolúcií	100
počiatočný σ parameter	0.1
τ parameter	0.1
počet dosiahnutí globálneho minima	73

Tabuľka 4.1. Parametre algoritmu $(\mu, \lambda) - ES$ pri hľadaní globálneho minima Griewanovej funkcie.

4.3.3 Implementácia stratégie $(\mu + \lambda) - ES$

Označenie $(\mu + \lambda) - ES$ nesie varianta evolučných stratégií, ktorá v procese rekombinácie nevyraďuje rodičov ako stratégia $(\mu, \lambda) - ES$, ale do ďalšej generácie vyberá nových rodičov spomedzi predkov a potomkov zároveň. Táto varianta má bližšie ku gradientnému algoritmu, a teda je viac náchylná na uviaznutie v lokálnom extréme. Náčrt algoritmu môžeme vidieť na obrázku 4.5.

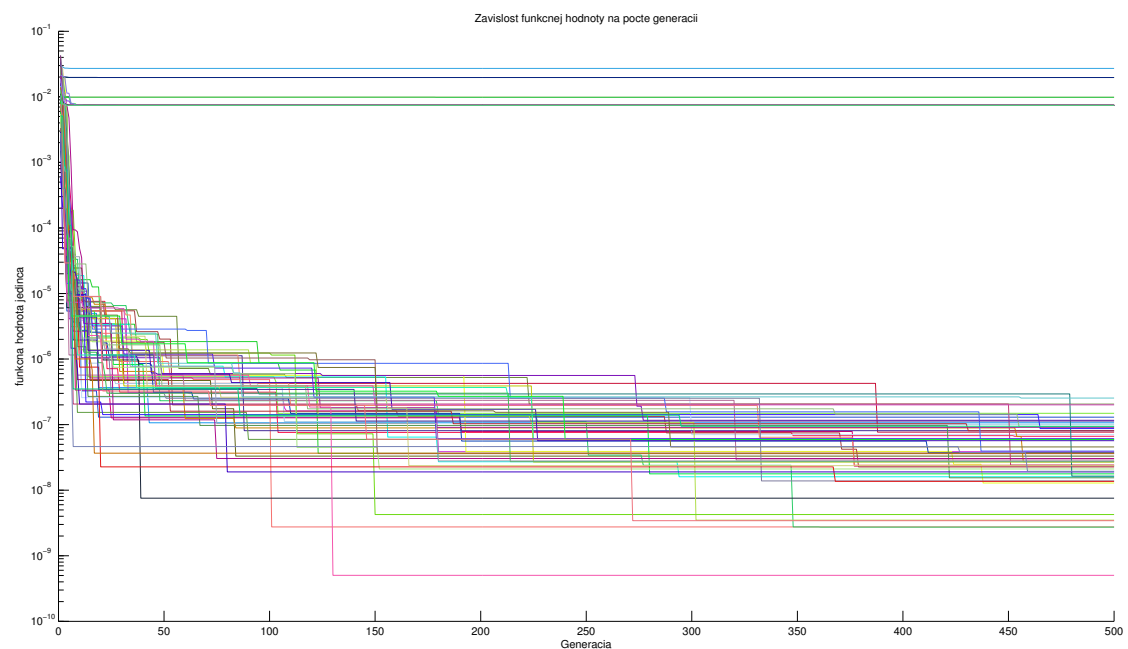


Obrázok 4.5. Proces rekombinácie so zachovaním rodičov.

Jednotlivé kroky môžeme analogicky, no s miernou obmenou popísať nalsedovne:

1. V prevej generácii dostane každý jedinec vygenerované argumenty z rovnomerného náhodného rozdelenia v zadanom intervale hodnôt.
2. V ďalšom kroku sa tieto jedince utriedia podľa kvality. Následne zvolíme počet rodičov, opäť môžeme použiť pravidlo $1/7$.
3. Množina rodičov sa presunie do novovznikajúcej generácie a zostávajúce miesto sa doplní rekombináciou rodičov.
4. Nasleduje triedenie a pokračujeme krokom 2. Opäť cyklicky opakujeme postup až do splnenia podmienky ukončenia algoritmu.

Príklad vývinu takéhoto algoritmu si môžeme ukázať na vyššie uvedenej Griewankovej funkcii, viď vzťah (1).



Obrázok 4.6. Vývin najlepšieho jedinca v jednotlivých generáciách.

Ako vidíme na grafe 4.6 variant so zachovaním rodičov je oveľa náchyľnejší na uviaznutie v lokálnom extréme. To je dôvodom prečo sme na riešenie rozkladu funkcie (17) do radu Gaussových funkcií použili variantu $(\mu, \lambda) - ES$.

parametre algoritmu	hodnoty
dimenzia	2
počet jedincov	210
počet rodičov	30
počet generácií	500
počet evolúcií	100
počiatočný σ parameter	0.1
τ parameter	0.1
počet dosiahnutí globálneho minima	52

Tabuľka 4.2. Parametre algoritmu $(\mu + \lambda) - ES$ pri hľadaní globálneho minima Griewankovej funkcie.

Kapitola 5

Rozklad

5.1 Popis programu

Na implementáciu algoritmu evolučnej stratégie, variant $(\mu, \lambda) - ES$ a variant $(\mu + \lambda) - ES$, som použil jazyk C++ a jeho objektovo orientovanú formu. Základom algoritmu sú triedy `Jedinec`, `Generacia` a `Evolucia`.

Trieda `Jedinec` v sebe uchováva argumenty jedinca, σ parameter, τ parameter a funkčné hodnoty. Samotný jedinec ďalej obsahuje metódy na mutáciu argumentov, mutáciu σ parametru, metódu na počiatkové naplnenie číslami z rovnomerného náhodného rozdelenia a metódu na spočítanie funkčnej hodnoty z aktuálnych argumentov. Trieda `Generacia` v sebe obsahuje metódy na naplnenie sa jedincami, utriedenie jedincov, skríženie dvoch jedincov, viď obr. 4.1, ďalej metódy ovplyvňujúce samotný variant algoritmu, a teda rekombináciu do novej generácie bez zachovania rodičov, metóda `skrizGeneraciuWithoutParents` a rekombináciu so zachovaním rodičov `skrizGeneraciuKeepParents`. Obe metódy v sebe implementujú knižnicu `openMP` a jej makro `# pragma`, ktoré sa stará o paralelizáciu procesu vyhodnocovania jednotlivých jedincov. Trieda `Evolucia` v sebe obsahuje dve hlavné metódy ktorými sa v `main` nastavuje beh algoritmu. Odkomentovaním či zakomentovaním

```
- ev1.vyvinCrossEvolutionWithoutParents(nahRR,nahNR) // variant  $(\mu, \lambda) - ES$   
- ev1.vyvinCrossEvolutionKeepParents(nahRR,nahNR) // variant  $(\mu + \lambda) - ES$ 
```

môžeme zvoliť variant evolučných stratégií a priebeh algoritmu. V triede `Evolucia` je tiež implementované zastavenie evolúcie, keď začne na základe splnenia podmienky

$$\frac{|Q_{n+10} - Q_n|}{|Q_n|} < konst.,$$

kde Q_n je funkčná hodnota najlepšieho jedinca v n -tej generácii, pracovať deterministický algoritmus použitý z knižnice `Numerical Recipes`. Taktiež sú knižnice z tejto edície implementované pri využívaní dielčích matematických úkonov. Jedným z nich je numerická integrácia vzťahu (17). Tento výraz je implementovaný pomocou troch tried, a to

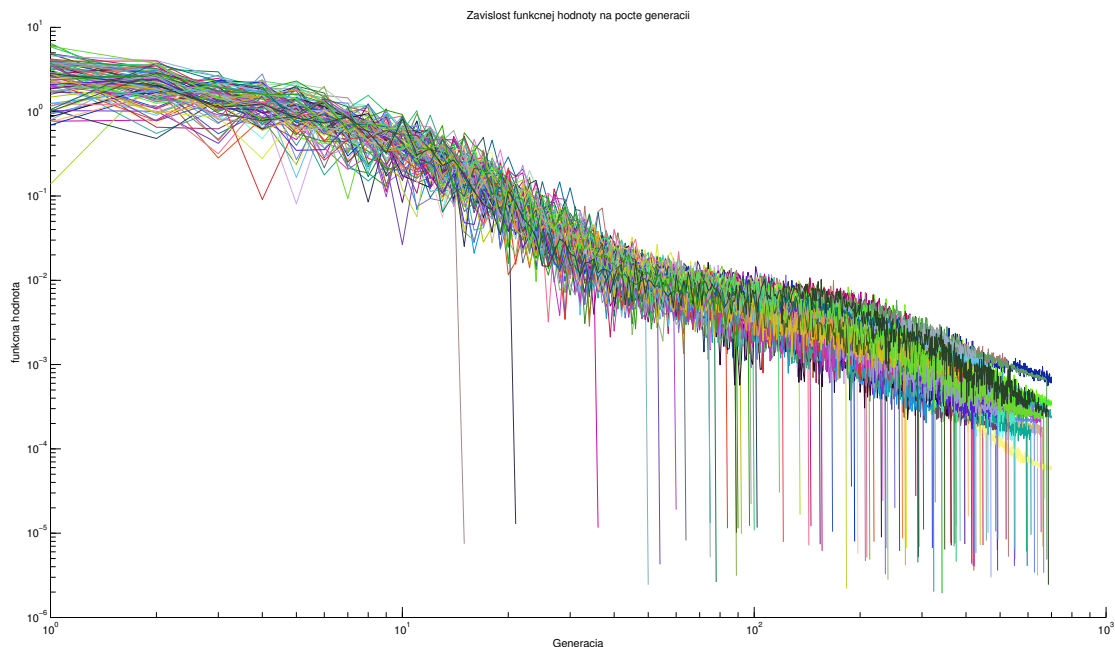
```
- rozklad_AproximacnyFunktor  
- rozklad_SumaFunktor  
- rozklad_Integralsumy.
```

V triede `rozklad_AproximacnyFunktor` definujeme funkciu $f(x)$ zo vzťahu (17), trieda `Suma` zabezpečuje vyhodnotenie sumy a trieda `rozklad_Integral` celý výraz integruje. Kóli možnosti dosadenia rôznych funkcií do triedy `rozklad_AproximacnyFu...`, implementoval som 5 rôznych numerických integračných metód ktoré sa pomerne jednoducho spustia odkomentovaním či zakomentovaním príslušnej metódy. Sú to napríklad:

```
- //vysledok=qromb(sumaFtor,...); // (Rombergova metoda)
```

```
- //vysledok=qtrap(sumaFtor,...); // (zakladna lichobeznikova metoda)
```

Priebeh vývinu najlepšieho jedinca pre funkciu $f(x) = 1 - x^2H(1 - x)$ dosadenú do výrazu (17) môžeme vidieť na grafe 5.1.



Obrázok 5.1. Vývin najlepšieho jedinca v jednotlivých generáciách.

V algoritme bola použitá podmienka zastavenia evolučného algoritmu a záverečné dohľadanie pomocou deterministického algoritmu. Použité parametre evolučného algoritmu sú:

parametre algoritmu	hodnoty
dimenzia	24
počet jedincov	1050
počet rodičov	150
počet generácií	300
počet evolúcií	100
počiatočný σ parameter	0.1
τ parameter	0.1

Tabuľka 5.1. Parametre algoritmu $(\mu, \lambda) - ES$.

5.2 Popis rozkladu

Na demonštráciu rozkladu funkcie popisujúcej tvar kmitu osovo symetrického akustického meniča sme zvolili nasledujúce aproximované funkcie

$$f(x) = 1 - x^2 \cdot \text{Heaviside}(1 - x),$$

$$f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot \text{Heaviside}(1 - x),$$

$$f(x) = \text{Heaviside}(1 - x),$$

$$f(x) = e^{-x^8},$$

$$f(x) = e^{-x^{16}},$$

$$f(x) = e^{-x^{32}}.$$

Každú z vyššie uvedených funkcií sme dosadili do vzťahu

$$Q = Q(A_1, B_1, \dots, A_N, B_N) = \int_0^\infty \left| f(x) - \sum_{k=1}^N A_k e^{-B_k r^2} \right|^2 dx$$

a následným použitím algoritmu evolučných stratégií $(\mu, \lambda) - ES$ sme našli minimá tejto multimodálnej funkcie, ktoré boli dosadené ako koeficienty rozvoja do rady Gaussových funkcií, viď vzťah (16). V následujúcich podkapitolách uvádzame priebeh aproximovanej a aproximačnej funkcie. Ako praktickú ukážku použitia nájdených rozkladov uvádzame výpočet amplitudy normovaného akustického tlaku-numerickej výpočet pomocou Rayleighovho integrálu (7), vydelený výrazom $x_{10}c_0v_0n$. Výpočet sa vykonáva v polárnych súradniciach zvlášť pre reálnu a zvlášť pre imaginárnu zložku. Z grafu vidno, že aproximácia nefunguje dobre pre malé hodnoty z v blízkosti zdroja. Použité fyzikálne konštanty sú nasledovné:

- rýchlosť zvuku vo vzduchu

$$c_0 = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

- polomer zdroja

$$a = 0.05 \text{ m},$$

- frekvencia zdroja

$$f_z = 100 \text{ kHz},$$

- vlnové číslo

$$k = 2\pi f_z / c_0 = 1821.213133$$

- parameter ka , viď kapitolu (1.3), Fresnelova aproximácia

$$ka = 91,06065665$$

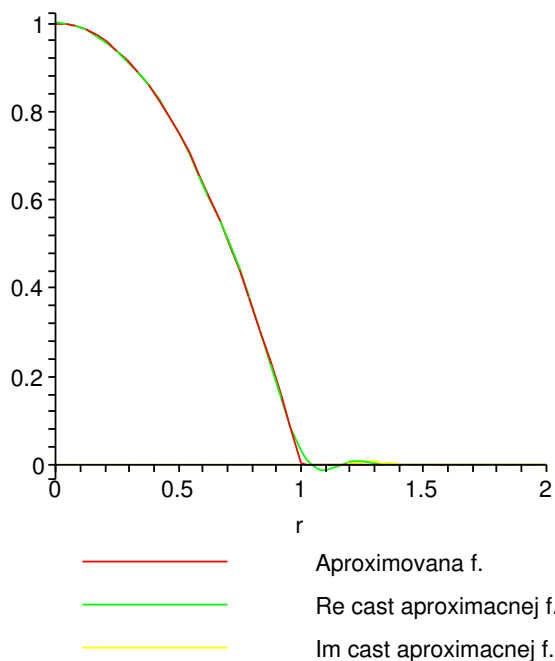
5.3 Rozklad $f(x) = 1 - x^2H(1 - r)$

5.3.1 Dimenzia $n=24$

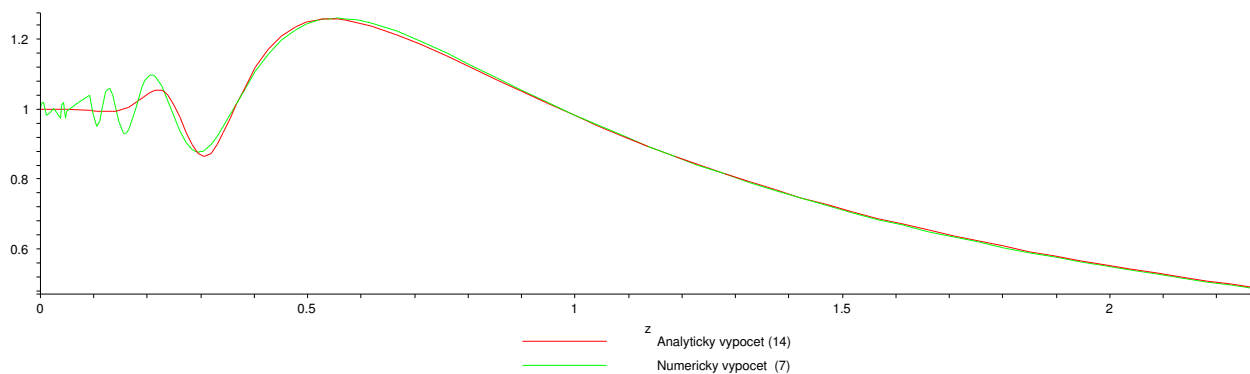
Nájdené minimum $Q = 4.89307 \cdot 10^{-5}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = 0,0578838 + I(-0,704149)$	$B_1 = 3,36527 + I(-8,07075)$
$A_2 = -1,15282 + I(1,93853)$	$B_2 = 4,53276 + I(3,8652)$
$A_3 = 1,71059 + I(-1,51094)$	$B_3 = 3,92884 + I(-1,13407)$
$A_4 = -0,332652 + I(0,978811)$	$B_4 = 3,31837 + I(-7,173)$
$A_5 = 1,24969 + I(-0,274089)$	$B_5 = 4,35092 + I(7,42806)$
$A_6 = -0,531842 + I(-0,427317)$	$B_6 = 5,70453 + I(9,08816)$

Tabuľka 5.2. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$



Obrázok 5.2. Aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 24$.



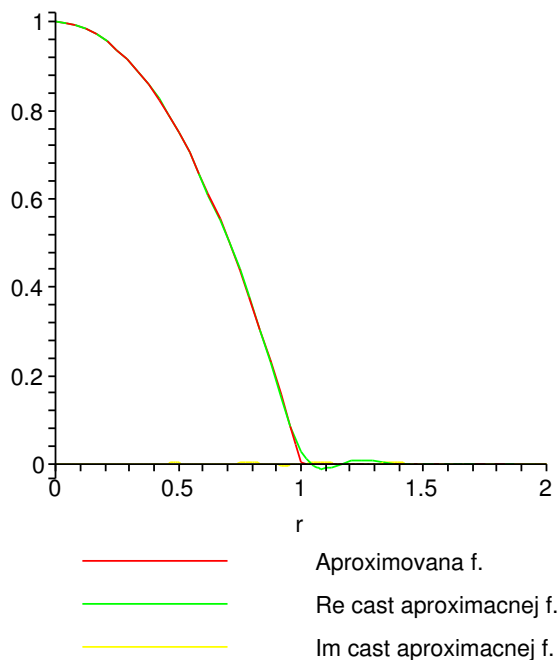
Obrázok 5.3. Porovnanie výpočtu-analyticky, pomocou aproximácie, vid' (14) a numericky-Rayleighiov integrál, vid' (7). Dimenzia $n = 24$.

5.3.2 Dimenzia $n=32$

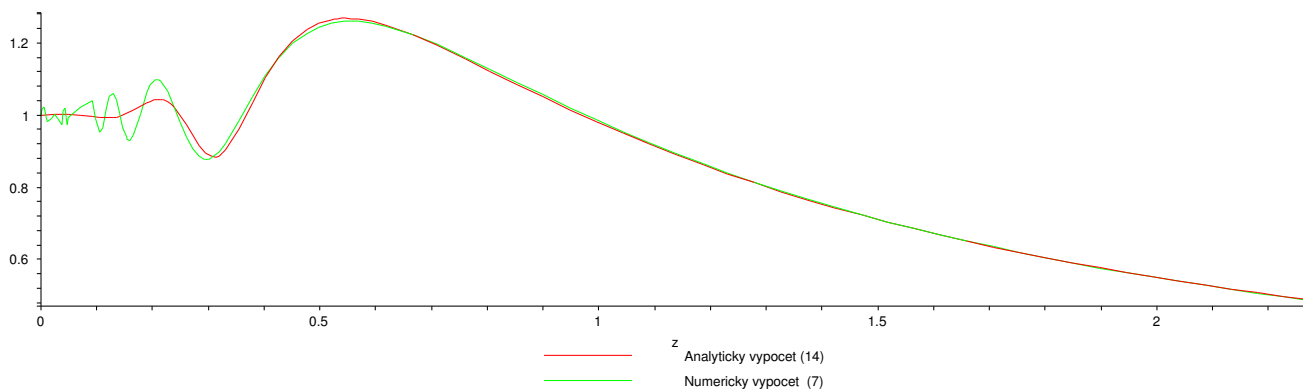
Nájdené minimum $Q = 4,245604218 \cdot 10^{-5}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -1,00141 + I(1,50407)$	$B_1 = 3,70592 + I(-6,35958)$
$A_2 = 0,196769 + I(-1,3069)$	$B_2 = 4,12858 + I(-7,32524)$
$A_3 = -2,12211 + I(0,54989)$	$B_3 = 4,94062 + I(4,00056)$
$A_4 = 1,43414 + I(0,502344)$	$B_4 = 4,0969 + I(8,74012)$
$A_5 = 2,18774 + I(-1,10996)$	$B_5 = 4,11411 + I(-0,581727)$
$A_6 = 0,494413 + I(0,786213)$	$B_6 = 4,70882 + I(3,78022)$
$A_7 = 0,605092 + I(-0,168104)$	$B_7 = 6,71206 + I(-2,65327)$
$A_8 = -0,794504 + I(-0,758192)$	$B_9 = 4,48199 + I(9,66241)$

Tabuľka 5.3. Koefficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$



Obrázok 5.4. Aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 32$.



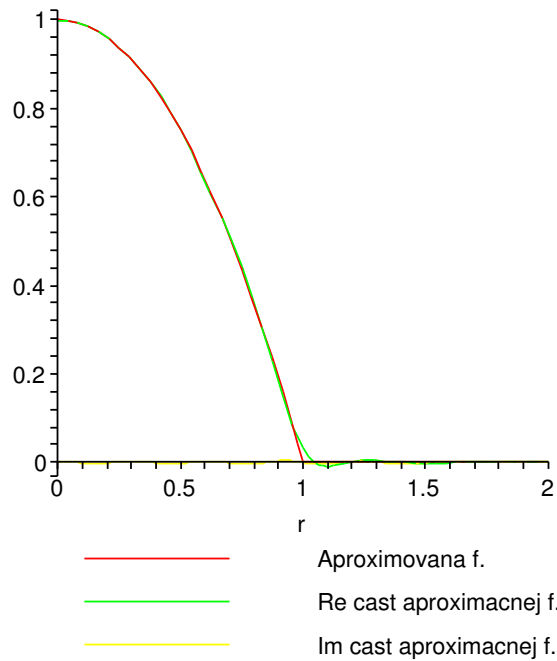
Obrázok 5.5. Vypočítanie integrálu $n = 32$.

5.3.3 Dimenzia=40

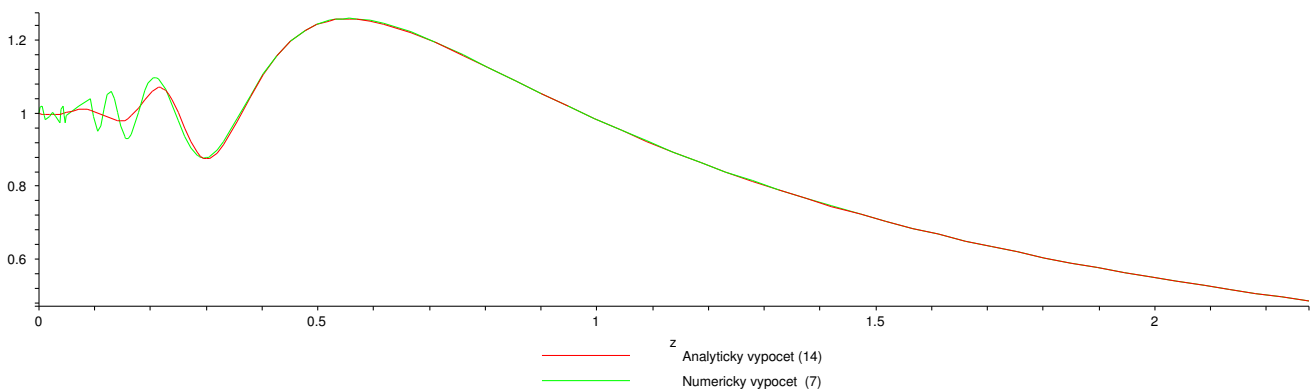
Nájdené minimum $Q = 5,421140072 \cdot 10^{-5}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -2, 22688 + I(0, 00884328)$	$B_1 = 3, 32274 + I(4, 86705)$
$A_2 = -0, 163213 + I(-0, 533597)$	$B_2 = 16, 9463 + I(-5, 62504)$
$A_3 = 0, 885184 + I(-1, 35536)$	$B_3 = 11, 2919 + I(-8, 08314)$
$A_4 = 0, 580991 + I(3, 45254)$	$B_4 = 5, 80126 + I(5, 30753)$
$A_5 = -0, 922851 + I(-1, 51025)$	$B_5 = 4, 95159 + I(-4, 03936)$
$A_6 = -0, 788311 + I(-1, 24335)$	$B_6 = 12, 89 + I(-2, 44527)$
$A_7 = -0, 33174 + I(-3, 37893)$	$B_7 = 4, 96489 + I(-1, 9333)$
$A_8 = 4, 13182 + I(5, 52486)$	$B_8 = 12, 2352 + I(-1, 94647)$
$A_9 = 0, 282419 + I(-0, 177547)$	$B_9 = 3, 24834 + I(-8, 61677)$
$A_{10} = -0, 44793 + I(-0, 78435)$	$B_{10} = 2, 79425 + I(3, 34374)$

Tabuľka 5.4. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$



Obrázok 5.6. Aproximácia $f(x) = 1 - x^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 40$.



Obrázok 5.7. Vypočítanie integrálu $n = 40$.

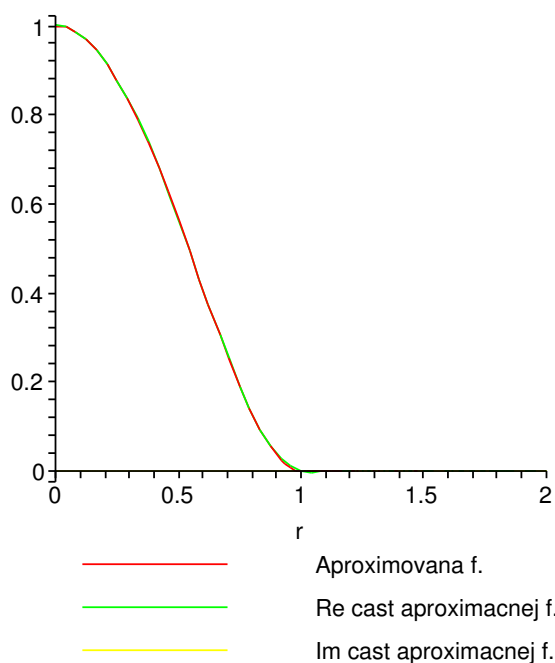
5.4 Rozklad $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$

5.4.1 Dimenzia=24

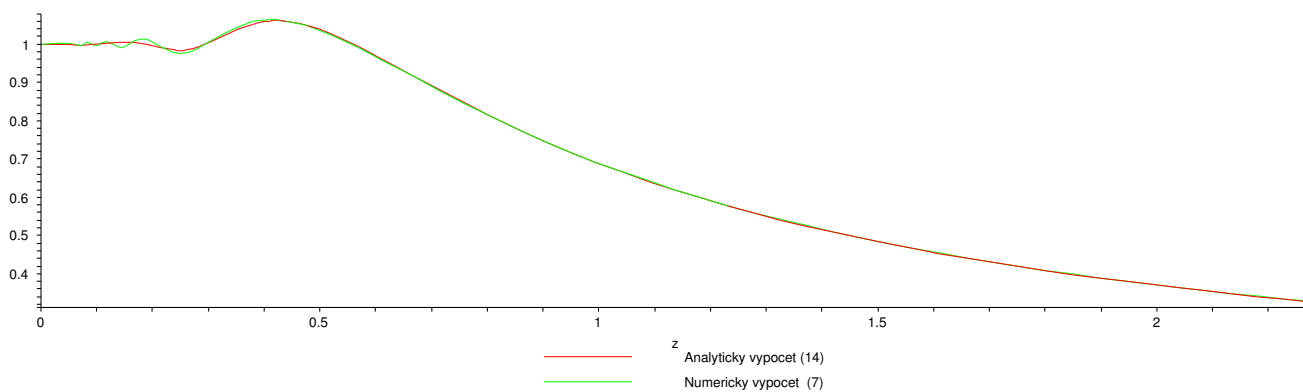
Nájdene minimum $Q = 1,910502803 \cdot 10^{-6}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -1,15288 + I(0,120031)$	$B_1 = 4,96352 + I(-5,41162)$
$A_2 = -0,255757 + I(0,0560056)$	$B_2 = 11,1931 + I(-3,41875)$
$A_3 = 0,229076 + I(-0,562918)$	$B_3 = 6,58027 + I(-7,17113)$
$A_4 = 1,20387 + I(1,9587)$	$B_4 = 5,38469 + I(1,5564)$
$A_5 = -0,0679263 + I(-0,0560837)$	$B_5 = 2,85042 + I(6,81384)$
$A_6 = 1,04425 + I(-1,5159)$	$B_6 = 9,32867 + I(-0,647038)$

Tabuľka 5.5. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$



Obrázok 5.8. Aproximácia $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 24$.

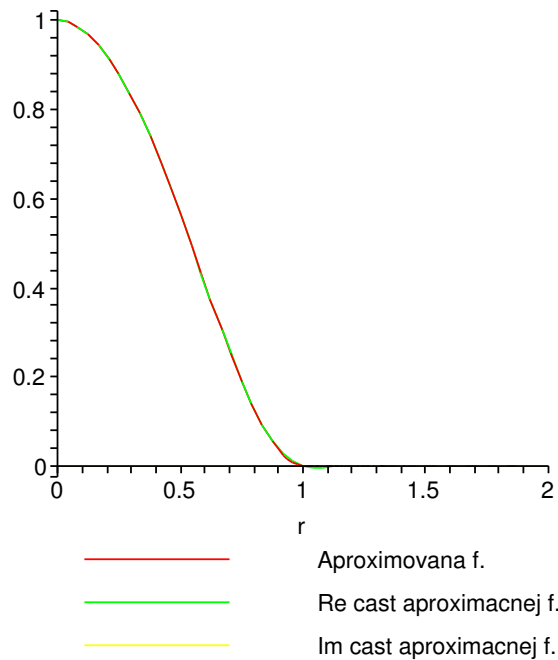


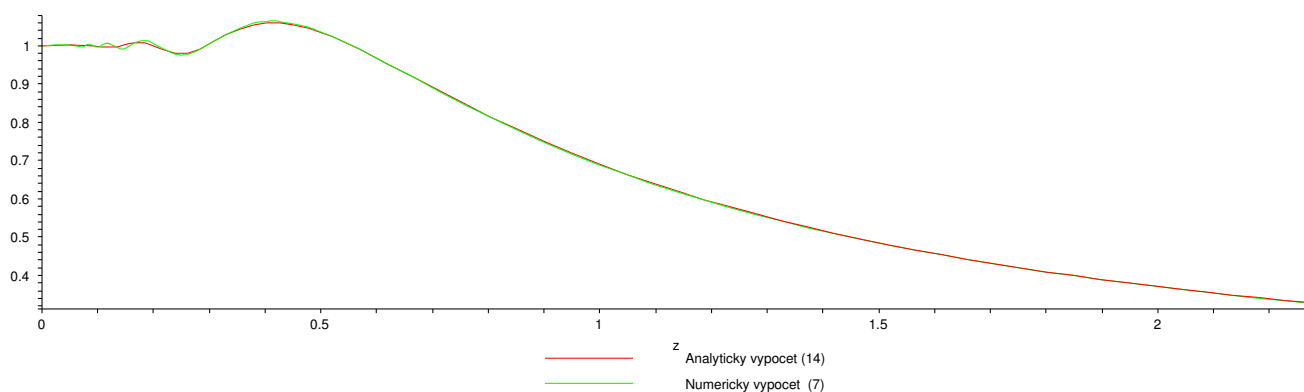
Obrázok 5.9. Vypoýpočet integrálu $n = 24$.

5.4.2 Dimenzia $n=32$

Nájdene minimum $Q = 1,944055621 \cdot 10^{-6}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -2,50957 + (0,322458)$	$B_1 = 8,24353 + (1,54195)$
$A_2 = 0,439607 + (-0,579808)$	$B_2 = 5,34643 + (6,54246)$
$A_3 = 1,28013 + (3,39991)$	$B_3 = 7,66206 + (-8,31562)$
$A_4 = -0,560656 + (1,77568)$	$B_4 = 5,60245 + (4,27482)$
$A_5 = -0,66501 + (-1,82801)$	$B_5 = 7,05653 + (-9,39848)$
$A_6 = -2,73744 + (-0,641014)$	$B_6 = 11,9956 + (-3,54668)$
$A_7 = 3,06401 + (-3,39058)$	$B_7 = 6,37644 + (-1,64386)$
$A_8 = 2,6888 + (0,941808)$	$B_8 = 11,973 + (-0,518566)$

Tabuľka 5.6. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$ **Obrázok 5.10.** Aproximácia $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 32$.

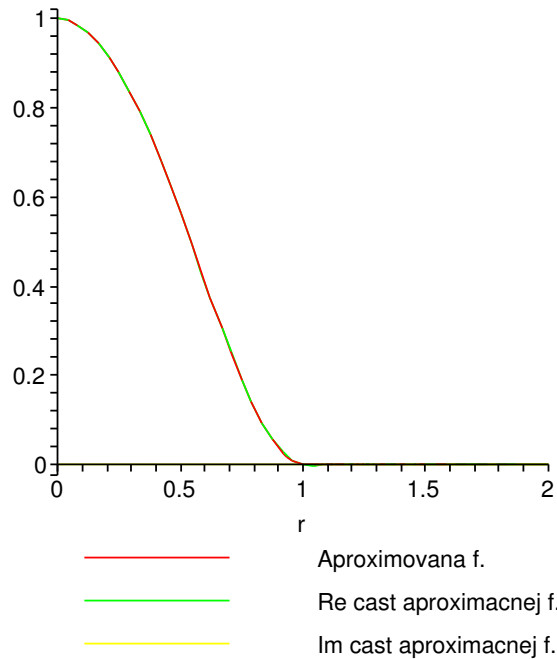
Obrázok 5.11. Vypoýpočet integrálu $n = 32$.

5.4.3 Dimenzia $n=40$

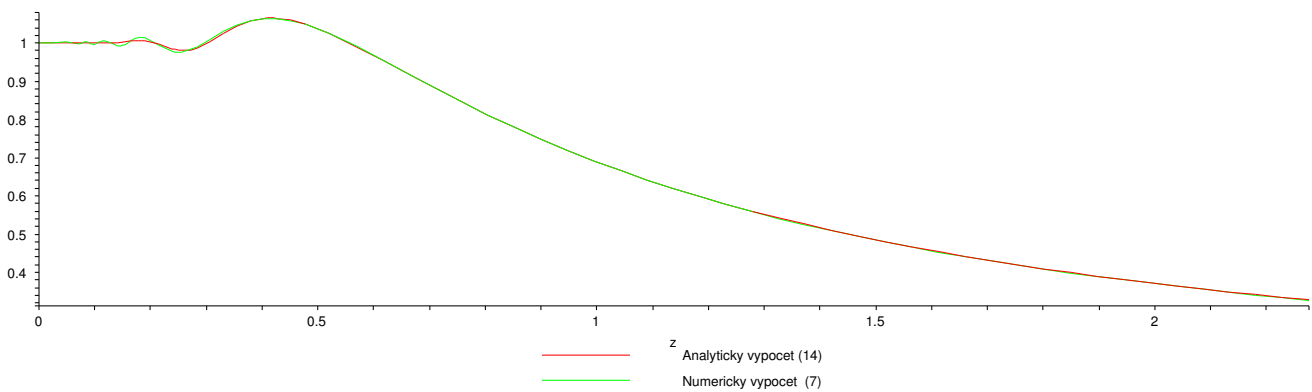
Nájdene minimum $Q = 1,518788134 \cdot 10^{-6}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -0,500226 + I(-0,483226)$	$B_1 = 4,62081 + I(5,88449)$
$A_2 = -0,468719 + I(2,00572)$	$B_2 = 8,61912 + I(1,36776)$
$A_3 = -0,632171 + I(0,795194)$	$B_3 = 7,46048 + I(5,77529)$
$A_4 = -1,98797 + I(-0,966713)$	$B_4 = 6,97651 + I(-7,51616)$
$A_5 = 4,01332 + I(0,946924)$	$B_5 = 7,52482 + I(-1,64392)$
$A_6 = -1,01487 + I(1,42895)$	$B_6 = 4,88759 + I(-6,52575)$
$A_7 = -1,1839 + I(2,47169)$	$B_7 = 5,17195 + I(-3,7959)$
$A_8 = -1,87076 + I(-0,586331)$	$B_8 = 11,8848 + I(-4,47385)$
$A_9 = 3,68046 + I(-3,33986)$	$B_9 = 7,23175 + I(-2,49005)$
$A_{10} = 0,964895 + I(-2,27234)$	$B_{10} = 8,91948 + I(-1,19809)$

Tabuľka 5.7. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$



Obrázok 5.12. Aproximácia $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot H(1 - r)$ pre dimenziu $n = 40$.



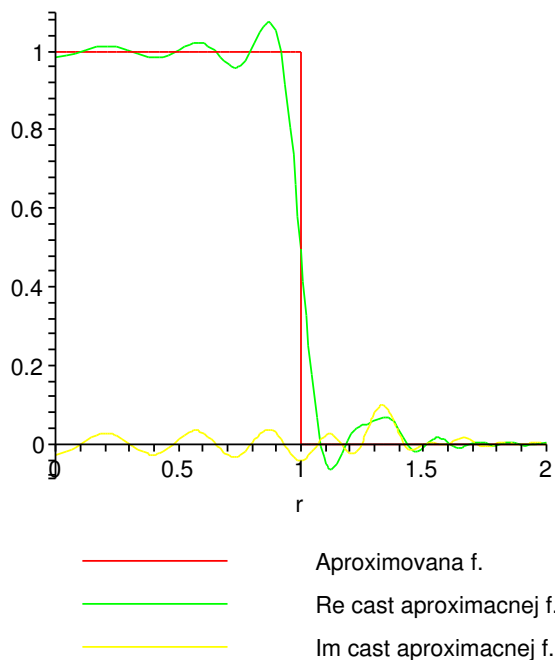
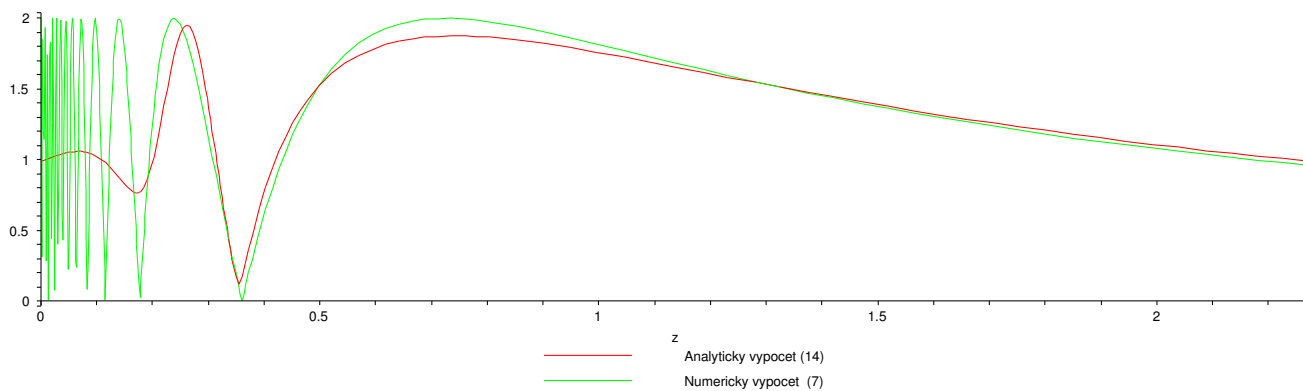
Obrázok 5.13. Vypočítanie integrálu $n = 40$.

5.5 Rozklad $f(x) = H(1 - x)$

5.5.1 Dimenzia $n=24$

Nájdené minimum $Q = 1.411058267 \cdot 10^{-2}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -0,00637307 + I(-0,178501)$	$B_1 = 1,09845 + I(12,2516)$
$A_2 = 3,66085 + I(-2,61543)$	$B_2 = 2,74088 + I(-0,766141)$
$A_3 = -2,14463 + I(4,38079)$	$B_3 = 3,18595 + I(-7,74036)$
$A_4 = -3,22529 + I(3,81574)$	$B_4 = 5,24303 + I(5,01423)$
$A_5 = 2,1635 + I(-2,9628)$	$B_5 = 2,39466 + I(-7,90651)$
$A_6 = 0,537749 + I(-2,46654)$	$B_6 = 2,46497 + I(5,77648)$

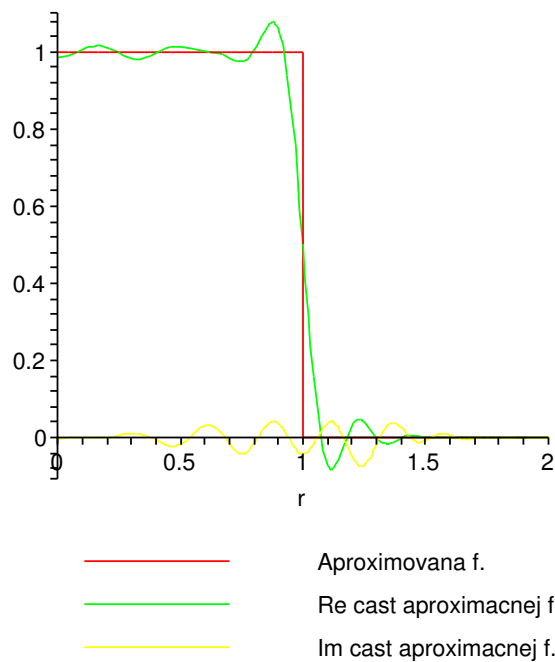
Tabuľka 5.8. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = H(1 - x)$ **Obrázok 5.14.** Aproximácia $f(x) = H(1 - x)$ pre dimenziu $n = 24$.**Obrázok 5.15.** Vypočítanie integrálu $n = 24$.

5.5.2 Dimenzia $n=32$

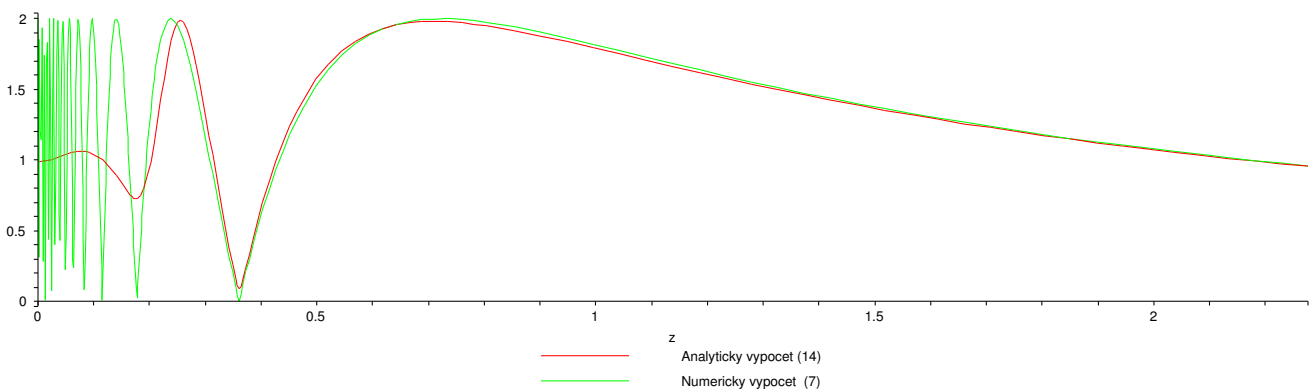
Nájdené minimum $Q = 1,253433815 \cdot 10^{-2}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -5,26866 + I(3,00864)$	$B_1 = 6,40276 + I(13,2574)$
$A_2 = -4,95454 + I(1,89722)$	$B_2 = 3,47164 + I(3,31333)$
$A_3 = -0,0450782 + I(3,07222)$	$B_3 = 3,33202 + I(-5,91124)$
$A_4 = 0,729239 + I(-1,69788)$	$B_4 = 5,05019 + I(6,42819)$
$A_5 = -0,439363 + I(-0,591385)$	$B_5 = 2,08343 + I(-9,00709)$
$A_6 = -1,10458 + I(-0,573434)$	$B_6 = 2,20704 + I(10,9827)$
$A_7 = 6,66044 + I(0,822475)$	$B_7 = 8,89009 + I(12,743)$
$A_8 = 5,40708 + I(-5,93995)$	$B_9 = 3,84302 + I(-0,93112)$

Tabuľka 5.9. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = H(1 - x)$



Obrázok 5.16. Aproximácia $f(x) = H(1 - x)$ pre dimenziu $n = 32$.



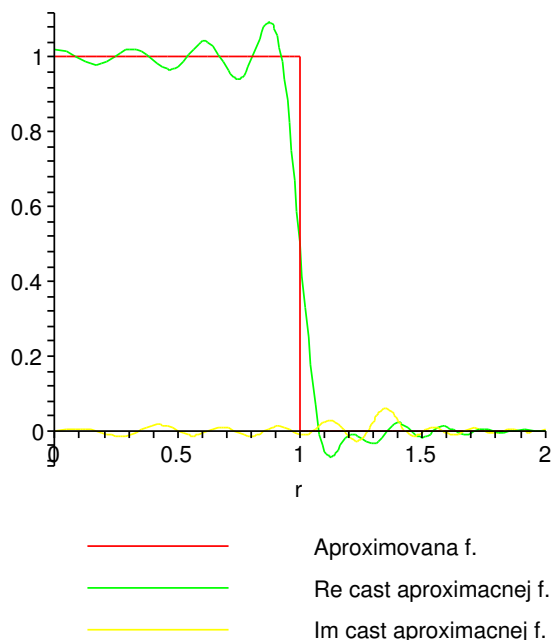
Obrázok 5.17. Vypočítanie integrálu $n = 32$.

5.5.3 Dimenzia $n=40$

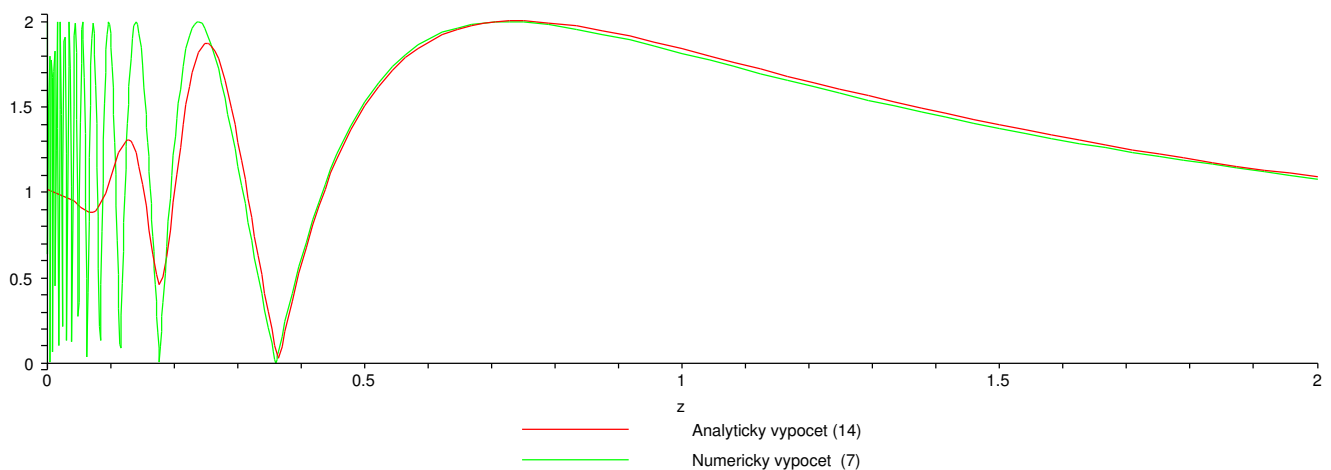
Nájdené minimum $Q = 1,281980608 \cdot 10^{-2}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -3,78915 + I(-4,76263)$	$B_1 = 3,24411 + I(4,71738)$
$A_2 = 1,88218 + I(4,63662)$	$B_2 = 5,52423 + I(-11,2417)$
$A_3 = -0,995329 + I(0,671771)$	$B_3 = 7,15705 + I(4,34362)$
$A_4 = 1,97745 + I(3,09278)$	$B_4 = 5,09082 + I(2,31532)$
$A_5 = -0,12372 + I(-0,167933)$	$B_5 = 1,12785 + I(11,5626)$
$A_6 = -3,70368 + I(-0,533156)$	$B_6 = 8,88369 + I(-13,2878)$
$A_7 = 0,211277 + I(5,76197)$	$B_7 = 5,63285 + I(5,69563)$
$A_8 = 1,76066 + I(-6,90641)$	$B_8 = 3,51396 + I(-1,76362)$
$A_9 = 3,47204 + I(-0,271217)$	$B_9 = 3,18558 + I(-7,34423)$
$A_{10} = 0,329176 + I(-1,52044)$	$B_{10} = 10,4842 + I(0,820272)$

Tabuľka 5.10. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = H(1 - r)$



Obrázok 5.18. Aproximácia $f(x) = H(1 - x)$ pre dimenziu $n = 40$.



Obrázok 5.19. Výpočet integrálu $n = 40$.

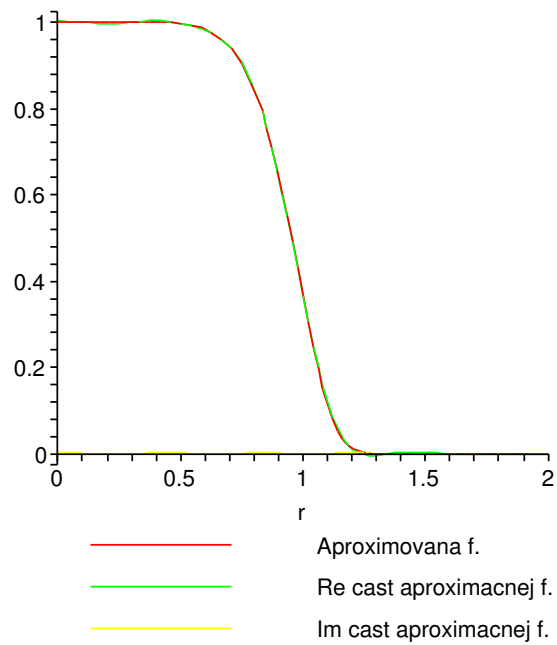
5.6 Rozklad $f(x) = e^{-x^8}$

5.6.1 Dimenzia $n=24$

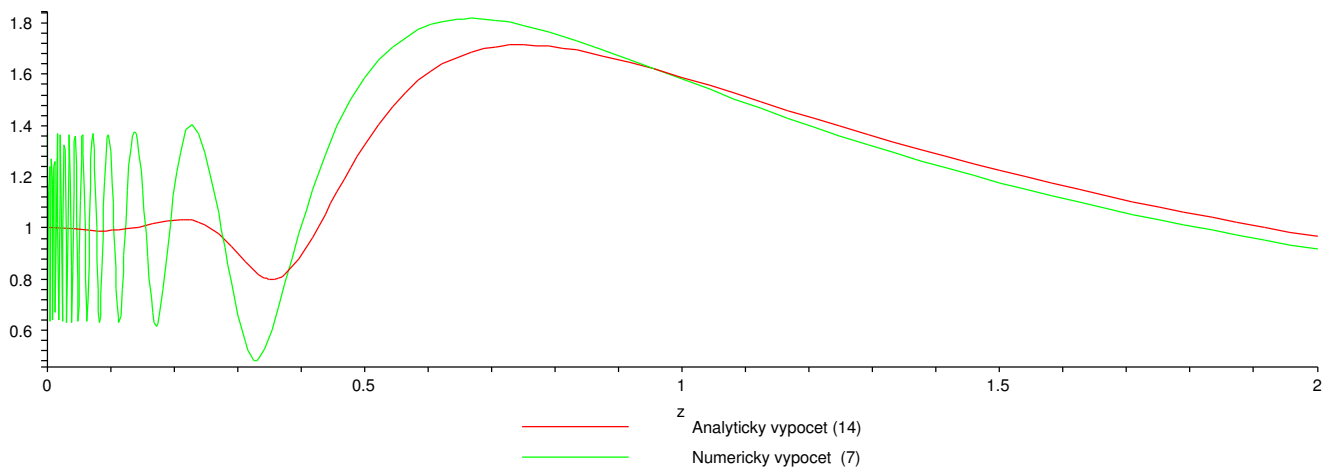
Nájdene minimum $Q = 1,726454824 \cdot 10^{-5}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -2,6328 + I(-0,830674)$	$B_1 = 3,4298 + I(-3,31386)$
$A_2 = 2,77213 + I(0,467435)$	$B_2 = 3,10059 + I(0,701726)$
$A_3 = -1,8749 + I(-0,517606)$	$B_3 = 3,35069 + I(3,82049)$
$A_4 = 0,682893 + I(0,0773448)$	$B_4 = 3,20179 + I(-5,86899)$
$A_5 = 0,274139 + I(0,143294)$	$B_5 = 2,72633 + I(6,80006)$
$A_6 = 1,78104 + I(0,66315)$	$B_6 = 3,06658 + I(-0,350164)$

Tabuľka 5.11. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^8}$



Obrázok 5.20. Aproximácia $f(x) = e^{-x^8}$ pre dimenziu $n = 24$.



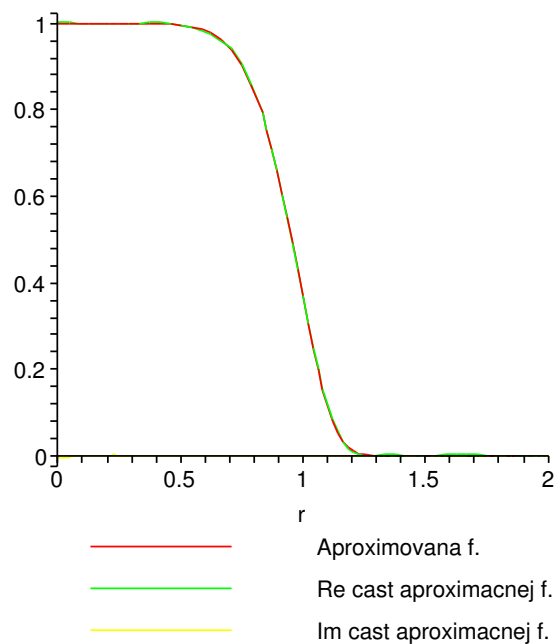
Obrázok 5.21. Vypočítanie integrálu $n = 24$.

■ 5.6.2 Dimenzia $n=32$

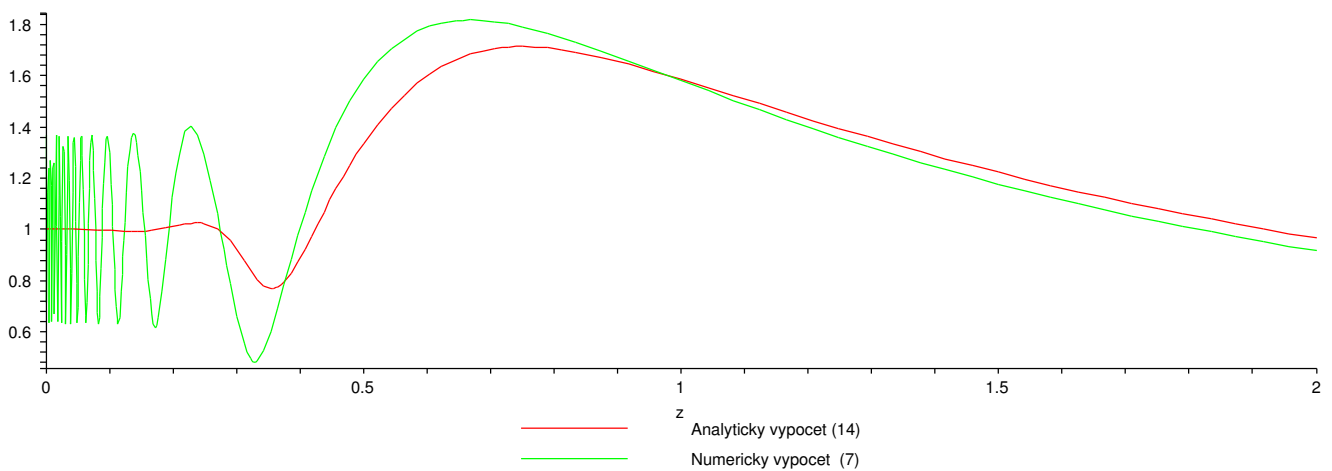
Nájdené minimum $Q = 1,066809642 \cdot 10^{-5}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -0,552641 + I(0,558859)$	$B_1 = 2,15335 + I(3,02904)$
$A_2 = 0,163667 + I(-1,32522)$	$B_2 = 2,20604 + I(-4,16184)$
$A_3 = 0,251496 + I(-0,00690305)$	$B_3 = 2,28828 + I(-6,58323)$
$A_4 = 0,330485 + I(-0,174878)$	$B_4 = 8,46671 + I(-2,2794)$
$A_5 = 0,08468 + I(-0,0918497)$	$B_5 = 1,64336 + I(6,34217)$
$A_6 = -1,19024 + I(0,870721)$	$B_6 = 2,07598 + I(-3,77237)$
$A_7 = 0,143861 + I(-0,64641)$	$B_7 = 2,39155 + I(-1,43174)$
$A_8 = 1,7697 + I(0,813302)$	$B_8 = 2,60502 + I(0,403618)$

Tabuľka 5.12. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^8}$



Obrázok 5.22. Aproximácia $f(x) = e^{-x^8}$ pre dimenziu $n = 32$.



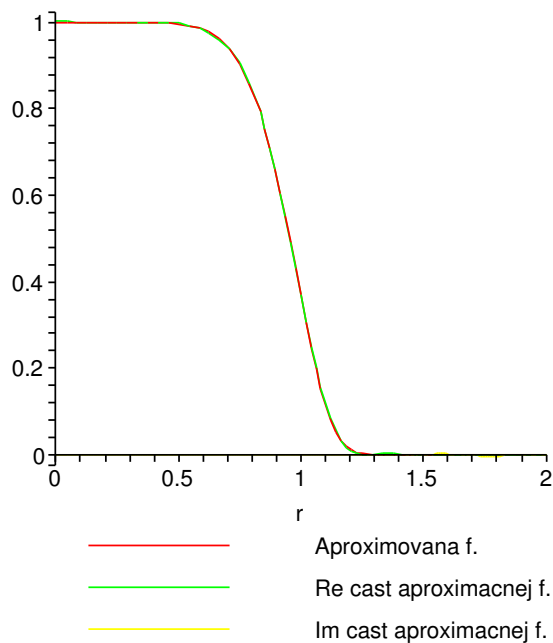
Obrázok 5.23. Vypočítanie integrálu $n = 32$.

5.6.3 Dimenzia $n=40$

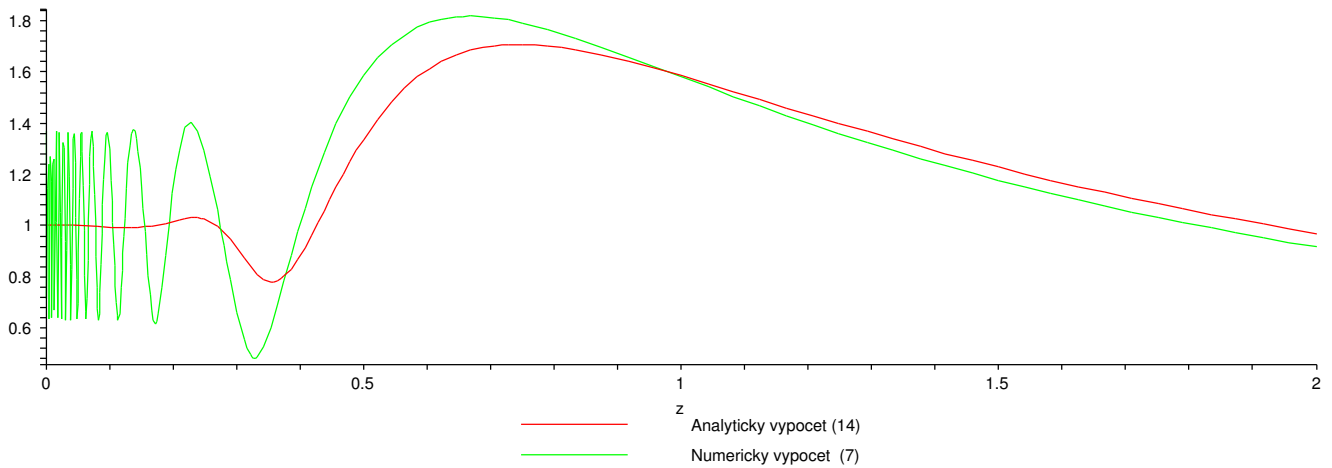
Nájdené minimum $Q = 6,887483154 \cdot 10^{-6}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -0,74596 + I(-0,699)$	$B_1 = 2,55981 + I(5,62166)$
$A_2 = 0,49741 + I(0,479559)$	$B_2 = 6,56094 + I(11,94032)$
$A_3 = 0,719447 + I(1,00925)$	$B_3 = 2,17315 + I(1,05421)$
$A_4 = 0,136871 + I(-0,121048)$	$B_4 = 8,30609 + I(-2,52131)$
$A_5 = 0,234987 + I(-0,177551)$	$B_5 = 2,80585 + I(-6,87597)$
$A_6 = -0,156625 + I(0,258447)$	$B_6 = 1,60733 + I(2,99898)$
$A_7 = 0,472065 + I(0,638183)$	$B_7 = 2,71476 + I(6,30407)$
$A_8 = 0,692153 + I(-0,556409)$	$B_8 = 2,21347 + I(-1,17894)$
$A_9 = -1,86716 + I(0,187064)$	$B_9 = 3,15531 + I(-3,86281)$
$A_{10} = 1,0182 + I(-1,01848)$	$B_{10} = 5,45127 + I(-2,44086)$

Tabuľka 5.13. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^8}$



Obrázok 5.24. Aproximácia $f(x) = e^{-x^8}$ pre dimenziu $n = 40$.

Obrázok 5.25. Vypoýpočet integrálu $n = 40$.

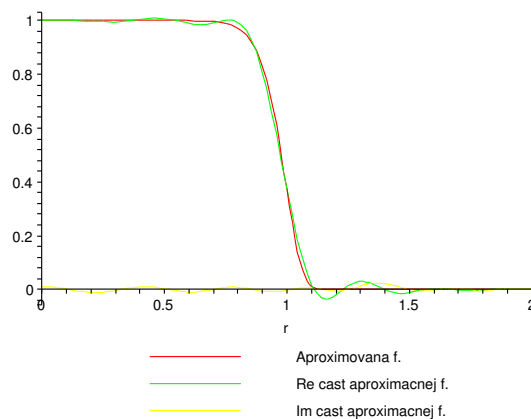
5.7 Rozklad $f(x) = e^{-x^{16}}$

5.7.1 Dimenzia $n=24$

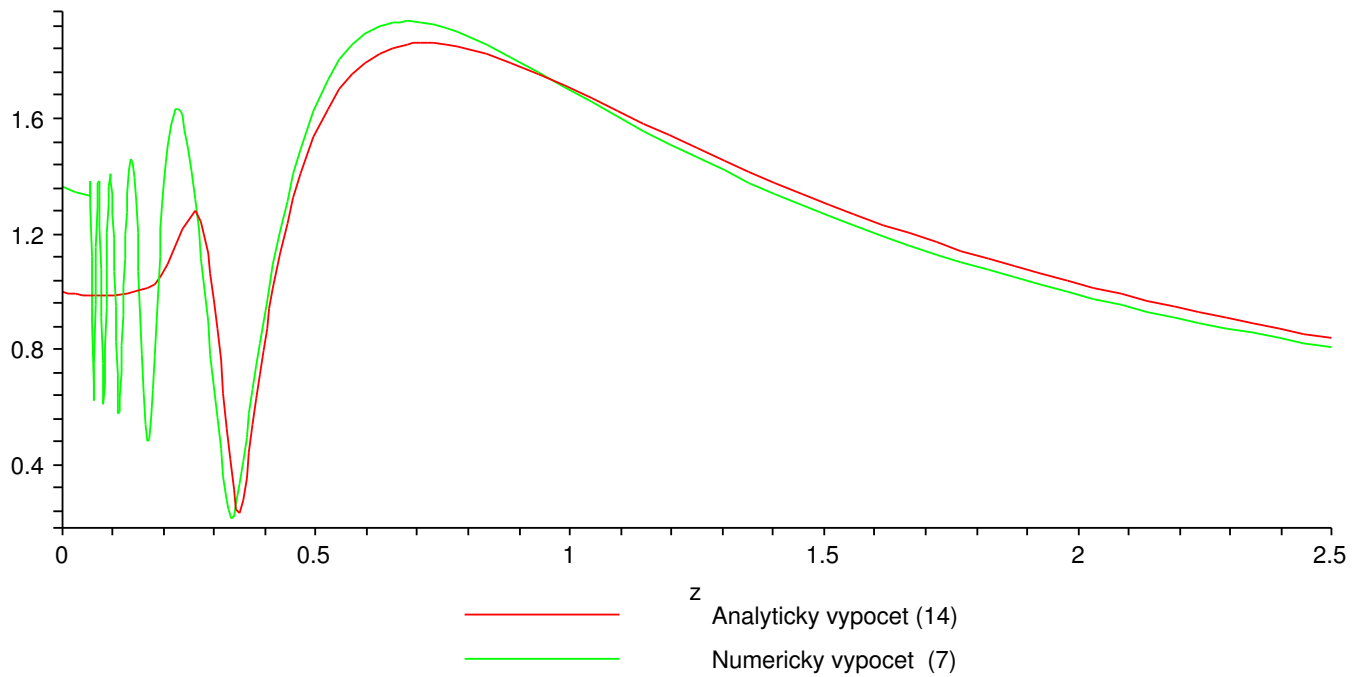
Nájdene minimum $Q = 5.557779216 \cdot 10^{-4}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -3, 28366 + I(-6, 44706)$	$B_1 = 4, 71872 + I(7, 51955)$
$A_2 = 1, 43051 + I(-3, 94958)$	$B_2 = 3, 11073 + I(-1, 45874)$
$A_3 = -4, 80955 + I(4, 79078)$	$B_3 = 2, 68285 + I(-7, 26428)$
$A_4 = 4, 9146 + I(-4, 0483)$	$B_4 = 2, 48723 + I(-7, 30754)$
$A_5 = 5, 12446 + I(4, 19877)$	$B_5 = 3, 82277 + I(7, 36041)$
$A_6 = -2, 37426 + I(5, 46732)$	$B_6 = 3, 98509 + I(2, 81721)$

Tabuľka 5.14. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^{16}}$ $n = 24$



Obrázok 5.26. Aproximácia $f(x) = e^{-x^{16}}$ pre dimenziu $n = 24$.

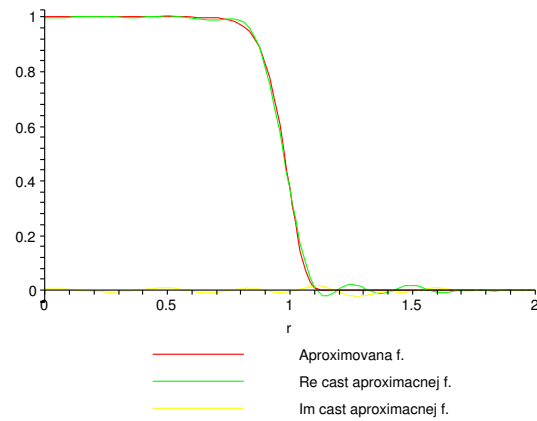
Obrázok 5.27. Vypočítanie integrálu $n = 24$.

5.7.2 Dimenzia $n=32$

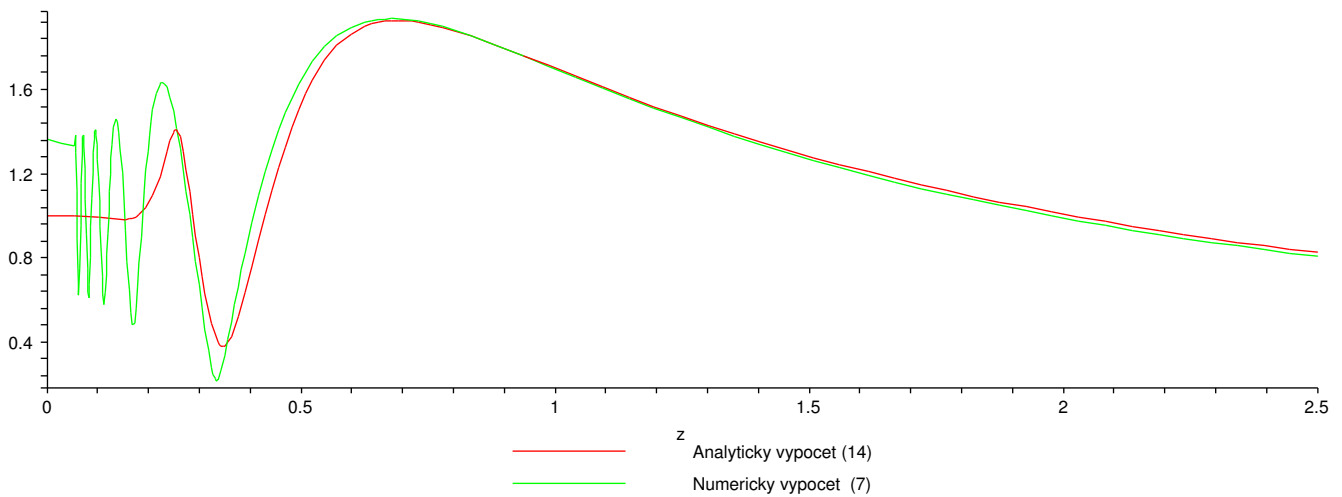
Nájdené minimum $Q = 3,213540550 \cdot 10^{-4}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -0,291758 + I(-1,887667)$	$B_1 = 6,563830 + I(1,881107)$
$A_2 = 2,548261 + I(0,018320)$	$B_2 = 5,340661 + I(6,566674)$
$A_3 = -3,491649 + I(0,620639)$	$B_3 = 3,933709 + I(3,864209)$
$A_4 = 0,050818 + I(-0,117220)$	$B_4 = 1,250076 + I(-8,627864)$
$A_5 = 1,802466 + I(3,997984)$	$B_5 = 3,679927 + I(1,198042)$
$A_6 = 1,518784 + I(-3,330878)$	$B_6 = 3,594480 + I(-0,897100)$
$A_7 = -0,153763 + I(0,244078)$	$B_7 = 1,811737 + I(9,465132)$
$A_8 = -0,986265 + I(0,459838)$	$B_8 = 2,282286 + I(-4,493666)$

Tabuľka 5.15. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^{16}}$ $n = 32$



Obrázok 5.28. Aproximácia $f(x) = e^{-x^{16}}$ pre dimenziu $n = 32$.



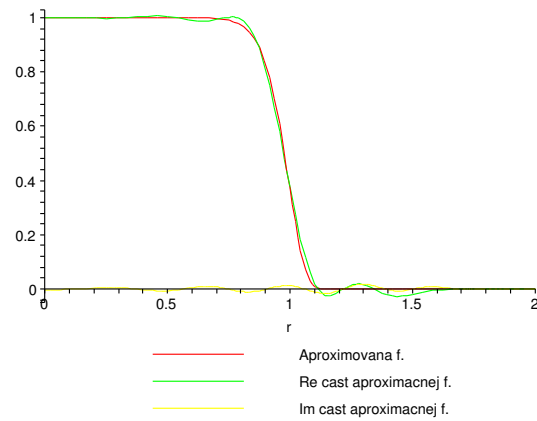
Obrázok 5.29. Vypoýpočet integrálu $n = 32$.

5.7.3 Dimenzia $n=40$

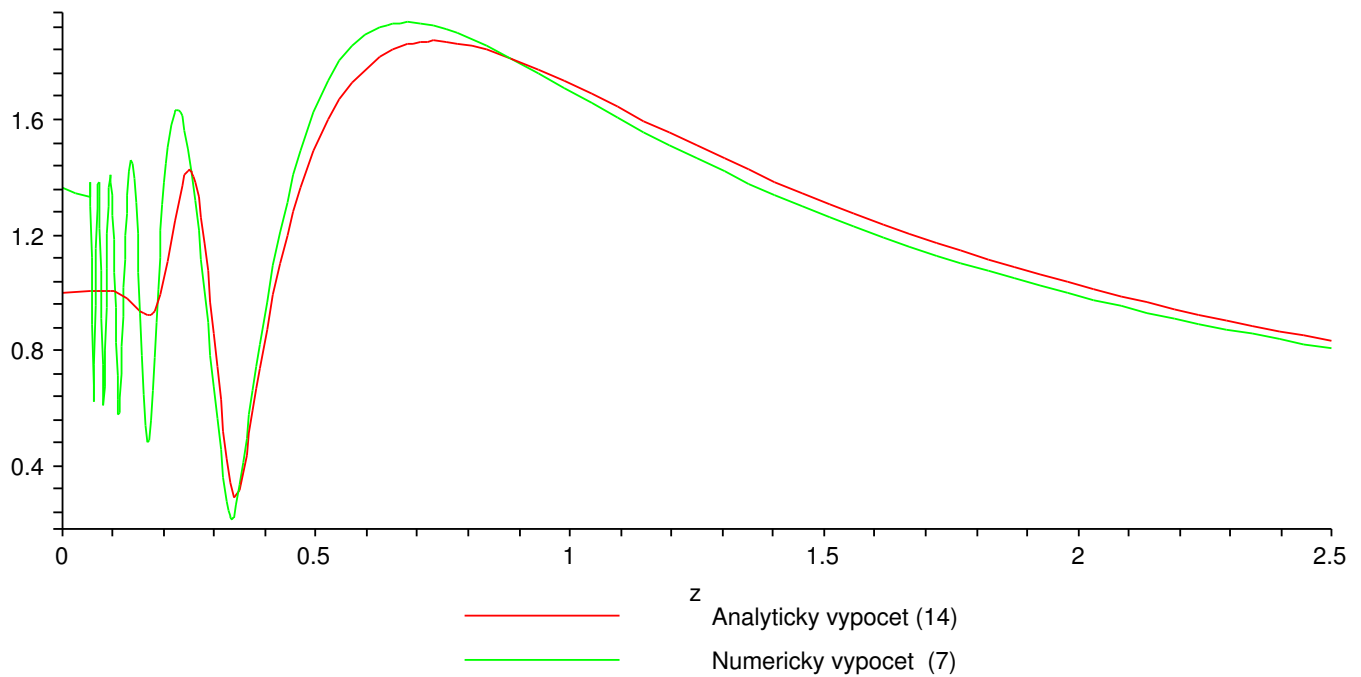
Nájdene minimum $Q = 4,789049387 \cdot 10^{-4}$

A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = 0,537454 + I(-7,233281)$	$B_1 = 3,496466 + I(-1,588748)$
$A_2 = 1,358807 + I(0,706706)$	$B_2 = 2,643489 + I(-0,736042)$
$A_3 = 2,638799 + I(0,471829)$	$B_3 = 5,032903 + I(0,047916)$
$A_4 = 0,999515 + I(-3,682953)$	$B_4 = 2826570 + I(-8,246501)$
$A_5 = 4,266417 + I(3,939193)$	$B_5 = 2,956853 + I(1,588672)$
$A_6 = -9,429185 + I(4,454896)$	$B_6 = 4,016774 + I(-0,023357)$
$A_7 = 1,965868 + I(-3,783873)$	$B_7 = 2,522780 + I(6,317360)$
$A_8 = -0,278108 + I(4,403481)$	$B_8 = 3,337531 + I(-8,213513)$
$A_9 = -1,830321 + I(5,378469)$	$B_9 = 2,937249 + I(6,108285)$
$A_{10} = 0,772266 + I(-4,656889)$	$B_{10} = 4,990212 + I(4,632921)$

Tabuľka 5.16. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^{16}}$

Obrázok 5.30. Aproximácia $f(x) = e^{-x^{16}}$ pre dimenziu.

Výpočet integrálu



Obrázok 5.31. integral e16

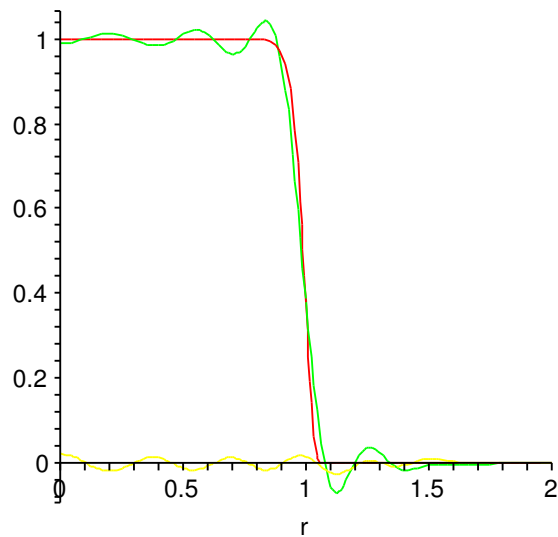
5.8 Rozklad $f(x) = e^{-x^{32}}$

5.8.1 Dimenzia $n=40$

Nájdene minimum $Q = 2,174046306 \cdot 10^{-3}$
 minimum $Q := 0.002174046306$

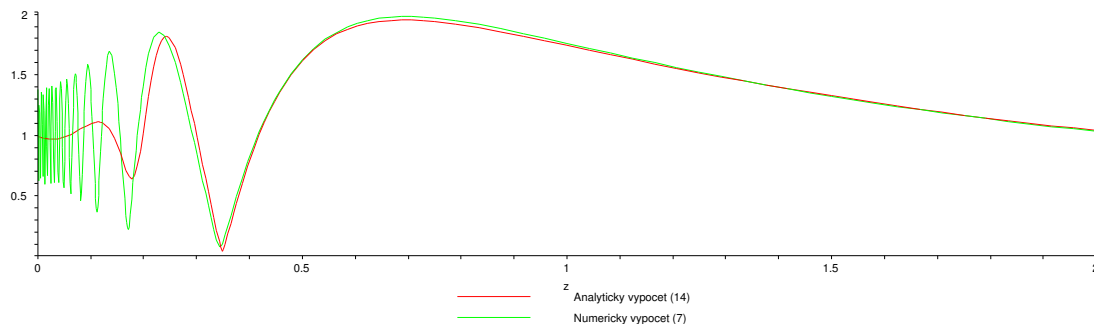
A koeficienty	B koeficienty
$A_1 = -4,769973 + I(0,392073)$	$B_1 = 3,952003 + I(-4,646524)$
$A_2 = 0,992564 + I(2,42775)$	$B_2 = 2,623721 + I(1,522414)$
$A_3 = 4,317694 + I(-3,689528)$	$B_3 = 4,137236 + I(-8,657948)$
$A_4 = 0,087808 + I(-2,217658)$	$B_4 = 9,854549 + I(6,228577)$
$A_5 = -0,804739 + I(-3,430404)$	$B_5 = 4,247483 + I(8,829279)$
$A_6 = 1,982717 + I(-2,809482)$	$B_6 = 2,989224 + I(0,992122)$
$A_7 = -1,706493 + I(2,130755)$	$B_7 = 3,536760 + I(-10,202897)$
$A_8 = -4,190818 + I(4,409743)$	$B_8 = 6,068917 + I(2,412043)$
$A_9 = 3,086804 + I(1,829758)$	$B_9 = 3,026738 + I(7,860202)$
$A_{10} = 1,992011 + I(1,363726)$	$B_{10} = 2,416238 + I(-0,342329)$

Tabuľka 5.17. Koeficienty rozkladu pre funkciu $f(x) = e^{-x^{32}}$



— Aproximovana f.
— Re cast aproximacnej f.
— Im cast aproxiacnej f.

Obrázok 5.32. Aproximácia $f(x) = e^{-x^{32}}$ pre dimenziu $n = 40$.



Obrázok 5.33. Vypočítanie integrálu $n = 40$.

5.9 Záver

V mojej práci popisujem rozklad tvaru kmitu rovinného, osovo symetrického akustického meniča do radu Gaussových funkcií a pre zvolené distribúcie som našiel koeficienty tohoto rozkladu, ktoré popisujem v kapitole 5.3. Keďže funkcia popisujúca tvar kmitu, je multimodálna ako vhodný spôsob nájdenia týchto koeficientov som zvolil variantu evolučného algoritmu Evolučné stratégie $(\mu, \lambda) - ES$ popísaného v kapitole 4.3.2. Tento algoritmus som implementoval v jazyku C++ a na čiastočné výpočty som použil knžnicu Numerical Recipies. Celý postup je popísaný v kapitole 5.1. Algoritmus som otestoval na testovacích funkciách ako N-rozmerná parabola, Griewankova funkcia a Schewfe-lova funkcia a následne použil pri minimalizácii výrazu (17). Ako príklad vhodných parametrov, ktoré som našiel, algoritmu Evolučné stratégie $(\mu, \lambda) - ES$ uvádzam:

parametre algoritmu	hodnoty
dimenzia	24
počet jedincov	1050
počet rodičov	150
počet generácií	300
počet evolúcií	100
počiatočný σ parameter	0.1
τ parameter	0.1

Tabuľka 5.18. Parametre algoritmu $(\mu, \lambda) - ES$.

Výsledky jednotlivých rozkladov a praktické použitie vidíme v závernej kapitole 5.3 až 5.8



Literatura

- [1] Zdeněk Škvor. *Akustika a elektroakustika*. Academia Praha, 1998.
- [2] David T. Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics*. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] Joseph Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [4] Wen J. J. and Breazeale M. A. A diffraction beam field expressed as the superposition of gaussian beams. *The Journal of the Acoustical Society of America*, (83):1752–1756, 1988.
- [5] Milan Červenka and Michal Bednařík. Non-paraxial model for a parametric acoustic array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, (134):933–939, 2013.
- [6] unknown. Problem des handlungsreisenden, 2006.
http://de.wikipedia.org/wiki/Problem_des_Handlungsreisenden.
- [7] Eric W Weisstein. Sieve of eratosthenes. *MathWorld-A Wolfram Web Resource*, 2013-12-16.
<http://mathworld.wolfram.com/SieveofEratosthenes.html>.
- [8] Britannica. Sieve of eratosthenes.
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/191062/sieve-of-Eratosthenes>.
- [9] Ivan Zelinka, Zuzana Oplatková, Miloš Šeda, Pavel Ošmera, and František Včelař. *Evoluční výpočetní techniky*. BEN, Praha, 1996.
- [10] Vladimír Černý. Thermodynamical approach to the traveling salesman. *JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATION*, 1985 Jan.
<http://mkweb.bcgsc.ca/papers/cerny-travelingsalesman.pdf>.
- [11] A. E. Eiben and J. E. Smith. *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2003.