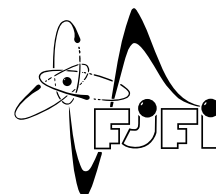




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Neutronové hvězdy a stavová rovnice jaderné hmoty

Neutron Stars and Nuclear Equation of State

Bakalářská práce

Autor: **Pavína Svobodová**
Vedoucí práce: **prof. Ing. Boris Tomášik, Ph.D.**
Konzultant: **Mgr. Martin Urbanec, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/2024

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Svobodová** Jméno: **Pavčina** Osobní číslo: **494904**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra fyziky**
Studijní program: **Aplikace přírodních věd**
Studijní obor: **Experimentální jaderná a částicová fyzika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Neutronové hvězdy a stavová rovnice jaderné hmoty

Název bakalářské práce anglicky:

Neutron Stars and Nuclear Equation of State

Pokyny pro vypracování:

1. Nastudujte základní termodynamické vztahy, relevantní pro popis hmoty v neutronové hvězdě a napište text, ve kterém budou vysvětleny.
2. Nastudujte formalismus, kterým se popisuje mechanická stabilita neutronových hvězd a vysvětlete ho v textu.
3. Uveďte základní přehled výsledků pro stavovou rovnici jaderné hmoty, relevantní pro vnitro neutronových hvězd.
4. Vypočítejte závislost hmotnosti na poloměru neutronové hvězdy pro různé stavové rovnice.

Seznam doporučené literatury:

- [1] R.R. Silbar, S. Reddy: Neutron stars for undergraduates, American Journal of Physics 72 (2004) 892-905, erratum Am. J. Phys. 73, 286 (2005).
- [2] J. Schaffner-Bielich: Compact Star Physics, Cambridge University Press (2020).
- [3] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky: Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, Wiley-VCH, 1983.
- [4] J.M. Lattimer, M. Prakash: Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints, Physics Reports 442 (2007) 109-165.
- [5] C.B. Jackson et al.: Compact Stars for everyone I: White dwarf stars, European Journal of Physics 26 (2005) 695-709.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

prof. Dr. Boris Tomášik katedra fyziky FJFI

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Mgr. Martin Urbanec, Ph.D. Slezská univerzita v Opavě, Fyzikální ústav

Datum zadání bakalářské práce: **31.10.2023**

Termín odevzdání bakalářské práce: **05.08.2024**

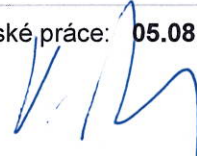
Platnost zadání bakalářské práce: **31.10.2025**



prof. Dr. Boris Tomášik
podpis vedoucí(ho) práce



podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

23. 11. 2023

Datum převzetí zadání

Svobodová

Podpis studentky



PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný(á)

Jméno a příjmení studenta: Pavlína Svobodová
Osobní číslo: 494904
Studijní program: Aplikace přírodních věd
Studijní obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Neutronové hvězdy a stavová rovnice jaderné hmoty

vypracoval(a) samostatně a uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Praze dne 5.8.2024

.....
Svobodová

podpis

Poděkování:

Chtěla bych poděkovat především svému školiteli prof. Ing. Borisovi Tomášikovi, Ph.D. za vedení, trpělivost a cenné rady při psaní bakalářské práce. Dále děkuji svému konzultantovi Mgr. Martinovi Urbančovi, Ph.D. za ochotu a vstřícnost. Ráda bych poděkovala také své rodině za podporu a zvláštní poděkování patří mým kolegům a kamarádům za podporu a pomoc, kterou mi poskytli.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svoji práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 5. srpna 2024

Pavλίna Svobodová

Název práce:

Neutronové hvězdy a stavová rovnice jaderné hmoty

Autor: Pavlína Svobodová

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Boris Tomášik, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Konzultant: Mgr. Martin Urbanec, Ph.D., Fyzikální ústav, Slezská univerzita v Opavě

Abstrakt: Tato práce se zabývá neutronovými hvězdami a stavovou rovnicí jaderné hmoty. Nejprve jsou stručně popsány kompaktní hvězdy. Poté jsou popsány základní matematické pojmy a zaveden prostor, na kterém se pracuje. Následuje odvození TOV rovnice potřebné k popisu neutronových hvězd. Dále se zavedou termodynamické vztahy relevantní pro popis jaderné hmoty. Poté se porovnáním sil působících ve hvězdách naleznou diferenciální rovnice, jejichž řešení vede k vykreslení závislostí tlaků a hmotností na poloměru kompaktních hvězd. Tyto závislosti jsou vykresleny nejprve pro bílé trpaslíky (což jsou Newtonovské hvězdy) a poté pro neutronové hvězdy, kam je již potřeba zahrnout efekty obecné teorie relativity. Jako poslední jsou popsány pulsary, což jsou nejčastěji pozorované neutronové hvězdy a také je zde odvozen vztah pro jejich charakteristický věk.

Klíčová slova: bílý trpaslík, jaderná hmota, kompaktní hvězdy, neutronové hvězdy, stavová rovnice

Title:

Neutron Stars and Nuclear Equation of State

Author: Pavlína Svobodová

Abstract: This thesis deals with neutron stars and the equation of state of nuclear matter. First, compact stars are briefly described. Then the basic mathematical concepts are described and spacetime is introduced. This is followed by the derivation of the TOV equation needed to describe neutron stars. Next, thermodynamic relations relevant to the description of nuclear matter are introduced. Then, by comparing the forces acting in the stars, differential equations are found whose solutions lead to plotting the dependence of pressures and masses on the radius of compact stars. These dependencies are plotted first for white dwarfs (which are Newtonian stars) and then for neutron stars, where the effects of general relativity must already be included. Lastly, pulsars, which are the most commonly observed neutron stars, are described and a relation for their characteristic age is also derived.

Key words: equation of state, neutron stars, nuclear matter, white dwarfs

Obsah

1 Geometrie prostoročasu a Einsteinovy rovnice	12
1.1 Kompaktní objekty	12
1.2 Gravitace a principy ekvivalence	13
1.3 Metrika a Einsteinovy rovnice	15
1.4 Schwarzschildova metrika a TOV rovnice	19
2 Základní termodynamické vztahy	23
2.1 Hustá hmota a EOS	23
2.2 Stavová rovnice	25
2.2.1 Polytropy	27
2.3 Kompaktní hvězdy	29
3 Základní přehled výsledků pro stavovou rovnici jaderné hmoty	30
3.1 Bílí trpaslíci	30
3.1.1 Vztahy mezi hmotností a poloměrem polytrop a Chandrasekharova hmotnost . . .	31
3.1.2 Bezrozměrné diferenciální rovnice pro bílé trpaslíky	33
3.1.2.1 Nerelativistický fermionový plyn z elektronů	34
3.1.2.2 Relativistický fermionový plyn z elektronů	36
3.2 Neutronové hvězdy	37
3.2.1 Bezrozměrné diferenciální rovnice pro neutronové hvězdy	39
3.2.1.1 Nerelativistický fermionový plyn z neutronů	40
3.2.1.2 Relativistický fermionový plyn z neutronů	40
3.2.1.3 Stavy pro různé režimy relativity	43
3.2.2 Pulsary	44
3.2.2.1 Kategorie pulsarů	46
3.2.2.2 Dipólový model pulsarů	47
A Matematický aparát	53
A.1 Derivace v zakřiveném prostoročase a křivost	53

A.2 Hustota energie a tlak	54
Bibliografie	57

Úvod

Kompaktní objekty, jako jsou bílí trpaslíci, neutronové hvězdy a černé díry, představují fascinující vesmírné objekty. Jedná se o zbytky hvězd, které si prošly konečnými stadii svého života.

Bílí trpaslíci jsou pozůstatky středně hmotných hvězd (jako je naše Slunce), které vyčerpaly své jaderné palivo a odvrhly své vnější vrstvy. Zůstane po nich husté jádro, ve kterém již neprobíhají termojaderné reakce. Hmotnost sice mají srovnatelnou se Sluncem, ale jejich průměr je srovnatelný s průměrem Země, což z nich činí extrémně husté objekty. Poprvé byly teoreticky předpovězeny v roce 1926 Ralphem Fowlerem [1] a první bílý trpaslík, Sirius B, byl objeven v roce 1862 Alvanem Grahamem Clarkem [2]. Bílí trpaslíci nepodléhají dalšímu kolapsu, neboť hvězdy jsou stabilní díky tlaku degenerovaných elektronů [3].

Neutronové hvězdy jsou pozůstatky masivních hvězd, které explodovaly jako supernovy. Jsou tvořeny téměř výhradně neutrony a jsou extrémně husté. První teoretická předpověď existence neutronových hvězd pochází od Waltera Baadeho a Fritze Zwickyho v roce 1934 [4], myšlenku existence neutronových hvězd měl však už například Landau [5]. Poprvé byly pozorovány Jocelyn Bellovou, která byla PhD studentkou A. Hewishe a věnovala se výzkumu scintilací v meziplanetárním médiu zapříčiněných zařazením kvazarů [6]. Jocelyn objevila během analýzy dat z radiového teleskopu pravidelně se opakující signál. Ten byl natolik pravidelný, že zpočátku vypadal jako vysílaný mimozemskými bytostmi. Později ale objevila další tři takové zdroje z různých částí oblohy, což napovídalo jejich přírodnímu původu. Tyto anomálie se nazvaly „pulsující rádiové zdroje“, zkráceně pulsary a v dnešní době jich již známe stovky [7]. Postupem času se zjistilo, že pulsary musí být rotující neutronové hvězdy a tak byla díky práci Jocelyn Bell potvrzena existence těchto objektů. Stejně jako bílí trpaslíci ani neutronové hvězdy nepodléhají dalšímu kolapsu a nestávají se z nich černé díry, neboť jsou stabilní díky tlaku degenerovaných nukleonů [3]. Svou roli ve stabilitě hvězdy však má i odpudivá síla mezi nukleony (což vyžaduje další úpravy stavové rovnice).

Tato práce se zabývá bílými trpaslíky a neutronovými hvězdami, přičemž budeme používat různé stavové rovnice a zkoumat závislost hmotnosti hvězd na poloměru. Znalost této závislosti může být užitečná například při hledání stavové rovnici pro hustou jadernou hmotu. Taková stavová rovnice (anglicky: equation of state, zkráceně EOS) nám může pomoci pochopit chování hmoty v extrémních podmínkách, např. pod velkým tlakem nebo při dosažení vysokých teplot látky [8]. Takové podmínky je těžké napodobit v pozemských laboratořích. Neutronové hvězdy jsou ale jedny z nejméně hustých a extrémních objektů, které lze studovat, a vnitřek těchto hvězd tvoří požadované extrémní prostředí, ve kterém hmotu chceme pozorovat. Studium hmotnosti, poloměru, rotace, srážek neutronových hvězd a také pulsarů nám tedy mohou poskytnout cenné informace o vnitřní struktuře těchto objektů. Stavová rovnice husté hmoty je pak velmi důležitá pro výzkum supernov a struktury a evoluce kompaktních objektů [9].

Kapitola 1

Geometrie prostoročasu a Einsteinovy rovnice

1.1 Kompaktní objekty

Abychom však mohli zkoumat kompaktní objekty a podmínky v jejich nitru, je zapotřebí si nejdříve zavést základní metriku a vysvětlit, s jakými rovnicemi budeme počítat a v rámci možností je odvodit. V kompaktních hvězdách se setkávají všechny čtyři fundamentální síly přírody (silná a slabá jaderná, elektromagnetická a gravitační) a to často v extrémních podmínkách. Průměrná hustota je definovaná jako

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad (1.1)$$

kde M je hmotnost a R je poloměr, přičemž gravitační zrychlení na povrchu je

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad (1.2)$$

kde $G = 6,6743 \pm 0,00015 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Pro bílé trpaslíky jsou hmotnosti a poloměry známé v několika případech, pro neutronové hvězdy lze hmotnosti dobře určit, přičemž rozsah poloměrů pro neutronové hvězdy je omezen teorií, neboť pozorování stále závisí na použitých modelech. Satelit NICER změřil poloměr neutronové hvězdy PSR J0030 + 0451 na $12,71_{-1,14}^{+1,19}$ km [10]. Poměr gravitační hmotnosti ku poloměru definujeme jako kompaktnost hvězdy:

$$C = \frac{GM}{Rc^2}, \quad (1.3)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, která měří, jak blízko je hvězda k tomu, aby se stala černou dírou o stejné hmotnosti.

Neutronové hvězdy se skládají zejména z neutronů obsažených v jejich nitru (díky β_+ rozpadu [3]) a lze je tedy chápat jako velká jádra s hustotami srovnatelnými (nebo vyššími) než má jádro atomu ($\rho_{\text{jadro}} = 2,5 \times 10^{17} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ [11]). Avšak zatímco běžná stabilní jádra mají hmotnostní čísla až do $A = 208$ (pro olovo), neutronové hvězdy dosahují hmotnostních čísel až $A = 10^{57}$ [11]. Neutronové hvězdy také nezají jako běžné hvězdy, ale jsou pozorovány v optickém, rádiovém a rentgenovém pásmu. Mladé neutronové hvězdy byly potom pozorovány přímo, neboť mají nejvyšší povrchovou teplotu ze všech známých astrofyzikálních objektů. Tyto vyzařují zejména v rentgenovém pásmu a jejich teplota je přibližně 1 000 000 stupňů Celsia. Pulsary jsou potom neutronové hvězdy poháněné rotací, které běžně pozorujeme rádiovými teleskopy.

1.2 Gravitace a principy ekvivalence

Abychom se dostali k potřebné obecné teorii relativity, musíme začít u základního Newtonova zákona, který říká, že hmotná částice cítí sílu

$$F = m_i \cdot a, \quad (1.4)$$

která je úměrná zrychlení a . Koeficient m_i budeme nazývat setrvačnou hmotností částice. Gravitační síla je pak dle Newtona

$$F_g = -m_g \cdot \nabla\phi, \quad (1.5)$$

tedy síla je úměrná gradientu gravitačního potenciálu ϕ s koeficientem m_g , který označujeme jako gravitační hmotnost částice. Z experimentů vyplynulo, že v gravitačním poli podléhá každý objekt stejnému zrychlení $a = -\nabla\phi$, které je nezávislé na setrvačné nebo gravitační hmotnosti a tedy tyto dvě musí být stejné [11],

$$m_g = m_i. \quad (1.6)$$

Z tohoto plyne tzv. slabý princip ekvivalence (weak equivalence principle, zkráceně WEP), který říká

„Nehledě na svou hmotnost podléhají všechny částice v gravitačním poli stejnému zrychlení.“ [11].

Tento princip byl podroben mnoha testům a v současné době je změřen s přesností 10^{-15} [12]. Lze taktéž zavést takzvaný Einsteinův princip ekvivalence (Einstein equivalence principle, zkráceně EEP), který tvrzení zobecňuje na jakoukoliv formu hmoty (nikoliv jen na částice) a jeho znění je:

„V dostatečně malé oblasti prostoročasu (t.j. prostorově a časově ohraničené) není možné rozeznat žádným experimentem, který nekomunikuje s okolím, zda se koná v gravitačním poli anebo ve zrychlující vztažné soustavě.“

Tato formulace principu ekvivalence umožňuje transformovat rovnice speciální teorie relativity (STR) do jejich obecného tvaru v obecné teorii relativity (OTR) a má důležité implikace ve způsobech, jakými je gravitace svázána s hmotou (neboť všechny fyzikální zákony až na gravitaci jsou zahrnuty ve formulaci EEP). Atom je např. složen a elektronů a jádra, které jsou dohromady svázané elektromagnetickou silou (kterou popisuje kvantová elektrodynamika). Hmotnost atomu však není sumou hmotností elektronů a jádra, je totiž o něco menší [11]. Tento rozdíl hmotností je dán vazebnou energií atomu a tedy gravitace se neváže jen na hmotnosti jednotlivých částic v atomu, ale také na vazebnou energii mezi nimi, která je generovaná elektromagnetickou silou a tedy gravitace je s elektromagnetickou silou provázána. Totéž platí také pro jádro atomu složené z protonů a neutronů, avšak hmotnost jádra je opět nižší než součet hmotností těchto částic. Tento úbytek hmotnosti totiž tvoří silná jaderná síla držící nukleony pohromadě a gravitace je tak provázána i s touto silou.

Zaměříme se nyní na myšlenkové experimenty týkající se principu ekvivalence a soustav, kdy první je v klidu vystavená gravitačnímu poli a druhá se vůči první pohybuje se zrychlením. Mějme raketu, která se pohybuje s konstantním zrychlením v prostoru (což je stejná situace, jako kdyby raketa byla v gravitačním poli, např. na Zemi při zvolení správného zrychlení). Dle EEP jsou experimenty provedené uvnitř rakety ekvivalentní experimentům provedeným v raketě stojící na Zemi a z tohoto lze odvodit dva velmi důležité důsledky principu ekvivalence: červený posuv světla vlivem gravitačního zrychlení a ohyb světla způsobený gravitačním polem.

Vezměme nyní elektromagnetickou vlnu o fixní frekvenci, kterou bude emitovat zdroj na spodku rakety a bude detekována na vršku rakety. Bude-li raketa mít konstantní zrychlení, potom rychlost rakety

v čase detekce bude větší, než byla v čase emise paprsku (paprsku bude tudíž déle trvat, než doletí až k detektoru oproti situaci, kdy by raketa letěla konstantní rychlostí). Tento efekt vede k poklesu frekvence vlny (měřené na vrchu rakety) oproti frekvenci emitovaného paprsku a nazývá se červený posuv. Zaměníme-li detektor a zdroj paprsku, potom bude vlna mít modrý posuv měřitelný na spodku rakety. Dle EEP je tato situace ekvivalentní raketě emitující/detekující elektromagnetické vlny v gravitačním poli o stejném (gravitačním) zrychlení. Elektromagnetická vlna emitovaná v tomto poli ven z něj bude mít tedy nižší frekvenci v porovnání s frekvencí vnějším pozorovatelem. Tomuto efektu se říká gravitační červený posuv a byl předpovězen obecnou teorií relativity [11]. Červený posuv je možno odvodit pomocí známého Dopplerova jevu pro nerelativistické rychlosti. Dopplerův posuv je závislý na rozdílu rychlostí zdroje a detektoru Δv . Relativní posuv vlnové délky $\Delta\lambda$ měřený detektorem v porovnání s původní vlnovou délkou λ při emisi ze zdroje je dán jako

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c}, \quad (1.7)$$

kde c jakožto rychlost světla reprezentuje rychlost vlny a Δ obecně budeme značit změnu, ať už délky, času apod. V myšlenkovém experimentu s raketou má potom rozdíl v těchto rychlostech původ v konstantním zrychlování rakety během doby, kterou světlo urazilo ze spodku lodi na vršek $\Delta t = \Delta x/c$, kde Δx je vzdálenost mezi zdrojem a detektorem. Posun vlnové délky paprsku je nyní dán vztahem

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{a \cdot \Delta t}{c} = a \cdot \frac{\Delta x}{c^2} \quad (1.8)$$

a dle principu ekvivalence je tento posuv stejný, jako kdyby raketa byla v gravitačním poli se stejným (gravitačním) zrychlením v důsledku gradientu gravitačního potenciálu $\nabla\phi$ [11]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \nabla\phi \frac{\Delta x}{c^2} = \frac{\Delta\phi \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (1.9)$$

přičemž u potenciálu tentokrát používáme kladné znaménko, neboť vektor gravitačního zrychlení směřuje dovnitř a vlna se šíří směrem ven. Zatím jsme uvažovali, že vzdálenost mezi zdrojem a detektorem je velmi malá, nicméně výraz (1.9) platí taktéž pro obecné případy. Poznamenejme také, že $\Delta\phi$ zde prezentované je kladné, takže pozorovaná vlnová délka se oproti emitované vlnové délce zvětší. Specifikujme nyní vlnovou délku paprsku emitovaného ze zdroje jako λ_e a tu měřenou na detektoru jako λ_d , pro které platí

$$\frac{\lambda_d}{\lambda_e} = 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (1.10)$$

přičemž disperzní relace pro světlo je

$$c = \lambda \cdot \nu, \quad (1.11)$$

kde ν je frekvence a příslušný poměr frekvencí je tedy

$$\frac{\nu_d}{\nu_e} = \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (1.12)$$

kde jsme provedli Taylorův rozvoj do prvního řádu v $\Delta\phi/c^2$ a předpoklad, že $\Delta\phi/c^2$ je malé. Faktor červeného posuvu z je potom definován jako

$$1 + z = \frac{\lambda_d}{\lambda_e} \quad (1.13)$$

a tedy gravitačnímu červenému posuvu odpovídá faktor

$$z = \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (1.14)$$

Pro světelný paprsek emitovaný z povrchu tělesa o hmotnosti M a poloměru R je gravitační potenciál dán vztahem

$$\phi = \frac{GM}{R} \quad (1.15)$$

a faktor červeného posuvu pro vnějšího pozorovatele umístěného nekonečně daleko od tělesa (např. při úniku světla z gravitačního potenciálu v konkrétním místě šířícího se do nekonečna, kde již gravitační pole není) je

$$z = \frac{GM}{Rc^2}. \quad (1.16)$$

Všimněme si, že faktor červeného posuvu je roven kompaktnosti objektu (viz (1.3)) a nutno podotknout, že tento faktor je odvozen pouze pro slabá gravitační pole. Samotný červený posuv je pak vždy přítomen v gravitačním poli, ale je vyjádřen obecnějším faktorem.

Druhou předpovědí EEP je ohyb světla v gravitačním potenciálu. Představme si laserový paprsek emitovaný na jedné straně rakety do detektoru umístěného na druhé straně rakety. Pohybuje-li se raketa konstantní rychlostí, dráha paprsku bude rovná přímka. Bude-li raketa zrychlovat, bude mezi rychlostmi při emisi paprsku a při jeho detekci rozdíl. Detektor je třeba umístit na spodek lodi, aby změřil paprsek a porovnal jeho dráhu při konstantní rychlosti rakety a pro zrychlující raketu. Dráha paprsku již nebude rovná a paprsek se zakříví v důsledku zrychlování rakety. Dle EEP by stejná experimentální situace nastala v gravitačním poli se stejným (gravitačním) zrychlením, a tudíž gravitační pole zakřivuje dráhu světelných paprsků.

Silný princip ekvivalence (angl. strong equivalence principle, zkráceně SEP) je doplnění EEP. Zatímco EEP explicitně zanedbává experimenty týkající se gravitace, SEP explicitně zahrnuje všechny experimenty, včetně těch s gravitací. Jeho znění potom je:

„V dostatečně malém okolí jakéhokoliv bodu prostoročasu lze provést transformaci souřadnic na lokálně inerciální, ve kterých platí zákony speciální teorie relativity.“ [11]

SEP byl otestován v naší sluneční soustavě, nicméně gravitační pole byla poměrně slabá. Dobře by se test prováděl např. v soustavě tří kompaktních hvězd vzájemně se obíhajících. Takové systémy jsou ve vesmíru pozorovatelné, např. pulsar PSR J0337+1715 je součástí systému obsahující ještě dva bílé trpaslíky, přičemž tyto tři objekty jsou gravitačně vzájemně propojeny [13]. Pozorováním tohoto systému dosáhli vědci otestování SEP do řádu $2,6 \cdot 10^{-6}$ [14].

1.3 Metrika a Einsteinovy rovnice

Zavedeme nyní metriku časoprostoru, ve kterém budeme odvozovat rovnice. Základní princip Einsteinovy speciální relativity (zkráceně STR) je, že rychlost světla má konstantní hodnotu rovnou c nezávisle na soustavě souřadné. Pro světelný paprsek jsou relativní rozdíly v čase dt a relativní rozdíly ve třírozměrném prostoru dx , dy a dz vzájemně provázány tak, že rozdíl druhých mocnin těchto veličin [11]

$$ds^2 = -c^2 \cdot dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.17)$$

je nula. Tato rovnice je Lorentzovsky invariantní a spojuje časové souřadnice s prostorovými, tudíž uvažujeme čtyřrozměrný časoprostor. Platí:

$$ds^2 \begin{cases} = 0 & \text{světlu podobný,} \\ < 0 & \text{časupodobný, tzn. události jsou kauzálně spojené,} \\ > 0 & \text{prostoropodobný, tzn. události nejsou kauzálně spojené.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Rovnici (1.17) lze tedy zapsat ve formě matice jako

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.19)$$

kde x^μ je čtyřvektor v časoprostoru (nultá souřadnice odpovídá časové složce a další tři prostorovým) a $\eta_{\mu\nu}$ je metrický tenzor časoprostoru v STR, přičemž v kartézských souřadnicích můžeme psát (používáme konvenci, že $c = 1$):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Časoprostorový interval lze taktéž zobecnit – např. zavedením sférických souřadnic se časoprostorový interval zobecní do tvaru:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \cdot d\Omega^2, \quad (1.21)$$

kde $\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Metrický tenzor je potom

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \text{jeho inverze } g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

a časoprostorový interval v obecně křivém časoprostoru obecné relativity (OTR), tedy čtyřdimenzionální vzdálenost, je definován jako:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.23)$$

kde $g_{\mu\nu}$ je a tenzor druhého řádu a definuje samotný časoprostor. Metrika závisí na zvolených souřadnicích. Pro pozorovatele neměnicího svoje prostorové souřadnice musí být časově nezávislá veličina a tedy pro něj platí:

$$ds^2 = g_{00} \cdot c^2 \cdot dt^2. \quad (1.24)$$

Nyní lze definovat nezávislou skalární veličinu, tzv. vlastní čas τ pozorovatele v klidu jako:

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = -g_{00} \cdot c^2 \cdot dt^2. \quad (1.25)$$

Rozdíly ve vlastním času jsou tedy spojeny s nultým komponentem metrického tenzoru (vlastní čas jako takový je spojen s nultou souřadnicí) jako

$$\Delta\tau = \sqrt{-g_{00}} \cdot \Delta t. \quad (1.26)$$

Je dobré poznamenat, že čas t je zde chápán jako souřadnice a nikoliv jako čas, který měříme [11]. Podívejme se nyní na gravitační posuv ve spojení s principem ekvivalence, přičemž emitujeme světelný

paprsek ze spodku rakety na vršek v gravitačním poli, které je charakterizováno gravitačním potenciálem ϕ . Frekvence pozorovaná na detektoru ν_d bude posunutá oproti frekvenci emitovaného paprsku ν_e dle rce (1.12),

$$\frac{\nu_d}{\nu_e} \approx 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (1.27)$$

Frekvence vlny je inverzní hodnotou časového rozdílu mezi dvěma po sobě jdoucími amplitudami. Poměr frekvencí je tedy dán inverzní rozdílu vlastních časů v místě zdroje emitujícího záření a detektoru:

$$\frac{\nu_d}{\nu_e} = \frac{\Delta\tau_e}{\Delta\tau_d} = \frac{\sqrt{-g_{00}^{(e)}}}{\sqrt{-g_{00}^{(d)}}} \cdot \frac{\Delta t_d}{\Delta t_e}, \quad \text{kde} \quad \frac{\Delta t_d}{\Delta t_e} = 1, \quad (1.28)$$

a tedy

$$\frac{\nu_d}{\nu_e} = \frac{\sqrt{-g_{00}^{(e)}}}{\sqrt{-g_{00}^{(d)}}} \stackrel{!}{=} 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \quad (1.29)$$

což platí pokud

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)^2, \quad (1.30)$$

což v limitě¹ může být použito pro určení konstant metrického tenzoru v OTR (jedná se o důležitou limitu pro slabá gravitační pole) a přesně dává

$$\frac{\nu_d}{\nu_e} = \frac{1 + \frac{\phi_e}{c^2}}{1 + \frac{\phi_d}{c^2}} \approx 1 + \frac{\phi_e - \phi_d}{c^2} = 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (1.31)$$

Zaved' me nyní konvenci že $c = 1$. Dle OTR způsobuje zakřivení časoprostoru přítomnost energie (popsaná tenzorem energie-hybnosti) [16] a Einsteinovy rovnice pole nám říkají, jak je metrika časoprostoru ovlivněna energií a hybností [15]. Rovnice se však musí postulovat, nikoliv odvodit, avšak je možné postulát založit na známých argumentech. Budeme se nyní zabývat analogiemi podobně, jako Einstein při postulování svých rovnic a poté je možno odvodit příslušné rovnice pohybu.

Myšlenkové „odvození“ začíná tak že bychom rádi našli rovnici, která bude splňovat Poissonovu rovnici pro Newtonovský potenciál:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.32)$$

kde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ je Laplacián v prostoru a ρ je hustota. Ptejme se nyní, jaké charakteristiky by mělo mít řešení takové rovnice? Na levé straně (1.32) se nachází diferenciální operátor druhého řádu, který působí na gravitační potenciál a na pravé straně je rozložení hmoty. Relativistické zobecnění by potom mělo mít formu rovnice mezi dvěma tenzory [15], přičemž víme že zobecnění hustoty je tenzor hybnosti-energie $T_{\mu\nu}$. Gravitační potenciál by pak měl být nahrazen metrickým tenzorem neboť pro $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ jsme museli propojit perturbaci metriky s Newtonovským potenciálem², abychom úspěšně reprodukovali

¹Limita pro slabé gravitační pole může být obdržena také alternativním odvozením rovnice rudého posuvu založené na zákonu zachování energie (zkráceně ZZE). Foton o frekvenci ν má efektivní hmotnost $m = \frac{h\nu}{c^2}$ a jeho celková energie v Newtonovském gravitačním poli s potenciálem $\phi(x)$ je $h\nu + m\phi(x)$. Porovnáním této energie u zdroje s podobnou energií u detektoru dává výraz $\frac{\nu_d}{\nu_e} = \frac{(1+\phi/c^2)_e}{(1+\phi/c^2)_d}$, což se obvykle píše jako $\frac{\Delta\nu}{\nu_e} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}$ a protože $\phi/c^2 \ll 1$, pak porovnáním s rovnicí (1.29) najdeme

$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$ v Newtonovské limitě [15].

²Jedná se o Taylorův rozvoj (1.30).

gravitaci. Lze tudíž odhadnout, že nová rovnice bude mít $T_{\mu\nu}$ úměrný nějakému tenzoru druhého řádu v derivacích metriky jako

$$(\nabla^2 g)_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

ale rádi bychom měli rovnice zcela tenzorové. K dispozici máme Riemannův tenzor $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ který je právě zkonstruován z druhých derivací metriky (z Christoffelových symbolů, viz (A.13)), avšak nemá správný počet indexů, ale lze vzít jeho stopu, Ricciho tenzor, který je již má. Lákalo by nás tedy zapsat rovnice gravitačního pole ve tvaru

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

kde κ je nějaká konstanta. Einstein sám uvažoval o takové rovnici [15], avšak narážíme zde na problém se ZZĚ a ZZH“(zákon zachování hybnosti). Chceme-li aby platil

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.35)$$

pro rovnici (1.34), měli bychom

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.36)$$

což však neplatí³ Rovnice (1.34) však implikuje, že $R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$ a tudíž dohromady máme

$$\nabla_{\mu} T = 0, \quad (1.37)$$

ale protože kovariantní derivace je parciální derivace, která nám říká, že T je konstantní skrz prostoročas, musíme hledat dál, protože $T = 0$ ve vakuu ale $T \neq 0$ pro hmotu. Avšak již máme k dispozici symetrický (0,2) tenzor konstruovaný z Ricciho tenzoru: Einsteinův tenzor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

který vždy splňuje $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ [15] a lze tedy navrhnout

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

jako rovnici pole pro metriku. Tato splňuje všechny již zmíněné požadavky a konstanta $\kappa = 8\pi G$ kde G je gravitační konstanta. Lze tedy psát finální tvar Einsteinových rovnic:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G \cdot T_{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

přičemž se do rovnice ještě přidává člen s kosmologickou konstantou Λ , avšak pro nás není důležitý. Ve vakuu se potom jedná o 10 nelineárních diferenciálních rovnic

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.41)$$

a díky nelinearitě existují netriviální řešení: Schwarzschildovo ve vakuu, Tolman-Oppenheimer-Volkoffovo řešení a jiná (ta jsou však pro tuto práci nedůležitá).

³Z Bianchiho identit se dá ukázat, že $\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R$.

1.4 Schwarzschildova metrika a TOV rovnice

Schwarzschild našel analytické řešení pro Einsteinovy rovnice [11] ve vakuu (tedy tvaru (1.41)), tzn. jedná se o metriku mimo hmotné objekty, nepopisuje vnitřek hvězd.. Ansatzem rovnice (1.41) je volba sféricky symetrické metriky [11]. Transformujeme tedy metriku do sférických souřadnic tak, že bude tvaru

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + C(r) r^2 d\Omega^2, \quad \text{kde} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.42)$$

přičemž A, B, C nezávisí na θ nebo t (máme tedy možnost volby souřadnic neboť fyzika musí být nezávislá na volbě transformace [11] a lze tedy volit novou radiální souřadnici jako $\bar{r} = C(r) \cdot r$, takže nyní

$$ds^2 = -\bar{A}(\bar{r}) dt^2 + \bar{B}(\bar{r}) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (1.43)$$

a pro jednoduchost si \bar{r} přejmenujme zpět na r . Nyní již máme k dispozici pouze dvě metrické funkce, které je třeba z Einsteinových rovnic určit. Zapišme tyto v exponenciálním tvaru, ve kterém je budeme počítat:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.44)$$

Metrický tenzor má tedy tvar

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \text{inverzně} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

přičemž požadujeme aby $r > 0$. Stále chceme najít řešení rovnice (1.41) a tedy je třeba najít komponenty Ricciho tenzoru. Derivací komponent $g_{\mu\nu}$ lze najít $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ a další derivací pak najdeme požadované $R_{\mu\nu}$ (viz A.1):

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left(-\alpha'' + \alpha' \beta' - \alpha'^2 - \frac{2}{r} \alpha' \right) = 0, \quad (1.46)$$

$$R_{11} = \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 - \frac{2}{r} \beta' = 0, \quad (1.47)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} (1 + r\alpha' - r\beta') - 1 = 0, \quad (1.48)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \cdot R_{22} = 0, \quad (1.49)$$

kde

- $\alpha = \alpha(r)$ a $\beta = \beta(r)$ jsou funkce souřadnice r .
- α' a β' jsou první derivace těchto funkcí podle r .
- α'' je druhá derivace funkce α podle r

a všechny komponenty jsou rovné 0 neboť se jedná o řešení (1.41), tedy vakuové. Propojením rovnic (1.46) a (1.47) dostáváme

$$e^{2(\alpha+\beta)} \cdot R_{00} + R_{11} = \frac{2}{r} (\alpha' + \beta') = 0 \quad (1.50)$$

z čehož dostaneme

$$\alpha' + \beta' = 0 \quad (1.51)$$

a tedy α, β jsou si až na konstantu a znaménko rovny. Vezměme tedy

$$\alpha = -\beta + C, \quad (1.52)$$

kde se konstanta ztratila díky požadavku na asymptoticky plochý prostoročas (tedy pro $r \rightarrow \infty$ bude $C = 0$, [11]). Nyní použitím rovnice (1.48):

$$\begin{aligned} R_{22} &= e^{-2\beta} (1 + r \cdot \alpha' - r \cdot \beta') - 1 \\ &= e^{2\alpha} (1 + 2r \cdot \alpha') - 1 \\ &= \frac{d}{dr} (r \cdot e^{2\alpha}) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

a tak

$$r \cdot e^{2\alpha} = r + K'' \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\alpha} = 1 + \frac{K''}{r} = -g_{00} \quad (1.54)$$

kde K'' je nějaká integrační konstanta, kterou nazveme Schwarzschildův poloměr [11]. Z předchozí kapitoly však známe Newtonovskou limitu pro g_{00} , která je $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$ a gravitační potenciál ve sférickém poli má tvar $\phi = -\frac{GM}{r}$. Spojením těchto poznatků určíme, že

$$K'' = -\frac{2GM}{c^2}, \quad R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.55)$$

je Schwarzschildův poloměr a metrika má tedy tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (1.56)$$

Tato Schwarzschildova metrika má dvě singularitu, kdy pro $r = 0$ se jedná skutečně o fyzikální singularitu, avšak pro $r = R_S$ se jedná pouze o singularitu vzniklou volbou souřadného systému, jehož změnou se singularita ztratí. Z metriky lze také vyčíst, že pro poloměry větší/menší, než $r = R_S$ změní časupodobné a prostorupodobné souřadnice znaménko, což odpovídá záměně Schwarzschildovského času s radiální souřadnicí za horizontem událostí (= bod, odkud není návratu pro cokoliv mřícího do $r < R_S$) a naopak. Časupodobná trajektorie se tak za horizontem stane dráhou mřící nevyhnutelně do singularity v $r \rightarrow 0$ [11]. Dle Birkhoffova teorému jakékoliv sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic ve vakuu je Schwarzschildovo řešení [17]. Znamená to tedy že abychom získali celkové řešení popisující gravitační pole vně i uvnitř hvězdy, musíme hladce napojit interiérové řešení na Schwarzschildovo řešení popisující vnějšek. Pro toto interiérové řešení požadujeme sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic a za metriku bereme ansatz (1.44). Pro odvození Einsteinových rovnic je třeba určit komponenty Einsteinova tenzoru $G_{\mu\nu}$, což půjde určením složek Ricciho tenzoru, z kterého lze určit Ricciho skalár a z toho následně potřebný $G_{\mu\nu}$ dle rovnice (1.40). Ricciho skalár je tedy dán

$$R = 2e^{-2\beta} \left(-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta' + \frac{2}{r}(\beta' - \alpha') - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} \quad (1.57)$$

přičemž čárky značí derivace dle r . Složky Einsteinova tenzoru jsou pak

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r\beta' - 1 + e^{2\beta}) \quad (1.58)$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2} (2r\alpha' + 1 - e^{2\beta}) \quad (1.59)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2\beta} \left(\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + \frac{1}{r}(\alpha' - \beta') \right) \quad (1.60)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta \cdot G_{22}. \quad (1.61)$$

Pro pravou stranu Einsteinových rovnic je třeba specifikovat tenzor energie hybnosti $T_{\mu\nu}$. Vezměme model ideální kapaliny, kdy má tenzor tvar

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + P)u_\mu u_\nu + P \cdot g_{\mu\nu} \quad (1.62)$$

kde u_μ je čtyřvektor rychlosti v soustavě souřadné v klidu, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, ϵ je hustota energie a P je tlak. Berme hmotu, která nikam neproudí, tzn. hvězda je statická:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha} \cdot \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta} \cdot P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cdot P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \cdot P \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Dáme-li jednotlivé složky (nulté, první a druhé) Einsteinova tenzoru (1.38) a tenzoru energie hybnosti (1.63) do Einsteinových rovnic tvaru (1.40), získáme sadu tří nezávislých diferenciálních rovnic:

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} (2r\beta' - 1 + e^{2\beta}) = 8\pi G \cdot \epsilon \quad (1.64)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} (2r\alpha' + 1 - e^{2\beta}) = 8\pi G \cdot P \quad (1.65)$$

$$e^{-2\beta} \left(\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + \frac{1}{r}(\alpha' - \beta') \right) = 8\pi G \cdot P \quad (1.66)$$

a zavedeme také další ansatz, ve kterém představíme novou funkci hmotnosti $m_r(r)$ (hmotnost uvnitř hvězdy):

$$e^{2\beta(r)} = \left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (1.67)$$

přičemž na pravé straně rovnice je tzv. Schwarzschildův faktor. Na povrchu hvězdy je hmotnostní funkce $m_r(r = R) = M$. Ansatz vložíme do následující diferenciální rovnice:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) \quad (1.68)$$

nebo její integrální forma:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \epsilon(r'). \quad (1.69)$$

Hmotnost (celé) hvězdy je tedy

$$M = m(r = R) = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \epsilon(r'), \quad (1.70)$$

avšak nejedná se o reálnou hmotnost neboť v integrálu se nevyskytuje skutečný přírůstek objemu. Musíme tedy ještě přejít z Jakobiánu sférické transformace:

$$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \rightarrow e^\beta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.71)$$

a reálná hmotnost hvězdy je tedy

$$\bar{M} = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 e^\beta \epsilon(r') = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \left(1 - \frac{2Gm_r(r')}{r'} \right)^{-1/2} \epsilon(r') \quad (1.72)$$

Určeme nyní $\frac{d\alpha(r)}{dr} = \alpha'$ z rovnice (1.65), kam zároveň vložíme ansatz (1.67)

$$\frac{d\alpha(r)}{dr} = G \frac{m_r(r)}{r^2} \left(1 + 4\pi \frac{r^3 P(r)}{m_r(r)} \right) \left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{r} \right)^{-1} \quad (1.73)$$

propojme se zákonem zachování $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ a dále využijme faktu, že pro naše účely je relevantní jen $\mu = \nu = 1$ což vede na diferenciální rovnici (z komponenty (1.66)) pro tlak $P(r)$:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -(\epsilon(r) + P(r)) \frac{d\alpha(r)}{dr}. \quad (1.74)$$

Nyní již stačí propojit rovnice (1.73) a (1.74) a získáme hledanou Tolman-Oppenheimer-Volkoff rovnici (zkráceně TOV rovnici):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m_r(r)\epsilon(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right) \left(1 + 4\pi \frac{r^3 P(r)}{m_r(r)} \right) \left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (1.75)$$

kteřá dává informace o vývoji tlaku uvnitř kompaktní hvězdy, přičemž na povrchu je $P(R) = 0$. První člen v TOV rovnici, tzn. $\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m_r(r)\epsilon(r)}{r^2}$ je Newtonovský člen (z hydrostatické rovnováhy), další členy představují relativistické korekce (dle OTR), kde první korekce modifikuje hustotu $\rho(r)$ a bere v potaz vazbu gravitace na hustotu energie $\epsilon(r)$ a tlak hmoty $P(r)$, druhá korekce modifikuje hmotnost $m_r(r)$ a přidává další člen z tlaku hmoty a poslední korekce modifikuje poloměr a bere v potaz zakřivení časoprostoru popsané Schwarzschildovým faktorem (1.67) [11].

Z Einsteinových rovnic máme pouze tři nezávislé a to rovnice (1.68), (1.73) a (1.74) a lze ukázat, že ze složky 22 ((1.66)) Einsteinovy rovnice neplyne další omezení když namísto toho použijeme podmínku zachování energie a hybnosti. Jelikož jsou v rovnicích čtyři nezávislé veličiny (dvě metrické funkce $\alpha(r)$, $m_r(r)$, hustota energie $\epsilon(r)$ a tlak $P(r)$), potřebujeme ještě jednu rovnici k řešení soustavy. Touto rovnicí bude vztah mezi hustotou energie a tlakem ve tvaru

$$P = P(\epsilon), \quad \text{případně} \quad \epsilon = \epsilon(P), \quad (1.76)$$

kteřá zafixuje vlastnosti hmoty ze které je hvězda tvořena. Tento vztah se nazývá stavová rovnice (anglicky equation of state, zkráceně EOS) a popisuje hmotu v klasických i kvantových systémech. Obdržením všech čtyř rovnic jsme schopni popsat vlastnosti kompaktních hvězd [11].

Kapitola 2

Základní termodynamické vztahy

2.1 Hustá hmota a EOS

Zabývejme se nyní termodynamickým popisem souborů (mikronaninický, kanonický, grandkanonický), přičemž později budeme uvažovat nulovou teplotu (kvůli Fermiho degenerovaným plynům). V mikrokanonickém souboru je vnitřní energie dána základní rovnicí termodynamiky [11]:

$$dU = -P \cdot dV + T \cdot dS + \sum_i \mu_i \cdot dN_i, \quad (2.1)$$

kde V je objem, P je tlak, T je teplota, S entropie a μ_i je chemický potenciál a N_i je počet částic, přičemž index i vyjadřuje i -tý typ částice. Vnitřní energie je homogenní funkce objemu, entropie a počtu částic $U = U(V, S, N_i)$,

$$U = -PV + TS + \sum_i \mu_i N_i, \quad (2.2)$$

přičemž po vydělení objemem získáme hustotu energie

$$\epsilon = -P + Ts + \sum_i \mu_i n_i, \quad (2.3)$$

kde n_i, s jsou hustoty původních N_i, S . Vyjádříme-li tlak, máme

$$P = -\epsilon + Ts + \sum_i \mu_i n_i. \quad (2.4)$$

Naším cílem je najít stavovou rovnici, neboť ta určuje vlastnosti hmoty v kompaktních objektech jako reakci hmoty (ve velkých objemech) na gravitaci, rotaci a elektromagnetická pole. Počítejme nyní s hmotou (která se obecně může skládat z různých částic), pro kterou platí první zákon termodynamický (2.1). V chemické rovnováze jsou reakce částic kompenzované zpětnou reakcí a N_i je konstantní [11]. Uvažujme, že energie systému se nemění, že systém nekoná práci a nevyměňuje teplo s okolím:

$$dU = 0, \quad dV = 0 \quad dS = 0 \quad (2.5)$$

a tedy (2.1) se redukuje na

$$dU = 0 = \sum_i \mu_i dN_i. \quad (2.6)$$

Pomocí chemického potenciálu jsme schopni popsat podmínky, kdy jsou různé druhy částic v rovnováze. Je také spojen s energetickými stavy částic (což ovlivňuje hustotu energie a tlak) a taktéž pomáhá určit, jak hmota reaguje na změny tlaků, teploty atd. Vezměme nyní hmotu v β rovnováze, tzn. mějme ideální studený plyn elektronů, protonů a neutronů v chemické rovnováze, kde je zachované baryonové číslo a náboj, leptonové číslo se nezachovává a chemický potenciál je 0 [11] (rovnováha zahrnuje β rozpad). Chovejme se k neutronům a protonům jako k volným částicím, takže ke slabé interakci

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.7)$$

dojde když má elektron dostatečnou energii, aby překonal hmotnostní schodek mezi hmotnostmi neutronu m_n a protonu m_p a to $m_n - m_p = 1,29 \text{ MeV}$ [11]. Opačná reakce

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (2.8)$$

je elektronový záchyt. V chemické rovnováze ($T = 0, \mu_\nu = 0$) je chemický potenciál částic

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n. \quad (2.9)$$

Jelikož se jedná o fermiony, podléhají Pauliho vylučovacímu principu a zaplňují postupně energetické hladiny až do nejvyšší tzv. Fermiho energie ¹ $E_{F,i}$ (tzv. degenerovaný plyn kdy jsou kvantové efekty velmi významné,) a pro nulovou teplotu je energie, kterou je potřeba dodat ke přidání fermionu, dána právě $E_{F,i}$, která je rovna chemickému potenciálu

$$\mu_i = E_{F,i} = \sqrt{k_{F,i}^2 + m_i^2}, \quad (2.10)$$

kde $k_{F,i}$ je Fermiho hybnost a m_i je hmotnost i -té částice. Dosazením tohoto do (2.9) dostáváme

$$\sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2} + \sqrt{k_{F,p}^2 + m_p^2} = \sqrt{k_{F,n}^2 + m_n^2}. \quad (2.11)$$

Podívejme se nyní na způsob, jakým zjistit, které částice jsou favorizované ve velmi hustých látkách. Hustota počtu částic je dána integrálem přes všechny obsazené stavy, takže pro degenerovaný fermionový plyn se jedná o tzv. Fermiho sféru (poloměr této sféry se nazývá Fermiho vektor \mathbf{k}_F neboli Fermiho hybnost):

$$n_i = g_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{k_{F,i}} dk k^2 = \frac{g_i}{2\pi^2} \frac{1}{3} k_{F,i}^3 = \frac{g_i}{6\pi^2} k_{F,i}^3 \quad (2.12)$$

kde g_i je faktor degenerace (neboli počet možných kvantových stavů jedné částice se stejnou hybností). Hmota je navíc elektricky neutrální a tak počet protonů a elektronů musí splňovat:

$$n_e = n_p \implies g_e \cdot k_{F,e}^3 = g_p \cdot k_{F,p}^3 \quad (2.13)$$

a faktory degenerace pro elektrony a protony jsou $g_{e,p} = 2s + 1 = 2$ neboť $s = 1/2$ je spin částic, pak

$$k_{F,e} = k_{F,p}. \quad (2.14)$$

Protože hmotnost neutronu je větší než součet hmotností elektronu a protonu, tzn. $m_p + m_e = 938.79 \text{ MeV} < m_n = 939.57 \text{ MeV}$, je plyn složený z protonů a elektronů energeticky výhodnější při

¹Fermiho energie je energie pod jejíž hladinou je dostatek orbitalů pro daný počet částic v systému neboli energie, pod kterou je tolik kvantových stavů, kolik je částic v systému. [18].

nízkých hustotách. Při kritické hustotě elektronů se potom Fermiho energie elektronů a protonů sčítají a dohromady dají hmotnost neutronu, ty se tak v látce začnou vyskytovat a jejich $k_{F,n} = 0$. Z rovnice (2.11) tak máme

$$\sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2} + \sqrt{k_{F,p}^2 + m_p^2} = m_n, \quad (2.15)$$

kde $k_{F,p} \ll m_p$ pro nerelativistické protony a tedy

$$\sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2} \approx m_n - m_p \quad \leftrightarrow \quad k_{F,e}^2 = (m_n - m_p)^2 - m_e^2. \quad (2.16)$$

Zajímá nás, při jaké hustotě nastane takováto situace, což zjistíme z určení kritické hustoty protonů. Do rovnice (2.12) dosadíme (2.16) pro $k_{F,i}$ a využijeme také faktu že $n_e = n_p$ (elektricky neutrální látka):

$$n_p = \frac{1}{3\pi^2} [(m_n - m_p)^2 - m_e^2]^{3/2} \approx 7.4 \times 10^{30} \text{ cm}^{-3}, \quad (2.17)$$

z čehož již můžeme určit kritickou hustotu jako

$$\rho_p = m_p \cdot n_p \approx 1.2 \times 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (2.18)$$

Při zvyšující se hustotě se zvyšuje taktéž počet neutronů a postupně se vytvoří hmota tvořená neutrony. Pro ultrarelativistické limity (tzn. $k_{F,i} \gg m_i$) lze opět dosadit do (2.11) a využít neutrality látky a máme tak

$$k_{F,n} \approx k_{F,e} + k_{F,p} = 2k_{F,p} \quad (2.19)$$

a umocníme-li celou rovnici abychom měli k_F^3 (protože $n \propto g \cdot k_F^3$) a opět $g = 2$, pak máme

$$8n_p = n_n \quad (2.20)$$

což znamená, že na každý proton je v látce v tomto režimu přítomno osm neutronů. Důvodem je energetická výhodnost; je snazší do systému dodat elektricky neutrální částici namísto dvou nabitých částic pro zajištění elektricky neutrální látky [11].

2.2 Stavová rovnice

Zkusme nyní najít stavovou rovnici ve tvaru

$$P = P(\epsilon). \quad (2.21)$$

Jelikož se jedná o bílé trpaslíky a neutronové hvězdy, které jsou stabilní díky tlaku degenerovaných částic [3], budeme brát v potaz fermionový plyn, nejprve elektronový pro bílé trpaslíky. Vydeme-li z rovnice (2.12) a využijeme-li fakt, že degenerační faktor elektronů je $g_e = 2$ a $\hbar \neq 1$, máme

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (2.22)$$

kde k_F je Fermiho energie. Jelikož je každý elektron neutralizován protonem (a ty jsou zase spojeny s neutrony v jádře), je možné zanedbat hmotnost elektronu m_e neboť hmotnost jádra m_N je patřičně vyšší a hustota je pak dána

$$\rho = nm_N \frac{A}{Z}, \quad (2.23)$$

kde $\frac{A}{Z}$ je počet nukleonů na elektron. Dosazením do (2.22) a vyjádřením k_F dostáváme

$$k_F = \hbar \left(\frac{Z\rho}{Am_p} 3\pi^2 \right)^{1/3}. \quad (2.24)$$

Hustotě energie taktéž převažuje hmotnost nukleonů a tedy $\epsilon \approx \rho c^2$. Příspěvek elektronů do hustoty energie je dán [19]:

$$\epsilon_{elektrony}(k_F) = \frac{8\pi}{2\pi\hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} k^2 dk = \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 + x) \sqrt{1 + x^2} - \sinh^{-1}(x)], \quad (2.25)$$

kde $x = k_F/m_e c$ a celková hustota energie je tedy

$$\epsilon = nm_n \frac{A}{Z} + \epsilon_{elektrony}. \quad (2.26)$$

Abychom dostali žádanou stavovou rovnici, je třeba si ještě vyjádřit tlak p , přičemž ze vztahu (2.1) využijeme, že při $T = 0$ platí:

$$p = \left[- \frac{\partial U}{\partial V} \right]_{T=0} = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn} = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = n\mu - \epsilon, \quad (2.27)$$

kde ϵ je dáno rovnicí (2.26) a kde μ je chemický potenciál elektronů. Použitím rovnic (2.27) a (2.25) dostáváme integrál:

$$p(k_F) = \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4}} dk = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x) \sqrt{1 + x^2} + 3 \sinh^{-1}(x)].^2 \quad (2.28)$$

Vykreslením závislosti ϵ na p dostaneme křivku tvaru $\epsilon^{4/3}$ [19] jak lze vidět z grafu 2.1.

Tento tvar stavové rovnice se také nazývá polytropická. Vezmeme-li v úvahu relativistický plyn (kdy jsou elektrony natolik stlačeny, že se stávají relativistickými), tzn. $k_F \gg m_e$, rovnice (2.28) se zjednoduší na

$$p(k_F) = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} u^3 du = \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \cdot \left(\frac{k_F}{m_e c} \right)^4 = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{Z\rho}{Am_N} 3\pi^2 \right)^{4/3} \approx K_{rel} \epsilon^{4/3}, \quad (2.29)$$

což je výše zmiňovaná rovnice tvaru $\epsilon^{4/3}$ a kde

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{Z\rho}{Am_N} 3\pi^2 \right)^{4/3}. \quad (2.30)$$

Dalším případem je nerelativistický plyn, tzn. $k_F \ll m_e$, kdy se (2.28) zjednoduší na

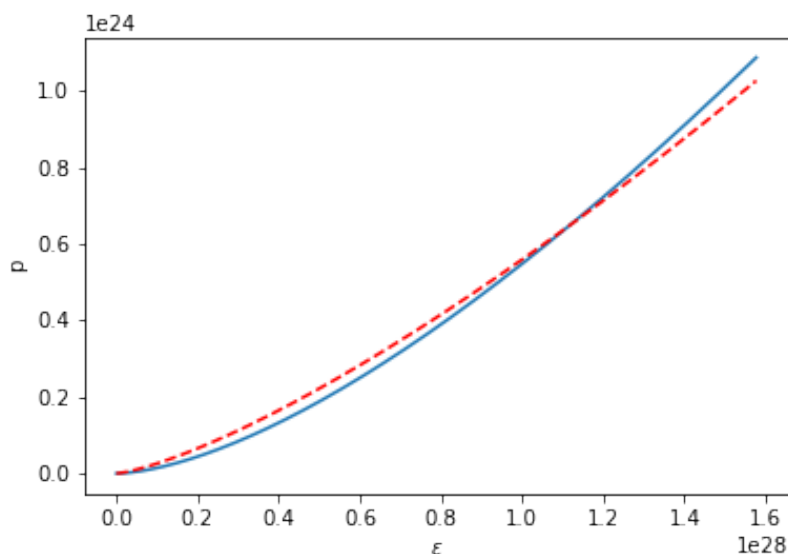
$$p = K_{nonrel} \epsilon^{5/3}, \quad (2.31)$$

kde

$$K_{nonrel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{Z\rho}{Am_N} 3\pi^2 \right)^{5/3} \quad (2.32)$$

a tedy pro nerelativistický elektronový plyn v bílých trpaslících má rovnice tvar $\epsilon^{5/3}$.

²Výpočet integrálu pro p a ϵ viz A.2, (A.46), (A.26)



Obrázek 2.1: Vztah mezi tlakem p a hustotou energie ϵ v modelu Fermiho plynu. Jednotky jsou ergs/cm^3 . Modrá čára je vykreslení závislosti z rovnic (2.28) a (2.25), oranžová je potom vykreslená křivka $y \sim x^{4/3}$ pro demonstraci podobnosti.

2.2.1 Polytropy

Podívejme se ještě podrobněji na polytropy. Polytropické stavové rovnice jsou obecně rovnice tvaru

$$P = K \cdot n^\Gamma, \quad (2.33)$$

kde K, Γ jsou konstanty a pro Γ obecně platí [11]:

$$\Gamma = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln n}, \quad (2.34)$$

kde n je hustota počtu částic. Otázkou zůstává, jak do této rovnice zakomponovat ϵ abychom získali požadovaný tvar $P = P(\epsilon)$. Vyjdeme ze známých vztahů jaderné fyziky, konkrétně z vazebné energie E_b na nukleon:

$$\frac{E_b}{A} = \frac{\epsilon}{n_B} - m_N, \quad (2.35)$$

kde n_B je hustota baryonů v látce, m_N je hmotnost nukleonů a ϵ je hustota energie. Rovnici (2.35) lze převést na požadovaný tvar (2.33) pomocí termodynamických vztahů. Zderivujme tedy výraz podle $\frac{\partial}{\partial n_B}$:

$$\frac{\partial}{\partial n_B} \left(\frac{E}{A} \right) = \frac{1}{n_B} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} - \frac{\epsilon}{n_B^2} \quad (2.36)$$

a taktéž známe vztah pro ϵ (tzv. Eulerův vztah pro nulovou entropii, [11]):

$$\epsilon = -P + \mu_B \cdot n_B. \quad (2.37)$$

Dosazením (2.37) do (2.36) dostáváme:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} = \mu_B \quad \text{a} \quad \frac{\epsilon}{n_B^2} = -\frac{P}{n_B^2} + \frac{\mu}{n_B} \rightarrow \frac{\partial}{\partial n_B} \left(\frac{\epsilon}{n_B^2} \right) = \frac{P}{n_B^2}. \quad (2.38)$$

yní lze vyjádřit tlak:

$$P = n_B^2 \frac{\partial \left(\frac{\epsilon}{n_B^2} \right)}{\partial n_B}. \quad (2.39)$$

Hustota energie je termodynamickým potenciálem vyjádřeným jako $\epsilon = \epsilon(n)$ anebo je tlak termodynamickým potenciálem vyjádřeným jako $P = P(\mu)$, avšak rovnice ve formě (2.33) není termodynamický potenciál a nelze přímo dopočítat chybějící termodynamické proměnné (ϵ, μ). Využijte se tedy triku a zinvertujeme termodynamický vztah mezi tlakem a hustotou energie (vyjdeme právě z rovnice (2.39)):

$$\frac{d \left(\frac{\epsilon}{n} \right)}{dn} = \frac{P}{n^2} \quad \leftrightarrow \quad d \frac{\epsilon}{n} = \frac{P}{n^2} dn = K n^{\Gamma-2} dn, \quad (2.40)$$

kde se zároveň dosadil vztah (2.33). Integrací této dostáváme:

$$\frac{\epsilon}{n} = \frac{K}{\Gamma-1} \cdot n^{\Gamma-1} + \text{const.} \quad (2.41)$$

a je tedy třeba ještě určit konstantu. Využijeme faktu, že pro malou hustotu částic $n \rightarrow 0$ je $\frac{\epsilon}{n} \rightarrow m$ (kde m je hmotnost částice) a tedy:

$$\epsilon = m \cdot n + \frac{K}{\Gamma-1} \cdot n^{\Gamma-1}. \quad (2.42)$$

Nyní můžeme dopočítat chemický potenciál μ pro polytropy:

$$\mu = \frac{d\epsilon}{dn} = m + \frac{K \cdot \Gamma}{\Gamma-1} \cdot n^{\Gamma-1}. \quad (2.43)$$

Protože se v této práci jedná o kompaktní objekty, které mají obecně velmi vysokou hustotu a jsou popsány právě polytropickými EOS, je třeba ověřit zda tato stavová rovnice není akauzální³, tzn. pokud by rychlost zvuku c_S v látce překročila rychlost světla v přirozených jednotkách $c = 1$. Rychlost zvuku v látce je dána

$$c_S^2 = \frac{\partial P}{\partial \epsilon} = \frac{dP}{dn} \frac{dn}{d\epsilon}, \quad (2.44)$$

kde s použitím (2.33):

$$\frac{dP}{dn} = K \cdot \Gamma \cdot n^{\Gamma-1} \quad \text{a} \quad \frac{dn}{d\epsilon} = \frac{1}{n} = \frac{1}{m + K \frac{\Gamma}{\Gamma-1} n^{\Gamma-1}} \quad (2.45)$$

a tedy dosazením do (2.44)

$$c_S^2 = \frac{K \cdot \Gamma \cdot n^{\Gamma-1}}{m + K \frac{\Gamma}{\Gamma-1} n^{\Gamma-1}} < 1 \quad (2.46)$$

a lze-li zanedbat m , pak získáváme zjednodušený vztah

$$c_S^2 = \Gamma - 1 < 1 \quad \leftrightarrow \quad \Gamma < 2 \quad (2.47)$$

a tedy polytopy jsou akauzální pro $\Gamma > 2$. Limitující případ je $\Gamma = 2$, což zároveň udává co největší poměr mezi tlakem a hustotou energie jako $P = \epsilon$ a tedy $c_S^2 = 1$.

³Kauzalita znamená že příčina musí vždy předcházet všem svým následkům v jakékoliv vztažné soustavě. Informace (mikroskopické nebo makroskopické) nemohou být nikdy přeneseny přes prostoročasový interval nebo přes záporný časový nebo záporný světelný interval [20].

2.3 Kompaktní hvězdy

Podívejme se nyní, jaké síly působí v kompaktních hvězdách, přičemž budeme brát v úvahu Newtonovské hvězdy, u kterých nejsou zapotřebí korekce OTR. Vezměme nyní homogenní sféru o celkové hmotnosti M s poloměrem R a hustotou $\rho(r)$. Zintegrujeme-li hustotu celé sféry od 0 do R , získáme hmotnost $m_r(r)$ obsaženou v poloměru r :

$$m_r(r) = \int dr'{}^3 \rho(r') = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho'(r), \quad (2.48)$$

přičemž diferenciální tvar rovnice je

$$\frac{dm_r(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad \text{kdy } r = 0 \rightarrow m_r(0) = 0, \quad r = R \rightarrow m_r(R) = M. \quad (2.49)$$

a protože $\epsilon(r) = \rho(r) \cdot c^2$, tak

$$\frac{dm_r(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}. \quad (2.50)$$

Ve hvězdě proti sobě neustále působí dvě síly: gravitační a tlaková a tyto udržují hvězdu v rovnováze, tzn. nemá tendence se hroutit nebo naopak roztrhat. Budeme tedy uvažovat sféru v hydrostatické rovnováze (do poloměru r), tzn. že tlak na plochu A je vybalancován gravitační silou [11]. Přidejme nyní na sféru slupku o tloušťce dr a libovolné ploše A , hmotnost slupky bude

$$dm_r(r) = A \cdot \rho(r) dr. \quad (2.51)$$

a tato bude působit gravitační silou

$$dF_g = -G \frac{m_r(r) dV \rho(r)}{r^2}, \quad dV = r^2 d\Omega dr, \quad (2.52)$$

kde G je gravitační konstanta a $d\Omega$ je úhlový element slupky na střed sféry a platí $dA = r^2 d\Omega$ a tedy

$$dF_g = -G \frac{m_r(r) \rho(r) r^2 d\Omega dr}{r^2} = -G \frac{m_r(r) \cdot \rho dA dr}{r^2}. \quad (2.53)$$

Tlaková síla vyrovnávající tuto gravitační a působící na element plochy je dána

$$dF_P = dP(r) dA \quad (2.54)$$

a porovnáním těchto (pro hydrostatickou rovnováhu) získáme:

$$dF_P = dF_g = dA \cdot dP(r) = -G \frac{m_r(r) \cdot \rho dA dr}{r^2} \quad (2.55)$$

a po vyjádření

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m_r(r) \rho(r)}{r^2}, \quad (2.56)$$

což je přesně první složka TOV rovnice (1.75). Okrajové podmínky pro tlak jsou

$$P(0) = P_c, \quad P(R) = 0 \quad (2.57)$$

kde P_c je centrální tlak ve sféře. Rovnice bude třeba převést do bezrozměrného tvaru, abychom získali chtěný graf závislosti $M(r)$ na R a $P(r)$ na R .

Kapitola 3

Základní přehled výsledků pro stavovou rovnici jaderné hmoty

3.1 Bílí trpaslíci

Bílé trpaslíci jsou mrtvé hvězdy o hmotnosti M_{wd} zhruba jednoho Slunce ($M_{wd} = M_{\odot}$), o poloměru přibližně $R_{wd} \approx 5000$ km a hustotě kolem $\rho_{wd} \approx 10^6$ g/cm³ [3]. Takové hvězdy již nespalují jaderné palivo, ale postupně chladnou vyzařováním svojí zbytkové energie.

Bílé trpaslíci jsou stabilní díky tlaku degenerovaných fermionů, konkrétně elektronů, který zabraňuje hvězdě v dalším kolapsu, avšak tento fakt astronomové zpočátku nevěděli. Že se jedná o kompaktní objekty však bylo patrné z prvních pozorování těchto hvězd. Hmotnost hvězdy Sirius B (jedna z hvězd binárního systému) byla například určena aplikací třetího Keplerova zákona¹, přičemž první odhady se pohybovaly od $0,75 M_{\odot}$ do $0,95 M_{\odot}$ [3]. Zářivý výkon L hvězdy byl odhadnut ze znalosti vzdálenosti od Země a pozorovaným tokem na $\frac{1}{360}$ zářivého výkonu Slunce. V roce 1914 potom W. S. Adams pozoroval ze spektra Sิริuse B [21], že se jedná o „bílou“ hvězdu o teplotě přibližně 8000 K a použitím Stefan-Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴ je Boltzmannova konstanta) se poloměr hvězdy R určil na ≈ 18800 km. V současné době jsou hodnoty veličin pro Sirius B $M = 1,018 \pm 0,011 M_{\odot}$ a $R = 0,00864 \pm 0,00012 R_{\odot}$, kde R_{\odot} je poloměr Slunce [11]. A. Eddington to zhodnotil jako [22]:

„Máme hvězdu hmotnou přibližně jako Slunce a o poloměru jako má Uran.“

a po ověření velikosti hvězdy z měření červeného posuvu Adamsem konstatoval, že

„Adams zabil dvě mouchy jednou ranou; nejen, že našel nový způsob, jak otestovat Einsteinovu obecnou teorii relativity, ale také zjistil, že látka 2000krát hustší než platina je nejen možná, ale dokonce přítomna ve vesmíru.“ [3].

Nebylo však ještě jasné, proč hvězdy nekolabují, až do srpna roku 1926, kdy Dirac formuloval Fermi-Diracovu statistiku (jejíž základy položil právě Fermi). V prosinci roku 1926 potom R. H. Fowler použil tuto statistiku na svůj výzkum kompaktních hvězd, aby vysvětlil fyziku bílých trpaslíků a zjistil, že tlak zabraňující gravitačnímu kolapsu hvězdy je právě tlak degenerovaných elektronů [1].

¹Druhé mocniny oběžných dob planet jsou přímo úměrné třetím mocninám hlavních poloos jejich drah. Třetí Keplerův zákon implikuje, že doba oběhu planety kolem hvězdy se rychle zvyšuje s poloměrem její dráhy.

Model bílých trpaslíků beroucí v potaz relativistické efekty do stavové rovnice degenerovaných elektronů potom zkonstruoval Chandrasekhar v roce 1931 [23]. Ten zjistil, že pro bílé trpaslíky existuje maximální hmotnost $M_{Chandra} \approx 1,4 M_{\odot}$, přičemž přesná hodnota závisí na složení hmoty ve hvězdě. Tato maximální hodnota hmotnosti je pojmenovaná po svém objeviteli jako Chandrasekharova hmotnost a více ji rozebereme v následující podkapitole.

3.1.1 Vztahy mezi hmotností a poloměrem polytrop a Chandrasekharova hmotnost

Budeme pracovat s již odvozenými rovnicemi pro koule v hydrostatické rovnováze a pro polytropu. Ty jsou obecně definované jako (2.33), lze je však napsat také jako

$$P = K' \cdot \rho^{\Gamma}, \quad (3.1)$$

kde $\rho = m \cdot n$ je hustota pro částici o hmotnosti m a $K' = K/m^{\Gamma}$. Pro sféru v hydrostatické rovnováze pak platí viz (2.56):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m_r(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \quad (3.2)$$

přičemž pro $m_r(r)$ platí viz (2.48):

$$m_r(r) = \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (3.3)$$

a celková hmotnost koule M o poloměru R je tedy:

$$M = m_r(R) = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho(r'). \quad (3.4)$$

K nalezení řešení diferenciální rovnice (3.2) udělejme následující předpoklady: gradient tlaku necht' je dán přibližně rozdíly mezi tlakem v centru (tzn. $r = 0$) $P_c = P(0)$ a tlakem na povrchu ($r = R$) $P(R) = 0$. Průměrná konstantní hustota je

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (3.5)$$

a vezmeme-li $r = R$ na pravou stranu rovnice (3.2), získáme:

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{\Delta P}{\Delta R} \approx \frac{P(0) - P(R)}{-R} = -\frac{P_c}{R} \propto -G \frac{m\bar{\rho}}{R^2} \quad (3.6)$$

a dosazením (3.5) dostáváme:

$$P_c \propto G \frac{M}{R} \cdot \frac{M}{R^3} = G \frac{M^2}{R^4}. \quad (3.7)$$

Takový vztah spojuje centrální tlak s hmotností a poloměrem obyčejné hvězdy v hydrostatické rovnováze. Dále použijme stavovou rovnici pro polytropu, kde $P \propto \rho^{\Gamma}$ a zbavme se tak centrálního tlaku:

$$P_c = K' \cdot \bar{\rho}^{-\Gamma} \propto K' \cdot \left(\frac{M}{R^3}\right)^{\Gamma} \propto G \frac{M^2}{R^4}, \quad (3.8)$$

přičemž $P_c \propto G \frac{M^2}{R^4}$ je tlak způsobený gravitací a $P_c \propto K' \cdot \left(\frac{M}{R^3}\right)^{\Gamma}$ je tlak působící proti gravitační síle. Jejich srovnáním tak máme podmínku na stabilitu hvězdy a po úpravách lze dojít k výrazu

$$M^{2-\Gamma} \cdot R^{3\Gamma-4} \propto \frac{K'}{G} = \text{const.} \quad (3.9)$$

Pomocí této rovnice jsme pak schopni najít podmínku pro poloměr hvězdy v hydrostatické rovnováze v závislosti na polytropickém faktoru Γ :

- pro $\Gamma < 4/3$: $G \frac{M^2}{R^4}$ roste a $K' \cdot \left(\frac{M}{R^3}\right)^\Gamma$ klesá spolu s $R \rightarrow 0$, tedy gravitace bude hvězdu smršťovat a tlak působící proti této síle nebude dostatečný. Hvězda zkolabuje do černé díry. Tato možnost je tedy nestabilní.
- pro $\Gamma = 4/3$: z rovnice (3.9) nám vyjde $R = 1$ a $M = const.$, máme tedy $M \propto \left(\frac{K'}{G}\right)^{3/2}$. Zkusme se ještě podívat na K' . Pro ultrarelativistické elektrony vezměme rovnici (2.29) a označme $K' = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{Z^3 \pi^2}{A m_n}\right)$ (kde m_n je hmotnost nukleonu), z čehož lze vidět proporční vztah $K' \propto m_n^{-4/3}$ a tedy máme

$$M \propto \left(\frac{1}{G}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{m_n^{3/2}}\right)^{4/3} \rightarrow M \propto \frac{1}{G^{3/2}} \cdot \frac{1}{m_n^2} \quad (3.10)$$

a s využitím vztahu $G = 1/m_P^2$, kde m_P je Planckova hmotnost, získáváme

$$M \propto \frac{m_P^3}{m_n^2}, \quad (3.11)$$

což je tzv. Chandrasekharova hmotnost.

- pro $\Gamma = 5/3$: pro takový polytropický index se jedná o nerelativistické elektrony viz (2.31) a vztah mezi hmotností a poloměrem je

$$M \cdot R^3 = const., \quad (3.12)$$

takže hmotnost je nepřímo úměrná objemu jako $M \propto \frac{1}{R^3}$ a tudíž s klesajícím poloměrem hmotnost narůstá.

- pro $\Gamma = 2$: bude vztah mezi poloměrem a hmotností zjednodušen na

$$M^0 R^2 = const. \rightarrow R = const., \quad (3.13)$$

a tedy poloměr je nezávislý na hmotnosti hvězdy a nemění se.

- pro $\Gamma = 2 + \delta$ kde $\delta > 0$: vztah mezi hmotností a poloměrem hvězdy bude

$$M \cdot R^{-2/(\delta+3)} = const. \quad (3.14)$$

a tedy hmotnost hvězdy se zvyšuje se zvětšujícím se poloměrem.

- pro $\Gamma \rightarrow \infty$: získáváme limitní případ pro nestlačitelnou kapalinu s konstantní průměrnou hustotou $\bar{\rho} \propto M/R^3$. Máme tedy $M^{2-\Gamma} R^{3\Gamma-4} = const.$, což lze upravit:

$$M \cdot R^{\frac{3\Gamma-4}{2-\Gamma}} = const, \quad (3.15)$$

kdy můžeme členy neobsahující Γ v exponentu zanedbat a tedy

$$M \cdot R^{-3} = const. \leftrightarrow R^3 \propto M, \quad (3.16)$$

což odpovídá případu sféry, která je stabilní sama o sobě

Chandrasekharova hmotnost se dá odvodit zavedením tzv. Lane-Endenových funkcí a využitím vztahů pro polytropu a kompaktní hvězdy. Jedná se však o delší proces a pro tuto práci je důležitý spíše výsledek. Zavedení funkcí a jejich použití v rovnicích je dobře vysvětleno v knize *Compact stars* [11]. Dle

teorie vývoje hvězd lze předpokládat, že se bílý trpaslík skládá z² ⁴He, ¹²C nebo ¹⁶O. Vezměme tedy již odvozený vztah pro Chandrasekharovu hmotnost [11], která je tvaru

$$M_{Chandra} = 1,456 M_{\odot} \left(\frac{2Z}{A} \right)^2 \cdot \left(\frac{m_u}{m_A/A} \right)^2, \quad (3.17)$$

kde $m_u = m(^{12}\text{C}/12 = 931,49 \text{ MeV}$ a m_A/A je poměr hmotnosti ku nukleonovému číslu A a poměr Z/A je pro všechny jmenované prvky $\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}$. Použitím hmotnosti protonu m_p namísto m_u by se hodnota předfaktoru u Chandrasekharovy hmotnosti změnila na $1,435 M_{\odot}$. Pro bílého trpaslíka složeného ze železa ⁵⁶Fe by byl poměr $\frac{Z}{A} = \frac{26}{56} = 0,464$ a tedy limitní hmotnost takového objektu by byla významně menší, $M_{Chandra}(^{56}\text{Fe}) = 1,257 M_{\odot}$, avšak takový bílý trpaslík nemůže podle standardní teorie vývoje hvězd vzniknout [11]. Takový objekt taktéž zatím nebyl pozorován. Chandrasekharova hmotnost je tedy maximální hmotnost bílého trpaslíka a svou hodnotou se blíží hmotnosti Slunce v závislosti na složení bílého trpaslíka.

3.1.2 Bezrozměrné diferenciální rovnice pro bílé trpaslíky

Pro bílé trpaslíky nám vystačí zaobírat se prvním členem z TOV rovnice (1.75), tzn. Newtonovským členem, plynu v hydrostatické rovnováze a budeme tedy integrovat provázané diferenciální rovnice (1.68) (přičemž je nyní potřeba brát $c \neq 1$) a první člen v TOV rovnici. Bílí trpaslíci nijak významně nezakřivují prostoročas kolem sebe a navíc efekty obecné relativity začínají být důležité ve chvíli, kdy poměr $\frac{GM}{c^2 R}$ (tedy kompaktnost hvězdy, viz (1.3)) začne být nezanedbatelný (což se stane právě v případě neutronových hvězd, [19]).

Definujme funkci $\bar{M}(r) = \frac{M(r)}{M_{\odot}}$, kde $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ g}$ a dosazením do prvního členu TOV rovnice (1.75) máme:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM_{\odot}\epsilon(r)\bar{M}}{r^2 c^2} = R_0 \frac{\bar{M}\epsilon(r)}{r^2}, \quad (3.18)$$

kde $R_0 = \frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1,47 \text{ km}$, $G = 6,6743 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ a $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$. Veličiny $p(r)$, $\epsilon(r)$ mají rozměr erg/cm^3 a tak definujme také bezrozměrnou hustotu energie $\bar{\epsilon}$ a tlak \bar{p} jako:

$$p = \epsilon_0 \bar{p}, \quad (3.19)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \bar{\epsilon}, \quad (3.20)$$

kde ϵ_0 má rozměr hustoty energie a jedná se o škálovací faktor.

Pro polytropu lze tedy psát

$$\bar{p} = \bar{K} \cdot \bar{\epsilon}^{\gamma}, \quad (3.21)$$

kde $\bar{K} = K \cdot \epsilon_0^{\gamma-1}$ je bezrozměrné, avšak je snazší vyřešit rovnici (3.18) pro \bar{p} , takže si vyjádříme $\bar{\epsilon}(\bar{p})$:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{p}}{\bar{K}^{1/\gamma}}. \quad (3.22)$$

Dosazením těchto bezrozměrných veličin do (3.18) tedy získáváme:

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{G\epsilon\bar{M}(r)}{c^2 r^2 \epsilon_0} = -\frac{\epsilon\bar{M}(r)}{r^2} \cdot \frac{R_0}{\epsilon_0} = -\frac{\bar{M}(r)\bar{p}(r)^{1/\gamma}}{r^2 \bar{K}^{1/\gamma}} \cdot R_0 = -\frac{\bar{p}^{1/\gamma}\bar{M}(r)}{r^2} \cdot \alpha, \quad (3.23)$$

²Vzhledem k tomu, že se jedná o kompaktní objekt, by byl bílý trpaslík jako diamant.

kde

$$\alpha = \frac{R_0}{\bar{K}^{1/\gamma}} = \frac{R_0}{(K \cdot \epsilon_0^{\gamma-1})^{1/\gamma}}, \quad (3.24)$$

přičemž rovnice (3.23) má rozměr km^{-1} , protože α a R_0 mají rozměr km. Hodnotu α si lze libovolně volit a pro danou hodnotu α lze potom z rovnice (3.24) dopočítat ϵ_0 jako:

$$\epsilon_0 = \left(\frac{1}{\bar{K}} \cdot \left(\frac{R_0}{\alpha} \right)^\gamma \right)^{1-\gamma}. \quad (3.25)$$

Do bezrozměrného tvaru je také třeba převést rovnici (2.50), kam zavedeme již bezrozměrné $\bar{p}(r)$ a $\bar{M}(r)$ a získáme:

$$\frac{d\bar{M}}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon}{c^2 M_\odot} = \frac{4\pi r^2 \epsilon_0}{c^2 M_\odot} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} = \beta r^2 \cdot \bar{p}(r)^{1/\gamma}, \quad (3.26)$$

kde

$$\beta = \frac{4\pi \epsilon_0}{M_\odot c^2 \bar{K}^{1/\gamma}}. \quad (3.27)$$

Rovnice (3.26) má taktéž rozměry $1/\text{km}$, konstanta β potom $1/\text{km}^3$.

Tyto provázané diferencální rovnice (3.23) a (2.50) budeme integrovat od středu hvězdy, tj. $r = 0$. Počáteční podmínky tedy budou pro $\bar{M}(0) = 0$ a pro $\bar{p}(r) > 0$, přičemž poloměr hvězdy R a její hmotnost $\bar{M}(R) = M$ se budou měnit v závislosti na volbě těchto počátečních podmínek. Z důvodů numerické stability úlohy je také dobré volit konstanty α , β vzájemně nepříliš odlišné. Integrace proběhne v programovacím jazyce Python. Používáme funkci `solve_ivp` z knihovny `scipy` pro Python, která k řešení používá explicitní metodu RK45 (adaptivní metoda typu Rungu-Kutta)

3.1.2.1 Nerelativistický fermionový plyn z elektronů

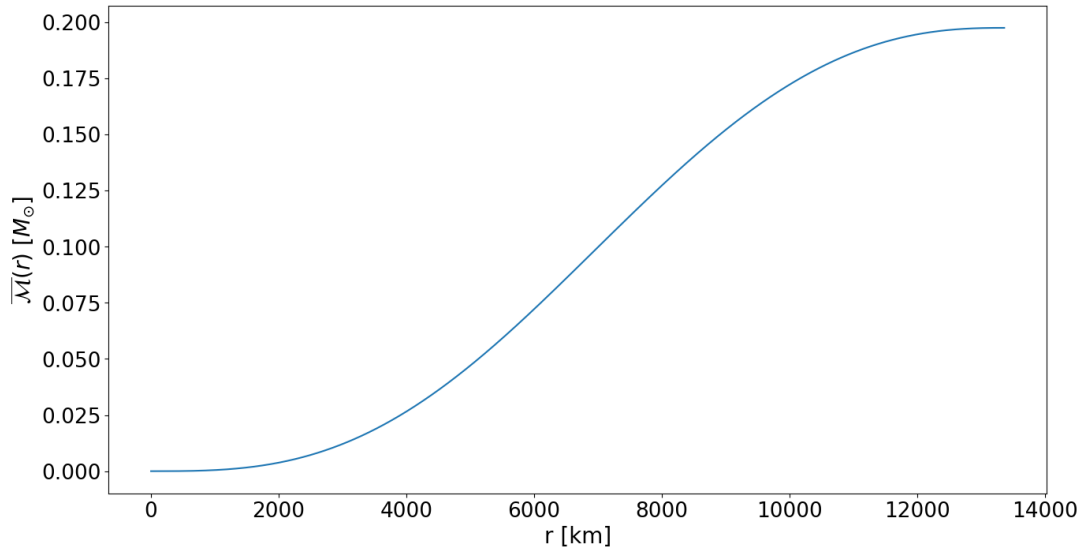
Vezměme nejprve případ, kdy bude centrální tlak hvězdy malý a elektrony tak budou nerelativistické, tzn. $k_F \ll m_e$. Pro hvězdu to znamená, že degenerovaný tlak elektronů je schopen udržet menší hmotnost (aby hvězda byla v rovnováze) a tedy se bude jednat o méně hmotné bílé trpaslíky, než v případě vysokých centrálních tlaků. Hvězdy v tomto režimu lze popsat pomocí rovnice (2.31), tedy polytropický exponent je $\gamma = 5/3$. Dopočítejme konstantu K_{nonrel} pomocí vztahu (2.32) a dále zkusme zvolit konstantu $\alpha = 0,05 \text{ km}$ a tedy dle (3.25):

$$\epsilon_0 = 2,488 \cdot 10^{37} \text{ ergs/cm}^3 = 0,01392 M_\odot c^2/\text{km}^3 \quad (3.28)$$

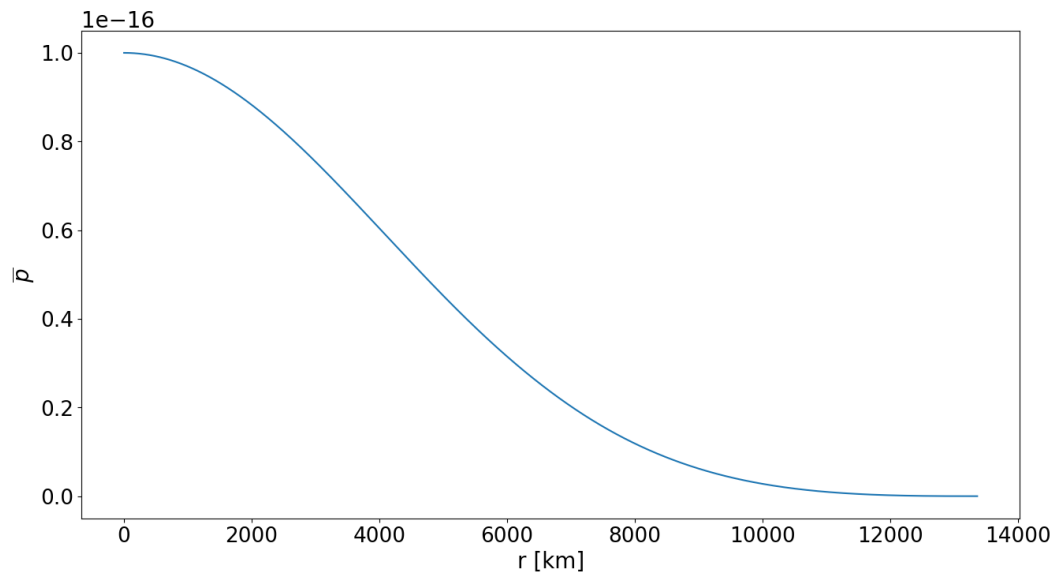
Dopočtěme ještě konstantu β dle (3.27) a máme tak

$$\beta = 0,005924 \text{ km}^{-3}. \quad (3.29)$$

Pro integraci jsme nejprve zvolili hodnotu $\bar{p}(0) = 10^{-12}$, avšak taková hodnota nám vrátila hvězdu o hmotnosti $M \approx 3 M_\odot$ a poloměru $R \approx 5300 \text{ km}$, avšak dle Chandrasekharovy hmotnosti (3.17) je takový trpaslík nemožný. Problémem je, že takový centrální tlak nespĺňuje náš nerelativistický předpoklad, tedy $k_F \ll m_e$. Je třeba vybrat mnohem menší centrální tlaky, např. $\bar{p}(0) = 4 \cdot 10^{-15}$. V tabulce 3.1.2.1 lze vidět porovnání hodnot poloměrů R a hmotností M pro jednotlivé počáteční centrální tlaky $\bar{p}(0)$. Hmotnosti těchto trpaslíků jsou poměrně nízké a závisí na volbě centrálního tlaku (čím nižší tlak, tím nižší hmotnost hvězdy), poloměry potom se snižujícím tlakem narůstají. Na grafech 3.1 a 3.2 jsou potom vykresleny závislosti $\bar{M}(r)$ na r a $\bar{p}(r)$ na r .



Obrázek 3.1: Hmotnost bílého trpaslíka $\overline{M}(r)$ v M_{\odot} vykreslená v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.18) a (3.26) v nerelativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-16}$.



Obrázek 3.2: Bezrozměrný tlak bílého trpaslíka \overline{p} vykreslený v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.18) a (3.26) v nerelativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-16}$.

$\bar{p}_{nonrel}(0)$	R_{nonrel} [km]	M_{nonrel} [M_{\odot}]
10^{-15}	10613,5	0,3940
10^{-16}	13360,4	0,1974

Tabulka 3.1: Tabulka spočtených hodnot poloměrů R v km a hmotností M v M_{\odot} pro bílé trpaslíky v nerelativistickém režimu.

3.1.2.2 Relativistický fermionový plyn z elektronů

Integrujme nyní rovnice v relativistickém režimu, tzn. platí $k_F \gg m_e$. Tento režim tedy platí pro ty nejhmotnější bílé trpaslíky, neboť budou ve svém centru mít největší tlak, který způsobí, že stlačené elektrony budou relativistické. Taková kompaktní hvězda se dá popsat právě rovnicí (2.29), kde exponent polytropy je $\gamma = 4/3$. Metodou pokus-omyl zvolíme konstantu α :

$$\alpha = R_0 = 1,473 \text{ km}, \quad (3.30)$$

z čehož lze dle rovnice (3.25) dopočítat

$$\epsilon_0 = 7,463 \cdot 10^{39} \text{ ergs/cm}^3 = 4,17 M_{\odot} c^2 / \text{km}^3. \quad (3.31)$$

Všimněme si, že tato hustota energie je mnohem vyšší, než pro hvězdu v nerelativistickém režimu. Pro $k_F \gg m_e$ lze dopočítat β pomocí rovnic (2.30) a (3.27) a hodnota je tedy

$$\beta = 52,46 \text{ l/km}^3, \quad (3.32)$$

což je sice zhruba třicetkrát větší, než α , ale pro naši numerickou metodu zvládnutelné. Zprvu zkusme zvolit počáteční tlak $\bar{p}(0) = 1$. Z této počáteční podmínky však vychází hvězdy o poloměru $R \approx 2$ km, avšak dle očekávání bychom měli získat poloměr hvězd $R \approx 10^4$ km. Problém tkví v hustotě energie $\epsilon_0 = 4,17 M_{\odot} c^2 / \text{km}^3$. Zkusme odhadnout střední hodnotu hustoty energie bílého trpaslíka o daném $R \approx 10^4$ a hmotnosti M_{\odot} jako poměr její klidové energie ku objemu:

$$\langle \epsilon \rangle \approx \frac{M_{\odot} c^2}{R^3} = 10^{-12} M_{\odot} c^2 / \text{km}^3, \quad (3.33)$$

což je mnohem menší, než předchozí spočtená hodnota. Navíc, platí-li (2.29), pak by tlak měl být asi 2000krát menší, než hustota energie. Zkusme tedy zvolit počáteční tlak jako $\bar{p}(0) \sim 10^{-15}$.

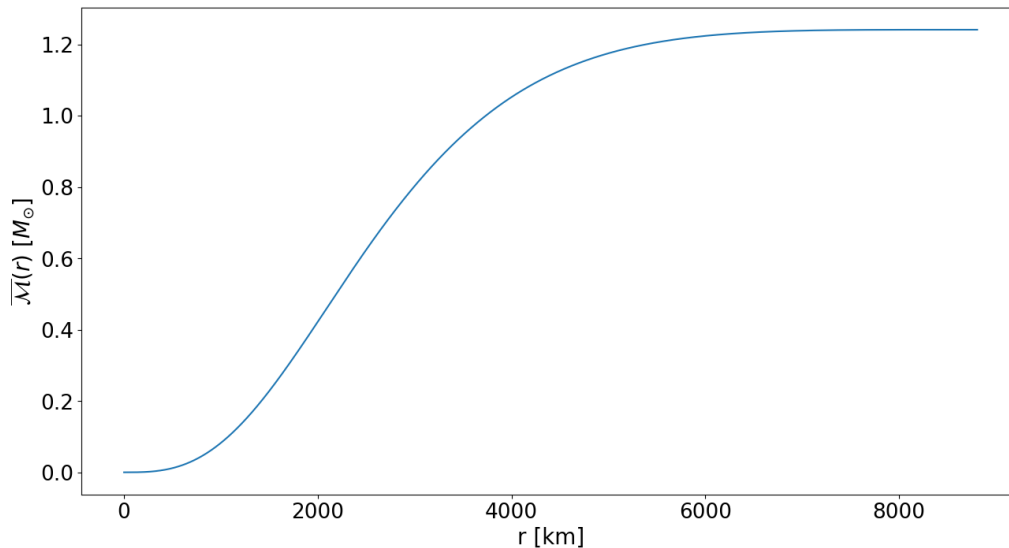
V tabulce 3.1.2.2 lze vidět jednotlivé hodnoty poloměrů R a hmotností hvězdy M v závislosti na volbě počátečních podmínek, přičemž si lze povšimnout, že hmotnost hvězdy se (téměř) nemění s měnícím se centrálním tlakem $\bar{p}(0)$.

$\bar{p}_{rel}(0)$	R_{rel} [km]	M_{rel} [M_{\odot}]
10^{-14}	4958,3	1,2438
10^{-15}	8808,5	1,2410
10^{-16}	15696	1,2449

Tabulka 3.2: Tabulka spočtených hodnot poloměrů R v km a hmotností M v M_{\odot} pro bílé trpaslíky v relativistickém režimu.

Tento výsledek je správný [19]; hmotnost bílého trpaslíka nezávisí na volbě tlaku v jeho středu. Je tomu tak neboť zvyšováním centrálního tlaku se hvězda stává pouze více kompaktní, nikoliv více

hmotnou. Na grafech 3.3 a 3.4 lze vidět závislost $\bar{M}(r)$ na r a $\bar{p}(r)$ na r . Všimněme si, že pro $r \gtrsim 8000$ km se tlak velmi zmenší a monotónně klesá k nule (oproti předchozímu nerelativistickému režimu, kdy hvězda takto rychlý pokles tlaku neměla). Pro hvězdu by to znamenalo, že má vysokou poslední vrstvu (atmosféru) [19]. Tyto hvězdy mají také menší poloměr než v předchozím nerelativistickém režimu.



Obrázek 3.3: Hmotnost bílého trpaslíka $\bar{M}(r)$ v M_{\odot} vykreslená v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.18) a (3.26) v relativistickém režimu pro centrální tlak $\bar{p}(0) = 10^{-15}$.

Ani jedna z těchto polytrop však není zcela fyzikální nebo alespoň ne pro všechny režimy. Nereativistický předpoklad totiž selhává pro centrální tlaky $\bar{p}(0) > 10^{-14}$ (tzn. pro hmotnější a také častěji pozorované bílé trpaslíky) a relativistický režim zase nebude fungovat pro případy, kdy se tlak limitně blíží 0, tzn. ve svrchních vrstvách hvězdy. Otázkou tedy je, zda jsme schopni najít takovou stavovou rovnici, která by byla schopná pokrýt celý rozsah tlaků pro bílé trpaslíky.

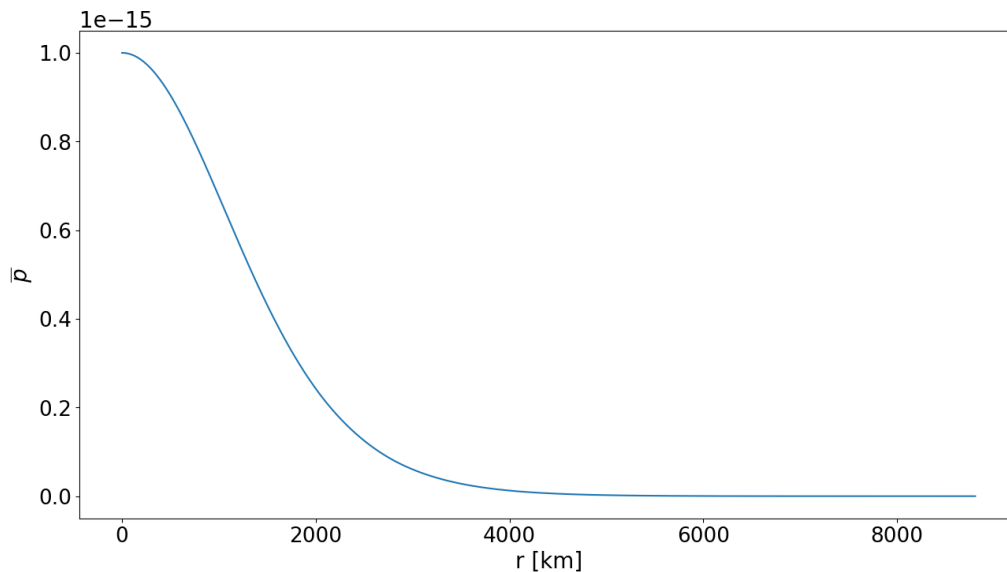
Takový případ pro bílé trpaslíky v této práci zahrnovat nebudeme, neboť se do něj ponoříme více až v sekci pro neutronové hvězdy. Předpis pro stavovou rovnici takového režimu by měl obecně být tvaru

$$\bar{\epsilon}(\bar{p}) = A_{nonrel} \cdot \bar{p}^{3/5} + A_{rel} \cdot \bar{p}^{3/4}, \quad (3.34)$$

přičemž druhý člen bude převládat pro vysoké centrální tlaky (neboť jde o relativistický režim), avšak první člen bude významnější pro nízké centrální tlaky, tedy pro nerelativistické kompaktní objekty. Takovou rovnici pak lze použít namísto $\bar{p}(r)$ v pravých stranách rovnic (3.26) a (3.23) pro bílé trpaslíky a taktéž v bezrozměrných diferenciálních rovnicích pro neutronové hvězdy, které teprve odvodíme.

3.2 Neutronové hvězdy

V části o bílých trpaslících jsme zavedli Chandrasekharovu hmotnost $M_{Chandra} \approx 1,4 M_{\odot}$. Co se však děje s hvězdami překračujícími hmotnosti Slunce? Roli OTR v úpravě závislosti hmotnosti na poloměru



Obrázek 3.4: Bezrozměrný tlak bílého trpaslíka \bar{p} vykreslený v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.18) a (3.26) v relativistickém režimu pro centrální tlak $\bar{p}(0) = 10^{-15}$.

hvězdy poprvé uvedl Kaplan [3]. Navrhl, že OTR indukuje dynamickou nestabilitu pro poloměry menší, než $1,1 \cdot 10^3$ km. Po objevu neutronu si vědci uvědomili, že při velmi vysokých hustotách budou elektrony s protony vytvářet neutrony (jako je tomu v (2.7)). Motivací tedy byl nápad, že zdroj energie hmotnějších běžných hvězd by mohl být inverzní β rozpad. Později pánové Schatzman [24] a nezávisle Wheeler a Harrison [25] zakomponovali inverzní β rozpad do stavové rovnice pro bílé trpaslíky a následně Schatzman a Harrison, Wakano a Wheeler ukázali, že následkem bude taktéž dynamická nestabilita v nejvíce hmotných (tzn. $M \geq M_{\odot}$) bílých trpaslících o poloměrech $R < 4 \cdot 10^3$ km [26]. Objekty by nebyly stabilní až dokud by všechny elektrony a protony nebyly stlačeny dohromady. Při tak vysokých hustotách by se však plyn skládal převážně z neutronů a v takovém případě by pro hmotnost platilo $M \sim M_{\odot}$ a pro poloměr pak $R \sim 10$ km. To znamenalo novou třídu kompaktních objektů - neutronových hvězd, které byly navrženy ve třicátých letech.

Myšlenku hvězd, ve kterých jsou částice stlačeny natolik, že se objekt podobá gigantickému jádru atomu měl už Landau [5]. V roce 1934 pak Baade a Zwicky navrhli, že při velmi vysokých hustotách a malých poloměrech by existovaly tzv. neutronové hvězdy, které by byly gravitačně mnohem silněji svázané než běžné hvězdy [4]. Navrhli také, že takové objekty by se mohly tvořit při výbuchu hvězd, tzv. supernovách. První výpočty týkající se modelu neutronových hvězd složených z ideálního plynu volných neutronů při vysokých hustotách potom provedli Oppenheimer a Volkoff [27]. Do té doby se obecně předpokládalo, že v běžných hvězdách (jako je např. Slunce) je zdrojem sluneční energie neutronové jádro (a právě inverzní β rozpad). S porozuměním termojaderných reakcí se však neutronové hvězdy nijak významně nezkoumaly.

V roce 1962 však byly objeveny zdroje rentgenových paprsků nepocházející ze Slunce a zájem o neutronové hvězdy tak vzrostl. Astronomové si mysleli že teleskop zaznamenal mladou a horkou neutronovou hvězdu a začali pracovat na výpočtech chladnutí těchto objektů. S tímto objevem se teoretikové

začali zajímat o vlastnosti rovnováhy kompaktních hvězd a celkově o kolaps jádra hvězd, avšak fyzici stále nebrali myšlenku neutronových hvězd (nebo černých děr) vážně [3]. To se však změnilo v roce 1967, kdy Jocelyn Bell pozorovala pravidelně se opakující rádiový signál [6]. Gold navrhnul, že by se mohlo jednat o rotující neutronové hvězdy a tato myšlenka je přijímána dodnes [28]. Trvalo tedy přes 30 let, než se z myšlenky neutronových hvězd stala obecně přijímaná teorie patřící do teorie vývoje hvězd.

3.2.1 Bezrozměrné diferenciální rovnice pro neutronové hvězdy

V případě neutronových hvězd je již potřeba do rovnic zavést taktéž korekce obecné relativity, které je ovšem také nutno převést do bezrozměrného tvaru. Budeme používat stavové rovnice pro plyn tvořený pouze neutrony, avšak takovýto model neodpovídá zcela reálným neutronovým hvězdám, protože ty se skládají taktéž z určité části z protonů a elektronů, aby neutrony nepodléhaly samovolnému rozpadu slabou interakcí [19]. Model plynu složený pouze z neutronů také zanedbává nukleon-nukleonové interakce, které však významně přispívají k celkové hustotě energie. V této práci však chceme zejména ukázat rozdíl v použití celé TOV rovnice pro neutronové hvězdy oproti použití pouze jejího prvního členu pro sféru v hydrostatické rovnováze pro bílé trpaslíky, pro což nám bude postačovat plyn složený pouze z neutronů.

Stejně, jako v případě odvozování bezrozměrných diferenciálních rovnic pro bílé trpaslíky, využijeme zavedení veličin (3.19) a (3.20) a využijeme také (3.21) a $\bar{M}(r) = \frac{M(r)}{M_\odot}$. Toto dosadíme do celé TOV rovnice, tedy

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{M(r)\epsilon(r)}{r^2 c^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + 4\pi \frac{r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Dosažením $\bar{p}(r)$ a $\bar{M}(r)$ pak získáváme rovnici

$$\frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -G \frac{\epsilon M_\odot}{c^2 r^2} \cdot \frac{\bar{M}(r)}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{\bar{p}(r)\epsilon_0}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3}{M_\odot c^2} \cdot \frac{\bar{p}(r)\epsilon_0}{\bar{M}(r)}\right) \left(1 - \frac{2G\bar{M}(r)M_\odot}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad (3.36)$$

dále dosažením (3.20) a $R_0 = \frac{GM_\odot}{c^2}$ se rovnice přepíše do tvaru

$$\frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -R_0 \frac{\bar{\epsilon}(r)\bar{M}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{p}(r)}{\bar{\epsilon}(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3}{M_\odot c^2} \cdot \frac{\bar{p}(r)\epsilon_0}{\bar{M}(r)}\right) \left(1 - \frac{2\bar{M}(r)}{r} \cdot R_0\right)^{-1}. \quad (3.37)$$

Naposledy dosadíme (3.22) a (3.24) a získáváme tak

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}(r)}{dr} &= -\alpha \frac{\bar{p}^{1/\gamma}(r)\bar{M}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{p}(r)}{\bar{\epsilon}(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3}{M_\odot c^2} \cdot \frac{\bar{p}(r)\epsilon_0}{\bar{M}(r)}\right) \left(\frac{r - 2\bar{M}(r)R_0}{r}\right)^{-1} \\ &= -\alpha \frac{\bar{p}^{1/\gamma}(r)}{r^2} \left(1 + \bar{p}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(r)\bar{K}^{1/\gamma}\right) \left(\bar{M}(r) + \frac{4\pi r^3 \bar{p}(r)\epsilon_0}{c^2 M_\odot}\right) \left(\frac{r}{r - 2\bar{M}(r)R_0}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Vztah pro druhou diferenciální rovnici do naší soustavy je potom stejný, jako pro bílé trpaslíky, tzn.

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \cdot \bar{p}^{1/\gamma}(r), \quad \text{kde } \beta = \frac{4\pi\epsilon_0}{M_\odot c^2 \bar{K}^{1/\gamma}}. \quad (3.39)$$

Počáteční podmínky budou stejné, jako v případě bílých trpaslíků, tedy pro $\overline{M}(0) = 0$ a pro $\overline{p}(r) > 0$, přičemž poloměr hvězdy R a její hmotnost $\overline{M}(R) = M$ se budou měnit v závislosti na volbě počátečních podmínek. Vykreslení závislostí (a tedy řešení provázaných diferenciálních rovnic) $\overline{p}(r)$ a $M(r)$ na R proběhne opět v programu Python použitím funkce `solve_ivp` z knihovny `scipy` pro Python, která k řešení používá explicitní metodu RK45 (adaptivní metoda typu Rungu-Kutta).

3.2.1.1 Nerelativistický fermionový plyn z neutronů

V režimu pro nerelativistické neutrony budeme postupovat velmi podobně, jako tomu bylo v případě nerelativistických elektronů v bílém trpaslíkovi, pouze namísto hmotnosti elektronu m_e použijeme hmotnost neutronu m_n . V tomto režimu tedy bude opět platit $k_F \ll m_n$ a tedy polytropický faktor je opět $\gamma = 5/3$. Dosazením hmotnosti neutronu do vztahu (2.32) tedy máme

$$K_{nonrelns} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left(\frac{3\pi^2 Z}{A m_n c^2} \right)^{5/3} = 6,483 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 \text{ ergs}^{2/3}. \quad (3.40)$$

Konstantu α si zvolme jako $\alpha = 1 \text{ km}$ a tedy z rovnice (3.25) a použitím $R_0 = 1,47 \text{ km}$ můžeme dopočítat

$$\epsilon_0 = 1,603 \cdot 10^{38} \text{ ergs/cm}^3 = 0,08969 M_\odot c^2 / \text{km}^3. \quad (3.41)$$

Protože $\overline{K} = K \cdot \epsilon_0^{\gamma-1}$, lze s využitím (3.21) a (3.27) dopočítat

$$\overline{K} = 1,914 \quad \text{a} \quad \beta = 0,7636 \text{ 1/km}^3, \quad (3.42)$$

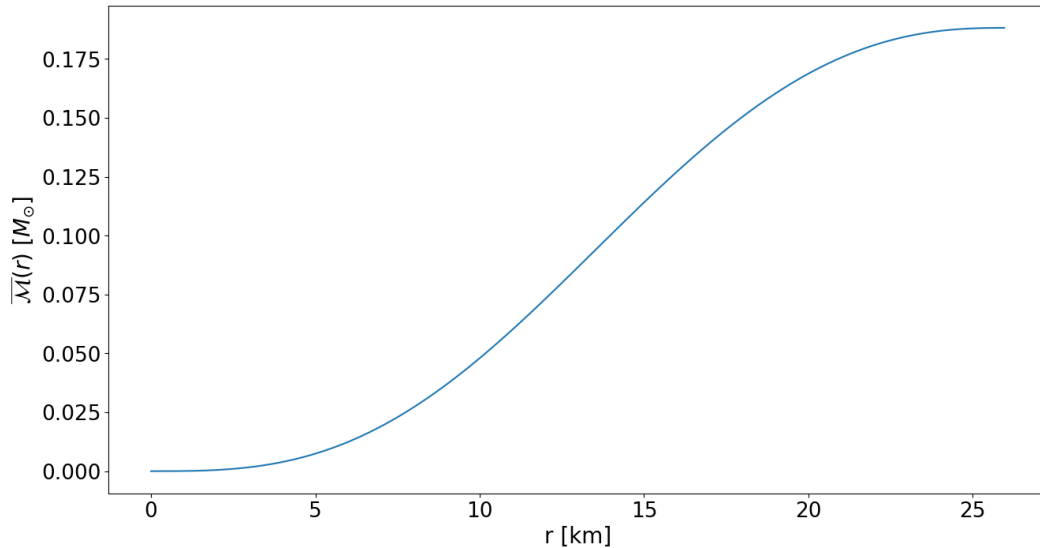
přičemž α, β jsou podobného řádu. Abychom získali průměrnou hustotu typické neutronové hvězdy o hmotnosti cca 1 Slunce a poloměru 10 km [19], zkusme jako počáteční podmínku nastavit $\overline{p}(0)$ řádu 10^{-4} a menší. V grafech 3.5 a 3.6 lze vidět vykreslení závislostí hmotnosti $\overline{M}(r)$ na poloměru r a $\overline{p}(r)$ na r jako výsledek integrace rovnic (3.39) a (3.38). Stejně jako v případě bílých trpaslíků se jedná o méně hmotné hvězdy a lze si také všimnout, že s klesající hmotností ubývá gravitační síla a hvězda tudíž má větší poloměr.

3.2.1.2 Relativistický fermionový plyn z neutronů

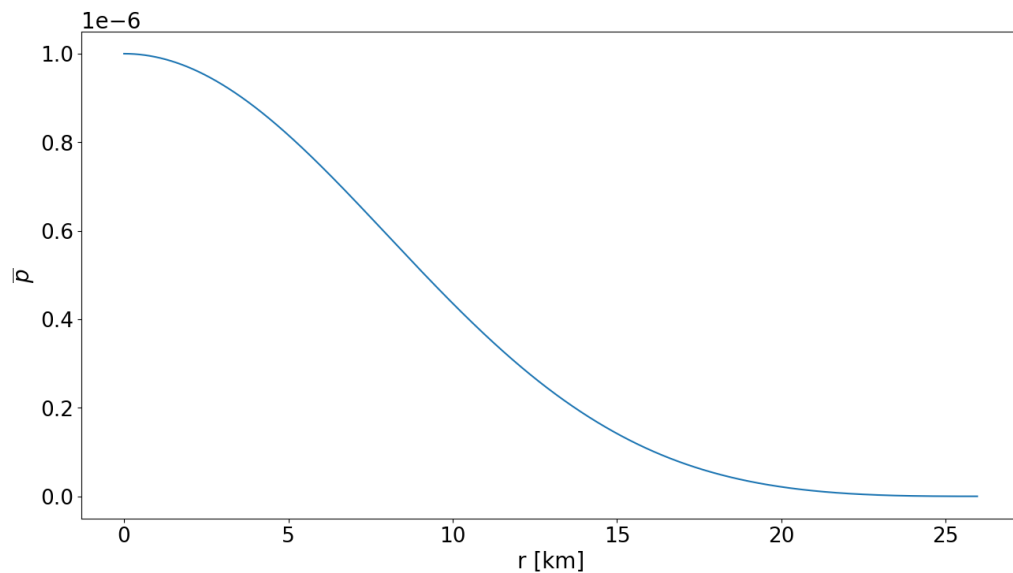
V tomto režimu využijeme taktéž polytropickou EOS, avšak polytropický faktor je $\gamma = 1$ a naše EOS má tvar $p = \frac{1}{3}\epsilon$ [11]. V takovém případě je snadné dopočítat konstanty, neboť platí $K = \overline{K} = \frac{1}{3}$ a konstantu ϵ_0 necháme stejnou jako v přechozím režimu, tzn. $\epsilon_0 = 0,08969 M_\odot c^2 / \text{km}^3$. Zvolme nyní

$$\alpha = 3R_0 = 4,428 \text{ km}, \quad \text{potom} \quad \beta = 3,374 \text{ 1/km}^3. \quad (3.43)$$

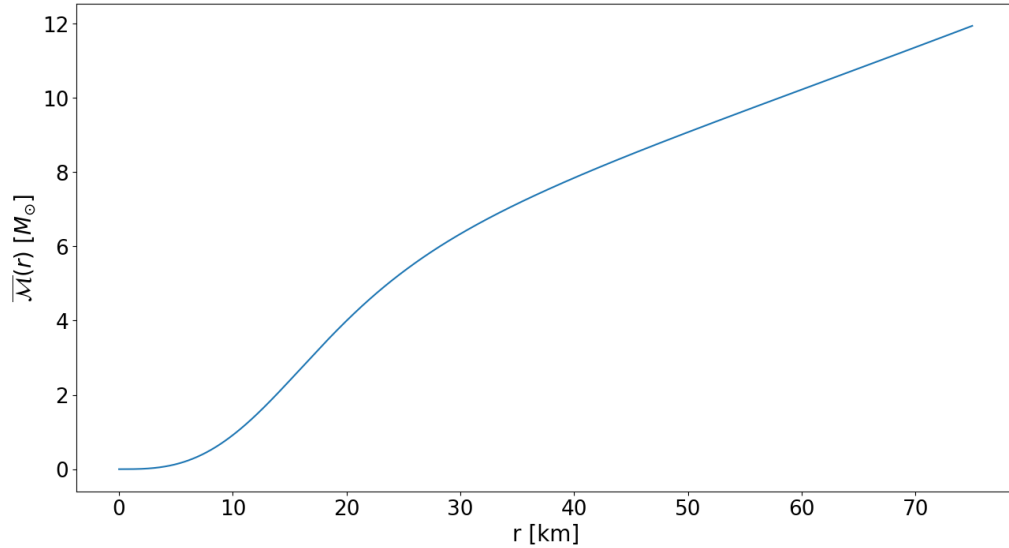
V relativistickém režimu očekáváme centrální tlaky větší, než řádově 10^{-4} . Integrovat budeme opět provázané diferenciální rovnice (3.39) a (3.38). V grafech 3.7 a 3.8 lze pak vidět vykreslení závislostí hmotnosti $\overline{M}(r)$ na poloměru r a $\overline{p}(r)$ na r pro počáteční podmínku centrálního tlaku $\overline{p}(0) = 0,001$. Na těchto grafech si lze povšimnout, že tentokrát nám vyšla hvězda o poloměru až 75 km. Problémem je totiž tlak, který monotónně klesá k 0 a stále se tak zmenšuje, nikdy však k 0 nedojde. Tento jev by mohl být způsobený tím, že částice ve vnějších slupkách neutronové hvězdy již nejsou relativistické neboť jejich hustota klesá. Bylo by tedy dobré zkusit najít stavovou rovnici pokrývající všechny režimy relativity - od $k_F \ll m_n$ po $k_F \gg m_n$, o což se pokusíme v následující části.



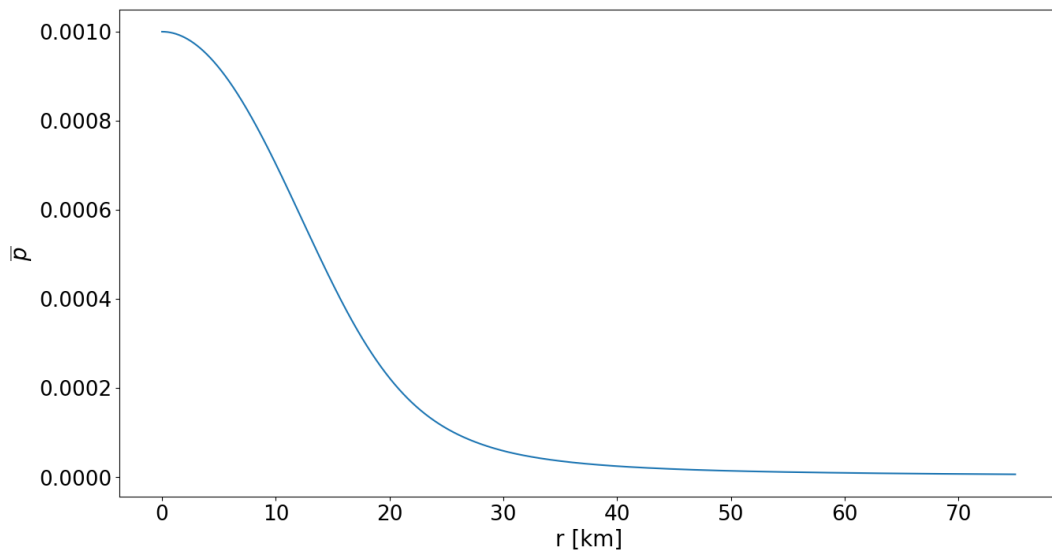
Obrázek 3.5: Hmotnost neutronové hvězdy $\overline{M}(r)$ v M_\odot vykreslená v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) v nerelativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-6}$.



Obrázek 3.6: Bezrozměrný tlak hvězdy \overline{p} vykreslený v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) v nerelativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-6}$.



Obrázek 3.7: Hmotnost neutronové hvězdy $\overline{M}(r)$ v M_\odot vykreslená v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) v relativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-3}$.



Obrázek 3.8: Bezrozměrný tlak hvězdy \overline{p} vykreslený v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) v relativistickém režimu pro centrální tlak $\overline{p}(0) = 10^{-3}$.

3.2.1.3 Stav pro různé režimy relativity

Zkusme tedy najít stavovou rovnici pro všechny režimy relativity. Jak již bylo zmíněno v části o bílých trpaslících, lze propojit stavovou rovnici pro nerelativistický režim s EOS pro relativistický režim jako

$$\bar{\epsilon}(p) = A_{nonrel}\bar{p}^{3/5} + A_{rel}\bar{p}, \quad (3.44)$$

kde tentokrát ve druhém členu (převládajícím pro vysoké centrální tlaky) je exponent tlaku roven 1 a kde A_{nonrel} a A_{rel} jsou bezrozměrné konstanty, které lze určit fitem. V tomto případě je dobré zvolit škálovací faktor jako

$$\epsilon_0 = \frac{m_n^4 c^5}{(3\pi^2 \hbar)^3} = 5,346 \cdot 10^{36} \frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3} = 0,003006 \frac{M_\odot c^2}{\text{km}^3} \quad (3.45)$$

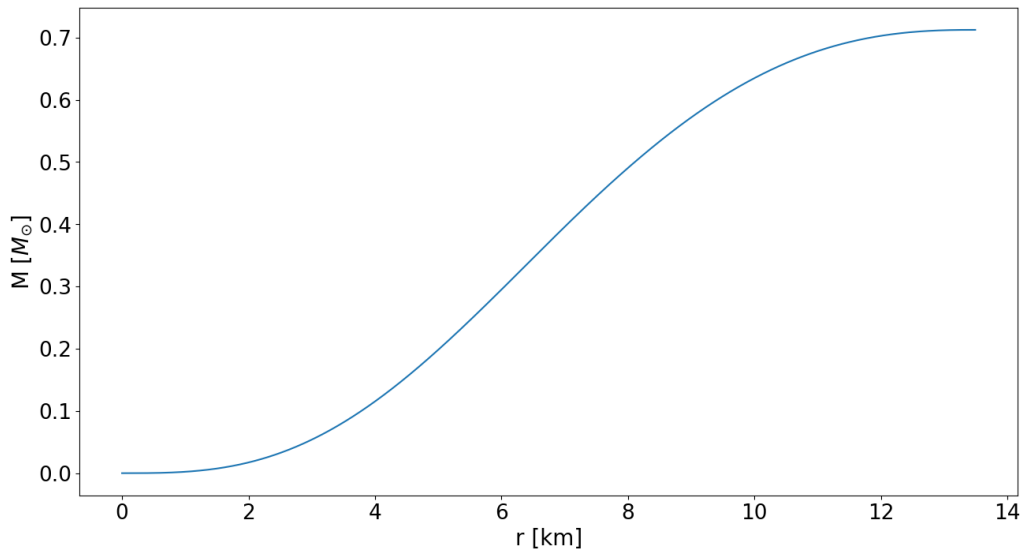
a konstanty A_{nonrel} , A_{rel} lze s přesností lepší než 1% určit na [19]

$$A_{nonrel} = 2,4216 \quad \text{a} \quad A_{rel} = 2,8663. \quad (3.46)$$

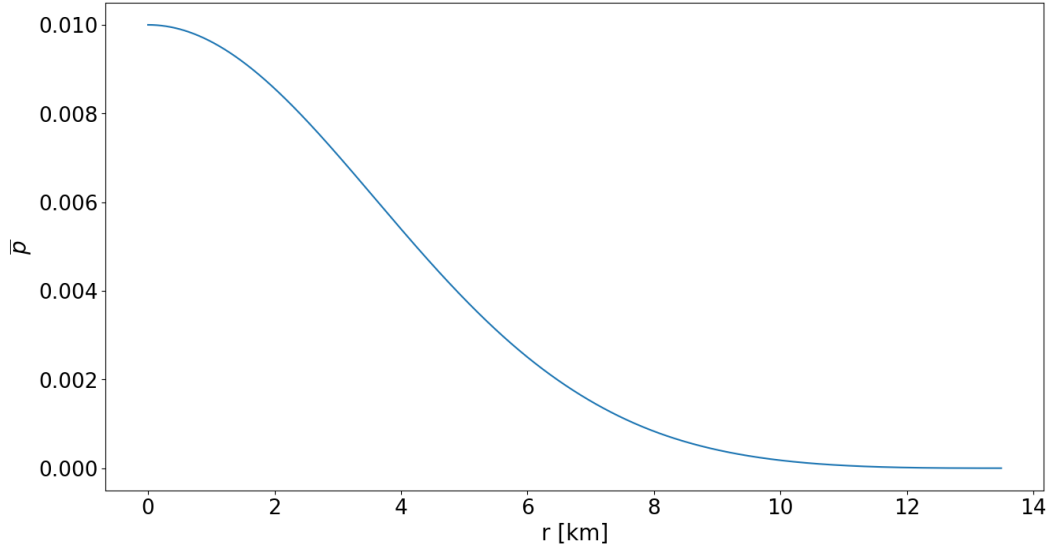
Zvolme $\alpha = R_0 = 1,476$ km, z čehož lze dopočítat $\beta = 0,03778$. Program ponechme podobný jako v případě neutronových hvězd v nerelativistickém režimu a dosad' me stavovou rovnici (3.44). Pro počáteční tlak $\bar{p}(0) = 0,01$ pak získáme následující hodnoty poloměru R a hmotnosti M :

$$R = 13,5 \text{ km} \quad M = 0,712 M_\odot \quad (3.47)$$

a pro takto hmotnou hvězdu jsou již dobře patrné efekty OTR, přičemž z (1.3) lze vidět, že po započítání efektů OTR je rozdíl oproti klasické Newtonovské hvězdě asi 8%. Grafy závislosti \bar{M} na r a \bar{p} na r jsou k nahlédnutí na obrázcích 3.9 a 3.10.



Obrázek 3.9: Hmotnost neutronové hvězdy $\bar{M}(r)$ v M_\odot vykreslená v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) ve stavu pro různé režimy relativity se stavovou rovnicí (3.44) pro centrální tlak $\bar{p}(0) = 10^{-2}$.

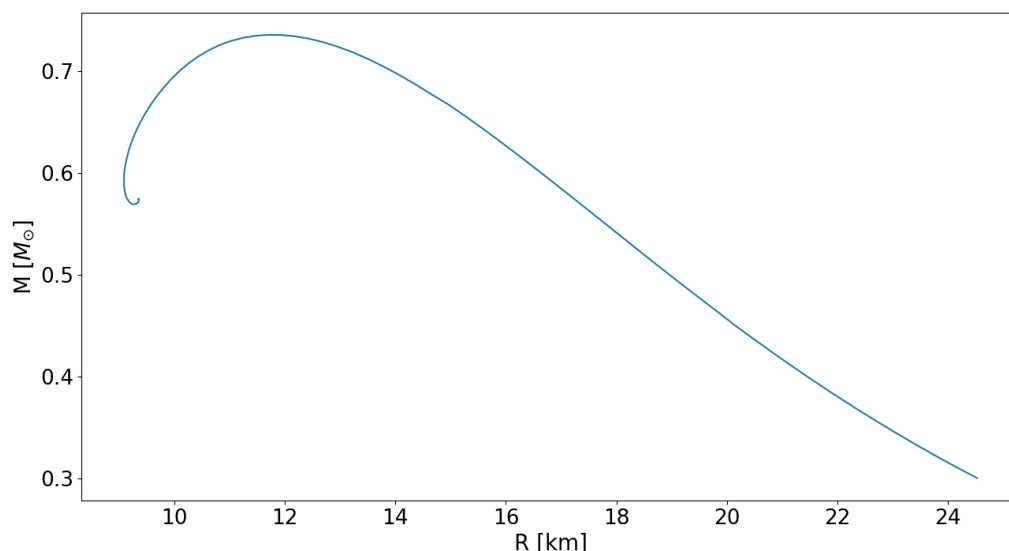


Obrázek 3.10: Bezrozměrný tlak hvězdy \bar{p} vykreslený v závislosti na jejím poloměru r v km. Křivka je výsledkem integrace provázaných diferenciálních rovnic (3.39) a (3.38) ve stavu pro různé režimy relativity pro centrální tlak $\bar{p}(0) = 10^{-2}$.

Zkusme nyní vykreslit průběh hmotností M na poloměru R pro více hodnot centrálních tlaků $\bar{p}(0)$, přičemž zvolme např. $\bar{p}_{min}(0) = 10^{-4}$ a $\bar{p}_{max}(0) = 10^2$. Na grafu 3.11 lze pak vidět průběh této závislosti s takovou konkrétní volbou centrálních tlaků, počet kroků numerické metody byl nastaven na 100. Na grafu lze vidět, že méně hmotné a menší hvězdy se nachází více vpravo a náleží menším centrálním tlakům. Se zvětšováním tlaků se zvětšuje také hmotnost, kterou hvězda může mít a být stabilní. Čím hmotnější hvězda, tím větší gravitační síla na ni působí a hvězda se tak víc stlačuje a tedy se zmenšuje její poloměr (přibližně střed grafu, kdy $R \approx 9$ km a $M \approx 0,7 M_{\odot}$). Pro hodnotu centrálního tlaku přibližně $\bar{p}(0) = 0,027$ dosáhneme maximální hmotnosti hvězdy $M_{max} = 0,74 M_{\odot}$ pro poloměr $R \approx 12$ km. Řešení za tímto maximem (vlevo od něj) pak odpovídá nestabilním hvězdám podléhajícím gravitačnímu kolapsu, ze kterých se tudíž stanou černé díry. Poloha maxima této závislosti a tedy hodnoty M_{max} a k ní příslušejícímu poloměru se budou měnit v závislosti na použité EOS [11]. Maximální hodnoty pocházející ze závislosti 3.11 jsou řádově podobné hodnotám Landauovy hmotnosti $M_L = \frac{m_p^3}{m^2} = \frac{m_p^3}{m_n^2} = 1,848 M_{\odot}$ a Landauova poloměru $R_L = \frac{m_p}{m^2} = \frac{m_p}{m_n} = 2,729$ km, kde m je hmotnost fermionů a m_p je Planckova hmotnost. Zavedení Landauovy hmotnosti a poloměru je dobře vysvětleno v knize *Compact stars* [11] a řádově by měly obecně souviset s maximálními hodnotami hmotností a poloměrů kompaktních objektů.

3.2.2 Pulsary

Jelikož se tato práce zabývá neutronovými hvězdami, je zapotřebí si přiblížit kontext pulsarů. Jak již bylo zmíněno, první pulsar pozorovala Jocelyn Bell-Burnell když pracovala na své práci ohledně výzkumu scintilací v meziplanetárním médiu, jejichž původ lze hledat v záření kvasarů [6]. Po nastavení radiové antény bylo jejím úkolem analyzovat data ve formě grafů na papíře, které byly produkovány v délce kilometrů. Jocelyn si všimla pravidelně se opakujícího signálu vykazující svůj původ mimo



Obrázek 3.11: Hmotnost hvězdy $M(r)$ v M_{\odot} a poloměr R v km pro neutronovou hvězdu tvořenou čistými neutrony s použitím EOS pro fermionový plyn. Pravá část grafu ukazuje hvězdy s nižší hmotností a větším poloměrem odpovídá nižším počátečním tlakům, levá část jsou potom hvězdy podléhající gravitačnímu kolapsu.

sluneční soustavu. Tento signál byl natolik přesný, že mezi prvními nápady na zdroj byli mimozemšťané. Později však objevila další tři takové signály takového typu, což už poukazovalo na jejich přírodní původ. Jednalo se opět o pulzující radiové zdroje - zkráceně pulsary, přičemž tento název vymyslel novinář Anthony Michaelis [11]. První objevený pulsar měl pak periodu 1,3 s.

Pravidelné pulsy přitom měly tři základní charakteristiky:

- doba mezi pulsy byla krátká v rozmezí milisekund - sekund
- pulsy byly extrémně přesné
- doba mezi jednotlivými pulsy se prodlužovala.

Emituje-li zdroj koherentně z nějakého místa, pak velikost tohoto místa (plochy) nemůže být větší, než vzdálenost, kterou světlo urazí za dobu emise a tedy zdroj záření nemůže být větší, než $\delta r = c \cdot \delta t \approx 4800$ km, kde c je rychlost světla, δr je plocha zdroje a δt je doba emise. Dává tedy smysl, že zdroj spadá do kategorie kompaktních objektů, tzn. kompaktní hvězdy nebo černé díry. Černé díry však musí interagovat s obyčejnou hmotou, aby zářily (např. mít kolem sebe akreční disk) a tedy ty rovnou lze vyřadit. Navíc, ve fyzice plazmatu takto pravidelně opakující se zdroje nejsou zvykem. Jako zdroje tedy zbývá uvažovat buď binární systémy, oscilující kompaktní hvězdy nebo rotující kompaktní hvězdy. Zkusme tedy přijít na to která z těchto úvah je správná.

Bílí trpaslíci mají poloměry několika tisíc km a tedy binární systém složený ze dvou trpaslíků by byl větší, než je povolený limit a tedy lze je taktéž vyřadit. Binární systém neutronových hvězd by byl povolený, avšak jak se neutronové hvězdy stále přibližují a ztrácí energii v důsledku vyzařování

gravitačních vln, doba mezi pulsy by se zkracovala což nesouhlasí s pozorováním. Lze tedy vyřadit binární systémy kompaktních hvězd.

Podívejme se nyní na oscilace kompaktních hvězd. Typická oscilační perioda hvězdy T může být popsána předpokladem stojaté vlny s vlnovou délkou danou poloměrem R sféry a tedy $\lambda \sim R$. Disperzní relace pro zvukovou vlnu je pak dána rychlostí zvuku c_s jako

$$c_s = \lambda \cdot \nu \sim \frac{R}{T}, \quad (3.48)$$

kde ν je frekvence. Rychlost zvuku lze odhadnout použitím EOS tvaru $c_s^2 = P_c/\bar{\rho}$, kde P_c je centrální tlak a $\bar{\rho} \sim M/R^3$ je průměrná hustota hvězdy. Centrální tlak lze brát z rovnice pro hydrostatickou rovnováhu jako

$$P_c \sim \frac{GM^2}{R^4}, \quad (3.49)$$

kde G je gravitační konstanta. Propojme rovnice (3.49), zmíněnou EOS a $\bar{\rho}$ a získáme kompaktnost hvězdy

$$c_s^2 \sim \frac{GM}{R} = C. \quad (3.50)$$

Oscilační perioda se tedy dá přepsat z rovnice (3.48) jako

$$T \sim \frac{R}{\sqrt{C}} \sim \frac{R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} \sim \frac{1}{\sqrt{GM}} \cdot R^{3/2} \sim \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}} \sim 1 \text{ h} \cdot \left(\frac{1 \text{ g cm}^{-3}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (3.51)$$

Dosadíme-li do rovnice průměrnou hustotu Slunce $\bar{\rho} = 1,4 \text{ g/cm}^3$, získáme periodu jedné hodiny. Typická průměrná hustota bílého trpaslíka je pak $\bar{\rho} = 10^6 \text{ g/cm}^3$ [11], získáme periodu v řádech sekund. A dosazením hustoty pro neutronovou hvězdu $\bar{\rho} = 10^{14} \text{ g/cm}^3$ získáme periody kratší než 1 ms. Takové periody jsou shodné s těmi pozorovanými u pulsarů, ale pozorovaný rozsah period pulsů nám dává jen jednu charakteristickou frekvenci z oscilací.

Vezměme nyní rotující kompaktní hvězdy. Maximální úhlová frekvence ω se dá zjistit, pokud dáme do rovnováhy odstředivou sílu s gravitační pro částici o hmotnosti m nacházející se na rovníku koule:

$$m \cdot R \cdot \omega_{max}^2 = \frac{GMm}{R^2}, \quad \omega_{max} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \quad (3.52)$$

a tedy minimální perioda rotace $T_{min} = 2\pi/\omega_{max}$ je daná rovnicí

$$T_{min} = 0.47 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right) \left(\frac{0.2}{C} \right)^{1/2}, \quad (3.53)$$

kde C je kompaktnost hvězdy. Všimněme si že minimální perioda má stejnou parametrickou závislost jako (3.51), takže bílí trpaslíci by měli T_{min} příliš vysokou pro vysvětlení milisekundových period, zatímco neutronové hvězdy mohou s tak nízkou periodou rotovat. Pulsary lze tedy vysvětlit rotujícími neutronovými hvězdami. Pacini krátce před objevením tohoto faktu poukázal na to, že neutronové hvězdy mající silné magnetické pole mohou produkovat elektromagnetické záření

3.2.2.1 Kategorie pulsarů

Většina pozorovaných neutronových hvězd byla objevena ve formě klasických pulsarů, avšak existuje více tříd astronomických objektů spojovaných také s neutronovými hvězdami.

- Magnetary: jedná se o neutronové hvězdy s extrémně silným magnetickým polem. Magnetary mívají dlouhé periody (v řádech několika sekund) a neustále září v rentgenovském spektru.
- Centrální kompaktní objekty: body jasně zářící v rentgenovském spektru v centru zbytků po supernovách.
- Izolované neutronové hvězdy: dosud objeveno 7 zdrojů tepelného záření pomocí satelitu ROSAT X-ray [11]
- Rotující rádiové zdroje: emitují krátké sporadické výtrysky radiových vln, byly detekovány s delšími periodami (v řádech několika sekund)
- Rychlé rádiové výtrysky (angl. fast radio burst, FRBs): zdroje radiových emisí s periodou v řádech milisekund, bývají lokalizovány mimo naší galaxii
- Dvojhvězdy zářící v rentgenovském spektru: akreční systémy emitující rentgenové paprsky, partner neutronové hvězdy může být masivní hvězda ($M \approx 20 M_{\odot}$ nebo hvězda s hmotností podobnou M_{\odot}). Některé takové zdroje vydávají pravidelné pulsy a říkáme, že jsou poháněné akrecí.

Taková klasifikace určitě nemá pevné hranice a neutronová hvězda může spadat do několika kategorií. Izolované neutronové hvězdy například vykazují slabé pulsování, což koresponduje se silným magnetickým polem a tedy by mohlo jít o magnetary.

3.2.2.2 Dipólový model pulsarů

Zkusme se nyní podívat na jednoduchý model rotačně poháněných neutronových hvězd vyzařující pravidelné pulsy. Mějme rotující kouli s magnetickým polem ve formě dipólu, přičemž osy rotace a magnetické póly nebudou na jedné přímce, viz 3.12.

Rotační energie neutronové hvězdy je dána

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \Omega^2, \quad (3.54)$$

kde Ω je úhlová frekvence a I je moment setrvačnosti popisující rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose rotace. Formálně je pro sféru definován jako

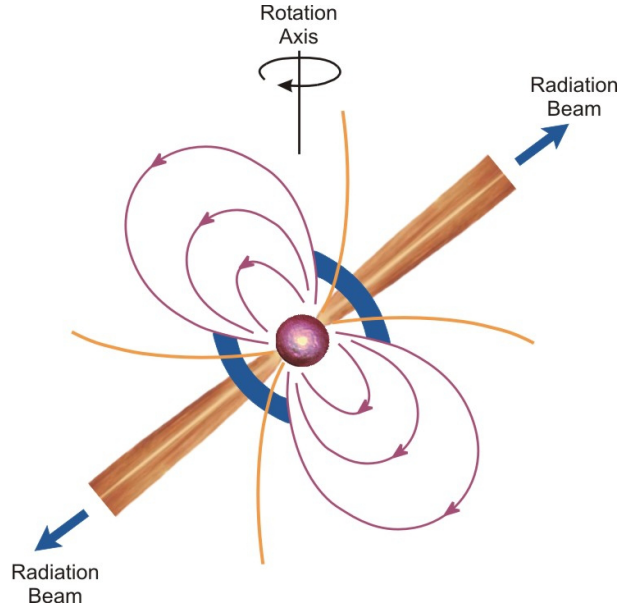
$$I = \int dV r^2 \cdot \rho(r) = \frac{8\pi}{3} \int dr r^4 \cdot \rho(r), \quad (3.55)$$

kde r je vzdálenost do centra koule. Pro homogenní kouli s konstantní hustotou ρ_0 je pak dán

$$I = \frac{2}{5} M \cdot R^2 = f \cdot M \cdot R^2, \quad (3.56)$$

kde R je poloměr a M celková hmotnost koule. Předfaktor f je předfactorem momentu setrvačnosti a pro konstantní hustotu energie máme $f = 0,4$, což odpovídá nestlačitelné kapalině. Dosadíme-li za hmotnost $M = 1,4 M_{\odot}$ pro neutronové hvězdy a poloměr $R = 10$ km a využijeme-li $f = 0,4$ pro konstantní hustotu energie, získáme

$$I = 1.11 \times 10^{38} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{km}} \right)^2. \quad (3.57)$$



Obrázek 3.12: Náčrt pulsaru. Červené křivky znázorňují jeho magnetické pole, oranžové kužely výtrysky záření z pólů a černě je znázorněna osa rotace, převzato z [29].

Energetické ztráty způsobené rotací koule jsou pak dány jako derivace rotační energie:

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I\Omega\dot{\Omega} = I\Omega\dot{\Omega} = -I\frac{4\pi^2}{P^3}\dot{P}, \quad (3.58)$$

kde předpokládáme že se moment setrvačnosti v čase nemění a kde $P = 2\pi/\Omega$ je perioda hvězdy.

Podívejme se nyní na energii emitovanou z magnetických pólů. Vezměme nejjednodušší konfiguraci magnetického pole jakožto dipól w magnetickým momentem \mathbf{m} . Tento dipól má pak ve sférických souřadnicích tvar

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{m}}{r^3} = \frac{|\mathbf{m}|}{r^3}(2 \cos \Theta \cdot \mathbf{e}_r + \sin \Theta \cdot \mathbf{e}_\Theta), \quad (3.59)$$

kde \mathbf{e}_r je jednotkový vektor ukazující ve směru \mathbf{r} a \mathbf{e}_Θ je jednotkový vektor pro úhel Θ . Použijme nyní Larmorovu rovnici pro elektromagnetickou emisi rotujícího magnetického dipólu:

$$E_{rad} = -\frac{2}{3}|\ddot{\mathbf{m}}|^2, \quad (3.60)$$

kde tečkování značí časové derivace. Na rovníku (tzn. $\Theta = 90^\circ$) je magnetické pole

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{m}|}{r^3} \leftrightarrow m = Br^3. \quad (3.61)$$

Na pólech (tzn. $\Theta = 0^\circ$) je magnetické pole

$$\mathbf{B} = 2\frac{\mathbf{m}}{r^3} \rightarrow m = \frac{1}{2}Br^3 \quad (3.62)$$

Vezměme úhel α jako úhel mezi osou rotace (paralelní na osu z) a magnetickým dipólovým momentem. Pak pro tento moment platí

$$\rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2}BR^3(\sin(\alpha) \cos(\Omega t), \sin(\alpha) \sin(\Omega t), \cos(\alpha)) \quad (3.63)$$

kde máme $r = R$ protože se nacházíme na pólech. Zderivujme tedy (3.62) dvakrát dle času:

$$\dot{\mathbf{m}} = -\frac{1}{2}BR^3(\sin(\alpha) \cdot \Omega^2 \cos(\Omega t), \sin(\alpha) \cdot \Omega^2 \sin(\Omega t), 0) \rightarrow |\dot{\mathbf{m}}|^2 = \frac{1}{2}B^2R^6\Omega^4 \sin^2 \alpha. \quad (3.64)$$

Porovnejme nyní energetické ztráty z rotace s energetickými ztrátami z magnetického dipólového momentu:

$$\dot{E}_{rad} = -\frac{1}{6}B^2R^6\Omega^4 \sin^2 \alpha = \dot{E}_{rot} = I\Omega\dot{\Omega} \quad (3.65)$$

a nastavme $\sin \alpha = 1$ abychom získali minimální B :

$$B_{min}^2 = -6\frac{I\dot{\Omega}}{\Omega^3} \frac{1}{R^6} \quad (3.66)$$

a s použitím $\Omega = \frac{2\pi}{P}$ získáme

$$B_{min} \geq \sqrt{\frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{I}{R^6} \cdot \sqrt{P \cdot \dot{P}}}. \quad (3.67)$$

Dosadíme-li poloměr typický pro neutronové hvězdy, tj. $R = 10$ km a moment setrvačnosti $I = 10^{38}$ kg m², získáme $B \sim 10^8$ T. Z rovnice (3.65) si vyjádříme $\dot{\Omega}$:

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{6}B^2\frac{R^6}{I} \sin^2(\alpha) \cdot \Omega^3, \quad (3.68)$$

kde označme $K := \frac{1}{6}B^2\frac{R^6}{I} \sin^2(\alpha)$ a tedy

$$\rightarrow \dot{\Omega} = -K\Omega^3. \quad (3.69)$$

Separací proměnných lze tuto diferenciální rovnici vyřešit:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -K\Omega^3 \leftrightarrow \frac{d\Omega}{\Omega^3} = -Kdt \leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Omega^2} = -Kt + c', \quad (3.70)$$

kde konstantu c' určíme z počátečních podmínek jako

$$t = \frac{1}{2K\Omega^2} - c' \text{ pro } t = 0 \rightarrow \Omega = \Omega_0 \rightarrow c' = \frac{1}{2K\Omega_0} \quad (3.71)$$

a tedy nakonec řešení vyjádřené v čase t (nazývané charakteristický věk pulsaru) je

$$t = \frac{1}{2K\Omega^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \right), \quad (3.72)$$

kde Ω_0 je úhlová frekvence pulsaru v době jeho vzniku, tzn. pro $t = 0$. Rotuje-li pulsar již od svého zrození velmi rychle, lze brát $\Omega_0 \ll \Omega$ a lze tak zanedbat druhý člen v závorkách v rovnici (3.72) a charakteristický věk je tak zjednodušen na

$$t = \frac{1}{2K\Omega^3} \quad (3.73)$$

avšak K obecně je závislé na Ω dle rovnice (3.70) a dosazením do (3.73) tak máme

$$t = -\frac{1}{\frac{2\dot{\Omega}}{\Omega^3} \cdot \Omega^2} = -\frac{\Omega}{2\dot{\Omega}} = \frac{P}{2\dot{P}}^3 \quad (3.74)$$

³Protože se perioda s časem zvyšuje tak \dot{P} je kladné a v rovnosti již není znaménko -.

což je mnohem výhodnější tvar neboť k určení charakteristického věku pulsaru nám nyní stačí znát jeho úhlovou rychlost nebo periodu. Pro pulsar v srdci Krabí mlhoviny je tento charakteristický věk např. $t \approx 1260$ let.

Zmiňme se ještě o časovém vývoji pulsarů v obecnější formě, kdy vezmeme

$$\dot{\Omega} = -K\Omega^n, \quad (3.75)$$

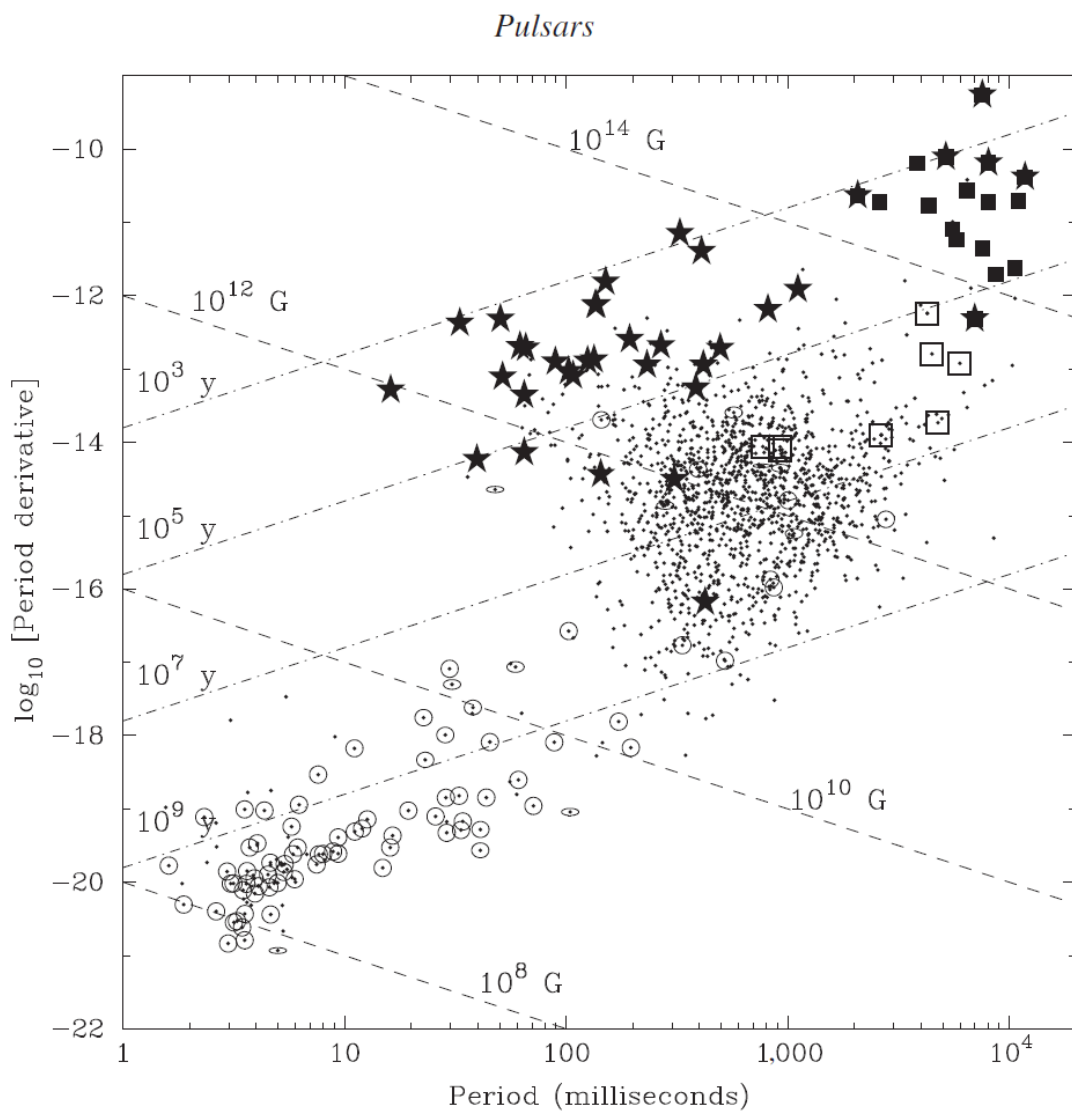
kde n je tzv. braking index a lze ho experimentálně určit pomocí druhé časové derivace Ω jako

$$n = -\frac{\Omega \cdot \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}. \quad (3.76)$$

Tento index nám tedy říká, jak rychle rotace pulsaru zpomaluje. Kvůli druhé časové derivaci jsou však zapotřebí dlouhodobá pozorování a máme k dispozici pouze několik naměřených dat, ze kterých např. pro pulsar v Krabí mlhovině vychází $n = 2,342$ [11].

Na obrázku 3.13 je k nahlédnutí $P - \dot{P}$ diagram. Z grafu lze vyčíst následující charakteristiky:

- Pro magnetická pole mezi $10^{12} - 10^{14}$ G a věky pulsarů mezi $10^3 - 10^5$ let se jedná o mladé pulsary, které lze najít ve zbytcích po supernovách (např. pulsar v Krabí mlhovině).
- Pro magnetická pole $> 10^{14}$ G až do 10^{15} G a věk pulsarů $\approx 10^3 - 10^5$ let jde o pulsary s extrémně silným magnetickým polem a nazývají se magnetary. Jejich periody jsou jedny z největších pozorovaných, takže to vypadá že energetické ztráty způsobené extrémním magnetickým polem rotaci pulsaru dost zpomaluje.
- Nejvíce pulsarů lze najít v hodnotách magnetického pole $\approx 10^{12}$ G a staré $\approx 10^5 - 10^9$ let. Takto starší pulsary mají o něco slabší magnetické pole než čerstvě zrozené pulsary.
- Pro magnetická pole $\approx 10^8 - 10^{10}$ G a stáří pulsaru $\approx 10^9 - 10^{10}$ let lze najít pulsary v binárních systémech. Mají relativně slabá magnetická pole (oproti ostatním pulsarům) což jim dovoluje nasávat hmotu z jejich partnerské hvězdy. S periodou pouhých několik milisekund se jedná o jedny z nejrychleji rotujících neutronových hvězd. Jsou také velmi staré a jejich věk může být řádově srovnán s věkem vesmíru [30].



Obrázek 3.13: Pulsarový diagram; perioda a její derivace zobrazené v grafu. Čárované linie představují charakteristické magnetické pole, čárovano-tečkované charakteristický věk. Symboly hvězd odpovídají pulsarům nacházejícím se ve zbytcích po supernovách, vyplněné čtverce reprezentují magnetary a kruhy představují pulsary v binárních systémech, převzato z [11].

Závěr

Cílem práce bylo seznámit se se základními termodynamickými vztahy pro hustou jadernou hmotu a uvést základní přehled výsledků pro stavovou rovnici jaderné hmoty relevantní pro neutronové hvězdy. Neutronové hvězdy jsou mrtvé zbytky velmi hmotných hvězd a jejich studium je relevantní zejména pro hledání stavové rovnice husté jaderné hmoty a pro výzkum hmoty v extrémních podmínkách. V práci se věnujeme také bílým trpaslíkům, což jsou pozůstatky po středně hmotných hvězdách.

Nejprve jsme se seznámili s principy ekvivalence a zabírali jsme se problematikou červeného posuvu. Poté jsme popsali geometrii křivého prostoru a zavedli metriku. Tu jsme zobecnili do sférických souřadnic a zavedli tzv. vlastní čas τ . Popsali jsme si způsob, jakým energie (resp. tenzor energie-hybnosti) zakřivuje časoprostor kolem sebe a zavedli Schwarzschildovu metriku. Hledali jsme řešení Einsteinových rovnic pro vakuum a pro vnitřek hvězdy (TOV rovnice). První člen TOV rovnice pak popisuje hvězdu v hydrostatické rovnováze, další členy jsou korekce OTR.

Následně jsme odvodili základní termodynamické vztahy, které se využívají pro popis husté hmoty. K nalezení stavové rovnice požadovaného tvaru jsme pak využili vztahy z jaderné fyziky a nakonec jsme našli stavovou rovnici ve formě polytropu. Konkrétní polytropické indexy Γ jsme určili pro relativistický a nerelativistický plyn fermionů. Vyřešili jsme také otázku kauzality v husté hmotě a našli podmínku pro polytropický index.

Poté jsme se více zaměřili na síly působící v kompaktních hvězdách pro případ, kdy nezahrnujeme OTR korekce z TOV. Našli diferenciální rovnice pro hmotnost a tlak. Diskutovali jsme podmínky na poloměr bílých trpaslíků pomocí polytropického indexu. Spolu s tím jsme zavedli také pojem Chandrasekharovy hmotnosti, která představuje horní hranici hmotnosti bílých trpaslíků. Diferenciální rovnice pro kompaktní hvězdy v hydrostatické rovnováze jsme ještě museli upravit do bezrozměrného tvaru a následně jsme již dokázali vykreslit grafy ukazující závislost hmotnosti a tlaku na poloměru bílých trpaslíků. Pro relativistický plyn nám vyšlo, že hmotnost nezávisí na volbě centrálního tlaku a s vyšším centrálním tlakem je hvězda jen více kompaktní.

U neutronových hvězd jsme jako diferenciální rovnici pro tlak brali celou TOV rovnici kvůli efektům OTR. Tuto jsme také převedli do bezrozměrného tvaru. V relativistickém režimu pak vyšly hvězdy o poloměrech až 75 km, za což může tlak, který nikdy neklesne až k nule. Pro neutronové hvězdy jsme poté řešili případ látky nacházející se v obecně různých režimech relativity a vykreslili jsme také závislost hmotnosti na celkovém poloměru hvězdy R . V takové závislosti lze vidět, že maximální hmotnosti hvězdy je $M_{max} = 0,74 M_{\odot}$ pro poloměr $R \approx 12$ km. Řešení za tímto maximem pak odpovídá nestabilním hvězdám podléhajícím gravitačnímu kolapsu.

V poslední části této práce jsme se pak seznámili s pulsary, což jsou hojně pozorované rotující neutronové hvězdy. Dokázali jsme, že se skutečně jedná o neutronové hvězdy. Uvedli jsme, jak pulsar ztrácí energii kvůli své rotaci a dokázali jsme tak odvodit vztah pro charakteristický věk pulsarů, který tak lze odhadnout pouhým pozorováním úhlové frekvence.

Příloha A

Matematický aparát

A.1 Derivace v zakřiveném prostoročase a křivost

Upřesněme si pojmy týkající se vektorů a jejich derivací v zakřiveném prostoru. Tečné vektory tvoří tečný prostor a tyto vektory píšeme jako

$$v = v^\mu e_\mu, \quad (\text{A.1})$$

kde v^μ jsou složky vektoru v souřadnicích v bázi a e_μ je jednotkový vektor zvolené báze. Pro bázi zvolenou jako e_μ je vektor v^μ kontravariantní. Zavedeme duální bázi jako:

$$e^\nu e_\mu = \delta_\mu^\nu \quad (\text{A.2})$$

kde δ_μ^ν je Kroneckerovo delta. Vektor v_μ je kovariantní když máme bázi zvolenou jako $v_\mu e^\mu$ a skalární součin je

$$v_\mu v^\mu = v^\mu v^\nu g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Derivace tečného vektoru je potom derivace součinu:

$$\partial_\mu v = \partial_\mu(v^\nu e_\nu) = e_\nu \partial_\mu v^\nu + v^\nu \partial_\mu e_\nu \quad (\text{A.4})$$

kde $\partial_\mu e_\nu$ je další vektor, který označíme jako

$$\partial_\mu e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda \quad (\text{A.5})$$

což se nazývá Christoffelův symbol. Dosazením (A.5) do (A.4) tedy máme

$$\partial_\mu v = \partial_\mu v^\nu e_\nu + v^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda = (\partial_\mu v^\nu + v^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) e_\nu, \quad (\text{A.6})$$

kde $\partial_\mu v^\nu + v^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \nabla_\mu v^\nu$ je kovariantní derivace. Pro tenzory jsou pak vztahy stejné, akorát je třeba zohlednit všechny indexy:

$$\nabla_\kappa A^{\mu\nu} = \partial_\kappa A^{\mu\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu A^{\lambda\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\nu A^{\mu\lambda} \quad (\text{A.7})$$

a platí

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Christoffelův symbol se dá také vyjádřit pomocí metriky následovně:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}) \quad (\text{A.9})$$

kde $g_{\mu\nu,\kappa} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}$.

V zakřiveném prostoročase je také potřeba dávat si pozor na posunutí vektorů. V plochém prostoru se vektor po posunutí obecně nemění, ale v zakřiveném prostoru může být vektor po posunutí změněn. Tato změna se dá vyjádřit pomocí kovariantních derivací jak

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\kappa} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} v^{\kappa} = R_{\mu\nu\lambda}^{\kappa} v^{\lambda}, \quad (\text{A.10})$$

kde $R_{\mu\nu\lambda}^{\kappa}$ je Riemannův tensor, který nám poskytuje informace o zakřivení prostoru. Vezmeme-li stopu (A.10), získáme tzv. Ricciho tenzor pro který platí

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (\text{A.11})$$

což je tenzor druhého řádu. Stopa Ricciho tenzoru je potom Ricciho skalár

$$R = R_{\mu}^{\mu}. \quad (\text{A.12})$$

Pro Ricciho tenzor platí

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (\text{A.13})$$

kde $\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$.

A.2 Hustota energie a tlak

Chceme vyřešit integrál pro hustotu energie daný rovnicí (2.25):

$$\epsilon = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} k^2 dk \quad (\text{A.14})$$

použijme substituci $k = m_e c \sinh(u)$, pak $dk = m_e c \cosh(u) du$. Přepsání integrantu:

$$k^2 = (m_e c \sinh(u))^2 = m_e^2 c^2 \sinh^2(u), \quad (\text{A.15})$$

$$\sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} = \sqrt{(m_e c \sinh(u))^2 c^2 + m_e^2 c^4} = m_e c^2 \sqrt{\sinh^2(u) + 1} = m_e c^2 \cosh(u). \quad (\text{A.16})$$

dosadíme za k :

$$\int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} k^2 dk = \int_0^{\text{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} m_e c^2 \cosh(u) (m_e c \sinh(u))^2 m_e c \cosh(u) du = \quad (\text{A.17})$$

$$= m_e^4 c^5 \int_0^{\text{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \cosh^2(u) \sinh^2(u) du = I \quad (\text{A.18})$$

Využijme identitu $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$ a tedy:

$$I = m_e^4 c^5 \int_0^{\operatorname{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \sinh^2(u)(1 + \sinh^2(u))du = \quad (\text{A.19})$$

$$= m_e^4 c^5 \left(\int_0^{\operatorname{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \sinh^2(u)du + \int_0^{\operatorname{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \sinh^4(u)du \right). \quad (\text{A.20})$$

Nyní integrujeme jednotlivé části:

$$\int \sinh^2(u)du = \int \frac{1 - \cosh(2u)}{2} du = \frac{u}{2} - \frac{\sinh(2u)}{4}, \quad (\text{A.21})$$

$$\int \sinh^4(u)du = \int \left(\frac{\cosh(2u) - 1}{2} \right)^2 du = \int \frac{\cosh^2(2u) - 2 \cosh(2u) + 1}{4} du. \quad (\text{A.22})$$

Dále:

$$\int \cosh^2(2u)du = \int \frac{1 + \cosh(4u)}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{\sinh(4u)}{8}, \quad (\text{A.23})$$

$$\int \sinh^4(u)du = \int \frac{1 + \cosh(4u)}{8} - \frac{\cosh(2u)}{2} + \frac{1}{4} du = \frac{u}{8} + \frac{\sinh(4u)}{32} - \frac{\sinh(2u)}{4} + \frac{u}{4}. \quad (\text{A.24})$$

Tedy výsledný integrál je:

$$\epsilon = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int_0^{\operatorname{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \sinh^2(u)du + \int_0^{\operatorname{arsinh}\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)} \sinh^4(u)du \right) \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[(2x^3 + x) \sqrt{1 + x^2} - \sinh^{-1}(x) \right], \quad (\text{A.26})$$

kde $x = \frac{k_F}{m_e c}$.

Pro tlak máme vyřešit integrál daný (2.28):

$$p = \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{-1/2} k^4 dk. \quad (\text{A.27})$$

Použijeme opět substituci $k = m_e c \sinh(t)$. Pak $dk = m_e c \cosh(t) dt$ a označme $T = \sinh^{-1}(k_F/m_e c)$.

Dosažením do integrálu tedy máme:

$$p = \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^T \left((m_e c \sinh(t))^2 c^2 + m_e^2 c^4 \right)^{-1/2} (m_e c \sinh(t))^4 m_e c \cosh(t) dt \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^T m_e^4 c^3 (\sinh^2(t) + 1)^{-1/2} \sinh^4(t) \cosh(t) dt \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{3} \int_0^T (1 + \sinh^2(t))^{-1/2} \sinh^4(t) \cosh(t) dt \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{3} \int_0^T \frac{1}{\cosh(t)} \sinh^4(t) \cosh(t) dt \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{3} \int_0^T \sinh^4(t) dt \quad (\text{A.32})$$

Řešme nyní integrál:

$$\int_0^T \sinh^4(t) dt, \quad (\text{A.33})$$

kde vyjádříme $\sinh^4(t)$ pomocí $\sinh^2(t)$ a použijme identitu $\sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t)-1}{2}$:

$$\int_0^T \sinh^4(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\cosh(2t)-1}{2} \right)^2 dt \quad (\text{A.34})$$

a využitím $\cosh^2(2t) = \frac{\cosh(4t)+1}{2}$ získáme

$$\int_0^T \left(\frac{\cosh(2t)-1}{2} \right)^2 dt \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^T \left(\frac{\cosh(4t)+1}{2} - 2 \cosh(2t) + 1 \right) dt \quad (\text{A.36})$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \cosh(4t) - 2 \cosh(2t) + \frac{3}{2} \right) dt \quad (\text{A.37})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \sinh(4T) - \sinh(2T) + \frac{3}{2} T \right) \quad (\text{A.38})$$

takže integrál se přepíše na:

$$p = \frac{\epsilon_0}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \sinh(4T) - \sinh(2T) + \frac{3}{2} T \right) \quad (\text{A.39})$$

kde si označme $K = \frac{\epsilon_0}{3} \cdot \frac{1}{4}$ a pokračujme ve výpočtu:

$$p = K \left(\sinh(2T) \cdot \left(\frac{1}{4} \cosh(2T) - 1 \right) + \frac{3}{2} T \right) \quad (\text{A.40})$$

$$= K \left(2 \sinh(T) \cosh(T) \cdot \left(\frac{1}{4} (\cosh^2(T) + \sinh^2(T)) - 1 \right) + \frac{3}{2} T \right) \quad (\text{A.41})$$

$$= K \left(2 \sinh(T) \cosh(T) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sinh^2(T) - 2 \right) + \frac{3}{2} T \right) \quad (\text{A.42})$$

$$= K \left(2 \sinh^3(T) \cosh(T) - \left(\frac{3}{2} \sinh(T) \cosh(T) + \frac{3}{2} T \right) \right) \quad (\text{A.43})$$

a po dosazení $T = \sinh^{-1}\left(\frac{k_f}{m_e c}\right)$, zavedení $x = \frac{k_f}{m_e c}$ a $\phi = \cosh(\sinh^{-1}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ získáme

$$p = K \left(x^3 \phi - \frac{3}{2} x \phi + \frac{3}{2} \sinh^{-1}(x) \right) \quad (\text{A.44})$$

$$= \frac{K}{2} \left((2x^3 - 3x) \sqrt{1+x^2} + 3 \sinh^{-1}(x) \right) \quad (\text{A.45})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{24} \left((2x^3 - 3x) \sqrt{1+x^2} + 3 \sinh^{-1}(x) \right) \quad (\text{A.46})$$

Bibliografie

1. FOWLER, R. H. Dense Matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1926, roč. 87, s. 114–122.
2. CLARK, A. G. *The Discovery of Sirius B*. Sv. 83. 1862.
3. SHAPIRO, S. L. Star Deaths and the Formation of Compact Objects. In: *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley, J Sons, Ltd, 1983, kap. 1, s. 1–16.
4. BAADE, W.; ZWICKY, F. Supernovae and Cosmic Rays. *Physical Review*. 1934, roč. 46, s. 76–77.
5. HAAR, D. ter (ed.). *Collected Papers of L.D. Landau*. Pergamon, 1965. Dostupné z doi: 10.1016/c2013-0-01806-3.
6. HEWISH, A.; BELL, S. J.; PILKINGTON, J. D. H.; SCOTT AND, P. F.; COLLINS, R. A. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*. 1968, roč. 217, s. 709–713.
7. GLAST LAT MULTIWAVELENGTH COORDINATING GROUP. *Public List of LAT-Detected Gamma-Ray Pulsars*. 2023. Dostupné také z: <https://confluence.slac.stanford.edu/display/GLAMCOG/Public+List+of+LAT-Detected+Gamma-Ray+Pulsars>. Navštíveno: 2024-08-07.
8. STEINER, A. W; LATTIMER, J. M.; BROWN, E. F. The Neutron Star Mass–Radius Relation and the Equation of State of Dense Matter. *The Astrophysical Journal Letters*. 2013, roč. 765, s. L5.
9. LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Nuclear matter and its role in supernovae, neutron stars and compact object binary mergers. *Physics Reports*. 2000, roč. 333–334, s. 121–146.
10. RILEY, T. E.; AL., et. A NICER View of PSR J0030+451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation. *The Astrophysical Journal*. 2019, roč. 887, s. L21.
11. SCHAFFNER-BIELICH, Jürgen. *Compact Star Physics*. Cambridge University Press, 2020.
12. TOUBOUL, J. ET AL. MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle. *Phys. Rev. Lett.* 2017, roč. 119, s. 231101.
13. RANSOM, S. M. ET AL. A Millisecond Pulsar in a Stellar Triple System. *Nature*. 2014, roč. 505, s. 520–524.
14. ARCHIBALD, A. M. ET AL. Universality of Free Fall from the Orbital Motion of a Pulsar in a Stellar Triple System. *Nature*. 2018, roč. 559, s. 73–76.
15. CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.
16. MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. *Gravitation*. First Edition. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. Physics Series.

17. OOSTERHOUT, W. *Brane Solutions in Heterotic Supergravity*. 2019. Bakalářská práce. Radboud University Nijmegen.
18. KITTEL, C.; KROEMER, H. *Thermal Physics*. San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1980.
19. SILBAR, R. R.; REDDY, S. Neutron stars for undergraduates. *American Journal of Physics*. 2004, roč. 72, s. 892–905.
20. CRAMER, J. G. Generalized absorber theory and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Phys. Rev. D*. 1980, roč. 22, s. 362–376.
21. ADAMS, W. S. The Spectrum of the Companion of Sirius. *Astrophysical Journal*. 1915, roč. 41, s. 473–485.
22. EDDINGTON, A. S. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1926.
23. CHANDRASEKHAR, S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophysical Journal*. 1931, roč. 74, s. 81–82.
24. SCHATZMAN, E. L. A Theory of the Role of Beta Decay in the Equation of State of White Dwarfs. *Annales d'Astrophysique*. 1947, roč. 10, s. 1–15.
25. HARRISON, B. K.; THORNE, K. S.; WAKANO, M.; WHEELER, J. A. Gravitational Theory and Gravitational Collapse. *Chicago: University of Chicago Press*. 1965, s. 242.
26. HARRISON, B. K.; WAKANO, M.; WHEELER, J. A. Dynamical Instability of White Dwarfs. *Astrophysical Journal*. 1965, roč. 142, s. 1127–1148.
27. OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. *Physical Review*. 1939, roč. 55, s. 374–381.
28. GOLD, T. Rotating Neutron Stars and the Nature of Pulsars. *Nature*. 1969.
29. (NRAO), National Radio Astronomy Observatory. *Pulsar Diagram*. 2002. Dostupné také z: %5Cur%7Bhttps://www.nrao.edu/pr/2002/3c58/pulsars/pulsardiagram.jpg%7D. Navštíveno: 2024-08-05.
30. TAURIS, T. M.; LANGER, N.; KRAMER, M. Recycled Pulsars: Spins, Masses and Ages. *arXiv*. 2016.