

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky
Obor: Matematické modelování v technice



Užití metody konečných prvků pro aproximaci
deformace elastických těles s uvažáním kontaktu

Application of Finite Element Method for Deformation
of Elastic Structures with Contact

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Tomáš Vinický
Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
Rok: 2024

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vinický** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **408541**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Užití metody konečných prvků pro aproximaci deformace elastických těles s uvážením kontaktu

Název diplomové práce anglicky:

Application of Finite Element Method for Deformation of Elastic Structures with Contact

Pokyny pro vypracování:

1. Matematický popis deformace pružných těles
2. Princip numerická aproximace problému deformace pružných těles.
3. Matematický popis deformace pružného tělesa s uvážením kontaktu.
4. Popis numerické metody pro aproximaci deformace pružných těles s kontaktem.
5. Použití numerických metod pro vybrané modelové úlohy.
6. Numerické řešení vybraných případů a zpracování výsledků.

Seznam doporučené literatury:

- 1) Wriggers, P., 2006. Computational Contact Mechanics, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- 2) Johnson, K.L., 1985. Contact mechanics. Cambridge University Press, Cambridge.
- 3) David Kinderlehrer, Guido Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, SIAM 2000.
- 4) Georges Duvaut, Jacques Louis Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer 1976.
- 5) J F Rodrigues, Obstacle problems in Mathematical Physics North Holland 1987
- 6) N Kikuchi, JT Oden Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods 1988.
- 7) R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, 1984/2000, Springer

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **22.04.2024** Termín odevzdání diplomové práce: **11.08.2024**

Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

Bc. Tomáš Vinický

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. za profesionální přístup a trpělivost v roli vedoucího této diplomové práce.

Bc. Tomáš Vinický

Název práce:

Užití metody konečných prvků pro aproximaci deformace elastických těles s uvažováním kontaktu

Autor: Bc. Tomáš Vinický

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství

Obor: Matematické modelování v technice

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: –

Abstrakt: Tato práce se zabývá užitím metody konečných prvků k numerickému řešení úlohy lineární elasticity s kontaktem. Zde předpokládáme kontakt tělesa s překážkou. Navier-Lamého rovnice s Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou je rozšířena o okrajové podmínky, které připouštějí kontakt s překážkou. Slabá formulace úlohy je vyjádřena jako variační nerovnost prvního druhu řešená užitím penalizační metody. Numerické výsledky sledují vliv penalizačního parametru na konvergenci numerického řešení.

Klíčová slova: variační nerovnost, MKP, penalizační metoda, lineární elasticita, signoriniho problém, problém s překážkou

Title:

Application of Finite Element Method for Deformation of Elastic Structures with Contact

Author: Bc. Tomáš Vinický

Abstract: This work deals with the application of the finite element method for the numerical solution of the linear elasticity problem with contact. Here, we assume the contact of a body with an obstacle. The Navier-Lamé equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions are extended to include boundary conditions that allow for contact with an obstacle. The weak formulation of the problem is expressed as a first kind variational inequality solved using the penalty method. Numerical results track the influence of the penalty parameter on the convergence of the numerical solution.

Key words: variational inequality, FEM, penalty method, linear elasticity, signorini problem, obstacle problem

Obsah

1	Úvod	7
2	Matematické nástroje	8
2.1	Lebesgueovy prostory	11
2.2	Sobolevovy prostory	12
2.3	Greenova věta	13
2.4	Laxova -Milgramova věta	13
3	Teorie variačních nerovností	14
3.1	Formulace minima funkce jako variační nerovnosti	14
3.2	Formulace Variační nerovnosti 1. a 2. druhu	15
3.3	Existence a jednoznačnost řešení	16
3.4	Minimum funkcionalu a variační nerovnost pro symetrickou formu	18
3.5	Diskretizace pomocí MKP	18
4	Matematická formulace lineární elasticity	20
4.1	Tenzor napětí	20
4.2	Tenzor deformace	22
4.3	Konstitutivní vztah tenzoru napětí a tenzoru deformace	23
4.4	Formulace problému lineární elasticity jako soustavy PDR	23
4.5	Slabá formulace problému lineární elasticity	25
4.6	Diskretizace	26
5	Matematická formulace úloh s kontaktem	27
5.1	Matematický zápis podmínek kontaktu a Signoriniho problém	27
5.2	Zjednodušené problémy	31
5.2.1	Zjednodušený Signoriniho problém	31
5.2.2	Problém s překážkou	32
5.3	Numerická řešení variační nerovnosti prvního druhu	33
5.3.1	Projekční metoda	33
5.3.2	Penalizační metoda	33
5.3.3	Aplikace penalizační metody	34
6	Numerické výsledky	35
6.1	Příklad č.1	36
6.2	Příklad č.2	38
6.3	Numerické řešení modelových úloh	40
6.4	Grafické výstupy	48
7	Závěr	51
	Reference	52

1 Úvod

Tato diplomová práce si klade za cíl popsat numerické řešení úlohy lineární elasticity s kontaktem. Kontaktem je myšlen kontakt tělesa s překážkou. Zde těleso podléhá Hookeovu zákonu, u kterého předpokládáme malé deformace. Překážkou je myšlena fyzikální hranice předepsaná nějakou funkcí, kterou uvažujeme jako absolutně tuhou. Úloha lineární elasticity, zapsaná jako Navier-Lamého soustava PDR s okrajovými podmínkami je rozšířena o okrajové podmínky, které dovolují kontakt. Úlohu lze vyjádřit jako variační nerovnost prvního druhu. Variační nerovnost nelze použít přímo, z toho důvodu je úloha převedena penalizační metodou na soustavu nelineárních rovnic. Metodu konečných prvků užíváme pro numerické řešení lineární elasticity. Úlohu s kontaktem řešíme Newtonovou iterační metodou.

Dříve než začneme s formulací teorie variační nerovnosti, přiblížíme zde původ teorie, její myšlenku na jednoduchém příkladu a obory jejího uplatnění. První práci o teorii variační nerovnosti publikoval G. Fischera (1963), který se zabýval mechanikou tuhého tělesa. Druhou práci uvedl G. Stampacchia (1964), který se zabýval teorií potenciálu v elektrostatičce. Nová teorie si našla cestu do oborů mechaniky kontinua, matematického programování, nebo optimalizace a dalších. Zpracováním úvodu do teorie variační nerovnosti se zabýval J.L. Lions a další.

Parafrázujeme příklad variační nerovnosti na následujícím příkladu tělesa zavěšeného na pružině viz [11]. Mějme těleso o hmotnosti m zavěšené na pružině s tuhostí k . Na těleso působí gravitační síla dána jako mg , zde g je gravitační zrychlení. Celkovou energii systému vyjádříme jako

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu. \quad (1)$$

Zde u je posunutí tělesa o hmotnosti m . Použijeme-li variaci polohy δu na (1) obdržíme

$$\delta\Pi(u) = ku\delta u - mg\delta u = 0, \quad (2)$$

zde úpravou obdržíme polohu tělesa s minimem potenciální energie. Druhou variací polohy celkové energie soustavy (1) obdržíme

$$\delta^2\Pi(u) = k. \quad (3)$$

Zde (3) vyjadřuje minimum energie systému (1) v $u = \frac{mg}{k}$. Zaveďme hranici \mathcal{S} jako omezení předepsané vztahem

$$\mathcal{S}(u) = h - u \geq 0, \quad (4)$$

hranici \mathcal{S} považujeme díky podmínkce v (4) za neprostupnou, parametr h reprezentuje vzdálenost mezi omezením a počáteční polohou tělesa. Tím jsme omezili virtuální posuv $\delta u \leq 0$ a tedy musí splňovat okrajové podmínky na hranici \mathcal{S} . Potom lze variační formulaci (2) přepsat jako

$$ku\delta u - mg\delta u \geq 0. \quad (5)$$

Zde z nerovnosti (5) plyne

$$ku \leq mg, \quad (6)$$

a tedy $\delta u < 0$ na hranici \mathcal{S} . Nerovnost (5) je nazývána variační nerovnost. Nahraďme variaci posunutí tak, že $\delta u = v - u$ kde v testovací funkce přípustných posuvů. Pro

testovací funkci musí platit podmínka $v - h \leq 0$ v místě kontaktu. Potom lze nerovnost (5) přepsat jako

$$ku(v - u) - mg(v - u) \geq 0. \quad (7)$$

Nyní hledáme minimum potenciální energie $\Pi(u)_{\mathcal{S}}$ tělesa na hranici \mathcal{S} . Obdobný příklad hledání minima potenciální energie soustavy s kontaktem uvádí krom mnoha jiných Roudrigues, J.F. ve své knize *Obstacle Problem in Mathematical Physic* [7].

2 Matematické nástroje

Cílem této kapitoly je uvést základní matematické nástroje (a značení), které v pozdějším textu použijeme k vyhodnocení deformace nějakého myšleného tělesa pod vlivem zatížení. Za tímto účelem vzniká potřeba měřit vzdálenost mezi prvky $x, y \in V$, kde $V \subset \mathbb{R}$ je prostor spojitých funkcí. Funkce $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrika, pokud přiřazuje dvojici prvků $x, y \in V$ reálné číslo a pro libovolné $x, y, z \in V$ a platí

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y|, \\ d(x, y) &\geq 0, \\ d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y, \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(x, z). \end{aligned} \quad (8)$$

Dvojice (V, d) je nazývána metrický prostor. Nebudeme zde uvádět více pojmů metrických prostorů, které jsou uvedeny v publikaci [15].

V dalších částech se budeme opírat o předpoklad lineární změny polohy dvou prvků $x, y \in V$, nebo budeme pracovat s lineárními operátory. Z toho důvodu pokračujeme uvedením pojmu normovaný lineární prostor a lineární operátor. Prostor V nazveme lineární, pokud v něm jsou definovány operace součtu a součinu prvků $x, y \in V$. Tedy, že platí následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x, \\ (x + y) + z &= x + (y + z), \\ x + 0 &= x \quad \forall x \in V, \quad \exists 0 \in V, \\ x + (-x) &= 0 \quad \forall x \in V, \quad \exists (-x) \in V, \\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x, \\ 1 \cdot x &= x, \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x, \\ \alpha(x + y) &= \alpha x + \beta y. \end{aligned} \quad (9)$$

O lineárním prostoru V říkáme, že je normovaný, pokud existuje zobrazení, které každému prvku $x \in V$ přiřadí nezáporné číslo $\|x\|$. Symbol $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme norma prostoru, pokud pro libovolné prvky $x, y \in V$ platí

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Každý normovaný lineární prostor je metrický prostor. Důkaz této věty viz [12], [15]. Nechť V je normovaný lineární prostor, který je úplný. Pak prostor V nazýváme Banachovým prostorem.

Na základě vlastností uvedených v (9) používáme lineární operátor $L : V \rightarrow V$, který přiřadí každému prvku $x, y \in V$ reálné číslo, pokud platí

$$\begin{aligned} L(x + y) &= L(x) + L(y), \\ L(\alpha x) &= \alpha L(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{11}$$

Lineární operátor v případě $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme lineární funkcionál. Víme, že lineární operátor je spojitý, pokud je omezený. Množina všech spojitých operátorů tvoří duální prostor V' s normou definovanou pro $L \in V'$ dle $\|L\| = \sup_{0 \neq y \in V} \frac{|L(y)|}{\|y\|}$. Dualitu prostoru rozumíme jako zobrazení značné symbolem $\langle \cdot, \cdot \rangle = V' \times V$ a definované dle:

$$L(y) = \langle f, y \rangle, \tag{12}$$

pro $y \in V$ a $f \in V'$. Důkaz předchozích tvrzení viz publikace [12], [15]. Lineární operátor L nazýváme kontraktivní, pokud dvojice (V, d) je úplný metrický prostor, $L : V \rightarrow V$ a existuje konstanta $0 < \kappa < 1$ tak, že pro libovolné $x, y \in V$ platí

$$d(L(x), L(y)) \leq \kappa d(x, y). \tag{13}$$

Věta 1. *Nechť V je Banachův prostor a L je kontraktivní operátor z prostoru V do V . Pak existuje právě jeden pevný bod x^* tj.*

$$L(x^*) = x^*. \tag{14}$$

Důkaz Banachovy věty o pevném bodě (věta 1) viz [15].

Nyní lineární prostor V rozšíříme skalárním součinem, abychom mohli provádět operace sčítání a součinu vektorů z prostoru V . Pokud existuje zobrazení $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, které přiřadí dvěma prvkům $x, y \in V$ právě jedno reálné číslo $(x, y) \in \mathbb{R}$. Nazveme prostor V lineární prostor se skalárním součinem a pro libovolné prvky $x, y, z \in V$ a konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} (x, x) &\geq 0, \\ (x, x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \\ (x, y) &= (y, x), \\ (\alpha x, y) &= \alpha(x, y), \\ (x + y, z) &= (x, z) + (y, z). \end{aligned} \tag{15}$$

Zobrazení označené symbolem (\cdot, \cdot) nazýváme skalární součin. Každý lineární prostor V se skalárním součinem je také normovaným prostorem s normou definovanou jako $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Úplný lineární prostor se skalárním součinem nazýváme Hilbertovým prostorem, viz [12], [15].

Zobrazení $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma, pokud pro libovolné $x, y, z \in V$ přiřadí reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí

$$\begin{aligned} a(x + y, z) &= a(x, z) + a(y, z), \\ a(z, x + y) &= a(z, x) + a(z, y), \\ a(\alpha x, y) &= \alpha a(x, y) \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ a(x, \alpha y) &= \alpha a(x, y) \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

Pokud je navíc bilineární forma symetrická (je lineární i v druhé složce) platí

$$a(x, y) = a(y, x) \quad \text{pro } x, y \in V. \tag{17}$$

Bilineární forma je spojitá, pokud existuje konstanta $M > 0$ taková, že a pro libovolné prvky $x, y \in V$ platí

$$|a(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|. \tag{18}$$

Bilineární forma je V-eliptická, pokud existuje $m > 0$ a pro libovolný prvek $x \in V$ platí

$$a(x, x) \geq m \|x\|^2. \tag{19}$$

Bilineární forma je pozitivně semi-definitní, pokud platí

$$a(x, x) \geq 0. \tag{20}$$

Věta 2. *Nechť L je spojitý lineární operátor na lineárním prostoru H se skalárním součinem (\cdot, \cdot) . Pak existuje právě jedno $f \in H$ takové, že pro libovolné $v \in H$ platí*

$$(f, v) = L(v). \tag{21}$$

Důkaz věty 2 (Riezsova věta o reprezentaci) viz [16], [6]. Následující kapitoly uvádí Lebesgueovy a Sobolevovy prostory, které jsou úplné. Zúplnění lineárního prostoru uvádí publikace [15].

2.1 Lebesgueovy prostory

Označme pro $1 \leq p \leq \infty$ prostory funkcí $V = L^p(\Omega)$, které splňují rovnost

$$L^p(\Omega) = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \quad \forall u \in V. \quad (22)$$

Označení Ω je pro oblast se souvislou Lipschitzovsky spojitou hranicí. Norma v prostorech $L^p(\Omega)$ je dána

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (23)$$

Pro $p = 2$ je prostor se skalárním součinem $L^2(\Omega)$ daný dle

$$(u, v) = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad (24)$$

kde symbolem (\cdot, \cdot) označujeme skalární součin na $L^2(\Omega)$. Rozšíření prostoru $L^p(\Omega)$ pro $p = \infty$ rozumíme tak, že platí

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty\}. \quad (25)$$

Za tímto účelem je nutné definovat ess sup přirozené rozšíření operátoru suprema měřitelných funkcí a operátoru infimum viz [16]. Pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$ prostor $L^p(\Omega)$ Banachův, a navíc je prostor $L^p(\Omega)$ separabilní, právě když $1 \leq p < \infty$. Prostor $L^p(\Omega)$ je reflexivní, právě když $1 < p < \infty$ a je Hilbertův, právě když $p = 2$ viz publikace [6], [13], [14], [16].

2.2 Sobolevovy prostory

V omezené oblasti Ω s Lipschitzovsky spojitou hranicí označme $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevův prostor. Pro $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p \leq \infty$ a je definovaný tak, že

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \mid |\alpha| \leq k\}, \quad (26)$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je multi-index a $D^\alpha u$ chápeme jako derivace ve smyslu distribucí viz publikace [16], [6], [13]. Pro $1 \leq p \leq \infty$ definujme seminormu v Sobolevově prostoru tak, že platí

$$|u|_{k,p,\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (27)$$

a normu,

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (28)$$

Normu a seminormu lze definovat i pro $p = \infty$, viz publikace [16]. Sobolevův prostor je pro případ $p = 2$ Hilbertův prostor označený $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, obdobně definujeme normu a seminormu. Sobolevova věta o vnoření předkládá vlastnosti funkcí z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ pro dimenze $1 \leq n$ oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ viz publikace [16], kterých lze využít při řešení okrajových úloh. Pro dimenze $n > 1$ nejsou okrajové hodnoty funkcí dobře definovány. Za tímto účelem uijeme větu o stopách, viz [16] a definujme prostor testovacích funkcí tak, že platí

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}. \quad (29)$$

Funkce z toho prostoru jsou nulové na hranici.

2.3 Greenova věta

Uvažujme funkce u, v z prostoru $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, kde $\Omega \in \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega = \Gamma$. Greenova věta [6], [16] pak ukazuje platnost vztahu

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v dx = \int_{\Gamma} u v n ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (30)$$

pro libovolné $u, v \in H^1(\Omega)$, kde $n = (n_1, \dots, n_d)$ rozumíme vnější jednotkovou normálu k hranici Ω .

Následující vztahy jsou odvozené z (30). Vztah s Laplaceovým operátorem

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (31)$$

kde $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ je Laplaceův operátor, $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d})^T$ je gradient funkce u a $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ je parciální derivace v normálovém směru.

Vztah s divergencí vektorové funkce $u = (u_1, \dots, u_d)$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v dx = \int_{\Gamma} (u \cdot n) v ds - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (32)$$

kde divergencí funkce u rozumíme $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

2.4 Laxova -Milgramova věta

Uvažujme problém takový, že hledáme $u \in V$ charakterizované vztahem

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (33)$$

Existenci právě jednoho řešení (33) lze dokázat užitím Laxovy-Milgramovy věty [16], [12]. Pokud V je Banachův prostor, L je lineární forma na V , $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická bilineární forma na V a dále pokud existují kladné konstanty M, m, C tak, že pro libovolné $u, v \in V$ platí

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad (34)$$

$$a(v, v) \geq m \|v\|^2, \quad (35)$$

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \quad (36)$$

pak existuje právě jedno řešení (33). Důkaz uvedeného vztahu, viz [16] nebo [6].

3 Teorie variačních nerovností

Cílem této kapitoly je uvedení teorie variační nerovnosti. V následující podkapitole je úvodem uvedena formulace minima funkce jako variační nerovnost viz publikace [3], [6]. Na úvod navazuje uvedení formulace variační nerovnosti 1. a 2. druhu viz publikace [6], [4], [2]. V další podkapitole je uvedena existence a jednoznačnost řešení variačních nerovností viz publikace [6], [4], [2]. Kapitola teorie variační nerovnosti je uzavřena uvedením diskretizace problému pomocí MKP viz publikace [4].

3.1 Formulace minima funkce jako variační nerovnosti

V této části uvedeme formulaci minima funkce jako variační nerovnosti. Uvažujme problém hledání minima funkce $f(x)$ na intervalu $I = [a, b]$, viz také [3]. Tedy hledáme $x_0 \in I$ tak aby platilo

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x), \quad (37)$$

kde f je reálná hladká funkce. Pro lokální minimum $x_0 \in I$ mohou nastat tři možné případy:

$$\begin{aligned} 1) & a < x_0 < b \quad \text{potom} \quad f'(x_0) = 0, \\ 2) & x_0 = a \quad \text{potom} \quad f'(x_0) \geq 0, \\ 3) & x_0 = b \quad \text{potom} \quad f'(x_0) \leq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Interval I je konvexní množina, tedy pro libovolné $x \in I$ je také konvexní kombinace $x_0 + t(x - x_0) \in I$. Funkce $g(t)$ definována pro libovolné $x \in I$ předpisem

$$g(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (39)$$

nabývá svého minima na $\langle 0, 1 \rangle$ pro $t = 0$. Platí tedy

$$g'(0) = f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in I. \quad (40)$$

Všechny uvedené případy (38) lze tedy zapsat jako jednu nerovnost

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in I. \quad (41)$$

Problém minimalizace funkce f (tedy na konvexní množině) na intervalu I je zapsán jako jedna nerovnost.

3.2 Formulace Variační nerovnosti 1. a 2. druhu

Formulaci problému uvedeme na základě publikací [4] a [6]. Mějme Hilbertův prostor V , kde symbolem (\cdot, \cdot) označujeme skalární součin a symbolem $\|\cdot\|$ značíme normu prostoru. Uvažujme formu $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, která je bilineární, spojitá a V -eliptická na $V \times V$, a lineární spojitý funkcionál $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dále uvažujme množinu K , která je konvexní neprázdnou a uzavřenou podmnožinou prostoru V . Uvažujme dále konvexní a zdola polospojitý funkcionál $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, kde rozumíme, že $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Funkcionál j má vlastnosti takové, že $j \not\equiv +\infty$ a $j(v) > -\infty \forall v \in V$. Funkcionál j nazýváme konvexní, pokud platí

$$j((1-t)u + tv) \leq (1-t)j(u) + tj(v), \quad \forall t \in (0, 1) \forall u, v \in V. \quad (42)$$

Z publikace [6] víme, že funkcionálu j je zdola polospojitý, když platí implikace pro všechny $v \in V$

$$v_n \rightarrow v \text{ ve } V \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} j(v_n) \geq j(v). \quad (43)$$

Nyní formulujme variační nerovnost 1. druhu a 2.druhu. Mějme daný spojitý funkcionál L definovaný na V (tj. $L \in V'$). Uvažujme variační nerovnost 1. druhu: hledáme $u \in K$ tak aby platila nerovnost

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (44)$$

Pokud zavedeme funkcionál j , uvažujme problém variační nerovnosti 2. druhu: hledáme $u \in V$ tak aby platilo

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in V. \quad (45)$$

V případě, že v problému (45) je funkcionál $j(v) \equiv 0$ nebo když $K = V$ v problému (44) se redukuje na problém nalezení $u \in V$ tak, že platí nerovnost

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in V. \quad (46)$$

a tedy problém (44) a (45) se redukuje na variační rovnost

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in K. \quad (47)$$

Variační nerovnost (44) lze zapsat jako variační nerovnost (45) užitím speciálně definovaného funkcionálu $j(v)$.

3.3 Existence a jednoznačnost řešení

V této kapitole formulujeme existenci a jednoznačnost řešení variačních nerovností 1. druhu (44) a 2. druhu (45). Věty a důkazy jsou k tomuto účelu čerpány z publikací viz [4], [6] nebo [5].

Uveď me tedy větu, která formuluje jednoznačnost řešení variační nerovnosti 1. druhu.

Věta 3. *Mějme V reálný Hilbertův prostor, a množinu $K \subset V$, která je neprázdná, uzavřená a konvexní. Uvažujme $a : V \rightarrow V$, která je spojitá V -eliptická a bilineární forma a lineární omezený funkcionál $L \in V$. Potom má variační nerovnost 1. druhu (44) jednoznačné řešení $u \in K$.*

Důkaz. Uvažujme dvě řešení $u_1 \in K$ a $u_2 \in K$ problému (44) tak, že platí

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in K \quad (48)$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in K \quad (49)$$

Dosaďme do nerovnosti (48) $v = u_2$ a do (49) $v = u_1$, nerovnosti sečteme a použijeme V -elipticitu formy $a(\cdot, \cdot)$

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \quad (50)$$

Z nerovnosti (50) vyplývá, že $u_1 = u_2$ protože $\alpha > 0$. Tím je dokázána jednoznačnost řešení (44), viz také publikace [6], [4] nebo [5].

Důkaz. Důkaz existence řešení problému (44) ukážeme převedením na problém pevného bodu, viz [6], [4] nebo [2]. Dle Rieszovy věty o reprezentacích, viz věta 2 definujeme zobrazení $A : V \rightarrow V$ tak, že $a(u, v) = (Au, v)$ pro $\forall u, v \in V$. Dle stejné věty, existuje $f \in V$ tak, že $L(v) = (f, v) \quad \forall v \in V$. Variační nerovnost prvního druhu (44) lze přepsat následovně: Hledáme $u \in K$ tak, že

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \quad (51)$$

nebo také

$$(Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (52)$$

Vztahy (52) a (51) pak lze pro $\rho > 0$ také zapsat jako

$$(u - \rho(Au - f) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (53)$$

Nerovnost (53) je ekvivalentní problému: Hledáme $u \in K$ takové, že

$$u = P_K(u - \rho(Au - f)) \quad \text{pro } \rho > 0, \quad (54)$$

kde P_K označuje operátor projekce $V \rightarrow K$ v normě $\|\cdot\|$ prostoru V . Uvažujme zobrazení $W_K : V \rightarrow V$ definované tak, že $W_K(v) = P_K(v + \rho(L - Av))$ a ukážeme, že operátor W_K je kontraktivní

$$\begin{aligned} \|W_K(v_1) - W_K(v_2)\|^2 &\leq \|v_2 - v_1\|^2 + \rho^2 \|A(v_2 - v_1)\|^2 - 2\rho a(v_2 - v_1, v_2 - v_1) \\ \|W_K(v_1) - W_K(v_2)\|^2 &\leq (1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\rho\alpha) \|v_2 - v_1\|^2 \end{aligned} \quad (55)$$

Tedy operátor W_K je kontraktivní zobrazení pokud $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{\|A\|^2})$. Tedy dle Banacovy věty o pevném bodě funkcionálu (věta 1) viz [6], [15] existuje pevný bod operátoru W_K , který je také řešením variační nerovnosti prvního druhu (44).

V další části uvedeme dle publikace [6] větu o jednoznačnosti a existenci řešení variační nerovnosti druhého druhu (45), stejnou problematikou se také zabývají autoři publikace [4].

Věta 4. *Mějme V reálný Hilbertův prostor, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou, V -eliptickou bilineární formu, spojitý a omezený funkcionál $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ a konverzní, zdola polospojitý funkcionál $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, který má takové vlastnosti, že $j \not\equiv 0, j > -\infty$. Potom je řešení $u \in V$ variační nerovnosti 2. druhu (45) jednoznačné.*

Důkaz. Zde uvedeme důkaz přejatý z monografie [6], [4] nebo [5]. Důkaz provedeme ve dvou krocích, nejprve důkaz jednoznačnosti: Uvažujme dvě řešení u_1 a u_2 tak, že platí nerovnosti

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in V \quad (56)$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in V. \quad (57)$$

Dosaďme do nerovnosti (56) $v = u_2$ a do (57) $v = u_1$, nerovnosti sečteme a použijeme V -elipticitu formy $a(\cdot, \cdot)$

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq \alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \quad (58)$$

Z nerovnosti (58) vyplývá, že $u_1 = u_2$ protože $\alpha > 0$. Tím je dokázána jednoznačnost řešení (45).

Důkaz. Zde uvedeme důkaz existence řešení (45) převzatý z monografie [4],[6] který ukážeme obdobně jako pro (44), problém (45) převedeme na problém pevného bodu, viz věta 1. Dle Rieszovy věty o reprezentacích, viz věta 2 definujeme zobrazení $A : V \rightarrow V$ tak, že $a(u, v) = (Au, v)$ pro $\forall u, v \in V$. Dále dle stejné věty existuje $f \in V$ tak, že $L(v) = (f, v) \forall v \in V$. Problém (45) přeformulujeme následovně. Pro libovolné $\rho > 0$ a $u \in V$ uvažujme problém (π_ρ^u) : Hledáme $w \in V$ tak, že

$$\begin{aligned} (w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) &\geq \\ (u, v - w) + \rho L(v - w) - \rho a(u, v - w) &\quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (59)$$

Dle [4] má problém (π_ρ^u) řešení $u \in V$ pro všechny $\rho > 0$. Pro všechna $\rho > 0$ definujeme zobrazení $f_\rho : V \rightarrow V$ tak, že $f_\rho(u) = w$ kde w je právě jedno řešení problému (π_ρ^u) . Naším cílem je ukázat, že zobrazení f_ρ je kontraktivní pro vhodné ρ . Pokud je zobrazení f_ρ kontraktivní, má dle věty 1 pevný bod u . Mějme dvě řešení $u_1, u_2 \in V$ a $w_i = f_\rho(u_i)$ pro $i = 1, 2$ a pro libovolné $\rho > 0$ tak, že platí

$$\begin{aligned} (w_1, u_2 - w_1) + \rho j(w_2) - \rho j(u_1) &\geq \\ (u_1, w_2 - w_1) + \rho L(w_2 - w_1) - \rho a(u_1, w_2 - w_1) & \\ (w_2, u_1 - w_2) + \rho j(w_1) - \rho j(u_2) &\geq \\ (u_2, w_1 - w_2) + \rho L(w_1 - w_2) - \rho a(u_2, w_1 - w_2), & \end{aligned} \quad (60)$$

sečtením a úpravou nerovností obdržíme

$$\|f_\rho(u_1) - f_\rho(u_2)\| \leq \|I - \rho A\| \|u_2 - u_1\|. \quad (61)$$

Tedy zobrazení f_ρ je kontraktivní pokud $\|I - \rho A\| < 1$ pro $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$ a dle Banachovy věty (věta 1) existuje právě jeden pevný bod u , který je také řešením variační nerovnosti 2. druhu (45).

$$\begin{aligned} (u, v - u) + \rho j(v) - \rho j(u) &\geq \\ (u, v - u) + \rho L(v - u) - \rho a(u, v - u) &\quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (62)$$

proto

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in V \quad (63)$$

má právě jedno řešení.

3.4 Minimum funkcionálu a variační nerovnost pro symetrickou formu

V této části uvažujme, že $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická forma a platí věty 3, 4. Variační nerovnost 1. druhu (44) je ekvivalentní problému hledání minima funkcionálu. Řešení minimalizačního problému je: Hledáme $u \in K$ tak, že

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \quad (64)$$

kde funkcionál $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaný

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \quad (65)$$

Variační nerovnost 2. druhu (45) je pak ekvivalentní hledání minima funkcionálu, kde formulace minimalizačního problému je: Hledáme $u \in V$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V \quad (66)$$

kde funkcionál $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaný

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - L(v). \quad (67)$$

Důkaz uvádí např. [4], [6].

3.5 Diskretizace pomocí MKP

V této části uvedme formulaci přibližného řešení variačních nerovností (44) a (45) metodou konečných prvků. Inspirujme se z publikací [6] nebo [4]. V uvedených publikacích se také odkážeme na formulaci důkazu tvrzení přibližného řešení.

V první řadě je uvedena formulace přibližného řešení problému variační nerovnosti (44) tak, že: Zvolme parametr $h > 0$, a konečně prvkový prostor $V_h \subset V$ a $K_h \subset V_h$ neprázdnou, uzavřenou a konvexní podmnožinu. Potom dimenzi konečně prvkového prostoru označme $\dim V_h = n$, kde $n < \infty$ je počet prvků prostoru.

Přibližné řešení problému (44) nalezené metodou konečných prvků formulujme tak, že hledáme $u_h \in K_h$ pro, které platí

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h). \quad \forall v_h \in K_h. \quad (68)$$

V této části pokračujme formulací přibližného řešení problému (45) užitím metody konečných prvků. Držme se výše definovaných konečně prvkových prostorů, a navíc předpokládejme aproximaci funkcionálu $j(\cdot)$ funkcionálem $j_h(\cdot)$ pro který, platí že vlastnosti uvedené větou 4 platí pro funkcionál i na prostoru V_h . Potom hledejme $u_h \in V_h$ tak, že platí

$$a(u_h, v_h - u_h) + j_0(v_h) - j_0(u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (69)$$

4 Matematická formulace lineární elasticity

Tato kapitola si klade za cíl uvést stručný popis teorie lineární elasticity, tedy popsat stav napjatosti elastického tělesa. První část kapitoly je věnována matematické formulaci tenzoru napětí. Druhá část kapitoly uvádí matematickou formulaci tenzoru deformace. Třetí část dává do souvislosti tenzor napětí a tenzor deformace v Hookeově zobecněném zákonu, který nám umožní získat jednoznačné řešení problému lineární elasticity [8], [9]. Kapitulu uzavírají části věnované uvedení matematické formulaci problému lineární elasticity, uvedení problému lineární elasticity jako soustavy parciálních diferenciálních rovnic a formulace slabého řešení. Závěrem je uvedena diskretizace problému za účelem numerického řešení metodou konečných prvků, viz [15], [12], [16].

4.1 Tenzor napětí

V této kapitole se budeme zabývat silovým stavem rovnováhy tělesa, a charakteristikou sil, které na těleso působí, a které v konečném důsledku vyvolají deformaci tělesa. Předpokládejme těleso, které se nachází v kartézském souřadném systému a označme ho symbolem $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Stav rovnováhy uvažujme v libovolně zvoleném objemu $V \subset \Omega$ s povrchem S . Síly, které způsobí deformaci tělesa, jsou charakterizovány jako objemové nebo plošné. Tyto síly jsou spolu v rovnováze, pokud jsou splněny rovnice pro $i = 1, \dots, d$

$$\int_V F_i dV + \int_S T_i ds = 0, \quad (70)$$

kde v rovnici (70) člen F_i reprezentuje vektor objemových sil vztažený na libovolný objem, integrál přes objem vyjadřuje objemovou sílu. Druhý integrál vyjadřuje výslednou plošnou sílu, kde vektor T_i reprezentuje vektor napětí vztažený na povrch objemu V . Vektor napětí je ve vztahu s tenzorem napětí v Cauchyho rovnici

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (71)$$

kde σ_{ij} označuje tenzor napětí a n_j označuje kladně orientovanou vnější normálu k povrchu S . Složky tenzoru napětí jsou průměty vektoru napětí T_i viz publikace [8]. Pokračujme tak, že druhý integrál v (70) převedeme na objemový integrál užitím Greenovi věty (30) tak, že

$$\int_S T_i ds = \int_S \sigma_{ij} n_j ds = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (72)$$

Dosazením posledního integrálu z (72) do (70) a po úpravě obdržíme rovnici

$$\int_V (T_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) dV = 0, \quad (73)$$

pro libovolný kontrolní objem $V \subset \Omega$. Pokud je rovnice (73) rovna nule, pak je i integrant roven nule a obdržíme diferenciální Navierovu rovnici rovnováhy pro $i = 1, \dots, d$

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (74)$$

Jedná se o soustavu rovnic, které popisují rovnovážný stav v libovolném bodě $P \in V$.

Obdobným způsobem popište momentovou rovnováhu, které vyhovuje rovnice

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j T_k ds = 0. \quad (75)$$

Postup je analogický s výše uvedeným postupem. Druhý integrál v rovnici (75) převedme užitím Gaussovi věty (30) na objemový integrál tak, že

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j T_k ds = \int_V \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}) dV. \quad (76)$$

Dosažením objemového integrálu z rovnice (76) do rovnice (75) a úpravou obdržíme rovnici momentové rovnováhy

$$\int_V \epsilon_{ijk} (x_j T_k + \sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}) dV = 0. \quad (77)$$

Dosažením podmínky rovnováhy (74) rovnice (77) obdržíme rovnici rovnováhy v integrálním tvaru

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (78)$$

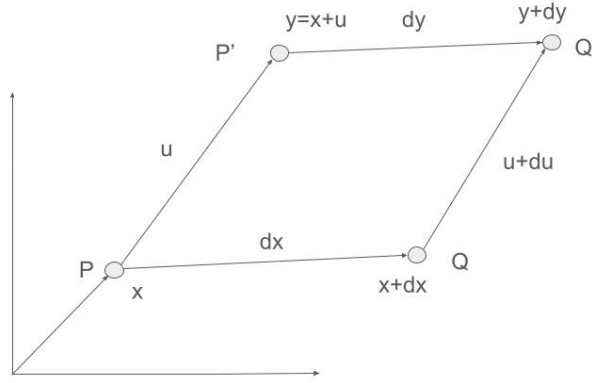
Pro zvolený objem V platí rovnice (78) právě tehdy když integrand vyhovuje rovnici

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (79)$$

Vztah(79) reprezentuje soustavu tří rovnic momentové rovnováhy v libovolném bodě $P \in V$, která má devět členů. Tenzor napětí σ_{ij} má tři závislé složky, a šest nezávislých složek. Pro určení napjatosti kolem libovolného bodu $P \in V$ stačí znát šest veličin, které však neurčíme z rovnic rovnováhy. Protože tyto rovnice máme jen tři. Z momentové rovnováhy plyne, že tenzor napětí σ_{ij} je tenzor druhého řádu, má devět složek a je symetrický $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, viz [8], [9].

4.2 Tenzor deformace

V této kapitole uveďme tenzor malé deformace. Deformace zde znamená posunutí částic tělesa vlivem vnějšího zatížení. Odezní-li působení vnějších sil, deformace tělesa vymizí. To se projeví tak, že částice tělesa se vrátí na svoje původní pozice. K popisu tohoto chování nám zde postačí tenzor malé deformace. Předpokládejme platnost transformačních vztahů pro vektory v ortonormální bázi kartézského souřadného systému, viz publikace [15]. Mějme dva blízké materiálové body $P, Q \in \Omega$ deformovaného tělesa, které se nachází v referenčních souřadnicích. Bod P se nachází v souřadnicích $x \in \Omega$, bod Q se nachází v souřadnicích $x + dx$. Předpokládejme posun bodu P po traektorii vektoru posunutí u do deformovaných souřadnic $y = x + u$. Dále předpokládejme posun bodu Q do deformovaných souřadnic $u + du$. Body v deformovaných souřadnicích označme P', Q' a vzdálenost mezi nimi dy . Tedy bod P' je v souřadnicích $y = x + u$, bod Q' je v souřadnicích $y + dy$.



Obrázek 1: Deformace bodů P,Q

Nyní chceme ukázat jak závisí dy na dx . Vzdálenosti bodů v druhé mocnině deformovaných souřadnic a referenčních souřadnic od sebe odečteme tak, že

$$|PQ|^2 = \sum_i (dx_i)^2, \quad (80)$$

$$|P'Q'|^2 = \sum_i (dy_i)^2, \quad (81)$$

kde $dx_i = \sum_{k,m} \delta_{ik} \delta_{im} dx_k dx_m$ a $dy_i = \sum_k (\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) dx_k$. Dále odečteme (80) od (81)

$$|P'Q'|^2 - |PQ|^2 = \sum_i (dy_i)^2 - \sum_i (dx_i)^2, \quad (82)$$

a úpravou obdržíme

$$|P'Q'|^2 - |PQ|^2 = \sum_{k,m} 2\epsilon_{k,m} dx_k dx_m. \quad (83)$$

Kde $\epsilon_{k,m}$ je tenzor konečné deformace, který je vyjádřen devíticí čísel

$$\epsilon_{k,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right). \quad (84)$$

Tenzor konečné doformace (84) je nelineární rovnice, která zahrnuje stavy elasticity a plasticity. V plastickém stavu mohou nastávat značné posunutí a deformace. Pro potřeby popisu malých deformací je řešení dle vztahu (84) nepraktické. A navíc, zpřesnění od nelineárního členu

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right| \ll 1, \quad (85)$$

je velmi malé číslo. Zanedbejme proto člen (85). Tímto krokem obdržíme tenzor malé deformace e_{km}

$$e_{k,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right). \quad (86)$$

4.3 Konstitutivní vztah tenzoru napětí a tenzoru deformace

Vztah tenzoru napětí a tenzoru deformace uvádí do souvislosti zobecněný Hookův zákon

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad (87)$$

kde C_{ijkl} je symetrický tenzor 4. řádu. Prvky tohoto tenzoru jsou tzv. elastické koeficienty. Symetrii tenzoru lze vyjádřit tak, že pro libovolné i, j, k, l platí

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{a} \quad C_{ijlk} = C_{ijkl}. \quad (88)$$

V rovnici (87) uvádíme tenzor malé deformace (86) neboť se držíme dříve uvedeného předpokladu malých deformací. Význam symetrie tenzorů σ_{ij} , e_{ij} a C_{ijkl} uvádí publikace [8], [9] kde jsou podrobně rozebrány mechanismy snížení počtu elastických koeficientů. Vztah (87) lze zapsat ve tvaru

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \quad (89)$$

Zde λ , μ jsou Lamého konstanty, které lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \end{aligned} \quad (90)$$

kde ν je Poissonova konstanta a E je Youngův modul pružnosti.

4.4 Formulace problému lineární elasticity jako soustavy PDR

V této části formulujeme problém lineární elasticity jako soustavu parciálních diferenciálních rovnic s okrajovou podmínkou. Formulace je založena na stavu rovnováhy elastického

tělesa, která je uvedena v kapitole 4.1 a Hookeově zákonu z kapitoly 4.3 nebo viz [8], [16], [9].

Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), která reprezentuje tuhé, deformovatelné, izotropní a homogení těleso s Lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Hranici $\partial\Omega$ označme symbolem Γ a rozdělme ji na disjunktní části $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Část hranice označené Γ_D reprezentuje vetknutí tělesa a předepisujeme na ní vektor posunutí $u = 0$ nebo $u = g$. Na části hranice označené Γ_N předpokládáme účinek plošných sil a předepisujeme zde vektor vnějšího zatížení t_i . Stav rovnováhy do kterého se dostane elastické těleso vlivem působení plošných a objemových sil je popsán Navierovou rovnicí (70), kterou lze přepsat jako soustavu parciálních diferenciálních rovnic, viz [8], [9], [16].

Tedy hledáme neznáme pole posunutí $u \in [H_0^1(\Omega)]^d$ tak, že pro $i = 1, \dots, d$ platí

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = F_i \text{ v } \Omega, \quad (91)$$

kde F_i jsou složky objemových sil a σ_{ij} je tenzor napětí. Na $\partial\Omega$ jsou splněny okrajové podmínky

$$u_i = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad (92)$$

$$\sigma_{ij}(u)n_j = t_i \text{ na } \Gamma_N, \quad (93)$$

kde n_j je jednotkový vektor vnější normály, t_i je vektor vnějších zatěžujících sil a (92), (93) jsou okrajové podmínky. Rovnice (91) se nazývá Navier-Lamého rovnice, viz [8], [9].

4.5 Slabá formulace problému lineární elasticity

Vynásobme rovnici (91) testovací funkcí $v \in V$ a integrujme ji přes oblast Ω , tak že obdržíme

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} F_i v_i dx \quad \forall v \in V, \quad (94)$$

kde pro testovací funkci platí $V = \{v \in V : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$. Použijme greenovu větu (32) na pravou stranu rovnice

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) n_j v_i ds - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad \forall v \in V. \quad (95)$$

Dle okrajových podmínek (92) a (93) obdržíme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Gamma_N} t_i v_i ds - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad \forall v \in V. \quad (96)$$

Kde víme, že člen tenzoru napětí je symetrický $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}). \quad (97)$$

Změnou pořadí indexů obdržíme

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) = \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v). \quad (98)$$

Dosaďme (98) do (96) a obdržíme slabou formulaci problému lineární elasticity: Hledáme $u \in V$ takové, že

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} F_i v_i dx + \int_{\Gamma_N} t_i v_i ds \quad \forall v \in V. \quad (99)$$

Označme formu a dle

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) dx, \quad (100)$$

a formu L dle

$$L(v) = \int_{\Omega} F_i v_i dx + \int_{\Gamma_N} t_i v_i ds. \quad (101)$$

Problém (94) pak lze zapsat ve tvaru, že hledáme $u \in V$ tak, že

$$a(u, v) = L(v) \quad (102)$$

pro libovolné $v \in V$. Problém vyjádřený jako (102) je ekvivalentní problému hledání minima funkcionálu. Hledáme $u \in V$ takové, že

$$J(u) \leq J(v), \quad (103)$$

pro libovolné $v \in V$ viz [16]. Existence a jednoznačnost úlohy (94) ve slabé formulaci je ověřena Lax-Milgramovou větou.

4.6 Diskretizace

V této části kapitoly popíšeme numerické řešení problému lineární elasticity (91) metodou konečných prvků dle [16]. Víme, že platí rovnost vztahů (100) a (101)

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (104)$$

Zvolme parametr $h > 0$, a konečně prvkový prostor $V_h \subset V$ s dimenzí $\dim V_h = n$, kde $n < \infty$ je počet prvků prostoru V_h . Namísto problému (104) budeme hledat přibližné řešení problému tak, že hledáme $u_h \in V_h$ pro, které platí

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (105)$$

nebo vyjádřením pomocí báze funkce ϕ_i prostoru V_h platí

$$a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n. \quad (106)$$

Podmínka platí pro všechny báze funkce. Řešení problému (104) hledejme ve tvaru

$$u_h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i. \quad (107)$$

Dosazením (107) do rovnice (106) řešíme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad \text{pro } j = 1, \dots, n, \quad (108)$$

kde, pro $i = 1, \dots, n$ jsou α_i neznámé koeficienty rovnice. Rovnici (108) převedeme na tvar

$$\mathbb{A}u_h = b, \quad (109)$$

kde matice \mathbb{A} a vektor b jsou vyjádřeny užitím báze funkce ϕ_i prostoru V_h dle

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a(\phi_i, \phi_j), \\ b_i &= L(\phi_i). \end{aligned} \quad (110)$$

Dále víme, že matice \mathbb{A} je symetrická a pozitivně definitní, důkaz viz [16]. Odhad chyby přibližného řešení provedeme dle Céova lemma viz [16]. Pokud je u řešením problému (104) a u_h je řešením problému (105) pak platí

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h, \quad (111)$$

pro libovolné $v_h \in V_h$. Zde konstanty $M > 0$ a $m > 0$. Důkaz uvádí viz [16].

5 Matematická formulace úloh s kontaktem

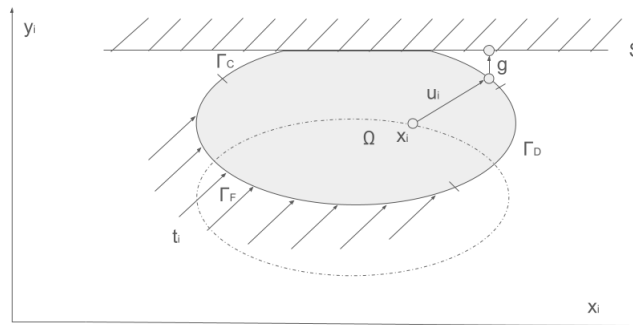
V této kapitole se zabýváme formulací problému kontaktu dvou těles také nazvaný Signoriniho problém, viz [1]. Formulace kterou zde uvedeme je založena na užití aparátu variací nerovnosti, viz kapitola 3.2 a teorie lineární elasticity, viz kapitola 4. V úvodní části se zaměříme na formulaci kinematických podmínek kontaktu tělesa, které podléhá Hookeovu zákonu s fyzikální hranicí, která reprezentuje absolutně tuhé těleso. V dalším textu jsou kontaktní podmínky přeformulovány do systému rovnic, které definují Signoriniho problém. Na závěr uvedeme slabou formulaci problému s kontaktem, který se také nazývá Signoriniho problém [1] nebo také problém s překážkou [6], [2], [4].

5.1 Matematický zápis podmínek kontaktu a Signoriniho problém

Předpokládejme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pro $d = 1, \dots, n$ reprezentující (materiálové) těleso s povrchem označeným $\Gamma = \partial\Omega$ v kartézském souřadném systému pro který platí $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_c$. Význam Γ_D, Γ_F je vysvětlen níže v textu této kapitoly. Na části povrchu Γ_c předpokládáme kontakt. Dále předpokládáme překážku \mathcal{S} , která představuje absolutně tuhé těleso. Dále předpokládáme, že se budeme zabývat časově nezávislým dějem. Deformace a posun materiálového bodu probíhají dle teorie uvedené v kapitole 4. Předpokládejme polohu bodu v nedeformovaných (referenčních) souřadnicích, kterou označme $x = (x_i)$, bod v deformovaných (aktuálních) souřadnicích označme $y = (y_i)$. Vektor posunutí bodu x z referenční polohy do aktuální polohy označme $u = (u_i)$. Pro tyto předpoklady platí, že

$$\begin{aligned} u_i &= y_i - x_i, \\ y_i &= x_i + u_i, \end{aligned} \tag{112}$$

pro $i = 1, \dots, n$. Představu ilustruje obrázek 2 :



Obrázek 2: Ilustrace kontaktu těles

Představme si, že se těleso Ω pohybuje ve směru y_3 směrem k překážce \mathcal{S} se kterou

předpokládáme kontakt, viz obrázek 2. Poloha překážky \mathcal{S} je dána předpisem

$$y = \psi(y_i). \quad (113)$$

Kde ψ je funkce poloha překážky \mathcal{S} . Zabýváme se dále polohou bodů x na Γ_c , která je dána předpisem

$$x = \Phi(x_i). \quad (114)$$

Kde Φ je funkce polohy bodů $x \in \Gamma_c$. O funkcích ψ a Φ předpokládáme, že jsou hladké a spojitě. Dále předpokládáme že body $x \in \Gamma_c$ neproniknou povrchem překážky \mathcal{S} , a tedy musí platit nerovnost

$$\psi(y_i) \geq \Phi(x_i). \quad (115)$$

Dojde-li ke kontaktu, dostanou se body $x \in \Gamma_c$ do deformovaných souřadnic. Jejich poloha pak odpovídá předpisu

$$y = x_i + u_i(x_i, \Phi(x_i)), \quad (116)$$

zde jsme využili předpisu (112) pro deformovanou polohu částice a dosadili polohu bodu x na Γ_c , které odpovídá předpis (114). Dále sestavme z podmínky (115) kinematickou podmínku kontaktu tak, že platí nerovnost

$$y \geq x + u. \quad (117)$$

Do nerovnosti (117) dosadíme na levou stranu z (113), na pravou stranu dosadíme (114) a pro $i = 1, \dots, n$ obdržíme nerovnost

$$\psi(x_i + u_i(x_i, \Phi(x_i))) \geq \Phi(x_i) + u_i(x_i, \Phi(x_i)). \quad (118)$$

Obdrželi jsme podmínku vztaženou k nedeformovaným (referenčním) souřadnicím, která je nelineární. Pro vyjádření podmínky (118) vztažené k deformovaným souřadnicím zavedme inverzní funkci χ , která je dána předpisem

$$x = \chi(y_i). \quad (119)$$

Podmínku (118) s využitím inverzní funkce χ zapišme ve tvaru

$$\psi(y_i) \geq \hat{\Phi}(y_i) + \hat{u}(y_i), \quad (120)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(y_i) &= \Phi(\chi(y_i)), \\ \hat{u}(y_i) &= u(\chi(y_i), \Phi(\chi(y_i))). \end{aligned} \quad (121)$$

Dále musí platit, že

$$\psi(y_i) = \psi(x_i + u_i). \quad (122)$$

Nyní dejme do vztahu kinematické kontaktní podmínky (118) se stavem napjatosti, který vyvolal kontakt. V kapitole 4.1 jsme uvedli tenzor napětí $\sigma = \sigma(y_i)$, který zde vztahujeme k deformovaným souřadnicím. Nyní předpokládejme, že když body $x \in \Gamma_c$ nejsou v kontaktu s překážkou \mathcal{S} jsou normálové složky tenzoru napětí σ nulové. Nastane-li kontakt bodů $x \in \Gamma_c$ s překážkou \mathcal{S} , předpokládáme že normálové složky tenzoru napětí σ budou mít zápornou hodnotu. Tenzor napětí rozdělíme na Γ_c normálové a na tečné složky, tedy dle

$$\begin{aligned}\sigma_n(y) &= \sigma_{ij}(y)n_i(y)n_j(y), \\ \sigma_\tau(y) &= \sigma_{ij}n_j(y) - \sigma_n(y)n_i(y),\end{aligned}\tag{123}$$

kde σ_n jsou normálové složky tenzoru napětí, σ_τ jsou tangenciální složky tenzoru napětí a $n = (n_i)$ je pro $i = 1, \dots, n$ jednotkový vektor vnější normály k povrchu Γ_c . Kinematické kontaktní podmínky (118) korespondují se stavem napjatosti, pokud jsou splněny následující podmínky na Γ_c

$$\begin{aligned}\sigma_n(y) &= 0 \text{ když } \hat{\Phi}(y_i) + \hat{u}(y_i) < \psi(y_i), \\ \sigma_n(y) &\leq 0 \text{ když } \hat{\Phi}(y_i) + \hat{u}(y_i) = \psi(y_i), \\ \sigma_\tau(y) &= 0.\end{aligned}\tag{124}$$

Uvedené podmínky (124) jsou také nelineární. Jejich linearizací se budeme zabývat v souladu s [1].

Nyní popíšeme linearizaci kinematické kontaktní podmínky (118) a (124) dle [1]. Pro posun bodů v tělese Ω ve smyslu malých přírůstků lze přepsat (118) jako

$$\psi(x_i + u_i(x) + \Delta u_i(x)) \geq \Phi(x_i) + u(x) + \Delta u(x),\tag{125}$$

pro $x = \Phi(x_i) \in \Gamma_c$, $i = 1, \dots, n$. Zde Δu_i je malý přírůstek funkce ψ v $x_i + u_i + \Delta u_i$. Linearizovanou podmínku (125) obdržíme rozvojem funkce ψ v bodě $y_i = x_i + u_i$ dle

$$\psi(y_i + \Delta u_i) \approx \psi(y_i) + \frac{\partial \psi(y_i)}{\partial y_i} \Delta u_i(x),\tag{126}$$

pro $x = \Phi(x_i) \in \Gamma_c$, $i = 1, \dots, n$. Dle [1] obdržíme úpravou podmínku

$$N(x + u(x))\Delta u(x) \leq G(x, u),\tag{127}$$

pro $x = \Phi(x_i) \in \Gamma_c$, $i = 1, \dots, n$, zde $N_i = N(y_i)$ je vnější jednotkový normálový vektor k povrchu překážky \mathcal{S} . Funkce $G(x, u) = (\psi(x_i + u_i(x)))$ reprezentuje mezeru mezi povrchem Γ_c a povrchem překážky \mathcal{S} . Podmínka (127) musí korespondovat s (124). Podmínka (127) je vztažena k povrchu překážky \mathcal{S} . Abychom ji vztáhli k povrchu Γ_c nahradíme vektor N_i vektorem n a funkci G nahradíme funkcí g dle [1], obdržíme systém rovnic kontaktních podmínek v referenčních souřadnicích

$$\begin{aligned}u_n(x) - g(x) &\leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \\ \sigma_\tau(x) &= 0, \\ \sigma_n(x) &\leq 0, \\ \sigma_n(x)(u_n(x) - g(x)) &= 0.\end{aligned}\tag{128}$$

Kde $u_n(x) = u(x)n_i$ je pole posunutí bodů ve směru jednotkového vektoru vnější normály n_i k povrchu Γ_c . Počáteční mezeru mezi povrchem Γ_c a překážkou \mathcal{S} reprezentuje funkce $g(x)$.

Nyní sestavme formulaci problému s kontaktem v souladu s publikací [1]. Hranici $\Gamma = \partial\Omega$ rozdělme na části, na kterých předepíšeme okrajové podmínky, tedy $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_c$. Část hranice s aplikovaným vektorem vnějších sil označme Γ_F , oblast hranice kde uvažujeme

pevnou vazbu označme Γ_D viz kapitola 4.5 Oblast hranice, na které uvažujeme kontakt s překážkou \mathcal{S} , jsme označili Γ_C .

Systém rovnic, který formuluje problém kontaktu, obsahuje rovnice (91), (92), (93) z kapitoly 4.4 a okrajové podmínky kontaktu (128) obdržíme systém rovnic

$$\begin{aligned}
1) \quad & -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) = f_i \quad \text{v } \Omega \\
2) \quad & u_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_D \\
3) \quad & \sigma_{ij}(u)n_j = t_i \quad \text{na } \Gamma_F \\
4) \quad & (u_n - g)\sigma_n(u) = 0 \quad \text{na } \Gamma_c \\
5) \quad & (u_n - g) \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_c \\
6) \quad & \sigma_n(u) \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_c \\
7) \quad & \sigma_\tau(u) = 0 \quad \text{na } \Gamma_c
\end{aligned} \tag{129}$$

Mnějme prostor $V \in H^1(\Omega)$ a podprostor přípustných posunutí $K \subset V$, který je definovaný, tak že platí $K = \{v \in V \mid v_n - g \leq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$. Víme, že pole napětí $\sigma_{ij}(u)$ odpovídá řešení u , tenzor malé deformace $e_{ij}(v - u)$ je produkován přemístěním materiálové částice $v - u$. Hledejme řešení $u \in K$ problému (129) tak, že rovnici 1) vynásobíme testovací funkcí $v - u$ a integrujeme přes oblast Ω , tím obdržíme

$$\int_{\Omega} -\frac{\sigma_{ij}(u)}{x_j}(v_i - u_i)dx = \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i)dx. \tag{130}$$

Následující postup je analogický s postupem uvedeným v kapitole 4.5, kterým obdržíme

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{(v_i - u_i)}{x_j}dx = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i)ds - \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i)dx. \tag{131}$$

Vyřešíme okrajové podmínky, že na integrál přes hranici oblasti Ω aplikujeme okrajové podmínky z (129) a tedy integrál rozepíšeme jako

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i)ds = \int_{\Gamma_D} \sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i)ds + \int_{\Gamma_F} t_i(v_i - u_i)ds + \int_{\Gamma_C} \sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i)ds. \tag{132}$$

Zde integrál přes hranici Γ_D je nulový, Dále se zabýváme integrálem pře hranici Γ_c . Užijeme vztahy (123) a dle [1] platí

$$\sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i) = \sigma_n(u)(v_n - u_n), \tag{133}$$

kde $v_n = v_in_i$, $u_n = u_in_i$. Pokračujme tak, že

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i) &= \sigma_n(u)(v_n - u_n + g - g), \\
\sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i) &= -\sigma_n(u)(u_n - g) + \sigma_n(u)(v_n - g).
\end{aligned} \tag{134}$$

Zde platí, že člen $\sigma_n(u)(u_n - g) = 0$ dle okrajové podmínky na Γ_c . A tedy platí, že

$$\sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i) \geq 0. \tag{135}$$

Slabou formulaci problému s kontaktem (129) lze vyjádřit tak, že hledáme $u \in K$ a platí

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)e_{ij}(v_i - u_i)dx \geq \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i)dx + \int_{\Gamma_F} t_i(v_i - u_i)ds. \tag{136}$$

Slabou formulaci problému s kontaktem lze vyjádřit jako variační nerovnost prvního druhu (44).

5.2 Zjednodušené problémy

V této části uvedme zjednodušený Signoriniho problém, viz [4], a problém s překážkou, viz [6]. Jmenované problémy představují základní variační formulaci problému kontaktu těles.

5.2.1 Zjednodušený Signoriniho problém

Na základě následující věty (viz [4]) je formulován zjednodušený Signoriniho problém.

Věta 5. *Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $a : H \times H$ je bilineární forma, L je lineární forma na H a K je konvexní kužel v H s vrcholem v 0 . Pak každé řešení problému*

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad (137)$$

je také řešením

$$\begin{aligned} a(u, v) &\geq L(v), \\ a(u, u) &= L(u). \end{aligned} \quad (138)$$

Každé řešení (138) je také řešením (137).

Mějme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hladkou hranicí Γ . Uvažujme problém: hledáme $u \in K$ tak, že

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ \gamma u &\geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq g \quad \text{na } \Gamma, \\ \gamma u \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) &= 0 \quad \text{na } \Gamma. \end{aligned} \quad (139)$$

Podmonožina přípustných posuvů K je definována tak, že $K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ na } \Gamma\}$ a platí $K \subset V$. Násobením (139) testovací funkcí $v \in K$ a užitím (31) obdržíme variační formulaci

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \quad \forall v \in K. \quad (140)$$

Zde označme formu a jako

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx. \quad (141)$$

Formu L označme jako

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} \gamma g v d\Gamma. \quad (142)$$

Variační rovnost (140) užitím okrajových podmínek (139) převedeme na variační nerovnost (44). Problém (139) je ekvivalentní problému variační nerovnosti prvního druhu (44), důkaz viz [4].

5.2.2 Problém s překážkou

Předpokládejme problém takový, že hledáme rovnovážnou polohu membrány, která je pevně vetknutá na svých hranicích, a vlivem působení vnější síly dojde k její deformaci. Oblast membrány označme Ω a její hranici Γ . Deformovaná membrána přijde do kontaktu s překážkou, například s pevnou deskou. Problém představuje princip hledání minima celkové energie. Deformace membrány je reprezentována řešením u , kde u je minimizér celkové energie. Hledáme $u \in K$ tak, že

$$E(u) = \inf\{E(v)|v \in K\}. \quad (143)$$

Zde je energetický funkcionál $E(v)$ formulovaný jako

$$E(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(|\nabla v|^2 - fv)dx. \quad (144)$$

Zde $K = \{v \in H_0^1(\Omega)|v \geq 0 \text{ na } \Omega\}$ je množina přípustných posuvů. Polohu překážky definujeme funkci ψ pro kterou platí, že $\psi \leq 0$ na hranici Γ . Hledání minima celkové energie (143) je ekvivalentní problému variační nerovnosti prvního druhu (44). Hledáme $u \in K$ tak, že

$$\begin{aligned} -\Delta u - f &\geq 0 && \text{v } \Omega \\ u - \psi &\geq 0 && \text{v } \Omega \\ (u - \psi)(-\Delta u - f) &= 0 && \text{v } \Omega \end{aligned} \quad (145)$$

Zde je překážka označena symbolem $\psi \in H^1(\Omega)$, pro kterou platí, že $\psi \leq 0$ na hranici Γ a $f \in L^2(\Omega)$. Podmnožina přípustných posuvů K je definována tak, že $K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \text{ v } \Omega\}$ a platí $K \subset V$. Potom je variační formulace problému(145) dle [6]: hledáme $u \in K$ tak, že

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u)dx \geq \int_{\Omega} f(v - u)dx \quad \forall v \in K. \quad (146)$$

Variační nerovnost (146) je ekvivalentní minimalizaci kvadratického energetického funkcionálu na konvexní množině, viz [6].

5.3 Numerická řešení variační nerovnosti prvního druhu

Cílem této kapitoly je představit iterační metody numerického řešení problému variační nerovnosti prvního druhu (44). Pro tento účel představme projekční metodu a penalizační metodu, viz [4]. Nejedná se zdaleka o jediné metody, viz například [6], [4], [3].

5.3.1 Projekční metoda

V této části představme projekční metodu. Tato metoda vychází z důkazu existence problému variační nerovnosti prvního druhu (44) uvedeného v kapitole 3 nebo v [4]. Pro počáteční $u_0 \in V$ hledáme $u_{n+1} \in V$ pro $n \geq 0$ použitím algoritmu

$$u^{n+1} = P_K(u^n - \rho(Au^n - l)). \quad (147)$$

Kde $\rho > 0$ je konstanta, P_K je projekční operátor $P_K : V \rightarrow K$ a $l \in V$ je lineární forma. Pro konstantu ρ platí, že když je $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{\|A\|^2})$ pak je projekční operátor P_K kontraktivní a $u_n \rightarrow u$ je silná konvergence v prostoru V . Projekční metoda má své omezení. Například nemůže být použita když $K \neq V$. Pro příklad uveďme algoritmus gradient-projekce, které vychází z (147) viz [4]. Pro počáteční $u_0 \in V$ hledáme $u_{n+1} \in V$ pro $n \geq 0$ použitím algoritmu

$$u^{n+1} = P_K(u^n - \rho(J'(u^n))), \quad (148)$$

kde $J'(u)$ je Gateauxova derivace funkcionálu J v u , a platí $J'(u) = Au - l$ když je bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ symetrická.

5.3.2 Penalizační metoda

Cílem penalizační metody je, převést problém variační nerovnosti na nelineární variační rovnost tím, že přidáme penalizační člen. Za tím to účel předpokládejme, že platí předpoklady uvedené v kapitole 3.2. Problém variační nerovnosti prvního druhu (44) formulujeme tak, že hledáme $u \in K$ tak, že

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (149)$$

pokud je forma $a(\cdot, \cdot)$ symetrická je problém (149) ekvivalentní hledání minima funkcionálu tak, že hledáme $u \in K$ a platí

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K. \quad (150)$$

Zavedme nový funkcionál $J_\epsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ a hledejme jeho minimum $u_\epsilon \in K$ tak, že platí

$$J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(v) \quad \forall v \in K, \quad (151)$$

kde

$$J_\epsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\epsilon}j(v), \quad (152)$$

zde funkcionál $J(v)$ je uvedený v kapitole 3.4 vztahem (65). V rovnici (152) vystupuje penalizační parametr $\epsilon > 0$ a funkcionál $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ je nějaký funkcionál splňující

$$\begin{aligned} j(v) &= 0 \Leftrightarrow v \in K, \\ j(v) &\geq 0 \quad v \in V. \end{aligned} \quad (153)$$

V rovnici (152) označíme jako penalizační funkcionál j_ϵ , přidaný člen $\frac{1}{\epsilon}j(v)$, nebo-li

$$j_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}j. \quad (154)$$

Formulujme penalizovaný problém (44) jako nelineární variační rovnost tak, že hledáme $u_\epsilon \in V$ a platí

$$a(u_\epsilon, v) + \langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v \rangle = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (155)$$

kde $\langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v \rangle = dj_\epsilon(u_\epsilon, v)$ je derivace funkcionálu j_ϵ v bodě u_ϵ ve směru v , symbolem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označujeme dualitu mezi prostory V^* a V .

Posloupnost řešení $\{u_\epsilon\}$ penalizačního problému konverguje k řešení $u \in K$, když $\epsilon \rightarrow 0$, pokud jsou splněny předpoklady pro V , K , $a(\cdot, \cdot)$, $L(\cdot)$ uvedené v kapitole 3.2, a předpoklady pro funkcionál $j(\cdot)$ uvedené v té samé kapitole, viz [4]. Tuto část o konvergenci lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - u\| &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\epsilon(u_\epsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (156)$$

Důkaz limitního vyjádření (156) je uveden viz [4].

5.3.3 Aplikace penalizační metody

V dalším textu se budeme zabývat aplikací penalizační metody uvedené v předchozí kapitole 5.3.2. Použijeme Newtonovu iterační metodu tečen. V rovnici (155) je nelineární člen vyjádřený jako $\langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v \rangle$, který nahradíme přibližným linearizovaným funkcionálem tak, že platí

$$\langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v \rangle \approx g_\epsilon(u_\epsilon^{k+1}) \in \mathbb{R}^n. \quad (157)$$

Linearizovaný člen rozepíšeme jako

$$g_\epsilon(u_\epsilon^{k+1}) = g_\epsilon(u_\epsilon^k) + g'_\epsilon(u_\epsilon^k)(u_\epsilon^{k+1} - u_\epsilon^k), \quad (158)$$

zde funkci $g_\epsilon(u_\epsilon^k)$ rozumíme jako

$$g_\epsilon(u_\epsilon^k) = \frac{1}{\epsilon}((u_\epsilon^k)^-)^2, \quad (159)$$

derivaci funkce rozumíme jako

$$g'_\epsilon(u_\epsilon^k) = \frac{2}{\epsilon}((u_\epsilon^k)^-)((u_\epsilon^k)^-). \quad (160)$$

Zde ϵ je penalizační parametr, hodnotu v bodě u_ϵ^k rozumíme jako

$$u_\epsilon = (\mathcal{S} - u). \quad (161)$$

Uvedené vztahy (158), (159), (160) a (161) dosadíme do variační rovnice (155). Vyjádříme u_ϵ^{k+1} jako

$$u_\epsilon^{k+1} = (\mathbb{A}_\epsilon)^{-1}(b - g_\epsilon(u_\epsilon^k)), \quad (162)$$

kde $k = 1, \dots, N$ je počet iterací.

6 Numerické výsledky

V této kapitole jsou uvedeny výsledky numerického řešení modelových problémů lineární elasticity s kontaktem. Výsledky jsou získané metodou konečných prvků užitím námi vyvinutého kódu v programu Octave na oblasti $\Omega = (0, 10) \times (0, 1)$. Oblast a její triangulace jsou generovány programem GMSH.

6.1 Příklad č.1

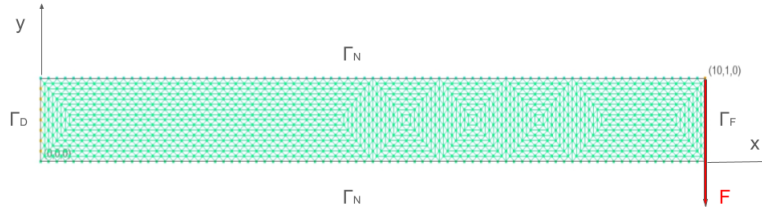
V této podkapitole je uveden příklad č. 1. Mějme oblast $\Omega = (0, 10) \times (0, 1)$, která reprezentuje model vetknutého nosníku. Na této oblasti jsou generovány sítě, které obsahují množství trojúhelníkových elementů označené *tri*. Toto množství je uvedeno v tabulce 1:

	Počet elementů		
tri	640	2560	10240

Tabulka 1: Počet elementů oblasti Ω příkladu č.1

Okrajové podmínky, které reprezentují vetknutí a působení vnějšího zatížení jsou uvedeny v (163) a na obrázku 3. Řešme tedy úlohu lineární elasticity (91) bez uvažovaného kontaktu nosníku s překážkou. Okrajové podmínky jsou předepsané dle (163), a jsou reprezentované symboly Γ_D , Γ_N , Γ_F viz obrázek 3.

$$\begin{aligned}
 u_i &= 0 \text{ [mm]} & \text{na } \Gamma_D, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_N, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= (0, -50) \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_F.
 \end{aligned} \tag{163}$$

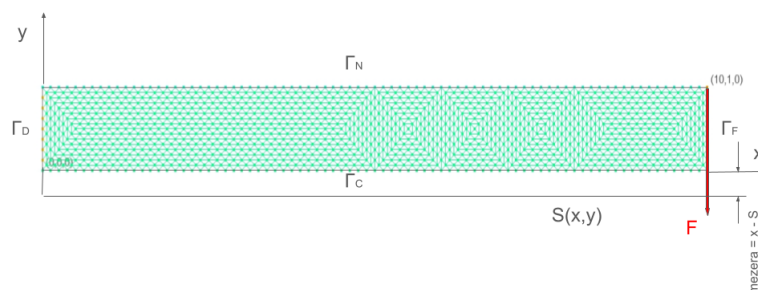


Obrázek 3: Oblast Ω pro příklad č.1 vetknutého nosníku.

Nyní řešme ten samý problém s uvažovaným kontaktem (129).

$$\begin{aligned}
 u_i &= 0 \text{ [mm]} & \text{na } \Gamma_D, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_N, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= (0, -50) \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_F, \\
 (u - \mathcal{S}(x, y))\sigma_n(u) &= 0 & \text{na } \Gamma_c, \text{ pro } x \in [0, 10], y = -0.15, \\
 (u - \mathcal{S}(x, y)) &\leq 0 & \text{na } \Gamma_c \text{ pro } x \in [0, 10], y = -0.15, \\
 \sigma_n(u) &\leq 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_c, \\
 \sigma_\tau(u) &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] & \text{na } \Gamma_c.
 \end{aligned} \tag{164}$$

Okrajové podmínky jsou předepsané dle (164). Zde $\mathcal{S} = \mathcal{S}(x, y)$ je překážka se kterou předpokládáme kontakt hranice Γ_c . Z toho důvodu je označena celá spodní hranice jako místo předpokládaného kontaktu, viz obrázek 4:



Obrázek 4: Oblast Ω pro příklad č.1 vetknutého nosníku s kontaktem.

Fyzikální parametry modelu:

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ \nu &= 0.3. \end{aligned} \tag{165}$$

Zde konstanta E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonova konstanta. Pomocí těchto konstant určíme Lamého konstanty λ a μ viz (90).

6.2 Příklad č.2

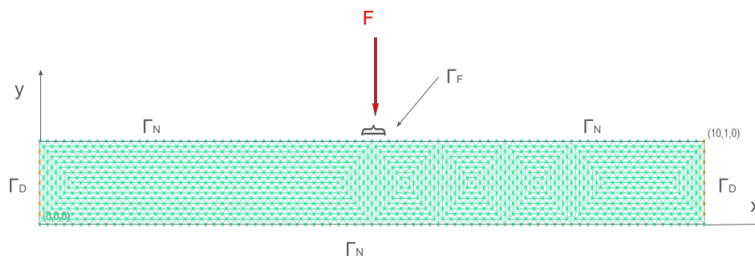
V této kapitole je uveden příklad č.2. Mějme oblast $\Omega = (0, 10) \times (0, 1)$, která reprezentuje model vetknutého nosníku. V tomto příkladu je nosník vetknutý na pravé a levé hranici viz obrázek 5. Na oblasti Ω jsou generovány sítě množstvím trjúhelníkových elementů, Toto množství je označeno *tri* a je uvedeno v tabulce 2:

	Počet elementů		
tri	496	1984	7936

Tabulka 2: Počet elementů oblasti Ω příkladu č.2

Řešme tedy úlohu lineární elasticity (91) bez uvažovaného kontaktu. Okrajové podmínky jsou předepsány dle (166), a jsou reprezentované symboly Γ_D , Γ_N , Γ_F , viz obrázek 5.

$$\begin{aligned}
 u_i &= 0 \text{ [mm]} && \text{na } \Gamma_D \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_N \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= (0, -250) \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_N.
 \end{aligned} \tag{166}$$

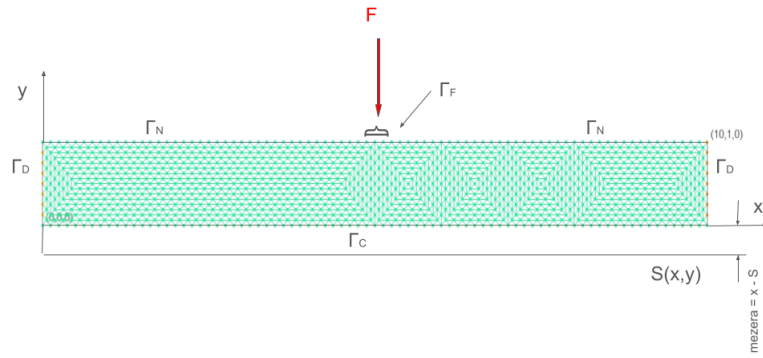


Obrázek 5: Oblast Ω pro příklad č.2 vetknutého nosníku.

Nyní řešme ten samý problém s uvažovaným kontaktem (129).

$$\begin{aligned}
 u_i &= 0 \text{ [mm]} && \text{na } \Gamma_D, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_N, \\
 \sigma_{ij}(u)n_j &= (0, -250) \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_F, \\
 (u - \mathcal{S}(x, y))\sigma_n(u) &= 0 && \text{na } \Gamma_c, \text{ pro } x \in [0, 10], y = -0.05, \\
 (u - \mathcal{S}(x, y)) &\leq 0 && \text{na } \Gamma_c \text{ pro } x \in [0, 10], y = -0.05, \\
 \sigma_n(u) &\leq 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_c, \\
 \sigma_\tau(u) &= 0 \text{ [N} \cdot \text{mm}^{-2}] && \text{na } \Gamma_c.
 \end{aligned} \tag{167}$$

Okrajové podmínky jsou předepsané dle (167). Zde $\mathcal{S} = \mathcal{S}(x, y)$ je překážka se kterou předpokládáme kontakt hranice Γ_c . Z toho důvodu je označena celá spodní hranice jako místo předpokládaného kontaktu, viz obrázek 6.



Obrázek 6: Oblast Ω pro příklad č.2 vetknutého nosníku s kontaktem.

Fyzikální vlastnosti modelu:

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ \nu &= 0.3. \end{aligned} \tag{168}$$

Zde je provedena změna fyzikálních vlastností proti předchozímu modelu.

6.3 Numerické řešení modelových úloh

V této části je uveden způsob vyhodnocení chyby numerického výpočtu, a numerické výsledky příkladu č. 1, viz podkapitola 6.1 a příkladu č. 2, viz podkapitola 6.2.

V první části numerického výpočtu je užita slabá formulace problému lineární elasticity, a metody konečných prvků k sestavení matice tuhosti \mathbb{A} , a vektoru zatížení b . Tím je dosaženo dle kapitoly 4.5, soustavy rovnic

$$\mathbb{A}u = b. \quad (169)$$

Přesnost numerického řešení u problému odhadneme z hodnoty řešení v zvoleném bodě $u(A)$ maximálního průhybu. Chybu numerického řešení označme E_h , kterou vypočítáme na síti s počtem elementů h a s parametrem zjemnění v hodnotě 4 jako

$$E_h = u(A)_h - u(A)_{h/4} = Ch^n \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right), \quad (170)$$

zde $h/4$ označuje počet elementů $4h$, konstanta $C > 0$ je neznámá chybová konstanta. Obdobně chybu $E_{h/4}$ vypočítáme jako

$$E_{h/4} = u(A)_{h/4} - u(A)_{h/16} = C\left(\frac{1}{4}\right)^n h^n \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right). \quad (171)$$

Odhad chyby vyjádříme jako poměr (170) a (171)

$$\frac{E_h}{E_{h/4}} = 4^n. \quad (172)$$

Zde n je počet numerických výpočtů.

Dalším parametrem pro vyhodnocení přesnosti numerického řešení je najít takové řešení u problému (169), aby součet složek rezidií byl minimální, tady tak aby platilo

$$u \in \arg \min \|\mathbb{A}u - b\|, \quad (173)$$

kde reziduum r je

$$r = \mathbb{A}u - b. \quad (174)$$

Součet složek reziduí pro n rozumíme jako

$$\|r\|^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (175)$$

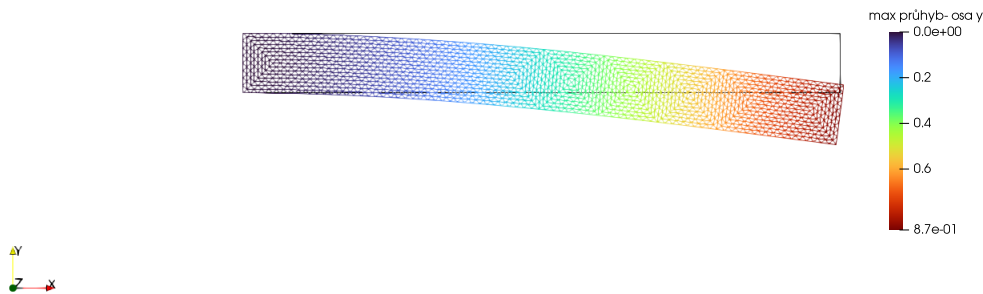
Tento postup je zvolený z toho důvodu, že neznáme přesné řešení a tedy nejsme schopni přesně určit chybu numerického výpočtu.

Dále je uvedeno numerické řešení příkladu č. 1, viz pod. kap. 6.1. Numerické řešení u soustavy (102) s předepsanými okrajovými podmínkami dle (163), reprezentuje posuvy ve vrcholech triangulece ve směru x a ve směru y . Numerické výsledky maximálního průhybu v bodě $u(A)$, rezidua a odhad chyby jsou shrnuty v tabulce 3, grafický výstup, viz obrázek 7.

počet elementů	max-průhyb	rezidua	odhad chyby
640	-0,8385	$6,057 \cdot 10^{-19}$	0,024068
2560	-0,8681	$2,544 \cdot 10^{-18}$	0,0060169
10240	-0,8762	$9,43 \cdot 10^{-18}$	0,0015042

Tabulka 3: Numerické výsledky příkladu č.1

Součet reziduí dle (175) uvedených v tabulce 3 je $\sum_{i=1}^n r_i^2 = 1,25 \cdot 10^{-17}$ pro $i = 1, 2, 3$.



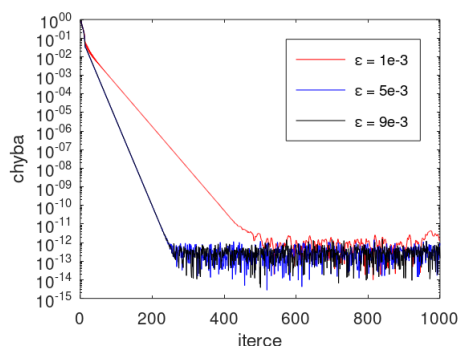
Obrázek 7: Deformace oblasti Ω pro příklad č.1 vetknutého nosníku.

Dále je uveden příklad č.1 s kontaktem viz 6.1 a obrázek 4. Problém (129) s předepsanými okrajovými podmínkami (164) převedeme dle kapitoly 5.3.2 a 5.3.3 na soustavu rovnic (162) kterou řešíme iterační Newtonovou metodou. Zde je sledována konvergence numerického řešení u_ϵ příkladu č.1 viz obr. 4 pro 10^3 iterací a penalizační parametr s hodnotami $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 9 \cdot 10^{-3}$. Naším cílem je ověřit, že řešení u_ϵ konverguje při zmenšování penalizačního parametru ϵ dle kapitoly 5.3.2, a porovnat vzájemně dvě sítě s rozdílným počtem elementů. Výsledky konvergence numerického řešení u_ϵ pro $tri = 640$ elementů, viz obrázek 8.

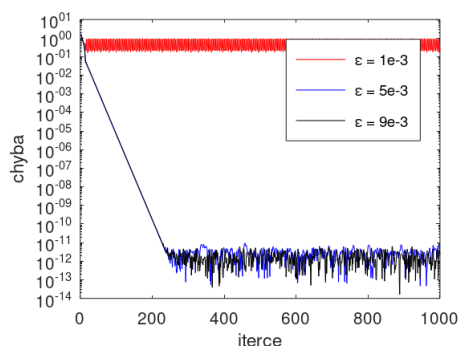
Zvýšením počtu elementů na $tri = 2560$, jsou řešení nepoužitelná pro hodnoty penalizačního parametru $\epsilon < 5 \cdot 10^{-3}$ viz obrázek 9.

Zmenšením penalizačního parametru ϵ na hodnoty $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 32 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$ a pro $tri = 2560$ elementů, je dosaženo koknvergence, viz obrázek 10.

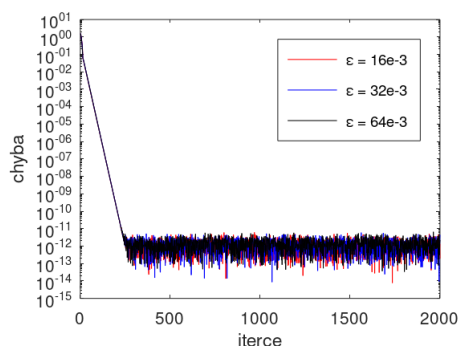
Zvýšením počtu elementů na $tri = 10240$ jsou řešení nepoužitelná pro hodnoty penalizačního parametru $\epsilon < 5 \cdot 10^{-9}$. Výsledky numerického řešení konvergují s penalizačním parametrem ϵ pro hodnoty $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 32 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$, viz obrázek 11.



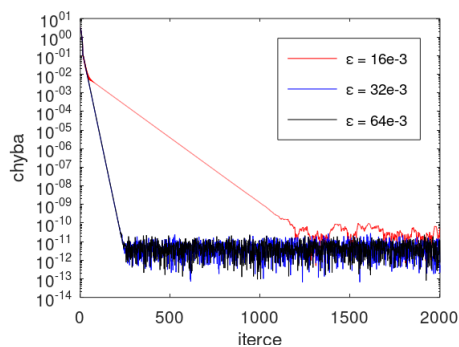
Obrázek 8: Konvergence num. řeš. u_ϵ s počtem elementů $tri = 640$.



Obrázek 9: Konvergence num. řeš. u_ϵ s počtem elementů $tri = 2560$.



Obrázek 10: Konvergence num. řeš. u_ϵ s počtem elementů $tri = 2560$.



Obrázek 11: Konvergence num. řeš. u_ϵ s počtem elementů $tri = 10240$.

Hodnota penalizačního parametru se pohybuje v řádu 10^{-3} . Z obrázků 10 a 11 si lze všimnout, že zvýšením počtu elementů při $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$ dojde ke snížení rychlosti konvergence. Uvedené výsledky ukazují, že při snižování hodnoty ϵ , řešení u_ϵ konverguje, viz [4] nebo kapitola 5.3.2.

Dále je uvedena poloha (poloha maximálního průhybu y_{min}) v bodě $u_\epsilon(A)$, pro počet elementů $tri = 2560$, $tri = 10240$. Penalizační parametr je v hodnotách $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 32 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$. Jde o hodnotu na které se řešení $u_\epsilon(A)$ ustálilo v iteračním cyklu. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 4:

ϵ/tri	2560	10240
$16 \cdot 10^{-3}$	-0,1769	-0,1637
$32 \cdot 10^{-3}$	-0,1885	-0,1696
$64 \cdot 10^{-3}$	-0,2047	-0,1780

Tabulka 4: Penalizovaná poloha y_{min} v bodě $u_\epsilon(A)$ pro příklad č.1 vetknutého neosníku.

Maximální průhyb v bodě $u_\epsilon(A)$ během iteračního cyklu osciluje kolem výsledné hodnoty uvedené v tabulce 4, viz obrázek 17 pro $tri = 2560$, pro $tri = 10240$, viz obrázek 18. Hodnota rozdílu v bodě $u_\epsilon(A)$ a polohy překážky označená jako y_{zbytek} dána vztahem

$$y_{zbytek} = \mathcal{S}(0, -0.15) - u_\epsilon(A_x, A_y), \quad (176)$$

který udává polohu bodu $u_\epsilon(A)$ pod překážkou \mathcal{S} , viz tabulka 5:

ϵ/tri	2560	10240
$16 \cdot 10^{-3}$	0,026941	0,013708
$32 \cdot 10^{-3}$	0,038512	0,019623
$64 \cdot 10^{-3}$	0,054710	0,028012

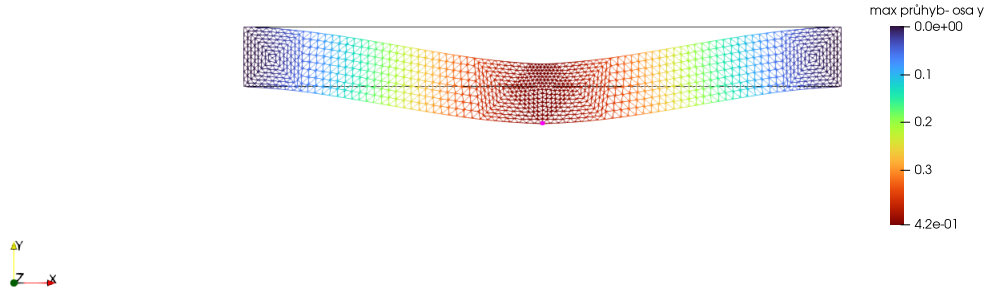
Tabulka 5: Vyčíslení hodnot y_{zbytek} pro příklad č.1

Nyní je uvedeno numerické řešení příkladu č.2 viz pod. kap. 6.2 v podobném smyslu jako u příkladu č. 1. Stejným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme numerické výsledky soustavy (102) shrnuté v tabulce 6.

počet elementů	max-průhyb	rezidua	odhad chyby
496	-0,3927	$1,410 \cdot 10^{-21}$	0,012133
1984	-0,4102	$7,111 \cdot 10^{-21}$	0,0030331
7936	-0,4154	$2,592 \cdot 10^{-20}$	0,0075829

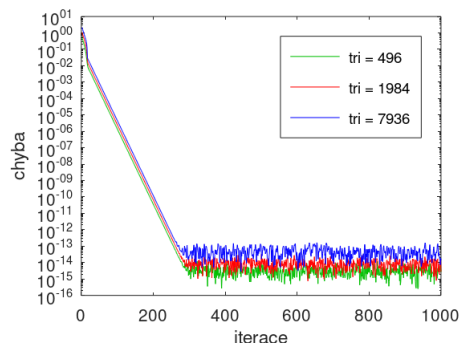
Tabulka 6: Numerické výsledky příkladu č.2

Součet reziduí dle (175) uvedených v tabulce 6 je $\sum_{i=1}^n r_i^2 = 3,444 \cdot 10^{-20}$ pro $i = 1, 2, 3$.



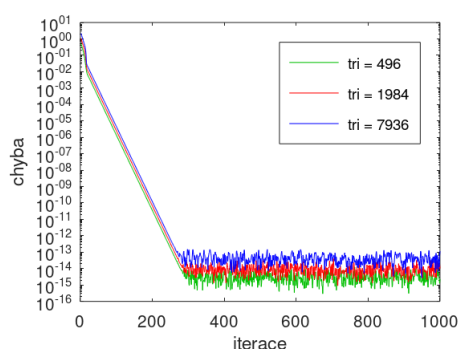
Obrázek 12: Deformace oblasti Ω pro příklad č.2 vetknutého nosníku.

Dále je uveden příklad č. 2 s kontaktem, viz 6.2 a obrázek 6. Problém (129) s předepsanými okrajovými podmínkami (167) převedeme dle kapitoly 5.3.2 a 5.3.3 na soustavu rovnic (162), kterou řešíme iterační Newtonovou metodou. Zde je sledována konvergence numerického řešení u_ϵ příkladu č. 2, viz obr. 6 pro 10^3 iterací a penalizační parametr pro hodnoty $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$. Naším cílem je ověřit, že řešení u_ϵ konverguje při zmenšování penalizačního parametru ϵ dle kapitoly 5.3.2, a porovnat vzájemně tři sítě s rozdílným počtem elementů. Zde je zvolená odlišná prezentace výsledků. Výsledky konvergence řešení u_ϵ pro sítě s počtem elementů tri dle tabulky 2 a pro penalizační parametr $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$, viz obrázek 13:



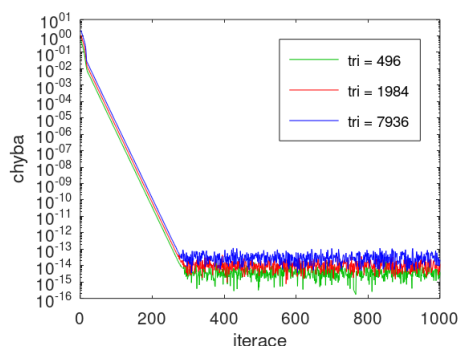
Obrázek 13: Konvergence num. řeš. u_ϵ pro $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$.

Výsledky konvergence řešení u_ϵ , pro penalizační parametr $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$, viz obrázek 14:



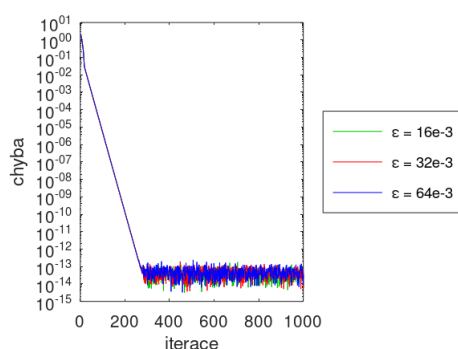
Obrázek 14: Konvergence num. řeš. u_ϵ pro $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$.

Výsledky konvergence řešení u_ϵ , pro penalizační parametr $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$, viz obrázek 15:



Obrázek 15: Konvergence num. řeš. u_ϵ pro $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Konvergence numerického řešení pro zadané parametry $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 32 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$ na síti s počtem elementů $tri = 7936$ elementů, viz obrázek 16:



Obrázek 16: Konvergence num. řeš. u_ϵ s počtem elementů $tri = 7936$.

Uvedené výsledky potvrzují, že řešení u_ϵ konverguje při zmenšování penalizačního parametru, viz [4].

Dále je uvedena poloha (poloha maximálního průhybu y_{min}) v bodě $u_\epsilon(A)$, pro počet elementů $tri = 496$, $tri = 1984$ a $tri = 7936$ penalizační parametr v hodnotách $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$,

$\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$. Jde o hodnotu, na které se řešení $u_\epsilon(A)$ ustálilo v iteračním cyklu. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 7.

ϵ/tri	496	1984	7936
$4 \cdot 10^{-3}$	-0,081207	-0,065801	-0,057935
$6 \cdot 10^{-3}$	-0,088342	-0,069519	-0,059734
$8 \cdot 10^{-3}$	-0,094257	-0,072679	-0,061269

Tabulka 7: Penalizovaná poloha y_{min} v bodě $u_\epsilon(A)$ pro příklad č.2 vetknutého neosníku.

Maximální průhyb v bodě $u_\epsilon(A)$ během iteračního cyklu osciluje kolem výsledné hodnoty uvedené v tabulce 7, viz obrázek 19 pro $tri = 496$, pro $tri = 1984$, viz obrázek 20 a pro $tri = 7936$, viz obrázek 21 .

Hodnota rozdílu v bodě $u_\epsilon(A)$ a polohy překážky označená jako y_{zbytek} dána vztahem

$$y_{zbytek} = \mathcal{S}(0, -0.05) - u_\epsilon(A_x, A_y), \quad (177)$$

,viz tabulka 8: Poloha bodu $u_\epsilon(A)$ pro zvolený penalizační parametr $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon =$

ϵ/tri	496	1984	7936
$4 \cdot 10^{-3}$	0,031207	0,015801	0,007935
$6 \cdot 10^{-3}$	0,038342	0,046519	0,009734
$8 \cdot 10^{-3}$	0,044257	0,022679	0,011269

Tabulka 8: Vyčíslení hodnot y_{zbytek} pro příklad č.2.

$32 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$ na síti $tri = 7936$ elementů, viz tabulka 9:

ϵ/tri	7936
$16 \cdot 10^{-3}$	-0,066098
$32 \cdot 10^{-3}$	-0,073089
$64 \cdot 10^{-3}$	-0,083015

Tabulka 9: Penalizovaná poloha y_{min} v bodě $u_\epsilon(A)$ pro příklad č.2 vetknutého neosníku pro $tri = 7936$ elementů.

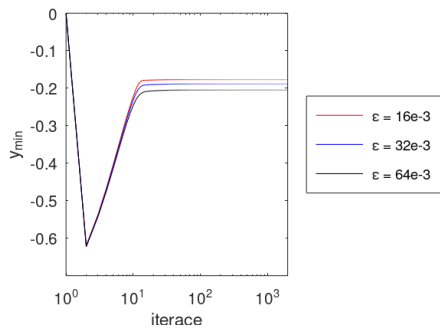
Maximální průhyb v bodě $u_\epsilon(A)$ během iteračního cyklu osciluje kolem výsledné hodnoty uvedené v tabulce 9, viz obrázek 22 pro $tri = 7936$. Hodnoty bodu $u_\epsilon(A)$ pod překážkou dle (177), viz tabulka 10:

	7936
$16 \cdot 10^{-3}$	0,016098
$32 \cdot 10^{-3}$	0,023089
$64 \cdot 10^{-3}$	0,033015

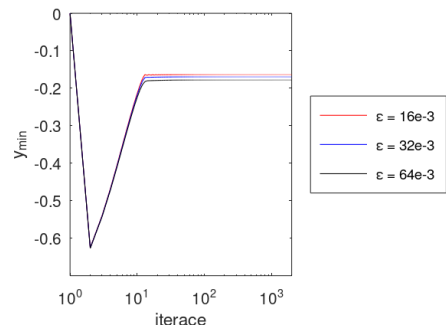
Tabulka 10: Vyčíslení hodnot y_{zbytek} pro příklad č.2 pro $tri = 7936$ počet elementů.

Z výsledků pro příklad č. 1, viz tabulka 4, je vidět že zvyšování počtu elementů sítě je spojené s zmenšováním hodnoty v bodě $u_\epsilon(A)$ (s průhybem nosníku). Snižování hodnoty penalizačního parametru ϵ hodnotu v bodě $u_\epsilon(A)$ zvyšuje. Hodnota y_{zbytek} se v závislosti na zvyšování počtu elementů numerické sítě snižuje, viz tabulka 5. Stejný trend závislosti hodnoty v bodě $u_\epsilon(A)$ na počtu elementů numerické sítě platí pro příklad č. 2, viz tabulka 7, tabulka 8, tabulka 9 a tabulka 10.

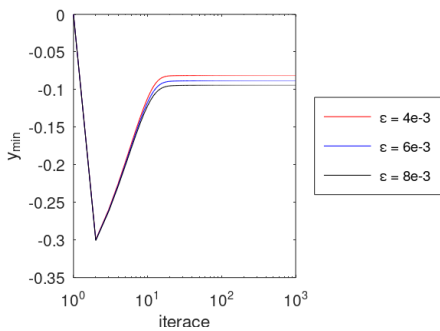
6.4 Grafické výstupy



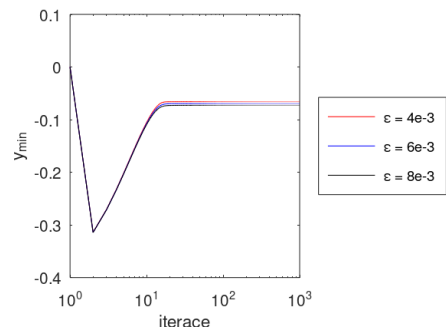
Obrázek 17: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 2560$ elementů pro příklad č.1.



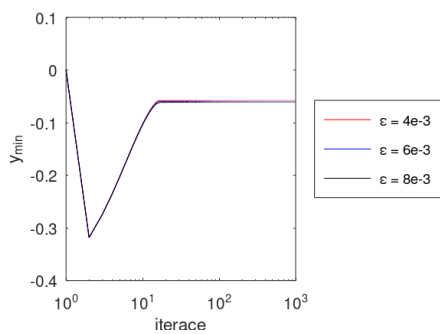
Obrázek 18: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 10240$ elementů pro příklad č.1.



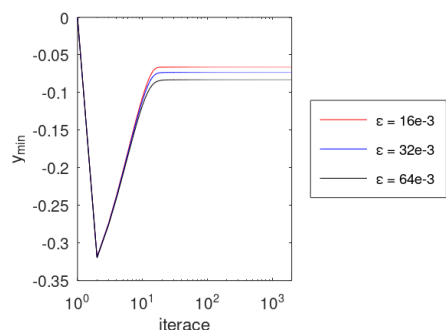
Obrázek 19: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 496$ elementů pro příklad č.2.



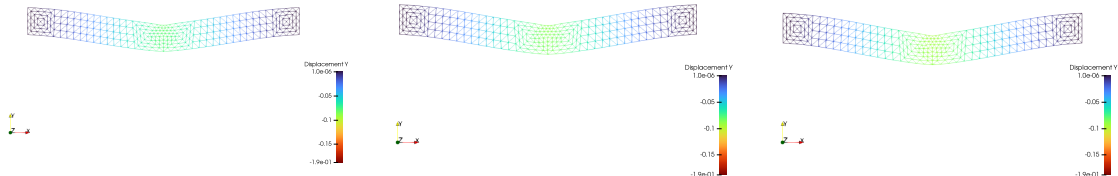
Obrázek 20: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 1984$ elementů pro příklad č.2.



Obrázek 21: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 7936$ elementů pro příklad č.2.

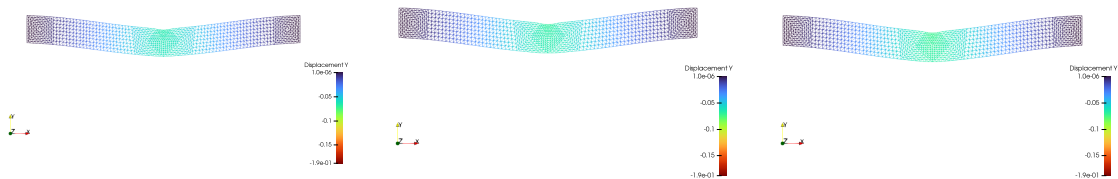


Obrázek 22: Konvergence v bodě $u_\epsilon(A)$ pro $\text{tri} = 7936$ elementů pro příklad č.2.



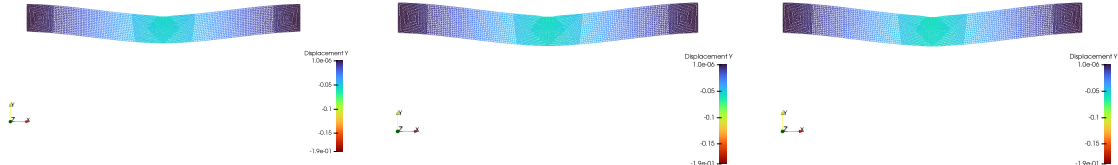
Obrázek 23: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 24: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 25: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Obrázek 26: Deformace oblasti Ω pro příklad č.2 s kontaktem vetknutého nosníku pro $tri = 496$ elementů.



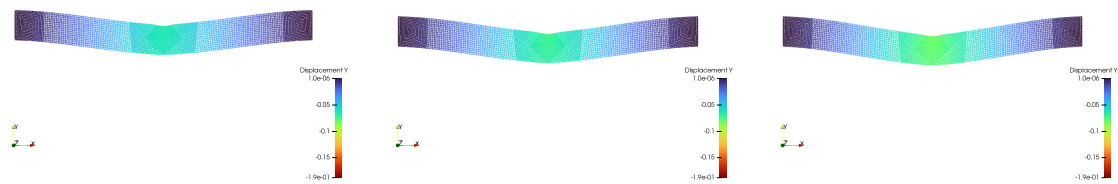
Obrázek 27: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 28: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 29: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Obrázek 30: Deformace oblasti Ω pro příklad č.2 s kontaktem vetknutého nosníku pro $tri = 1984$ elementů.



Obrázek 31: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 32: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 6 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 33: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Obrázek 34: Deformace oblasti Ω pro příklad č.2 s kontaktem vetknutého nosníku pro $tri = 7936$ elementů.



Obrázek 35: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 16 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 36: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 32 \cdot 10^{-3}$. Obrázek 37: Pro penali-zační parametr $\epsilon = 64 \cdot 10^{-3}$.

Obrázek 38: Deformace oblasti Ω pro příklad č.2 s kontaktem vetknutého nosníku pro $tri = 7936$ elementů.

7 Závěr

V této práci je uvedena matematická formulace problému s kontaktem a její numerické řešení na příkladech vetknutého nosníku, viz kapitoly 6.1 a 6.2. Matematická formulace příkladů je sestavena na základě teorie eliptické variační nerovnosti, lineární elasticity a deformace. Problém lineární elasticity s okrajovými podmínkami vede na lineární PDR, která přechází na variační nerovnost. Dojde k tomu tak, že jsou předepsány okrajové podmínky omezující pole posuvů u , které je řešením problému lineární elasticity.

Variační nerovnost nelze řešit přímo. Z tohoto důvodu jsou v této práci uvedeny dvě metody řešení variační nerovnosti. První z uvedených metod je projekční metoda. Tato metoda vychází z důkazu existence řešení variační nerovnosti viz kapitola 3.3. Jako druhou metodu jsme v kapitole 5.3.2 uvedli penalizační metodu, která je také zvolena pro numerické řešení. Metoda je založena na myšlence přidání penalizačního funkcionálu, pomocí kterého převedeme problém na soustavu nelineárních rovnic.

Postup numerického výpočtu je takový, že je vyřešen problém lineární elasticity bez uvažovaného kontaktu. Poté je řešen problém s uvažovaným kontaktem jako soustava nelineárních rovnic. Uvedené výsledky ukazují, že numerické řešení konverguje při zmenšování penalizačního parametru, což splňuje předpoklad, viz [4].

Reference

- [1] Kikuchi, N. and Oden, J. T. *Contact Problems in Elasticity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 10.1137/1.9781611970845, 1988.
- [2] Capatina, A. *Variational Inequalities and Frictional Contact Problems*. Springer, ISBN 978-3-319-10163-7, 2014.
- [3] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. *An introduction to Variational inequalities and their applications*. Academic press, ISBN 0-89871-466-4 , 1980.
- [4] Glowinski, R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-662-12615-8, 1984.
- [5] Lions, J.L. and Stampacchia, G. *Variational Inequalities*. Comm. Pure Appl. Math, 20:493-519, 1967.
- [6] Atkinson, K. and Han, W. *Theoretical Numerical Analysis*. Springer-Verlog, New York, Heidelberg, Berlin ISBN 0-387-95142-3, 2000.
- [7] Roudrigues, J.F. *Obstacle Problem in Mathematical Physic*. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam ISBN 0-444-70187-7, 1987.
- [8] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. *Mechanika kontinua*. Praha-Academia ISBN 978-80-200-2039-0, 2011.
- [9] Macura, M. *Úvod do analitické mechaniky a mechaniky kontinua*. Nakladatelství VU-TIUM ISBN 978-80-214-3944-3, 2010.
- [10] Babuška, I., Ciarlet, G.P., Miyoshi, T. *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics*. Springer-Verlog, New York, Heidelberg, Berlin ISBN 3-540-42399-0, 2002.
- [11] Wriggers, P. *Computational Contact Mechanics*. Springer, New York, Heidelberg, Berlin ISBN 978-3-540-32608-3, 2006.
- [12] Rektorys, K. *Variační metody v Inženýrských Problémech a v Problémech Matematické Fyziky*. Acadenia, 2. vydání, Praha ISBN , 1999.
- [13] Brenner, S. C., Ridgway, L. S.. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg ISBN 0-387-94193-2 , 1996.
- [14] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg ISBN 0-387-98307-4 , 1997.
- [15] Fořt, J., Kozel, K., Neustupa, J., *Matematika pro mechaniku*. Nakladatelství ČVUT Praha ISBN 80-01-03125, 2005.
- [16] Sváček, P., Feistauer, M., *Metoda konečných prvků*. Nakladatelství ČVUT Praha ISBN 80-01-03522, 2006.

- [17] Noor, M. A., Noor, K. I., Bnouchachem, A., *Some new Iterative Methods for Solving Variational Inequalities*. *Canad. J. Appl. Math.* 2(2020), no. 2,1-17 Prior Science Publishing: <http://www.prior-sci-pub.com> .
- [18] Quarteroni, A., Sacco, R., Bnouchachem, A., Saleri, F., *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg ISBN 0-387-98959-5 , 2000.
- [19] Kračmar, S., Neustupa, J., *Modeling of Flows Through a Channel by The Navier-Stokes Variational Inequalities*. Czech Technical University in Prague 61(SI):89-98, 2001.