

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



HABILITAČNÍ PRÁCE

Výpočet magnetických polí a vzájemných indukčností v soustavách
nekoaxiálních cívek obecného tvaru

Stručný obsah

Habilitační práce souhrnně popisuje univerzální výpočtovou metodu, která umožňuje sestavení relativně jednoduchých algoritmů pro výpočet vlastních a vzájemných indukčností tenkých proudových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru ve vzduchu, při libovolné koaxiální a zejména nekoaxiální vzájemné poloze. Umožňuje rovněž výpočet prostorového rozložení magnetického pole, které je těmito cívkami (smyčkami) buzeno při průchodu elektrickým proudem. Při výpočtu se předpokládá rovnoměrné kvazistacionární rozložení proudu.

Všechny části uvedené výpočtové metody byly podrobně popsány a prezentovány formou článků v odborných časopisech [1],[2],[3].

V první části práce jsou v souladu s [1] sestaveny matematické vztahy pro výpočet vzájemné indukčnosti mezi nekoaxiálními cívkami (proudovými smyčkami), z nichž jedna je kruhová a druhá má obecný tvar. Pro tento výpočet jsou použity modifikované vztahy platné pro vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových smyček a cívek.

V druhé části práce je v souladu s [2] popsán obecnější, ale na numerické vyčíslení náročnější, případ dvou tenkostěnných cívek (smyček) zcela libovolného tvaru. Pro řešení tohoto problému je sestavena integrální rovnice, jejíž platnost a fyzikální interpretace je v textu podrobně dokumentována.

Ve třetí části práce je v souladu s [3] popsána alternativní metoda výpočtu magnetického pole tenkých vzduchových proudových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru. Metoda je založena na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů.

Ve všech částech práce jsou sestaveny podrobné výpočtové algoritmy, numerické výsledky výpočtů jsou porovnávány s hodnotami měření na modelech cívek.

Abstract

This habilitation thesis reports summarily on a method by which it is possible to construct simple algorithms for the calculation of the self and mutual inductance of thin-walled solenoids of general shape with parallel axes in both coaxial and non-coaxial relative positions. This method is also applicable to the calculation of the axial and transverse components of the intensity of the magnetic field of current loops and thin-wall air coils (solenoids) of general shape. A complete description of the method has been given in previous articles: [1],[2],[3].

In the first part of the thesis [1], the commonly known mathematical formulas for calculating the mutual inductance of thin coaxial cylindrical coils (thin wall solenoids) in air are modified and generalized so that they are also applicable for the relatively simple calculation of the mutual inductance of thin non-coaxial coils with parallel axes for a situation in which one coil is circular cylindrical and the second is of general shape.

In the second part of the thesis [2], the method is further generalized for the calculation of the self and mutual inductance of thin-walled solenoids with parallel axes in both coaxial and non-coaxial relative positions for a situation in which both the coils may have the arbitrary shape. The method is based on the solution of integral equation, the validity of which is defined in the text and additionally the physical interpretation of each section of the equation is documented.

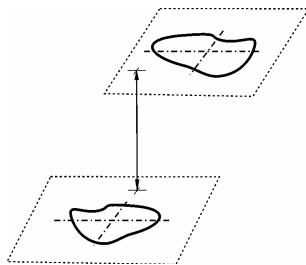
In the third part of the thesis [3], the method is developed to be applied for the calculation of the axial and transverse components of the intensity of the magnetic field of current loops and thin-wall air coils (solenoids). These are planar loops and tightly wound coils with a cross section of an arbitrary shape. The method is based on the superposition of the magnetic field of the equivalent magnetic dipoles.

In all the parts of the thesis, detailed algorithm is compiled and the measurements are then compared with the calculation results.

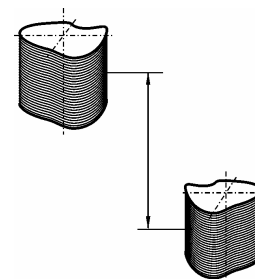
1. Úvod

1.1. Řešená problematika

Práce souhrnně popisuje univerzální výpočtovou metodu, která umožňuje sestavení relativně jednoduchých algoritmů pro výpočet vlastních a vzájemných indukčností tenkých proudových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru ve vzduchu, při libovolné koaxiální a zejména nekoaxiální vzájemné poloze. Umožňuje rovněž výpočet prostorového rozložení magnetického pole, které je těmito cívkami (smyčkami) buzeno při průchodu elektrickým proudem. Konkrétně se jedná o ploché smyčky ležící v paralelních rovinách (Obr.1) a cívky s rovnoběžnými stěnami (Obr.2).

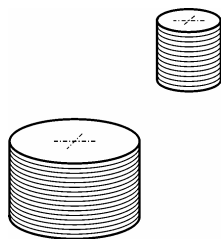


Obr.1. Tenké proudové smyčky obecného tvaru libovolně umístěné v rovnoběžných rovinách



Obr.2. Cívky obecného tvaru s paralelními osami a rovnoběžnými stěnami

U cívek se při odvození matematických vztahů předpokládá konstantní liniová proudová hustota podél tenké stěny cívky. Prakticky to představuje vinutí z tenkých vodičů se závitů těsně nad sebou a kvazistacionární děj, u kterého lze předpokládat stejný elektrický proud ve všech závitěch.



Obr.3. Kruhové válcové cívky s paralelními osami



Obr.4. Obdélníkové cívky s paralelními osami

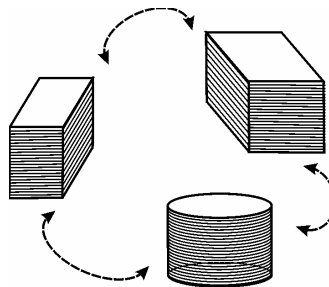
Bylo ověřeno, že vztahy tohoto typu platí velmi dobře i pro cívky, u kterých uvedené předpoklady zcela splněny nejsou (viz [6],[7]). Výpočet magnetického pole, vlastních a vzájemných indukčností tenkých cívek, lze navíc následnou integrací v příčném směru rozšířit i pro cívky se stěnou konečné tloušťky.

Všechny části uvedené výpočtové metody byly podrobně popsány a prezentovány formou článků v odborných časopisech [1],[2],[3],[6],[7]. Pro snadnější orientaci jsou v následujícím textu na mnoha místech použity podobné obrázky i matematický popis.

Popisovaná metoda výpočtu se vyznačuje tím, že zachovává formálně stejný tvar matematických vztahů bez ohledu na tvar cívek a smyček. Tvar je ve vztazích popsán konkrétní, k tomuto účelu definovanou, tvarovou funkcí, která má jednoduchou geometrickou interpretaci (viz část **P-1.3**) a je unikátní pro

každý tvar příčného řezu cívky nebo smyčky. Řešení problému výpočtu vzájemných indukčností a magnetických polí cívek různých tvarů se tak transformuje na řešení relativně jednoduché a jednoznačně definované geometrické úlohy, kterou je hledání uvedené tvarové funkce.

Pro praktické aplikace se většinou používají cívky kruhového nebo obdélníkového tvaru. Použití metody je proto demonstrováno právě pro tento tvar cívek (Obr.3, Obr.4, Obr.5). Pro jiné tvary by byl matematický popis analogický, lišil by se pouze konkrétní podobou tvarové funkce, která by musela být pro daný tvar sestavena (viz část **P-1.3**).



Obr.5. Různé kombinace kruhových a obdélníkových válcových cívek s paralelními osami

1.2. Cíl práce

Vzduchové cívky a proudové smyčky se v různých aplikacích silnoproudé i slaboproudé elektrotechniky vyskytují velice často. Používají se záměrně nebo se vytvoří jako přirozená součást při propojení ostatních komponent v elektrických obvodech. Při obvodovém řešení souvisejících problémů je obvykle nutné určit jejich vzájemné magnetické vazby. K tomu by mohly napomoci i uvedené publikace, neboť konkrétním cílem nebylo pouze nalezení obecného matematického popisu, ale především prezentace vytvořené sady výpočtových algoritmů, které mohou usnadnit případné praktické použití, aniž by bylo potřebné dlouze studovat celý text či řadu souvisejících teoretických problémů.

Algoritmy jsou sestaveny a doplněny rozměrovými obrázky tak, aby byl zřejmý význam všech vstupních a výstupních parametrů. Každý algoritmus je pro kontrolu navíc doplněn sadou počítaných číselných hodnot a u některých algoritmů jsou výsledky porovnány rovněž s měřeními na modelech, které byly k tomuto účelu sestaveny.

1.3. Základní princip výpočtové metody

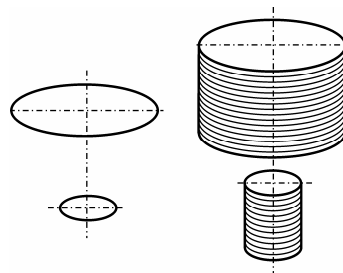
Metoda výpočtu je založena na postupném zobecňování vztahů platných pro soustavy koaxiálních kruhových válcových cívek a proudových smyček ve vzduchu (Obr.6). Tyto vztahy se v různých modifikacích často používají již celou řadu let. Pro přehlednost, úplnost a snadné numerické vyčíslení jsou související vztahy souhrnně začleněny i do této práce. Jsou zde upraveny, zjednodušeny a následně přepsány do podoby algoritmů matematického programu Mathcad (viz část **P-1.4.1**). V této podobě jsou použitelné nejen jako dílčí části pro návazné výpočty nekoaxiálních problémů, ale samozřejmě rovněž i přímo pro speciální případ výpočtu v koaxiálních soustavách.

Výpočty vzájemných indukčností kruhových koaxiálních proudových smyček a cívek je možné najít v nesčetném počtu publikací v minulé i současné době (viz např. [15]).

V případě nekoaxiálních cívek se však již nejedná o osově symetrický problém řešitelný ve 2D. Celé řešení je numericky náročnější a bez výpočetní techniky obtížně zvládnutelné. Z tohoto důvodu se publikace v minulosti omezovaly pouze na řešení určitých speciálních případů. Ani v současné době nebyla uceleně publikována univerzální metoda výpočtu. V mnohých publikacích je problém řešen pouze částečně a často je použit nepřehledný a pro numerické vyčíslení nevhodný matematický aparát (viz [16] až [21]). Metoda popisovaná v této práci volně navazuje na přístup naznačený v [16], podstatně jej však rozšiřuje a konkretizuje.

Prezentovaná metoda výpočtu umožňuje určit též vlastní indukčnost cívek obecného tvaru, která je počítána jako vzájemná indukčnost dvou stejnohlých cívek. Tímto způsobem je potom možné vyjádřit nejen vztah pro výpočet vlastní indukčnosti válcové kruhové cívky, který je všeobecně znám, ale například i prakticky dobře použitelný vztah pro výpočet vlastní indukčnosti obdélníkové cívky.

Uvedené úlohy je samozřejmě možné úspěšně řešit i ryze numerickými metodami (konečné prvky, konečné diference, integrální rovnice). Pokud je však potřebné vyčíslit vlastní a vzájemné indukčnosti velkého počtu induktivně vázaných prvků při časté modifikaci parametrů, což připadá v úvahu pro různé optimalizační výpočty nebo při analýze náhradních obvodů složitých soustav cívek nebo jejich částí, je tento semi-analytický způsob výpočtu stále nesrovnatelně operativnější, rychlejší a přesnější.



Obr.6. Koaxiální kruhové smyčky a kruhové válcové cívky

1.4. Struktura a členění práce

Práce je pro snadnější orientaci formálně rozdělena na dvě části.

V první části jsou odvozeny stěžejní matematické vztahy popsání výpočtové metody. Jsou zde prezentovány hlavní výpočtové algoritmy, jejichž platnost je ověřena srovnáním výsledků numerických výpočtů a měření.

V druhé části práce jsou v kapitolách, které jsou před pořadovým číslem označeny písmenem P, popsány numerické metody a začleněny všechny vytvořené pomocné algoritmy, na které se v základním textu odkazuje na několika místech. Jsou zde rovněž popsány použité výpočtové prostředky, modely cívek a postup prováděných měření na těchto modelech.

2. Výpočet vlastních a vzájemných indukčností nekoaxiálních smyček a cívek obecného tvaru

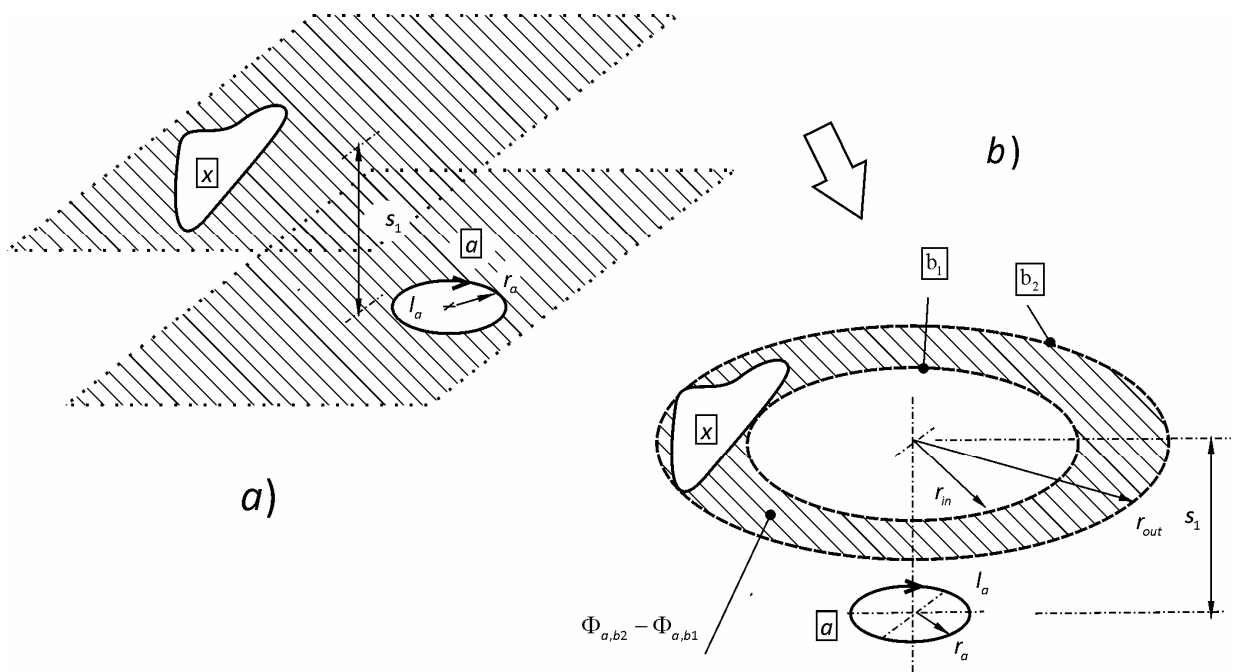
V této části je v souladu s [1] nejprve popsán postup výpočtu vzájemné indukčnosti **nekoaxiálních** tenkostěnných cívek a tenkých proudových smyček pro méně obecný případ, ve kterém má jedna smyčka (cívka) kruhový tvar a druhá je libovolná (viz **část 2.1**). Následně je v souladu s [2] popsán obecnější, ale na numerické vyčíslení náročnější, případ dvou tenkostěnných cívek (smyček) zcela libovolného tvaru (viz **část 2.3**).

2.1. První smyčka(cívka) má kruhový tvar, druhá je libovolná

2.2. Základní popis metody

Pokud má být stanovena vzájemná indukčnost mezi proudovými smyčkami (cívkami), z nichž jedna je kruhová a druhá má obecný tvar, lze s výhodou použít modifikované vztahy pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových smyček a cívek (viz Obr.6). Tyto vztahy jsou v různých obměnách poměrně dobře známe, pro úplnost jsou však v části **P-1.2** souhrnně odvozeny, zjednodušeny a přepsány do podoby algoritmů vhodných pro další použití v této práci.

Princip metody je v následujícím textu podrobně popsán na příkladu výpočtu vzájemné indukčnosti dvou tenkých proudových smyček (Obr.7). Zcela stejný postup odvození by však platil pro tenké cívky i kombinace cívek a smyček. Rovněž výsledek, jak bude ukázáno, by byl formálně shodný.



Obr.7. Kruhová proudová smyčka a proudová smyčka obecného tvaru

Dvě v obecném případě nekoaxiální proudové smyčky, jedna kruhová a druhá obecného tvaru, jsou zobrazeny na Obr.7a. Kruhová smyčka je označena \boxed{a} a má poloměr r_a , smyčka obecného tvaru je označena \boxed{x} . Smyčky leží v rovnoběžných rovinách ve vzdálenosti s_1 .

Předpokládejme, že máme k dispozici matematický vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových smyček. Takový vztah je podrobně odvozen v části **P-1.2.1** (viz, (101),(102) nebo **Alg.21**) a je zapsán v tomto formálním tvaru:

$$M_{\text{loop_loop}}(R_1, R_2, s) \quad (1)$$

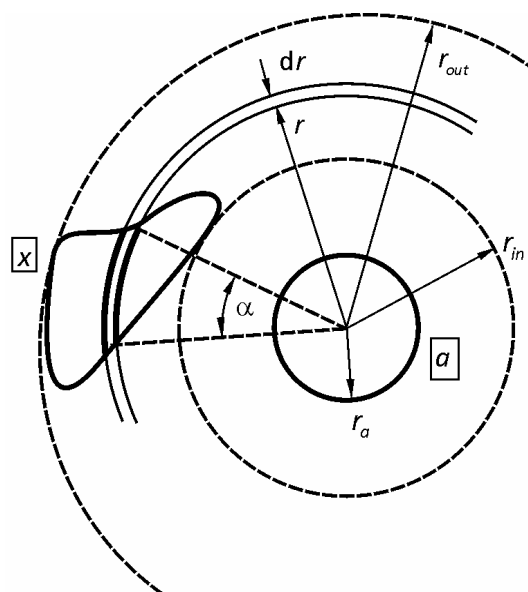
R_1, R_2 jsou poloměry smyček, s je jejich vzdálenost v osovém směru.

Pokud protéká kruhovou smyčkou \boxed{a} na obrázku Obr.7.a elektrický proud o velikost i_a , v okolí smyčky se vybudí magnetické pole. Vzájemná indukčnost mezi smyčkami \boxed{a} a \boxed{x} je dána odpovídající částí magnetického indukčního toku vybuzeného smyčkou \boxed{a} , který prochází plochou smyčky \boxed{x} .

Pokud ohraničíme obrys smyčky \boxed{x} dvěma pomocnými kruhovými smyčkami $\boxed{b_1}, \boxed{b_2}$ o poloměrech r_{in} a r_{out} (Obr.7.b), lze magnetický tok ve smyčce \boxed{x} stanovit jako ekvivalentní část magnetického toku procházejícího ve vyšrafovaném mezikruží na obrázku Obr.7b. Magnetický tok ve vyšrafované oblasti je dán rozdílem magnetických toků ve smyčce $\boxed{b_2}$ a $\boxed{b_1}$:

$$\Phi_{b_2-b_1} = \Phi_{b_2} - \Phi_{b_1} = (M_{a,b_2} - M_{a,b_1})i_a = [M_{\text{loop_loop}}(r_a, b_2, s_1) - M_{\text{loop_loop}}(r_a, b_1, s_1)]i_a \quad (2)$$

Ekvivalentní část magnetického toku, který prochází plochou smyčky \boxed{x} , lze stanovit následující úvahou (viz Obr.8).



Obr.8. Magnetický tok tekoucí proudovou smyčkou \boxed{x}

Magnetický tok $d\Phi(r)$ tekoucí elementárním mezikružím o poloměrech $r, r + dr$ je (Obr.8):

$$\begin{aligned} d\Phi(r) &= \Phi_{a,r+dr} - \Phi_{a,r} = \left(M_{\text{loop_loop}}(r_a, r + dr, s_1) - M_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) \right) i_a = \\ &= \frac{M_{\text{loop_loop}}(r_a, r + dr, s_1) - M_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1)}{dr} i_a dr = \\ &= dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) i_a dr \end{aligned} \quad (3)$$

$dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s)$ značí derivaci vztahu (1) pro vzájemnou indukčnost dvou koaxiálních kruhových smyček s poloměry r_a, r podle poloměru r druhé smyčky. Funkce pro výpočet této derivace v různých modifikacích je pospána v (**P-1.2.1, Alg.22**) a je označena jako $dM_{\text{loop_loop}}(R_1, r, s)$.

Pro stanovení poměrné části elementárního magnetického toku, který prochází plochou smyčky \boxed{x} , je v této práci definována tvarová funkce X_{arc} (viz část **P-1.3**). Tato funkce udává na proměnném poloměru r velikost úhlu α , pod kterým kružnice se středem v místě středů koaxiálních smyček a, b_1, b_2 vytíná oblouk na smyčce \boxed{x} (Obr.8):

$$\alpha = X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}) \quad (4)$$

Parametry s_2, s_3 popisují obecně vzájemnou polohu smyček \boxed{a} a \boxed{x} v příčném směru, parametry $\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}$ popisují vlastní tvar smyčky \boxed{x} . Význam všech parametrů a konkrétní podoba tvarové funkce pro kruhovou a obdélníkovou cívku (smyčku) je podrobně vysvětlena v části **P-1.3**.

V části vytknutého elementárního mezikruží smyčky \boxed{x} teče poměrná část elementárního magnetického toku $\frac{\alpha(r)}{2\pi} d\Phi(r)$. Pro celkový magnetický tok buzený smyčkou \boxed{a} a tekoucí smyčkou \boxed{x} bude potom platit:

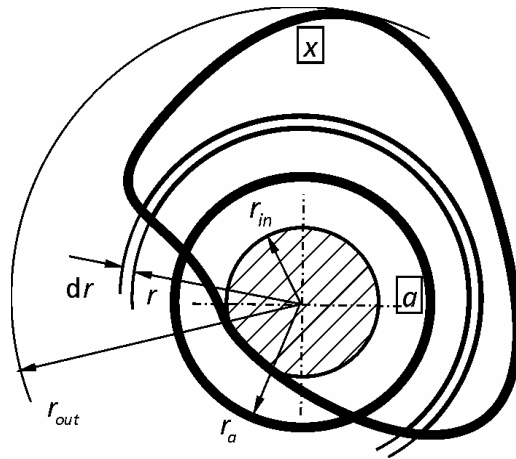
$$\begin{aligned} \Phi_{\boxed{a}, \boxed{x}} &= \\ &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{\alpha(r)}{2\pi} i_a dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) dr = \\ &= i_a \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) dr \end{aligned} \quad (5)$$

Výsledný vztah pro vzájemnou indukčnost dvou nekoaxiálních proudových smyček \boxed{a} a \boxed{x} je potom:

$$\begin{aligned} M_{\boxed{a}, \boxed{x}} &= \\ &= \frac{\Phi_{\boxed{a}, \boxed{x}}}{i_a} = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{\alpha(r)}{2\pi} dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) dr = \\ &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{loop_loop}}(r_a, r, s_1) dr \end{aligned} \quad (6)$$

Obecně může příčný průmět smyčky \boxed{a} ležet uvnitř příčného průmětu smyčky \boxed{x} , nebo jej protínat (Obr.9). Vztah (6) je použitelný i v tomto případě, zde však bude platit $r_{in} = 0$ (viz Obr.8, Obr.9). Ve společné části průmětu smyček \boxed{a} a \boxed{x} , kde tvarová funkce nabývá hodnoty 2π , by se však následně integroval prvotně derivovaný vztah pro vzájemnou indukčnost koaxiálních smyček. Rozdělením integrálu na dvě části a posunutím vnitřního poloměru integrace podle (Obr.9) lze tuto duplicitu eliminovat a vztah (6) ještě dále zobecnit:

$$\begin{aligned}
 M_{\boxed{a},\boxed{x}} &= \\
 &= \int_0^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{loop_loop}(r_a, r, s_1) dr = \\
 &= \int_0^{r_{in}} dM_{loop_loop}(r_a, r, s_1) dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{loop_loop}(r_a, r, s_1) dr
 \end{aligned}
 \tag{7}$$



Obr.9. Obrys kruhové smyčky \boxed{a} protíná obrybecné smyčky \boxed{x}

Po výsledné úpravě a zpětném vyčíslení prvního integrálu ve vztahu (7) je potom možné oddělit aditivní člen, který se přičítá pouze v případě, kdy se příčné průměty smyček protínají nebo leží jeden uvnitř druhého. Velikost tohoto členu je rovna vzájemné indukčnosti koaxiálních smyček o poloměrech r_a, r_{in} s axiální vzdáleností s_1 . Výsledný vztah pro vzájemnou indukčnost nekoaxiálních smyček bude:

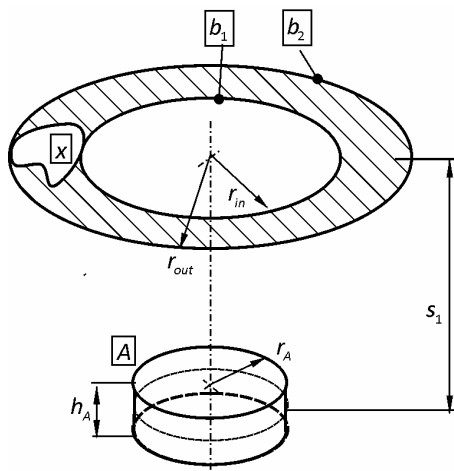
$$\begin{aligned}
 M_{\boxed{a},\boxed{x}} &= \\
 &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{loop_loop}(r_a, r, s_1) dr + \left\{ M_{loop_loop}(r_a, r_{in}, s_1) \right\}^* \\
 & * \{ \text{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů smyček} \}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Pro výpočet vzájemné indukčnosti tenké válcové kruhové cívky \boxed{A} a proudové smyčky obecného tvaru \boxed{x} (Obr.10) musí platit na základě zcela identických úvah velice podobná rovnice jako (8).

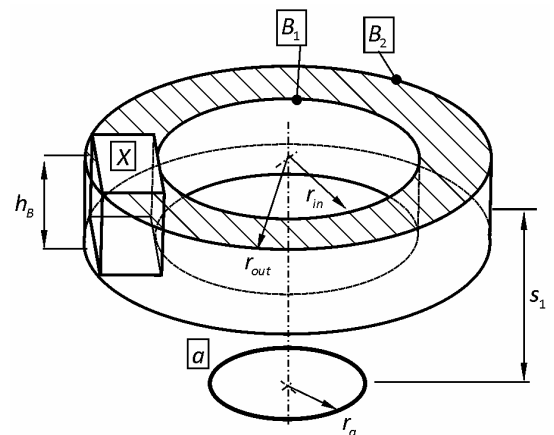
Místo dosazených vztahů pro vzájemnou indukčnost koaxiálních kruhových proudových smyček se zde však objeví vzájemná indukčnost kruhové cívky a kruhové proudové smyčky (viz funkce $M_{\text{sol_loop}}$: **P-1.2.2**, (106),(107),**Alg.23**) a její derivace (viz funkce $dM_{\text{sol_loop}}$: **P-1.2.2**, (107),(109) ,**Alg.24**).

$$M_{\boxed{A},\boxed{X}} = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{\text{sol_loop}}(r_A, h_A, N_A, r, s_1) dr + \{M_{\text{sol_loop}}(r_A, h_A, N_A, r_{\text{in}}, s_1)\}^* \quad (9)$$

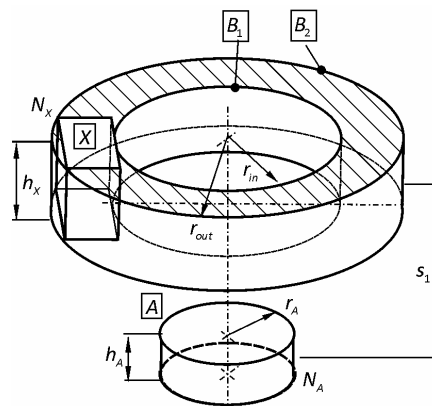
*{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů}



Obr.10. Kruhová tenká cívka a proudová smyčka obecného tvaru



Obr.11. Kruhová proudová smyčka a tenká cívka obecného tvaru



Obr.12. Tenká válcová cívka a tenká cívka obecného tvaru

Zcela analogicky platí obdobný vztah (10) rovněž pro výpočet vzájemné indukčnosti kruhové proudové smyčky \boxed{a} a tenké cívky obecného tvaru \boxed{X} podle (Obr.11) a rovněž vztah (11) pro vzájemnou indukčnost dvou tenkých cívek, z nichž jedna je kruhová \boxed{A} a druhá má obecný tvar \boxed{X} (Obr.12). Ve vztazích v těchto případech opět figurují vzájemné indukčnosti cívek a její derivace pro příslušné uspořádání.

$$M_{\boxed{a},\boxed{X}} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{loop_sol}(r_a, r, h_X, N_X, s_1) dr + \left\{ M_{loop_sol}(r_a, r_{in}, h_X, N_X, s_1) \right\}^* \quad (10)$$

*{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů }

$$M_{\boxed{A},\boxed{X}} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{sol_sol}(R_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr + \left\{ M_{sol_sol}(R_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1) \right\}^* \quad (11)$$

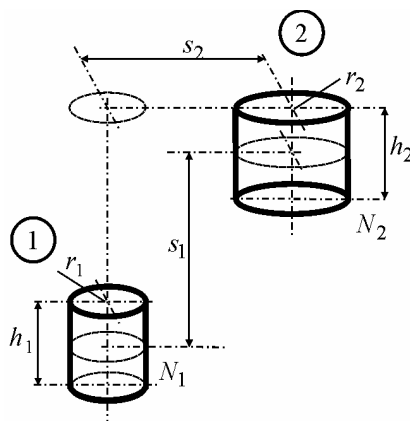
*{přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek }

Funkce M_{loop_sol} a dM_{loop_sol} použité v rovnici (10) pro tenkou kruhovou proudovou smyčku a cívku konečné délky jsou podrobně popsány a odvozeny v **P-1.2.3**. Funkce M_{sol_sol} a dM_{sol_sol} použité v rovnici (11) pro dvě tenké cívky konečné délky jsou podrobně popsány a odvozeny v **P-1.2.4**.

2.2.1. Příklad konkrétní podoby výpočtu pro tenké cívky konečné délky

2.2.1.a) Dvě nekoaxiální tenké kruhové vzduchové cívky

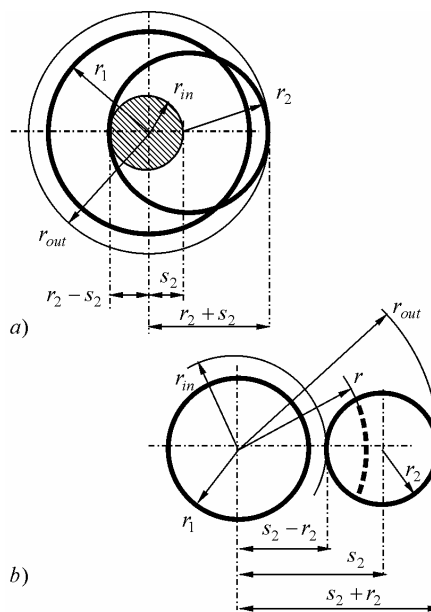
Na obrázku (Obr.13) jsou znázorněny dvě tenké vzduchové nekoaxiální kruhové cívky. Pro výpočet vzájemné indukčnosti byl v souladu s rovnicí (11) napsán algoritmus (**Alg.1**). Tento algoritmus je sestaven a numericky ověřen v matematickém programu Mathcad (viz **P-1.4.1**). Tvarová funkce X_{arc} použitá v tomto algoritmu je pro kruhový průřez cívky nazvána jako $C_{arc}(r, s_2, r_2)$ a její konkrétní tvar je popsán a odvozen v **P-1.3.2**. (viz algoritmus **Alg.27**).



Obr.13. Nekoaxiální tenké kruhové cívky

Integrační meze r_{in}, r_{out} jsou v **Alg.1** pro tuto konkrétní aplikaci vztahu (11) stanoveny podle (Obr.14).

Alg.1 Vzájemná indukčnost dvou tenkých nekoaxiálních kruhových vzduchových cívek		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		(Obr.13)
Vnořené funkce a algoritmy	M_sol_sol_cel	Alg.25
	dM_sol_sol_cel	Alg.26
	C_arc	Alg.27
$M_IND_sol_sol(r_1, h_1, N_1, r_2, h_2, N_2, s_1, s_2) := \begin{cases} r_{in} \leftarrow r_2 - s_2 \\ r_{out} \leftarrow r_2 + s_2 \\ p \leftarrow \int_{r_{in}}^{r_{out}} dM_sol_sol_cel(r_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s_1) \cdot \frac{C_arc(r, s_2, r_2)}{2\pi} dr \\ p \leftarrow p + M_sol_sol_CEL(r_1, h_1, N_1, r_{in}, h_2, N_2, s_1) \quad \text{if } r_2 - s_2 > 0 \\ \text{return } p \end{cases}$		



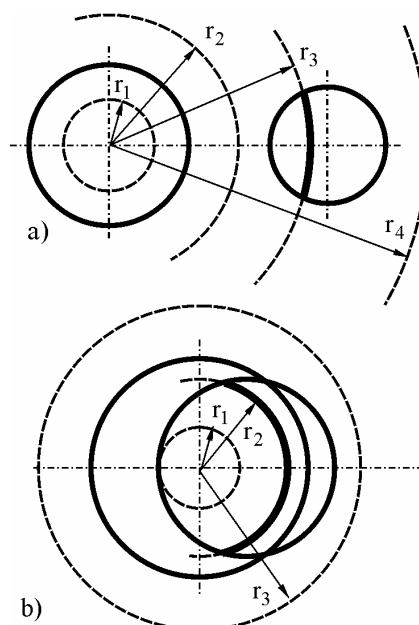
Obr.14. Stanovení mezí integrace ve výpočtovém algoritmu pro dvě nekoaxiální tenké kruhové cívky

2.2.1.b) Zjednodušený algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých nekoaxiálních kruhových vzduchových cívek

Při výpočtu vzájemných indukčností podle vztahu (11) není vždy obecně nutné hledat meze integrace r_{in}, r_{out} (Obr.8, Obr.9). V konkrétním případě dvou kruhových válcových cívek (viz Obr.14) to není nijak podstatné, protože stanovení mezí je i tak velmi jednoduché. Obecně to tak vždy platit nemusí a již v případě obdélníkových cívek je hledání mezí podstatně složitější. Alternativně je potom možné

integravat v celém intervalu od $r_{in} = 0$ do $r_{out} = \infty$, čímž se obsáhne celý potenciální prostor kolem cívky. Správně napsaná funkce X_{arc} , respektive v tomto případě C_{arc} , dává nulovou hodnotu všude tam, kde kružnice na daném integračním poloměru průmět druhé cívky neprotíná (viz poloměry r_1, r_2, r_4 na Obr.15a). Daná místa se tak v hodnotě integrované funkce a ve výsledném integrálu neuplatní. V případě, kdy se průměty cívek protínají, případně leží obrys jedné cívky uvnitř obrysu druhé cívky, nabývá funkce C_{arc} na společné vepsané kružnici hodnotu 2π a započítá se celý vnitřní kruh (viz $r \leq r_1$ na Obr.15b). V tomto vnitřním kruhu se potom duplicitně počítá určitý integrál funkce, která byla předem derivována, obecně to nemusí příliš vadit. Při tomto postupu je však numericky obtížnější vyčíslit integrál, ve kterém integrovaná funkce nabývá ve valné oblasti nulové hodnoty, nebo se jedná o nevlastní meze integrace. Výsledná počítaná hodnota pak může být zatížena numerickými chybami. Zjednodušený algoritmus je popsán v **Alg.1.b** a je velice jednoduchý. Srovnání počítaných hodnot pomocí **Alg.1, Alg.1.b** je v části **2.2.1.c**.

Alg.1.b Vzájemná indukčnost dvou tenkých nekoaxiálních kruhových vzduchových cívek – zjednodušený algoritmus		
Rozměrový obrázek		(Obr.13)
Vnořené funkce a algoritmy	dM_sol_sol_cel	Alg.26
	C_arc	Alg.27
$M_{IND_sol_sol_b}(r_1, h_1, N_1, r_2, h_2, N_2, s_1, s_2) := \int_0^{\infty} dM_{sol_sol_CEL}(r_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s_1) \cdot \frac{C_{arc}(r, s_2, r_2)}{2\pi} dr$		



Obr.15. Zjednodušené meze pro integraci

2.2.1.c) Počítané kontrolní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.1, Alg.1.b

V **Tab.1** jsou pro ilustraci a případné porovnání uvedeny hodnoty počítané pomocí sestavených algoritmů **Alg.1**, **Alg.1.b**. Ve zjednodušeném algoritmu **Alg.1.b** byla pro výpočet určitého integrálu použita integrační metoda implementovaná v programu MathCad speciálně pro neomezený integrační interval. Hodnoty počítané zjednodušenou metodou se zde shodují s přesnějšími hodnotami minimálně na 4 platná místa, což je pro technické výpočty zcela dostačující. Doba výpočtu pomocí obou algoritmů je srovnatelná.

Tab.1 Vstupní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.1, Alg.1.b
$M_IND_sol_sol(r_1, h_1, N_1, r_2, h_2, N_2, s_1, s_2)$ $M_IND_sol_sol_b(r_1, h_1, N_1, r_2, h_2, N_2, s_1, s_2)$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 0, 0) = 1.3582681982$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 0, 0) = 1.3583098505$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 0, 17) = 1.4257395774$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 0, 17) = 1.4258454003$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 6, 17) = 1.4066610000$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 6, 17) = 1.4067670950$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 17) = 1.1211800373$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 17) = 1.1210622003$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 37) = 0.8940617675$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 37) = 0.8939931873$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 57) = 0.6259699087$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 26, 57) = 0.6258504735$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 17) = 0.7344983560$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 17) = 0.7345098367$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 37) = 0.6161587663$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 37) = 0.6161704926$
$M_IND_sol_sol(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 57) = 0.4561180411$ $M_IND_sol_sol_b(63.5, 52, 100, 80.5, 40, 120, 46, 57) = 0.4561107661$

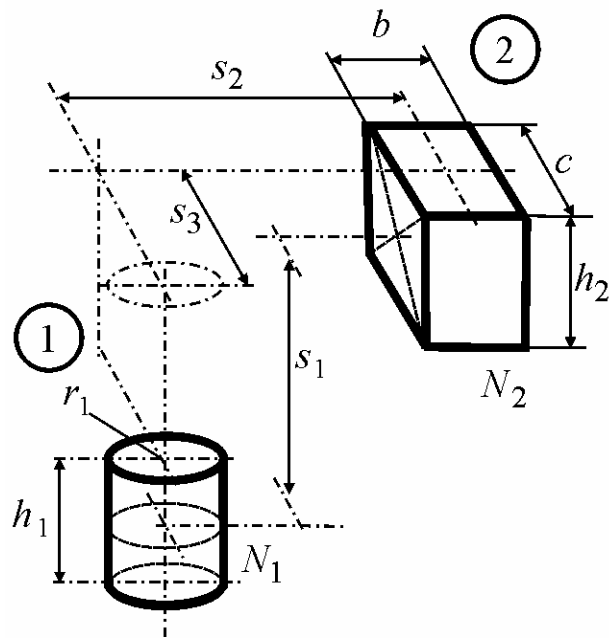
2.2.1.d) Porovnání počítaných a měřených hodnot pro modely dvou nekoaxiálních tenkých kruhových vzduchových cívek

Pro modely dvou tenkých kruhových cívek, které jsou popsány v **P-1.5.1.a** označeny **Circ_1** a **Circ_2** bylo provedeno měření vzájemné indukčnosti v souladu s **P-1.5.2**. V Tab.2 jsou pro několik nekoaxiálních vzájemných poloh cívek s_1, s_2 (Obr.13) porovnány měřené hodnoty a hodnoty počítané pomocí **Alg.1**. Z tabulky je patrné, že se počítané a měřené hodnoty liší velmi málo.

Tab.2 Porovnání počítaných a měřených hodnot vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních tenkých kruhových cívek					
Modely cívek podle P-1.5, označení veličin podle Obr.13					
Circ_1			Circ_2		
r1	h1	N1	r2	h2	N2
mm	mm	-	mm	mm	-
63.5	52	100	80.5	40	120
	s1	s2	Vzájemná indukčnost		
			Počítáno pomocí Alg.1	Měřeno viz P-1.5.2	Diference
	mm	mm	mH	mH	%
	70	30	0.4077	0.4044	0.81
	80	40	0.3104	0.3081	0.74
	90	50	0.2358	0.2341	0.72
100	60	0.1791	0.1779	0.67	
110	80	0.1179	0.1166	1.10	

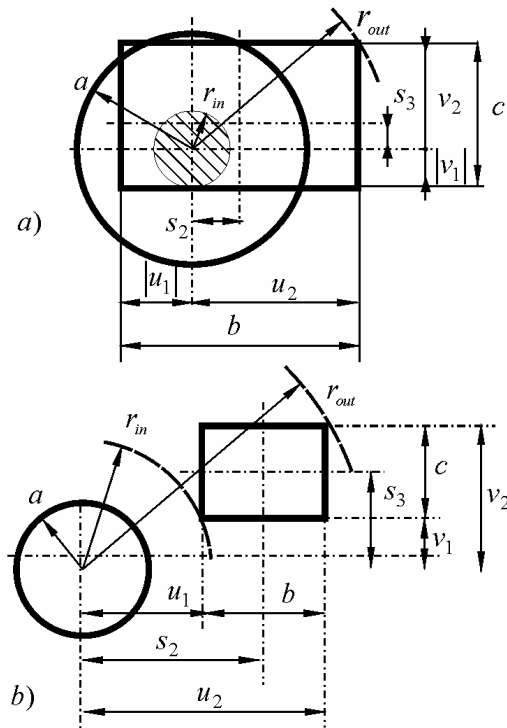
2.2.1.e) Vzájemná indukčnost tenké kruhové a obdélníkové cívky

Na obrázku (Obr.16) je znázorněna tenká kruhová a tenká obdélníková cívka v nekoaxiální vzájemné poloze. Pro výpočet vzájemné indukčnosti byl v souladu s rovnicí (11) napsán algoritmus **Alg.2**. Tvarová funkce $X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ je pro obdélníkový obrys nazvána jako $R_{arc}(r, s_2, s_3, b, c)$ a její konkrétní tvar je popsán a odvozen v **P-1.3.3**, **Alg.28**. Integrační meze r_{in}, r_{out} v **Alg.2** jsou pro tuto konkrétní aplikaci vztahu (11) stanoveny podle (Obr.17).



Obr.16. Tenká kruhová a obdélníková cívka

Alg.2 Vzájemná indukčnost tenké kruhové a obdélníkové cívky		
Rozměrový obrázek		Obr.16
Vnořené funkce a algoritmy	M_sol_sol_cel	Alg.25
	dM_sol_sol_cel	Alg.26
	R_arc	Alg.28
$M_IND_sol_rec(r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3) :=$ $u_1 \leftarrow s_2 - \frac{b}{2}, u_2 \leftarrow s_2 + \frac{b}{2}, v_1 \leftarrow s_3 - \frac{c}{2}, v_2 \leftarrow s_3 + \frac{c}{2}$ $r_{out} \leftarrow \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ $r_{in} \leftarrow \begin{cases} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} & \text{if } [(u_1 \geq 0) \wedge (v_1 \geq 0)] \\ u_1 & \text{if } [(u_1 \geq 0) \wedge (v_1 \leq 0)] \\ v_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \geq 0)] \\ u_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0) \wedge (u_1 \leq v_1)] \\ v_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0) \wedge (u_1 \geq v_1)] \end{cases}$ $p \leftarrow \int_{r_{in}}^{r_{out}} dM_sol_sol_cel(r_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s_1) \cdot \frac{R_arc(r, s_2, s_3, b, c)}{2\pi} dr$ $p \leftarrow p + M_sol_sol_CEL(r_1, h_1, N_1, r_{in}, h_2, N_2, s_1) \quad \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0)]$		



Obr.17. Stanovení mezí integrace ve výpočtovém algoritmu pro tenkou kruhovou a obdélníkovou cívku

2.2.1.f) Zjednodušený algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti tenké kruhové a tenké obdélníkové cívky

Podobně jako v 2.2.1.b) a za zcela stejných předpokladů je možné i zde napsat zjednodušený algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti kruhové a obdélníkové tenké cívky. Tento algoritmus je popsán v Alg.2.b. V porovnání s Alg.2 vede vynechání části pro přesné stanovení integračních mezí k výraznějšímu formálnímu zjednodušení, než v případě dvou kruhových cívek. V části 2.2.1.g) je na číselných hodnotách ilustrováno, jaké nepřesnosti může toto zjednodušení způsobit.

Alg.2.b Vzájemná indukčnost tenké kruhové a obdélníkové cívky – zjednodušený algoritmus		
Rozměrový obrázek		Obr.16
Vnořené funkce a algoritmy	M_sol_sol_cel	Alg.25
	R_arc	Alg.28
$M_IND_sol_rec_b(r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3) := \int_0^{\infty} dM_sol_sol_CEL(r_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s_1) \cdot \frac{R_arc(r, s_2, s_3, b, c)}{2\pi} dr$		

2.2.1.g) Počítané kontrolní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.2 , Alg.2.b.

V **Tab.3** jsou pro ilustraci a případné porovnání uvedeny hodnoty počítané pomocí sestavených algoritmů **Alg.2** , **Alg.2.b**. Ve zjednodušeném algoritmu **Alg.2.b** byla pro výpočet určitého integrálu použita integrační metoda implementovaná v programu MathCad speciálně pro neomezený integrační interval. Rozměry cívek ve výpočtu byly voleny podle sestavených modelů (viz část **P-1.5.1.a**, **P-1.5.1.b**). Vzájemná poloha cívek byla volena podle předpokládaných problematických míst, kdy se cívky dotýkají v příčném a případně i axiálním směru, nebo se v průřezu protínají či překrývají. Hodnoty počítané zjednodušeným způsobem podle **Alg.2.b** se i zde poměrně dobře shodují s přesnějšími hodnotami podle **Alg.2**.

Tab.3 Vstupní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.2 , Alg.2.b
$M_IND_sol_rec(r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3)$ $M_IND_sol_rec_b(r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3)$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 0, 0) = 0.8509377835$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 0, 0) = 0.8510960535$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 40, 20) = 0.9055581245$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 40, 20) = 0.9054548373$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 89, 39) = 1.1582889864$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 0, 89, 39) = 1.1582675589$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 0, 0) = 0.6040139552$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 0, 0) = 0.6041735620$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 89, 39) = 0.5762320370$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 89, 39) = 0.5762257566$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 89, 166) = -0.064165362$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 89, 166) = -0.0638501983$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 215, 39) = -0.0539180268$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 63.5, 215, 39) = -0.0542988981$
$M_IND_sol_rec(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 100, 89, 39) = 0.336780311$ $M_IND_sol_rec_b(63.5, 52, 100, 305, 205, 75, 140, 100, 89, 39) = 0.3367573114$

2.2.1.h) Porovnání počítaných a měřených hodnot pro tenkou obdélníkovou a kruhovou vzduchovou cívku

Pro model tenké kruhové cívky (Circ_1 podle P-1.5.1.a) a tenké obdélníkové cívky (Rect.2 podle P-1.5.1.b) bylo provedeno měření vzájemné indukčnosti v souladu s P-1.5.2. V tabulce Tab.4 jsou pro několik nekoaxiálních vzájemných poloh cívek s_1, s_2, s_3 (viz Obr.16) porovnány měřené hodnoty a hodnoty počítané pomocí Alg.2. Počítané a měřené hodnoty se liší velmi málo, přestože je velmi obtížné zachovat při navíjení modelů cívek zcela přesně jejich tvar, geometrii a při měření jejich přesnou vzájemnou polohu.

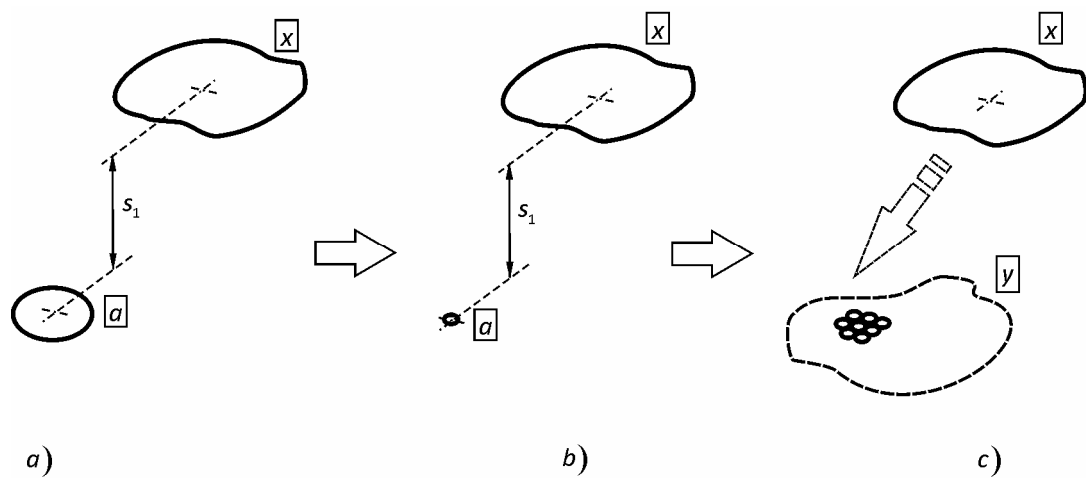
Tab.4 Porovnání počítaných a měřených hodnot vzájemné indukčnosti obdélníkové a kruhové nekoaxiální vzduchové cívky						
M_IND_sol_rect($r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3$)						
Cívka Circ.1 podle P-1.5.1.a			Cívka Rect.2 podle P-1.5.1.b			
r1	h1	N1	b	c	h2	N2
63.5	52	100	305	205	75	140
s1	s2	s3		Počítáno pomocí Alg.2	měřeno viz P-1.5.2	diference
mm	mm	mm		mH	mH	%
82	50	125		0.1163	0.1168	0.43
82	75	100		0.2271	0.2277	0.26
82	100	75		0.3066	0.3096	0.98
82	125	50		0.3084	0.3127	1.39
82	150	0		0.2380	0.2405	1.05
52	60	0		0.6910	0.6927	0.25
77	60	0		0.5232	0.5239	0.13
52	220	0		0.1076	0.1086	0.93

2.3. Smyčky(cívky) mají obecný tvar

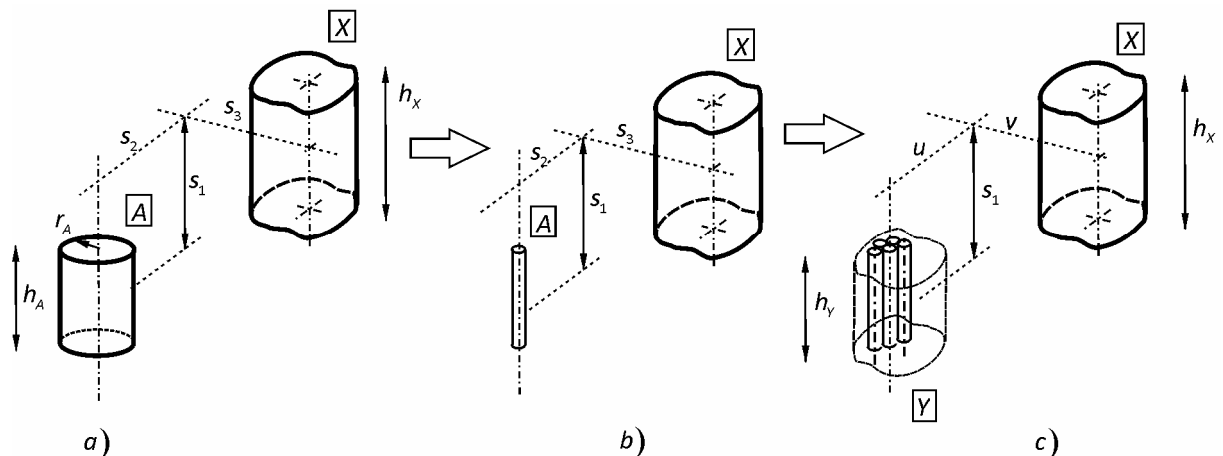
2.3.1. Základní popis metody pro výpočet vzájemné indukčnosti

Předpokládejme, že známe vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti mezi cívkou (smyčkou) kruhového tvaru \boxed{A} (\boxed{a}) a cívkou (smyčkou) obecného tvaru \boxed{X} (\boxed{x}) Obr.18a (Obr.19a). Tento vztah má v případě cívek následující formální podobu (viz část 2.1, rovnice (11)):

$$M_{\boxed{A},\boxed{X}} = M_IND_sol_X(\underbrace{r_A, h_A, N_A}_{\text{parametry kruhové cívky A}}, \underbrace{\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, N_X}_{\text{parametry cívky obecného tvaru X}}, \underbrace{s_1, s_2, s_3}_{\text{vzájemná poloha cívek}}) \quad (12)$$



Obr.18. Výpočet vzájemné indukčnosti dvou proudových smyček obecného tvaru



Obr.19. Výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých cívek obecného tvaru

Pokud se podaří vyčíslit následující matematický vztah (13), ve kterém poloměr kruhové cívky (smyčky) limituje k nule (Obr.18b, Obr.19b) a hodnota vzájemné indukčnosti mezi takto vzniklou elementární kruhovou cívkou(smyčkou) a cívkou(smyčkou) obecného tvaru se vydělí plochou elementární kruhové cívky(smyčky), vznikne nová funkce, která je zde označena jako $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{\boxed{A}, \boxed{X}}}{\pi r_A^2} &= \\
 &= \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{\text{IND_sol_X}}(r_A, h_A, N_A, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, N_X, s_1, s_2, s_3)}{\pi r_A^2} = \\
 &= \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Pro zjednodušení zápisu vztahů jsou v (13) zavedeny liniové hustoty závitů v axiálním směru cívek:

$$n_A = \frac{N_A}{h_A}, n_X = \frac{N_X}{h_X} \tag{14}$$

Pokud se elementární kruhová cívka následně začlení jako část jiné cívky obecného tvaru \boxed{Y} na určité místo o příčných souřadnicích (u, v) pro $(h_Y = h_A, n_Y = n_A)$ (Obr.18c, Obr.19c), lze integrací nově zavedené funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ po ploše průřezu cívky \boxed{Y} (integrace s proměnnými souřadnicemi u, v) získat vztah pro vzájemnou indukčnost dvou cívek obecného tvaru \boxed{X} a \boxed{Y} :

$$M_{X,Y} = M_{Y,X} = \frac{\mu_0 n_X n_Y}{2} \iint_{S_Y} m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v) dS_Y \tag{15}$$

S určitou nadsázkou by bylo možné označit funkci $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ jako „plošnou hustotu“ vzájemné indukčnosti dvou cívek obecného tvaru \boxed{X} a \boxed{Y} . V podstatě však musí hodnota této funkce v daném bodě souviset s vektorovými veličinami magnetického pole (magnetickou indukcí popřípadě intenzitou magnetického pole). Přesná fyzikální interpretace této funkce je v části 2.3.3.

2.3.2. Konkrétní tvar funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$

V následujícím textu je popsán postup při konkrétním vyčíslení limitního vztahu (13) a nalezení funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_A, s_1, s_2, s_3)$ s použitím rovnice pro výpočet vzájemné indukčnosti nekoaxiálních tenkých kruhových cívek (11).

Limitu ve vztahu (13) je možné aplikovat postupně na jednotlivé části rovnice (11). Tvarová funkce $X_{\text{arc}}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ není závislá na poloměru r_A , limita se na ní nevztahuje.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{M_{A,X}}{\pi r_A^2} = \\
 & = \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} \left(\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dM_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1) dr + \right. \\
 & \quad \left. + \{M_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)\}^* \right) = \\
 & = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{dM_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)}{\pi r_A^2} dr + \\
 & \quad + \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{\{M_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)\}^*}{\pi r_A^2} = \\
 & = \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} \left(\int_{r_{in}}^{r_{out}} m'(r, h_X, h_A, s_1) \frac{X_{arc}(r, s_2, s_3, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \{m(r_{in}, h_X, h_A, s_1)\}^* \right) = \\
 & \quad = \frac{\mu_0 n_A n_X}{2} m_X
 \end{aligned}$$

* {přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek(smyček)}

(16)

Výsledný tvar hledané funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ v (15) s parametry podle Obr.18c, Obr.19c, bude tedy:

$$m_X = \int_{r_{in}}^{r_{out}} m'(r, h_x, h_y, s_1) \frac{X_{arc}(r, u, v, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \{m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)\}^* \quad (17)$$

* {přičítá se pouze v případě protínajících se příčných průmětů cívek(smyček)}

Problém vyčíslení výsledného limitního vztahu (13) se tak transformuje na stanovení limity vztahu pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek a limity vztahu pro derivaci vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek. Tyto limity jsou v rovnici (16) reprezentovány nově zavedenými funkcemi $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$. Tvarová funkce $X_{arc}(r, u, v, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ zůstává svojí podobou i významem identická. Vztah (17) se svojí strukturou zcela podobá rovnici (11) a podstatné je, že velice podobné budou i algoritmy pro konkrétní výpočet. V algoritmech bude místo funkce dM_{sol_sol} figurovat funkce m' , místo funkce M_{sol_sol} funkce m . Pro hledané funkce $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ budou tedy platit obecné vztahy:

$$\frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m'(r, h_x, h_y, s_1) = \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} dM_{sol_sol}(r_A, h_Y, N_Y, r, h_X, N_X, s_1) \quad (18)$$

$$\frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m(r_{in}, h_x, h_y, s_1) = \lim_{r_A \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_A^2} M_{sol_sol}(r_A, h_Y, N_Y, r_{in}, h_X, N_X, s_1) \quad (19)$$

Přímé vyčíslení limit v rovnicích (18) a (19) je poměrně komplikované a zdlouhavé. Vztahy pro výpočet vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových cívek $M_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r_{in}, h_X, N_X, s_1)$ a její derivace $dM_{sol_sol}(r_A, h_A, N_A, r, h_X, N_X, s_1)$ (viz **P-1.2.4**) jsou relativně složité, obsahují úplné

eliptické integrály všech tří druhů (viz **P-1.4.3**). Při výpočtu limity se jedná většinou o neurčité výrazy. Limitu je nutné počítat opakovaně aplikovanými derivacemi složených funkcí. Po mnohačetných úpravách vycházejících z vlastností eliptických integrálů ([11],[12],[13],[14]) lze získat konkrétní tvar funkcí $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$. Tyto funkce mají překvapivě jednoduchý tvar.

Na základě rozboru tvaru a při hledání fyzikální interpretace nově vzniklých funkcí (viz část 3.) se následně ukázalo, že lze stejné funkce odvodit podstatně jednodušším způsobem a na celý problém hledět jako na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů. Nalezené výsledné tvary funkcí $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ jsou:

$$\begin{aligned}
 m'(r, h_x, h_y, s_1) &= \\
 &= \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} - \\
 &\quad - \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}} + \frac{r}{\sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + r^2}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 m(\rho, h_x, h_y, s_1) &= \\
 &= \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} - \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} - \\
 &\quad - \sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2} + \sqrt{\left(s_1 - \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}\right)^2 + \rho^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

2.3.3. Fyzikální interpretace funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$

Podle (15) představuje výraz $\frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v) dS_y$ vzájemnou indukčnost mezi cívkou \boxed{X} obecného tvaru a elementární cívkou o průřezu dS_y , výšce h_Y a lineární hustotě závitů n_y , která je umístěna ve vzdálenosti s_1, u, v (viz obrázek Obr.19c). Pokud by cívkou \boxed{X} protékal elektrický proud i_x , bude elementární cívkou procházet celkový magnetický tok:

$$d\psi = i_x \cdot \frac{\mu_0 n_x n_y}{2} m_x dS_y \tag{22}$$

Pokud budeme nezávisle na předchozím alternativně uvažovat, že cívka \boxed{X} vybudí v bodě y, u, v magnetické pole s axiální složkou magnetické indukce B_n , bude elementárním závitem o průřezu dS_y v tomto místě procházet magnetický tok: $d\Phi = B_n(u, v, y) \cdot dS_y$. Pokud má cívka \boxed{Y} konstantní

liniovou hustotu závitů: $n_y = \frac{N_y}{h_y}$, lze vypočítat celkový magnetický tok součtem (integrací) všech elementárních závitů po výšce h_y :

$$d\psi = \int \frac{N_y}{h_y} B_n(u, v, y) dS_y dy = \left(n_y \int \frac{N_y}{h_y} B_n(u, v, y) dy \right) dS_y \quad (23)$$

Výsledně porovnáním rovnice (22) a (23) plyne pro normálovou složku intenzity magnetického pole vztah:

$$\frac{1}{2} n_x m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v) \cdot i_x = \int \frac{N_y}{h_y} H_n(u, v, y) dy \quad (24)$$

Funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ tedy jednoznačně souvisí s integrálem axiální složky intenzity magnetického pole po výšce h_y v daném místě o příčných souřadnicích u, v a středové axiální souřadnici s_1 .

2.3.4. Algoritmus pro výpočet funkce $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$

Pro úplnost a přehlednost je možné vztahy pro výpočet pomocných funkcí $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ (viz rovnice (20), (21)) přepsat do podoby algoritmů Mathcad:

Alg.3 funkce $m'(r, h_x, h_y, s_1)$	
$m_car(r, h_x, h_y, s_1) :=$	$\lambda_1 \leftarrow s_1 + \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}, \lambda_2 \leftarrow s_1 + \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}$ $\lambda_3 \leftarrow s_1 - \frac{h_x}{2} + \frac{h_y}{2}, \lambda_4 \leftarrow s_1 - \frac{h_x}{2} - \frac{h_y}{2}$ $pom1(\xi) \leftarrow \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}$ $\text{return } (pom1(\lambda_1) - pom1(\lambda_2) - pom1(\lambda_3) + pom1(\lambda_4))$

Alg.4 funkce $m(\rho, h_x, h_y, s_1)$	
$m(\rho, h_x, h_y, s_1) :=$	$\lambda_1 \leftarrow s_1 + \frac{h_y}{2} + \frac{h_x}{2}, \lambda_2 \leftarrow s_1 + \frac{h_y}{2} - \frac{h_x}{2}$ $\lambda_3 \leftarrow s_1 - \frac{h_y}{2} + \frac{h_x}{2}, \lambda_4 \leftarrow s_1 - \frac{h_y}{2} - \frac{h_x}{2}$ $pom2(\xi) \leftarrow \sqrt{\xi^2 + \rho^2}$ $\text{return } (pom2(\lambda_1) - pom2(\lambda_2) - pom2(\lambda_3) + pom2(\lambda_4))$

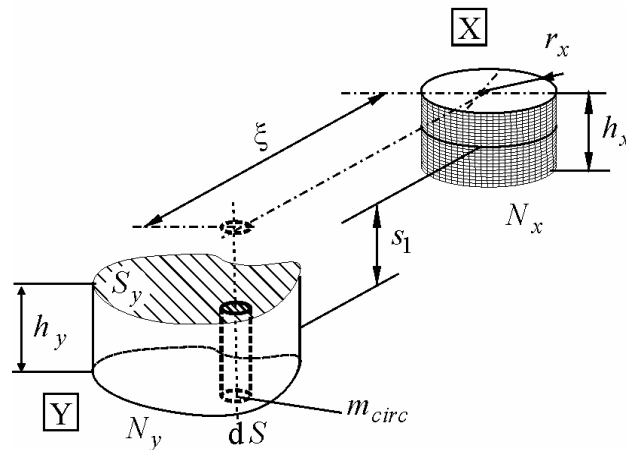
2.3.5. Funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$ jako implementace funkce m_X pro tenké cívky kruhového tvaru

Algoritmus Alg.5 popisuje výpočet funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$, která je s ohledem na část 2.3.1 a 2.3.2 implementací funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ pro tenké cívky kruhového tvaru. Integrací této funkce po ploše průřezu cívky obecného tvaru \boxed{Y} s integrační proměnnou ξ je tedy možné podle obrázku Obr.20 vypočítat vzájemnou indukčnost kruhové cívky \boxed{X} a cívky obecného tvaru \boxed{Y} v obecné poloze s rovnoběžnými stěnami:

$$M_{X,Y} = M_{Y,X} = \frac{\mu_0 n_X n_Y}{2} \iint_{S_Y} m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi) dS_Y$$

kde

$$n_X = \frac{N_X}{h_X}, n_Y = \frac{N_Y}{h_Y}$$
(25)



Obr.20. Funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$

Alg.5 Funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$ pro tenké cívky kruhového tvaru		
Rozměrový obrázek		Obr.20
Vnořené funkce a algoritmy	m_{car}	Alg.3
	m	Alg.4
	C_{arc}	Alg.27
$m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi) :=$ <pre> $r_{in} \leftarrow r_X - \xi$ $r_{out} \leftarrow r_X + \xi$ $p \leftarrow \int_{r_{in}}^{r_{out}} m_{\text{car}}(r, h_X, h_Y, s_1) \cdot \frac{C_{\text{arc}}(r, \xi, r_X)}{2\pi} dr$ $p \leftarrow p + m(r_{in}, h_X, h_Y, s_1) \text{ if } r_X - \xi > 0$ return p </pre>		

2.3.6. Příklad konkrétní realizace výpočtu vzájemné indukčnosti pomocí funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$

Pokud bude mít cívka \boxed{X} (viz Obr.20) kruhový tvar, je podle (25) vzájemná indukčnost mezi tenkou kruhovou cívkou \boxed{X} a cívkou obecného tvaru \boxed{Y} dána integrací funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$ (viz Alg.5) po ploše příčného průřezu solenoidu \boxed{Y} . V této části je na jednoduchých příkladech ilustrováno použití popisované metody pro případy, kdy je druhá cívka \boxed{Y} : Kruhová (2.3.6.a), obdélníková(2.3.6.b), eliptická(2.3.6.c) a trojúhelníková (2.3.6.d).

Pro praktické aplikace připadají v úvahu pravděpodobně pouze cívky kruhového a obdélníkového tvaru, výpočet pro cívky eliptické a trojúhelníkové je pouze ilustrativní a má akademický význam, ukazuje možnosti dané metody. Pro případ výpočtu vzájemné indukčnosti dvou kruhových cívek a rovněž kruhové a obdélníkové cívky byly navíc již v předchozí části (viz 2.1) vytvořeny speciální algoritmy Alg.1, Alg.2 které, jak bude ukázáno při porovnání, jsou s ohledem na dobu trvání výpočtu podstatně rychlejší. Všechny následující případy (2.3.6.a) až (2.3.6.d) se s ohledem na tvar cívky \boxed{Y} liší pouze způsobem integrace funkce m_{circ} po ploše příčného průřezu cívky \boxed{Y} .

Zajímavé zjednodušení nastane v případě, kdy budou obě cívky \boxed{X} a \boxed{Y} stejně vysoké ($h_x = h_y = h$), budou mít nulovou osovou vzdálenost $s_1 = 0$ a svými průřezy se nebudou navzájem protínat (první cívka bude umístěna vedle druhé cívky). U funkce m_{circ} není potom nutné uvažovat druhou aditivní část $\{m(r_{\text{in}}, h_x, h_y, s_1)\}^*$. První část funkce m_{circ} je tvořena součinem dvou dalších funkcí: Funkce m' , která je obecně popsána vztahem (20), a tvarové funkce C_{arc} (Alg.27, P-1.3). V případě stejně vysokých cívek se funkce m' redukuje na:

$$m'(r, h_x = h, h_y = h, s_1 = 0) = 2 \left(\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} - 1 \right) \quad (26)$$

Tvarová funkce C_{arc} pro kruhový tvar cívky \boxed{X} je za předpokladu, že se příčné průměty cívek \boxed{X} a \boxed{Y} navzájem neprotínají, popsána tímto jednoduchým vztahem:

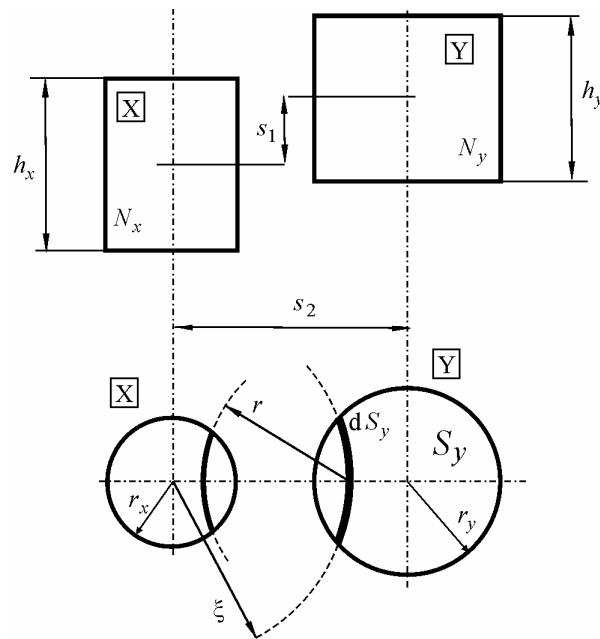
$$C_{\text{arc}}(r, \xi, r_x) = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + \xi^2 - r_x^2}{2r\xi} \right) \quad (27)$$

Funkce m_{circ} bude mít následující konkrétní tvar:

$$\begin{aligned} m_{\text{circ}}(r_x, h_x = h, h_y = h, s_1 = 0, \xi) &= \\ &= \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} m'(r, h_x = h, h_y = h, s_1 = 0) \frac{C_{\text{arc}}(r, \xi, r_x)}{2\pi} dr \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\xi - r_x}^{\xi + r_x} \left(\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} - 1 \right) \arccos \left(\frac{r^2 + \xi^2 - r_x^2}{2r\xi} \right) dr \end{aligned} \quad (28)$$

2.3.6.a) Tenké kruhové cívky s paralelními osami

Na obrázku Obr.21 jsou v nárysu a půdorysu znázorněny dvě tenké válcové cívky kruhového tvaru označené \boxed{X} a \boxed{Y} s paralelními osami, které mají výšku h_x a h_y .



Obr.21. Tenké kruhové cívky stejné výšky s paralelními osami

Integrační element plochy příčného průřezu cívky \boxed{Y} ve vztahu (25) lze vyjádřit opětovným použitím funkce C_arc následujícím způsobem:

$$dS_y = C_arc(\xi, s_2, r_y) \xi d\xi \quad (29)$$

Pro vzájemnou indukčnost je možné napsat s ohledem na (25) algoritmus **Alg.6**

Alg.6 Vzájemná indukčnost tenkých kruhových cívek –alternativní algoritmus		
Rozměrový obrázek		Obr.21
	m_circ	Alg.5
	C_arc	Alg.27
$M_IND_sol_sol_dip(r_x, h_x, N_x, r_y, h_y, N_y, s_1, s_2) := \frac{\mu_0 N_x \cdot N_y}{2 h_x \cdot h_y} \int_{s_2-r_y}^{s_2+r_y} m_circ(r_x, h_x, h_y, s_1, \xi) \cdot C_arc(\xi, s_2, r_y) \cdot \xi d\xi$		

Algoritmus **Alg.6** pro vzájemnou indukčnost kruhových cívek je možné alternativně použít namísto odvozeného algoritmu **Alg.1**. Při vzájemném porovnání obsahuje **Alg.6** jednu numerickou integraci navíc, ale integrovaná funkce je velice jednoduchá. Pro numerické vyčíslení je však vztah **Alg.6** náročnější a při srovnatelné přesnosti poněkud pomalejší. Podstatný podíl na tom má především velmi rychlá numerická metoda pro vyčíslení eliptických integrálů (**Alg.30**) použitá v **Alg.1**. Pro ilustraci jsou v **Tab.5** porovnány orientační doby výpočtu pro stejné vstupní parametry jako v **Tab.2**.

Tab.5 Porovnání doby trvání výpočtu vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních tenkých kruhových cívek pomocí Alg.1 a Alg.6						
Modely cívek podle P-1.5, označení veličin podle Obr.13						
Circ_1			Circ_2			
r1	h1	N1	r2	h2	N2	
mm	mm	-	mm	mm	-	
63.5	52	100	80.5	40	120	
				Orientační doba trvání výpočtu		
		s1	s2	Počítaná hodnota Alg.1, Alg.6	Alg.1	Alg.6
		mm	mm	mH	[ms]	[ms]
		70	30	0.4077	1.05	27.5
		80	40	0.3104	0.99	14.5
		90	50	0.2358	0.90	18.9
		100	60	0.1791	0.91	13.5
		110	80	0.1179	0.87	2.7

Pokud budou obě cívky stejně vysoké ($h_x = h_y = h$), budou mít nulovou osovou vzdálenost $s_1 = 0$ a svými průřezy se nebudou navzájem protínat (leží mimo sebe), bude platit:

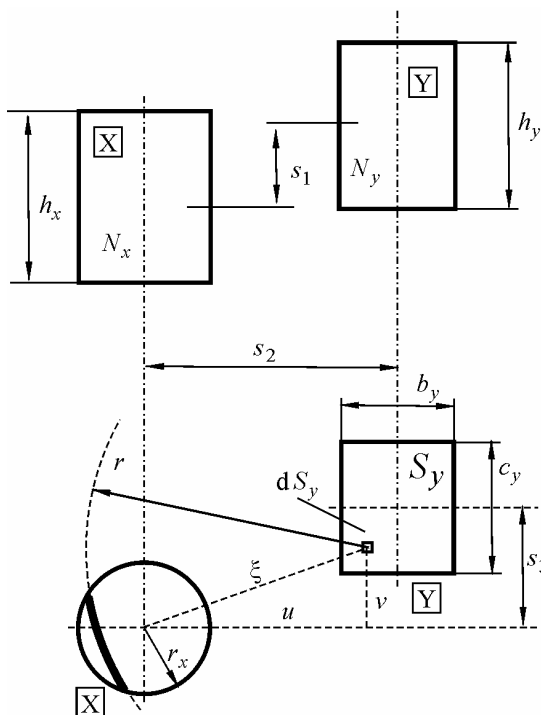
$$dS_y = C_{\text{arc}}(\xi, s_2, r_y) \xi d\xi = 2 \operatorname{acos} \left(\frac{\xi^2 + s_2^2 - r_y^2}{2\xi s_2} \right) \xi d\xi$$

a výsledný vztah pro vzájemnou indukčnost cívek podle (Obr.21) potom bude:

$$\begin{aligned}
 M_{X,Y} &= \frac{\mu_0 n_x n_y}{2} \iint_{S_y} m_{\text{circ}} dS_y = \\
 &= \frac{2\mu_0 n_x n_y}{\pi} \int_{s_2-r_y}^{s_2+r_y} \int_{\xi-r_x}^{\xi+r_x} \left(\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} - 1 \right) \operatorname{acos} \left(\frac{r^2 + \xi^2 - r_x^2}{2r\xi} \right) \operatorname{acos} \left(\frac{\xi^2 + s_2^2 - r_y^2}{2\xi s_2} \right) \xi dr d\xi
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

2.3.6.b) Tenká kruhová a obdélníková cívka

Na obrázku Obr.22 je v nárysu a půdorysu znázorněna tenká kruhová cívka \boxed{X} a tenká obdélníková cívka \boxed{Y} .



Obr.22. Tenká kruhová a obdélníková cívka stejné výšky

Vzájemná indukčnost je dána plošnou integrací funkce m_{circ} přes obdélníkovou oblast solenoidu Y a je popsána algoritmem **Alg.7**.

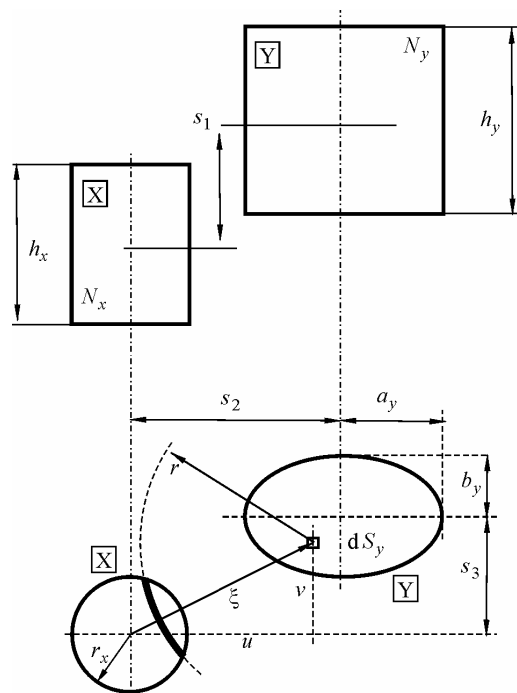
Alg.7 Vzájemná indukčnost tenké kruhové o obdélníkové cívky –alternativní algoritmus		
Rozměrový obrázek		Obr.21
	m_{circ}	Alg.5
$M_{\text{IND_sol_rec_dip}}(r_x, h_x, N_x, b_y, c_y, h_y, N_y, s_1, s_2, s_3) :=$ $u_{\text{low}} \leftarrow s_2 - \frac{b_y}{2}, u_{\text{upp}} \leftarrow s_2 + \frac{b_y}{2}$ $v_{\text{low}} \leftarrow s_3 - \frac{c_y}{2}, v_{\text{upp}} \leftarrow s_3 + \frac{c_y}{2}$ $\frac{\mu_0 N_y \cdot N_x}{2 h_y \cdot h_x} \int_{v_{\text{low}}}^{v_{\text{upp}}} \int_{u_{\text{low}}}^{u_{\text{upp}}} m_{\text{circ}}(r_x, h_x, h_y, s_1, \sqrt{u^2 + v^2}) du dv$		

Výpočet vzájemné indukčnosti tenké kruhové a obdélníkové cívky podle **Alg.7** je alternativně použitelný k odvozenému algoritmu **Alg.2**. Při vzájemném porovnání obsahuje dvě numerické integrace navíc, ale integrovaná funkce je velice jednoduchá. Pro numerické vyčíslení je však i zde vztah **Alg.7** náročnější a při srovnatelné přesnosti pomalejší. Pro ilustraci jsou v **Tab.6** porovnány orientační doby výpočtu pro stejné vstupní parametry jako v **Tab.4**.

Tab.6 Porovnání doby výpočtu vzájemné indukčnosti obdélníkové a kruhové nekoaxiální vzduchové cívky pro dva různé algoritmy						
M_IND_sol_rect($r_1, h_1, N_1, b, c, h_2, N_2, s_1, s_2, s_3$)						
Cívka Circ.1 podle P-1.5			Cívka Rect.2 podle P-1.5			
r1	h1	N1	b	c	h2	N2
63.5	52	100	305	205	75	140
					Doba trvání výpočtu	
s1	s2	s3		Počítané hodnoty Alg.2, Alg.7	Alg.2	Alg.7
mm	mm	mm		mH	ms	ms
82	50	125		0.1163	1.0	144.8
82	75	100		0.2271	3.0	110.8
82	100	75		0.3066	7.3	103.3
82	125	50		0.3084	7.2	94.1
82	150	0		0.2380	3.2	110.2
52	60	0		0.6910	3.2	116.8
77	60	0		0.5232	3.3	135
52	220	0		0.1076	3.2	95.5

2.3.6.c) Kruhová a eliptická cívka

Na obrázku Obr.23 je v nárýsu a půdorysu znázorněna tenká kruhová cívka \boxed{X} a tenká eliptická cívka \boxed{Y} .



Obr.23. Kruhová a eliptická cívka stejné výšky

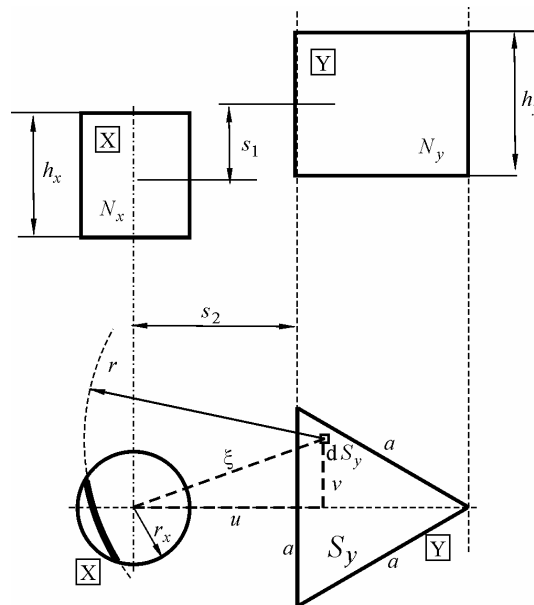
Pro vzájemnou indukčnost lze v tomto případě napsat matematický vztah zcela stejný jako v **Alg.7**.

S ohledem na eliptickou plochu příčného průřezu cívky \boxed{Y} však pro meze integrace platí:

$$\begin{aligned} v_{\text{low}} &= s_3 - \frac{b_y}{a_y} \sqrt{(a_y + s_2 - u)(a_y - s_2 + u)} \\ v_{\text{upp}} &= s_3 + \frac{b_y}{a_y} \sqrt{(a_y + s_2 - u)(a_y - s_2 + u)} \\ u_{\text{low}} &= s_2 - a_y \quad u_{\text{upp}} = s_2 + a_y \end{aligned} \quad (31)$$

2.3.6.d) Kruhá cívka a cívka trojúhelníkového tvaru

Na obrázku Obr.24 je v narysu a půdorysu znázorněna tenká kruhá cívka \boxed{X} a tenká trojúhelníková cívka \boxed{Y} . Cívky mají paralelní osy. Podobně jako u cívky eliptického tvaru se i v tomto případě jedná spíše o demonstraci možností dané výpočtové metody. Cívky takovýchto tvarů se prakticky nepoužívají.



Obr.24. Kruhá cívka a cívka trojúhelníkového tvaru

Pro výpočet vzájemné indukčnosti platí i v tomto případě vztah jako v **Alg.7**. S ohledem na trojúhelníkovou oblast příčného průřezu cívky \boxed{Y} jsou však meze integrace:

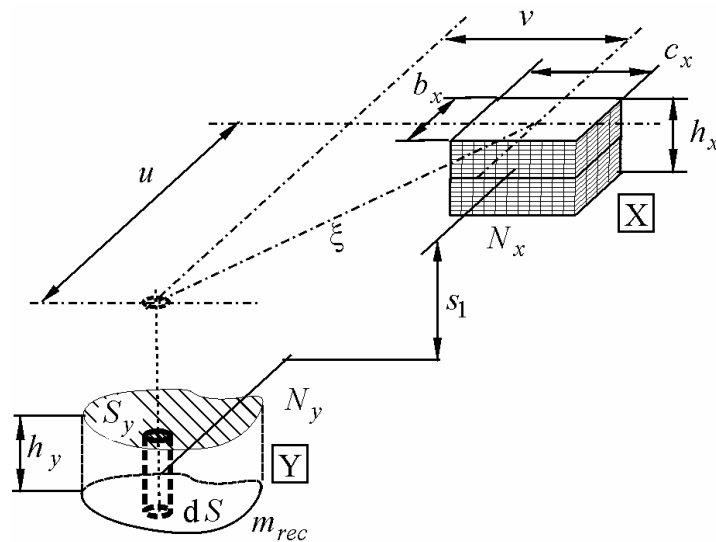
$$\begin{aligned} v_{\text{low}} &= -\frac{a}{2} - \frac{s_2 - u}{\sqrt{3}} \quad v_{\text{upp}} = \frac{a}{2} + \frac{s_2 - u}{\sqrt{3}} \\ u_{\text{low}} &= s_2 \quad u_{\text{upp}} = s_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{aligned} \quad (32)$$

2.3.7. Funkce $m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v)$ jako implementace funkce m_X pro tenké cívky obdélníkového tvaru

V části 2.3.5, 2.3.6 bylo pospáno použití funkce m_X (viz 2.3.1) v aplikaci pro kruhovou tenkou cívku. S pomocí této funkce je možné následně určit vzájemnou indukčnost mezi kruhovou cívkou a cívkou obecného tvaru. V tomto konkrétním případě se však jedná spíše o alternativní ilustrativní popis, neboť pro technicky zajímavé úlohy, jako je výpočet vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních kruhových cívek, nebo vzájemná indukčnost kruhové a obdélníkové cívky, byly v části 2.1. odvozeny podstatně efektivnější algoritmy.

Pokud je však funkce m_X použita v aplikaci pro obdélníkovou cívku, jedná se o podstatně zajímavější problém. V tomto případě lze v ucelené formě popsat například výpočet vzájemné indukčnosti dvou obdélníkových cívek v obecné nekoaxiální vzájemné poloze a případě i vlastní indukčnost obdélníkové cívky. Jak bude ukázáno v části 3.2, podobně lze popsat i výpočet magnetického pole obdélníkové cívky. Podobné algoritmy a vztahy se v literatuře běžně nevyskytují.

S ohledem na uvedené skutečnosti představuje algoritmus Alg.8 implementaci funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$ pro tenké cívky obdélníkového tvaru. Integrací této funkce po ploše průřezu cívky obecného tvaru \boxed{Y} s integrační proměnnou ξ (resp. u, v) je možné podle obrázku Obr.25 vypočítat vzájemnou indukčnost obdélníkové cívky \boxed{X} a cívky obecného tvaru \boxed{Y} v obecné nekoaxiální vzájemné poloze:



Obr.25. Rozměrový obrázek pro stanovení funkce m_{rect}

$$M_{X,Y} = M_{Y,X} = \frac{\mu_0 n_X n_Y}{2} \iint_{S_Y} m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v) dS_Y \quad (33)$$

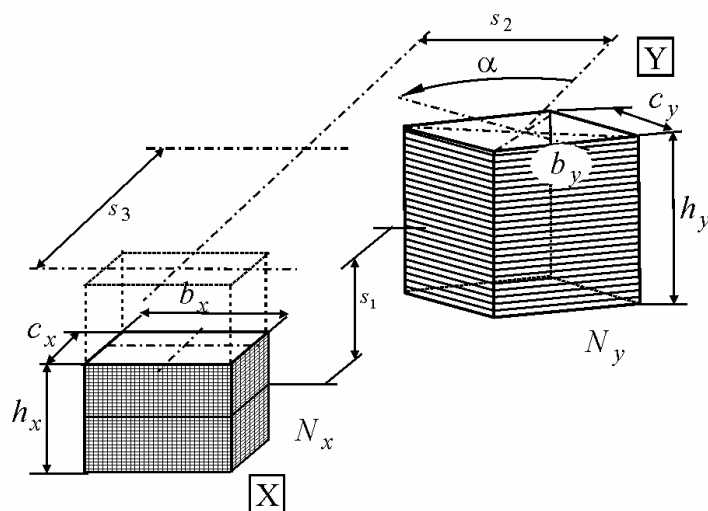
kde

$$n_X = \frac{N_X}{h_X}, n_Y = \frac{N_Y}{h_Y}$$

Alg.8 Funkce $m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v)$ pro tenké cívky obdélníkového tvaru		
Rozměrový obrázek		Obr.25
Vnořené funkce a algoritmy	m_{car}	Alg.3
	m	Alg.4
	R_{arc}	Alg.28
$m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v) :=$ $u_1 \leftarrow u - \frac{b_x}{2}, u_2 \leftarrow u + \frac{b_x}{2}, v_1 \leftarrow v - \frac{c_x}{2}, v_2 \leftarrow v + \frac{c_x}{2}$ $r_{\text{out}} \leftarrow \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ $r_{\text{in}} \leftarrow \begin{cases} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} & \text{if } [(u_1 \geq 0) \wedge (v_1 \geq 0)] \\ u_1 & \text{if } [(u_1 \geq 0) \wedge (v_1 \leq 0)] \\ v_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \geq 0)] \\ u_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0) \wedge (u_1 \leq v_1)] \\ v_1 & \text{if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0) \wedge (u_1 \geq v_1)] \end{cases}$ $p \leftarrow \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} m_{\text{car}}(r, h_x, h_y, s_1) \cdot \frac{R_{\text{arc}}(r, u, v, b_x, c_x)}{2\pi} dr$ $p \leftarrow p + m(r_{\text{in}}, h_x, h_y, s_1) \text{ if } [(u_1 \leq 0) \wedge (v_1 \leq 0)]$		

2.3.7.a) Algoritmus pro výpočet vlastních a vzájemných indukčností dvou tenkých obdélníkových cívek s paralelními osami

Na obrázku Obr.26 jsou znázorněny dvě tenké obdélníkové cívky s paralelními osami, které jsou navzájem vůči sobě natočeny o úhel α .



Obr.26. Tenké obdélníkové cívky

Při výpočtu vzájemné indukčnosti těchto cívek se jedná o konkrétní aplikaci rovnice (33), ve které je funkce m_{rect} , zahrnující v sobě obdélníkový tvar cívky X, integrována po obdélníkové ploše příčného

průřezu cívky \boxed{Y} . Konkrétní algoritmus pro vyčíslení funkce m_{rect} je popsán v **Alg.8**. Vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti má následující podobu:

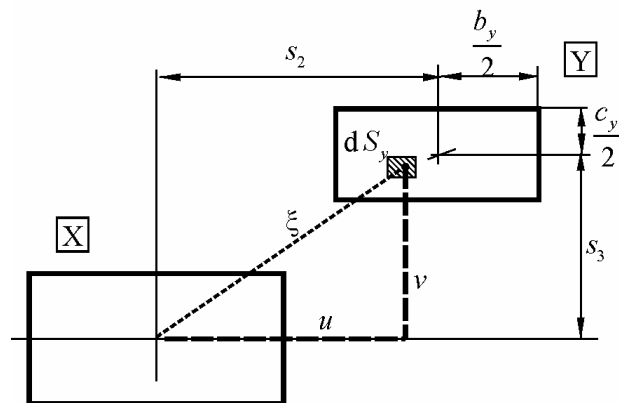
$$M_{X,Y} = M_{Y,X} = \frac{\mu_0 n_x n_y}{2} \iint_{S_Y} m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v) dS_y =$$

$$= \frac{\mu_0 n_x n_y}{2} \cdot \int_{u_{\text{low}}}^{u_{\text{upp}}} \int_{v_{\text{low}}}^{v_{\text{upp}}} m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v) dv du$$
(34)

Meze integrace pro libovolnou vzájemnou polohu obdélníkových cívek při nulovém úhlu natočení je možné stanovit na základě obrázku Obr.27:

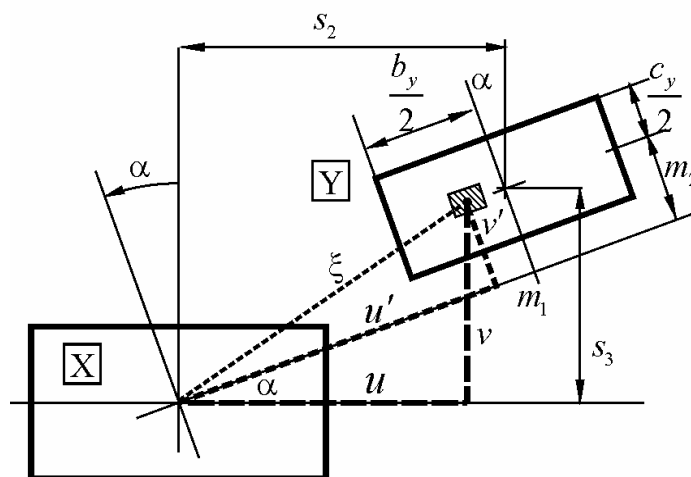
$$v_{\text{low}} = s_3 - \frac{c_y}{2} \quad v_{\text{upp}} = s_3 + \frac{c_y}{2}$$

$$u_{\text{low}} = s_2 - \frac{b_y}{2} \quad u_{\text{upp}} = s_2 + \frac{b_y}{2}$$
(35)



Obr.27. Vzájemně nenatočené tenké obdélníkové cívky

Pokud budou cívky vůči sobě natočeny o úhel α , je možné výpočet vzájemné indukčnosti ještě dále zobecnit (viz Obr.28). Integraci je potom možné vyčíslit v natočené soustavě souřadnic a výsledkem je sestavený algoritmus **Alg.9**.



Obr.28. Tenké obdélníkové cívky natočené o úhel α

Alg.9 Vzájemná indukčnost tenkých obdélníkových cívek		
Rozměrový obrázek		Obr.26
Vnořené funkce a algoritmy	m_{rect}	Alg.8
$M_{rec_rec}(b_x, c_x, h_x, N_x, b_y, c_y, h_y, N_y, s_1, s_2, s_3, \alpha)$ $\left\{ \begin{array}{l} m_1 \leftarrow s_2 \cdot \cos(\alpha) + s_3 \cdot \sin(\alpha) \\ m_2 \leftarrow s_3 \cdot \cos(\alpha) - s_2 \cdot \sin(\alpha) \\ v_{low} \leftarrow m_2 - \frac{c_y}{2}, v_{upp} \leftarrow m_2 + \frac{c_y}{2} \\ u_{low} \leftarrow m_1 - \frac{b_y}{2}, u_{upp} \leftarrow m_1 + \frac{b_y}{2} \end{array} \right.$ $\frac{\mu_0 N_x \cdot N_y}{2 h_x \cdot h_y} \cdot \int_{v_{low}}^{v_{upp}} \int_{u_{low}}^{u_{upp}} m_{rec}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u \cdot \cos(\alpha) - v \cdot \sin(\alpha) , u \cdot \sin(\alpha) + v \cdot \cos(\alpha)) du dv$		

2.3.7.b) Porovnání počítaných a měřených hodnot

V tabulkách **Tab.7** až **Tab.11** jsou pro porovnání a případnou kontrolu uvedeny hodnoty počítané pomocí algoritmu **Alg.9** a měřené s ohledem na popis v části **P-1.5.2**. Počítané a měřené hodnoty vykazují velmi dobrou shodu při výpočtu vlastních i vzájemných indukčností modelů cívek.

Shoda je velmi dobrá i s ohledem na to, že není zcela jednoduché přesně splnit ekvivalentní podmínky výpočtu a měření. Jedná se zejména o dodržení tvaru a přesných rozměrů vlastních modelů cívek při jejich zhotovení a potom rovněž o přesné nastavení jejich vzájemné polohy či úhlu natočení při měření.

Tab.7 Porovnání měřených a počítaných hodnot vlastní indukčnosti obdélníkové cívky - Obdélníková cívka Rect_2 s odbočkami						
(cívka Rect_2, Tab.19, P-1.5.1.b) $M_{rec_rec}(b, c, h, N, b, c, h, N, 0, 0, 0, 0)$ $b=305 \text{ mm}, c= 205 \text{ mm}$						
Měření číslo	Zapojené odbočky	N	h	M_{rec_rec} měřeno	M_{rec_rec} počítáno	Diference
				P-1.5.2	Alg.9	
	-	-	mm	mH	mH	%
1	1-2	20	11	0.315	0.3166	0.51
2	1-3	40	21	1.03	1.0409	1.06
3	1-4	60	32	2.03	2.0555	1.26
4	1-5	80	43	3.27	3.2985	0.87
5	1-6	100	54	4.64	4.7290	1.92
6	1-7	120	64	6.25	6.3172	1.07
7	1-8	140	75	7.95	8.0398	1.13

Tab.8 Porovnání měřených a počítaných hodnot vlastní indukčnosti obdélníkové cívky – obdélníková cívka Rect_1 s odbočkami						
Porovnání měřených a počítaných hodnot vlastní indukčnosti obdélníkové cívky Obdélníková cívka s odbočkami (cívka Rect_1, Tab.18, P-1.5.1.b) $M_{rec_rec}(b, c, h, N, b, c, h, N, 0, 0, 0, 0)$ $b=119 \text{ mm}, c=82 \text{ mm}$						
Měření číslo	Zapojené odbočky	N	h	M_{rec_rec} měřeno	M_{rec_rec} počítáno	Diference
				P-1.5.2	Alg.9	
	-	-	mm	mH	mH	%
8	1-2	20	10	0.0947	0.0962	1.62
9	1-3	40	21	0.300	0.3005	0.18
10	1-4	60	31	0.568	0.5692	0.21
11	1-5	80	42	0.880	0.8819	0.21
12	1-6	100	52	1.229	1.2263	-0.22
13	1-7	200	104	3.21	3.2117	0.05
14	1-8	300	156	5.41	5.3959	-0.26
15	1-9	400	208	7.67	7.6562	-0.18

Tab.9 Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek						
Cívka \overline{Y} (cívka Rect_1, Tab.18, P-1.5.1.b) uvnitř cívky \overline{X} (cívka Rect_2, Tab.19, P-1.5.1.b), $b_x = 305\text{mm}$ $c_x = 205\text{mm}$ $b_y = 82\text{mm}$ $c_y = 119\text{mm}$ Úhel vzájemného natočení $\alpha = 0$.						
Měření číslo	s_1	s_2	s_3	měřeno P-1.5.2	počítáno Alg.9	diference
	-	-	mm	mH	mH	%
16	150	0	0	0.903	0.8947	-0.89
17	100			1.438	1.4211	-1.21
18	50			1.897	1.8745	-1.19
19	0			2.056	2.0341	-1.08
20	150	40		0.896	0.8844	-1.25
21	100			1.452	1.4291	-1.60
22	50			1.927	1.9005	-1.40
23	0			2.088	2.0652	-1.08
24	150	80		0.851	0.8389	-1.43
25	100			1.486	1.4545	-2.14
26	50			2.028	1.9923	-1.75
27	0			2.195	2.1671	-1.26

Tab.10 Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek						
Cívka \overline{Y} (cívka Rect_1, Tab.18, P-1.5.1.b) vně cívky \overline{X} (cívka Rect_2, Tab.19, P-1.5.1.b), $b_x = 305\text{mm}$ $c_x = 205\text{mm}$ $b_y = 82\text{mm}$ $c_y = 119\text{mm}$ Úhel vzájemného natočení $\alpha = \pi / 4$						
Měření číslo	s_1	s_2	s_3	měřeno P-1.5.2	počítána Alg.9	diference
	-	-	mm	mH	mH	%
28	50	185	135	0.2729	0.27011	-1.02
29	0			0.3049	0.30393	-0.32
30	50	213	163	0.1720	0.16960	-1.41
31	0			0.1950	0.19372	-0.65
32	50	256	206	0.0968	0.09377	-3.15
33	0			0.1068	0.10426	-2.34
34	50	213	107	0.2550	0.25316	-0.71
35	0			0.2861	0.28600	-0.05
36	50	242	135	0.1643	0.16017	-2.52
37	0			0.1862	0.18278	-1.82
38	50	284	177	0.0940	0.09112	-3.09
39	0			0.1036	0.10121	-2.34

Tab.11 Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek						
Cívka \boxed{Y} (cívka Rect_1, Tab.18, P-1.5.1.b) vně cívky \boxed{X} (cívka Rect_2, Tab.19, P-1.5.1.b), $b_x = 305\text{mm}$ $c_x = 205\text{mm}$ $b_y = 82\text{mm}$ $c_y = 119\text{mm}$ Úhel vzájemného natočení $\alpha = 0$						
Měření číslo	s_1	s_2	s_3	measured P-1.5.2	computed Alg.9	difference
	-	-	mm	mH	mH *)	%
40	100		0	0.174	0.1785	2.37
41	50	200		0.415	0.4218	1.67
42	0			0.454	0.4582	0.98
43	100			0.113	0.1129	-0.02
44	50	260		0.197	0.1982	0.79
45	0			0.227	0.2285	0.48
46	100			0.075	0.0740	-0.96
47	50	320		0.108	0.1081	0.03
48	0			0.121	0.1213	-0.07
49	100		50	0.166	0.1700	2.33
50	50	200		0.381	0.3916	2.77
51	0			0.419	0.4264	1.83
52	100			0.111	0.1089	-1.59
53	50	260		0.188	0.1881	0.01
54	0			0.217	0.2164	-0.03
55	100			0.074	0.0719	-3.08
56	50	320		0.106	0.1042	-1.71
57	0			0.119	0.1167	-1.65
58	100		100	0.148	0.1472	-0.61
59	50	200		0.305	0.3116	2.25
60	0			0.341	0.3442	0.92
61	100			0.100	0.0980	-1.88
62	50	260		0.162	0.1617	0.04
63	0			0.185	0.1849	-0.09
64	100			0.068	0.0662	-3.30
65	50	320		0.095	0.0936	-1.87
66	0			0.106	0.1042	-1.98

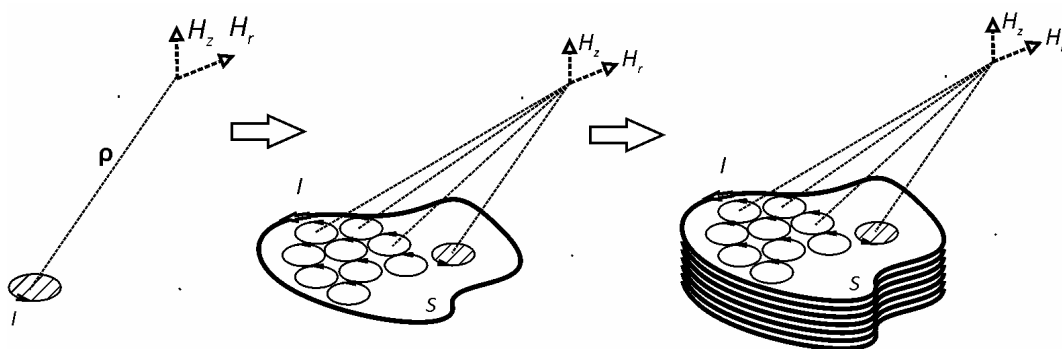
3. Výpočet magnetického pole smyček(cívek) obecného tvaru

V následujícím textu je v souladu s [3] popsána alternativní metoda výpočtu magnetického pole tenkých proudových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru ve vzduchu. Metoda je založena na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů (elementárních proudových smyček).

Podnět k využití tohoto principu vznikl při hledání univerzálního matematického popisu pro výpočet vzájemné indukčnosti vzduchových nekoaxiálních tenkostěnných cívek obecného tvaru (viz část 2.3). Pro výpočet vzájemné indukčnosti zde byly nalezeny překvapivě jednoduché pomocné funkce (viz $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ v rovnicích (20),(21)), které mají bez ohledu na tvar cívek stále stejnou podobu. Tyto funkce, společně s tvarovou funkcí, která popisuje tvar jedné z cívek, figurují v plošném integrálu po ploše příčného průřezu druhé z cívek.

Uvedené pomocné funkce nebyly prvotně odvozeny přímou integrací vektorových veličin magnetického pole, ale postupnými úpravami vztahů platných pro vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových závitů a tenkých cívek ve vzduchu. Při následném hledání fyzikální interpretace nově odvozených funkcí bylo patrné, že se při tomto způsobu výpočtu prakticky jedná o superpozici magnetického pole myšlených elementárních magnetických dipólů. Na základě integrální Stokesovy věty je totiž možné, s ohledem na vybuzené magnetické pole, zcela ekvivalentně nahradit účinek elektrického proudu v proudové smyčce obecného tvaru účinkem elektrického proudu elementárních magnetických dipólů, které pokrývají plochu příčného průřezu smyčky(viz obrázek Obr.29). Tento princip, ale v opačném sledu, se často využívá k intuitivnímu popisu magnetických materiálů. Zde se naopak kalkuluje s objektivně existujícími magnetickými dipóly a jejich účinek se reprezentuje ekvivalentním myšleným vázaným proudem.

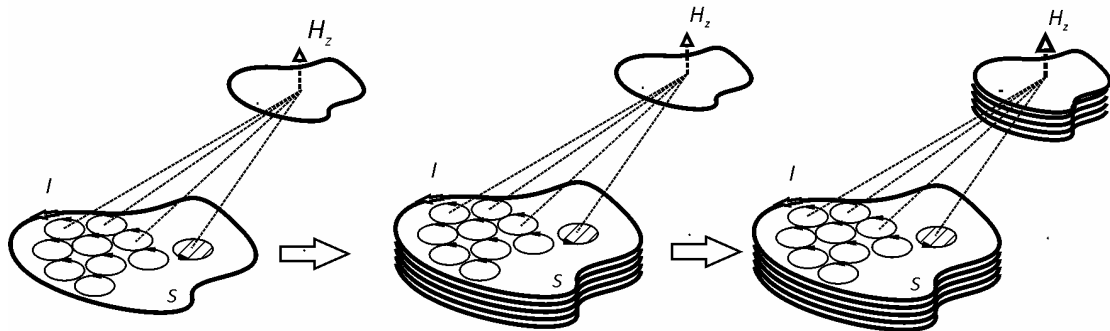
Sečtením magnetického pole dipólů v několika smyčkách pod sebou (několika závitů) je možné stanovit magnetické pole celé tenké cívky (Obr.29).



Obr.29. Magnetické pole buzené soustavou elementárních magnetických dipólů

Následnou integrací magnetického pole jedné cívky (viz obrázek Obr.30) po ploše závitů nebo několika závitů druhé cívky lze potom dospět k celkovému společnému magnetickému toku a potažmo

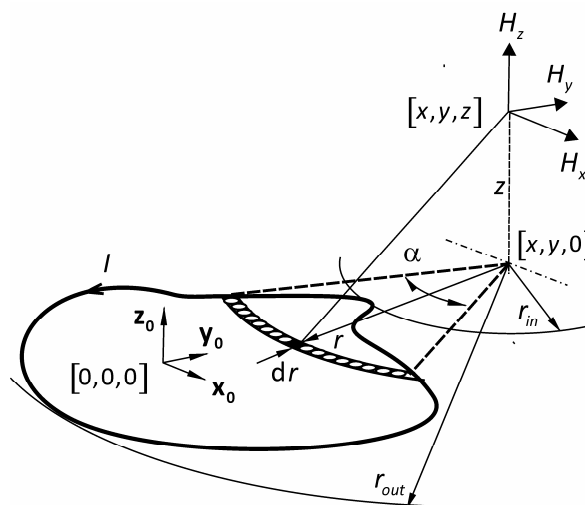
i k výpočtu vzájemné indukčnosti. Uvedeným postupem obdržíme alternativní sadu univerzálních obecných funkcí, které budou použitelné pro výpočty magnetického pole smyček a cívek obecného tvaru.



Obr.30. Integrace magnetického pole soustavy elementárních magnetických dipólů

3.1. Magnetické pole ploché proudové smyčky obecného tvaru

Na obrázku Obr.31 je znázorněna plochá tenká smyčka obecného tvaru protékající elektrickým proudem I . Smyčka je umístěna v kartézské soustavě souřadnic v rovině $z=0$. Magnetické pole vybuzevané smyčkou v bodě $[x, y, z]$ má obecně axiální složku H_z a příčné složky H_x, H_y .



Obr.31. Plochá tenká smyčka obecného tvaru

Velikost intenzity magnetického pole lze určit superpozicí magnetického pole ekvivalentních magnetických dipólů (elementárních proudových smyček) rozmístěných na ploše budící smyčky. Skalární magnetický potenciál buzený jednou elementární proudovou smyčkou lze určit podle vztahu (98), jehož platnost byla ukázána v části **P-1.1.5**. Následnou integrací lze potom v bodě $[x, y, z]$ určit i celkový magnetický skalární potenciál buzený všemi elementárními dipóly na ploše smyčky:

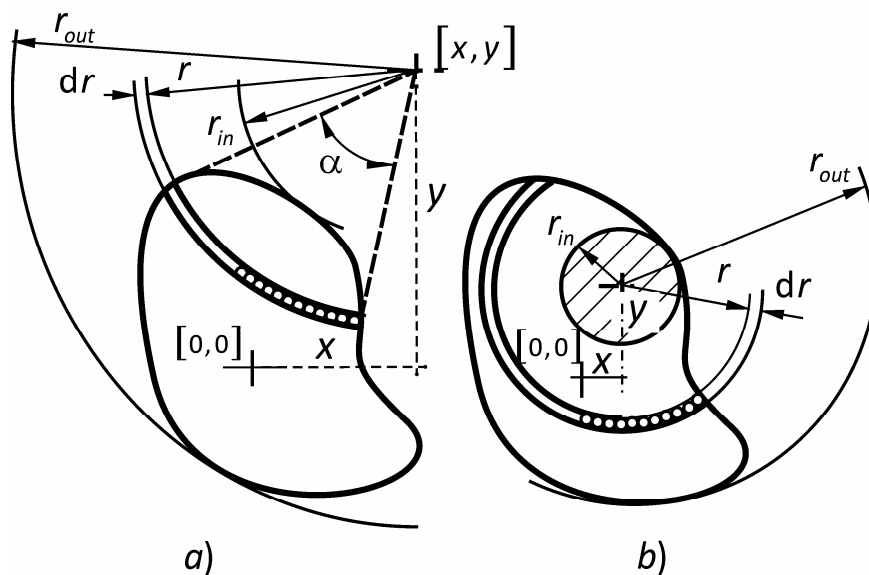
$$\varphi_{\text{loop}}(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \iint_S \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS \quad (36)$$

Naznačenou integraci po ploše smyčky lze vyčíslit v soustavě s proměnným poloměrem r podle obrázku Obr.31. Pokud bude průmět bodu $[x, y, z]$ do roviny $z=0$ ležet mimo plochu vymezenou smyčkou (Obr.32a), budou meze integrace od r_{in} do r_{out} . Pokud bude průmět ležet na ploše smyčky (výpočet mg.pole nad nebo pod smyčkou), bude poloměr proměnný v mezích od 0 do r_{out} (viz Obr.32b).

Podle obrázku Obr.32 má elementární plocha vytknutá na ploše smyčky velikost:

$$dS = \alpha r dr = X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n) r dr \quad (37)$$

Funkce $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ v (37), která byla v této práci označena jako tvarová, je popsána v **P-1.3** a udává velikost úhlu α , pod kterým kružnice o poloměru r se středem v bodě $[x, y, 0]$ vytíná oblouk na ploše smyčky. Tvar smyčky je popsán parametry $\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}$. V části **P-1.3.2** je popsána tvarová funkce pro cívky a smyčky kruhového průřezu, v části **P-1.3.3** je tvarová funkce pro cívky obdélníkového průřezu.



Obr.32. Meze integrace

Podobně jako v části 2.2 2. lze i zde při integraci ve vztahu (36) rozdělit integrační interval v obecném případě na dvě části:

$$\begin{aligned} \Phi_{loop}(x, y, z) &= \frac{I}{4\pi} \iint_{S_x} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \alpha(r) r dr = \\ &= \underbrace{\frac{I}{4\pi} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}) r dr}_{\text{Part 1}} + \underbrace{\frac{I}{4\pi} \int_0^{r_{in}} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}) r dr}_{\text{Part 2}} \end{aligned} \quad (38)$$

Druhá část Part 2 v intervalu $\langle 0, r_{in} \rangle$ se uplatní pouze v případě, kdy je počítáno magnetické pole uvnitř (nad, pod) smyčkou. Funkce $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ nabývá v tomto případě hodnotu 2π a integrál ve druhé části je možné vyčíslit analyticky:

$$\frac{I}{4\pi} \int_0^{r_{in}} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}) r dr = \frac{I}{4\pi} \int_0^{r_{in}} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r dr = -I \frac{z}{2\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (39)$$

Po zavedení nových funkcí $a_0(r, z)$, $b_0(r, z)$ do rovnice (38):

$$a_0(r, z) = \frac{r}{2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad b_0(r, z) = -\frac{z}{2\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (40)$$

$$b_0(r, z) = \int a_0(r, z) dr$$

Ize výslednou hodnotu skalárního potenciálu proudové smyčky zapsat ve tvaru:

$$\varphi_{loop}(\lambda_1 \dots \lambda_n, x, y, z) = I \int_{r_{in}}^{r_{out}} a_0(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \underbrace{I b_0(r_{in}, z)}_{*} \quad (41)$$

(*) přičítá se pouze v případě, kdy průmět bodu $[x, y, z]$ leží na ploše průřezu smyčky

Pro různý tvar smyček, který je popsán tvarovou funkcí $X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)$, zůstávají funkce $a_0(r, z)$ a $b_0(r, z)$ stále stejné.

Axiální složku intenzity magnetického pole H_{z_loop} vybuzeného smyčkou v bodě $[x, y, z]$ je možné vypočítat derivací skalárního potenciálu podle z . Derivace se vztahuje pouze na funkce $a_0(r, z)$ a $b_0(r, z)$. Po zavedení nových funkcí $a_1(r, z)$, $b_1(r, z)$ zůstává formální struktura vztahu včetně určitého integrálu a tvarové funkce stejná:

$$H_{z_loop}(\lambda_1 \dots \lambda_n, x, y, z) = -\frac{\partial \varphi_{loop}(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, x, y, z)}{\partial z} =$$

$$= I \int_{r_{in}}^{r_{out}} a_1(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr + \underbrace{I \cdot b_1(r_{in}, z)}_{*}$$

(*) přičítá se pouze v případě, kdy průmět bodu $[x, y, z]$ leží na ploše průřezu smyčky

(42)

Nově zavedené funkce se určí ze vztahů:

$$\begin{aligned}
 a_1(r, z) &= -\frac{\partial}{\partial z} a_0(r, z) = \frac{r}{2} \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
 b_1(r, z) &= -\frac{\partial}{\partial z} b_0(r, z) = \frac{r^2}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 a_1(r, z) &= \int b_1(r, z) dr
 \end{aligned} \tag{43}$$

Příčnou složku intenzity magnetického pole ve směru x H_{x_loop} je možné vypočítat derivací skalárního potenciálu podle x :

$$\begin{aligned}
 H_{x_loop}(\lambda_1 \dots \lambda_n, x, y, z) &= -\frac{\partial \varphi_{loop}(\lambda_1 \dots \lambda_n, x, y, z)}{\partial x} = \\
 &= -I \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_{r_{in}}^{r_{out}} a_0(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr}_{\text{Part 1}} - I \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} b_0(r_{in}, z)}_{\text{Part 2}}
 \end{aligned} \tag{44}$$

Pro druhý člen v závorce vztahu (44), který se uplatní pouze v případě, kdy se počítá magnetické pole uvnitř (nad, pod) smyčkou, je možné přímo nalézt analytický výraz. Po zavedení nové funkce $c_1(r, z)$ bude pro tento člen platit:

$$c_1(r, z) = -\frac{\partial}{\partial x} b_0(r_{in}, z) = -a_0(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{45}$$

Derivaci integrálu v první části vztahu (44) není možné přímo vyčíslit analyticky, lze však dále postupovat dvěma způsoby.

V prvním případě lze vypočítat hodnotu celého výrazu numericky, což je časově náročnější a výpočet nemusí být ve všech bodech numericky stabilní. S ohledem na rovnice (44),(45) lze potom přímo psát pro příčnou složku intenzity magnetického pole vztah:

$$H_{x_loop}(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, x, y, z) = I \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_1(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr - I c_1(r_{in}, z) \tag{46}$$

Při druhé možné alternativě výpočtu lze první člen vztahu (44) ještě dále upravit. Derivace podle x se přímo vztahuje pouze na funkci $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$, meze integrace r_{in}, r_{out} jsou však také závislé na proměnné x . Pro derivaci v první části vztahu (44) bude platit obecně:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_{in}}^{r_{out}} a_0(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr &= \underbrace{\int_{r_{in}}^{r_{out}} a_0(r, z) \frac{\partial}{\partial x} \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr}_{\text{A}} + \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial r_{out}}{\partial x} \left(a_0(r_{out}, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} \right)}_{\text{B}} - \underbrace{\frac{\partial r_{in}}{\partial x} \left(a_0(r_{in}, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} \right)}_{\text{C}}
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Člen B v rovnici (47) je vždy nulový, neboť funkce $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ nabývá na vnějším poloměru r_{out} nulové hodnoty. Člen C , s uvážením, že funkce $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$ na poloměru r_{in} nabývá hodnoty 2π , lze upravit takto:

$$\frac{\partial r_{in}}{\partial x} \left(a_0(r_{in}, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} \right) = \frac{\partial r_{in}}{\partial x} a_0(r_{in}, z)
 \tag{48}$$

Stejnou hodnotu, ale s opačným znaménkem, nabývá po úpravě druhá část Part 2 výchozí rovnice (44) a s členem C se odečte, neboť:

$$\frac{\partial}{\partial x} b_0(r_{in}, z) = \frac{\partial r_{in}}{\partial x} \cdot \frac{\partial b_0(r_{in}, z)}{\partial r_{in}} = \frac{\partial r_{in}}{\partial x} a_0(r_{in}, z)
 \tag{49}$$

a meze integrálu r_{in}, r_{out} jsou na proměnné x lineárně závislé, pro $r_{in} < r_{out}$ platí:

$$\frac{\partial r_{in}}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial r_{in}}{\partial y} = -1
 \tag{50}$$

Po provedených úpravách se derivace vztahuje pouze na vnitřní tvarovou funkci, aditivní člen odpadne, pro příčnou složku intenzity magnetického pole bude platit alternativní výsledný vztah:

$$H_{x_loop}(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, x, y, z) = I \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_1(r, z) \frac{\partial}{\partial x} \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr
 \tag{51}$$

Výhodou druhého způsobu je, že je možné případně derivovat tvarovou funkci analyticky. Nevýhodou je, že derivovaná funkce nenabývá v krajních bodech integračního intervalu konečných hodnot, celý integrál je nevlastní. Výpočet však konverguje velice dobře i při použití standardních metod numerické integrace.

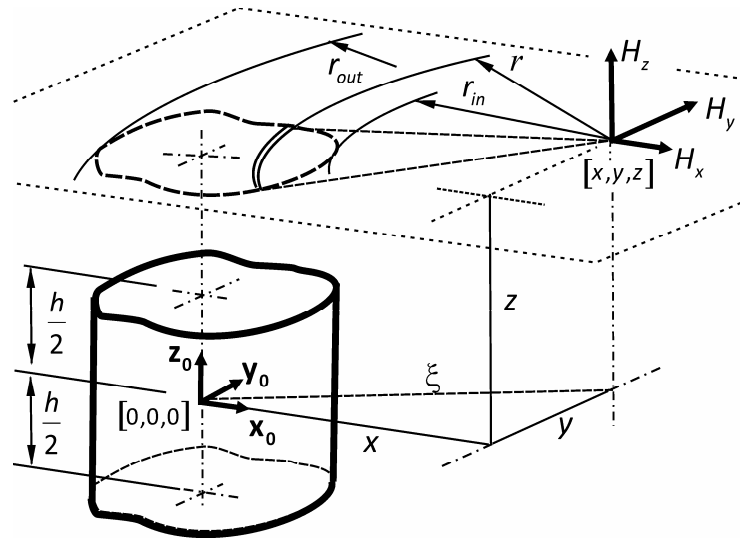
Obdobné rovnice jako pro příčnou složku $H_{x_loop}(\lambda_{1} \dots \lambda_n, x, y, z)$ ve směru x lze psát i pro příčnou složku intenzity magnetického pole ve směru y :

$$H_{y_loop}(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, x, y, z) = I \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_1(r, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{2\pi} dr - I c_1(r_{in}, z)
 \tag{52}$$

$$H_{y_loop}(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, x, y, z) = I \int_{r_{in}}^{r_{out}} c1(r, z) \frac{\partial X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})}{\partial y} \frac{1}{2\pi} dr \quad (53)$$

3.2. Magnetické pole tenké cívky obecného tvaru

Na obrázku (Obr.33) je znázorněna tenká cívka obecného tvaru protékána elektrickým proudem I . Cívka má N závitů a je umístěna v kartézské soustavě souřadnic se středem v polovině axiální výšky cívky. Magnetické pole vybuzené cívkou v bodě $[x, y, z]$ má obecně axiální složku H_z a příčné složky H_x, H_y .



Obr.33. Magnetické pole solenoidu obecného tvaru

Velikost intenzity magnetického pole tenké cívky lze jednoduše vypočítat integrací magnetického pole dílčích proudových smyček stejného příčného tvaru ((42),(46) resp. (51)).

Integrace v podélném směru je jednoduchá, nevztahuje se na tvarovou funkci $X_{arc}(r, x, y, \lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn})$.

Po provedené integraci vztahy zachovávají stejnou strukturu. Po zavedení nových funkcí $a2(r, h, z)$ a $b2(r, h, z)$ bude platit pro axiální složku intenzity magnetického pole:

$$\begin{aligned} H_{z_sol}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N, h, x, y, z) &= \frac{N}{h} \int_{-h/2}^{h/2} H_{z_loop}(\lambda_1 \dots \lambda_n, x, y, z') dz' = \\ &= \frac{NI}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\int_{r_{in}}^{r_{out}} a1(r, z) \frac{X_{arc}(r, u, v, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr + b1(r_{in}, z) \right] dz = \\ &= \frac{NI}{h} \left[\int_{r_{in}}^{r_{out}} a2(r, h, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr + b2(r_{in}, h, z) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Nově zavedené funkce v rovnici (54) jsou:

$$a_2(r, h, z) = \int_{-h/2}^{h/2} a_1(r, z') dz' = 2r \left[\frac{2z-h}{\left((2z-h)^2 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2z+h}{\left((2z+h)^2 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (55)$$

$$b_2(r, h, z) = \int_{-h/2}^{h/2} b_1(r, z') dz' = \frac{1}{2} \left[\frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2 + 4r^2}} - \frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2 + 4r^2}} \right] \quad (56)$$

Pro příčnou složku intenzity magnetického pole ve směru x lze psát podobně jako v 3.1 dva alternativní vztahy. Vztah obsahující přímou numerickou integraci:

$$H_{x_sol_mod1}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N, h, x, y, z) = \frac{NI}{h} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_2(r, h, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr - \underbrace{c_2(r_{in}, h, z)}_* \right) \quad (57)$$

Vztah obsahující derivaci tvarové funkce:

$$H_{x_sol_mod2}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N, h, x, y, z) = \frac{NI}{h} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_2(r, h, z) \frac{\partial}{\partial x} \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr \quad (58)$$

Ve vztazích (57),(58) byla použita nově zavedená funkce:

$$c_2(r, h, z) = \int_{-h/2}^{h/2} c_1(r, z') dz' = r \left[\frac{1}{\sqrt{(2z+h)^2 + 4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2z-h)^2 + 4r^2}} \right] \quad (59)$$

Vztahy pro příčnou složku intenzity magnetického pole ve směru osy y jsou zcela analogické, liší se pouze parciální derivací podle souřadnice y.

Vztah obsahující přímou numerickou integraci:

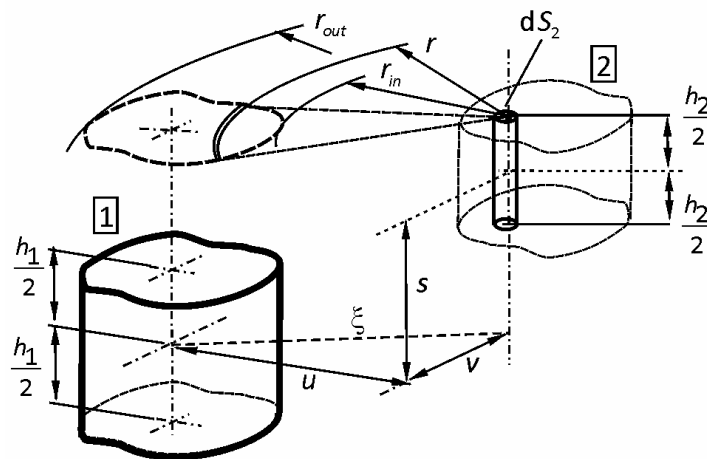
$$H_{y_sol_mod1}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N, h, x, y, z) = \frac{NI}{h} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_2(r, h, z) \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr - \underbrace{c_2(r_{in}, h, z)}_* \right) \quad (60)$$

Vztah obsahující derivaci tvarové funkce:

$$H_{y_sol_mod2}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N, h, x, y, z) = \frac{NI}{h} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c_2(r, h, z) \frac{\partial}{\partial y} \frac{X_{arc}(r, x, y, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr \quad (61)$$

3.3. Funkce použité při výpočtu vzájemné indukčnosti tenkých cívek obecného tvaru

Další integrací intenzity magnetického pole jedné tenké cívky po výšce druhé tenké cívky (na obrázku Obr.34 cívka označená jako [2]) získáme jednoduše stejné funkce, které byly v části 2.3 použity pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých cívek obecného tvaru. Zde však byly odvozeny zcela jiným způsobem, který vycházel z mnohačetných úprav vztahů pro výpočet vzájemných indukčností koaxiálních vzduchových cívek.



Obr.34. Dvě cívky obecného tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{N_2}{h_2} \int_{s-h_2/2}^{s+h_2/2} H_{z_sol}(\lambda_1 \dots \lambda_n, N_1, h_1, x, y, z') dz' = \\ & = I \frac{N_1}{h_1} \frac{N_2}{h_2} \cdot \left[\int_{r_{in}}^{r_{out}} a_3(r, h_1, h_2, s) \frac{X_{arc}(r, u, v, \lambda_1 \dots \lambda_n)}{2\pi} dr + b_3(r_{in}, h_1, h_2, s) \right] \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} a_3(r, h_1, h_2, s) &= \int_{s-h_2/2}^{s+h_2/2} a_2(r, h_1, z') dz' = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{r}{\sqrt{\left(s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{\left(s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{r}{\sqrt{\left(s - \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2}} + \frac{r}{\sqrt{\left(s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2}} \right] \end{aligned}$$

(63)

$$\begin{aligned}
 b_3(r, h_1, h_2, s) &= \int_{s-h_2/2}^{s+h_2/2} b_2(r, h_1, z') dz' = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2} - \sqrt{\left(s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\left(s - \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2} + \sqrt{\left(s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 + r^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Mezi funkcemi $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$ zčásti 2.3 a nově odvozenými funkcemi v této části platí vzájemný vztah:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} m'(r, h_1, h_2, s) &= a_3(r, h_1, h_2, s) \\
 \frac{1}{2} m(r_{in}, h_1, h_2, s) &= b_3(r_{in}, h_1, h_2, s)
 \end{aligned}$$

3.4. Příklady výpočtu magnetických polí jednoduchých struktur

Použití nově popsané metody výpočtu magnetického pole je v této části demonstrováno na příkladu tenké kruhové smyčky, tenké kruhové cívky a následně tenké cívky obdélníkového tvaru. Pro kruhové smyčky a tenké cívky se jedná o ilustrativní aplikaci, protože existují jiné dobře známé a velice efektivní metody vyčíslení, které jsou popsány i v této práci (viz část P-1.1.). Pro cívky a smyčky jiného tvaru, speciálně obdélníkové, však nebyl autorem v literatuře nalezen podobný matematický popis v takovéto ucelené a relativně jednoduché formě. Výhodou nové metody je, že zachovává zcela stejnou podobu matematických vztahů bez ohledu na tvar cívek (smyček). Tvar je zde reprezentován definovanou tvarovou funkcí. Aplikace metody se potom redukuje pouze na řešení ryze geometrické úlohy, kterou je nalezení příslušné tvarové funkce.

3.4.1. Magnetické pole tenkého kruhového závitu

Vztahy pro výpočet magnetického pole tenkého kruhového závitu jsou velmi dobře známé v podstatě od samotných počátků systematického popisu magnetického pole. Tyto vztahy se pro snadnější řešení zapisují v uzavřeném tvaru pomocí eliptických integrálů. Pro úplnost a možnost porovnání jsou v této práci uvedené vztahy také odvozeny a přehledně zapsány do podoby algoritmů (viz část P-1.1.3). Pomocí superpozice magnetického pole elementárních magnetických dipólů však obdržíme pro výpočet magnetického pole alternativní vztahy s diametrálně odlišnou strukturou, které mají podobnou náročností pro numerické vyčíslení. Tyto vztahy jsou univerzálně použitelné bez ohledu na tvar smyček a cívek.

3.4.1.a) Algoritmy pro výpočet axiální a radiální složky intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí elementárních magnetických dipólů

Pro tenký kruhový závit znázorněný na obrázku Obr.44 lze přímo aplikovat rovnici (42) a s použitím tvarové funkce pro cívky a smyčky kruhového tvaru C_arc (viz algoritmus **Alg.27**) sestavit algoritmus pro výpočet axiální složky intenzity magnetického pole (**Alg.10**).

Alg.10 Axiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí magnetických dipólů		
Rozeřový obrázek		Obr.44
Jednotky	Při dosazení proudu v [A] a rozměrů v [m] bude intenzita magnetického pole [A/m]	
Vnořené funkce a algoritmy	C_arc	Alg.27
$H_{z_loop_D}(R, I, \rho, z) :=$ $a1(r, z) \leftarrow \frac{r}{2} \frac{2 \cdot z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$ $b1(r, z) \leftarrow \frac{r^2}{2 \cdot (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $u \leftarrow I \cdot \int_{ R-\rho }^{ R+\rho } a1(r, z) \frac{C_arc(r, \rho, R)}{2\pi} dr$ $u \leftarrow u + I \cdot b1(R - \rho , z) \quad \text{if } R - \rho \geq 0$		

Na algoritmu zapsaném v této podobě jsou dobře patrné i známé limitní případy tohoto výpočtu. Pokud položíme v **Alg.10** $\rho=0$, bude pro meze integrace platit $r_{in} = r_{out} = R$ a hodnota integrálu bude nulová. Pro axiální složku intenzity magnetického pole na ose závitu se uplatní pouze konstantní člen, ze kterého vylpne známý vztah:

$$H_{z_loop_D}(R, I, \rho=0, z) = I \cdot b1(R, z) = I \frac{R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (65)$$

Pokud navíc položíme $z=0$, bude pro intenzitu magnetického pole uprostřed závitu platit:

$$H_{z_loop_D}(R, I, \rho=0, z=0) = I \cdot b1(R, z) = \frac{I}{2R} \quad (66)$$

Na základě vztahu (51) lze sestavit rovněž algoritmus pro výpočet radiální složky intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu (**Alg.11**). Pro tento případ je možné snadno najít a použít analytické vyčíslení derivace tvarové funkce C_arc .

Alg.11 Radiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí magnetických dipólů		
Rozměrový obrázek		Obr.44
Jednotky	Při dosazení proudu v [A] a rozměrů v [m] bude intenzita magnetického pole [A/m]	
Vnošené funkce a algoritmy	C_arc	Alg.27
$H_{r_loop_D}(R, I, \rho, z) := \left \begin{array}{l} c1(r, z) \leftarrow -\frac{r}{2} \cdot \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ u \leftarrow I \cdot \int_{ R-\rho }^{ R+\rho } c1(r, z) \frac{(r^2 - R^2 - \rho^2)}{\rho\pi \cdot \sqrt{(R + \rho + r) \cdot (R + \rho - r) \cdot (R - \rho + r) \cdot (\rho - R + r)}} dr \end{array} \right.$		

3.4.1.b) Porovnání hodnot počítaných pomocí algoritmů Alg.10 a Alg.11 ve srovnání s výpočtem pomocí eliptických integrálů Alg.17, Alg.18

V tabulce Tab.12 jsou uvedeny hodnoty intenzity magnetického pole počítané pomocí dvou různých algoritmů. Je zde uvedena i odhadnutá doba trvání výpočtu. Podmínky výpočtu jsou popsány v **P-1.4.1**. Z počítaných hodnot je patrné, že algoritmy založené na eliptických integrálech jsou v tomto speciálním případě podstatně rychlejší. Algoritmy založené na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů jsou však svoji celkovou strukturou univerzálnější, neboť platí zcela stejně pro libovolný tvar cívky, který je popsán příslušnou tvarovou funkcí. Rychlost výpočtu eliptických integrálů je dána především rychlostí výpočtu funkce pro obecný úplný eliptický integrál Cel (**Alg.30**). Integrál ve druhé metodě byl počítán standardní numerickou metodou (viz **P-1.4.1**).

Rovněž číselné výsledky jsou při porovnání na 7 desetinných míst v některých bodech poněkud odlišné. Výsledky počítané pomocí eliptických integrálů je možné považovat za přesnější. Pomocí metody elementárních magnetických dipólů dostaneme stejné hodnoty až zvýšením přesnosti integrace.

Tab.12 Intenzita magnetického pole tenkého kruhového závitu				
Počítáno pro $I = 1 A$, všechny rozměry jsou v [m]				
Rozměry [mm] (viz obrázek Obr.45)			$R = 0.05$	
	Axiální složka H_z [A/m] t [μs]		Radiální složka H_r [A/m] t [μs]	
	$H_{z_loop_D}$	$H_{z_loop_CEL}$	$H_{r_loop_D}$	$H_{r_loop_CEL}$
Algoritmus	Alg.10.	Alg.18	Alg.11	Alg.17
Metoda	Dipóly	Eliptické integrály	Dipóly	Eliptické integrály
	$z = 0.02$			
Radiální směr				
$\rho = 0.02$	8.1868311 713	8.1868311 6	1.9822363 378	1.9710345 5
$\rho = 0.04$	6.7309799 561	6.7309831 5	5.8667527 344	5.8604955 5
$\rho = 0.06$	-0.1927394 492	-0.192737 6	5.0525076 336	5.0489666 6
	$\rho = 0.04$			
Axiální směr				
$z = 0.01$	12.9914802 588	12.991484 5	8.1104096 339	8.1071077 8
$z = 0.05$	2.1363955 495	2.1363962 5	1.6793166 770	1.6793166 5

3.4.2. Magnetické pole tenké kruhové cívky – solenoidu

3.4.2.a) Algoritmy pro výpočet intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí superpozice magnetického pole elementárních magnetických dipólů

Pro tenkou kruhovou cívku znázorněnou na obrázku Obr.45 lze podobně jako u kruhového závitu přímo aplikovat rovnici (54) a s použitím tvarové funkce pro cívky a smyčky kruhového tvaru C_{arc} (viz algoritmus **Alg.27**) sestavit algoritmus pro výpočet axiální složky intenzity magnetického pole (**Alg.12**).

Alg.12 Axiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí magnetických dipólů		
Rozměrový obrázek		Obr.45
Jednotky	Rozměr intenzity magnetického pole je dán dosazenými jednotkami liniové hustoty „ampérvávitů“	
Vnořené funkce a algoritmy	$n = \frac{NI}{h}$	Liniová hustota „ampérvávitů“
	C_{arc}	Alg.27
$H_{z_sol_D}(R, h, n, \rho, z) := \left\{ \begin{array}{l} a2(r, z) \leftarrow 2r \left[\frac{2 \cdot z - h}{\left[(2z - h)^2 + 4r^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \cdot z + h}{\left[(2z + h)^2 + 4r^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] \\ b2(r, z) \leftarrow \frac{1}{2} \left[\frac{2z + h}{\sqrt{\left[(2z + h)^2 + 4r^2 \right]}} - \frac{2z - h}{\sqrt{\left[(2z - h)^2 + 4r^2 \right]}} \right] \\ u \leftarrow n \cdot \int_{ R-\rho }^{ R+\rho } a2(r, z) \frac{C_{arc}(r, \rho, R)}{2\pi} dr \\ u \leftarrow u + n \cdot b2(R - \rho , z) \text{ if } R - \rho \geq 0 \end{array} \right.$		

Pokud položíme podobně jakou u kruhového závitu v **Alg.12** $\rho = 0$, bude pro meze integrace platit $r_{in} = r_{out} = R$. Pro axiální složku intenzity magnetického pole na ose tenké cívky rovněž vyplyne známý vztah:

$$H_{z_sol_D}(R, h, \frac{NI}{h}, \rho = 0, z) = \frac{1}{2} \frac{NI}{h} \left[\frac{2z + h}{\sqrt{(2z + h)^2 + 4R^2}} - \frac{2z - h}{\sqrt{(2z - h)^2 + 4R^2}} \right] \quad (67)$$

Pro magnetické pole na ose uprostřed cívky pro $z = 0$:

$$H_{z_sol_D}(R, h, NI, \rho = 0, z = 0) = \frac{NI}{h} \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \quad (68)$$

Na základě vztahu (58) lze podobně jako u kruhového závitu sestavit algoritmus pro výpočet radiální složky intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky (**Alg.13**). Rovněž v tomto případě je možné použít analytické vyčíslení derivace tvarové funkce C_{arc} .

Alg.13 Radiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí magnetických dipólů		
Rozměrový obrázek		Obr.45
Jednotky	Rozměr intenzity magnetického pole je dán dosazenými jednotkami liniové hustoty „ampéřzávitů“	
Vnořené funkce a algoritmy	$n = \frac{NI}{h}$	Liniová hustota „ampéřzávitů“
	C_{arc}	Alg.27
$H_{r_sol_D}(R, h, n, \rho, z) :=$	$c2(r, z) \leftarrow r \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(2z+h)^2 + 4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2z-h)^2 + 4r^2}} \right]$ $u \leftarrow n \cdot \int_{ R-\rho }^{ R+\rho } c2(r, z) \frac{(r^2 - R^2 - \rho^2)}{\rho \pi \cdot \sqrt{(R+\rho+r) \cdot (R+\rho-r) \cdot (R-\rho+r) \cdot (\rho-R+r)}} dr$	

3.4.2.b) Porovnání počítaných hodnot intenzity magnetického tenké kruhové cívky pomocí algoritmů Alg.20 a Alg.19 ve srovnání s výpočtem pomocí eliptických integrálů Alg.12, Alg.13

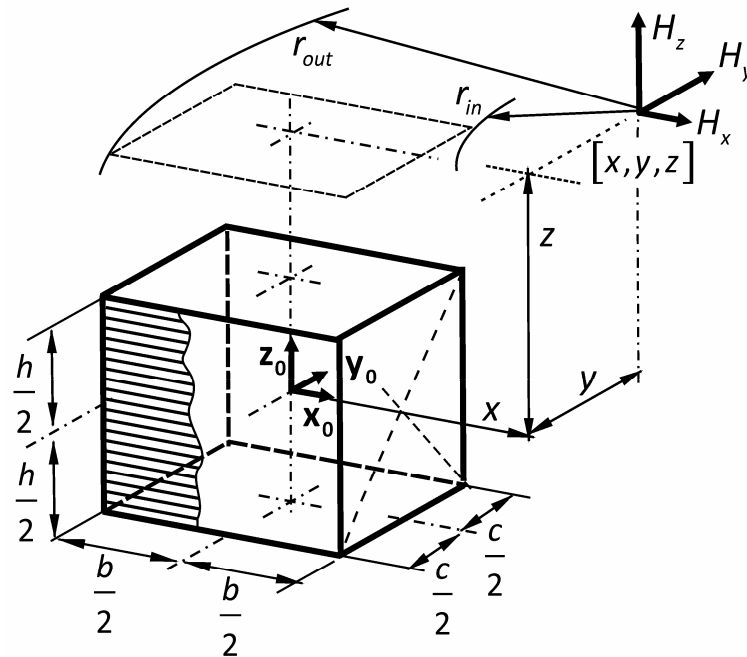
Z tabulky Tab.13 je podobně jako u kruhového závitu patrné, že je metoda založená na výpočtu eliptických integrálů (viz část **P-1.1**, algoritmy **Alg.20** , **Alg.19**) podstatně rychlejší. V následující části však bude ukázáno, že je alternativní metoda založená na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů skutečně univerzální. Prakticky stejný algoritmus, který zde byl napsán pro kruhovou cívku, bude platit i pro cívku obdélníkového tvaru a jakoukoliv jinou cívku, jejíž tvar bude popsán příslušnou tvarovou funkcí.

Tab.13 Intenzita magnetického pole tenké kruhové cívky				
Počítáno pro $n = \frac{NI}{h} = 1$, všechny rozměry jsou v [mm]				
Rozměry [mm] (viz obrázek Obr.45)		$R = 50$		$h = 100$
	Axiální složka H_z t [μs]		Radiální složka H_r t [μs]	
	$H_{z_sol_D}$	$H_{z_sol_CEL}$	$H_{r_sol_D}$	$H_{r_sol_CEL}$
Algoritmus	Alg.12	Alg.20	Alg.13	Alg.19
Metoda	Dipóly	Eliptické integrály	Dipóly	Eliptické integrály
	$z = 40$			
Radiální směr				
$\rho = 20$	0.55049004 75	0.55048936 9	0.08793466 567	0.08793455 9
$\rho = 40$	0.63246089 181	0.63245753 11	0.20983023 386	0.20904896 11
$\rho = 60$	-0.11957918 284	-0.11957762 11	0.19010511 459	0.18960587 11
	$\rho = 40$			
Axiální směr				
$z = 20$	0.75829319 73	0.75829074 8	0.07742442 605	0.07745831 9
$z = 80$	0.13849788 77	0.13850028 9	0.1015047 611	0.10150451 9

3.4.3. Magnetické pole tenké obdélníkové cívky

3.4.3.a) Algoritmy pro výpočet intenzity magnetického pole

Na obrázku Obr.35 je znázorněna tenká cívka obdélníkového tvaru. Cívka je umístěna v kartézské soustavě se středem uprostřed cívky. Cívka má N závitů, vinutím cívky protéká proud I . Magnetické pole je počítáno v bodě $[x, y, z]$ a má axiální složku H_z a příčné složky H_x, H_y .



Obr.35. Magnetické pole tenké obdélníkové cívky

Pro axiální složku intenzity magnetického pole platí obecný vztah (54), ve kterém bude tvar obdélníkové cívky reprezentován tvarovou funkcí $R_arc(r, x, y, b, c)$ (viz část **P-1.3.3**):

$$H_z(b, c, h, N, I, x, y, z) = \frac{NI}{h} \left(\int_{r_{in}}^{r_{out}} a 2(r, h, z) \frac{R_arc(r, x, y, b, c)}{2\pi} dr + \underbrace{b 2(r_{in}, h, z)}_* \right) \quad (69)$$

Pro příčné složky intenzity magnetického pole bude platit s ohledem na obecné vztahy (58), (61):

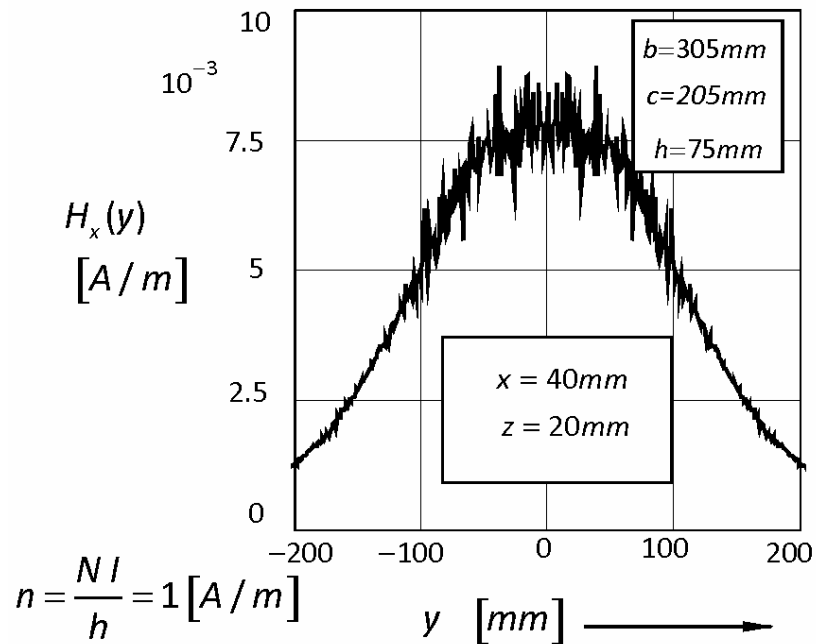
$$H_x(b, c, h, N, I, x, y, z) = \frac{NI}{h} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c 2(r, h, z) \frac{\partial R_arc(r, x, y, b, c)}{\partial x} \frac{1}{2\pi} dr \quad (70)$$

$$H_y(b, c, h, N, I, x, y, z) = \frac{NI}{h} \int_{r_{in}}^{r_{out}} c 2(r, h, z) \frac{\partial R_arc(r, x, y, b, c)}{\partial y} \frac{1}{2\pi} dr \quad (71)$$

Numerické vyčíslení vztahu (69) pro axiální složku intenzity magnetického pole je bezproblémové, jedná se o integraci hladké a spojité funkce. Po uvážení mezí integrace lze pro výpočet velikosti této složky napsat algoritmus **Alg.14**.

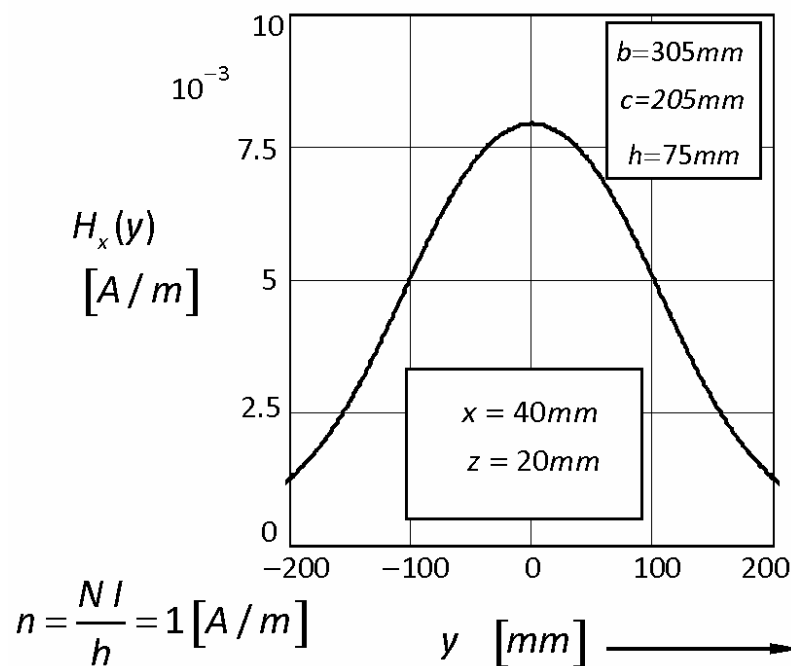
Alg.14 Axiální složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky		
Rozměrový obrázek		Obr.35
Jednotky	Rozměr intenzity magnetického pole je dán dosazenými jednotkami liniové hustoty „ampérvávitů“	
Vnořené funkce a algoritmy	$n = \frac{NI}{h}$	Liniová hustota „ampérvávitů“
$H_{z_rect}(b, c, h, n, x, y, z) :=$	$\text{aux}(u, b, c) \leftarrow \begin{cases} x_1 \leftarrow u - \frac{b}{2}, x_2 \leftarrow u + \frac{b}{2}, d_1 \leftarrow \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}, d_2 \leftarrow \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\ \text{aux} \leftarrow \int_{ x_1 }^{d_1} a_2(r, h, z) \frac{\cos\left(\frac{x_1}{r}\right)}{\pi} dr + \int_{d_1}^{d_2} a_2(r, h, z) \frac{\sin\left(\frac{c}{2r}\right)}{\pi} dr \\ \text{aux} \leftarrow \text{aux} - \int_{x_2}^{d_2} a_2(r, h, z) \frac{\cos\left(\frac{x_2}{r}\right)}{\pi} dr \\ \text{aux} \leftarrow \text{aux} - \int_{\frac{c}{2}}^{d_1} a_2(r, h, z) \frac{2 \cos\left(\frac{c}{2r}\right)}{\pi} dr + b_2(x_1, h, z) \text{ if } x_1 < 0 \end{cases}$ $H_z \leftarrow \begin{cases} \text{aux}(x , b, c) & \text{if } y = 0 \\ \frac{\text{aux}(x , b, 2 \cdot y + c) + \text{aux}(x , b, 2 \cdot y - c)}{2} & \text{if } y < \frac{c}{2} \\ \frac{\text{aux}(x , b, 2 \cdot y + c) - \text{aux}(x , b, 2 \cdot y - c)}{2} & \text{if } y \geq \frac{c}{2} \end{cases}$ $H_z \leftarrow n \cdot H_z$	

Přímé numerické vyčíslení vztahu (70), (71) s numerickou integrací, která má uvnitř vloženou numerickou derivaci, může zvláště pro relativně malé hodnoty intenzity magnetického pole způsobovat numerickou nestabilitu. Příkladem je počítaný průběh x-ové složky intenzity magnetického pole pro obdélníkovou cívku s rozměry podle tabulky Tab.19. Vlivem numerických nepřesností není tento průběh hladký (viz Obr.36).



Obr.36. Deformovaný průběh příčné složky intenzity magnetického pole

Derivaci funkce $R_{\text{arc}}(r, x, y, b, c)$, která je pospána algoritmem **Alg.28**, je však možné po jednotlivých úsecích vyjádřit i analyticky a následně napsat algoritmy pro výpočet příčných složek intenzity magnetického pole **Alg.15, Alg.16**. Počítaný průběh x -ová složky intenzity magnetického pole je potom pro stejné hodnoty jako na Obr.36 dokonale hladký a spojitý (viz **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**).



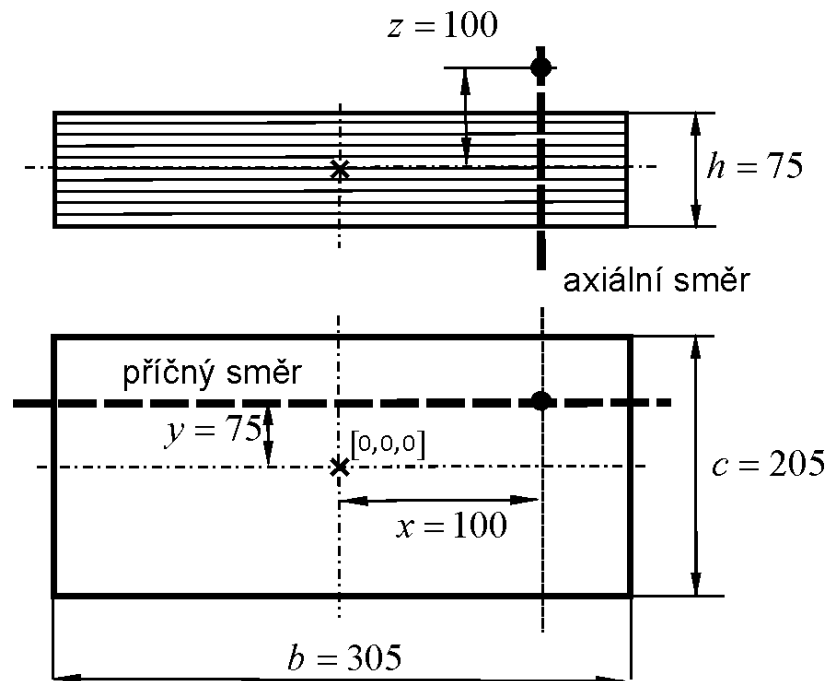
Obr.37. Příčná složka intenzity magnetického pole obdélníkové cívky počítaná pomocí algoritmu s analyticky vyčíslenou derivací

Alg.15 Příčná složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky ve směru x		
Rozměrový obrázek		Obr.35
Jednotky	Rozměr intenzity magnetického pole je dán dosazenými jednotkami liniové hustoty „ampéřzávitů“	
Vnořené funkce a algoritmy	$n = \frac{NI}{h}$	Liniová hustota „ampéřzávitů“
$H_{x_rect}(b, c, h, n, x, y, z) :=$	$\text{arc}(u, b, c) \leftarrow \begin{cases} x_1 \leftarrow u - \frac{b}{2}, x_2 \leftarrow u + \frac{b}{2}, d_1 \leftarrow \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}, d_2 \leftarrow \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\ \text{arc} \leftarrow \int_{x_2}^{d_2} c_2(r, h, z) \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{r^2 - x_2^2}} dr \\ \text{arc} \leftarrow \text{arc} - \int_{ x_1 }^{d_1} c_2(r, h, z) \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{r^2 - x_1^2}} dr \end{cases}$ $H_{x_rect} \leftarrow \begin{cases} \text{arc}(x , b, c) & \text{if } y = 0 \\ \frac{\text{arc}(x , b, 2 \cdot y + c) + \text{arc}(x , b, 2 \cdot y - c)}{2} & \text{if } y < \frac{c}{2} \\ \frac{\text{arc}(x , b, 2 \cdot y + c) - \text{arc}(x , b, 2 \cdot y - c)}{2} & \text{if } y \geq \frac{c}{2} \end{cases}$ $\text{return } n \cdot H_{x_rect} \cdot \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(z)$	

Alg.16 Příčná složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky ve směru y		
Rozměrový obrázek		Obr.35
Jednotky	Rozměr intenzity magnetického pole je dán dosazenými jednotkami liniové hustoty „ampéřzávitů“	
Vnořené funkce a algoritmy	$n = \frac{NI}{h}$	Liniová hustota „ampéřzávitů“
$H_{y_rect}(b, c, h, n, x, y, z) :=$	$\text{arc}(u, b, c) \leftarrow x_1 \leftarrow u - \frac{b}{2}, x_2 \leftarrow u + \frac{b}{2}, d_1 \leftarrow \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}, d_2 \leftarrow \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$ $\text{arc} \leftarrow \int_{d_1}^{d_2} c_2(r, h, z) \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}} dr$ $\text{arc} \leftarrow \text{arc} + \int_{\frac{c}{2}}^{d_1} c_2(r, h, z) \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}} dr \text{ if } x_1 < 0$ $H_{y_rect} \leftarrow \begin{cases} \text{arc}(x , b, c) & \text{if } y = 0 \\ \text{arc}(x , b, 2 \cdot y + c) - \text{arc}(x , b, 2 \cdot y - c) & \text{if } y < \frac{c}{2} \\ \text{arc}(x , b, 2 \cdot y + c) - \text{arc}(x , b, 2 \cdot y - c) & \text{if } y \geq \frac{c}{2} \end{cases}$ $H_{y_rect} \leftarrow n \cdot H_{y_rect} \cdot \text{sign}(y) \cdot \text{sign}(z)$	

3.4.3.b) Porovnání počítaných a měřených hodnot intenzity magnetického pole tenké cívky obdélníkového tvaru

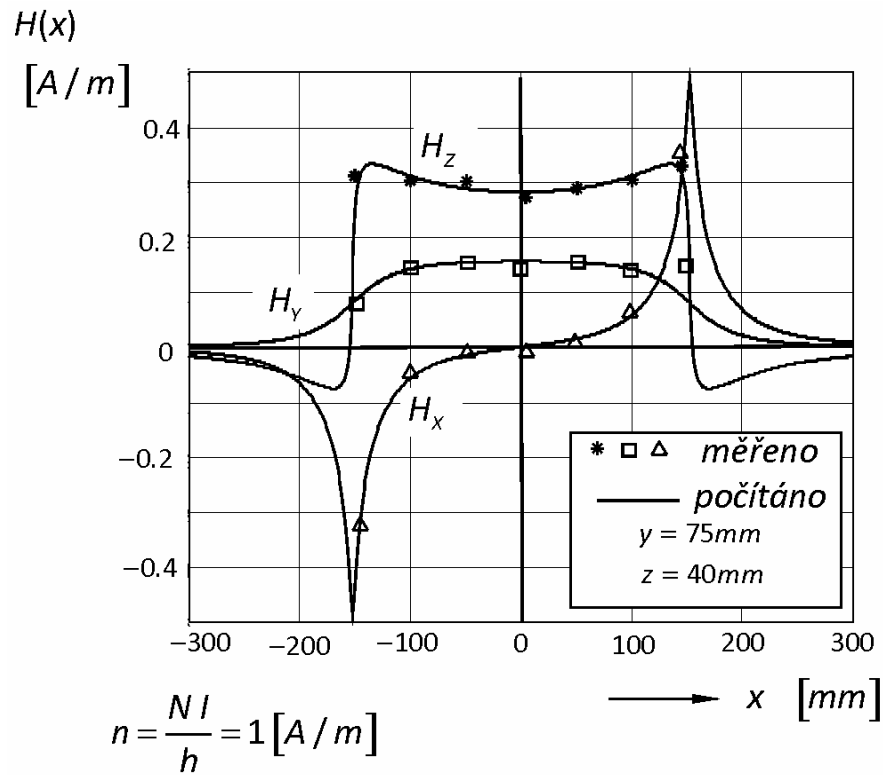
Pro model cívky obdélníkového tvaru (viz část **P-1.5.1.b**, Tab.19) bylo na automatizovaném pracovišti provedeno měření složek intenzity magnetického pole (**P-1.5.3**) v liniích naznačených na obrázku Obr.38.



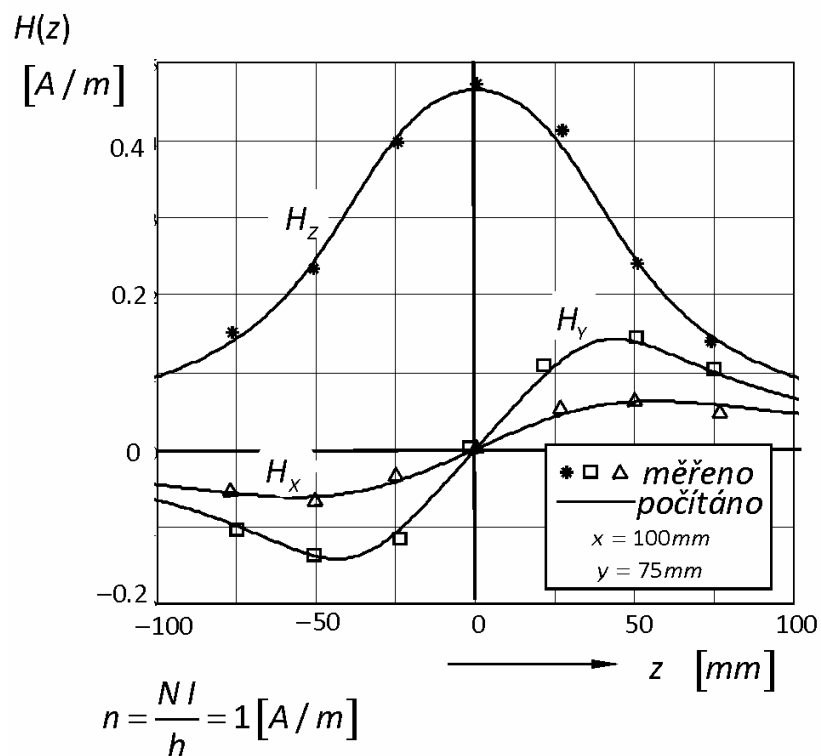
Obr.38. Porovnání měřených a počítaných hodnot intenzity magnetického pole obdélníkové cívky

Počítané hodnoty v příčném i osovém směru jsou vyneseny v grafech Obr.39, Obr.40. Měřené hodnoty se s počítanými velice dobře shodují, proto jsou pro přehlednost do grafů zapsány měřené hodnoty pouze v několika klíčových bodech. Pro tyto body jsou v tabulce Tab.14 pro případné porovnání uvedeny počítané číselné hodnoty.

Tab.14 Intenzita magnetického pole tenké obdélníkové cívky				
Počítáno pro $n = \frac{NI}{h} = 1$, všechny rozměry jsou v [mm]				
Rozměry (Obr.35)		$b = 305$	$c = 205$	
			$h = 75$	
	transverse components		axial component	
	$H_{x \text{ rect}}$	$H_{y \text{ rect}}$	$H_{z \text{ rect}}$	
Algoritmus	Alg.15	Alg.16	Alg.14	
Příčný směr (Obr.38.)		$y = 75$		
		$z = 40$		
	$x = 0$	0	0.15571	0.28154
	$x = 50$	0.01506	0.15342	0.28777
	$x = 100$	0.05708	0.14103	0.31044
	$x = 150$	0.43178	0.08432	0.24972
Osový směr (Obr.38.)			$y = 75$	
			$x = 100$	
	$z = 0$	0	0	0.46459
	$z = 25$	0.04192	0.10764	0.40209
	$z = 50$	0.06143	0.13879	0.24733
	$z = 75$	0.05761	0.09935	0.14311



Obr.39. Měřená a počítané hodnoty složek intenzity magnetického pole v příčném směru



Obr.40. Měřené a počítané hodnoty složek intenzity magnetického pole v osovém směru

P-1. Algoritmy a matematické vztahy použité pro výpočet a porovnání výsledků

V této části práce jsou souhrnně popsány, odvozeny a do podoby algoritmů převedeny dílčí problémy, ze kterých vychází metoda výpočtu magnetických polí a vzájemných indukčností, která je prezentována v první části práce. Jsou zde dále popsány použité numerické metody, výpočtové prostředky a rovněž modely sestavené k experimentálnímu ověření počítaných hodnot včetně použitých metod měření.

První část výpočtové metody vychází ze vztahů platných pro vzájemné indukčnosti v soustavách s koaxiálními proudovými smyčkami a cívkami. V této části jsou tyto vztahy podrobně odvozeny včetně jejich derivací, které jsou při výpočtu také použity.

Třetí část výpočtové metody, určená pro výpočet magnetického pole smyčky a cívky obecného tvaru, vychází ze superpozice magnetických polí elementárních proudových smyček (magnetických dipólů). Z tohoto důvodu jsou v této části práce odvozeny vztahy pro skalární potenciál magnetického pole elementárních proudových smyček. Aby bylo možné posoudit výsledky nově popisovaného postupu při výpočtu magnetického pole, jsou zde pro porovnání alternativně odvozeny vztahy pro speciální případ kruhových proudových smyček a cívek, které jsou počítány známým postupem pomocí integrace vektorového potenciálu.

V celé práci se pro vyčíslení matematických vztahů používají úplné eliptické integrály prvního, druhého i třetího druhu. V této části jsou podrobně popsány použité vztahy a algoritmy vhodné pro operace s těmito integrály.

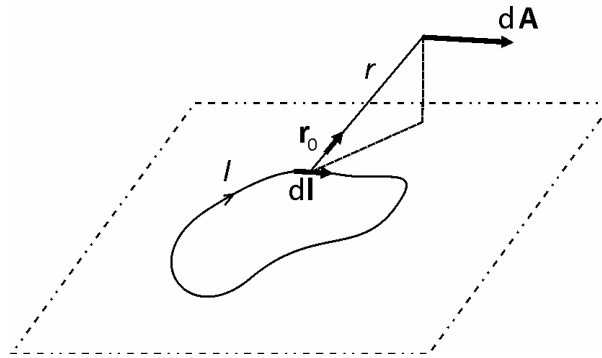
P-1.1. Magnetické pole kruhových proudových smyček, tenkých cívek a elementárního magnetického dipólu

Pro popis magnetického pole v symetrické koaxiální soustavě kruhových proudových smyček a kruhových cívek ve vzduchu se s výhodou používá vektorový potenciál. Ve válcovém systému souřadnic, který je pro popis tohoto problému vhodný, má vektorový potenciál pouze tangenciální složku. Z vektorového potenciálu je v případě potřeby možné příslušnými derivacemi určit složky dalších vektorových veličin magnetického pole (intenzity magnetického pole popřípadě magnetické indukce). Tyto veličiny mají ve válcové soustavě souřadnic radiální a axiální složku. Integrací vektorového potenciálu je možné standardně určit též magnetický tok procházející smyčkami nebo cívkami.

P-1.1.1. Vektorový potenciál ploché tenké proudové smyčky obecného tvaru

Na obrázku Obr.41 je znázorněna plochá tenká proudová smyčka obecného tvaru umístěná

v nemagnetickém prostředí.



Obr.41. Plochá tenká proudová smyčka

Smyčka je protékána elektrickým proudem I ve vyznačeném směru. Magnetický vektorový potenciál buzený proudovým elementem $d\mathbf{l}$ je v obrázku označen jako $d\mathbf{A}$. Pro výsledný vektorový potenciál magnetického pole buzeného touto smyčkou platí vztah vyplývající z Biot-Savartova zákona:

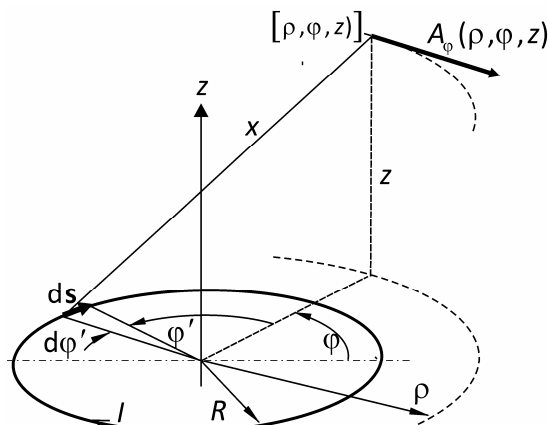
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (72)$$

$d\mathbf{l}$ je elementární vektor se směrem tečným ke smyčce v daném místě, který má orientaci ve směru protékajícího proudu. Vzdálenost elementu smyčky ve směru jednotkového vektoru \mathbf{r}_0 od místa výpočtu je označena r .

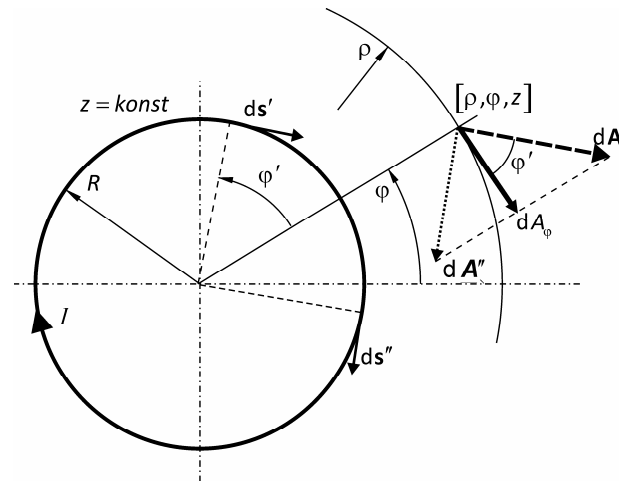
P-1.1.2. Vektorový magnetický potenciál kruhového závitů

Základním prvkem pro výpočty v koaxiálních soustavách kruhových proudových smyček a cívek je magnetický vektorový potenciál tenkého kruhového závitů. Následnými integracemi a úpravami je potom možné určit velikost složek magnetického pole i vlastní a vzájemné indukčnosti nejen tenkých kruhových závitů, ale i tenkostěnných cívek.

Na Obr.42, Obr.43 je znázorněn tenký kruhový závit o poloměru R , protékáný elektrickým proudem I . Závit je umístěn ve válcové soustavě souřadnic s počátkem ve středu závitů.



Obr.42. Magnetický vektorový potenciál tenké kruhové smyčky – prostorový pohled



Obr.43. Magnetický vektorový potenciál tenké kruhové smyčky – pohled v půdorysu

Pro vektorový potenciál buzený elementem $d\mathbf{I}$ v bodě o souřadnicích $[\rho, \varphi, z]$ bude s ohledem na vztah (72) při označení veličin podle Obr.42, Obr.43 platit:

$$dA_{\varphi}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I R d\varphi'}{4\pi r} \cos(\varphi') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cos(\varphi') d\varphi'}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\varphi' + z^2}} \quad (73)$$

kde

$$r = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\varphi' + z^2} \quad (74)$$

Výsledný vektorový potenciál v bodě o souřadnicích $[r, \varphi, z]$ bude:

$$A_{\varphi}(\rho, \varphi, z) = \mu_0 \frac{R I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi')}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos\varphi' + z^2}} d\varphi' \quad (75)$$

Standardní metody numerické integrace, pokud se použijí pro vyčíslení určitého integrálu ve vztahu (75), konvergují zvláště pro určité hodnoty vstupních parametrů velmi pomalu a v některých případech zcela selhávají. Integrály tohoto typu se proto často zapisují v tzv. uzavřeném tvaru pomocí definovaných eliptických integrálů (viz část **P-1.4.3**). Pro vyčíslení eliptických integrálů jsou vytvořeny specifické velmi rychlé a přesné algoritmy založené na jiném principu (viz část **P-1.4.3**), než je standardní numerická integrace.

Vztah (75) zapsaný pomocí eliptických integrálů prvního a druhého druhu bude mít podobu:

$$A_{\varphi_loop_EL}(R, \rho, z) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad (76)$$

kde k označuje modul eliptického integrálu:

$$k = \sqrt{\frac{4R\rho}{(R+\rho)^2 + z^2}} \quad (77)$$

Rovnici (76) je možné dále upravit a formálně zjednodušit zavedením úplného obecného eliptického

integrálu (část **P-1.4.3**), pro jehož vyčíslení je v **P-1.4.3** popsána velmi rychlá numerická metoda, která byla doslovně převzata z [10]:

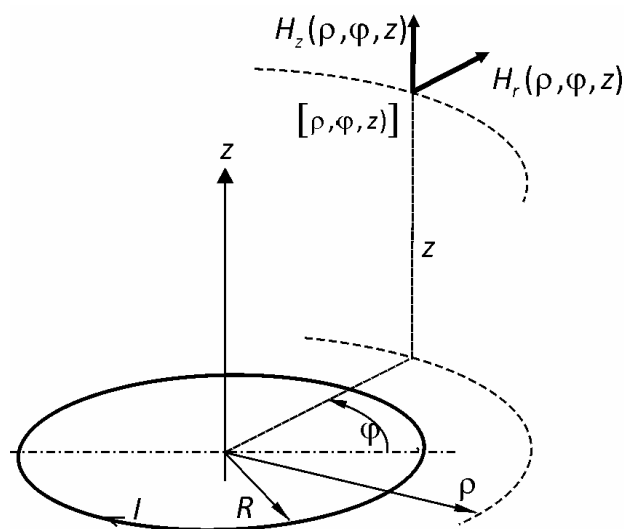
$$A_{\varphi_loop_CEL}(R, \rho, z) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \operatorname{cel}(k_c, 1, -k, k) \quad (78)$$

kde k_c značí komplementární modul eliptického integrálu:

$$k_c = \sqrt{1 - k^2} \quad (79)$$

P-1.1.3. Magnetické pole tenkého kruhového závitu

V této části jsou odvozeny vztahy a algoritmy pro radiální a axiální složku intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu. Hodnoty počítané tímto způsobem byly použity v třetí části práce (viz část 3.) pro porovnání s hodnotami počítanými alternativní metodou založenou na superpozici magnetického pole elementárních magnetických dipólů.



Obr.44. Magnetické pole tenkého kruhového závitu

Na Obr.44 je znázorněn tenký kruhový zavit o poloměru R , protékáný elektrickým proudem I . Zavit je umístěn ve válcové soustavě souřadnic s počátkem ve středu závitu. Magnetické pole je počítáno v bodě o souřadnicích $[\rho, \varphi, z]$. S ohledem na válcovou symetrii úlohy však nejsou veličiny magnetického pole na souřadnici φ závislé. Pro složky H_r, H_φ, H_z intenzity magnetického pole počítané z vektorového potenciálu ve válcové soustavě obecně platí:

$$H_r = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \quad H_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \quad H_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \quad (80)$$

Vektorový potenciál však má v tomto případě pouze tangenciální složku A_φ a vztahy se dále redukuje do tvaru:

$$H_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} A_\varphi \quad H_\varphi = 0 \quad H_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A_\varphi \quad (81)$$

Po provedení příslušných derivací rovnice (75) (případně (76) a (78)) vyplyne pro radiální složku magnetického pole integrální rovnice :

$$H_{r_loop_INT}(R, \rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = I \frac{1}{4\pi} R z \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi')}{\left(R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\varphi') + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' \quad (82)$$

Po úpravě pomocí eliptických integrálů:

$$H_{r_loop_EL}(R, I, \rho, z) := \left[\begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + z^2}} \\ \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{k \cdot z}{\rho \cdot \sqrt{R \cdot \rho}} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} \cdot E(k) - K(k) \right] \end{array} \right] \quad (83)$$

Po finální úpravě s použitím obecného eliptického integrálu byl sestaven výpočtový algoritmus **Alg.17**.

Alg.17 Radiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.44
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$H_{r_loop_CEL}(R, I, \rho, z) := \left[\begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + z^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \frac{I}{2\pi} \cdot k \cdot z \cdot \sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot Cel \left[k_c, 1, \frac{1}{(R - \rho)^2 + z^2}, -\frac{1}{(R + \rho)^2 + z^2} \right] \end{array} \right]$		

Analogicky pro axiální složku intenzity magnetického pole:

$$H_{z_loop_INT}(R, \rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} = I \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - R \rho \cos(\varphi') + z^2}{\left(R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\varphi') + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos(\varphi') d\varphi' \quad (84)$$

Axiální složka zapsaná pomocí eliptických integrálů:

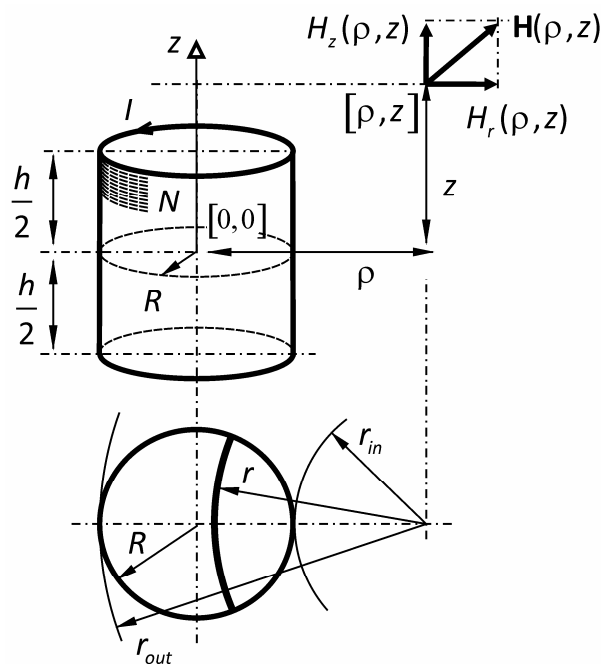
$$H_{z_loop_EL}(R, I, \rho, z) := \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + z^2}} \\ \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{k}{\sqrt{R \cdot \rho}} \cdot \left[K(k) - \frac{\rho^2 - R^2 + z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} \cdot E(k) \right] \end{cases} \quad (85)$$

Algoritmus pro výpočet axiální složky intenzity magnetického pole sestavený pomocí obecného eliptického integrálu:

Alg.18 Axiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.44
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$H_{z_loop_CEL}(R, I, \rho, z) := \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + z^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \frac{I}{2\pi} \cdot k \cdot \sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \text{Cel} \left[k_c, 1, \frac{R - \rho}{(R - \rho)^2 + z^2}, \frac{R + \rho}{(R + \rho)^2 + z^2} \right] \end{cases}$		

P-1.1.4. Magnetické pole tenké válcové cívky

Na Obr.45 je znázorněna tenká kruhová cívka (solenoid) o poloměru R a výšce h , protékaná elektrickým proudem I .



Obr.45. Tenká válcová cívka (solenoid)

Cívka je umístěna ve válcové soustavě souřadnic s počátkem v axiálním středu cívky. Magnetické pole je počítáno v bodě o souřadnicích $[\rho, \varphi, z]$. S ohledem na válcovou symetrii úlohy však nejsou veličiny magnetického pole na souřadnici φ závislé.

Axiální i radiální složku magnetického pole cívky je možné jednoduše určit integrací pole tenkého závitu po výšce cívky v axiálním směru.

Vztah pro radiální složku intenzity magnetického pole vyplyne z integrace vztahu (82):

$$H_{r_sol_INT}(R, h, N, I, \rho, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{NI}{h} R \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi')(z - \xi)}{\left(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi') + (z - \xi)^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' d\xi \quad (86)$$

Rovnici (86), která není vhodná pro numerické vyčíslení, je možné převést na eliptické integrály (viz část **P-1.4.3**):

$$H_{r_sol_EL}(R, h, N, I, \rho, z) := \left. \begin{array}{l} Aux1(\xi) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + (z - \xi)^2}} \\ \left(\frac{2}{k} - k\right) \cdot K(k) - \left(\frac{2}{k}\right) \cdot E(k) \end{array} \right. \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{h} \cdot \sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \left(Aux1\left(\frac{h}{2}\right) - Aux1\left(-\frac{h}{2}\right) \right) \end{array} \right\} \quad (87)$$

Zavedením obecného úplného integrálu do (87) (viz část **P-1.4.3**) je možné získat pro radiální složku intenzity magnetického pole výsledný numericky ověřený algoritmus:

Alg.19 Radiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.45
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$H_{r_sol_CEL}(R, h, N, I, \rho, z) := \left. \begin{array}{l} Aux2(\xi) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + (z - \xi)^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ k \cdot Cel(k_c, 1, 1, -1) \text{ if } \rho \neq 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{h} \cdot \sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \left(Aux2\left(-\frac{h}{2}\right) - Aux2\left(\frac{h}{2}\right) \right) \end{array} \right\}$		

Vztah pro axiální složku intenzity magnetického pole vyplyne z integrace vztahu (84):

$$H_{z_sol_INT}(R, h, \rho, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{NI R}{h \rho} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - R \rho \cos(\varphi') + (z - \xi)^2}{\left(R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\varphi') + (z - \xi)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos(\varphi') d\varphi' d\xi \quad (88)$$

Rovnici (88), která není vhodná pro numerické vyčíslení, je možné opět převést na eliptické integrály (viz část **P-1.4.3**):

$$H_{z_sol_EL}(R, h, N, I, \rho, z) := \left. \begin{array}{l} Aux3(\xi) \leftarrow \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + (z - \xi)^2}} \\ k \cdot (z - \xi) \left[K(k) + \frac{(R - \rho)}{(R + \rho)} \cdot \Pi \left[1 - \left(\frac{R - \rho}{R + \rho} \right)^2, k \right] \right] & \text{if } \rho \neq 0 \\ \frac{\pi \cdot (z - \xi)}{\sqrt{R^2 + (z - \xi)^2}} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{N \cdot I}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{4R \cdot \rho}} \cdot \left(Aux3\left(-\frac{h}{2}\right) - Aux3\left(\frac{h}{2}\right) \right) \end{array} \right\} \quad (89)$$

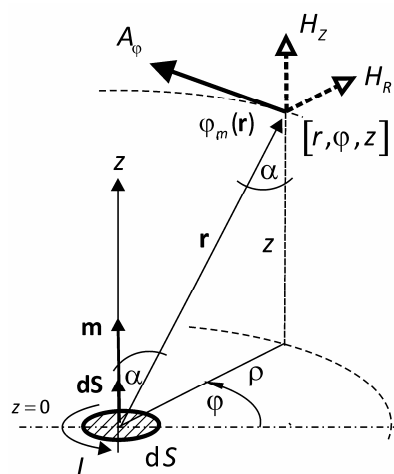
Zavedením obecného úplného integrálu do (89) (viz část **P-1.4.3**) je možné získat pro axiální složku intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky výsledný numericky ověřený algoritmus:

Alg.20 Axiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.45
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$H_{z_sol_CEL}(R, h, N, I, \rho, z) :=$	$Aux4(\xi) \leftarrow \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R \cdot \rho}{(R + \rho)^2 + (z - \xi)^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \frac{z - \xi}{R + \rho} \cdot k \cdot Cel \left[k_c, \left(\frac{R - \rho}{R + \rho} \right)^2, 1, \frac{R - \rho}{R + \rho} \right] & \text{if } \rho \neq 0 \\ \frac{\pi \cdot (z - \xi)}{\sqrt{R^2 + (z - \xi)^2}} & \text{otherwise} \end{cases}$	
	$\frac{1}{2\pi} \frac{N \cdot I}{h} \cdot \sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \left(Aux4\left(-\frac{h}{2}\right) - Aux4\left(\frac{h}{2}\right) \right)$	

P-1.1.5. Magnetické pole elementárního magnetického dipólu

Na obrázku Obr.46 je znázorněna elementární proudová smyčka (elementární magnetický dipól). Smyčka je umístěna ve válcové soustavě souřadnic s počátkem soustavy ležícím uprostřed smyčky. Smyčka leží v rovině kolmé na osu z ($z=0$). Vektorový a skalární potenciál magnetického pole a složky intenzity magnetického pole lze určit limitním přechodem ze vztahů platných pro kruhovou proudovou smyčku konečných rozměrů.

Vztahy pro výpočet magnetického pole a skalárního magnetického potenciálu elementárního magnetického dipólu jsou v této práci aplikovány v části 3, kde jsou použity pro stanovení magnetického pole proudových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru.



Obr.46. Elementární proudová smyčka – magnetický dipól

Vektorový potenciál má v tomto případě opět pouze tangenciální složku A_{φ_dip} . Výpočtem limity vztahu (76) při vydělení plochou smyčky dostaneme vektorový potenciál, který by budila elementární smyčka s jednotkovou plochou:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{A_{\varphi_loop_EL}(R, \rho, z)}{\pi R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} I \quad (90)$$

Vektorový potenciál magnetického pole buzeného elementární smyčkou o velikosti plochy dS v bodě $[\rho, z]$ potom bude:

$$A_{\varphi_dip}(\rho, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} I dS \quad (91)$$

Pro vektorový potenciál magnetického dipólu platí známý obecný vztah:

$$\mathbf{A}_{dip} = \mu_0 \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (92)$$

Vztah (91) je v souladu se vztahem (92), neboť platí (viz Obr.46):

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= I d\mathbf{S} \\ |\mathbf{m} \times \mathbf{r}| &= I dS r \sin(\alpha) = I dS r \frac{\rho}{r} = I dS \rho \\ r^3 &= (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (93)$$

Pro radiální složku intenzity magnetického pole dipólu ze vztahu (91) platí:

$$H_{r_dip}(\rho, z) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} A_{\varphi_dip} = -\frac{3\rho z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} I dS \quad (94)$$

Stejně pro axiální složku intenzity magnetického pole dipólu:

$$H_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A_{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} I dS \quad (95)$$

Pro skalární potenciál magnetického pole φ_m platí obecně:

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m \quad (96)$$

Pro složky intenzity magnetického pole počítané ze skalárního potenciálu:

$$H_{r_dip}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{m_dip}(\rho, z) \quad , \quad H_{z_dip}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{m_dip}(\rho, z) \quad (97)$$

Pro velikost skalárního potenciálu s ohledem na (97) platí:

$$\varphi_{m_dip}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (I dS) + \text{konst} \quad (98)$$

To je v souladu se známou obecnou rovnicí pro skalární potenciál elementárního magnetického dipólu:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (99)$$

Neboť platí (viz Obr.46):

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} &= I dS r \cos(\alpha) = I dS r \frac{z}{r} = I dS z \\ r &= (\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (100)$$

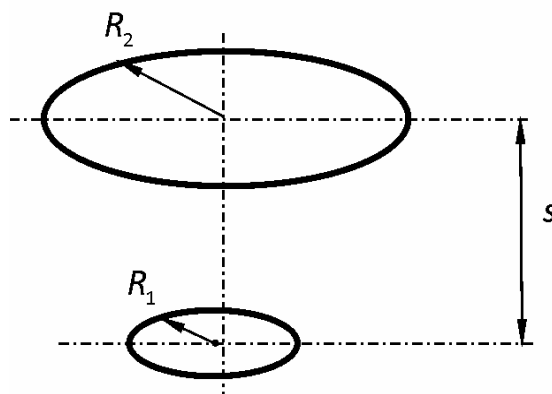
P-1.2. Vlastní a vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových proudových smyček a tenkých cívek, derivace vzájemné indukčnosti

V této části jsou odvozeny vztahy a sestaveny algoritmy pro výpočet vzájemných indukčností různých kombinací koaxiálních tenkých kruhových závitů a tenkostěnných cívek ve vzduchu. Tyto algoritmy jsou numericky i experimentálně ověřeny (viz [7]) a jsou pro tento speciální problém přímo použitelné pro výpočet.

Jsou zde popsány rovněž vztahy a algoritmy pro výpočet derivace vzájemných indukčností koaxiálních proudových smyček a cívek, které jsou v části 2. této práce použity pro výpočet vzájemných indukčností smyček a cívek libovolného tvaru v obecné nekoaxiální vzájemné poloze.

P-1.2.1. Vzájemná indukčnost dvou koaxiálních tenkých kruhových smyček a její derivace

Na obrázku Obr.47 jsou znázorněny dvě koaxiální tenké kruhové proudové smyčky (kruhové závit).



Obr.47. Dvě kruhové proudové smyčky

Vzájemnou indukčnost je možné v tomto případě vypočítat jednoduchou integrací vektorového potenciálu buzeného jednou smyčkou (75) po obvodě druhé smyčky. Pro koaxiální závit je tento potenciál po obvodě konstantní, integrace se redukuje na pouhé vynásobení vektorového potenciálu obvodem druhé smyčky.

$$M_{loop_loop_INT}(R_1, R_2, s) := \frac{\mu_0}{2} \cdot R_1 \cdot R_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\varphi) + s^2}} d\varphi \quad (101)$$

Vztah upravený pomocí eliptických integrálů prvního a druhého druhu (viz část **P-1.4.3**):

$$M_{loop_loop_EL}(R_1, R_2, s) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + s^2}} \\ \mu_0 \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \cdot K(k) - \frac{2}{k} \cdot E(k) \right] \end{array} \right. \quad (102)$$

Výsledný algoritmus upravený zavedením obecného úplného integrálu (viz část **P-1.4.3**) bude:

Alg.21 Vzájemná indukčnost dvou tenkých kruhových smyček – kruhových závitů		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.47
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$M_{loop_loop_CEL}(R_1, R_2, s) := \left \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + s^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \mu_0 \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot Cel(k_c, 1, -k, k) \end{array} \right.$		

Derivováním vztahu pro vzájemnou indukčnost (101) mezi kruhovými smyčkami (Obr.47) vyplyne vztah pro derivaci vzájemné indukčnosti:

$$dM_{loop_loop_INT}(R_1, r, s) := \frac{1}{2} \cdot \mu_0 R_1 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(R_1^2 - R_1 \cdot r \cdot \cos(\phi) + s^2) \cdot \cos(\phi)}{(R_1^2 + r^2 - 2 \cdot R_1 \cdot r \cdot \cos(\phi) + s^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi \quad (103)$$

Vztah (103) je možné opět upravit pro snadné numerické vyčíslení pomocí eliptických integrálů prvního a druhého druhu (viz část **P-1.4.3**):

$$dM_{loop_loop_EL}(R_1, r, s) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot r}{(R_1 + r)^2 + s^2}} \\ \frac{1}{2} \cdot \mu_0 k \cdot \sqrt{\frac{r}{R_1}} \left[K(k) - \frac{r^2 - R_1^2 + s^2}{(R_1 - r)^2 + s^2} \cdot E(k) \right] \end{array} \right. \quad (104)$$

Zavedením obecného úplného eliptického integrálu (viz část **P-1.4.3**) je možné získat algoritmus **Alg.22**, který je popsán v následujícím textu.

Alg.22 Derivace vzájemné indukčnosti dvou tenkých kruhových smyček – kruhových závitů		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.47
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$dM_{loop_loop_CEL}(R_1, r, s) := \left[\begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot r}{(R_1 + r)^2 + s^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \mu_0 \cdot k \cdot \sqrt{R_1 \cdot r} \cdot Cel \left[k_c, 1, \frac{R_1 - r}{(R_1 - r)^2 + s^2}, \frac{R_1 + r}{(R_1 + r)^2 + s^2} \right] \end{array} \right]$		

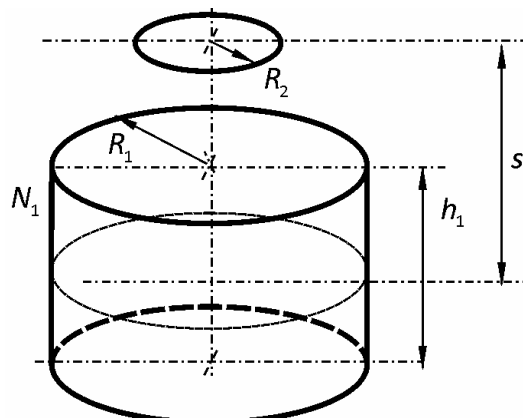
Pro všechny uvedené vztahy a algoritmy ((101),(102), Alg.21) popřípadě (103),(104),Alg.22) musí při ověření správnosti platit po zpětném dosazení následující ekvivalence:

$$M_{loop_loop}(R_1, R_2, s) = \int_0^{R_2} dM_{loop_loop}(R_1, r, s) dr \quad (105)$$

P-1.2.2. Vzájemná indukčnost tenké kruhové cívky a koaxiálního kruhového závitů, derivace vzájemné indukčnosti

Na obrázku Obr.48 je znázorněna tenká kruhová cívka a kruhová proudová smyčka. Jejich vzájemnou indukčnost lze určit integrací vztahu (101) po výšce tenké cívky:

$$M_{sol_loop_INT}(R_1, h_1, N_1, R_2, s) := \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot (R_1 \cdot R_2) \cdot \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\varphi) + (s - \xi)^2}} d\varphi d\xi \quad (106)$$



Obr.48. Tenká kruhová cívka (solenoid) a kruhová proudová smyčka

Také v tomto případě je možné pro snadnější numerické vyčíslení upravit integrální rovnici (106) pomocí úplných eliptických integrálů (viz část **P-1.4.3**):

$$M_{sol_loop_EL}(R_1, h_1, N_1, R_2, s) := \left| \begin{array}{l} \rho \leftarrow \frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1 \cdot R_2} \\ Aux5(\lambda) \leftarrow \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + \lambda^2}} \\ 2 \cdot \lambda \cdot k \cdot \left[\frac{K(k) - E(k)}{k^2} + \frac{\rho - 2}{2} \cdot \left(K(k) - \Pi\left(\frac{2}{\rho}, k\right) \right) \right] \end{array} \right. \\ \frac{\mu_0}{2} \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \left(Aux5\left(s + \frac{h_1}{2}\right) - Aux5\left(s - \frac{h_1}{2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (107)$$

Zběžným porovnáním vztahu (106) a (107) by se mohlo jevit, že se zavedením eliptických integrálů situace příliš nezjednodušila. Při následném numerickém vyčíslení je ale patrné, že vztahy s eliptickými integrály, které prakticky neobsahují další přímé numerické integrace, jsou mnohanásobně rychlejší a přesnější. Z numerického hlediska bylo v této práci ověřeno (viz část **P-1.4.3**), že pro numerické vyčíslení jsou nejvýhodnější vztahy s použitím obecného úplného eliptického integrálu, které byly použity i v následujícím algoritmu **Alg.23**.

Alg.23 Vzájemná indukčnost tenké kruhové cívky a tenké proudové smyčky		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.48
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$M_{sol_loop_CEL}(R_1, h_1, N_1, R_2, s) := \left \begin{array}{l} \rho \leftarrow \frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1 \cdot R_2} \\ Aux6(\lambda) \leftarrow \left \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + \lambda^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ 2 \cdot \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{Cel(k_c, 1, 0, k^2)}{k^2} + \frac{\rho - 2}{2} \cdot Cel\left(k_c, \frac{\rho - 2}{\rho}, 0, -\frac{2}{\rho}\right) \right) \end{array} \right. \\ \frac{\mu_0}{2} \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \left(Aux6\left(s + \frac{h_1}{2}\right) - Aux6\left(s - \frac{h_1}{2}\right) \right) \end{array} \right.$		

Derivováním vztahu pro vzájemnou indukčnost (106) mezi tenkou kruhovou cívkou a kruhovou smyčkou (Obr.48) dostaneme vztah:

$$dM_{sol_loop}(R_1, h_1, N_1, r, s) = \frac{d}{dr} M_{sol_loop}(R_1, h_1, N_1, r, s)$$

$$dM_{sol_loop_INT}(R_1, h_1, N_1, r, s) := \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot R_1 \cdot \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi) \cdot (R_1^2 - r \cdot \cos(\phi) \cdot R_1 + \xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot s + s^2)}{(R_1^2 - 2 \cdot \cos(\phi) \cdot R_1 \cdot r + \xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot s + r^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\xi \quad (108)$$

Pro hledanou derivaci je možné opět výsledné vztahy upravit pomocí eliptických integrálů a psát následující algoritmy:

$$dM_{sol_loop_EL}(R_1, h_1, N_1, r, s) := \left| \begin{array}{l} Aux7(\xi) \leftarrow \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot r}{(R_1 + r)^2 + (s - \xi)^2}} \\ (s - \xi)k \cdot \left[K(k) + \frac{(R_1 - r)}{(R_1 + r)} \cdot \Pi \left[1 - \left(\frac{R_1 - r}{R_1 + r} \right)^2, k \right] \right] & \text{if } r \neq 0 \\ \frac{\pi \cdot (s - \xi)}{\sqrt{R_1^2 + (s - \xi)^2}} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \sqrt{\frac{r}{R_1}} \cdot \left(Aux7\left(-\frac{h_1}{2}\right) - Aux7\left(\frac{h_1}{2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (109)$$

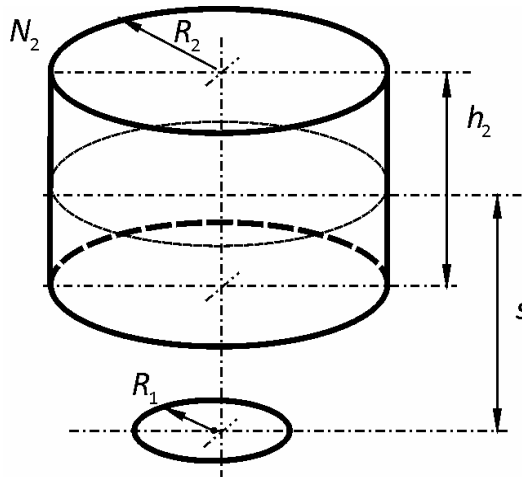
Alg.24 Derivace vzájemné indukčnosti tenké kruhové cívky a tenké proudové smyčky		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.48
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$dM_{sol_loop_CEL}(R_1, h_1, N_1, r, s) := \left \begin{array}{l} Aux8(\xi) \leftarrow \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4R_1 \cdot r}{(R_1 + r)^2 + (s - \xi)^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \frac{s - \xi}{R_1 + r} \cdot k \cdot Cel \left[k_c, \left(\frac{R_1 - r}{R_1 + r} \right)^2, 1, \frac{R_1 - r}{R_1 + r} \right] & \text{if } r \neq 0 \\ \frac{\pi \cdot (s - \xi)}{\sqrt{R_1^2 + (s - \xi)^2}} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \sqrt{R_1 \cdot r} \cdot \left(Aux8\left(-\frac{h_1}{2}\right) - Aux8\left(\frac{h_1}{2}\right) \right) \end{array} \right.$		

Pro všechny uvedené algoritmy musí při ověření správnosti i v tomto případě platit:

$$M_{\text{sol_loop}}(R_1, h_1, N_1, R_2, s) = \int_0^{R_2} dM_{\text{sol_loop}}(R_1, h_1, N_1, r, s) dr \quad (110)$$

P-1.2.3. Vzájemná indukčnost koaxiální proudové smyčky a tenké kruhové cívky, derivace vzájemné indukčnosti

Na obrázku Obr.49 je znázorněna kruhová proudová smyčka a tenká kruhová cívka. Pro výpočet vzájemné indukčnosti i derivace vzájemné indukčnosti platí zcela symetrické vztahy a algoritmy jako v P-1.2.2 pro uspořádání v opačném pořadí. Pokud bude zachováno stejné logické členění parametrů, kdy na prvním místě bude popsána proudová smyčka a potom tenká cívka, budou platit pro všechny rovnice uvedené v P-1.2.2. transformační vztahy:



Obr.49. Kruhová proudová smyčka a tenká kruhová cívka (solenoid)

Pro vzájemnou indukčnost:

$$M_{\text{loop_sol}}(R_1, R_2, h_2, N_2, s) = M_{\text{sol_loop}}(R_2, h_2, N_2, R_1, s) \quad (111)$$

Pro derivace vzájemné indukčnosti :

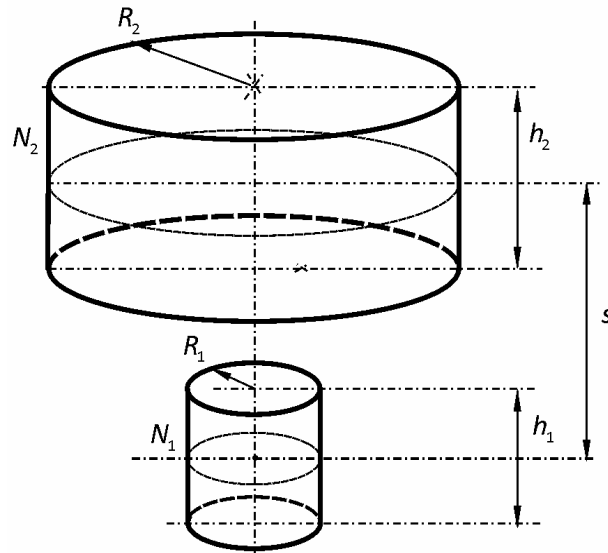
$$dM_{\text{loop_sol}}(R_1, r, h_2, N_2, s) = \frac{d}{dr} M_{\text{loop_sol}}(R_1, r, h_2, N_2, s)$$

a z tohoto:

$$dM_{\text{loop_sol}}(R_1, r, h_2, N_2, s) = dM_{\text{sol_loop}}(R_1, h_2, N_2, r, s) \quad (112)$$

P-1.2.4. Vzájemná indukčnost dvou koaxiálních tenkých kruhových válcových cívek a její derivace

Na obrázku Obr.50 jsou znázorněny dvě tenké kruhové vzduchové koaxiální cívky. Jejich vzájemnou indukčnost je možné vypočítat integrací vztahu (106) pro vzájemnou indukčnost tenké cívky a kruhového závitu, podobně to platí i pro derivaci vzájemné indukčnosti.



Obr.50. Dvě tenké koaxiální kruhové vzduchové cívky

V integrálních rovnicích se tedy objeví další v pořadí již třetí integrace (viz. (113), (114)). Stále se však jedná o formálně jednoduše zapsané a přehledné jednořádkové vztahy.

$$M_{sol_sol_INT}(R_1, h_1, N_1, R_2, h_2, N_2, s) := \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \int_{\frac{h_2}{2}}^{s+\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\varphi) + (\zeta - \xi)^2}} d\varphi d\xi d\zeta \quad (113)$$

$$dM_{sol_sol_INT}(R_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s) := \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot R_1 \cdot \int_{\frac{h_2}{2}}^{s+\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) \cdot [R_1^2 - r \cdot \cos(\varphi) \cdot R_1 + (\zeta - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}}{[R_1^2 - 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot R_1 \cdot r + r^2 + (\zeta - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} d\varphi d\zeta d\xi \quad (114)$$

Rovnice upravené pomocí eliptických integrálů s ohledem na formální zápis viditelně komplikují (viz. (115) resp. **Alg.25**, nebo pro derivaci (116) resp. **Alg.26**). Zcela opačná situace však nastane při numerickém vyčíslení.

Numerické vyčíslení rovnic (113), (114) při použití standardních metod numerické integrace trvá desítky sekund, při použití obecného úplného eliptického integrálu (viz. **Alg.25**, **Alg.26**) jednotky milisekund, je tedy mnohanásobně rychlejší.

$$\begin{aligned}
 M_{sol_sol_EL}(R_1, h_1, N_1, R_2, h_2, N_2, s) := & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_2 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \\ \lambda_3 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_4 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \\ \rho \leftarrow \frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1 \cdot R_2} \\ Aux9(\lambda) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \sqrt{\frac{4 \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + \lambda^2}} \\ \frac{1}{k} \left[\frac{1 - k^2}{k^2} (K(k) - E(k)) + \frac{3\rho - 4}{2} \cdot E(k) - \frac{3}{2} \rho \cdot (1 - k^2) \cdot \Pi \left(\frac{\rho \cdot k^2 - 2}{\rho - 2}, k \right) \right] \text{ if } \rho \neq 2 \\ \text{otherwise} \\ \frac{1}{k} \left[\frac{1 - k^2}{k^2} (K(k) - E(k)) + E(k) \right] \text{ if } k \neq 1 \\ 1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \frac{4}{3} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot (R_1 \cdot R_2)^{\frac{3}{2}} \cdot (Aux9(\lambda_1) - Aux9(\lambda_2) - Aux9(\lambda_3) + Aux9(\lambda_4)) \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
 dM_{sol_sol_EL}(R_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s) := & \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \leftarrow 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \\ \lambda_1 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_2 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}, \lambda_3 \leftarrow s + \frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2}, \lambda_4 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \\ \rho \leftarrow \frac{(R_1 + r)^2}{2 \cdot R_1 \cdot r} \\ Aux11(\xi) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \leftarrow \frac{\xi^2}{2 \cdot R_1 \cdot r} \\ k \leftarrow \sqrt{\frac{2}{\rho + \delta}} \\ k \cdot \left[\frac{2}{k^2} \cdot E(k) + \left[\left(\frac{R_1 - r}{R_1 + r} \right) \cdot \rho + \left(\frac{R_1 + r}{R_1 - r} \right) \cdot \delta \right] \cdot \Pi \left[\frac{\xi^2 \cdot k^2}{(R_1 - r)^2}, k \right] \right] \end{array} \right. \\ \mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot r \cdot \sqrt{R_1 \cdot r} \cdot (Aux11(\lambda_1) - Aux11(\lambda_2) - Aux11(\lambda_3) + Aux11(\lambda_4)) \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{116}$$

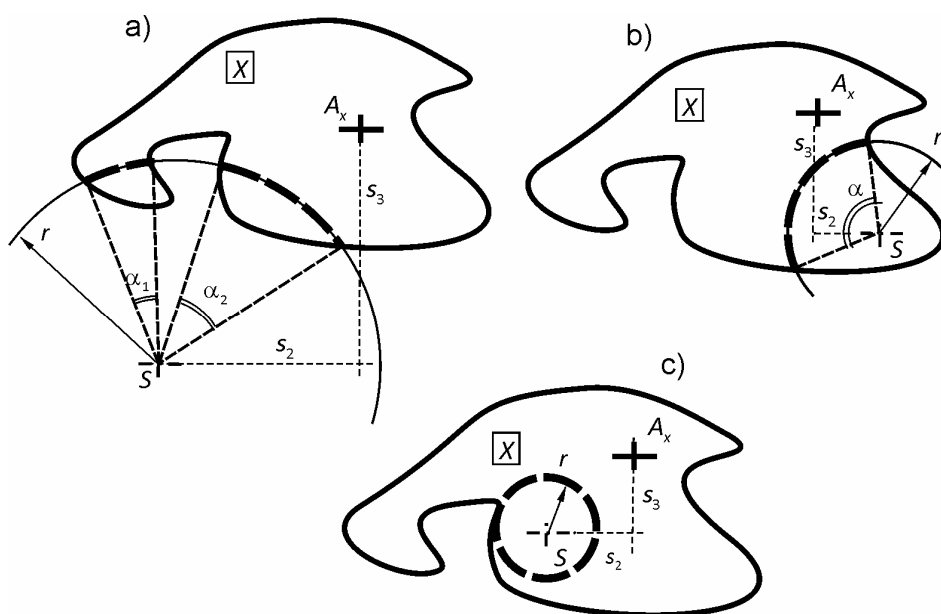
Alg.25 Vzájemná indukčnost dvou tenkých koaxiálních kruhových cívek		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.50
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$M_{sol_sol_CEL}(R_1, h_1, N_1, R_2, h_2, N_2, s) :=$ $\lambda_1 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_2 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}$ $\lambda_3 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_4 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}$ $\rho \leftarrow \frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1 \cdot R_2}$ $Aux10(\lambda) \leftarrow \begin{cases} k \leftarrow \sqrt{\frac{4 \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + \lambda^2}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ \frac{1}{k} \left[Cel \left[k_c, 1, \frac{3 \cdot \rho}{2} - 2, \frac{(3 \cdot \rho - 2) \cdot k_c^2}{2} \right] - \frac{3}{2} \rho \cdot k_c^2 \cdot Cel \left(k_c, \frac{\rho \cdot k_c^2}{\rho - 2}, 1, 1 \right) \right] & \text{if } \rho \neq 2 \\ \frac{1}{k} Cel(k_c, 1, 1, 2k_c^2) & \text{if } k_c \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$ $\frac{4}{3} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot (R_1 \cdot R_2)^{\frac{3}{2}} \cdot (Aux10(\lambda_1) - Aux10(\lambda_2) - Aux10(\lambda_3) + Aux10(\lambda_4))$		

Alg.26 Derivace vzájemné indukčnosti dvou tenkých koaxiálních kruhových cívek		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.50
Vnořené funkce	Cel	Alg.30
$dM_{sol_sol_CEL}(R_1, h_1, N_1, r, h_2, N_2, s)$ $\mu_0 \leftarrow 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ $\lambda_1 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}, \lambda_2 \leftarrow s + \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}, \lambda_3 \leftarrow s + \frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2}, \lambda_4 \leftarrow s - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}$ $\rho \leftarrow \frac{(R_1 + r)^2}{2 \cdot R_1 \cdot r}$ $Aux12(\xi) \leftarrow \begin{cases} \delta \leftarrow \frac{\xi^2}{2 \cdot R_1 \cdot r} \\ k \leftarrow \sqrt{\frac{2}{\rho + \delta}} \\ k_c \leftarrow \sqrt{1 - k^2} \\ k \cdot \left[\frac{2}{k^2} \cdot Cel(k_c, 1, 1, k_c^2) + \left[\left(\frac{R_1 - r}{R_1 + r} \right) \cdot \rho + \left(\frac{R_1 + r}{R_1 - r} \right) \cdot \delta \right] \cdot Cel \left[k_c, \frac{(R_1 + r)^2 \cdot [(R_1 - r)^2 + \xi^2]}{(R_1 - r)^2 \cdot [(R_1 + r)^2 + \xi^2]}, 1, 1 \right] \right] & \text{if } r \neq R_1 \\ \frac{2}{\sqrt{1 - k_c^2}} \cdot Cel(k_c, 1, 1, k_c^2) & \text{otherwise} \end{cases}$ $\mu_0 \cdot \frac{N_1}{h_1} \cdot \frac{N_2}{h_2} \cdot r \cdot \sqrt{R_1 \cdot r} \cdot (Aux12(\lambda_1) - Aux12(\lambda_2) - Aux12(\lambda_3) + Aux12(\lambda_4))$		

P-1.3. Tvarové funkce

P-1.3.1. Obecný popis tvarové funkce

Tvary příčného průřezu cívek a smyček jsou v této práci jednoznačně popsány pomocí zde definovaných funkcí, které byly nazvány „tvarové“. Tvarové funkce mají jednoduchou geometrickou interpretaci. Udávají úhel, pod kterým kružnice se středem v libovolném bodě S a s obecným poloměrem r (Obr.51b) vytíná oblouk na ploše obrazce příčného průřezu cívky (smyčky) obecného tvaru \boxed{X} .



Obr.51. Geometrická interpretace tvarových funkcí

Pokud kružnice protíná obrazec ve více místech, jedná se o součtový úhel (viz . Obr.51a). Pokud kružnice leží uvnitř obrazce, je úhel roven 2π (viz . Obr.51c).

Definované tvarové funkce mají obecný formální tvar:

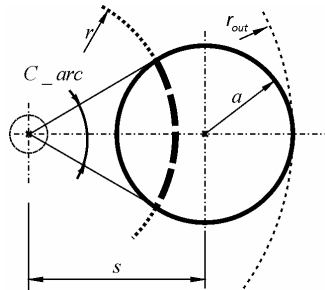
$$\alpha = X_{\text{arc}}(r, s_1..s_n, \lambda_1.. \lambda_n) \quad (117)$$

Parametry $\lambda_1.. \lambda_n$ popisují tvar příslušného objektu \boxed{X} , parametry $s_1..s_n$ udávají polohu objektu \boxed{X} vůči středu vepisované kružnice S . Poloha objektu \boxed{X} je vztažena k referenčnímu bodu A_x . U kruhového a obdélníkového průřezu je to středový bod.

V dalším textu je popsána tvarová funkce pro cívky kruhového a obdélníkového tvaru. Pokud by se ukázalo potřebné sestavit tvarovou funkci i pro jiné druhy cívky, je to relativně jednoduše možné, jedná se o čistě geometrickou úlohu. V praxi jsou ovšem téměř výlučně používány cívky kruhové a obdélníkové.

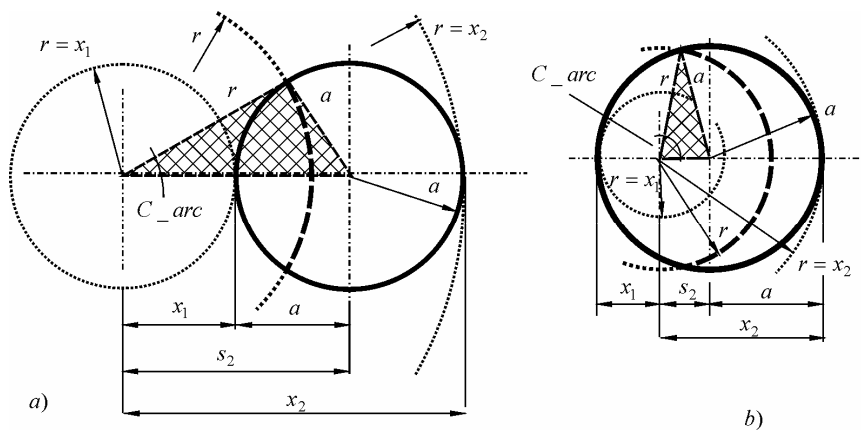
P-1.3.2. Tvarová funkce pro cívky kruhového tvaru

S ohledem na obecný popis tvarové funkce v části P-1.3.1 udává tvarová funkce C_{arc} velikost úhlu, pod kterým kružnice o poloměru r se středem ve vzdálenosti s vytíná oblouk na příčném kruhovém průmětu cívky s poloměrem a (Obr.52).



Obr.52. Délka oblouku na kruhu

Funkce C_{arc} je popsána pomocí algoritmu Alg.27 a všechny použité veličiny jsou vyznačeny na obrázku Obr.53a,b. Funkce má pro body ležící uvnitř obrysového kruhu cívky i vně stejnou relativně jednoduchou podobu.



Obr.53. a) Kružnice se středem vně kruhu b) Kružnice se středem uvnitř kruhu

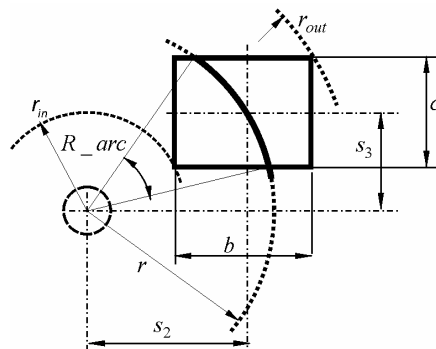
Alg.27 Tvarová funkce pro cívky a smyčky kruhového tvaru C_{arc}		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.52
$C_{arc}(r, s_2, a) := \begin{cases} x_1 \leftarrow s_2 - a \\ x_2 \leftarrow s_2 + a \\ \text{oblouk} \leftarrow \begin{cases} 2\pi & \text{if } [(r > 0) \wedge (r \leq x_1)] \wedge [(a - s_2) > 0] \\ 2 \arccos\left(\frac{r^2 + s_2^2 - a^2}{2r \cdot s_2}\right) & \text{if } [(r > x_1) \wedge (r < x_2)] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ C_{arc} \leftarrow \text{oblouk} \end{cases}$		

Platnost algoritmu byla pro široké rozmezí vstupních parametrů ověřena pomocí vztahu, který musí být vždy pravdivý:

$$\int_0^{\infty} C_{\text{arc}}(r, s_2, a) r dr = \pi a^2$$

P-1.3.3. Tvarová funkce pro cívky obdélníkového tvaru

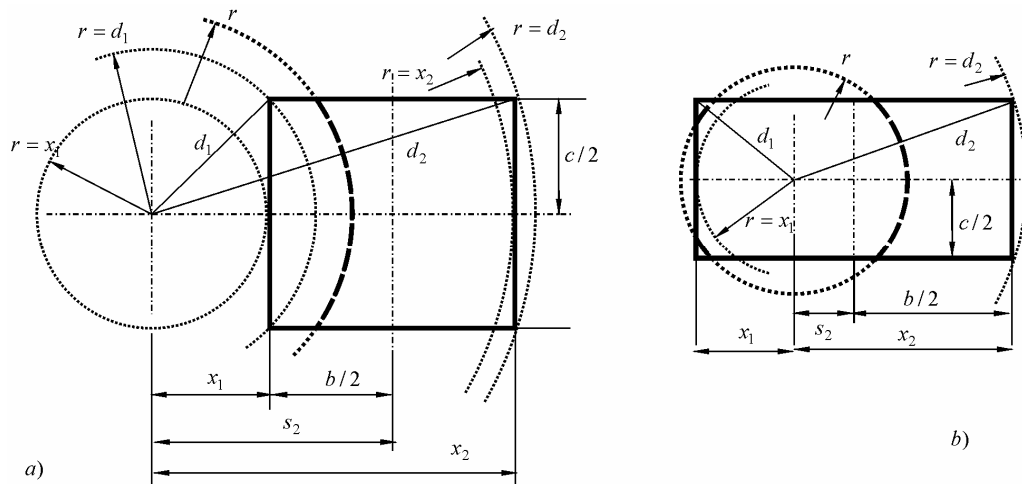
S ohledem na obecný popis tvarové funkce v části P-1.3.1 udává funkce R_{arc} velikost úhlu, pod kterým kružnice o poloměru r se středem ve vzdálenosti s_2, s_3 vytíná oblouk na příčném obdélníkovém průřezu cívky (Obr.54).



Obr.54. Funkce R_{arc}

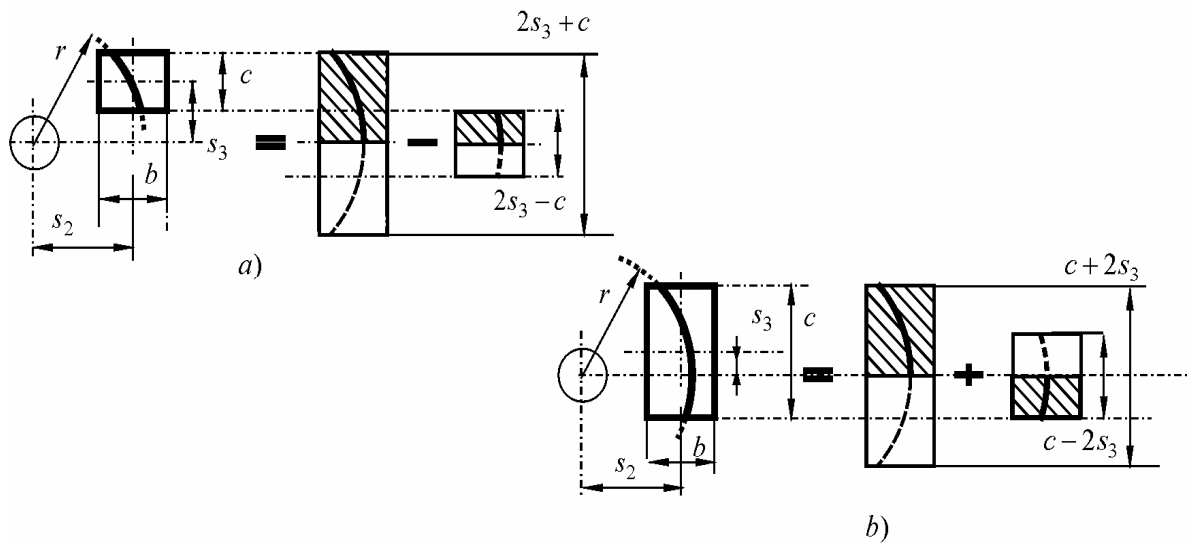
Funkce R_{arc} je popsána pomocí algoritmu Alg.28, všechny použité veličiny jsou pro středy ležící uvnitř i vně obdélníku na obrázcích Obr.55a,b a Obr.56. Ve srovnání s kruhovou cívkou je tato tvarová funkce podstatně komplikovanější. Obdélníkový průřez může být protnut kružnicí v několika separátních částech s různým charakterem.

Algoritmus sestává ze dvou částí. V první části (funkce $\text{arc}(r, s_2, b, c)$ viz Alg.28), Obr.55) je počítána délka oblouku pro středy kružnice ležící na ose obdélníku (viz Obr.55a,b)..



Obr.55. Obdélníkové cívky se středem kružnice na ose a) střed kružnice uvnitř obrysu b) střed kružnice vně obrysu

Následně (Obr.56) je pomocí kombinací předchozího speciálního případu vypočten příslušný úhel pro obecně umístěný obdélník.



Obr.56. Obecná tvarová funkce pro obdélníkovou cívku

Alg.28 Tvarová funkce pro cívky a smyčky obdélníkového tvaru R_{arc}		
Obrázek s vyznačenými vstupními veličinami		Obr.55,Obr.56
$R_{arc}(r, s_2, s_3, b, c) :=$	$\text{arc}(r, s_2, b, c) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } r = 0 \\ 0 & \text{if } [(x_1 > 0) \wedge (r < x_1)] \\ 2\pi & \text{if } [(x_1 < 0) \wedge (r < x_1)] \\ 2 \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right) & \text{if } [(r \geq x_1) \wedge (r < d_1)] \\ 2 \cdot \arcsin\left(\frac{c}{2 \cdot r}\right) & \text{if } [(r \geq d_1) \wedge (r < d_2)] \\ 0 & \text{if } r \geq d_2 \end{cases}$ $\text{arc} \leftarrow \begin{cases} \text{arc} - 2 \arccos\left(\frac{x_2}{r}\right) & \text{if } [(r \geq x_2) \wedge (r < d_2)] \\ \text{arc} - 4 \arccos\left(\frac{c}{2r}\right) & \text{if } \left[\left(r > \frac{c}{2}\right) \wedge (r < d_1) \wedge (x_1 < 0)\right] \end{cases}$ $R_{arc} \leftarrow \begin{cases} \text{arc}(r, s_2, b, c) & \text{if } s_3 = 0 \\ \frac{\text{arc}(r, s_2, b, 2 \cdot s_3 + c) + \text{arc}(r, s_2, b, 2 \cdot s_3 - c)}{2} & \text{if } s_3 < \frac{c}{2} \\ \frac{\text{arc}(r, s_2, b, 2 \cdot s_3 + c) - \text{arc}(r, s_2, b, 2 \cdot s_3 - c)}{2} & \text{if } s_3 \geq \frac{c}{2} \end{cases}$	$x_1 \leftarrow s_2 - \frac{b}{2}, x_2 \leftarrow s_2 + \frac{b}{2}, d_1 \leftarrow \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}, d_2 \leftarrow \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

Platnost algoritmu byla ověřena pro širokou škálu číselných vstupních parametrů pomocí vztahu, který musí být opět vždy pravdivý:

$$\int_0^{\infty} R_{arc}(r, s_2, s_3, b, c) r dr = b \cdot c \quad (118)$$

P-1.4. Matematický aparát použitý v prezentované metodě výpočtu magnetických polí a indukčností

P-1.4.1. Použité softwarové prostředky pro numerické vyčíslení algoritmů

Všechny prezentované matematické vztahy a sestavené algoritmy byly vyčísleny a porovnávány pomocí akademické licence programu MathCad 15.0. Pro vyčíslení vztahů bylo ponecháno standardní defaultní nastavené výpočtové přesnosti programu. Pro numerickou integraci (s výjimkou vyčíslení eliptických integrálů viz P-1.4.3) byla použita vestavěná adaptivní integrační metoda s defaultní hodnotou proměnné INT=0.001, která zde určuje poměrnou odchylku dvou po sobě následujících odhadů hodnoty integrálu. Pro výpočet byl použit osobní počítač s procesorem Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU E200 @ 2.53 GHz s operační pamětí 3.5GB RAM.

P-1.4.2. Stanovení doby trvání výpočtu algoritmů

Doba trvání výpočtů podle jednotlivých algoritmů byla „měřena“ pomocí jednoduchého programu (viz Alg.29). Funkce programu je založena na volání funkce time(), která vrací aktuální systémový čas počítače. Posuzovaný algoritmus je n_krát vyčíslen a následně je stanovena průměrná doba výpočtu. Počet opakování n byl volen individuálně s ohledem na složitost posuzovaného algoritmu. Při příliš krátké celkové měřené době by nebylo možné přesně stanovit změnu systémového času, při dlouhé by měření trvalo neúměrně dlouho. Do celkové měřené doby se promítají i ostatní běžící aplikace operačního systému v počítači. Nejedná se tedy o přesnou „absolutní“ hodnota měřeného času. Při několika totožných po sobě následujících spuštění výpočtu není tato hodnota ani zcela stejná. Pro orientační vzájemné porovnávání jednotlivých algoritmů však poslouží velice dobře.

Alg.29 Stanovení výpočtového času algoritmů

```

DOBA(n, posuzovana_funkce) :=
    t1 ← time(1)
    for i ∈ 1..n
        posuzovana_funkce
    t2 ← time(1)
    return  $\frac{(t2 - t1)}{n} \cdot 10^6$ 

```

P-1.4.3. Eliptické integrály a použitá numerická metoda pro jejich vyčíslení

Výpočet magnetického pole, vlastních i vzájemných indukčností koaxiálních kruhových cívek a smyček pomocí vektorového magnetického potenciálu vede na matematické vztahy obsahující určité integrály, jejichž velikost není možné určit analyticky. Tyto integrály se často upravují a zapisují v tzv. uzavřeném tvaru pomocí definovaných úplných eliptických integrálů prvního, druhého a třetího druhu. Eliptické integrály jsou jako standardní funkce součástí mnohých matematických programů. Pro jejich rychlé a přesné vyčíslení jsou vypracovány speciální numerické metody. Přímé řešení těchto integrálů pomocí standardních metod numerické integrace není s ohledem na dosaženou přesnost i dobu trvání výpočtu obecně příliš vhodné.

V této práci je s výhodou používán méně známý obecný úplný eliptický integrál, pomocí kterého je možné vyjádřit všechny ostatní druhy definovaných eliptických integrálů a jejich lineární kombinace. Pro vyčíslení tohoto integrálu byla použita velmi rychlá numerická metoda [10] s doslovně převzatým algoritmem **Alg.30**, který byl pouze přepsán do programu MathCad.

P-1.4.3.a. Definiční vztahy eliptických integrálů

Úplný eliptický integrál prvního druhu je definován vztahem (119). Zde je vyjádřen ve tvaru pro modul k , komplementární modul k_c i v takzvaném normalizovaném tvaru:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + k_c^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} \quad (119)$$

kde k je tzv. modul eliptických integrálů a k_c je komplementární modul. Mezi těmito moduly platí vztah:

$$k^2 + k_c^2 = 1 \quad (120)$$

Úplný eliptický integrál druhého druhu je definován vztahem (121):

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \varphi + k_c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt \quad (121)$$

Úplný eliptický integrál třetího druhu je definován vztahem (122):

$$\begin{aligned} \Pi(n, k) &= \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-n \sin^2 \varphi) \sqrt{\cos^2 \varphi + k_c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1-n t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} dt \end{aligned} \quad (122)$$

Úplný eliptický integrál prvního, druhého i třetího druhu lze zobecnit do jednoho společného obecného úplného eliptického integrálu [10] definovaného vztahem (123):

$$\text{cel}(k_c, p, a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + p \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + k_c^2 \sin^2 \varphi}} \quad (123)$$

Pomocí takto definovaného úplného eliptického integrálu je potom možné vyjádřit vztahy, které obsahují lineární kombinace ostatních eliptických integrálů (124):

$$\lambda K(k) + \mu E(k) = \text{cel}(k_c, 1, \lambda + \mu, \lambda + \mu k_c^2) \quad (124)$$

$$\lambda K(k) + \mu \Pi(n, k) = \text{cel}(k_c, 1 - n, \lambda + \mu, \lambda(1 - n) + \mu)$$

i jednotlivě eliptické integrály prvního, druhého a třetího druhu (125):

$$K(k) = \text{cel}(k_c, 1, 1, 1)$$

$$E(k) = \text{cel}(k_c, 1, 1, k_c^2) \quad (125)$$

$$\Pi(n, k) = \text{cel}(k_c, 1 - n, 1, 1)$$

P-1.4.3.b. Princip algoritmů pro výpočet eliptických integrálů

Pro numerický výpočet eliptických integrálů se s výhodou používají algoritmy založené na Landenově transformaci. Pokud se má být vyřešen integrál typu:

$$\int_0^{\pi/2} F(R(\varphi)) \frac{d\varphi}{R(\varphi)} \quad (126)$$

ve kterém představuje $F(R(\varphi))$ reálnou funkci, ve které je vnořena další reálná funkce $R(\varphi)$ s reálnými koeficienty m, n a tvarem:

$$R(\varphi) = \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} \quad (127)$$

Tento integrál je možné postupnými transformacemi převádět na ekvivalentní integrály:

$$\int_0^{\pi/2} F(R(\varphi)) \frac{d\varphi}{R(\varphi)} = \int_0^{\pi/2} F_1(R_1(\varphi)) \frac{d\varphi}{R_1(\varphi)} = \dots = \int_0^{\pi/2} F_i(R_i(\varphi)) \frac{d\varphi}{R_i(\varphi)} \quad (128)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

ve kterých jsou v každém kroku vypočteny nové hodnoty reálných konstant m_i, n_i a reálných funkcí $F_i(R_i(\varphi))$ a $R_i(\varphi)$ podle transformačních vzorců:

$$n_i = \frac{1}{2}[n_{i-1}m_{i-1}] \quad n_0 = |n| \neq 0 \quad (129)$$

$$m_i = \frac{1}{2}[m_{i-1} + n_{i-1}] \quad m_0 = |m| \neq 0 \quad (130)$$

$$R_i(\varphi) = \sqrt{m_i^2 \cos^2 \varphi + n_i^2 \sin^2 \varphi} \quad R_0(\varphi) = \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} \quad (131)$$

$$F_i(R_i(\varphi)) = \frac{1}{2} \left[F_{i-1} \left(R_i + \sqrt{R_i^2 - n_i^2} \right) + F_{i-1} \left(R_i - \sqrt{R_i^2 - n_i^2} \right) \right] \quad F_0 = F(R(\varphi)) \quad (132)$$

Princip řešení spočívá v tom, že hodnoty koeficientů m_i, n_i velice rychle konvergují k jedné společné hodnotě, která se nazývá aritmeticko-geometrický průměr:

$$m_k = n_k = g = \text{AGM}(m, n) \quad (133)$$

Stejnou hodnotu nabude potom i funkce $R_k(\varphi)$: (134)

$$R_k(\varphi) = \sqrt{g^2 \cos^2 \varphi + g^2 \sin^2 \varphi} = g \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = g = \text{AGM}(m, n) \quad (135)$$

Funkce $F_k(R_k(\varphi))$ nabude v tomto případě hodnoty $F(g)$ a celý výchozí integrál má velice jednoduché řešení:

$$\int_0^{\pi/2} F(R(\varphi)) \frac{d\varphi}{R(\varphi)} = \int_0^{\pi/2} F_k(R_k(\varphi)) \frac{d\varphi}{R_k(\varphi)} = \frac{F(g)}{g} \frac{\pi}{2} \quad (136)$$

Pro vyčíslení eliptických integrálů v této práci se velice osvědčil algoritmus **Alg.30**, který byl po přepsání do syntaxe Mathcad doslovně převzat z [10]. Je založen na tzv. Bartkyho transformaci, která zobecňuje Landenovu transformaci pro další skupinu řešených eliptických integrálů.

P-1.4.3.c. Porovnání doby výpočtu eliptických integrálů dvěma metodami

V tabulkách **Tab.15**, **Tab.16** jsou pro porovnání numericky vyčísleny vztahy obsahující kombinace úplných eliptických integrálů prvního druhého i třetího druhu. Pro vyčíslení je použita nejprve metoda založená na přímé numerické integraci definičních vztahů pro eliptické integrály (standardní numerická integrace, adaptivní metoda MathCad viz **P-1.4.1**). Alternativně je použita numerická metoda založená na Bartkyho transformaci popsaná algoritmem **Alg.30**. Z tabulek je patrné, že druhá metoda je při stejné dosažené přesnosti výpočtu v celém rozsahu vstupních hodnot podstatně efektivnější.

Tab.15 Rychlost vyčíslení kombinace eliptických integrálů $\lambda K(k) + \mu E(k)$ pro $\lambda = 1, \mu = 1$ dvěma odlišnými numerickými metodami				
	Hodnota výrazu pro stejný počet platných míst u obou metod	Rovnice (119),(121) Mathcad, adaptivní metoda integrace $\lambda K(k) + \mu E(k)$	$cel(k_c, 1, \lambda + \mu, \lambda + \mu k_c^2)$	t_1 / t_2
k		Trvání výpočtu t_1 [μs]	Trvání výpočtu t_2 [μs]	
0.001	3.1415926536	132.8	1.6	84.6
0.01	3.1415926551	129.2	2	63.7
0.1	3.1416075035	130	2.8	55.1
0.3	3.1428820849	130.8	3.1	41.9
0.5	3.1532125642	131.6	3.1	42.2
0.7	3.2013551339	131.1	3.8	35
0.9	3.4522461912	131.7	4.1	32.4
0.99	4.3850763324	130.2	4.2	30.8
0.999	5.4995908058	177.2	4.7	37.8

Tab.16 Rychlost vyčíslení kombinace eliptických integrálů $\lambda K(k) + \mu \Pi(n, k)$ pro $\lambda = 1, \mu = 1$ dvěma odlišnými numerickými metodami					
		Hodnota výrazu pro stejný počet platných míst u obou metod	Rovnice (119),(122) Mathcad, adaptivní metoda integrace $\lambda K(k) + \mu \Pi(n, k)$	Alg.30 $cel(k_c, 1 - n, \lambda + \mu, \lambda(1 - n) + \mu)$	t_1 / t_2
n	k		Trvání výpočtu t_1 [μs]	Trvání výpočtu t_2 [μs]	
0.5	0.001	3.7922388392	48	1.6	30.7
	0.01	3.7923421364	46.7	2.3	20
	0.1	3.8027324528	44.4	2.8	15.7
	0.3	3.8913992081	47.3	3.1	15.2
	0.5	4.099421859	47.2	3.1	15.1
	0.7	4.5324959952	47.7	3.9	12.2
	0.9	5.7396560386	47.3	3.8	12.6
	0.99	8.8564400374	45.9	4.8	9.5
	0.999	12.2458519107	144.5	5	28.9

Alg.30 Algoritmus pro výpočet obecného úplného eliptického integrálu

```

Cel(kcc, p, a, b) :=
    ca ← 10-6, kc ← |kcc|
    e ← |kc|, m ← 1
    if p > 0
        | p ← √p
        | b ←  $\frac{b}{p}$ 
    otherwise
        | f ← kc · kc
        | q ← 1 - f
        | g ← 1 - p
        | f ← f - p
        | q ← (b - a · p) · q
        | p ←  $\sqrt{\frac{f}{g}}$ 
        | a ←  $\frac{(a - b)}{g}$ 
        | b ←  $\frac{-q}{(g \cdot g \cdot p)} + a \cdot p$ 
    konec ← 9999
    while konec = 9999
        | f ← a
        | a ←  $\frac{b}{p} + a$ 
        | g ←  $\frac{e}{p}$ 
        | b ← f · g + b
        | b ← b + b
        | p ← g + p
        | g ← m
        | m ← kc + m
        | xx ← |g - kc|
        | yy ← g · ca
        | if |g - kc| > g · ca
            | kc ← √e
            | kc ← kc + kc
            | e ← kc · m
        | konec ← 0 otherwise
    return  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(a \cdot m + b)}{m \cdot (m + p)}$ 

```

P-1.5. Modely cívek a metody měření použité při experimentálním ověřování sestavených výpočtových algoritmů

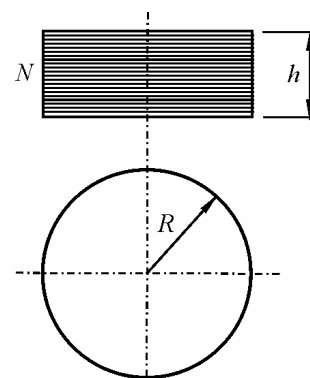
P-1.5.1. Modely vzduchových tenkostěnných cívek

Pro experimentální ověření platnosti algoritmů výpočtové metody byly sestrojeny čtyři modely tenkostěnných vzduchových cívek. Dvě cívky mají kruhový tvar, v tabulce Tab.17 jsou označeny Circ_1, Circ_2. Druhé dvě cívky mají obdélníkový tvar a v tabulkách Tab.18, Tab.19 jsou označeny Rect_1 a Rect_2.

P-1.5.1.a. Modely kruhových cívek

Kruhové cívky byly navinuty lakovanými měděnými vodiči na plastové válce (viz obrázek Obr.58, Obr.59). Cívka Circ_1 vodičem o průměru 0.4/0.52mm a cívka Circ_2 vodičem o průměru 0.25/0.3 mm.

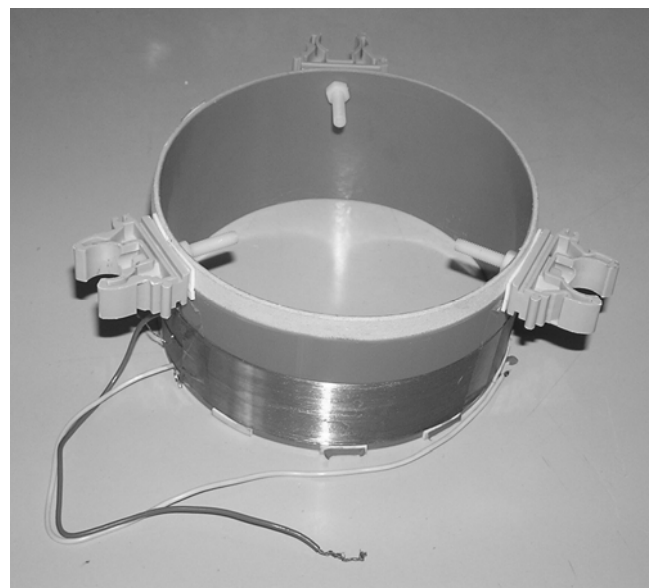
Tab.17 Modely kruhových cívek			
Označení veličin podle Obr.57			
označení cívky	poloměr vinutí	počet závitů	výška vinutí
	R	N	h
Circ_1	63.5	100	52
Circ_2	80.5	120	40



Obr.57. Modely kruhových cívek



Obr.58. Model tenké kruhové cívky Circ_1

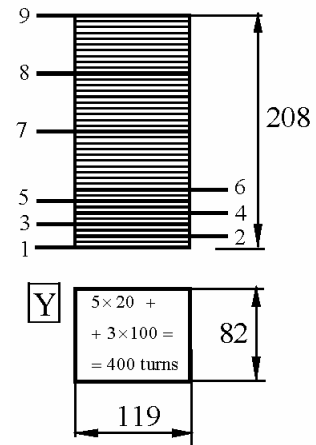


Obr.59. Model tenké kruhové cívky Circ_2

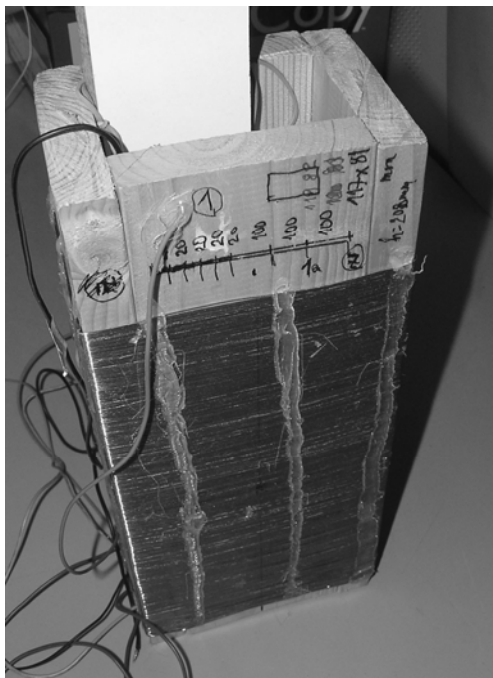
P-1.5.1.b. Modely obdélníkových cívek

Obdélníkové cívky byly navinuty lakovaným měděným vodičem o průměru 0.4/0.52 mm na dřevěné rámy (viz obrázek Obr.61,Obr.62). Cívky jsou opatřeny odbočkami (viz Obr.60,Obr.63) a jejich parametry jsou uvedeny v tabulkách Tab.18,Tab.19.

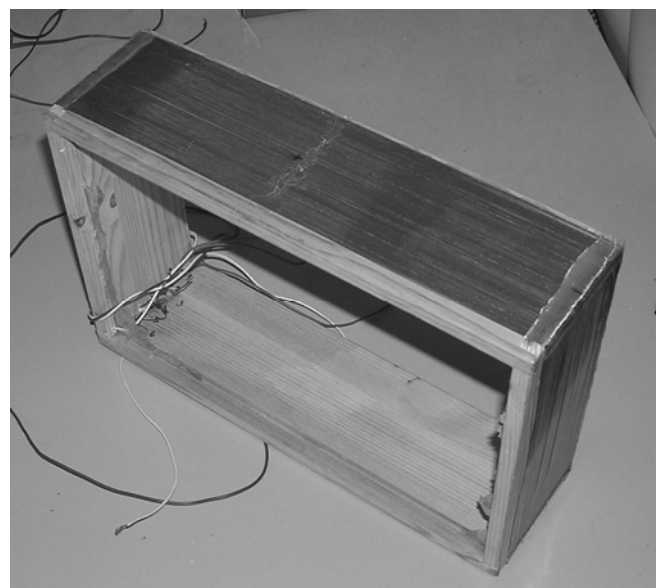
Tab.18 Obdélníková cívka s odbočkami Rect_1		
119x82/205 mm, 400 závitů, viz Obr.60		
odbočka	počet závitů	výška vinutí
1-2	20	10
1-3	40	21
1-4	60	31
1-5	80	42
1-6	100	52
1-7	200	104
1-8	300	156
1-9	400	208



Obr.60. Rect_1-Obdélníková cívka s odbočkami

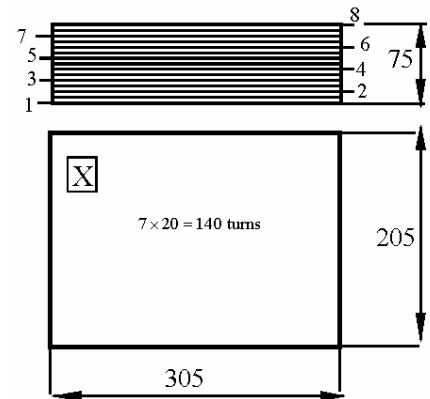


Obr.61. Model tenké obdélníkové cívky Rect_1



Obr.62. Model tenké obdélníkové cívky Rect_2

Tab.19 Rect_2 - Obdélníková cívka s odbočkami		
305x205/75 mm, 140 turns, viz Obr.63		
odbočka	počet závitů	výška vinutí
1-2	20	11
1-3	40	21
1-4	60	32
1-5	80	43
1-6	100	54
1-7	120	64
1-8	140	75



Obr.63. Rect_2-Obdélníková cívka s odbočkami

P-1.5.2. Měření indukčnosti

Pro přesné měření vlastních a vzájemných indukčností modelů vzduchových cívek (viz P-1.5.1) byl použit programovatelný LCR můstek Hameg HM8118 (Obr.64). Indukčnosti byly měřeny na kmitočtu 2 kHz. Přístroj je vybaven měřicími Kelvinovými svorkami pro čtyřvodičové měření impedancí (Obr.65). Na počátku měření je přístroj na daném kmitočtu kalibrován při spojení svorek naprázdno a nakrátko.



Obr.64. LCR můstek Hameg HM8118



Obr.65. Kelvinovy svorky

Pro alternativní měření vzájemných indukčností cívek různých tvarů bylo použito automatizované měřicí pracoviště (viz Obr.66), na kterém byla jedna z cívek upevněna na rameno posuvného souřadnicového systému, který je řízen počítačovým programem. Souřadnicový systém umožňuje automaticky a s velkou přesností měnit vzájemnou polohu cívek v předem zvoleném počtu kroků.

Pro měření byla použita přímá metoda, ve které byla pevná cívka napájena sinusovým napětím z generátoru pro nastavený kmitočet 2 kHz, proud tekoucí cívkou byl v každém kroku automaticky měřen přesným digitálním multimetrem Advantest R6552. Napětí indukované na pohyblivé cívce bylo měřeno rovněž digitálním multimetrem Advantest R6552. Měřené hodnoty byly automaticky ukládány v počítači, kde byly vyhodnoceny a porovnány s počítanými hodnotami. Celé toto měření a porovnání výsledků bylo možné provést bez velkých nároků na čas pro značný počet vzájemných poloh cívek.

Pro zvolený kmitočet (2 kHz) byla hodnota činných odporů cívek mnohokrát menší, než jejich induktivní reaktance, hodnoty vzájemných indukčností proto bylo možné jednoduše vypočítat přímo z podílu měřeného napětí a proudu. Při porovnání se takto naměřené hodnoty lišily od hodnot získaných přesným můstkovým měřením jen nepatrně.



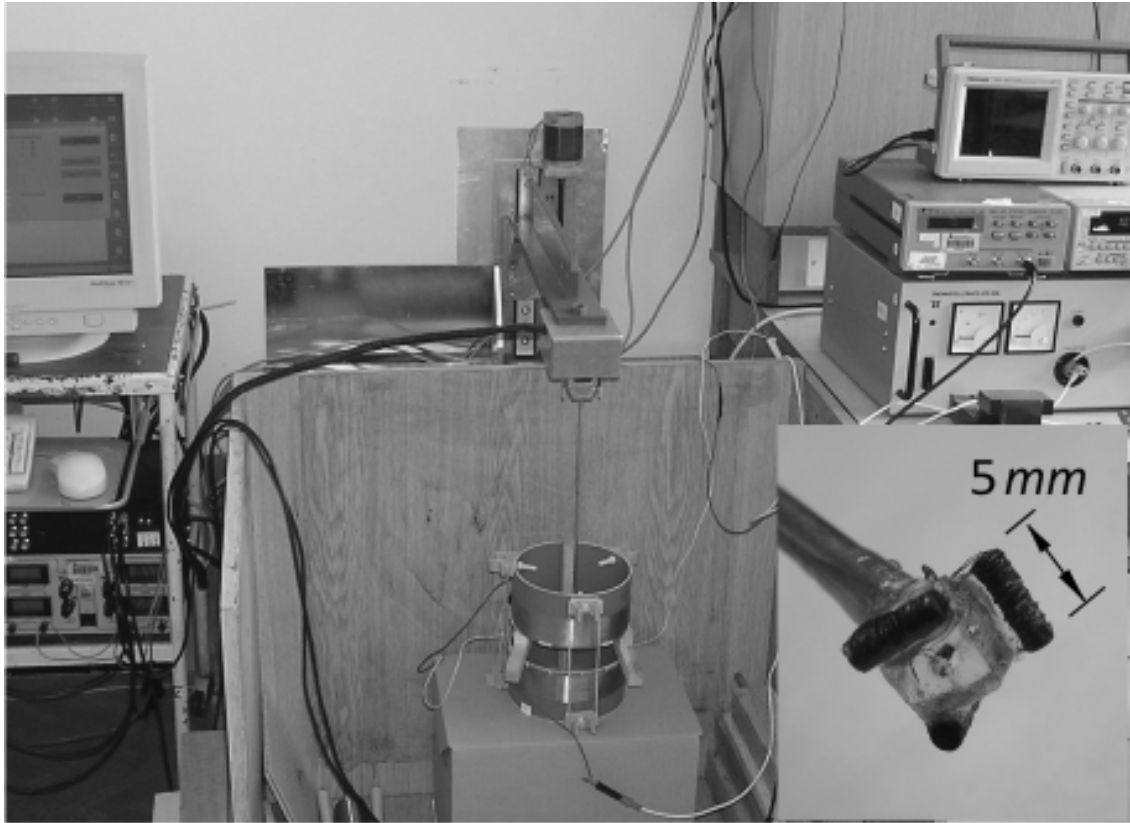
Obr.66. Automatizované měřicí pracoviště

P-1.5.3. Měření intenzity magnetického pole vzduchových cívek

Měření intenzity magnetického pole bylo opět provedeno pomocí automatizovaného měřicího pracoviště, které umožnilo provést a vyhodnotit měření ve velkém počtu bodů. K měření byla použita speciální sonda, která zaručuje téměř bodové měření současně ve všech třech ortogonálních směrech. Sonda sestává ze tří navzájem kolmých miniaturních válcových cívek, které jsou navinuty na feritových jádrech a vlepeny na skleněnou krychli (Obr.67 dole). Sonda byla ve všech směrech kalibrována ve známém poli Helmholtzových cívek (Obr.67) a bylo ověřeno, že se jednotlivé cívky sondy navzájem magneticky neovlivňují.

Při vlastním měření bylo magnetické pole v obdélníkové cívce buzeno na kmitočtu 2 kHz pomocí generátoru s připojeným výkonovým zesilovačem. Kmitočet byl volen tak, aby bylo měření co nejméně ovlivněné okolním rušením a aby hodnoty magnetického pole měřené sondou nabývaly dobře měřitelných hodnot.

Proud byl měřen proudovou sondou Rohde & Schwarz EZ-17. Napětí na cívkách sondy bylo po zesílení přesnými diferenčními zesilovači a po filtraci rušivých složek o rozdílných kmitočtech měřeno pomocí přesných digitálních multimetrů Advantest R6552 a automaticky zaznamenáno v počítači.



Obr.67. Měření intenzity magnetického pole

4. Závěr

Předložená habilitační práce souhrnně popisuje výpočtovou metodu pro stanovení intenzity magnetického pole a vzájemných indukčností tenkých proudových vzduchových smyček a tenkostěnných cívek obecného tvaru, při obecné nekoaxiální vzájemné poloze. Celý problém je řešen pro kvazistacionární rovnoměrné rozdělení proudu ve vodičích. Jednotlivé části této metody byly postupně publikovány formou článků v odborných časopisech [1],[2],[3],[6],[7].

V literatuře lze poměrně často najít matematický popis, který je platný pro cívky kruhového tvaru v koaxiální vzájemné poloze. Vztahy pro nekoaxiální cívky a pro cívky s jiným tvarem než kruhovým, které by byly jako v této práci zapsány v relativně jednoduché a prakticky snadno použitelné formě, se vyskytují výjimečně.

V publikovaných člancích a rovněž v této práci je kladen důraz především na to, aby mělo výsledné řešení jednotlivých částí výpočtové metody podobu algoritmů, u kterých bude bez velkého hledání všech souvislostí vždy zřejmé, jaké vstupní parametry je potřebné dosadit a jaký výsledek lze očekávat. Cílem tedy je, aby byly výsledky této spíše obecné práce použitelné pro řešení konkrétních technických problémů uživatele, který potřebuje výpočty indukčností a magnetických polí vzduchových cívek začlenit jako dílčí části své práce, nemůže se však celkovým studiem tohoto základního problému podrobně znovu zabývat.

Pro zápis a řešení všech algoritmů byl použit matematický program MathCad, ve kterém mají algoritmy velmi názorný tvar. Jejich vzhled se podobá vývojovým diagramům, které však obsahují matematické vztahy zapsané dle běžně užívaných matematických konvencí. V této podobě byly algoritmy přeneseny i do textu této práce s cílem minimalizovat počet chyb, které by vznikly přepisováním do jiného tvaru. Stejně algoritmy byly použity pro výpočet kontrolních číselných hodnot v textu či hodnot, které byly následně porovnány s hodnotami měřenými na modelech cívek. Přepsání takovýchto algoritmů do konkrétní podoby libovolného programovacího jazyka by nemělo představovat velký problém. Algoritmy jsou prezentovány včetně popisu numerických metod pro jejich vyčíslení. Kontrolní numerické výsledky mohou být následně použity k ověření funkčnosti nově sestavených programů.

Matematické vztahy, které jsou v práci uvedeny, jsou exaktně odvozeny pro tenké proudové smyčky a tenkostěnné cívky, jsou však velice dobře použitelné i v případě, kdy tento předpoklad přesně splněn není. Integraci v radiálním směru by bylo možné následně rozšířit vztahy i pro cívky s širokou stěnou. Ani to však většinou není nutné, protože prakticky používané vzduchové cívky, například v silnoproudé elektrotechnice, mají velice často tloušťku stěny relativně malou ve vztahu k ostatním rozměrům. Často jsou také složeny z několika tenkých cívek v podobě vrstev, které jsou spojeny do série či paralelně. Potom je možné jejich účinky postupně sčítat.

Práce je s ohledem na uvedené publikace tématicky rozdělena na tři na sebe úzce navazující části.

V první části (**viz 2.1**) je v souladu s [1] popsán způsob, jak lze relativně jednoduše vypočítat vzájemnou indukčnost dvou nekoaxiálních tenkostěnných cívek a proudových smyček v případě, kdy je jedna cívka (smyčka) kruhová a druhá má libovolný tvar. Metoda vychází z poměrně známých vztahů pro vzájemné

indukčnosti koaxiálních kruhových cívek, které jsou zde zobecněny a upraveny, aby byly použitelné i pro tento druh výpočtu. Tvar cívek je popsán pomocí definované tvarové funkce, která má jednoduchou geometrickou interpretaci (viz **P-1.3**). Aplikace metody výpočtu je ukázána na příkladu dvou nekoaxiálních kruhových válcových cívek a rovněž kruhové a obdélníkové cívky. Pro oba uvedené případy jsou sestaveny výpočtové algoritmy a provedeno porovnání počítaných a měřených hodnot.

Ve druhé části (viz **2.3**) je v souladu s [2] metoda dále zobecněna pro případ výpočtu vzájemné indukčnosti tenkostěnných cívek zcela obecného tvaru. Výsledné řešení spočívá ve vyčíslení integrální rovnice (15), ve které je počítán integrál po ploše příčného průřezu jedné z cívek, který zohledňuje tvar této cívky. Integrand obsahuje jednoduché univerzální funkce, které zohledňují vzájemnou axiální polohu cívek a tvarovou funkci. Uvedené univerzální funkce jsou pro všechny tvary cívek stejné, tvarová funkce reprezentuje tvar druhé cívky a má stejnou podobu jako v předchozí části. Možnosti metody jsou prezentovány na obecném příkladu výpočtu vzájemné indukčnosti mezi kruhovou cívkou a postupně kruhovou, obdélníkovou, eliptickou a trojúhelníkovou cívkou. Následně je popsán prakticky použitelný algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých obdélníkových cívek. Tento algoritmus lze přímo aplikovat i pro limitní případ stejnohlých cívek, kdy je výsledkem vlastní indukčnost jedné tenké obdélníkové cívky. Počítané hodnoty jsou opět porovnávány s hodnotami naměřenými na sestavených modelech cívek. Shoda počítaných a měřených hodnot je i zde velmi dobrá.

Ve třetí části (viz část **3.**) je v souladu s [3] popsáno další zobecnění metody výpočtu, které umožňuje stanovit intenzitu magnetického pole tenké proudové smyčky a tenkostěnné cívky libovolného tvaru ve vzduchu. Magnetické pole je počítáno superpozicí magnetických polí elementárních náhradních magnetických dipólů. Celý výpočet vede na integraci velice jednoduchých funkcí, které mají bez ohledu na tvar cívky formálně stále stejnou podobu. Tvar cívky je i zde reprezentován tvarovou funkcí, která je použita v první a druhé části práce. Pro ilustraci a numerické porovnání je následně počítáno magnetické pole kruhových cívek a proudových smyček, které je možné vypočítat i efektivnějším způsobem (viz část **P-1.1.**). Popsaná metoda výpočtu magnetického pole však ve stejné podobě platí pro daleko obecnější případy cívek a smyček libovolného tvaru. To je demonstrováno na výpočtu magnetického pole obdélníkových cívek, pro který je rovněž sestaven výpočtový algoritmus. Počítané hodnoty jsou ověřeny pomocí hodnot magnetického pole měřených na modelech.

Reference

- [1] Pankrác, V.: Generalization of Relations for Calculating the Mutual Inductance of Coaxial Coils in Terms of Their Applicability to Non-Coaxial Coils. IEEE Transactions on Magnetics. 2011, vol. 47, no. 11, p. 4552-4563. ISSN 0018-9464.
- [2] Pankrác, V.: The Algorithm for Calculation of the Self and Mutual Inductance of Thin-Walled Air Coils of General Shape With Parallel Axes. IEEE Transactions on Magnetics. 2012, vol. 48, no. 5, p. 1875-1889. ISSN 0018-9464.
- [3] Pankrác, V. - Kraček, J.: Simple Algorithms for the Calculation of the Intensity of the Magnetic Field of Current Loops and Thin-Wall Air Coils of a General Shape Using Magnetic Dipoles. IEEE Transactions on Magnetics. 2012, vol. 48, no. 12, p. 4767-4778. ISSN 0018-9464.
- [4] Pankrác, V.: Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice část 1; Základní druhy konstrukčního uspořádání tlumivek. Elektrověst [online]. 2009, č. 2, s. 2-1-2-8. ISSN 1213-1539.
- [5] Pankrác, V.: Často používané aplikace tlumivek v silnoproudé elektrotechnice; Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice část 2. Elektrověst [online]. 2010, roč. 2010, č. 9, s. 9-1-9-20. Internet: <http://www.elektrověst.cz>. ISSN 1213-1539.
- [6] Pankrác, V.: Výpočet vlastních a vzájemných indukčností koaxiálních válcových vzduchových cívek; Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice část 3;. Elektrověst [online]. 2010, roč. 2010, č. 10, s. 10-1-10-15. ISSN 1213-1539.
- [7] Pankrác, V.: Experimentální ověření metody pro výpočet indukčností koaxiálních válcových vzduchových cívek různých tvarů. Elektrověst [online]. 2010, roč. 2010, č. 63, s. 63-1-63-11. ISSN 1213-1539.
- [8] L. Hannakam, „Berechnung der Gegeninduktivität achsenparalleler Zylinderspulen,“ *Journal Electrical Engineering (Archiv fur Elektrotechnik)*, Vol. 51, pp. 141-154, May 1967
- [9] H. Haas, „Ein Beitrag zur Berechnung der Gegeninduktivität koaxialer Zylinderspulen“, *Journal Electrical Engineering (Archiv fur Elektrotechnik)*, Vol. 57, pp.21-26, Jan. 1975.
- [10] R. Bulirsch, „Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions. III,“ *Numerische Mathematik*, Vol.13, pp.305-315, Aug. 1969.
- [11] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [12] S.Gradshiteyn and I.M.Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 5th ed., NewYork : Academic Press, 1994
- [13] P.J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*, 2th ed., NewYork : Academic Press, 1984
- [14] A.Jeffrey and Hui Hui Dai, *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, 4th ed., San Diego: Academic Press, 2008
- [15] M. W. Garrett, "Calculations of fields, forces and mutual inductances of current systems by elliptic integrals," *J. Appl. Phys.*, Vol. 34, p.2567, 1963
- [16] J.T.Conway, „Noncoaxial Inductance Calculations Without the Vector Potential for Axisymmetric Coils and Planar Coils,“ *IEEE Trans.Magn.*, Vol. 44, pp. 453-462, Apr. 2008.
- [17] J.T.Conway, „Inductance Calculations for Circular Coils of Rectangular Cross Section and Parallel Axes Using Bessel and Struve Functions,“ *IEEE Trans.Magn.*, Vol.46, pp. 75-81, Jan. 2010.
- [18] J.T.Conway, „Inductance Calculations for Noncoaxial Coils Using Bessel Functions,“ *IEEE Trans.Magn.*, Vol. 43, pp.1023-1034, Mar. 2007.
- [19] S.I.Babic and C.Akyel, „New analytic-numerical solutions for the mutual inductance of two coaxial circular coils with rectangular cross section in air“, *IEEE Trans.Magn.*, Vol. 42, pp. 1661-1669, Jun. 2006.
- [20] S.I.Babic, S.Salon and C.Akyel, „The mutual inductance of two thin coaxial disk coils in air,“ *IEEE Trans.Magn.*, Vol.40, pp.822-825, Mar. 2004.
- [21] Ki-Bong Kim, E.Levi,Z.Zabar and L.Birenbaum, „Mutual inductance of noncoaxial circular coils with constant current density,“ *IEEE Trans.Magn.*, Vol.33, pp.4303-4309, Sept. 1997.
- [22] C. Akyel, S. I. Babic, and M.-M. Mahmoudi, “Mutual Inductance Calculation for Non-Coaxial Circular Air Coils with Parallel Axes,” *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 91, pp.287-301, 2009.

Obsah

1.	ÚVOD	1
1.1.	Řešená problematika	1
1.2.	Cíl práce	2
1.3.	Základní princip výpočtové metody	2
1.4.	Struktura a členění práce	3
2.	VÝPOČET VLASTNÍCH A VZÁJEMNÝCH INDUKČNOSTÍ NEKOAXIÁLNÍCH SMYČEK A CÍVEK OBECNÉHO TVARU	4
2.1.	První smyčka(cívka) má kruhový tvar, druhá je libovolná	4
2.2.	Základní popis metody	4
2.2.1.	Příklad konkrétní podoby výpočtu pro tenké cívky konečné délky	9
2.2.1.a)	Dvě nekoaxiální tenké kruhové vzduchové cívky	9
2.2.1.b)	Zjednodušený algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou tenkých nekoaxiálních kruhových vzduchových cívek	10
2.2.1.c)	Počítané kontrolní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.1, Alg.1.b	12
2.2.1.d)	Porovnání počítaných a měřených hodnot pro modely dvou nekoaxiálních tenkých kruhových vzduchových cívek	13
2.2.1.e)	Vzájemná indukčnost tenké kruhové a obdélníkové cívky	13
2.2.1.f)	Zjednodušený algoritmus pro výpočet vzájemné indukčnosti tenké kruhové a tenké obdélníkové cívky	15
2.2.1.g)	Počítané kontrolní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.2, Alg.2.b.	16
2.2.1.h)	Porovnání počítaných a měřených hodnot pro tenkou obdélníkovou a kruhovou vzduchovou cívku	17
2.3.	Smyčky(cívky) mají obecný tvar	18
2.3.1.	Základní popis metody pro výpočet vzájemné indukčnosti	18
2.3.2.	Konkrétní tvar funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$	19
2.3.3.	Fyzikální interpretace funkce $m_X(\lambda_{X1} \dots \lambda_{Xn}, h_X, h_Y, s_1, u, v)$	21
2.3.4.	Algoritmus pro výpočet funkce $m'(r, h_x, h_y, s_1)$ a $m(r_{in}, h_x, h_y, s_1)$	22
2.3.5.	Funkce $m_{circ}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$ jako implementace funkce m_X pro tenké cívky kruhového tvaru	23
2.3.6.	Příklad konkrétní realizace výpočtu vzájemné indukčnosti pomocí funkce $m_{circ}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$	24
2.3.6.a)	Tenké kruhové cívky s paralelními osami	25
2.3.6.b)	Tenká kruhová a obdélníková cívka	26
2.3.6.c)	Kruhová a eliptická cívka	28
2.3.6.d)	Kruhová cívka a cívka trojúhelníkového tvaru	29

2.3.7.	Funkce $m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v)$ jako implementace funkce m_x pro tenké cívky obdélníkového tvaru	30
2.3.7.a)	Algoritmus pro výpočet vlastních a vzájemných indukčností dvou tenkých obdélníkových cívek s paralelními osami	31
2.3.7.b)	Porovnání počítaných a měřených hodnot	33
3.	VÝPOČET MAGNETICKÉHO POLE SMYČEK(CÍVEK) OBECNÉHO TVARU	37
3.1.	Magnetické pole ploché proudové smyčky obecného tvaru	38
3.2.	Magnetické pole tenké cívky obecného tvaru	43
3.3.	Funkce použité při výpočtu vzájemné indukčnosti tenkých cívek obecného tvaru	45
3.4.	Příklady výpočtu magnetických polí jednoduchých struktur	46
3.4.1.	Magnetické pole tenkého kruhového závitu	46
3.4.1.a)	Algoritmy pro výpočet axiální a radiální složky intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí elementárních magnetických dipólů	47
3.4.1.b)	Porovnání hodnot počítaných pomocí algoritmů Alg.10 a Alg.11 ve srovnání s výpočtem pomocí eliptických integrálů Alg.17, Alg.18	48
3.4.2.	Magnetické pole tenké kruhové cívky – solenoidu	50
3.4.2.a)	Algoritmy pro výpočet intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí superpozice magnetického pole elementárních magnetických dipólů	50
3.4.2.b)	Porovnání počítaných hodnot intenzity magnetického tenké kruhové cívky pomocí algoritmů Alg.20 a Alg.19 ve srovnání s výpočtem pomocí eliptických integrálů Alg.12, Alg.13	51
3.4.3.	Magnetické pole tenké obdélníkové cívky	53
3.4.3.a)	Algoritmy pro výpočet intenzity magnetického pole	53
3.4.3.b)	Porovnání počítaných a měřených hodnot intenzity magnetického pole tenké cívky obdélníkového tvaru	57
P-1.	ALGORITMY A MATEMATICKÉ VZTAHY POUŽITÉ PRO VÝPOČET A POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ	60
P-1.1.	Magnetické pole kruhových proudových smyček, tenkých cívek a elementárního magnetického dipólu	60
P-1.1.1.	Vektorový potenciál ploché tenké proudové smyčky obecného tvaru	60
P-1.1.2.	Vektorový magnetický potenciál kruhového závitu	61
P-1.1.3.	Magnetické pole tenkého kruhového závitu	63
P-1.2.	Vlastní a vzájemné indukčnosti koaxiálních kruhových proudových smyček a tenkých cívek, derivace vzájemné indukčnosti	70
P-1.2.1.	Vzájemná indukčnost dvou koaxiálních tenkých kruhových smyček a její derivace	70
P-1.2.3.	Vzájemná indukčnost koaxiální proudové smyčky a tenké kruhové cívky, derivace vzájemné indukčnosti	75
P-1.2.4.	Vzájemná indukčnost dvou koaxiálních tenkých kruhových válcových cívek a její derivace	76

P-1.3. Tvarové funkce	80
P-1.3.1. Obecný popis tvarové funkce	80
P-1.3.2. Tvarová funkce pro cívky kruhového tvaru	81
P-1.3.3. Tvarová funkce pro cívky obdélníkového tvaru	82
P-1.4. Matematický aparát použitý v prezentované metodě výpočtu magnetických polí a indukčností	84
P-1.4.1. Použité softwarové prostředky pro numerické vyčíslení algoritmů	84
P-1.4.2. Stanovení doby trvání výpočtu algoritmů	84
P-1.4.3. Eliptické integrály a použitá numerická metoda pro jejich vyčíslení	85
P-1.4.3.a. Definiční vztahy eliptických integrálů	85
P-1.4.3.b. Princip algoritmů pro výpočet eliptických integrálů	86
P-1.4.3.c. Porovnání doby výpočtu eliptických integrálů dvěma metodami	87
P-1.5. Modely cívek a metody měření použité při experimentálním ověřování sestavených výpočtových algoritmů	90
P-1.5.1. Modely vzduchových tenkostěnných cívek	90
P-1.5.1.a. Modely kruhových cívek	90
P-1.5.1.b. Modely obdélníkových cívek	91
P-1.5.2. Měření indukčnosti	92
P-1.5.3. Měření intenzity magnetického pole vzduchových cívek	93
4. ZÁVĚR	95

Seznam sestavených výpočtových algoritmů

Alg.1	Vzájemná indukčnost dvou tenkých nekoaxiálních kruhových vzduchových cívek	10
Alg.2	Vzájemná indukčnost tenké kruhové a obdélníkové cívky	14
Alg.3	funkce $m'(r, h_x, h_y, s_1)$	22
Alg.4	funkce $m(\rho, h_x, h_y, s_1)$	22
Alg.5	Funkce $m_{\text{circ}}(r_X, h_X, h_Y, s_1, \xi)$ pro tenké cívky kruhového tvaru	23
Alg.6	Vzájemná indukčnost tenkých kruhových cívek –alternativní algoritmus.....	25
Alg.7	Vzájemná indukčnost tenké kruhové o obdélníkové cívky –alternativní algoritmus.....	27
Alg.8	Funkce $m_{\text{rect}}(b_x, c_x, h_x, h_y, s_1, u, v)$ pro tenké cívky obdélníkového tvaru	31
Alg.9	Vzájemná indukčnost tenkých obdélníkových cívek	33
Alg.10	Axiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí magnetických dipólů	47
Alg.11	Radiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu pomocí magnetických dipólů	48
Alg.12	Axiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí magnetických dipólů	50
Alg.13	Radiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky pomocí magnetických dipólů	51
Alg.14	Axiální složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky	54
Alg.15	Příčná složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky ve směru x.....	56
Alg.16	Příčná složka intenzity magnetického pole tenké obdélníkové cívky ve směru y.....	57
Alg.17	Radiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu.....	64
Alg.18	Axiální složka intenzity magnetického pole tenkého kruhového závitu	65
Alg.19	Radiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky	66
Alg.20	Axiální složka intenzity magnetického pole tenké kruhové cívky	67
Alg.21	Vzájemná indukčnost dvou tenkých kruhových smyček – kruhových závitů.....	71
Alg.22	Derivace vzájemné indukčnosti dvou tenkých kruhových smyček – kruhových závitů	72
Alg.23	Vzájemná indukčnost tenké kruhové cívky a tenké proudové smyčky	73
Alg.24	Derivace vzájemné indukčnosti tenké kruhové cívky a tenké proudové smyčky	74
Alg.25	Vzájemná indukčnost dvou tenkých koaxiálních kruhových cívek	78
Alg.26	Derivace vzájemné indukčnosti dvou tenkých koaxiálních kruhových cívek.....	79
Alg.27	Tvarová funkce pro cívky a smyčky kruhového tvaru C_{arc}	81
Alg.28	Tvarová funkce pro cívky a smyčky obdélníkového tvaru R_{arc}	83
Alg.29	Stanovení výpočtového času algoritmů.....	84
Alg.30	Algoritmus pro výpočet obecného úplného eliptického integrálu.....	89

Seznam tabulek s vypočtenými hodnotami a parametry cívek

Tab.1	Vstupní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.1, Alg.1.b	12
Tab.2	Porovnání počítaných a měřených hodnot vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních tenkých kruhových cívek	13
Tab.3	Vstupní hodnoty pro ověření algoritmů Alg.2 , Alg.2.b	16
Tab.4	Porovnání počítaných a měřených hodnot vzájemné indukčnosti obdélníkové a kruhové nekoaxiální vzduchové cívky	17
Tab.5	Porovnání doby trvání výpočtu vzájemné indukčnosti dvou nekoaxiálních tenkých kruhových cívek pomocí Alg.1 a Alg.6	26
Tab.6	Porovnání doby výpočtu vzájemné indukčnosti obdélníkové a kruhové nekoaxiální vzduchové cívky pro dva různé algoritmy	28
Tab.7	Porovnání měřených a počítaných hodnot vlastní indukčnosti obdélníkové cívky - Obdélníková cívka Rect_2 s odbočkami	34
Tab.8	Porovnání měřených a počítaných hodnot vlastní indukčnosti obdélníkové cívky - obdélníková cívka Rect_1 s odbočkami	34
Tab.9	Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek	35
Tab.10	Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek	35
Tab.11	Měření vzájemné indukčnosti obdélníkových cívek	36
Tab.12	Intensita magnetického pole tenkého kruhového závitu	49
Tab.13	Intensita magnetického pole tenké kruhové cívky	52
Tab.14	Intenzita magnetického pole tenké obdélníkové cívky	58
Tab.15	Rychlost vyčíslení kombinace eliptických integrálů $\lambda K(k) + \mu E(k)$ pro $\lambda = 1, \mu = 1$ dvěma odlišnými numerickými metodami	88
Tab.16	Rychlost vyčíslení kombinace eliptických integrálů $\lambda K(k) + \mu \Pi(n, k)$ pro $\lambda = 1, \mu = 1$ dvěma odlišnými numerickými metodami	88
Tab.17	Modely kruhových cívek	90
Tab.18	Obdélníková cívka s odbočkami Rect_1	91
Tab.19	Rect_2 - Obdélníková cívka s odbočkami	92
