



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Výpočet optického toku pomocí optimalizačních metod s vazbami danými parciálními diferenciálními rovnicemi

Evaluation of the optical flow based on optimization methods with constraints given by partial differential equations

Bakalářská práce

Autor: **Marie Boráková**
Vedoucí práce: **doc. Ing. Tomáš Oberhuber, Ph.D.**
Konzultant: **Ing. Aleš Wodecki, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Marie Boráková
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní specializace:	Matematická informatika
Název práce (česky):	Výpočet optického toku pomocí optimalizačních metod s vazbami danými parciálními diferenciálními rovnicemi
Název práce (anglicky):	Evaluation of the optical flow based on optimization methods with constraints given by partial differential equations

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se se základními metodami pro výpočet optického toku.
- 2) Prostudujte základ optimalizačních metod s vazbami danými pomocí parciálních diferenciálních rovnic, odvoďte adjungovanou rovnici pro výpočet optického toku.
- 3) Proveďte implementaci numerického řešiče pro výslednou úlohu.
- 4) Proveďte výpočetní studii a porovnejte získané výsledky s jinými metodami pro výpočet optického toku.

Doporučená literatura:

- 1) G. Aubert, P. Kornprobst, Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer, 2006.
- 2) K. Škardová, T. Oberhuber, J. Tintěra, R. Chabiniok, Signed-Distance Function Based Non-Rigid Registration of Image Series with Varying Image Intensity. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 2021, 1145-1160.
- 3) K. Chen, D. A. Lorenz, Image Sequence Interpolation Based on Optical Flow, Segmentation, and Optimal Control. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 1020-1030.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Oberhuber, Ph.D.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, Trojanova 339/13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Ing. Aleš Wodecki

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, Trojanova 339/13, 120 00 Praha 2

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

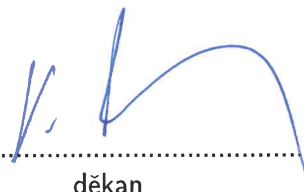


.....
garant oboru



.....
vedoucí katedry





.....
děkan

Poděkování:

Chtěla bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Ing. Tomášovi Oberhuberovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a uvedla jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 5. srpna 2024

Marie Boráková

Název práce:

Výpočet optického toku pomocí optimalizačních metod s vazbami danými parciálními diferenciálními rovnicemi

Autor: Marie Boráková

Studijní program: Matematické inženýrství

Specializace: Matematická informatika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Tomáš Oberhuber, Ph.D., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, Trojanova 339/13, 120 00 Praha 2, katedra matematiky

Konzultant: Ing. Aleš Wodecki, Ph.D., Fakulta elektrotechnická, ČVUT v Praze, Karlovo náměstí 13, 120 00 Praha 2, centrum umělé inteligence

Abstrakt: K výpočtu optického toku lze přistupovat různými způsoby. V této práci optický tok určíme s využitím parciálních diferenciálních rovnic. Mnohé metody řeší tento problém pouze pro dvojici snímků z dané sekvence najednou. My představíme metodu, která hledá rychlostní pole na celé sekvenci zároveň. Optický tok určíme metodou gradientního sestupu, v níž minimalizujeme rozdíl mezi napočítanou a naměřenou světelnou intenzitou daného bodu na snímku. Byl proveden pokus o implementování řešiče v programovacím jazyce C++ a dále byla provedena výpočetní studie výsledků.

Klíčová slova: optický tok, optimalizace, parciální diferenciální rovnice

Title:

Evaluation of the optical flow based on optimization methods with constraints given by partial differential equations

Author: Marie Boráková

Abstract: There are many ways to compute optical flow. In this text we evaluate optical flow using partial differential equations. Many methods solve the problem using only two images at a time. We introduce a method which computes the optical flow on the whole sequence of images. The introduced approach evaluates the optical flow using gradient descent, in which the difference between the computed and the given light intensity of a point on the image sequence is minimized. An attempt was made to implement a program using the C++ programming language and the calculations of this solver were analyzed.

Key words: optical flow, optimization, partial differential equations

Obsah

Úvod	7
1 Optický tok	8
1.1 Omezení z předpokladu zachování intenzity	8
2 Metody výpočtu optického toku	10
2.1 Metoda Horna a Schuncka	10
2.2 Metoda Lucase a Kanadeho	12
3 Metoda gradientního sestupu	14
3.1 Optimalizační metoda	14
3.2 Úloha	15
3.3 Metoda gradientního sestupu	16
3.4 Primární úloha	16
3.4.1 Vstupní data	17
3.5 Adjungovaná úloha	17
4 Numerický výpočet metody gradientního sestupu	20
4.1 Diskretizace snímků	20
4.2 Upwind schéma	21
4.2.1 Advekční rovnice	21
4.2.2 Metoda upwind pro jednorozměrnou advekční rovnici	22
4.2.3 CFL podmínka	22
4.3 Primární úloha	23
4.4 Adjungovaná úloha	23
4.5 Aktualizace rychlostního pole	24
4.5.1 Tichonova regularizace	25
4.6 Indexy	25
5 Výpočetní studie	26
5.1 Popis kódu	26
5.2 Výpočty	27
5.2.1 Počáteční podmínky	27
5.2.2 Aktualizace odhadu toku pomocí gradientu funkcionálu	28
5.2.3 Aktualizace odhadu toku pomocí gradientu funkcionálu s Tichonovou regularizací	33
Závěr	38

Úvod

V současnosti jsou k předávání informací o dané scéně nejčastěji využívány sekvence snímků. Například v lékařském oboru jsou mnohé nástroje založeny na zpracování snímků a další práci s výstupy toho zpracování [1]. Je proto potřeba umět snímky analyzovat.

K problému zpracování snímků můžeme přistupovat různými způsoby. V této práci se zaměříme na informaci o pohybu na scéně, respektive o zdánlivém pohybu bodů na jednom či více objektech, který vzniká z relativního pohybu objektu a pozorovatele [2], [3].

K získání informací o pohybu objektu budeme hledat *optický tok*, tedy pohyb intenzit bodů na sekvenci snímků, které zachycují pohyb na scéně.

Znalost optického toku lze aplikovat na široké spektrum problémů, například navigaci [4], segmentaci videí [5], odhad posunu objektu pouze z jednoho snímku [6], sledování pohybu buněk, například červených krvinek, v lidském těle [7], a mnoho dalšího.

Pokusy o určení optického toku probíhají už pár desítek let, bylo představeno a vyzkoušeno mnoho metod, které toto vektorové pole počítají. Asi nejznámější z nich jsou metoda Horna a Schuncka [2] a metoda Lucase a Kanadeho [8], jež optický tok počítají s pomocí diferenciálních rovnic.

V této bakalářské práci uvedeme metodu, která optický tok určuje na celé posloupnosti obrazů s omezeními danými parciálními diferenciálními derivacemi. Úlohu následně budeme diskretizovat a zkusíme implementovat ve formě řešiče v programovacím jazyce C++. Nakonec zanalyzujeme výstupy programu.

Kapitola 1

Optický tok

Optický tok je vektorové pole, které znázorňuje zdánlivý pohyb objektů na scéně [2], respektive pohyb bodů s různou světelnou intenzitou na každém snímku ze sekvence obrazů. Podle Horna a Schuncka může toto rychlostní pole vzniknout z „relativního pohybu objektů a pozorovatele“, „může podat důležité informace o prostorovém uspořádání pozorovaných objektů a míru změny tohoto uspořádání“ [2].

Abychom mohli pohyb daného objektu pozorovat a naměřit, definujeme funkci *světelné intenzity* na snímku [1]–[3], [9]–[11]

$$I : \Omega \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle, \quad (1.1)$$

tedy funkci, která popisuje světelnou intenzitu daného bodu $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ na konkrétním snímku ze sekvence v konkrétním čase $t \in (0, T)$. Množina Ω značí množinu všech bodů na daném snímku. Platí $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Pro zjednodušení výpočtu optického toku je potřeba zavést určitá omezení. Jeden předpoklad, s nímž se setkáme u všech metod výpočtu představených v této práci, je *předpoklad zachování intenzity* [2], [11], tedy že platí následující vztah:

$$I(x, y, t) = I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t), \quad (1.2)$$

kde $I(x, y, t)$ značí danou intenzitu v bodu (x, y) v čase t a $I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t)$ představuje intenzitu v bodu, který se posunul o δx ve směru osy x a o δy ve směru osy y v čase δt . Tento předpoklad nám říká, že každý bod na snímku si při svém pohybu zachovává svou intenzitu, to znamená, že například osvětlení na znázorněné scéně se nemění [2].

1.1 Omezení z předpokladu zachování intenzity

Předpokládejme, že máme posloupnost snímků s pohybujícím se objektem. Zkoumáme pohyb konkrétního bodu $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ z množiny bodů $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, kde Ω obsahuje všechny body jednoho konkrétního snímku ze sekvence. Je-li $I(\mathbf{x}(t), t)$ světelná intenzita bodu $\mathbf{x}(t)$ na snímku v čase $t \in \langle 0, T \rangle$, předpokládáme, že

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{x}(t), t) = 0, \quad (1.3)$$

tedy že intenzita bodu je během jeho pohybu na sekvenci snímků konstantní [2].

Rozepíšeme derivaci na levé straně rovnice:

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Dále podle [2] necht'

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$I_y = \frac{\partial I}{\partial y}, \quad (1.6)$$

$$I_t = \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (1.7)$$

a

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \quad a_2 = \frac{dy}{dt}, \quad (1.8)$$

pak získáme následující rovnici:

$$I_x a_1 + I_y a_2 + I_t = 0. \quad (1.9)$$

Přepsáním rovnice do následujícího tvaru získáme *rovnici gradientního omezení* [1]–[3], [9]–[11]:

$$\nabla I(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{a} + I_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.10)$$

kde $I_t(\mathbf{x}, t)$ značí parciální derivaci funkce $I(\mathbf{x}, t)$ podle t , $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ je *optický tok*, tedy vektor, jehož složky hledáme, $\nabla I(\mathbf{x}, t) = (I_x(\mathbf{x}, t), I_y(\mathbf{x}, t))$ je prostorový gradient funkce $I(\mathbf{x}, t)$ a $\nabla I \cdot \mathbf{a}$ je skalární součin.

Pokud výraz upravíme do tvaru

$$(I_x, I_y) \cdot \mathbf{a} = -I_t, \quad (1.11)$$

můžeme podle [12] vidět, že složky nemohou být nezávisle vypočítány, pokud je I_t rovno nule, tedy pokud je (I_x, I_y) kolmé na \mathbf{a} , protože bychom měli pouze jednu rovnici pro dvě neznámé [1]. Tento fakt je v anglické literatuře označován jako *aperture problem* a je způsoben nedostatečným omezením optického toku [2], samotné gradientní omezení tedy k výpočtu toku nestačí. V následující kapitole uvidíme, že řešení optického toku spočívá ve zvolení vhodného předpokladu, z něž vyplyne omezení na tok, díky němuž jej bude možné jednoznačně určit.

Kapitola 2

Metody výpočtu optického toku

V této kapitole si představíme dvě z nejznámějších metod výpočtu optického toku, a sice metodu Horna a Schuncka a metodu Lucase a Kanadeho.

Pro výpočet klademe na optický tok dvě omezení. První omezení je odvozené z předpokladu zachování intenzity. Druhé omezení je pro každou diferenční metodu různé.

2.1 Metoda Horna a Schuncka

Tato metoda počítá optický tok pro každý pixel na snímku (tedy k problému přistupuje globálně). Podrobněji je postup popsán B. K. P. Hornem a B. G. Schunckem v [2].

Mějme snímek a na něm pixel $\mathbf{x} = (x, y)$ s intenzitou $I(\mathbf{x}, t)$. Chceme vypočítat optický tok tohoto pixelu. Abychom jej mohli vypočítat, potřebujeme určitá omezení na optický tok. Jedno omezení (1.10) jsme si již zavedli, potřebujeme ještě druhé.

Za tímto účelem budeme předpokládat, že všechny pixely v okolí pixelu ω se budou pohybovat s podobnou rychlostí, tedy že „*rychlostní pole intenzit pixelů v tomto okolí se mění hladce skoro všude*“ [2]. Toto pozorování se shoduje se zkušenostmi s pohybem objektů nebo jejich deformacemi - tato podmínka je v mnoha případech přirozeně dodržena.

Druhé omezení na optický tok tedy definujeme podle [2] jako minimum následujících výrazů:

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)^2, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)^2, \quad (2.2)$$

kde a_1, a_2 značí složky optického toku a $\frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_1}{\partial y}, \frac{\partial a_2}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial y}$ jsou složky prostorového gradientu optického toku.

Abychom mohli vypočítat optický tok, musíme nejprve odhadnout derivace intenzity pomocí diskrétní množiny dostupných naměřených hodnot [2]. Horn a Schunck navrhnou tyto odhady:

$$\begin{aligned} I_x &\approx \frac{1}{4}(I_{i+1,j,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k+1}), \\ I_y &\approx \frac{1}{4}(I_{i,j+1,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j,k+1}), \\ I_t &\approx \frac{1}{4}(I_{i,j,k+1} - I_{i,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i+1,j,k} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j+1,k}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

příčemž

$$I_{i,j,k} = I(i, j, k), \quad (2.4)$$

kde index i označuje x-ovou složku uzlu daného snímku, j y-ovou složku uzlu a k je pořadí snímku. Význam i a j je zde oproti [2] prohozen.

Každá parciální derivace intenzity I je tedy odhadnuta osmi naměřenými hodnotami I .

Nyní chceme minimalizovat chybu danou dvěma omezeními [2], [9], [10]:

$$E^2 = \int_{\Omega} (\alpha^2 E_c^2 + E_b^2) d\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

kde $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$, E_b značí chybu v rovnici gradientního omezení:

$$E_b = I_x a_1 + I_y a_2 + I_t, \quad (2.6)$$

E_c je chyba v podmínce hladkosti optického toku:

$$E_c^2 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial y} \right)^2 \quad (2.7)$$

a α^2 značí váhový parametr, který určuje vliv členu s podmínkou hladkosti [10].

Pro nalezení minima použijeme podle [2] variační počet, tak získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} I_x^2 a_1 + I_x I_y a_2 &= \alpha^2 \nabla^2 a_1 - I_x I_t, \\ I_x I_y a_1 + I_y^2 a_2 &= \alpha^2 \nabla^2 a_2 - I_y I_t, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde $\nabla^2 a_1$, $\nabla^2 a_2$ je značení pro Laplacián optického toku, přesněji

$$\begin{aligned} \nabla^2 a_1 &= \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}, \\ \nabla^2 a_2 &= \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Laplacián v soustavě nahradíme následujícím odhadem podle [2]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 a_1 &\approx \kappa (\bar{a}_{1;i,j,k} - a_{1;i,j,k}), \\ \nabla^2 a_2 &\approx \kappa (\bar{a}_{2;i,j,k} - a_{2;i,j,k}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde lokální průměry \bar{a}_1 a \bar{a}_2 jsou

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{1}{6} (a_{1;i-1,j,k} + a_{1;i,j+1,k} + a_{1;i+1,j,k} + a_{1;i,j-1,k}) + \frac{1}{12} (a_{1;i-1,j-1,k} + a_{1;i-1,j+1,k} + a_{1;i+1,j+1,k} + a_{1;i+1,j-1,k}), \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{6} (a_{2;i-1,j,k} + a_{2;i,j+1,k} + a_{2;i+1,j,k} + a_{2;i,j-1,k}) + \frac{1}{12} (a_{2;i-1,j-1,k} + a_{2;i-1,j+1,k} + a_{2;i+1,j+1,k} + a_{2;i+1,j-1,k}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde

$$a_{1;i,j,k} = a_1(i, j, k), \quad (2.12)$$

$$a_{2;i,j,k} = a_2(i, j, k), \quad (2.13)$$

indexy i, j opět korespondují se složkami bodu na ose x, y, k značí postup v čase.

Po nahrazení Laplaciánu a_1 a a_2 podle (2.10) a úpravách získáme následující soustavu [2]:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)a_1 &= (\alpha^2 + I_y^2)\bar{a}_1 - I_x I_y \bar{a}_2 - I_x I_t, \\(\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)a_2 &= -I_x I_y \bar{a}_1 + (\alpha^2 + I_x^2)\bar{a}_2 - I_y I_t.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Soustavu rovnic pak řešíme iterativně pomocí Gauss-Seidelovy metody [2], [9], [10]:

$$\begin{aligned}a_1^{n+1} &= a_1^n - \frac{I_x(I_x \bar{a}_1^n + I_y \bar{a}_2^n + I_t)}{(\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)}, \\a_2^{n+1} &= a_2^n - \frac{I_y(I_x \bar{a}_1^n + I_y \bar{a}_2^n + I_t)}{(\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)},\end{aligned}\tag{2.15}$$

kde n označuje n -tou iteraci metody.

2.2 Metoda Lucase a Kanadeho

Další metoda pro výpočet optického toku je metoda Lucase a Kanadeho. V [8] je tato metoda popsána pro registraci snímků. V této sekci popíšeme její aplikaci pro výpočet optického toku podle [3] a [11].

Opět pracujeme s gradientním omezením (1.10). Jako druhou podmínku na optický tok si vezmeme předpoklad, že optický tok $(a_1, a_2)^T$ je *konstantní* pro všechny body v *okolí* daného bodu $\mathbf{x} = (x, y)$. Gradientní omezení tedy lze zapsat následujícím systémem rovnic [3]:

$$\begin{aligned}I_x(\mathbf{z}_1, t)a_1 + I_y(\mathbf{z}_1, t)a_2 + I(\mathbf{z}_1, t) &= 0, \\I_x(\mathbf{z}_2, t)a_1 + I_y(\mathbf{z}_2, t)a_2 + I(\mathbf{z}_2, t) &= 0, \\&\vdots \\I_x(\mathbf{z}_n, t)a_1 + I_y(\mathbf{z}_n, t)a_2 + I(\mathbf{z}_n, t) &= 0,\end{aligned}\tag{2.16}$$

na $\omega \times \langle 0, T \rangle$, kde ω označuje okolí daného bodu \mathbf{x} , vektory \mathbf{z}_i označují body v okolí ω a $I_x(\mathbf{z}_i, t)$, $I_y(\mathbf{z}_i, t)$, $I(\mathbf{z}_i, t)$ označuje parciální derivace intenzity v bodu \mathbf{z} okolí ω pixelu \mathbf{x} na konkrétním snímku, tedy v konkrétním čase t . Pro jednoduchost budeme psát $I(\mathbf{z})$ místo $I(\mathbf{z}, t)$. Hledáme optický tok, tedy hodnoty a_1, a_2 . Systém lze zapsat i takto:

$$\mathbb{A}\mathbf{a} = \mathbf{b},\tag{2.17}$$

kde \mathbb{A} je matice obsahující složky gradientu intenzity I v každém bodě okolí, optický tok je vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ a pravá strana soustavy rovnic obsahuje časové derivace intenzity I v každém bodu okolí Ω [3]. Tuto soustavu řešíme podle [3] a [11] metodou nejmenších čtverců.

Výsledná soustava pak vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_x^2(\mathbf{z}) & \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_x(\mathbf{z})I_y(\mathbf{z}) \\ \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_x(\mathbf{z})I_y(\mathbf{z}) & \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_y^2(\mathbf{z}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_x(\mathbf{z})I_t(\mathbf{z}) \\ \sum_{\mathbf{z} \in \omega} I_y(\mathbf{z})I_t(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.\tag{2.18}$$

Podle [11] musí být matice \mathbb{A} regulární. Pokud by matice byla singularní, tedy jedno nebo více vlastních čísel ze spektra $\sigma(\mathbb{A})$ by bylo nulové, pak by optický tok v daném místě nebylo možné touto metodou vypočítat [11]. Nulové vlastní číslo ukazuje buď na příliš jednotné okolí, nebo na hranu [11]. Z toho vyplývá, že pro výpočet optického toku pomocí této metody je potřeba takové okolí ω , které obsahuje dostatečně různé hodnoty intenzity.

Abychom metodu zbavili závislosti na vlastnostech intenzity v daném okolí ω , přidáme podle [8]–[10] do soustavy váhovou funkci $W = W(x, y)$, která každému bodu z okolí ω přiděluje váhu podle jeho polohy v okolí ω - pokud je blízko centra okolí, má váhu větší. Soustava tedy po přidání funkce W vypadá následovně:

$$\mathbb{A}^T W \mathbb{A} \mathbf{a} = \mathbb{A}^T W \mathbf{b}, \quad (2.19)$$

s řešením

$$\mathbf{a} = (\mathbb{A}^T W \mathbb{A})^{-1} \mathbb{A}^T W \mathbf{b}. \quad (2.20)$$

Kapitola 3

Metoda gradientního sestupu

V předchozí kapitole jsme popsali různé metody výpočtu optického toku ze sekvence určitého počtu snímků. Metody určovaly tok pouze na základě dvou po sobě jdoucích obrazů nebo pouze pro malé okolí jednoho bodu na sekvenci. V této kapitole bude představen přístup, který lze aplikovat na celou sekvenci snímků.

3.1 Optimalizační metoda

Nejprve si představíme základní matematické pojmy spojené s optimalizačními metodami. Podrobný popis lze najít například v [1].

V této práci se budeme zabývat úlohou hledání minima daného funkcionalu. Obecně lze tuto úlohu zapsat [1]

$$\inf_{x \in X} F(x), \quad (3.1)$$

kde X je Banachův prostor, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Obecně se tato úloha řeší pomocí *přímé metody variačního počtu*, která se podle [1] skládá z následujících kroků:

- Sestrojení posloupnosti $x_n \in X$, pro niž platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \inf_{x \in X} F(x). \quad (3.2)$$

- Pokud je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty, \quad (3.3)$$

lze získat $|x_n|_X \leq C$. Pokud je X reflexivní prostor, pak podle [1] existují $x_0 \in X$ a podposloupnost x_{n_j} takové, že

$$x_{n_j} \xrightarrow{X} x_0. \quad (3.4)$$

- Pokud platí

$$\lim_{x_{n_j} \xrightarrow{X} x_0} F(x_{n_j}) \geq F(x_0), \quad (3.5)$$

pak

$$F(x_0) = \min_{x \in X} F(x), \quad (3.6)$$

minimum je tedy nalezeno.

Pokud je F konvexní, pak řešení u , kde

$$F'(u) = 0, \quad (3.7)$$

je řešení minimalizační úlohy [1]. Naopak, pokud existuje $w \in X'$ takové, že

$$F'(u; v) = w(v) \quad \forall v \in X, \quad (3.8)$$

kde

$$F'(u; v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}, \quad (3.9)$$

a pokud má úloha (3.1) řešení u , pak platí (3.7).

Rovnice (3.7) se nazývá *Eulerova-Lagrangeova rovnice* [1].

Nechť

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

kde $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená množina, $f \in C^1$ vzhledem k (u, ξ) a splňuje podmínky rozvedené v [1]. Pak má Eulerova-Lagrangeova rovnice tvar [1]

$$F'(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u, \nabla u) - \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\mathbf{x}, u, \nabla u) \right), \quad (3.11)$$

Minimalizační úloha s podmínkami danými parciálními diferenciálními rovnicemi je obecně [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \nabla^2 u(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{na } \Omega \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

kde (3.13) je Neumannova okrajová podmínka a (3.14) je počáteční podmínka.

3.2 Úloha

Hledáme odhad optického toku \mathbf{a} , s nímž bude možné rekonstruovat pohyb bodu ve scéně, tedy že rozdíl naměřené intenzity bodu na snímku ze sekvence a jejího odhadu získaného z předchozích výpočtů bude minimální. Řešíme tudíž

$$\min_{\mathbf{a}} \|u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, t)\| \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle, \quad (3.15)$$

kde $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ je bod na snímku, $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ je množina všech bodů na jednom snímku,

$$I: \Omega \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad (3.16)$$

je daná intenzita bodu na obrázku a

$$u: \Omega \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad (3.17)$$

je odhad intenzity bodu, se kterým srovnáváme naměřenou intenzitu I .

Tuto úlohu rozdělíme na následující části:

- výpočet primární úlohy,
- výpočet adjungované úlohy,
- aktualizace odhadu optického toku \mathbf{a}

3.3 Metoda gradientního sestupu

Gradientní sestup (angl. *gradient descent*) je metoda, s níž hledáme minimum účelové funkce $F(\mathbf{x})$ s parametry \mathbf{x} tak, že od složek parametrů \mathbf{x} odečítáme gradient účelové funkce $\nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})$.

Mějme funkci F , která je diferencovatelná na okolí bodu $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$. Podle [13] se nejjednodušeji posuneme z bodu \mathbf{x}^l k nižší hodnotě funkce F v bodu \mathbf{x}^{l+1} , pokud

$$\mathbf{x}^{l+1} = \mathbf{x}^l - \delta_k \nabla F(\mathbf{x}^l), \quad (3.18)$$

kde $\delta_k \in (0, 1)$ je velikost kroku iterace. V našich výpočtech bude platit $\delta_k = \delta \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup 0$.

Při výpočtu optického toku hledáme minimální rozdíl mezi danou a napočítanou hodnotou intenzity bodu na snímku, za použití značení v předchozím odstavci tedy hledáme funkcionál $F(\mathbf{a})$ vyjádřený následovně:

$$F(\mathbf{a}) := \min_{\mathbf{a}} \|u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, t)\|. \quad (3.19)$$

Gradientní sestup tohoto funkcionálu vypadá takto:

$$\mathbf{a}^{l+1} = \mathbf{a}^l - \delta \nabla_{\mathbf{a}} F(\mathbf{a}^l), \quad (3.20)$$

kde \mathbf{a} je rychlostní pole, $\nabla_{\mathbf{a}} F(\mathbf{a}^l)$ je gradient funkcionálu $F(\mathbf{a})$ v l -té iteraci metody gradientního sestupu a $\delta \in (0, 1)$.

3.4 Primární úloha

V primární úloze počítáme odhad intenzity u pomocí odhadu optického toku \mathbf{a} získaného z minulých iterací. Jinými slovy, touto metodou vypočtený optický tok aplikujeme na hodnoty intenzity ze sekvence snímků. V první iteraci metody použijeme počáteční odhad \mathbf{a} , v dalších iteracích používáme již napočítané hodnoty. Úlohu definujeme následovně:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \nabla u = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle, \quad (3.21)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Omega, \quad (3.22)$$

kde (3.21) je *primární rovnice*, (3.22) je počáteční podmínka pro odhad u , $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ je optický tok napočítaný v minulé iteraci metody, $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ je bod na snímku ze sekvence a u je odhad intenzity, který v této rovnici hledáme.

Můžeme vidět, že primární rovnicí je samotná *podmínka gradientního omezení* (1.10).

3.4.1 Vstupní data

Na začátku výpočtu použijeme naměřené hodnoty intenzity, které označíme

$$I(\mathbf{x}, t): \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad (3.23)$$

s počáteční podmínkou

$$I_0(\mathbf{x}) : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle. \quad (3.24)$$

Vstupní data pro naše výpočty jsou popsána v 5. kapitole.

3.5 Adjungovaná úloha

V metodě gradientního sestupu je naším cílem rekonstruovat optický tok, tedy rychlostní pole pohybujícího se objektu na sekvenci snímků. Abychom mohli určit optický tok podle (3.20), potřebujeme znát samotný gradient $\nabla_{\mathbf{a}} F(\mathbf{a})$.

Pro tento účel si uvědomíme, že

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.25)$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ jsou parametry, na nichž optický tok \mathbf{a} závisí. Budeme tedy hledat gradient $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} F$, přesněji jej budeme hledat po složkách, tedy $\frac{\partial F}{\partial \theta_i}$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)$.

Pomocí vypočítané rychlosti spočítáme intenzitu konkrétního bodu na objektu, kterou označíme $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a})$ a porovnááme ji s naměřenou intenzitou toho samého bodu $I(\mathbf{x}, t)$. Rozdíl napočítané a naměřené intenzity se snažíme minimalizovat.

Budeme tedy řešit následující úlohu

$$\min_{\mathbf{a}} \| u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, t) \|_2^2 \quad (3.26)$$

s podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}) \nabla u = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle, \quad (3.27)$$

$$u(\mathbf{x}, 0, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{na } \Omega, \quad (3.28)$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta})$ je odhad optického toku získaný z minulé iterace metody, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)$ značí parametry, na nichž rychlostní pole \mathbf{a} závisí, intenzita $u = u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a})$ je napočítaná pomocí primární rovnice (3.21), tedy intenzita spočítaná pomocí odhadu optického toku z minulé iterace metody, a $I = I(\mathbf{x}, t)$ je naměřená intenzita.

Funkcionál, jehož gradient chceme najít, je tedy

$$\begin{aligned} F(I(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\theta}) &= \int_0^T \| u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, t) \|_2^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \left(\frac{\partial u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a})}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}) \nabla u(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}) \right) d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_{\Omega} \gamma_2 \left(u(\mathbf{x}, 0, \mathbf{a}) - I(\mathbf{x}, 0) \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde γ_1, γ_2 jsou parametry optimalizační úlohy, $\gamma_{1,2} : \Omega \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

Zderivujeme proto funkcionál podle proměnných θ_i

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \int_0^T 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} (u - I) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta_i} u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta_i} \nabla u + \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \nabla u \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \Big|_{t=0} d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

a rozepíšeme druhý integrál

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} &= \int_0^T 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} (u - I) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta_i} u \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta_i} \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \nabla u \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \Big|_{t=0} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

V následující úpravě použijeme *první Greenovu identitu* podle vzorce

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \Delta g \, d\mathbf{x} \quad (3.32)$$

na čtvrtý sčítanec v předchozím výrazu, tedy

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} \mathbf{a} \nabla \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \gamma_1 \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \nabla u \, d\mathbf{x}, \quad (3.33)$$

kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je vnější jednotková normála $\partial\Omega$.

Po aplikování Greenovy identity na čtvrtý sčítanec získáme následující výraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} (2u - 2I) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta_i} u \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial a_1}{\partial \theta_i} \frac{\partial u}{\partial x} \, d\mathbf{x} \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_i} \frac{\partial u}{\partial y} \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} a_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a_1 \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} n_1 \, dS \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} a_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a_2 \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} n_2 \, dS \, dt + \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \Big|_{t=0} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dále upravíme druhý sčítanec pomocí per partes

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} (2u - 2I) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\Omega} \left[\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \right]_0^T \, d\mathbf{x} - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial a_1}{\partial \theta_i} \frac{\partial u}{\partial x} \, d\mathbf{x} \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_i} \frac{\partial u}{\partial y} \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} a_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a_1 \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} n_1 \, dS \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} a_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} a_2 \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} n_2 \, dS \, dt + \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \Big|_{t=0} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nakonec dáme členy dohromady

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \left(2u - 2I - \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} - a_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - a_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \right) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta_i} \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \gamma_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \, dS \, dt + \int_{\Omega} \left[\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \right] \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \Big|_{t=0} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Získáváme výslednou *adjungovanou úlohu*:

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \nabla \gamma_1 = 2u(\mathbf{x}, t) - 2I(\mathbf{x}, t) \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle \quad (3.37)$$

s podmínkami:

$$\gamma_1(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{na } \Omega, \quad (3.38)$$

$$\gamma_1(\mathbf{x}, 0) = \gamma_2(\mathbf{x}, 0) \quad \text{na } \Omega, \quad (3.39)$$

$$\gamma_1 = 0 \quad \text{nebo} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times \langle 0, T \rangle, \quad (3.40)$$

kde γ_1 je parametr optimalizační úlohy, \mathbf{a} je odhad optického toku a u je řešení primární rovnice.

Dále získáváme *adjungovanou rovnici*

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta_i} \nabla u \, dx \, dt. \quad (3.41)$$

Řešením adjungované úlohy dostaneme odhad parametru γ_1 , který pak můžeme dosadit do adjungované rovnice (3.41).

Kapitola 4

Numerický výpočet metody gradientního sestupu

V této kapitole popíšeme diskretizaci metody gradientního sestupu pro numerický výpočet optického toku.

4.1 Diskretizace snímků

Pro numerický výpočet optického toku na sekvenci snímků je nejprve potřeba diskretizovat parciální derivace intenzity $u = u(\mathbf{x}, t)$ a parametru $\gamma_1 = \gamma_1(\mathbf{x}, t)$ podle času a složek vektoru \mathbf{x} , přesněji nahradit je diferencemi. Za tímto účelem si množinu všech pixelů $\Omega \equiv \langle 0, W \rangle \times \langle 0, H \rangle$ na každém snímku rovnoměrně rozdělíme na síť uzlů Ω_h o rozměrech $(W + 1) \times (H + 1)$, kde W je šířka sítě a H je výška sítě. Dále necht' je počet snímků v sekvenci K a celkový čas, během něž sekvence proběhne, je T . Pak $\tau = \frac{T}{K}$ je časový krok mezi snímky k a $k + 1$ ze sekvence, kde $k = 0, \dots, K - 1$. Na této síti Ω_h pak nahradíme derivace u buď *dopřednými diferencemi*:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_x} + O(h_x), \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h_y} + O(h_y), \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} + O(\tau), \quad (4.3)$$

nebo *zpětnými diferencemi*:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h_x} + O(h_x), \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h_y} + O(h_y), \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j,k} \simeq \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}}{\tau} + O(\tau), \quad (4.6)$$

kde

$$u_{i,j}^k = u(ih_x, jh_y, k\tau), \quad (4.7)$$

(ih_x, jh_y) jsou vnitřní uzly sítě Ω_h ,

$$i = 1, \dots, W - 1, \quad (4.8)$$

$$j = 1, \dots, H - 1, \quad (4.9)$$

$$k = 0, \dots, K - 1. \quad (4.10)$$

h_x a h_y jsou prostorové kroky ve směru os x a y :

$$h_x = \frac{1}{W}, \quad (4.11)$$

$$h_y = \frac{1}{H} \quad (4.12)$$

a k je pořadí snímku ze sekvence.

Dopředné a zpětné diference pro γ_1 sestavíme podobně.

4.2 Upwind schéma

Pro řešení primární a adjungované rovnice využijeme schématu typu *upwind*, diskretizační metody pro numerické řešení hyperbolických parciálních derivací.

4.2.1 Advektivní rovnice

Mějme jednorozměrnou *advektivní rovnici* s konstantními koeficienty

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (4.13)$$

kde $f = f(x, t)$ je tok veličiny, jenž se pohybuje konstantní rychlostí a . Tvar této rovnice je odvozen například v [14].

Jednorozměrnou advektivní rovnici můžeme podle [14] řešit dosazením za $f(x, t)$:

$$f(x, t) = f_0(x - at), \quad (4.14)$$

pro rovnici pak platí

$$\frac{\partial f_0(x - at)}{\partial t} + a \frac{\partial f_0(x - at)}{\partial x} = f_0'(x - at)(-a) + a f_0'(x - at) = 0, \quad (4.15)$$

kde $f_0 = f_0(x)$ je počáteční podmínka pro advektivní rovnici, tj.

$$f(x, 0) = f_0(x). \quad (4.16)$$

Výraz $f_0(x - at)$ je tedy řešením advektivní rovnice.

4.2.2 Metoda upwind pro jednorozměrnou advektivní rovnici

Metoda upwind prvního řádu pro rovnici (4.13) má podle [14] tvar

$$f_i^{k+1} = f_i^k - \frac{a\tau}{h}(f_i^k - f_{i-1}^k), \quad (4.17)$$

kde $f_i^k = f(ih, k\tau)$, τ je časový krok, h je prostorový krok a rychlost $a > 0$. Pro zápornou rychlost je tvar metody podobný, zpětnou diferencii v (4.17) však nahradíme dopřednou

$$f_i^{k+1} = f_i^k - \frac{a\tau}{h}(f_{i+1}^k - f_i^k). \quad (4.18)$$

Souhrnný tvar upwind schématu podle [14] je:

$$f_i^{k+1} = f_i^k - \frac{\tau}{h} \left(a^+ (f_i^k - f_{i-1}^k) + a^- (f_{i+1}^k - f_i^k) \right), \quad (4.19)$$

kde

$$a^+ = \max(a, 0), \quad a^- = \min(a, 0). \quad (4.20)$$

V této práci budeme používat následující zápis metody upwind:

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k - a\tau \begin{cases} \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{h} & \text{pro } a < 0, \\ \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{h} & \text{pro } a > 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Směr rychlosti a tedy určuje použití dopředné nebo zpětné diference při nahrazování derivací.

4.2.3 CFL podmínka

Aby upwind schéma bylo stabilní, tedy aby podávalo správné výsledky, je potřeba splnit určitou podmínku, která je odvozena od podmínky *Courant-Friedrich-Lewyho* (CFL) definované v [14]. Tato podmínka pro konvergenci dané metody požaduje, aby všechny vlivné body dané parciální diferenciální rovnice byly obsaženy v diskretizované oblasti, na níž je výpočet prováděn.

V případě advektivní rovnice se tato podmínka týká bodu $x - at$, jelikož platí (4.14) a (4.15). Podle CFL podmínky a [14] pak musí platit

$$\frac{h}{\tau}(x - t) \leq x - at \leq \frac{h}{\tau}(x + t), \quad (4.22)$$

tedy

$$v \equiv \left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1, \quad (4.23)$$

kde v je *Courantovo číslo*.

Pro upwind schéma je CFL podmínka konkrétně [14]:

$$0 \leq \frac{a\tau}{h} \leq 1 \quad \text{pro } a > 0, \quad (4.24)$$

$$-1 \leq \frac{a\tau}{h} \leq 0 \quad \text{pro } a < 0. \quad (4.25)$$

4.3 Primární úloha

Pro primární rovnici, tedy dvourozměrnou advekční rovnici s intenzitou $u = u(\mathbf{x}, t)$ a rychlostí $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, vypadá upwind schéma takto:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - \begin{cases} a_1 \tau \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h_y} & \text{pro } a_1 < 0 \text{ a } a_2 < 0, \\ a_1 \tau \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h_y} & \text{pro } a_1 \geq 0 \text{ a } a_2 < 0, \\ a_1 \tau \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h_y} & \text{pro } a_1 < 0 \text{ a } a_2 \geq 0, \\ a_1 \tau \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h_y} & \text{pro } a_1 \geq 0 \text{ a } a_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

kde $a_1 = a_{1;i,j}^k$, $a_2 = a_{2;i,j}^k$, (ih_x, jh_y) jsou vnitřní body sítě, $i = 1, \dots, W - 1$, $j = 1, \dots, H - 1$, a $k = 0, \dots, K - 1$ jsou pořadí snímků.

Okrajová podmínka je:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k \quad \text{na } \partial\Omega_h, \quad (4.27)$$

počáteční podmínka, tedy počáteční odhad optického toku, je:

$$u_{i,j}^k = I_{i,j}^k \quad \text{na } \Omega_h. \quad (4.28)$$

4.4 Adjungovaná úloha

Tvar schématu upwind pro adjungovanou rovnici je podobný tomu pro primární rovnici, adjungovaná rovnice má však nenulovou pravou stranu:

$$\gamma_{1;i,j}^{k+1} = \gamma_{1;i,j}^k - \begin{cases} a_1 \tau \frac{\gamma_{1;i+1,j}^k - \gamma_{1;i,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{\gamma_{1;i,j+1}^k - \gamma_{1;i,j}^k}{h_y} + 2\tau(I_{i,j}^k - u_{i,j}^k) & \text{pro } a_1 < 0 \text{ a } a_2 < 0, \\ a_1 \tau \frac{\gamma_{1;i,j}^k - \gamma_{1;i-1,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{\gamma_{1;i,j+1}^k - \gamma_{1;i,j}^k}{h_y} + 2\tau(I_{i,j}^k - u_{i,j}^k) & \text{pro } a_1 \geq 0 \text{ a } a_2 < 0, \\ a_1 \tau \frac{\gamma_{1;i+1,j}^k - \gamma_{1;i,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{\gamma_{1;i,j}^k - \gamma_{1;i,j-1}^k}{h_y} + 2\tau(I_{i,j}^k - u_{i,j}^k) & \text{pro } a_1 < 0 \text{ a } a_2 \geq 0, \\ a_1 \tau \frac{\gamma_{1;i,j}^k - \gamma_{1;i-1,j}^k}{h_x} - a_2 \tau \frac{\gamma_{1;i,j}^k - \gamma_{1;i,j-1}^k}{h_y} + 2\tau(I_{i,j}^k - u_{i,j}^k) & \text{pro } a_1 \geq 0 \text{ a } a_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

kde u je řešení primární úlohy, γ_1 je řešení adjungované úlohy, $a_1 = a_{1;i,j}^k$, $a_2 = a_{2;i,j}^k$ jsou složky odhadu optického toku, (ih_x, jh_y) jsou vnitřní body sítě, $i = 1, \dots, W - 1$, $j = 1, \dots, H - 1$, a $k = 0, \dots, K - 1$ jsou pořadí snímků.

Diskrétní počáteční podmínky adjungované úlohy jsou tyto:

$$\gamma_{1;i,j}^k = 0 \quad \text{na } \Omega_h, \quad (4.30)$$

$$\gamma_{1;i,j}^0 = \gamma_{2;i,j}^0 \quad \text{na } \Omega_h, \quad (4.31)$$

okrajová podmínka je:

$$\gamma_{1;i,j}^k = 0 \quad \text{nebo} \quad a_{1;i,j}^k n_{1;i,j}^k + a_{2;i,j}^k n_{2;i,j}^k = 0 \quad (4.32)$$

pro $i = 0 \vee i = W \vee j = 0 \vee j = H$ a pro $k = 0, \dots, K - 1$.

4.5 Aktualizace rychlostního pole

Optický tok diskretizujeme následovně:

$$\mathbf{a}_{ij}^k = \mathbf{a}(ih_x, jh_y, k\tau) = (a_{1;i,j}^k, a_{2;i,j}^k), \quad (4.33)$$

kde (ih_x, jh_y) jsou body na síti Ω_h , k je pořadí snímku.

První složku optického toku lze rozepsat pomocí parametrů θ_i z adjungované úlohy:

$$a_{1;i,j}^k = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^H \sum_{i=1}^W \theta_{1;i,j}^k v_{i,j}^k, \quad (4.34)$$

kde pro $v_{i,j}^k$ platí:

$$v_{i,j}^k(x, y, t) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in (ih_x, (i+1)h_x) \wedge y \in (jh_y, (j+1)h_y) \wedge t \in (k\tau, (k+1)\tau), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.35)$$

Tedy složka $v_{i,j}^k$ je rovna jedné pouze pro pixel (ih_x, jh_y) na snímku k .

Dosazením do adjungované rovnice dostaneme:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta_1} \nabla u \, d\mathbf{x} \, dt \quad (4.36)$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1 v_{i,j}^k \nabla u \, d\mathbf{x} \, dt \quad (4.37)$$

Jelikož pro $v_{i,j}^k$ platí (4.35), získáme následující rovnost:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \int_{jh_y}^{(j+1)h_y} \int_{ih_x}^{(i+1)h_x} \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dt \quad (4.38)$$

Výraz napravo můžeme diskretizovat:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right|_{i,j,k} \simeq \gamma_{1,i,j}^k \frac{u_{i+1,j}^{l;k} - u_{i,j}^{l;k}}{h_x} \quad (4.39)$$

pro parametry pro $a_1(x, y, t)$. Podobný postup provedeme pro $a_2(x, y, t)$.

Takto jsme diskretizovali gradient funkcionálu F . Nyní již máme výraz, jímž aktualizujeme optický tok v každé iteraci metody gradientního sestupu:

$$a_{1;i,j}^{l+1;k} = a_{1;i,j}^{l;k} - \delta \gamma_{1,i,j}^{l;k} \frac{u_{i+1,j}^{l;k} - u_{i,j}^{l;k}}{h_x}, \quad (4.40)$$

$$a_{2;i,j}^{l+1;k} = a_{2;i,j}^{l;k} - \delta \gamma_{1,i,j}^{l;k} \frac{u_{i,j+1}^{l;k} - u_{i,j}^{l;k}}{h_y}, \quad (4.41)$$

kde l značí l -tou iteraci metody a δ je parametr gradientního sestupu.

4.5.1 Tichonova regularizace

Jak je ukázáno v kapitole 5, hodnoty ve výstupu programu divergovaly. Abychom tuto divergenci zmírnili, představíme si Tichonovu regularizaci. Podrobněji je regularizace popsána v [15].

Mějme úlohu tvaru

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|, \quad (4.42)$$

kteřá je špatně položená, tedy nestabilní. Pak *Tichonova regularizace* pro tuto obecnou úlohu vypadá podle [15] následovně:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{\|\mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbb{L}_\mu \mathbf{x}\|^2\}, \quad (4.43)$$

kde matice \mathbb{L}_μ je tzv. matice regularizace.

Aplikováním Tichonovy regularizace na úlohu definovanou v (3.19) získáme

$$\min_{\mathbf{a}} \{\|u(\mathbf{a}) - I\|_2^2 + \|\alpha \mathbb{I} \mathbf{a}\|_2^2\}, \quad (4.44)$$

v naší úloze tedy platí $\mu = \alpha$, $\mathbb{L}_\mu = \alpha \mathbb{I}$, kde \mathbb{I} značí jednotkovou matici.

Po zderivování tohoto funkcionálu stejným postupem jako v kapitole 3 získáme nové vzorce pro aktualizaci rychlostního pole \mathbf{a} :

$$a_{1;i,j}^{l+1;k} = a_{1;i,j}^{l;k} - \delta \gamma_{1;i,j}^{l;k} \frac{u_{i+1,j}^{l;k} - u_{i,j}^{l;k}}{h_x} - \alpha a_{1;i,j}^{l;k}, \quad (4.45)$$

$$a_{2;i,j}^{l+1;k} = a_{2;i,j}^{l;k} - \delta \gamma_{1;i,j}^{l;k} \frac{u_{i,j+1}^{l;k} - u_{i,j}^{l;k}}{h_y} - \alpha a_{2;i,j}^{l;k}, \quad (4.46)$$

kteřé se od původních vzorců liší pouze členy $\alpha a_{1;i,j}^{l;k}$, $\alpha a_{2;i,j}^{l;k}$.

Rozdíl mezi výsledky výpočtů s a bez Tichonovy regularizace jsou popsány v následující kapitole.

4.6 Indexy

Při výpočtu v programu budeme ukládat proměnné do jednoho pole. Proto je potřeba zkombinovat indexy i, j, k do jednoho indexu

$$N = i + j \cdot W + k \cdot W \cdot H, \quad (4.47)$$

kde ih_x je složka uzlu na ose x , jh_y je složka uzlu na ose y , k je pořadí snímku, W je šířka snímku, H je výška snímku. Zpětně lze prvky i, j, k získat následovně:

$$k = \frac{N}{W \cdot H}, \quad (4.48)$$

$$j = \frac{N - k \cdot W \cdot H}{W}, \quad (4.49)$$

$$i = N - k \cdot W \cdot H - j \cdot W \quad (4.50)$$

$$= N \bmod W. \quad (4.51)$$

Kapitola 5

Výpočetní studie

V této části práce se budeme věnovat výstupům z programu vypracovaném v jazyce C++. V cyklu gradientního sestupu provádíme výpočet primární rovnice (funkce `PrimaryU`), výpočet adjungované rovnice (funkce `AdjointGamma`) a aktualizaci rychlostního pole pro další cyklus (funkce `VelocityUpdate`). Program je dostupný na GitHubu: https://github.com/marie-bbb/Gradient_Descent.

5.1 Popis kódu

Jako počáteční data pro výpočet jsme zvolili sekvenci dvaceti PGM obrázků o velikosti 50x50 pixelů, na nichž se pohybuje kolečko ve směru osy x . Kolečko se na každé dvojici snímků posune o míň než 1 pixel. V kódu jsme k načtení dat z PGM souborů použili metodu `ReadPGM`, která pochází ze stránek doc. Oberhubera.

Pohyb kolečka jsme počítali pro následující parametry:

- $initialTime = 0$,
- $finalTime = 1$,
- $a = 0.0$,
- $delta = 0.0009$,
- $alpha = 0.01$,

kde $initialTime$ a $finalTime$ určují časový rozměr úlohy, parametr a slouží k nastavení počátečního odhadu optického toku, $delta$ je parametr gradientního sestupu a $alpha$ je parametr pro Tichonovu regularizaci. Časový krok byl nastaven jako dvojnásobek prostorového kroku h_x .

V kódu, podobně jako v této práci, označuje I danou intenzitu, tedy v našem případě hodnoty kolečka, u značí odhad intenzity napočítaný v primární úloze, $gamma1$ řešení adjungované úlohy a $a1$, $a2$ zastupují složky odhadu optického toku.

Počáteční odhad u , $gamma1$ a a jsme nastavili na nulu.

V metodě `PrimaryU` řešíme primární úlohu, kde nejprve inicializujeme u pomocí metody `SetInitData`. Následuje for cyklus, kde se postupně vypočítávají prvky u pro uzel (i, j, k, τ) ze sítě uzlů úlohy pomocí upwind schématu. Podrobněji je diskretizace úlohy a její indexování popsáno v předchozí kapitole. Nakonec jsou napočítané hodnoty uloženy do textového souboru.

Podobným způsobem získáme hodnoty $gamma1$ za pomoci metody `AdjointGamma`.

Metoda `VelocityUpdate` aktualizuje odhad rychlostního pole a opět výpočty ukládá.

Ve funkci `main` načteme obrázky a provádíme iterace gradientního sestupu.

5.2 Výpočty

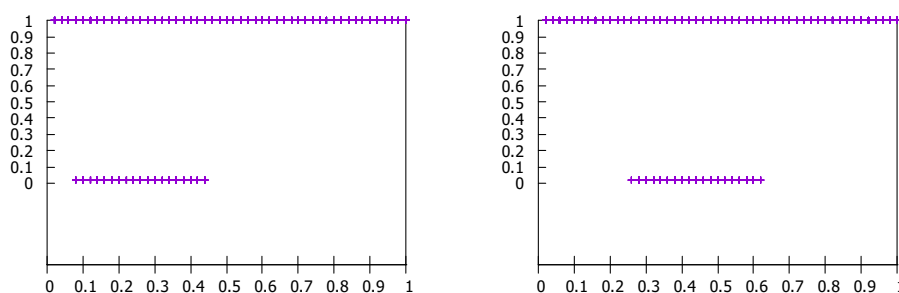
V této sekci si ukážeme výstupy výpočtu znázorněné na grafech vytvořených v programu *gnuplot*. Pro zrychlení výpočtů jsme ukládali hodnoty do souboru pouze pro každou desátou iteraci. Výpočty jsme prováděli pro až 3000 iterací gradientního sestupu. Po mnoha zkouškách nám jako nejlepší hodnota parametru *delta* vyšla hodnota 0.0009.

Program vrací v zásadě dva druhy výsledků. Buď se kolečko odhadnutých intenzit neposouvá, ale svůj tvar si přibližně zachová, nebo hodnoty napočítaných intenzit divergují. To samé platí pro odhad optického toku, který často ukazuje směr, kterým se původní kolečko intenzit nepohybuje. Body reprezentované vypočtenou intenzitou se neposunou na finální místo původního kolečka často ani po tisíci iteracích.

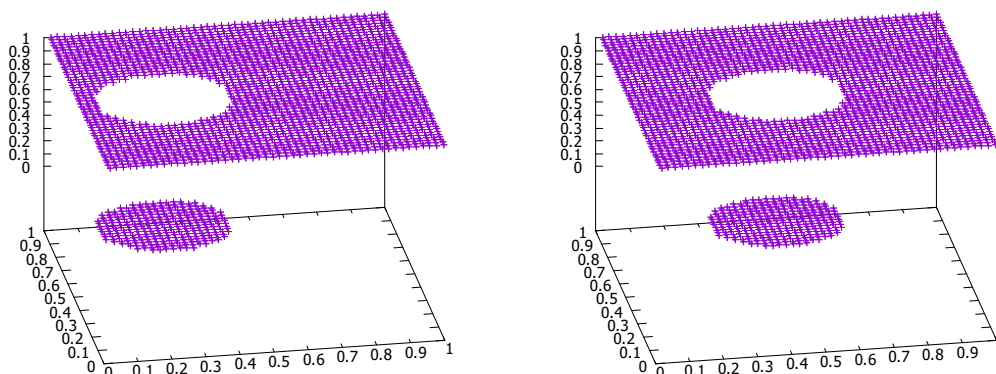
Na následujících snímcích uvidíme rozdíl mezi výpočty původní metody a metody upravené Tichonovou regularizací, která je popsána v předchozí kapitole.

5.2.1 Počáteční podmínky

Počáteční podmínka v primární úloze, tedy první odhad intenzity u , je kolečko pohybující se na síti $\Omega_h = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, kde hodnoty intenzity bodu kolečka jsou rovny nule, hodnoty intenzity mimo kolečko jsou rovny jedné. Na následujících grafech lze vidět pohyb počáteční podmínky ze dvou různých úhlů.



Obrázek 5.1: Počáteční podmínka pro primární úlohu, první (vlevo) a poslední snímek (vpravo) - pohled ze strany. Kolečko se posunulo o přibližně 0.2 směrem na ose x , což lze vidět z posunu nulových hodnot intenzity.

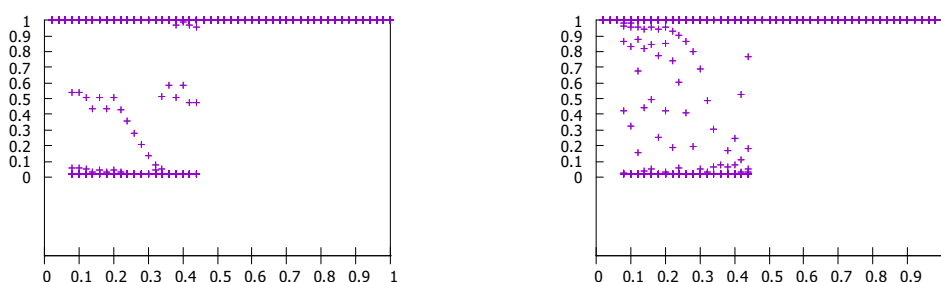


Obrázek 5.2: Počáteční podmínka pro primární úlohu, první (vlevo) a poslední snímek (vpravo) - pohled seshora.

5.2.2 Aktualizace odhadu toku pomocí gradientu funkcionálu

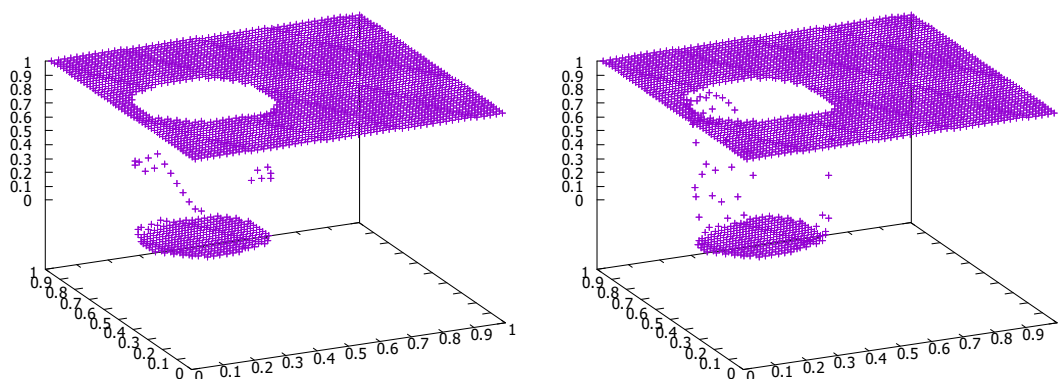
Obecně program vrací divergující výsledky. Kolečko z prvního snímku se neposouvá z místa a na místě se během výpočtu rozpadá. Po určitém počtu iterací pak začne odhad intenzity a optického toku nabývat i hodnoty mimo určený interval $\langle 0, 1 \rangle$. V této podsekcí tyto výsledky okomentujeme.

Nejprve se podíváme na výsledky výpočtu primární úlohy, z níž jsme získali odhad intenzity u .



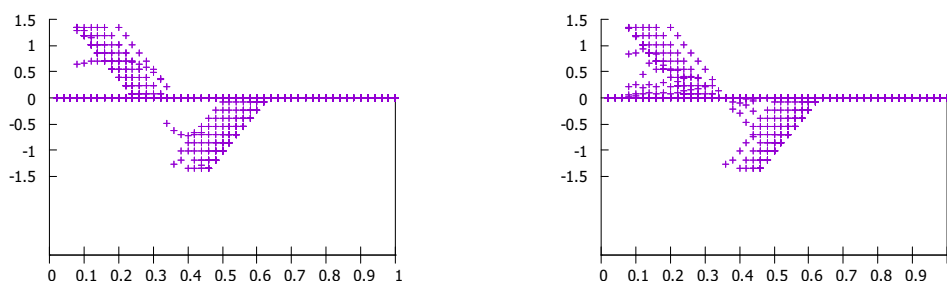
Obrázek 5.3: Výstup z výpočtu primární úlohy, 20. snímek ze sekvence, v 10. (vlevo) a 100. iteraci (vpravo). Pohled ze strany.

Na snímcích vidíme, že kolečko se na místě rozpadá. Na další dvojici obrázků se ukáže, že rozpadání se děje ze začátku zejména v bodech, které tvoří okraj kolečka.



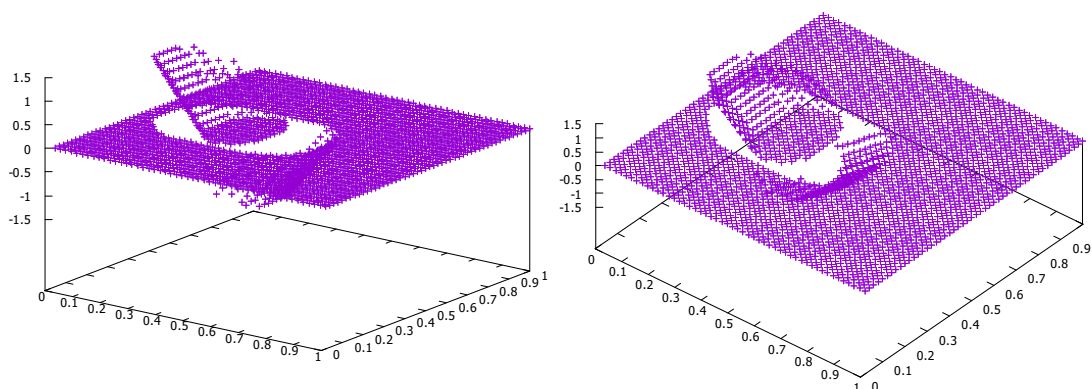
Obrázek 5.4: Výstup z výpočtu primární úlohy, 20. snímek ze sekvence, v 10. (vlevo) a 100. iteraci (vpravo). Pohled se shora.

Výstup z adjungované úlohy, z níž jsme získali odhad parametru γ_1 , je následující. Z pohledu ze strany vidíme, že v pozdější iteraci nabývá γ_1 různých hodnot podle toho, jak se různé hodnoty napočítané intenzity, tedy podle toho, jak moc se kolečko v krajích rozpadá.



Obrázek 5.5: Výstup z výpočtu adjungované úlohy, 20. snímek ze sekvence, v 10. (vlevo) a 100. iteraci (vpravo). Pohled ze strany.

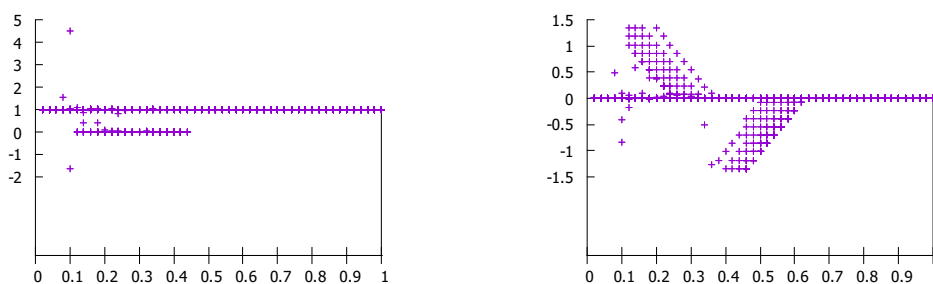
V pohledu se shora můžeme vidět, že hodnoty γ_1 nabývají hodnot jiných než nula zejména v okrajích kolečka buď počátečního, nebo vypočítaného.



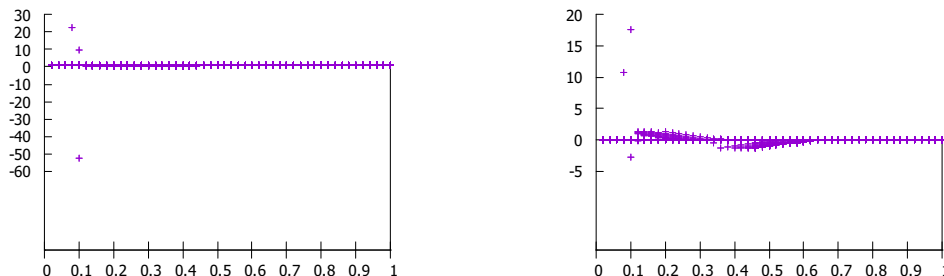
Obrázek 5.6: Výstup z výpočtu adjungované úlohy, 20. snímek ze sekvence, v 10. iteraci. Dva různé pohledy.

V bodech, kde se hodnoty napočítané intenzity rovnají hodnotám naměřené intenzity, je hodnota parametru γ_1 nulová, což jsou zpravidla body, v nichž nenastává žádný pohyb ani v původním ani v napočítaném odhadu intenzity.

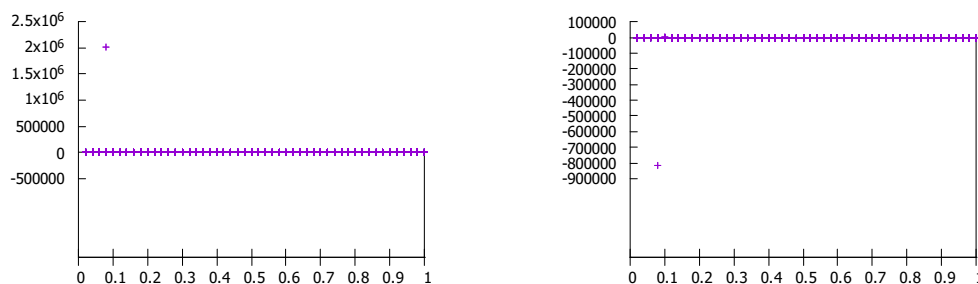
Dále lze vidět přechod z menších hodnot přesahujících interval $\langle 0, 1 \rangle$ do velmi vysokých v rámci jedné až dvou iterací. Hodnoty většinou divergují pouze v pár bodech, které tvoří okraj kolečka. Následují dvojice snímků, kde jeden snímek je výstup z primární úlohy a druhý z adjungované úlohy.



Obrázek 5.7: Výstupy v čase $k = 20$ v 865. iteraci z primární úlohy (vlevo) a z adjungované úlohy (vpravo). Pohled ze strany.



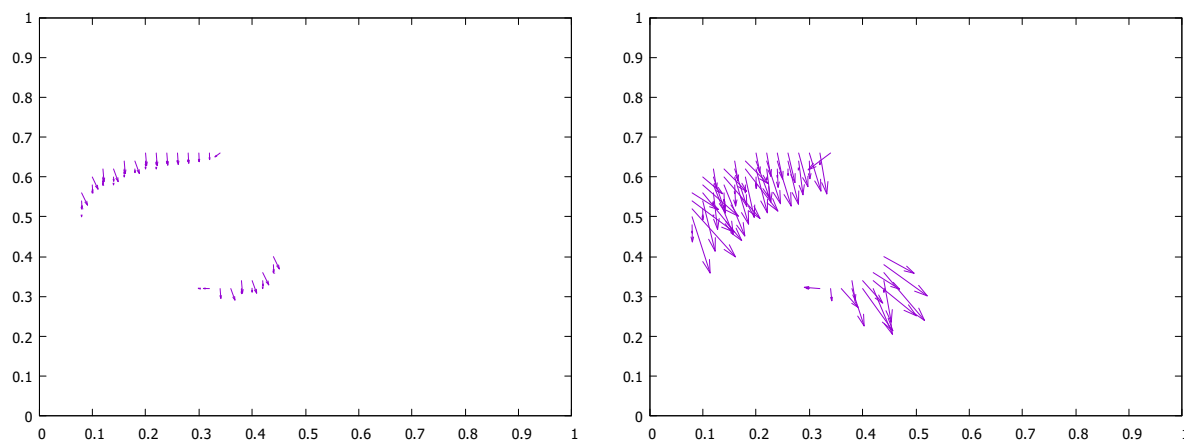
Obrázek 5.8: Výstupy v čase $k = 20$ v 866. iteraci z primární úlohy (vlevo) a z adjungované úlohy (vpravo). Pohled ze strany.



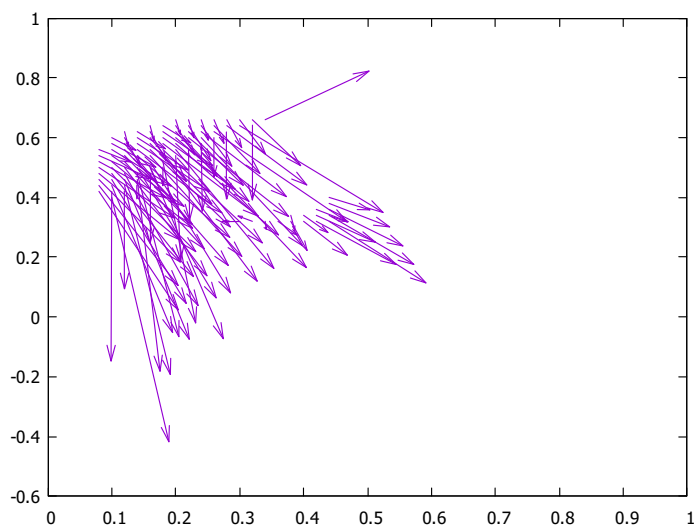
Obrázek 5.9: Výstupy v čase $k = 20$ v 867. iteraci z primární úlohy (vlevo) a z adjungované úlohy (vpravo). Pohled ze strany.

Odhad optického toku je provázaný s výsledky primární a adjungované úlohy podle (4.45) a (4.46). Když se mnohonásobně zvětší hodnoty u nebo γ_1 , narostou podobným způsobem i hodnoty složek toku a_1, a_2 .

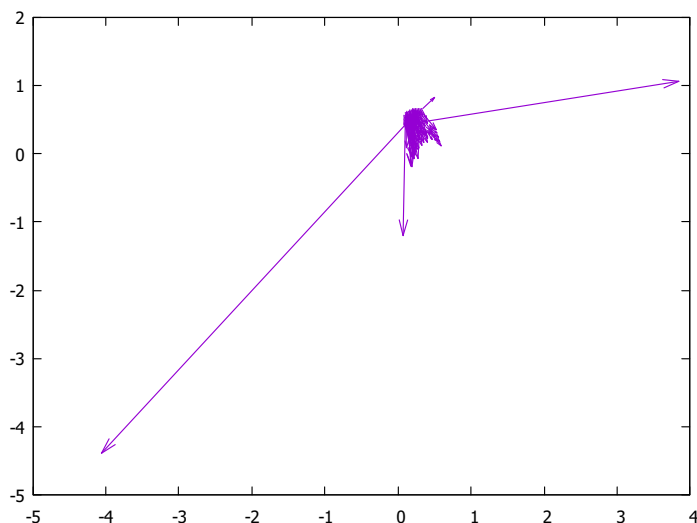
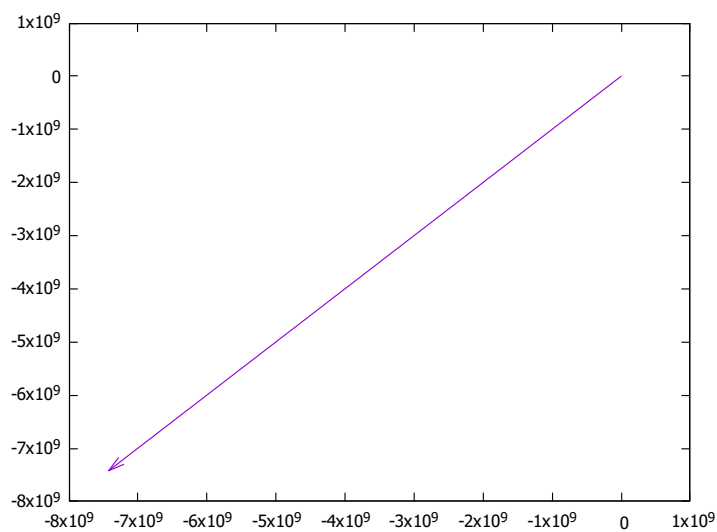
Již po prvních iteracích metody je odhad toku nepřesný, jelikož samotný tok by měl směřovat spíše ve směru počátečního kolečka, čili ve směru osy x , na grafu ve směru horizontální osy.



Obrázek 5.10: Odhad optického toku v čase $k = 20$ po 10. (vlevo) a 100. iteraci (vpravo).



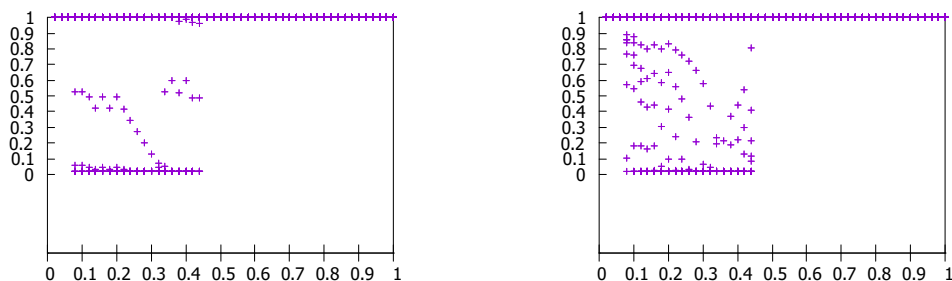
Obrázek 5.11: Odhad optického toku v čase $k = 20$ po 865. iteraci.

Obrázek 5.12: Odhad optického toku v čase $k = 20$ po 866. iteraci.Obrázek 5.13: Odhad optického toku v čase $k = 20$ po 867. iteraci.

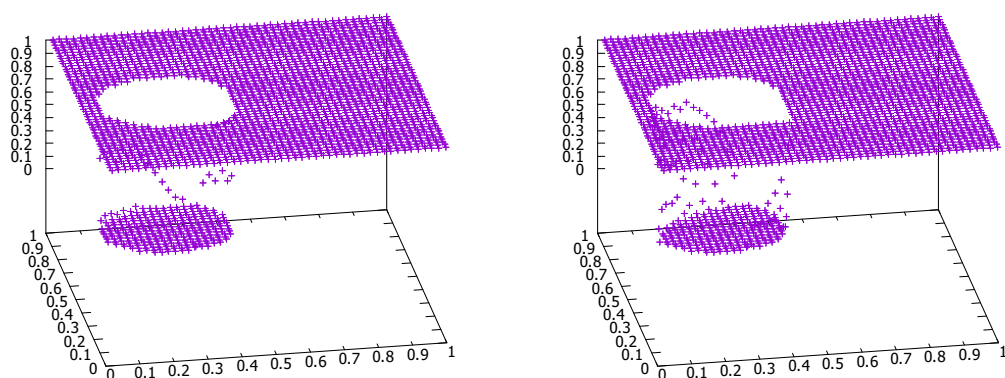
5.2.3 Aktualizace odhadu toku pomocí gradientu funkcionálu s Tichonovou regularizací

Tichonova regularizace se na výsledcích projevila výrazně - během 3000 iterací hodnoty zdaleka tak nedivergovaly jako ve výpočtech bez regularizace. Ani tímto způsobem se ale nepodařilo kolečko posunout na místo, kam se posunulo ve vstupních datech. Kolečko spíše zůstává na místě a zejména v okrajích ztrácí svůj tvar. Po přibližně 1000. iteraci zůstávají hodnoty stejné až do konce výpočtu.

Na první a druhé dvojici snímků můžeme vidět postupný rozpad kolečka během výpočtu, kde intenzita nabývá různých hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zejména na okrajích pozorovaného objektu.

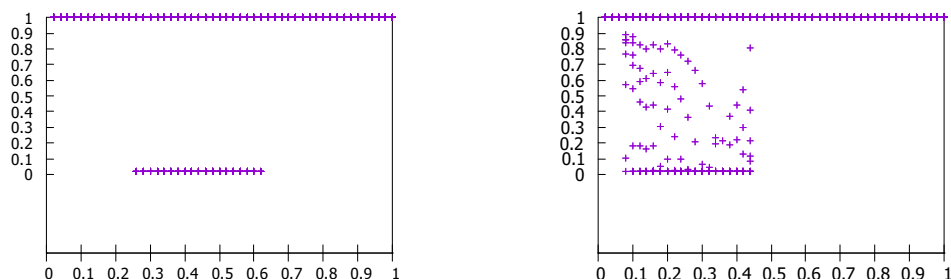


Obrázek 5.14: Výstup z výpočtu primární úlohy v metodě s Tichonovou regularizací, 20. snímek ze sekvence, v 10. iteraci (vlevo) a 3000. iteraci metody (vpravo). Pohled ze strany. Kolečko zůstává na tom samém místě v okrajích nabývá i jiných hodnot než $\{0, 1\}$.

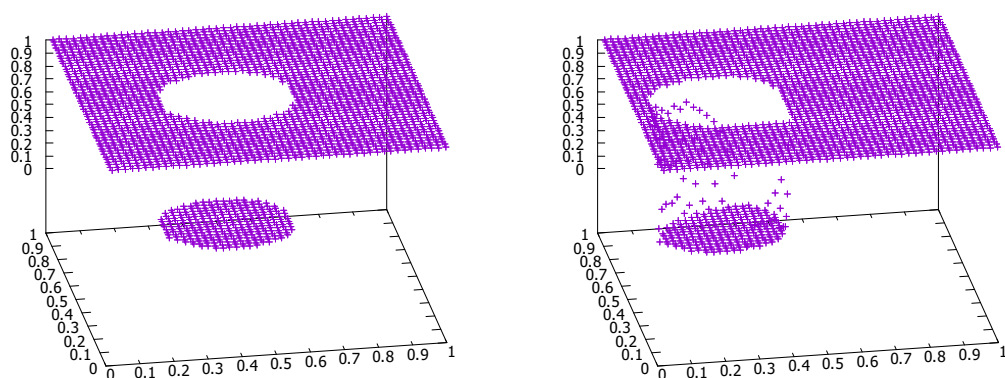


Obrázek 5.15: Výstup z výpočtu primární úlohy v metodě s Tichonovou regularizací, 20. snímek ze sekvence, v 10. iteraci (vlevo) a 3000. iteraci metody (vpravo). Pohled seshora. Kolečko zůstává na tom samém místě a v okrajích nabývá i jiných hodnot než $\{0, 1\}$.

Nyní porovnáme 20. snímky sekvence pro počáteční odhad intenzity a pro 3000. iteraci metody, opět ze dvou úhlů pohledu.



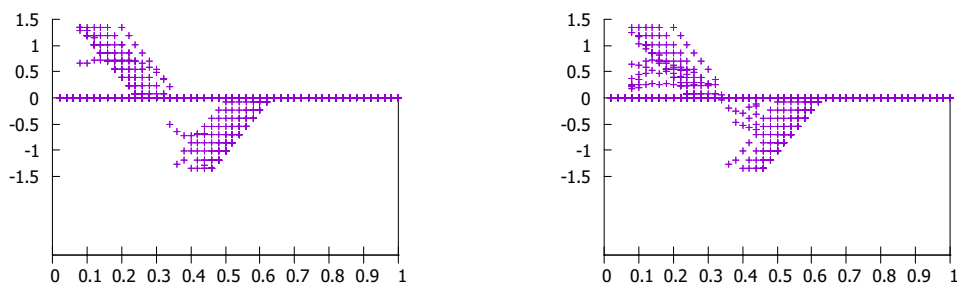
Obrázek 5.16: Porovnání počátečního odhadu intenzity a odhadu vypočteného ve 3000. iteraci metody. Poslední snímky sekvence, pohled ze strany.



Obrázek 5.17: Porovnání počátečního odhadu intenzity a odhadu vypočteného ve 3000. iteraci metody. Poslední snímky sekvence, pohled seshora.

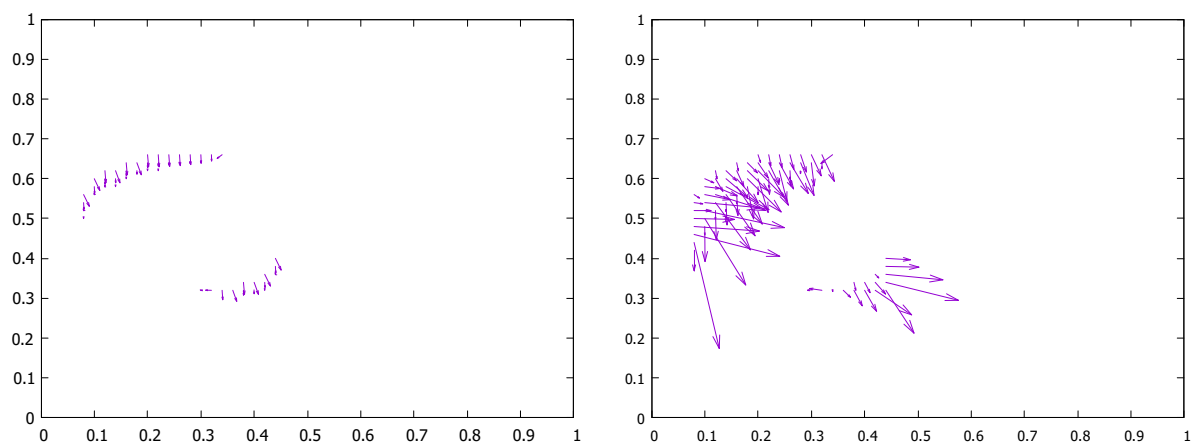
Body s nulovou intenzitou se ani po 3000. iteraci neposouvají ve směru počáteční intenzity. Narozdíl od prvotního odhadu nabývá napočítaný odhad i hodnot z vnitřku intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Rozdíl počátečního a napočítaného odhadu intenzity můžeme vidět i na následující dvojici grafů, na nichž je vyobrazen výstup z výpočtu adjungované úlohy v čase $k = 20$ v 10. (vlevo) a 3000. (vpravo) iteraci. Čím jsou hodnoty vzdálenější od nuly, tím větší je v tom bodě rozdíl mezi polohou kolečka napočítaného v dané iteraci a počátečního.



Obrázek 5.18: Výstup adjungované úlohy v čase $k = 20$, tedy vyobrazení rozdílů intenzit. Pohled ze strany.

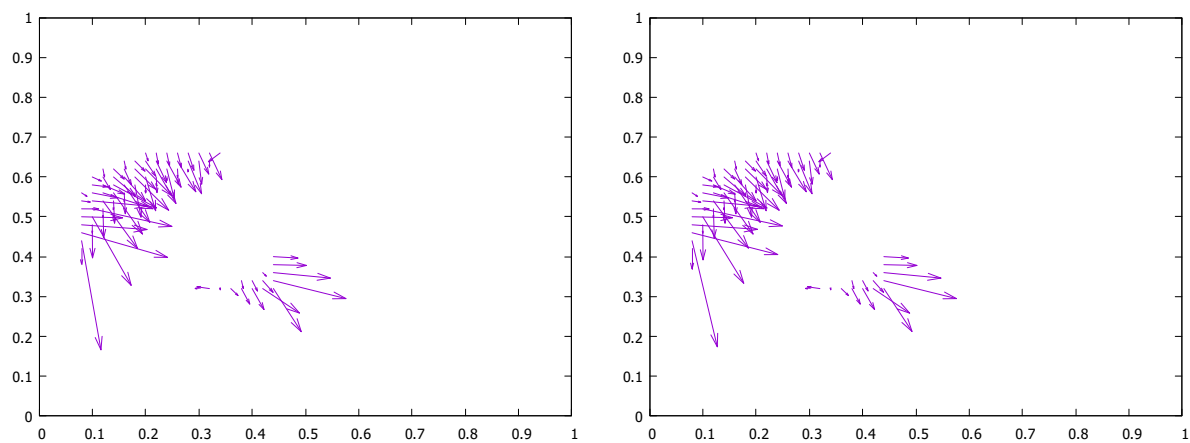
Nakonec si ukážeme samotný odhad optického toku.



Obrázek 5.19: Vypočtený optický tok v čase $k = 20$ po proběhnutí 10. (vlevo) a 3000. iteraci (vpravo).

Na obrázku vlevo lze opět vidět nepřesný odhad intenzity již v počátečních iteracích.

Kvůli přítomnosti členu daného Tichonovou regularizací při napočítávání složek toku je narozdíl od výsledků v předchozí sekci odhad stejný přibližně od 1000. iterace metody až do konce výpočtu, jak vidíme na následující dvojici grafů.



Obrázek 5.20: Vypočtený optický tok v čase $k = 20$ po proběhnutí 1000. (vlevo) a 3000. iteraci (vpravo).

Závěr

V této práci jsme představili optický tok a metody jeho výpočtu. Zaměřili jsme se na metody využívající řešení diferenciálních rovnic k určení optického toku, pomocí nichž jsme hledali rozdíl mezi napočítanými a naměřenými hodnotami funkce světelné intenzity.

Metoda Horna a Schuncka představila řešení s omezením homogenity optického toku, metoda Lucase a Kanadeho předpokládala konstantní rychlost bodů v malém okolí. Obě metody využívaly k výpočtu pouze dvojice snímků naráz.

Dále jsme představili metodu, jež na rozdíl od předchozích metod počítala s hodnotami intenzity ze všech snímků z posloupnosti v rámci jedné iterace. V jedné iteraci metody se provedl výpočet primární úlohy, jejímž výsledkem byl odhad intenzity, dále se vypočítala adjungovaná úloha, díky níž jsme získali odhad gradientu, kterým jsme aktualizovali hodnoty odhadu optického toku.

Metodu jsme zkusili implementovat ve formě řešiče v programovacím jazyce C++, ten vrátil ne-správné výsledky, které jsme zhodnotili ve výpočetní studii. Porovnali jsme výpočet metody původní a metody upravené Tichonovou regularizací, která měla velký vliv na výsledné chování hodnot.

Bibliografie

- [1] G. Aubert, O. Faugeras a P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations* (Applied Mathematical Sciences). Springer New York, 2001, ISBN: 9780387953267. URL: <https://books.google.cz/books?id=ZxMBjwEACAAJ>.
- [2] B. K. Horn a B. G. Schunck, “Determining optical flow”, *Artificial Intelligence*, roč. 17, č. 1, s. 185–203, 1981, ISSN: 0004-3702. doi: [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(81\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0004-3702(81)90024-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0004370281900242>.
- [3] K. R. T. Aires, A. M. Santana a A. A. D. Medeiros, “Optical flow using color information: preliminary results”, in *Proceedings of the 2008 ACM Symposium on Applied Computing*, ř. SAC '08, Fortaleza, Ceara, Brazil: Association for Computing Machinery, 2008, s. 1607–1611, ISBN: 9781595937537. doi: [10.1145/1363686.1364064](https://doi.org/10.1145/1363686.1364064). URL: <https://doi.org/10.1145/1363686.1364064>.
- [4] H. Chao, Y. Gu a M. Napolitano, “A Survey of Optical Flow Techniques for Robotics Navigation Applications”, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, roč. 73, květ. 2013. doi: [10.1007/s10846-013-9923-6](https://doi.org/10.1007/s10846-013-9923-6).
- [5] Y.-H. Tsai, M.-H. Yang a M. J. Black, “Video Segmentation via Object Flow”, in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, čvn. 2016.
- [6] J. Walker, A. Gupta a M. Hebert, “Dense Optical Flow Prediction From a Static Image”, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pros. 2015.
- [7] D. Guo, A. L. van de Ven a X. Zhou, “Red Blood Cell Tracking Using Optical Flow Methods”, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, roč. 18, č. 3, s. 991–998, 2014. doi: [10.1109/JBHI.2013.2281915](https://doi.org/10.1109/JBHI.2013.2281915).
- [8] B. Lucas a T. Kanade, “An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision (IJCAI)”, sv. 81, dub. 1981.
- [9] S. S. Beauchemin a J. L. Barron, “The computation of optical flow”, *ACM Comput. Surv.*, roč. 27, č. 3, s. 433–466, zář. 1995, ISSN: 0360-0300. doi: [10.1145/212094.212141](https://doi.org/10.1145/212094.212141). URL: <https://doi.org/10.1145/212094.212141>.
- [10] J. Barron, D. Fleet a S. Beauchemin, “Performance Of Optical Flow Techniques”, *International Journal of Computer Vision*, roč. 12, s. 43–77, ún. 1994. doi: [10.1007/BF01420984](https://doi.org/10.1007/BF01420984).
- [11] G. Zhang a H. Chanson, “Application of Local Optical Flow Methods to High-Velocity Free-surface Flows: Validation and Application to Stepped Chutes”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, roč. 90, zář. 2017. doi: [10.1016/j.expthermflusci.2017.09.010](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2017.09.010).
- [12] O. Omidvar a J. Dayhoff, *Neural networks and pattern recognition*. Academic Press, 1998.
- [13] B. Polyak, *Introduction to Optimization*. čvc. 2020.

- [14] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge University Press, 2002.
- [15] M. Fuhry a L. Reichel, “A new Tikhonov regularization method”, *Numerical Algorithms*, roč. 59, s. 433–445, břez. 2012. doi: [10.1007/s11075-011-9498-x](https://doi.org/10.1007/s11075-011-9498-x).