

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky  
Studijní program: Jaderná a částicová fyzika



# Injekční mechanismy při urychlování elektronů na plazmové vlně

## Injection mechanisms of plasma wakefield electron acceleration

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Vojtěch Janota  
Vedoucí práce: Ing. Jaroslav Nejd, Ph.D  
Konzultant: Mgr. Marek Raclavský  
Rok: 2024

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Janota** Jméno: **Vojtěch** Osobní číslo: **509300**  
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra fyziky**  
Studijní program: **Jaderná a částicová fyzika**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Injekční mechanismy při urychlování elektronů na plazmové vlně**

Název bakalářské práce anglicky:

**Injection mechanisms of plasma wakefield electron acceleration**

Pokyny pro vypracování:

1. Prostudujte fyzikální principy elektronového urychlování na plazmové vlně generované intenzivním laserovým impulzem nebo svazkem nabitých částic.
2. Zaměřte se na mechanismy zajišťující lokalizovanou injekci elektronového svazku v urychlující struktuře.
3. Navrhněte plynový terč umožňující záchyt elektronů na hustotním skoku.
4. Proveďte charakterizaci navrženého terče pomocí optického interferometru.

Seznam doporučené literatury:

- [1] M. Lamač, Laser-driven hard X-ray source for imaging applications, diplomová práce, MFF UK, 2020.
- [2] E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans Rev. Mod. Phys. 81, 1229 (2009).
- [3] J. Wenz, S. Karsch, Physics of Laser-Wakefield Accelerators, arXiv:2007.04622
- [4] A. Buck et al. Shock-front injector for high-quality laser-plasma acceleration, Physical Review Letters 110, 185006 (2013).
- [5] S. Karatodorov et al. Multi-pass probing for high-sensitivity tomographic interferometry. Scientific Reports 11, 15072 (2021).

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Jaroslav Nejdí, Ph.D. katedra fyzikální elektroniky FJFI**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


**Mgr. Marek Raclavský katedra fyzikální elektroniky FJFI**

Datum zadání bakalářské práce: **31.10.2023**

Termín odevzdání bakalářské práce: **05.08.2024**

Platnost zadání bakalářské práce: **31.10.2025**

  
Ing. Jaroslav Nejdí, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

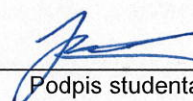
  
doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

  
7. 11. 2023

Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta



## PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

*Jméno a příjmení studenta:* Vojtěch Janota  
*Osobní číslo:* 509300  
*Studijní program:* Jaderná a částicová fyzika  
*Specializace:*

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

**Injekční mechanismy při urychlování elektronů na plazmové vlně**

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Praze dne 5.8.2024

podpis

*Název práce:*

**Injekční mechanismy při urychlování elektronů na plazmové vlně**

*Autor:* Vojtěch Janota

*Studijní program:* Jaderná a částicová fyzika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Jaroslav Nejdrl, Ph.D

Katedra laserové fyziky a fotoniky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Konzultant:* Mgr. Marek Raclavský

Katedra laserové fyziky a fotoniky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:* Práce se zaměřuje na základní principy urychlování elektronů plazmovou vlnou. Především na injekční mechanismy nezbytné pro urychlení a generaci monoenergetických elektronových svazků. Součástí práce je také návrh plynného terče pro záchyt elektronů na ostrém hustotním skoku za pomoci tenkého drátu. Takto navržený terč je následně charakterizován pomocí optického interferometru.

*Klíčová slova:* laserové urychlování plazmovou vlnou, injekční mechanismy, hustotní skok, interferometrie, tomografická rekonstrukce

*Title:*

**Injection mechanisms of plasma wakefield electron acceleration**

*Author:* Vojtěch Janota

*Abstract:* Thesis is focused on basic principles of laser wakefield acceleration. Especially on injection mechanism that is necessary for generation of monoenergetic electron bunches. In third chapter gas target for electron trapping based on shock-front density transition is designed. This target is finally characterised on optical interferometry station.

*Key words:* Laser wakefield acceleration, injection mechanisms, shock density transition, interferometry, tomography reconstruction

## **Poděkování**

V první řadě děkuji Ing. Jaroslavu Nejdlovi, Ph.D za možnost psát bakalářskou práci na toto téma a současně také za všechny velmi cenné rady, připomínky a věnovaný čas. Stejně díky patří také Mgr. Markovi Raclavskému za četné a velmi cenné konzultace a pomoc s měření. Taktéž děkuji všem, kteří mne na mé studijní i životní cestě podporovali a nezlomili nade mnou hůl.

Vojtěch Janota



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Urychlování elektronů na plazmové vlně</b>	<b>11</b>
1.1 Elektromagnetická vlna . . . . .	11
1.1.1 Popis elektromagnetického pole . . . . .	11
1.1.2 Interakce s nabitou částicí . . . . .	12
1.2 Ponderomotorická síla . . . . .	13
1.3 Plazmová vlna . . . . .	14
1.3.1 Excitace vlny svazkem částic . . . . .	15
1.3.2 Lámání plazmových vln . . . . .	16
1.4 Relativistický případ . . . . .	16
1.5 Trajektorie elektronu v plazmové vlně . . . . .	18
1.5.1 Urychlení elektronů . . . . .	19
1.6 Injekce elektronů . . . . .	20
1.6.1 Samoinjekce . . . . .	20
1.6.2 Ionizační injekce . . . . .	20
1.6.3 Optická injekce . . . . .	21
1.6.4 Injekce pomocí hustotního gradientu . . . . .	21
<b>2 Měření hustoty plynného terče</b>	<b>25</b>
2.1 Optická interferometrie . . . . .	25
2.1.1 Interference dvou vln . . . . .	25
2.1.2 Šíření elektromagnetické vlny v prostředí . . . . .	26
2.1.3 Měření nehomogenního objektu . . . . .	27
2.2 Tomografická rekonstrukce . . . . .	28
2.2.1 Rozlišení a filtrovaná zpětná projekce . . . . .	30
2.3 Experimentální uspořádání . . . . .	32
<b>3 Návrh a charakterizace plynného terče</b>	<b>35</b>
3.1 Tvorba hustotního skoku . . . . .	35
3.1.1 Tvorba hustotního skoku pomocí žiletky . . . . .	35
3.1.2 Tvorba hustotního skoku pomocí drátu . . . . .	37
3.2 Návrh terče . . . . .	38
3.3 Charakterizace navrženého terče . . . . .	40
3.3.1 Terč s drátem nad tryskou . . . . .	40
3.3.2 Drát umístěný na trysce . . . . .	45
3.4 Diskuze naměřených výsledků . . . . .	47

<b>Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>
<b>Přílohy</b>	<b>55</b>
<b>A Gaussovský svazek</b>	<b>55</b>
<b>B Úprava dat před tomografickou rekonstrukcí</b>	<b>57</b>
B.1 Inverze dat . . . . .	57
B.2 Filtrace šumu . . . . .	57
B.3 Úprava osy rotace . . . . .	59
B.4 Korekce celkového fázového posunu . . . . .	59



# Úvod

Historie částicových urychlovačů se píše již více než 100 let. Touha po tom dosáhnout co nejvyšší rychlosti je ale mnohem starší. Již v pravěku se lovec snažil, aby jeho zbraň dosáhla co nejvyšší rychlosti, což vedlo mimo jiné k vynálezu luku. Ve starověku lidstvo již znalo bič, nástroj který svým pohybem dokázal překonat rychlost zvuku. Jako nejrychlejší se v průběhu času ukázalo světlo, jehož rychlost byla stanovena jako konečná a současně jako maximální možná, které může být dosaženo [1].

Dalším velkým milníkem v historii fyziky byl Rutherfordův pokus, kterým bylo v roce 1911 objeveno atomové jádro. Pokus byl postaven na ostřelování tenké zlaté fólie atomy helia z alfa rozpadu. Energie těchto částic získaných z alfa rozpadu se pohybuje pouze v jednotkách MeV [2]. Pro další studium fundamentální struktury hmoty se tyto energie ukázaly jako nedostatečné a bylo třeba začít částice urychlovat a začít budovat urychlovače umožňující srážky částic při vysokých energiích.

První urychlovače částic existovaly již dříve. Pomocí jednoho takového jménem katodová trubice objevil v roce 1897 J. J. Thomson elektron [3]. Hrdým majitelem toho urychlovače se v průběhu 20. století stala prakticky každá evropská domácnost. Implementován v CRT (Cathode Ray Tube) televizoru umožňoval tento urychlovač sledovat sportovní zápasy i důležité okamžiky světových dějin z pohodlí domova.

Urychlovače prošly od počátků s katodovou trubicí významným vývojem. Nejvýkonnější a také nejznámější současný urychlovač je Velký hadronový urychlovač Large Hadron Collider (LHC), který se řadí mezi synchrotrony a dokáže dosáhnout těžiškové energie 14 TeV [4]. Tento urychlovač je umístěn v 27 km dlouhém podzemním tunelu pod Ženevou a provozuje jej mezinárodní Evropská organizace pro jaderný výzkum CERN (Conseil européen pour la Recherche nucléaire). V budoucnu je plánováno nahrazení LHC ještě větším urychlovače FCC (Future Circular Collider), pro který je nutné vybudovat tunel v délce 91 km. Zda bude tento urychlovač skutečně postaven bude známé v roce 2028. V případě schválení se očekává začátek výstavby v roce 2031 a začátek operací v roce 2045 (pro elektron pozitronové srážky). Maximální energie srážek by v tomto urychlovači měla být dosažena v roce 2070 a to pro hadron hadronové srážky. Tyto srážky by měly probíhat při těžiškové energii 100 TeV [5].

Lidstvo dosáhlo obrovského pokroku a z jednotek MeV se blížíme srážkám částic při 100 TeV. Zároveň výrazně narostla velikost urychlovačů, kdy místo malé katodové trubice dnes potřebujeme tunel o délce necelých 100 km. Alternativu k těmto velkým urychlovačům představuje urychlování elektronů plazmovou vlnou. Tento princip popsali T. Tajima a J. M. Dawson v roce 1979 [6]. Tímto způsobem lze urychlovat elektrony na velmi krátkých vzdálenostech. Tento rozdíl je dán

ve velikosti urychlovacího pole. V klasických radio-frekvenčních urychlovacích dutinách používaných ve výše uvedených velkých urychlovačích je maximální dosažitelné urychlovací pole menší než  $100 \frac{\text{MeV}}{\text{m}}$  [7]. Pro plazmové urychlovače byla již dosaženo urychlovacího pole o velikosti větší než  $50 \frac{\text{GeV}}{\text{m}}$  a energie svazku 42 GeV [8].

V této práci nejprve popíšeme základní fyzikální principy urychlování elektronů pomocí plazmové vlny. Následně popíšeme možnosti urychlování pomocí plazmových vln a injekční mechanismy, které umožňují injekci elektronů do plazmové vlny, kde jsou následně urychleny.

V druhé kapitole popíšeme interferometrii a tomografickou rekonstrukci, kterou využijeme pro měření hustotních profilů plynných terčů, jež se používají pro laserové urychlování elektronů.

Ve třetí kapitole navrheme terč umožňující záchyt elektronů na hustotním skoku a následně jej charakterizujeme pomocí metody popsané v druhé kapitole.

# Kapitola 1

## Urychlování elektronů na plazmové vlně

V této kapitole popíšeme základní fyzikální principy urychlování elektronů pomocí plazmové vlny. Začneme popisem elektromagnetického pole a elektromagnetických vln. Následně se budeme zabývat interakcí elektromagnetické vlny s nabitou částicí a excitací plazmové vlny ponderomotorickou silou. Nejprve budeme uvažovat lineární vlny, které získáme pokud nebudeme pracovat s relativistickými interakcemi. Následně zmíníme limit popisu plazmových vln jako kontinua, který se nazývá lámání plazmových vln a v následující podkapitole uvedeme popis nelineárních vln, které získáme uvažováním relativistických interakcí. Současně v této podkapitole uvedeme vztahy pro pojmy zavedené pro lineární vlny v případě uvažování relativistických interakcí. Na závěr této kapitoly rozebereme možnosti urychlení elektronů na vzniklé plazmové vlně a injekční mechanismy, které umožňují záchyt a urychlení elektronů pomocí plazmových vln.

### 1.1 Elektromagnetická vlna

#### 1.1.1 Popis elektromagnetického pole

Pro libovolné elektromagnetické pole musí být splněny Maxwellovy rovnice. Ty lze matematicky vyjádřit jako [1]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{c^2 \varepsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Polními proměnnými těchto rovnic jsou elektrická intenzita  $\mathbf{E}$  a magnetická indukce  $\mathbf{B}$ , prostředí charakterizuje permitivita vakua  $\varepsilon_0$  a rychlost světla ve vakuu  $c$ . Maxwellovy rovnice lze vyřešit nalezením skalárního potenciálu  $\Phi$  a vektorového

potenciálu  $\mathbf{A}$  svázaných s polními proměnnými vztahy [9]

$$\mathbf{E} = \nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2)$$

a zároveň splňující Lorenzovu kalibrační podmínku ve tvaru  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Speciálním případem elektromagnetického pole je elektromagnetická vlna, která musí splnit vlnovou rovnici [1]

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Pro libovolné  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{E}$ , které splní Maxwellovy rovnice, je splněna i rovnice vlnová. Obráceně toto tvrzení platí pouze za podmínek [1]

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B}, \quad (1.4)$$

kde  $\mathbf{n}$  představuje jednotkový vektor směru šíření vlny.

Lineárně polarizovanou harmonickou rovinnou vlnu šířící se ve směru osy  $z$  s frekvencí  $\omega$  a vlnovým číslem  $k$  lze popsat potenciály ve tvaru

$$\Phi = 0 \quad \mathbf{A} = \left( \frac{-A_x \cos(\omega t - kz)}{\omega}, \frac{-A_y \cos(\omega t - kz)}{\omega}, 0 \right). \quad (1.5)$$

To podle vztahů (1.2) odpovídá elektrickému a magnetickému poli ve tvaru

$$\mathbf{E} = (A_x \sin(\omega t - kz), A_y \sin(\omega t - kz), 0); \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} (A_y \sin(\omega t - kz), -A_x \sin(\omega t - kz), 0). \quad (1.6)$$

### 1.1.2 Interakce s nabitou částicí

Uvažujme nyní interakci elektromagnetické vlny popsanou vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  s částicí o náboji  $q$ . Lorentzova síla, kterou vlna působí na částici, je dána vztahem [1]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.7)$$

kde  $\mathbf{v}$  představuje rychlost nabitě částice a  $\mathbf{p}$  její hybnost. Pro případ elektromagnetické vlny lze tento vztah upravit s pomocí podmínek (1.4) na

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})\right). \quad (1.8)$$

Za předpokladu, že částice není relativistická, tj. pro  $\beta = \frac{v}{c}$  platí  $\|\beta\| \ll 1$ , můžeme ve vztahu (1.8) položit  $\beta$  rovno nule. Pokud vezmeme harmonickou postupnou vlnu šířící se ve směru osy  $z$  s amplitudou elektrické intenzity  $\mathbf{E}_0$  tj.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - kz)$ , kde  $\omega$  je frekvence vlny a  $k$  vlnové číslo. Pak integrací vztahu (1.8) pro nerelativistickou částici s nulovou počáteční rychlostí a počáteční polohou na ose  $z$  (tj.  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) = (0, 0, z_0)$ ) dostáváme její polohu v čase  $t$  jako

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - kz) + \mathbf{x}_0 = -\frac{q}{m\omega^2} \sin(\omega t - kz)(E_{0,x}, E_{0,y}, 0) + (0, 0, z_0). \quad (1.9)$$

Výše uvedenou aproximaci  $\beta \approx 0$  nelze použít pro relativistické interakce. V takovýchto případech je nutné uvažovat i vliv magnetické složky Lorentzovy síly [10]. V následujícím textu budeme pracovat s výsledkem získaným díky této aproximaci. Magnetickou složku Lorentzovy síly budeme v další podkapitole uvažovat až v úplném závěru a to pouze v lineární aproximaci. Výsledky, které lze získat při uvažování relativistické interakce, uvedeme v sekci 1.4.

## 1.2 Ponderomotorická síla

V předchozím textu jsme uvažovali pouze rovinnou elektromagnetickou vlnu, která má amplitudu nezávislou na poloze. Nyní budeme stejně jako v předchozí podkapitole pracovat s lineárně polarizovanou harmonickou postupnou vlnu šířící se ve směru osy  $z$ , ale opustíme požadavek konstantní amplitudy a budeme uvažovat její závislost na poloze. Nyní můžeme sestavit pohybovou rovnici nerelativistického elektronu o elementárním náboj  $e$  v poli této elektromagnetické vlny a to ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \sin(\omega t - kz). \quad (1.10)$$

Předpokládejme pouze malé výchylky polohy elektronu  $\mathbf{x}$  z počáteční polohy  $\mathbf{x}_0$  a aproximujme amplitudu vlny v bodě  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$  jako

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0) + (\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0))\mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Pohybová rovnice (1.10) tedy v tomto bodě přejde s využitím vztahu (1.9) na tvar

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0) \sin(\omega t - kz) - \frac{e^2}{m_e\omega^2} \sin^2(\omega t - kz)(\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0))\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0). \quad (1.12)$$

Časová střední hodnota této změny hybnosti ve tvaru

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{2m_e\omega^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0))\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0) \quad (1.13)$$

představuje elektrickou část takzvané ponderomotorické síly. Pokud bychom ve vztahu (1.10) nezanedbali magnetickou část Lorentzovy síly, dostali bychom po linearizaci (1.12) ještě magnetickou část ponderomotorické síly a celkový tvar ponderomotorické síly jako [11]

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{2m_e\omega^2} \{(\nabla \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 \times (\text{rot } \mathbf{E}_0)\}(\mathbf{x}_0) = -\frac{e^2}{4m_e\omega^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}_0^2(\mathbf{x}_0)). \quad (1.14)$$

Ponderomotorická síla působí proti směru gradientu amplitudy elektrické vlny a vytlačuje nabitě částice z oblasti vyšších elektrických intenzit do oblastí s menší intenzitou.

### 1.3 Plazmová vlna

Jako plazma označujeme silně ionizovaný plyn, který obsahuje volné nosiče náboje vykazující kolektivní chování a zároveň je kvazineutrální [12].

Popíšeme nyní případ, kdy elektromagnetickou vlnu reprezentující laserový pulz s profilem daným Gaussovským svazkem (viz. Příloha A) a amplitudou elektrické intenzity  $\mathbf{E}_0$ , interaguje s plazmatem. Uvažujme nyní pouze případy, kdy je splněna disperzní relace pro plazma [12]

$$\omega^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0} + c^2 k^2 \quad (1.15)$$

a elektromagnetické pole vlny se šíří v plazmatu jako vlna. V předchozím vztahu představuje  $m_e$  hmotnost elektronu a  $n_e$  hustotu volných elektronů v plazmatu. Člen rovnice úměrný  $n_e$  lze také souhrnně označit jako druhou mocninu plazmové frekvence  $\omega_p^2$ .

Laserový pulz bude působit na nabitě částice v plazmatu ponderomotorickou silou (1.14). Tato síla je nepřímo úměrná hmotnosti nabitě částice, proto lze pohyb iontů oproti pohybu elektronů zanedbat a budeme je považovat za nehybné. Nyní se budeme snažit najít potenciály elektromagnetického pole plazmatu, které vznikne po průchodu laserového pulzu. Vyjdeme-li ze vztahů (1.7), (1.2) pak po úpravách získáváme rovnici [13]

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -e \nabla \Phi + e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{e^2}{2m_e \omega} \nabla E_0, \quad (1.16)$$

kde člen úměrný  $\nabla E_0$  představuje ponderomotorický potenciál. V následujícím textu přejdeme pro lepší přehlednost k normalizovaným proměnným ve tvaru:

$$\mathbf{a} = \frac{e \mathbf{A}}{m_e c} \quad \phi = \frac{e \Phi}{m_e c^2} \quad \gamma = \frac{\mathbf{E}}{m_e c^2} \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m_e c} \quad (1.17)$$

Řešením pohybové rovnice (1.16) je normalizovaný skalární potenciál [13]

$$\phi(r, \xi) = a_0^2 f(r) \sin(k_{pl} \xi), \quad (1.18)$$

kde  $\xi = z - v_{ph} t$ . V této rovnici  $v_{ph}$  představuje fázovou rychlost plazmové vlny, pro kterou platí  $v_{ph} = \frac{\omega_{pl}}{k_{pl}}$ . Index  $pl$  označuje příslušnost veličiny k plazmové vlně,  $a_0$  odpovídá amplitudě normalizovaného vektorového potenciálu Gaussova svazku a proměnná  $r$  reprezentuje radiální souřadnici ve soustavě válcových souřadnic  $(r, \vartheta, z)$ . Z definice skalárního potenciálu (1.2) nyní dokážeme určit průběh normované elektrické intenzity ve směru osy  $z$  a v radiálním směru jako :

$$\gamma_z = a_0^2 k_{pl} f(r) \cos(k_{pl} \xi), \quad \gamma_r = -\frac{a_0^2 r}{w_0^2} f(r) \sin(k_{pl} \xi). \quad (1.19)$$

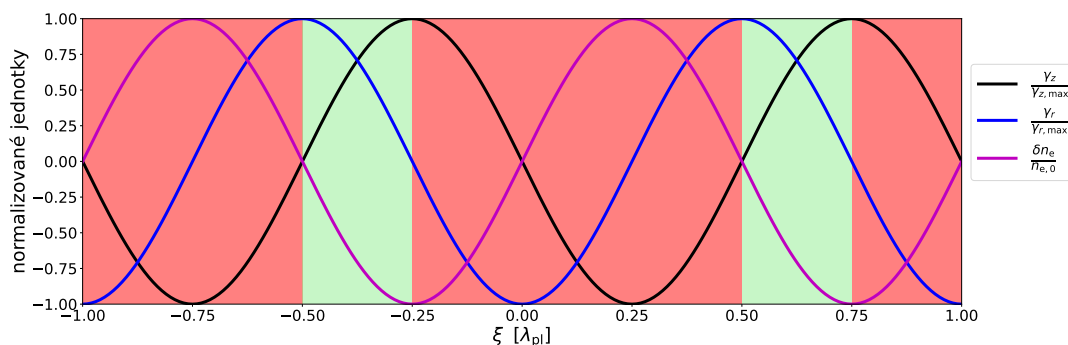
Dále lze také z Poissonovy rovnice určit perturbaci elektronové hustoty  $\delta n_e$  [13]

$$\delta n_e = -n_{0,e} a_0^2 k_{pl}^2 f(r) \sin(k_{pl} \xi), \quad (1.20)$$

kde  $n_{0,e}$  je hustota volných elektronů v plazmatu. Tento vztah odpovídá harmonické vlně. Vzniká vlna tvořená oblastmi s převažujícím kladným a převažujícím záporným nábojem, kterou označujeme jako plazmovou vlnu. Vzniklou plazmovou vlnu lze charakterizovat vlnovou délkou danou vztahem [6]

$$\lambda_{\text{pl}} = \frac{\pi c}{\omega_p} = \pi c \sqrt{\frac{m_e \epsilon_0}{n_e e^2}} . \quad (1.21)$$

Průběh intenzit v plazmové vlně dané perturbacemi hustoty elektronů zobrazuje Obr. 1.1. Plazmovou vlnu rozdělít na akcelerační část, kde podélná intenzita je



Obr. 1.1: Průběh hodnot normovaných elektrických intenzit daných vztahem (1.19) a perturbace hustoty elektronů dané vztahem (1.20) v závislost na proměnné  $\xi$  v jednotkách plazmové vlnové délky  $\lambda_{\text{pl}}$ . Hodnoty označené indexem *max* představují maximální absolutní hodnoty těchto intenzit. Zeleně jsou vyznačeny oblasti s kladnou hodnotou obou intenzit. Červeně oblasti jsou oblasti, kde aspoň jedna z intenzit je záporná.

kladná a decelerační, kde je tato intenzita záporná. Taktéž můžeme rozdělít vlnu na fokusující části, kdy je radiální intenzita kladná a elektrony jsou tlačeny z okrajů do středu vlny a defokusující části, kde je tato intenzita záporná a elektrony jsou vytlačovány mimo vlnu. Fokusující a současně akcelerační části jsou na Obr. 1.1 vyznačeny zeleně.

### 1.3.1 Excitace vlny svazkem částic

V předchozí sekci jsme popsali excitaci plazmové vlny pomocí intenzivního laserového pulzu. Vznik plazmové vlny je v takovém případě způsoben ponderomotorickým potenciálem. Druhou možností, jak tento potenciál získat, je interakce plazmatu se svazkem nabitých částic. Tento svazek bude působit na nabitě částice v plazmatu Lorentzovou silou (1.7). Svazek se bude v plazmatu pohybovat a my ho tedy můžeme vnímat jako pohybující se elektromagnetické pole, které vytváří potenciál, který vede na excitaci plazmové vlny [14]. Aby došlo k účinnému vybuzení plazmové vlny, je nutné aby zdroj poruchy (laserový pulz, nebo svazek částic) byl kratší než je vlnová délka plazmové vlny [15]. Tento požadavek pro svazky nabitých částic vyžaduje korelaci mezi hybností částice a její polohou ve svazku. K dosažení těchto požadavků

se využívá např. radio-frekvenční dutina v kombinaci s disperzními prvky a magnety [16]. Pro laserový svazek je nutné využít technologie Chirped pulse amplification, která umožňuje kompresi laserového pulzu s vysokou energií do délek v řádu femtosekund [17].

Elektronové svazky v řádu ps lze rozdělit a vytvořit dva kratší pomocí soustavy dipólových magnetů. Tímto způsobem lze například z svazku v řádu ps získat dva svazky oddělené mezerou v řádech desetin ps. Tyto dva svazky mají různou střední hodnotu energie částic i různý náboj oba jsou ale kratší než 0,5 ps. První svazek vytváří plazmovou vlnu a druhý působí jako injektor elektronů do této vlny (proces injekce elektronů do plazmové vlny je blíže diskutován v podkapitole 1.6). Tvar výsledného spektra elektronů je závislý na hustotě plazmatu, která ovlivňuje vlnovou délku plazmové vlny a tedy i místo ve fázovém prostoru plazmové vlny<sup>1</sup>, kde se bude injektovat druhý svazek [18].

### 1.3.2 Lámání plazmových vln

Označme nyní  $n_e$  hustotu elektronů v plazmové vlně. Pro rychlost elektronu  $v_e$ , který je součástí plazmové vlny šířící se fázovou rychlostí  $v_{ph}$  platí tyto dva vztahy [19]

$$v_e = v_{ph} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{K\phi}{v_{ph}^2}} \right); \quad n_e = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K\phi}{v_{ph}^2}}}, \quad (1.22)$$

kde  $K$  představuje konstantu závislou na nábojích a hmotnostech iontů a elektronů. Pokud elektrony dosáhnou fázové rychlosti vlny, poroste hustota elektronů v plazmové vlně do nekonečna. Tato hustota může být pouze konečná a v jistém bodě dosáhne svého maxima. Pokud tedy dojde k dosažení rychlosti elektronů vyšší než umožňuje hustota elektronů podle vztahu (1.22), pak výsledné pole nemůže odpovídat harmonické vlně. Existuje tedy limit pro potenciál  $\phi$  pro jaký může plazmová vlna ještě existovat. Po překročení tohoto limitu dochází k jevu zvanému lámání vln, kdy elektrony "předběhnou" vlnu a ta se zhroutí. Tuto limitní hodnotu lze pro nerelativistický případ určit vztahem [20]

$$E_{\max} = \frac{cm_e\omega_{pl}}{e}, \quad (1.23)$$

kde  $\omega_{pl}$  představuje plazmovou frekvenci.

## 1.4 Relativistický případ

Až do této chvíle jsem považovali všechny jevy, jako ponderomotorická síla, plazmová vlna atd. za nerelativistické. V případě vysokých intenzit laserových pulzů, již toto přiblížení nestačí a musíme přejít k relativistickým vztahům, které nám budou poskytovat reálnější fyzikální popis.

---

<sup>1</sup>Fázový prostor plazmové vlny a s ním související pohyb nabitých částic v fázovém prostoru plazmové vlny je popsán v podkapitole 1.5.



Nejprve nahradíme vztah pro ponderomotorickou sílu (1.14) relativistickým vztahem [21]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m_e c^2 \nabla \sqrt{1 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle} \quad (1.24)$$

vztaženým k střední hodnotě normovaného vektorového potenciálu laserového pulzu. Obdobně nyní přejdeme k novému popisu plazmové vlny, která již v případě vysokých energií nebude lineární. Pro normovaný potenciál  $\phi$  nelineární plazmové vlny bude platit [20]

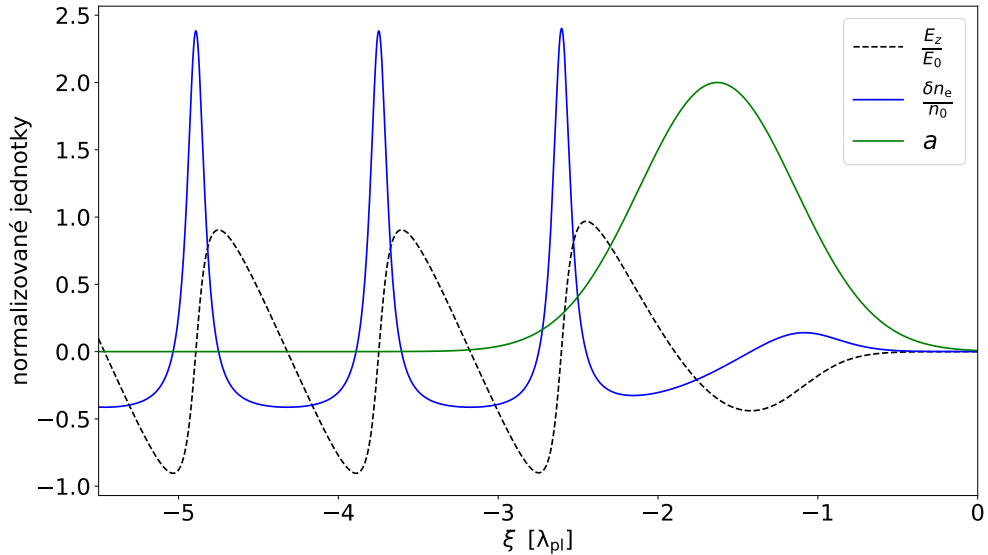
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = k_{\text{pl}}^2 \gamma_{\text{pl}}^2 \left\{ \beta_{\text{pl}} \left[ 1 - \frac{(1 + \mathbf{a})^2}{\gamma_{\text{pl}}^2 (1 + \phi)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \quad (1.25)$$

kde  $\gamma_{\text{pl}}$  je Lorentzův faktor pro fázovou rychlost plazmové vlny. Tento vztah lze zjednodušit Taylorovým rozvojem v  $\frac{1}{\gamma_{\text{pl}}^2}$  a následnou limitou  $\beta_{\text{pl}} \rightarrow 1$  při konstantním  $k_{\text{pl}}$  do tvaru

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{k_{\text{pl}}^2}{2} \left( \frac{(1 + \mathbf{a})^2}{(1 + \phi)^2} - 1 \right). \quad (1.26)$$

Perturbace hustoty elektronů v této vlně bude opět určena Poissonovou rovnicí jako v nerelativistickém případě. Pokud bychom nyní přešli k proměnné  $\xi' = k_{\text{pl}} \xi$ , nebude rovnice (1.26) záviset na jakýchkoliv parametrech plazmatu. Výsledný průběh perturbace elektronové hustoty a elektrické intenzity získané z potenciálu ve výše uvedené aproximaci je na Obr. 1.2.

Vzhledem ke změně potenciálu, který popisuje vlnu, se změní i limitní hodnota



Obr. 1.2: Průběh perturbace elektronové hustoty normalizované na hustotu plazmatu a elektrické intenzity ve směru šíření pulzu normalizované jejím maximem v nelineární plazmové vlně vybuzené laserovým pulzem popsáný potenciálem  $a$  s gaussovským průběhem a amplitudou  $a_0 = 2$ , který se šíří v kladném směru.

pro lámání vln a to na tvar [22]

$$E_{\max} = \frac{cm_e\omega_{\text{pl}}}{e} \sqrt{2\gamma_{\text{pl}} - 1}, \quad (1.27)$$

který v nerelativistické limitě přejde na tvar (1.23).

## 1.5 Trajektorie elektronu v plazmové vlně

V následujícím textu popíšeme fázovou trajektorii elektronu v poli plazmové vlny. Hamiltonián elektronu v elektromagnetickém poli má tvar [9]

$$H = c\sqrt{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - m_e^2c^2} - e\Phi. \quad (1.28)$$

Pro plazmovou vlnu danou normalizovaným elektrostatickým potenciálem  $\phi$  můžeme kanonickou transformací přejít k tvaru [23]

$$\tilde{H} = \sqrt{1 + u_z^2(\xi) + a^2(\xi)} + \phi(\xi) - \beta_{\text{pl}}u_z(\xi), \quad (1.29)$$

kde  $\beta_{\text{pl}}$  představuje normalizovanou rychlost plazmové vlny. Tento vztah je platný jak pro lineární, tak i nelineární vlny, ty jsou od sebe odlišeny pouze jiným tvarem potenciálu  $\phi$ .

Nyní můžeme položit  $\tilde{H}$  rovno konstantě a zkoumat fázové trajektorie elektronu pro jednotlivé hodnoty tohoto hamiltoniánu, který představuje celkovou energii elektronu. Fázové trajektorie jsou na Obr. 1.3. Ve fázovém prostoru můžeme odlišit několik druhů trajektorií.

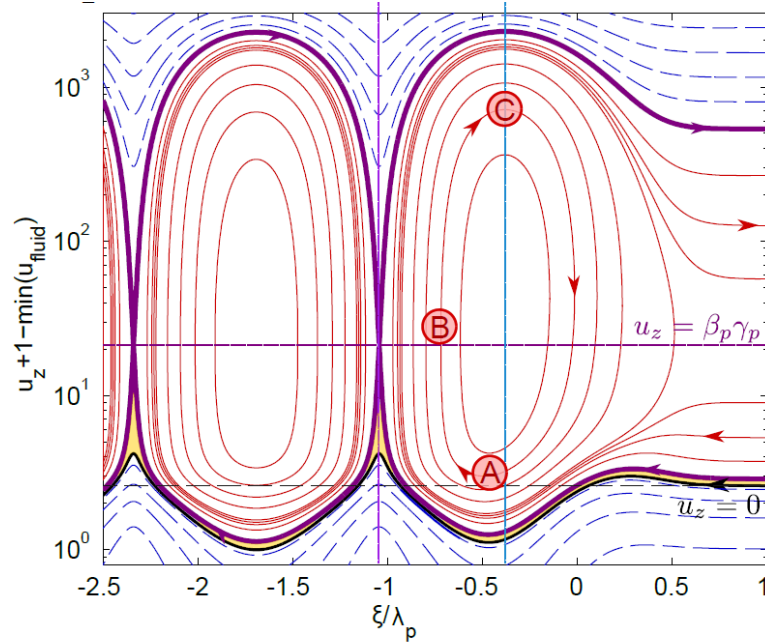
První jsou neuzavřené trajektorie (na Obr. 1.3 označeny přerušovaně), ty pro velké hybnosti přecházejí v přímky rovnoběžné s osou  $x$ . Přímkám ve fázovém prostoru odpovídá rovnoměrný přímočarý pohyb, z čehož můžeme odvodit pohyb těchto částic. Tyto částice jsou vlnou ovlivněny, ale přesto v soustavě spojené s vlnou setrvávají ve směru svého pohybu po celou dobu.

Druhý typ trajektorie je oscilující trajektorie postupující fázovým prostorem (na Obr. 1.3 označena tmavě fialově), tato trajektorie odpovídá vlnovému průběhu a elektrony nacházející se na této trajektorii jsou součástí vlny. Na této trajektorii se pohybují elektrony s nulovou hybností před interakcí s laserovým pulzem, u kterých očekáváme, že budou vytvářet plazmovou vlnu (právě pro takovéto elektrony jsme odvodili všechny vztahy v této kapitole, protože jsme zanedbali jejich tepelný pohyb). Obecně se tato trajektorie označuje jako separační (separatrix), protože rozděluje fázový prostor na oblasti, kde jsou elektrony vlnou pouze ovlivněny a oblast v níž jsou elektrony vlnou zachytávány.

Poslední typ trajektorie, který je třeba diskutovat jsou uzavřené trajektorie (na Obr. 1.3 označeny červeně). Elipsa v fázovém prostoru odpovídá lineárnímu harmonickému oscilátoru a uzavřené trajektorie skutečně pro lineární případ přejdou v elipsy (pokud zanedbáme deformace trajektorií ovlivněných laserovým pulzem) [13]. Tyto trajektorie tedy lze interpretovat jako trajektorie elektronů, které oscilují v plazmové vlně. Podstatný je také fakt, že Obr. 1.3 je vykreslen pro soustavu pohybující se s laserovým pulzem. Proto tyto trajektorie lze interpretovat jako oscilující

elektrony zachycené vlnou.

Poslední důležitým poznatkem z rozboru fázového prostoru je, že bod ve fázovém prostoru, kde má elektron pohybující se na separační trajektorii hybnost  $u_z = \beta_p \gamma_p$  odpovídá bodu, kde je potenciál vlny roven nule a je zde maximální hodnota perturbace elektronové hustoty [20]. Tuto skutečnost využijme v podkapitole o injekci pomocí hustotního gradientu.



Obr. 1.3: Fázový prostor pole nelineární plazmové vlny vybuzené laserovým pulzem s gaussovským průběhem, amplitudou  $a_0 \approx 2,1$  a  $t_{\text{FWHM}} = 28$  fs.  $\lambda_p$  představuje v tomto případě vlnovou délku lineární plazmové vlny. Fázové trajektorie jsou vykresleny se zanedbáním tepelného pohybu elektronů v plazmatu. Převzato z [13].

### 1.5.1 Urychlení elektronů

V předchozí sekci jsme diskutovali potenciální možné trajektorie elektronů ve fázovém prostoru plazmové vlny v závislosti na jejich počáteční hybnosti a poloze. Z tohoto rozboru plyne, že jediné vhodné trajektorie pro urychlování elektronů v plazmové vlně jsou uzavřené trajektorie, na nichž jsou elektrony zachyceny vlnou a zároveň jsou v částech své trajektorie vlnou urychlovány (v částech, které nazveme akcelerační). Zároveň jsou v některých částech své trajektorie tyto elektrony zpomalovány (takové části nazveme decelerační). Naším cílem je tedy dostat elektrony do vhodné části fázového prostoru, tento proces nazýváme injekce elektronů, a současně nastavit terč tak, aby elektrony opustili vlnu ve chvíli, kdy mají maximální možnou hybnost, kterou mohli urychlením na vlně získat tj. nacházejí se v bodě, který je na Obr. 1.3 pro jednu z trajektorií označen jako *C*.

Cílem elektronového urychlování je kromě zisku co nejvyšší energie elektronů také získat elektronový svazek s minimálním rozptylem energií a minimální prostorovou

divergencí. Pro potřeby elektronového urychlování je třeba, aby se těsně před opuštěním vlny elektron nacházel v akcelerační a fokusující části vlny (a to ve smyslu jak jsme tyto pojmy zavedli v sekci 1.3 s tím, že zavedení akcelerační oblasti je v souladu s předchozím odstavcem). Z Obr.1.1 je patrné, že vhodná oblast odpovídá pouze části vlny o velikosti čtvrtiny vlnové délky plazmové vlny. Tyto části jsou vyznačeny zelenou barvou na Obr.1.1. Pro nelineární vlnu bychom vhodnou oblast našli stejným postupem jako jsme to provedli pro lineární v sekci 1.3.

## 1.6 Injekce elektronů

V předcházejícím textu jsme došli k závěru, že pro urychlení elektronu je nutné, aby se nacházel ve vhodné části fázového prostoru vlny. Abychom dosáhli potřebného urychlení elektronu, je z Obr. 1.3 patrné, že elektron musí mít vhodnou počáteční hybnost a polohu. V následujícím textu se budeme zabývat tím, jak injektovat elektrony do plazmové vlny ve vhodném bodě a s vhodnou hybností, aby byly urychleny. Tato injekce elektronů je velmi obtížně dosažitelná externím zdrojem a to především kvůli vzájemné synchronizaci procesů, probíhající v řádu femtosekund. Naší cílem budou takové typy injekcí, kdy dojde k zachycení elektronů, které se již nacházejí v plazmatu.

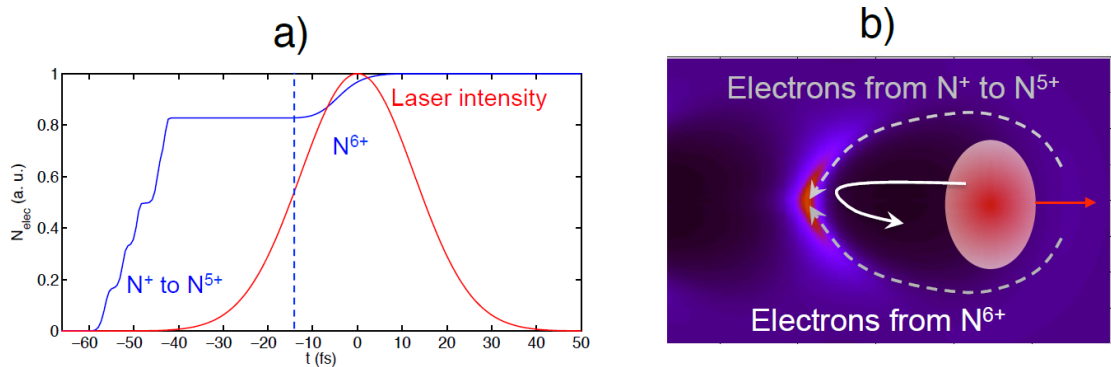
### 1.6.1 Samoinjekce

Podmínkou, aby se elektrony samoinjektovaly je pro dané laserové parametry nastavení správné hustoty terče, tak aby mohlo dojít k lámání plazmové vlny. Zhroutením struktury původní vlny, se mohou v nově vytvořené vlně objevovat elektrony s vhodnou hybností, které jsou následně urychleny. Nalezení vhodného terče pro zachytu elektronů samoinjekcí je možné pouze simulacemi, popř. experimentálně. Pomocí těchto simulací, lze zkoumat různé faktory ovlivňující injekci jako je například chování laserového pulzu v plazmatu [24].

### 1.6.2 Ionizační injekce

Princip této injekce spočívá ve využití plynu s vyšším protonovým číslem, například dusíku. V první fázi při interakci laserového pulzu s plynem dochází k uvolnění elektronů z vyšších orbitalů a vzniku plazmové vlny, jak bylo popsáno výše. Tyto elektrony jsou uvolněny ještě před interakcí hlavní části laserového pulzu s plynným terčem a vytvářejí plazma. Ponderomotorická síla v již vytvořeném plazmatu tyto elektrony následně vytlačí z oblasti s vysokou intenzitou laserového pulzu. V této oblasti díky vysoké intenzitě může dojít k ionizaci dalších elektronů, které se po uvolnění z atomu budou nacházet v plazmové vlně a mohou být urychleny [25]. Schéma této postupné ionizace i následné zachycení elektronů ionizovaných vrcholem laserového pulzu je na Obr. 1.4. Nevýhodou tohoto způsobu injekce je, že k uvolňování elektronů dochází postupně, nikoliv najednou. Tyto uvolněné elektrony se nacházejí

v různých částech fázového prostoru, což vede k rozptylu energií urychlených elektronů. Naopak výhodou je množství urychlených elektronů a stabilita injekce [26].



Obr. 1.4: Graf **a** zobrazuje normalizovaný průběh počtu ionizovaných elektronů během interakce laserového pulzu s plynem, z něž se po primární ionizaci stává plazma. Intenzita laserového pulzu je  $10^{19} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Na obrázku **b** jsou naznačeny odlišné trajektorie ionizovaných elektronů. Elektrony, jenž vznikly ionizací  $N^+$  na  $N^{5+}$  vytvářejí plazmovou vlnu a jejich trajektorie je označena přerušovaně. Elektrony vzniklé ionizací na  $N^{6+}$  vznikají až během průchodu vrcholu intenzity laserového pulzu a nacházejí se tedy v části fázového prostoru, kde jsou zachyceny a oscilují v vytvořené plazmové vlně. Jejich trajektorie je naznačena plnou bílou čarou. Červená elipsa reprezentuje laserový pulz a červená šipka směr jeho šíření. Převzato z [25].

### 1.6.3 Optická injekce

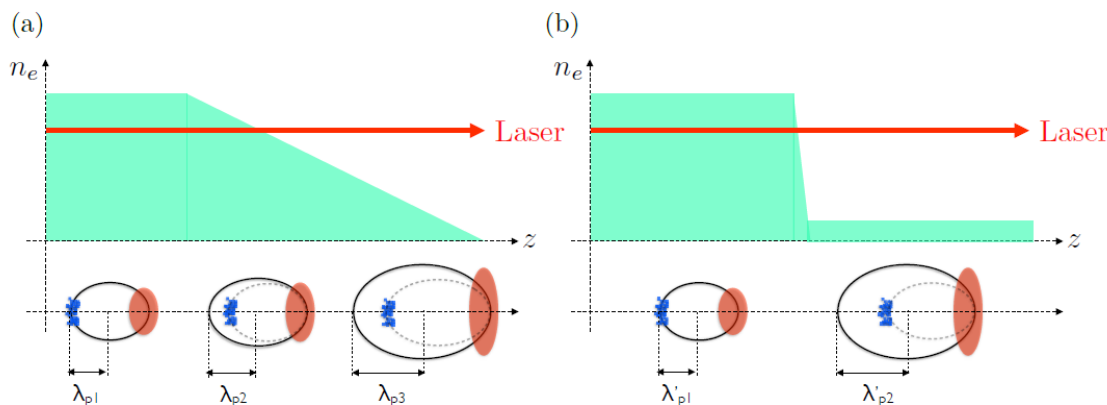
Optická injekce je realizována pomocí dvou laserových pulzů. První z nich je injekční a vytváří elektrony s vhodnou hybností tak, aby následně druhý pulz mohl vytvořit vlnu, na které budou tyto elektrony zachyceny. Injekční pulz interaguje s plynným terčem první a může být buď kolmé, nebo kolmý na hlavní (druhý) pulz [27].

### 1.6.4 Injekce pomocí hustotního gradientu

Injekce pomocí hustotního gradientu je založena na různém rozložení hustoty v rámci plynného terče. Pokud bude mít změna hustoty v terči vhodný charakter, může dojít k výskytu elektronů s vhodnou hybností v dané části fázového prostoru. Podstatný je pro tuto metodu i samotný charakter hustotního přechodu. Pokud je přechod pozvolný, elektrony se zachytávají postupně a jsou urychlovány různě tj. v různých částech fázového prostoru výsledné vlny. Cílem je získat monoenergetický svazek elektronů, proto potřebujeme aby se injektovaly všechny se stejnou hybností ve stejném místě fázového prostoru výsledné vlny a navíc ve stejnou chvíli. Toho cíle lze docílit ostrým přechodem mezi oblastí terče s vysokou hustotou a oblastí

terče s nízkou hustotou. Rozdíl mezi dlouhým a ostrým přechodem je schématicky znázorněn na Obr. 1.5.

Zaměříme se nyní blíže na charakterizaci velmi rychlého přechodu mezi dvěma



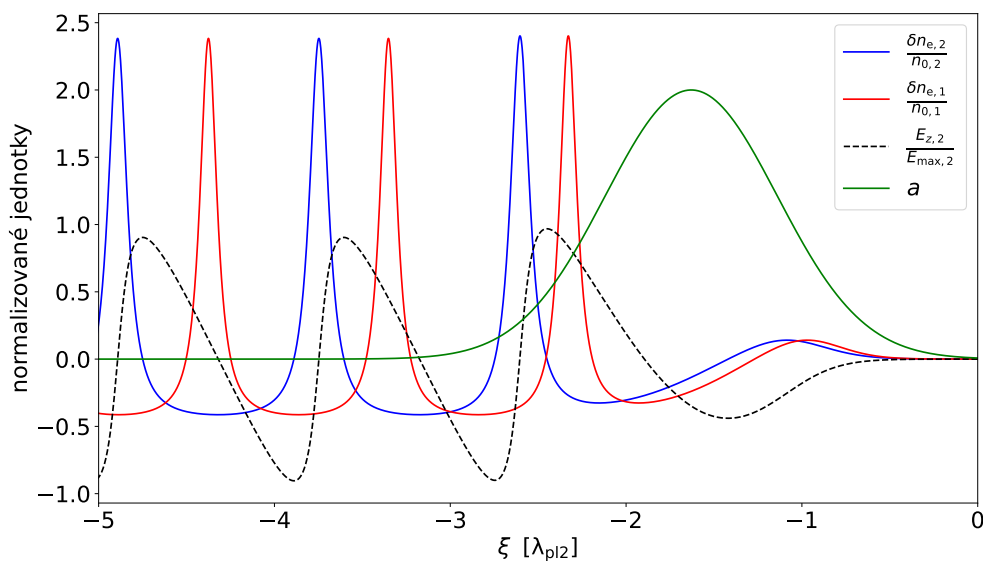
Obr. 1.5: Schématická reprezentace dlouhé (a) a ostré (b) změny hustoty v terči. Je zde patrná změna trajektorie elektronů, které vytváří plazmovou vlnu (černá bublina). Pro ostrý přechod se trajektorie téměř okamžitě prodlouží do finální délky, ale pro pozvolný přechod jsou postupně vytvářeny delší a delší trajektorie až dojde k vytvoření finální trajektorie. Převzato z [28].

hustotními prostředími. První prostředí bude charakterizované hustotou  $n_1$ , která je vyšší než hustota druhého prostředí  $n_2$ . Pro lineární vlny známe přesnou vlnovou délku, která je dána vztahem (1.21), proto pro lineární vlny platí, že poměr vlnových délek pro první a druhé prostředí bude roven odmocnině poměru hustot druhého a prvního prostředí. Omezit se v tomto případě pouze na lineární případ by byla přílišná aproximace, proto nyní přejdeme k nelineárním vlnám a relativistickému přístupu. Délka nelineární plazmové vlny  $\lambda_{Npl}$  neodpovídá přesně hodnotě plazmové vlnové délky  $\lambda_{pl}$ . Je však této délce přímo úměrná, tj.  $\lambda_{Npl} = K(E_{max}, E_0)\lambda_{pl}$  [20]. Pokud zanedbáme deformaci pulzu a pokles jeho intenzity během propagace v prvním prostředí bude parametr  $K$  konstantní a poměr vlnových délek opět bude odpovídat obrácenému poměru odmocniny z hustot prostředí.

U vztahu (1.26) jsme již diskutovali možnost přechodu k nové proměnné a nezávislost na hustotě plazmatu. To nám nyní umožní porovnávat průběhy pro různé hustoty pouze na základě znalosti poměru mezi hustotami. Uvažujme tedy, že se bude plazmová vlna vznikat působením laserového pulzu v plazmatu o hustotě  $n_1$  překrývat s vlnou vytvořenou stejným laserovým pulzem v plazmatu o hustotě  $n_2$ . Jeden takový případ je znázorněn na Obr. 1.6. Vidíme, že výrazná část elektronů vlny z prvního prostředí se nachází v úzké části prostoru s převahou kladného náboje vlny v druhém prostředí, tedy v části druhé vlny, kde může dojít k urychlení elektronů. Že mohou být elektrony urychleny podporuje i průběh elektrické intenzity ve směru propagace laserového pulzu v plazmové vlně v druhém prostředí. Její kladná hodnota v oblasti prvních dvou píků hustoty elektronových perturbací z prvního prostředí značí, že elektrony budou urychlovány ve směru šíření laserového pulzu. Vzhledem k úzkému píku je i rozptyl hybností těchto elektronů malý a lze očekávat

že urychlený svazek bude téměř monoenergetický.

Než přejdeme k bližší kvantifikaci uvedených vlastností, zdůvodněme oprávněnost



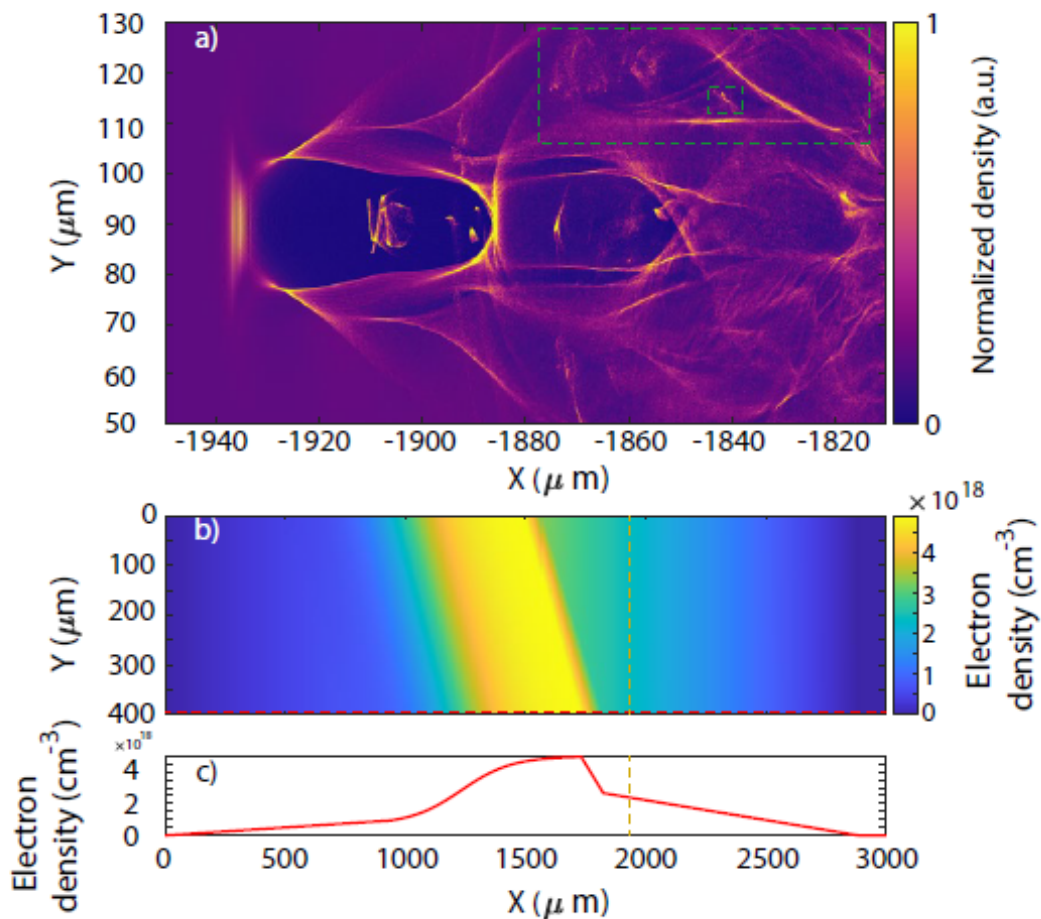
Obr. 1.6: Průběh perturbace elektronové hustoty normalizované na hustotu plazmatu pro hustotu plazmatu  $n_1$  a hustotu  $n_1 = 0.8n_2$  v nelineární plazmové vlně vybuzené laserovým pulzem popsáný potenciálem  $a$  s gaussovským průběhem a amplitudou  $a_0 = 2$ , který se šíří v kladném směru. Černou přerušovanou čarou je potom znázorněn průběh složky normované elektrické intenzity ve směru propagace laserového pulzu v plazmové vlně druhého prostředí. Jednotka osy  $x$  je v jednotkách plazmové vlnové délky pro hustotu  $n_2$ .

přístupu s překrýváním vln. Vztah pro nelineární vlny jsme odvodili za předpokladu, že se laserový pulz pohybuje rychlostí světla a zároveň se nacházíme ve vztažné soustavě pevně spojené s letícím pulzem. V takovémto případě nelze používat relativistické transformace pro přechod mezi soustavou vlny excitované v prostředí s hustotou  $n_1$  a vlnou excitovanou v prostředí s hustotou  $n_2$ . Protože předpokládáme, že se obě soustavy pohybují stejnou rychlostí a obě jsou pevně spojeny se laserovým pulsem, tak naše další úvahy uvedeme v aproximaci, že soustavy jsou identické a není nutné mezi nimi transformovat. V následujícím textu tuto aproximaci opustíme pouze ve chvíli, kdy budeme diskutovat hybnost elektronů ve vlně z prvního prostředí (ta by v této aproximaci byla nekonečná).

V další části budeme uvažovat, že injekce probíhá pouze v prvních dvou pozitivních bublinách mezi oblastmi s vysokou hustotou elektronů ve vlně. Tuto aproximaci lze učinit díky stabilitě vlny, která klesá s rostoucí vzdáleností od laserového pulzu. Tuto skutečnost lze pozorovat ve výsledcích simulací např. [29]. Protože velká část elektronů v nelineární vlně se nachází v úzké oblasti kolem píku perturbace budeme nyní uvažovat polohu vrcholu píku jako bod, v němž se nacházejí elektrony, které se budou injektovat. Nyní se podíváme do jaké části fázového prostoru vlny v druhém prostředí se tyto elektrony vlny z prvního prostředí dostanou. Tyto elektrony budou mít stejnou hybnost danou fázovou rychlostí první vlny, ale kvůli rozdílu v poloze

(změna mezi vlnovými délkami se bude nasčítávat) se budou v různých bublinách injektovat na různé trajektorie. Přesné body, do kterého se elektrony v námi použité aproximaci budou injektovat, budou dány poměrem hustot  $n_1$  a  $n_2$ .

V předchozím textu jsme kromě výše uvedené aproximace současně zanedbali i vliv laserového pulzu na fázové trajektorie. Hlavní aproximace však spočívá ve faktu, že struktura vlny z prvního prostředí je okamžitě nahrazena strukturou vlny vytvořené v druhém prostředí a je také kompletně zanedbán vliv injektovaných elektronů na pole vytvářené novou vlnou, který minimálně v počáteční fázi tvorby vlny v druhé prostředí bude nezanedbatelný. Lepší a přesnější kvantifikaci ideální velikosti hustotních skoků kromě experimentů umožňují také PIC (Particle in cell) simulace (bližší informace o tomto simulačním kódu lze najít např. v [22]). Výsledek jedné z těchto simulací je na Obr. 1.7. Na něm je také patrný rozdíl v jaké oblasti první a druhé bubliny zůstávají elektrony z první vlny a také, že třetí bublina už je výrazně deformována dalšími vlivy.



Obr. 1.7: Příklad výsledku simulace záchytu elektronu na hustotním skoku. V první bublině jsou patrné elektrony, které se mohou injektovat a budou urychleny. Průběh hustoty byl vytvořen žiletkou umístěnou 3,5 mm na tryskou a 1 mm pod optickou osou. Žiletka zakrývá přibližně 20 % kónické 4 mm dlouhé trysky. Převzato z [29].



# Kapitola 2

## Měření hustoty plynného terče

Pro nalezení vhodného plynného terče, který dokáže injektovat elektrony do plazmové vlny je nutné znát rozložení hustoty plynu v tomto terči. Toto rozložení lze simulovat pomocí simulačních programů jako je např. ANSYS FLUENT [28]. Další možností je nalezení správného průběhu hustoty experimentálně, případně kombinace obou metod. My budeme využívat experimentální metodu.

Námi použitá experimentální metoda je založená na interferometrii a tomografické rekonstrukci. Pomocí interferometrie dokážeme měřit fázový posun, který získá vlna při průchodu prostředím. Tento fázový posun je svázán s hustotou prostředí, kterým vlna prošla. Tomografickou rekonstrukci využijeme abychom z 2D projekcí mohli rekonstruovat původní 3D objekt.

Nejprve popíšeme principy interference a její závislost na fázovém posunu. Následně popíšeme závislost fázového posunu na indexu lomu a závislost indexu lomu na hustotě plynného prostředí. Nakonec popíšeme tomografickou rekonstrukci jako nástroj, který využijeme pro rekonstrukci 3D objektů.

### 2.1 Optická interferometrie

#### 2.1.1 Interference dvou vln

Prostorová interference dvou vln je jev, který vznikne interakcí dvou vln v pevně zvoleném bodě v prostoru. Při skládání dvou vln se skládají jednotlivé složky elektrických intenzit těchto vln. Naše přístroje nedokážou zaznamenat velmi rychlé změny hodnoty elektrické intenzity, ale pouze střední hodnotu energie, která projde jednotkou plochy jejíž normála je ve směru šíření vlny za určitou dobu. Tuto naměřenou hodnotu nazýváme intenzita  $I$  a odpovídá časové střední hodnotě kvadrátu elektrické intenzity, tj.  $I = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}^2 \rangle^1$  [30]. Pokud budeme uvažovat dvě vlny s elektrickými intenzitami  $\mathbf{E}_1$ ;  $\mathbf{E}_2$ , kterým odpovídají naměřené intenzity  $\mathbf{I}_1$ ;  $\mathbf{I}_2$ , bude

---

<sup>1</sup>Pro lepší přehlednost vypustíme faktor  $\frac{c}{\epsilon_0}$ , který můžeme považovat za korekci na správné jednotky, v nichž intenzitu skutečně naměříme.

pro součet těchto vln platit

$$I_{1+2} = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle = I_1 + I_2 + \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle. \quad (2.1)$$

Poslední člen se v předcházející rovnici se nazývá interferenční a bude podstatný pro naše měření.

Uvažujme nyní dvě lineárně polarizované monochromatické vlny s frekvencemi  $\omega_1$ ;  $\omega_2$ , konstantními amplitudami  $a_1$ ;  $a_2$  a s počátečními fázemi  $\varphi_1$ ;  $\varphi_2$  (tj.  $a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  a  $a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ ), které prochází naší měřicí plochou. Nás nyní bude zajímat tvar interferenčního členu. Ten dostaneme jako

$$\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = a_1 a_2 \langle \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rangle. \quad (2.2)$$

Po úpravách při kterých využijeme součtových vzorců pro funkci kosinus a toho že platí  $\langle \cos(kt + s) \rangle = 0$ , kde  $k \neq 0$ ,  $s$  jsou konstanty, dostáváme tvar interferenčního členu jako

$$\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{a_1 a_2}{2} \langle \cos([\omega_2 - \omega_1]t + \varphi_2 - \varphi_1) \rangle. \quad (2.3)$$

Interferenční člen bude nenulový pouze pokud bude platit  $\omega_2 = \omega_1$ . Pokud je tato podmínka splněna, pak je interferenční člen roven

$$\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{a_1 a_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{a_1 a_2}{2} \cos(\Delta\varphi). \quad (2.4)$$

Interference dvou vln nám může poskytnout informace o fázovém rozdílu těchto vln.

Nyní náš přístup rozšíříme na plochu. Toto rozšíření je velmi přímočaré, protože hodnota intenzity v libovolném pevném bodě na této ploše bude dána vztahem (2.1). Průběh intenzity na této ploše nazýváme interferenčním obrazcem.

## 2.1.2 Šíření elektromagnetické vlny v prostředí

Z Maxwellových rovnic v látkovém prostředí lze odvodit vztah pro fázovou rychlost elektromagnetické vlny ( $v$ ) v takovémto prostředí a to ve tvaru [31]

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{N}, \quad (2.5)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu a  $N$  je index lomu daného prostředí, který je závislý pouze na vlastnostech daného prostředí. Uvažujme nyní lineárně polarizované vlny šířící se podél osy  $z$ , které jsou v rovině  $z = 0$  ve stejné fázi a mají stejnou intenzitu  $I$ . První bude procházet prostředím o indexu lomu  $N_1$  druhá prostředím o indexu lomu  $N_2$ . Pro větší přehlednost následujících vztahů zavedeme ještě  $\Delta N = N_1 - N_2$ . Pokud vlny necháme interferovat poté co urazí vzdálenost  $d$  dostaneme intenzitu danou vztahy 2.1 a 2.4

$$I_{1+2} = 2I[1 + \cos(\Delta\varphi)] = 2I[1 + \cos(\frac{\omega d}{c} \Delta N)]. \quad (2.6)$$

Interference těchto vln bude závislá pouze na rozdílu indexů lomu a tloušťce prostředí. Ze znalosti jednoho indexu lomu a intenzit v jednotlivých bodech (interferenční obrazec) bude možné zjistit druhý index lomu. Nyní je ještě nutné vyřešit otázku vztahu indexu lomu a hustoty plynu.

## Index lomu pro plyny

Pro stanovení indexu lomu dielektrik lze využít Lorentzův model dielektrika. Pro tento model lze odvodit index lomu pro případ, kdy jím prochází elektromagnetická vlna s frekvencí  $\omega$  v následujícím tvaru [32]

$$N^2 = 1 + \chi(\omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{f_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega_0^2 + i\omega\gamma_{\alpha} - \omega^2}, \quad (2.7)$$

kde suma prochází přes všechny částice v plynu. Koeficient  $\gamma$  se nazývá koeficient útlumu,  $\omega_0$  představuje přirozenou oscilační frekvenci elektronu vázaného v atomu,  $\omega_p$  je plazmová frekvence volných elektronů a  $f$  je koeficient síly oscilátoru. Tento přístup je založen na mikroskopickém pohledu na problém průchodu elektromagnetické vlny dielektrikem. Pro nás jsou podstatné především makroskopické veličiny, proto přejdeme k aproximaci tohoto vztahu vztahující vůči sobě pouze makroskopické veličiny. Tuto aproximaci lze vyjádřit jako Lorentz-Lorenzovu rovnici v následujícím tvaru [33]

$$\frac{\alpha n}{3\varepsilon_0} = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2}. \quad (2.8)$$

Koeficient  $\alpha$  v předchozí rovnici představuje střední polarizovatelnost částic,  $\varepsilon_0$  je permitivita vakua a  $n$  je hustota částic. Z experimentálních dat víme, že pro vzácné plyny je hodnota indexu lomu velmi blízká jedné a můžeme tedy pravou stranu rovnice (2.8) aproximovat jako  $\frac{2}{3}(N - 1)$  [34]. Pokud budeme nyní uvažovat poměr dvou hustot stejného plynu, pak bude platit následující vztah

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_1 - 1}{N_2 - 1}. \quad (2.9)$$

Pokud dokážeme určit pro danou hustotu plynu index lomu, pak dokážeme jednoznačně určit vztah mezi hustotou a indexem lomu pro libovolné hodnoty hustoty.

### 2.1.3 Měření nehomogenního objektu

Nyní využijeme znalostí z předchozích částí, abychom zjistili pomocí interference hustotní rozložení v plynném terči. Měření budeme demonstrovat pomocí Mach-Zhenderova interferometru. Celou situaci zobrazuje Obr. 2.1. Měřený objekt umístíme do jednoho z ramen rozděleného laserového svazku. V bodě, kde bude provádět měření intenzit popř. fázového posunu, bude výsledný fázový posun dán dvěma členy. První člen  $\varphi_1$  odpovídá fázovému rozdílu mezi rozdělenými svazky, který vznikl průchodem odlišnými rameny. Druhý člen  $\varphi_2$  odpovídá fázovému rozdílu způsobenému průchodem svazku plynným prostředím. Pokud toto prostředí bude obklopeno vakuem můžeme tento fázový posun vyjádřit jako<sup>2</sup>

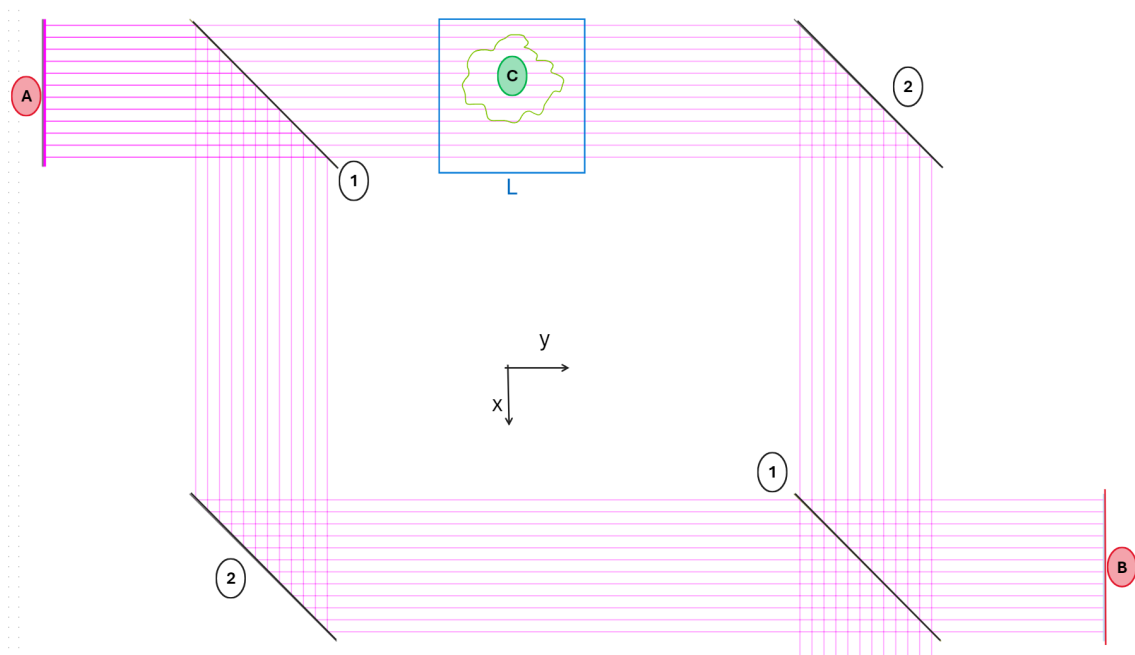
$$\varphi_2(x) = \frac{\omega}{c} \left[ \int_{\text{plyn}} N_{\text{plyn}}(x, y) dy - \int_{\text{plyn}} N_{\text{vakuum}} dy \right] = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} \int_0^L (N(x, y) - 1) dy. \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>Uvažujeme, že svazek se v této oblasti šíří podél osy  $y$  a současně zanedbáváme závislost veličin na souřadnici  $z$ .

V tomto vztahu jsme využili vztahu (2.6), znalosti indexu lomu ve vakuu a vztahu mezi vlnovou délkou ve vakuu  $\lambda_{\text{vac}}$  a frekvencí  $\omega$ . Délka  $L$  odpovídá délce obdélníku na Obr. 2.1, který představuje oblast okolo terče ve vakuové komoře.

Nyní máme na konci našeho měření interferenci, která je způsobena fázovým

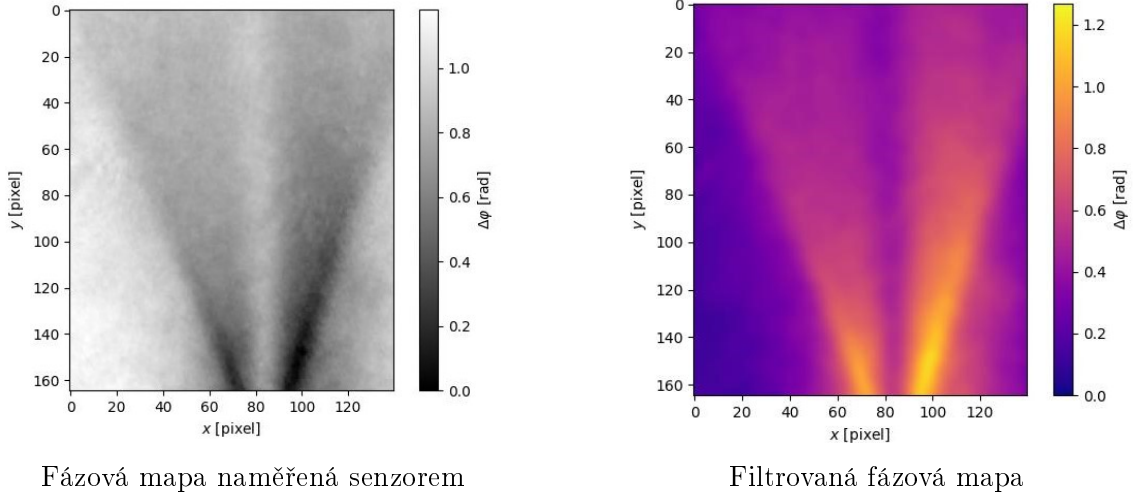


Obr. 2.1: Měření plynného terče pomocí Mach-Zehnderova interferometru. Bod **A** označuje zdroj laserového záření, bod **B** označuje místo umístění kamery/senzoru. Svazky jsou nejprve rozděleny a následně spojeny pomocí děličů svazků **1**. Každý svazek se při průchodů svým ramenem odrazí na zrcadle **2**. Svazek procházející horním ramenem prochází vakuovou komorou o šířce  $L$  (modrý obdélník) a interaguje s plynným terčem **C**.

posunem  $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Nás bude zajímat pouze interference způsobená  $\varphi_2$ , která se projeví jako změna interferenčního obrazce vytvořeného interferencí z fázového posunu  $\varphi_1$ . Interferenční obrazec, který vznikne z fázového posunu  $\varphi_1$ , naměříme pro průchod vakuovou komorou bez přítomnosti plynu. V našem případě používáme k měření senzor vlnoplochy, z jehož měření lze určit přímo fázové zpoždění [35]. V tomto případě od dat naměřených s přítomností plynu odečítáme data naměřená bez přítomnosti plynu. Výsledkem je fázová mapa, která zobrazuje hodnotu  $\varphi_2$  v rovině senzoru. Ukázka fázové mapy je na Obr. 2.2.

## 2.2 Tomografická rekonstrukce

Z předchozí sekce víme, že fázové zpoždění způsobené průchodem laserového svazku plynem je dáno vztahem (2.10). Tímto měřením získáme jistou představu o rozložení hustoty objektu ve směrech kolmých na směr šíření vlny, avšak úplně ztrácíme informaci o rozložení hustoty ve směru šíření vlny. Naše měření je pouze projekcí 3D objektu na 2D rovinu kolmou na směr šíření vlny. Pokud budeme s objektem



Obr. 2.2: Ukázka měření senzorem SID4-HR GE. Vlevo jsou výstupní data z senzoru. Vpravo jsou zpracovaná data, kde byl šum odstraněn Gaussovým filtrem. Vysvětlení odlišnosti hodnot naměřené fáze od hodnot fáze na filtrované fázové mapě je v Příloze B.

rotovat můžeme získávat projekce v různých směrech a v jistém smyslu budeme získávat i přibližné informace o rozložení hustoty v těchto směrech. Velmi důležitou otázkou zůstává, jak z těchto projekcí zrekonstruovat původní 3D objekt. S řešením tohoto problému přišel v roce 1917 českoněmecký matematik Johann Radon. Proces, který nyní popíšeme, se nazývá Radonovou transformací a úzce souvisí s Fourierovou transformací.

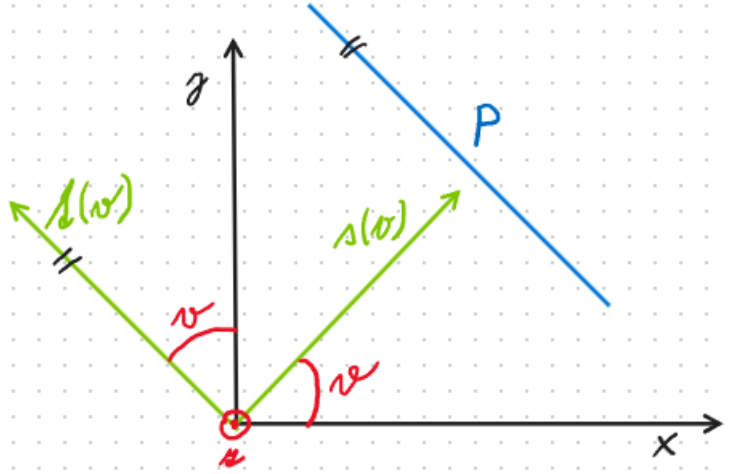
Uvažujme nyní souřadné systémy, které jsou na Obr. 2.3. První souřadný systém  $(x; y; z)$  je pevně spojený se zkoumaným objektem a souřadný systém  $(s(\vartheta); t(\vartheta); z)$  pevně spojený s projekční rovinou  $\mathbf{P}$ , která je současně rovnoběžná s rovinou  $(t(\vartheta); z)$ . Osa podle které budeme rotovat projekční rovinu bude totožná s osou  $z$ . Protože osa  $z$  je pro libovolnou projekci shodná pro oba souřadné systémy, můžeme nyní na proměnnou  $z$  pohlížet pouze jako na parametr a snížit dimenzi problému z 3 na 2 tj. zabývat se rekonstrukcí 2D roviny z 1D projekcí na projekční rovině (tj. hodnot na přímce v pevné výšce v projekční rovině).

Mezi dvěma výše uvedenými souřadnými systémy lze přecházet a to rotací systému  $(x; y)$  o úhel  $\vartheta$  kolem osy  $z$ , čímž získáme systém  $(s(\vartheta); t(\vartheta))$ . Převědeme nyní zkoumaný objekt jako funkci  $f(x, y)$  do proměnných  $s, t$ . Data naměřená na projekční rovině potom odpovídají projekci  $p(t, \vartheta)$ , která je dána vztahem:

$$p(t, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds. \quad (2.11)$$

Výše uvedený vztah se nazývá paprskový integrál a v naše případě mu odpovídá rovnice (2.10). Nyní provedeme Fourierovu transformaci projekce z proměnné  $t$  do proměnné  $\omega$  (tj.  $F[p(t, \vartheta)](\omega, \vartheta) = P(\omega, \vartheta)$ ). Funkci  $P$  lze pomocí vztahu (2.11) a definice Fourierovy transformace přepsat jako dvojrozměrný integrál v integračních proměnných  $s, t$ . Pokud v tomto integrálu provedeme integrační transformaci do proměnných  $x, y$  dostáváme rovnost [36]

$$F[p(t, \vartheta)](\omega, \vartheta) = F[f(x, y)](\omega \cos(\vartheta), \omega \sin(\vartheta)) = f(u, v), \quad (2.12)$$



Obr. 2.3: Souřadné systémy. První souřadná soustava  $(x; y; z)$  je pevně spojená s zkoumaným objektem. Druhá soustava  $(s(\vartheta); t(\vartheta); z)$  je pevně spojená s projekční rovinou  $\mathbf{P}$  a současně platí, že rovina  $(t(\vartheta); z)$  je s touto projekční rovinou rovnoběžná.

která nám pomocí Fourierových obrazů vztahuje původní 2D pole s projekcemi a fourierovou transformací původního pole do proměnných  $u, v$ .

### 2.2.1 Rozlišení a filtrovaná zpětná projekce

Vraťme se nyní ke vztahu (2.12) a aplikujme na něj inverzní Fourierovu transformaci  $(u, v) \rightarrow (x, y)$  a následně provedme integrální transformaci  $(u, v) \rightarrow (\omega, \vartheta)$  definovanou vztahy  $u = \omega \cos(\vartheta)$ ;  $v = \omega \sin(\vartheta)$  pak dostáváme rovnost [36]

$$f(x, y) = F^{-1}[f(u, v)] = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \vartheta) \omega e^{i2\omega\pi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} d\omega d\vartheta. \quad (2.13)$$

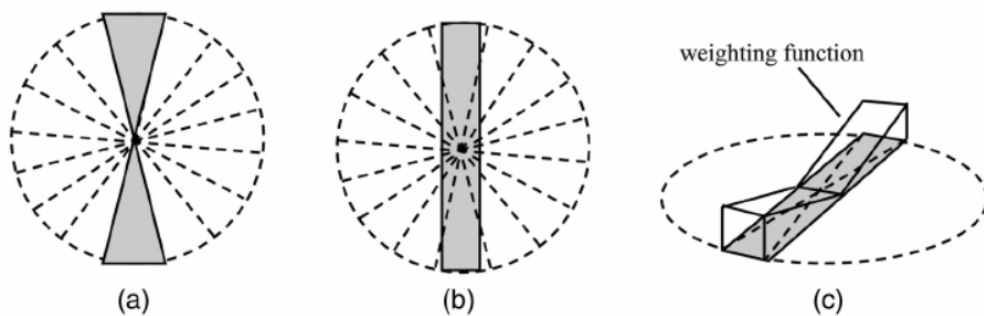
Tento vztah lze pomocí vlastností Fourierovy transformace zjednodušit a zároveň lze výraz v exponentu zjednodušit pomocí přechodu do souřadného systému rotujícího s projekční rovinou (systém  $(s(\vartheta); t(\vartheta))$  viz. Obr. 2.3). Ve výsledku dostáváme pro původní pole [36]

$$f(x, y) = F^{-1}[f(u, v)] = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \vartheta) |\omega| e^{i2\omega\pi t} d\omega d\vartheta. \quad (2.14)$$

Tento vztah umožňuje rekonstruovat původní pole pouze z projekcí pořízených mezi úhly  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

Posledním důležitým faktorem je převod projekcí do polárních souřadnic (tato nutnost je patrná již z vztahu (2.12)). V těchto souřadnicích je interpolace dat složitější a pro vysoké frekvence  $\omega$  musíme interpolovat mezi většími vzdálenostmi, protože projekce pro daný úhel odpovídají přímkám procházejícím pod tímto úhlem počátkem.

Další problém je způsoben konečnou šířkou naměřených dat v kartézském prostoru. Pokud tyto data budeme převádět do polárních souřadnic vznikne situace

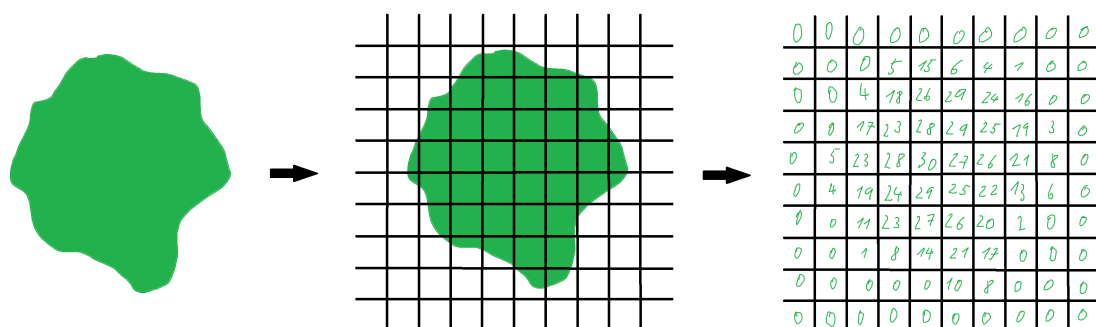


Obr. 2.4: (a) zobrazuje ideální projekci dat do polárních souřadnic. (b) zobrazuje reálnou projekci dat do polárních souřadnic. (c) příklad váhové funkce, která koriguje reálnou projekci na ideální. Převzato z [36].

zobrazená na Obr. 2.4. Proto je třeba využít váhovou funkci, aby nedocházelo k vysčítání dat ve středu do hodnot, které neodpovídají realitě. Dále je třeba filtrovat vyšší frekvence, což snižuje šum v rekonstruovaném obrazu [37]. Řešením těchto problémů je například využití Hannova filtru (tvar tohoto filtru je uveden např. v [38]), který budeme během našeho měření využívat.

V předchozích sekcích jsme tomografickou rekonstrukci popsali s využitím Fourierovy transformace. Tento popis je vhodný pro návrh rekonstrukčního algoritmu, avšak předpokládá spojité spektrum projekcí pro úhly mezi 0 až 180 stupni. To je experimentálně nedosažitelný požadavek a je nutné mezi jednotlivými projekcemi naměřená data interpolovat. Tato skutečnost se projeví na výsledném rozlišení rekonstrukce. Abychom toto omezení na rozlišení dokázali kvantifikovat zvolíme jiný pohled na tomografickou rekonstrukci. Rozdělme nyní měřený objekt do čtvercové sítě tak, aby v každém čtverci byla konstantní hustota, jejíž hodnota odpovídá průměrné hodnotě hustoty v daném čtverci pro měřený objekt (viz. Obr. 2.5).

Uvažujme nyní detektor, který má v oblasti, kde zaznamenáme data z průchodu



Obr. 2.5: Rozdělení měřeného objektu (zelenou barvou) do čtvercové sítě.

objektem, rozlišení  $k$  pixelů a my s ním provedeme  $p$  projekcí mezi  $0^\circ$  až  $180^\circ$  se stejným krokem mezi projekcemi. Projekce v našem modelu 2D šachovnice představuje součet čtverců v daném směru (přesněji bychom tedy měli objekt rozdělit do sítě z pravidelných  $2k$  úhelníků). Celkem získáváme  $k \cdot p$  rovnic pro všechny čtverce ve čtvercové síti. Tento počet udává maximální možný počet nezávislých proměnných

(tj, čtverců ve čtvercové síti), které lze naším měřením jednoznačně určit. Pokud budeme rekonstruovat objekt s řezem ve tvaru čtverce u něžž požadujeme rozlišení  $a \times a$  pixelů obklopený prostředím neovlivňujícím měření, pak je toto rozlišení dané vztahem

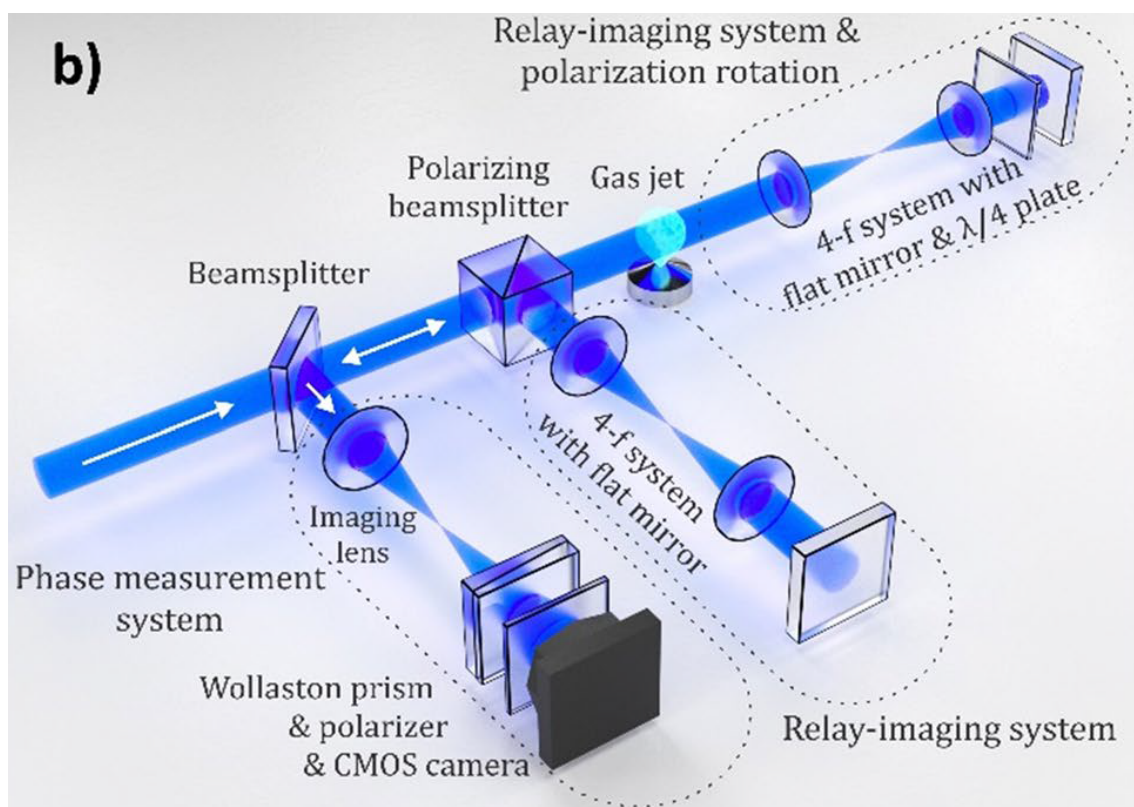
$$a = \sqrt{k \cdot p}. \quad (2.15)$$

Tento vztah nám svazuje počet provedených projekcí, rozlišení senzoru a rozlišení naší rekonstrukce, což nám pro každé měření umožní určit maximální prostorové rozlišení s jakým jsme rekonstrukci provedli.

## 2.3 Experimentální uspořádání

K měření využijeme interferometr v experimentální hale E2 v ELI Beamlines, který umožňuje celkem čtyři průchody laserového svazku zkoumaným objektem [39]. Konstrukce interferometru je na Obr. 2.6. Tím, že laserový svazek projde zkoumaným objektem vícekrát se zvyšuje přesnost měření díky akumulujícímu se fázovému posunu. Během provedených měření byl Wollastonův interferometr (CMOS kamera, wollastonův hranol a polarizátor) nahrazen senzorem vlnoplochy SID4-HR GE od firmy PHASICS. K měření je používán laser NPL45C od firmy Thorlabs s vlnovou délkou 450 nm s délkou pulzu 50 ns s periodou mezi pulzy 20  $\mu$ s a energií 204 nJ v rámci jednoho pulzu. K měření jsou dále používány optické prvky o průměru 2" (2 palce). Čtyřnásobný průchod je umožněn díky využití čtvrt vlnové destičky a použití polarizačního děliče svazku.





Obr. 2.6: Víceprůchodový interferometrický systém pro charakterizaci plynových trysek použitý k měření. Převzato z [40].



## Kapitola 3

# Návrh a charakterizace plynného terče

V této kapitole se budeme zabývat tvorbou hustotního skoku v plynném terči, tak aby byl celkový hustotní profil tohoto terče vhodný pro lokalizovaný záchyt a urychlení elektronů v plazmové vlně. Nejprve shrneme možnosti tvorby hustotního skoku. Následně u nich uvedeme některé experimentální a simulační výsledky, které byly dosaženy. Poté přistoupíme k vlastnímu návrhu terče. Na konci shrneme a prodiskutujeme výsledky, které jsme dosáhli charakterizací navrženého terče pomocí optického interferometru.

### 3.1 Tvorba hustotního skoku

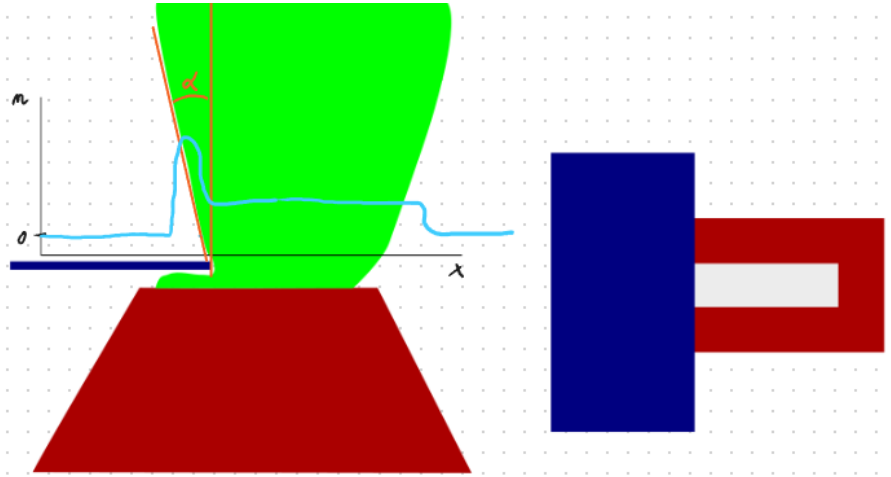
V podkapitole 1.6.4 jsme získali podmínku, pro generaci monochromatického elektronového svazku. Touto podmínkou je ostrý hustotní přechod mezi oblastí s vyšší hustotou a oblastí s nižší hustotou. V oblasti s nižší hustotou musíme počítat s dostatečnou délkou hustotní oblasti, které nám umožní injektované elektrony urychlit. Experimentálně lze takovýto náhlý přechod vytvořit pokud vložíme do výtrysku plynu ze supersonické trysky objekt jehož obtékáním vznikne oblast s vyšší hustotou plynu než je v dalších částech výtrysku. Nejčastěji se ke tvorbě skoku využívá žiletka, nebo drát.

#### 3.1.1 Tvorba hustotního skoku pomocí žiletky

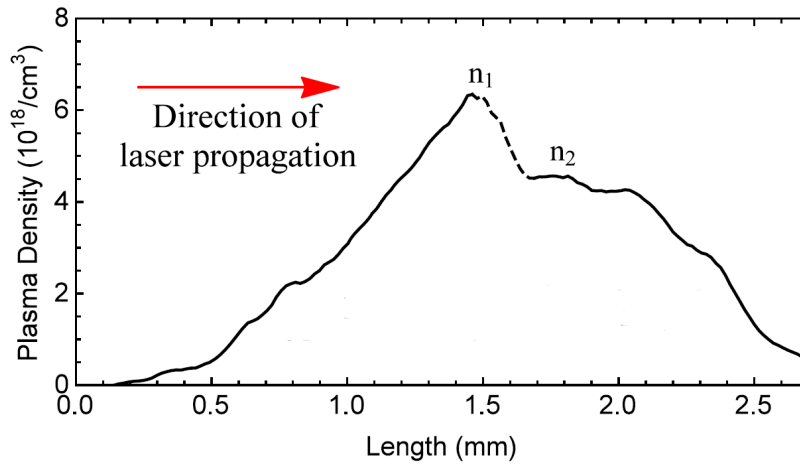
První z možností je zakrytí části trysky pomocí žiletky. V tomto případě umístíme žiletku, tak aby zakrývala část trysky, jak je to zobrazeno na Obr. 3.1. Na tomto obrázku je také průběh hustoty v oblasti nad žiletkou, kterého se snažíme docílit. Taktéž jsme na tomto obrázku zavedli úhel  $\alpha$ , který nám udává odklon propagace oblasti s vyšší hustotou od vertikálního směru. Reálný příklad průběhu hustoty při zakrytí části trysky žiletkou je na Obr. 3.2. Výsledný tvar může být výrazně ovlivněn výškou, ve které hustotu měříme tj. výškou nad tryskou, kde očekáváme interakci

laseru s naším terčem. Oblast s vyšší hustotou se bude pro rostoucí výšku rozšiřovat a přechod mezi oblastmi pro vyšší výšky bude pozvolnější, než pro polohy těsně nad žiletkou [41]. Výšku je třeba uvažovat dostatečně velkou, aby nehrozilo riziko zásahu žiletky laserem. V dalším textu budeme oblast terče s vyšší hustotou označovat jako skok a oblast s nižší hustotou jako plato.

V experimentu provedeném v Berkeley National Laboratory s Ti:Safírovým lase-



Obr. 3.1: Nákres využití žiletky při tvorbě hustotního skoku. Vlevo je nákres z bočního pohledu, vpravo je nákres z horního pohledu. Červená barva odpovídá supersonické trysce, modrá žiletce a zelená plynu vycházejícího z trysky. Světe modrá barva v grafu zobrazuje průběh hustoty, kterého se snažíme docílit. Body na ose  $x$  v grafu odpovídají bodům ve stejném směru a na stejném místě v obrázku. Úhel  $\alpha$  udává odklon směru propagace oblasti s vyšší hustotou od vertikálního směru.



Obr. 3.2: Příklad hustotního profilu naměřeného během experimentu. Převzato z [41].

rem s  $t_{\text{FWHM}} = 28$  fs a  $a_0 = 1,4$  byl zkoumán vliv zakrývání  $840 \mu\text{m}$  trysky žiletkou [41]. Výsledky tohoto experimentu ukázaly, že úhel odklonu  $\alpha$  závisí na tom, jak moc velká část trysky je zakrytá, a pohybuje se mezi 30 až  $-10$  stupni. Při postupném

zakrývání docházelo k navyšování hustoty obou oblastí a to až na čtyřnásobek původní hodnoty (při zakrytí pouze  $\frac{1}{4}$  trysky) v případě plata s nižší hustotou a až na trojnásobek v případě hustoty skoku. Z dat z tohoto experimentu lze taktéž vyčíst, že s rostoucím zakrytím sice roste počet urychlených elektronů a to úměrně hustotě skoku, ale klesá jejich energie. Pro obdobné parametry laseru měla metoda injekce pomocí hustotního skoku generovaného žiletkou sedmkrát menší rozptyl v energiích urychlených elektronů oproti samoinjekci [42].

Pro ostrý přechod mezi dvěma rozhraními o hustotách  $9 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  a  $5,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  pro supersonickou trysku o délce 1,5 mm a laserový pulz o vlnové délce 800 nm,  $a_0 = 2,3$  a  $t = 22$  fs byl simulací získán elektronový svazek o náboj 114 pC střední energii 112,7 MeV a rozptylu energie okolo 20 % [43].

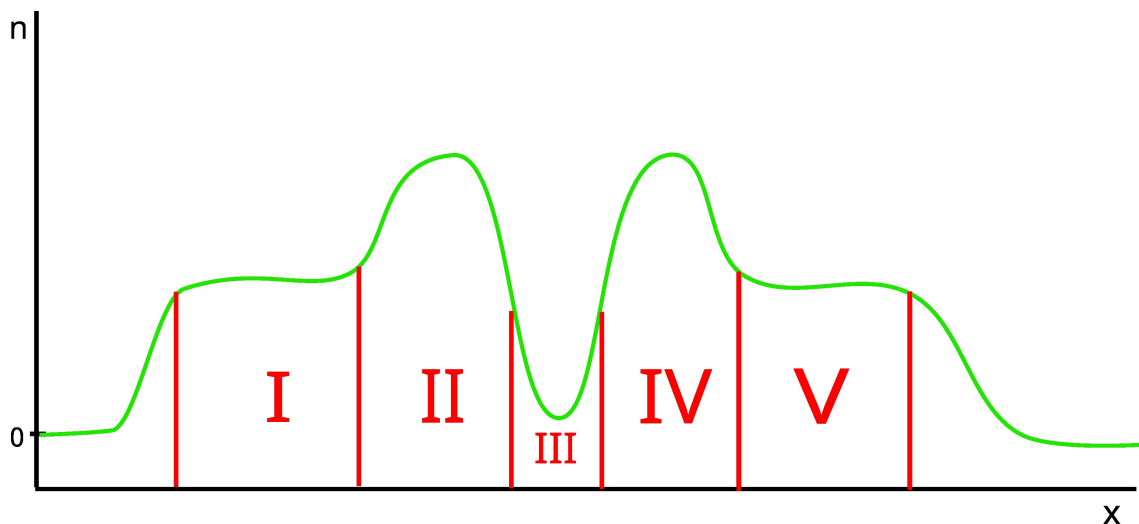
Při experimentech s laserovými pulzy kratšími než 10 fs (800 nm, 65 mJ) byla naměřena závislost střední energie elektronového svazku na hustotě a délce akcelerační vzdálenosti, na níž vykazovala parabolickou závislost. Tato závislost byla měřena pro vzdálenosti 0 až 0,4 mm. Nejvyšší hodnoty bylo dosaženo pro nejmenší zvolenou hustotu ( $4,1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ) s níž bylo dosaženo střední energie svazku 20 MeV [44].

Předchozí experimenty a simulace prokazují, že injekce není podmíněna délkou pulzu a funguje pro velmi krátké pulsy (kratší než 10 fs), ale i 28 fs pulsy. Současně je nutné volit správnou hustotu terče a pozici žiletky, aby byly dosaženy optimální parametry. Tyto parametry mohou být různorodé, protože posunem žiletky lze výrazně ovlivnit náboj a energii urychleného svazku.

### 3.1.2 Tvorba hustotního skoku pomocí drátu

Další možností tvorby ostrého hustotního přechodu je vložení drátu do výtrysku plynu ze supersonické trysky. Výsledný hustotní profil bude stejně jako v případě žiletky záviset na výšce nad drátem, ve které budeme měřit, ale také na výšce nad tryskou do které drát umístíme. Přibližný očekávaný tvar hustotního profilu je na Obr. 3.3. My se budeme soustředit především na části *IV*, *V*, které mají obdobný tvar jako hustotní profil pro žiletku. Současně budeme používat stejnou definici úhlu  $\alpha$  jako pro žiletku s tím, že opět uvažujeme pouze části *IV*, *V*. Ostatní části mohou taktéž ovlivnit výsledný elektronový svazek a jeho parametry, ale většina urychlených elektronů je injektována právě díky skoku v těchto oblastech [45].

Experimentálně se podařilo dosáhnout injekce elektronů s dráty užšími než 0,1 mm [45]. Takto úzké dráty mohou snadno být poškozeny během interakce laserového pulzu s plynem a následnými jevy, proto je nutné je umístit v dostatečné vzdálenosti od optické osy. Pro pozice drátu blíže než 0,65 mm od optické osy byla jeho životnost, při použití 42 fs laseru s energií pulzu 1 J, velmi omezená. Pro 25  $\mu\text{m}$  drát byl naměřený rozptyl v energii menší než 4 % a současně bylo injektováno více elektronů než pro samoinjekci při vyšším tlaku (tedy i vyšší průměrné hustotě terče) [45]. Při porovnání tohoto typu injekce s ionizačními injekcemi indukovanou tímto šokem je pro úspěšnou injekci potřeba menší hustota [46].



Obr. 3.3: Předpokládaný průběh hustoty po interakci supersonického výtrysku plynu s drátem. Průběh hustoty nad tryskou je rozdělen na celkem pět částí. Dvě představují dva hustotní skoky (*II*, *IV*) a dvě představují hustotní plata (*I*, *V*). Oblast *III* odpovídá oblasti se sníženou hustotou, která se nachází nad pozicí drátu.

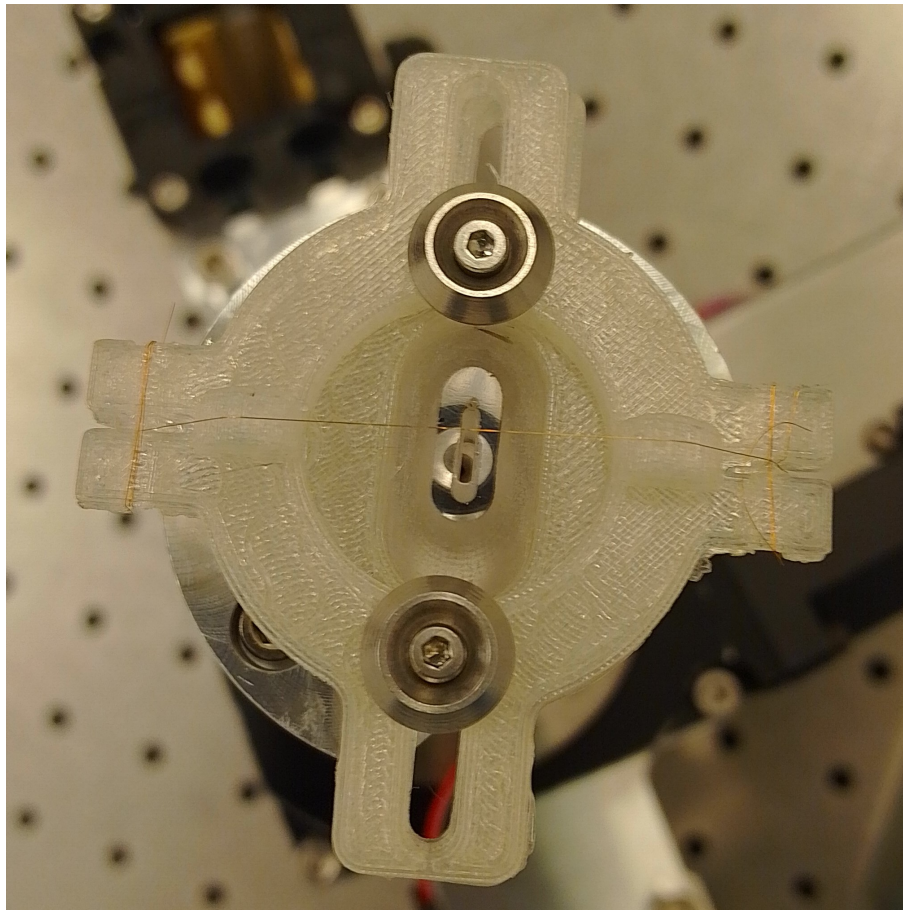
## 3.2 Návrh terče

Nyní se pokusíme navrhnout vhodný terč, který umožní zachyt elektronů na hustotním skoku. Pro tvorbu hustotního skoku využijeme drát o průměru  $50\ \mu\text{m}$ . Tento průměr volíme, protože pro dráty užší než  $100\ \mu\text{m}$  byla injekce prokázána experimentálně (viz předchozí podkapitola, popř. [45]). Současně budeme brát v potaz intenzivnější laserový pulz než jaký byl použit v tomto experimentu. Například laserový systém L3 HAPLS v ELI Beamlines dokáže generovat laserové pulzy o více než 10-krát vyšší energii, než laser ve výše uvedeném experimentu [47]. Dále očekáváme, že pro tyto vyšší energie bude drát náchylnější k poškození a bude třeba jej umístit do větší vzdálenosti od optické osy. Budeme tedy zkoumat rozložení hustoty výše než  $0,7\ \text{mm}$  nad umístěním drátu.

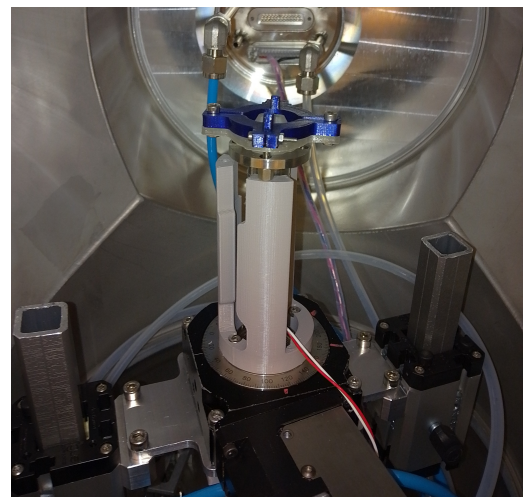
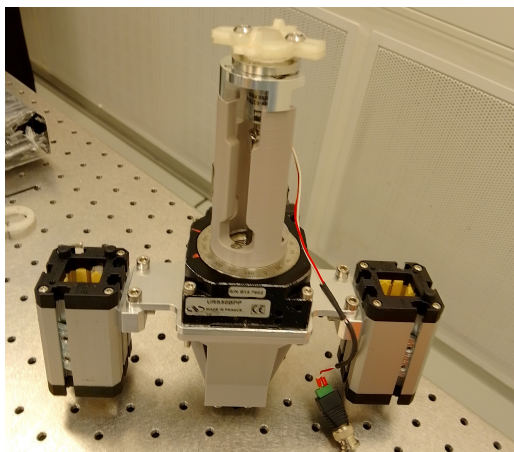
Drát jsme umístili nad štěrbinovou supersonickou trysku o délce  $3\ \text{mm}$  a šířce  $0,5\ \text{mm}$ . Vzniklý hustotní profil jsme měřili ve dvou konfiguracích. V prvním případě jsme drát umístili přímo na trysku. V druhém případě jsme drát umístili na držák navržený inženýrským týmem a drát se tak nacházel přibližně  $6\ \text{mm}$  nad tryskou. Druhý případ je na Obr. 3.4.

Tryska je připojena na pulzní ventil Parker, který je ovládaný pomocí trigrovacího signálu. Ventil, trysku i držák s drátem jsme namontovali na rotační plošinu, kterou jsme umístili do vakuové komory. Tato rotační plošina s namontovanými součástmi je na Obr. 3.5.

Měření probíhalo ve vakuové komoře, kde byl před výtryskem plynu udržován pomocí turbomolekulární vývěvy tlak v řádu  $10^{-3}\ \text{bar}$ . K našemu měření jsme používali výtrysky plynu (argon) o délce  $15\ \text{ms}$  a vstupním tlaku  $20\ \text{bar}$ . Při tomto tlaku došlo během výtrysku plynu k nárůstu tlaku v vakuové komoře o jeden řád. Vyšší tlak jsme nevolili, protože se nám nepovedlo upnout drát dostatečně pevně, aby se neprohýbal pod působením tlaku plynu z trysky. Pokud bychom tlak zvyšovali



Obr. 3.4: Umístění drátu pomocí držáku. Drát je ve výšce 6 mm nad supersonickou tryskou o délce 3 mm.



Obr. 3.5: Rotační plošina s namontovanými součástmi. Vpravo je fotografie této plošiny ve vakuové komoře. Na této fotografii je na ventilu namontována starší verze držáku na drát, která nakonec nebyla k měření použita.

prohýbání drátu by se zvětšovalo a tím by se zvětšovalo ovlivnění našeho měření. Pro 20 bar byl drát v bodě přímo nad tryskou vychylován ze své původní polohy ve směru výtrysku plynu o  $(1, 24 \pm 0, 14)$  mm. Délku výtrysku jsme zvolili tak, aby se ventil naplno otevřel a plyn se dostal do trysky (cca 10 ms) a následně plyn proudil během celé expoziční doby kamery (5 ms).

### 3.3 Charakterizace navrženého terče

Pro rekonstrukci dat naměřených pomocí interferometru popsaného v podkapitole 2.3 budeme využívat rekonstrukční algoritmus pro Radonovou transformaci implementovanou v knihovně *scikit-image* v programovacím jazyce Python [48]. Jako filtr budeme volit Hannův filtr popsaný např. v dokumentaci k této knihovně [48] nebo v [38]. Než provedeme samotnou rekonstrukci je nutné vyfiltrovat z dat šum, stanovit osu rotace a "vyfiltrovat" statistické odchylky v měření senzorem. Detailní popis zpracování dat před aplikací rekonstrukčního algoritmu je v Příloze B.

Po tomografické rekonstrukci získáváme 3D objekt popsaný fázovým zpožděním v daných bodech. Fázové zpoždění v těchto bodech převedeme na změnu index lomu podle vztahu (2.6). Změnu indexu lomu převedeme na index lomu prostředí, tím že za druhé prostředí budeme uvažovat vakuum. Index lomu následně pomocí vztah (2.9) převedeme za znalosti indexu lomu argonu  $N = 1.00028492$  pro vlnovou délku 450 nm a hustotu  $n = 2.6893 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  na hustotní 3D objekt, jehož získání je naším cílem.

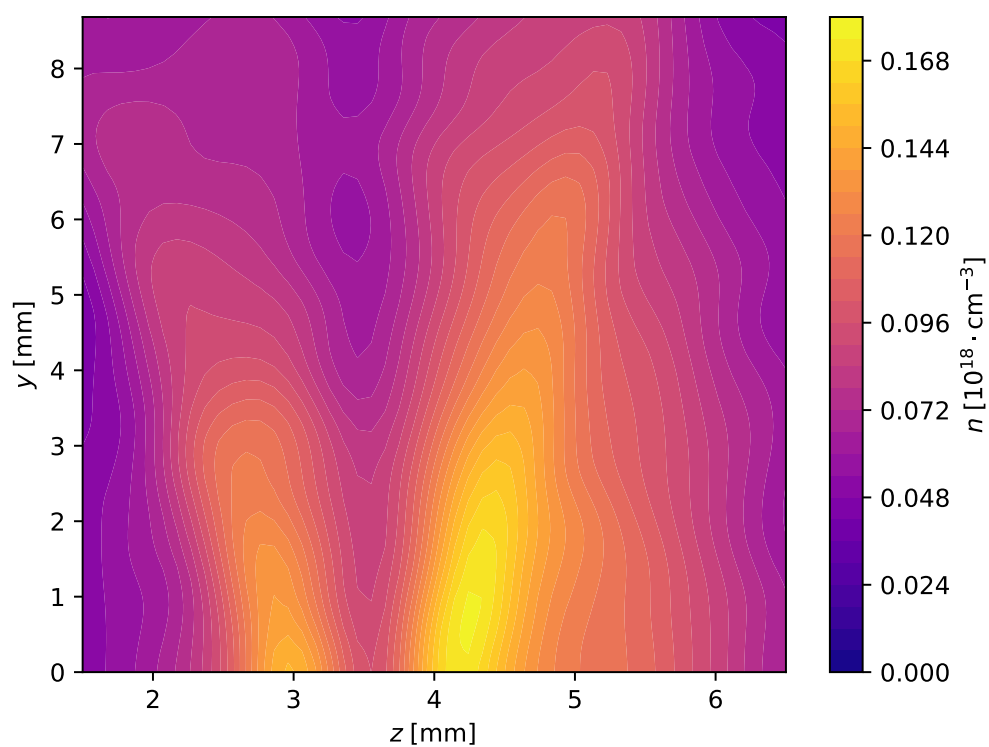
#### 3.3.1 Terč s drátem nad tryskou

Nejprve zanalyzujeme případ, kdy jsme drát umístili do výšky přibližně 6 mm nad trysku. Z 3D projekce nás bude zajímat průběh hustoty plynného terče v rovině  $y, z$  kde  $y$  je výška nad drátem a  $z$  je směr propagace laserového pulzu (ten uvažujeme kolmý na natažený drát), u kterého očekáváme, že bude procházet středem trysky. Průběh hustoty v této rovině je na Obr. 3.6. Předmětem našeho zájmu bude průběh hustoty v jednotlivých výškách nad drátem. Tento průběh je na Obr. 3.7. V tomto i ve všech grafech průběhu hustoty jsme pro větší přehlednost neuvažovali chybu způsobenou rozlišením projekce, tuto chybu započteme až v grafech s délkami jednotlivých zkoumaných oblastí. Tato systematická chyba je pro toto měření rovna 0,12 mm.

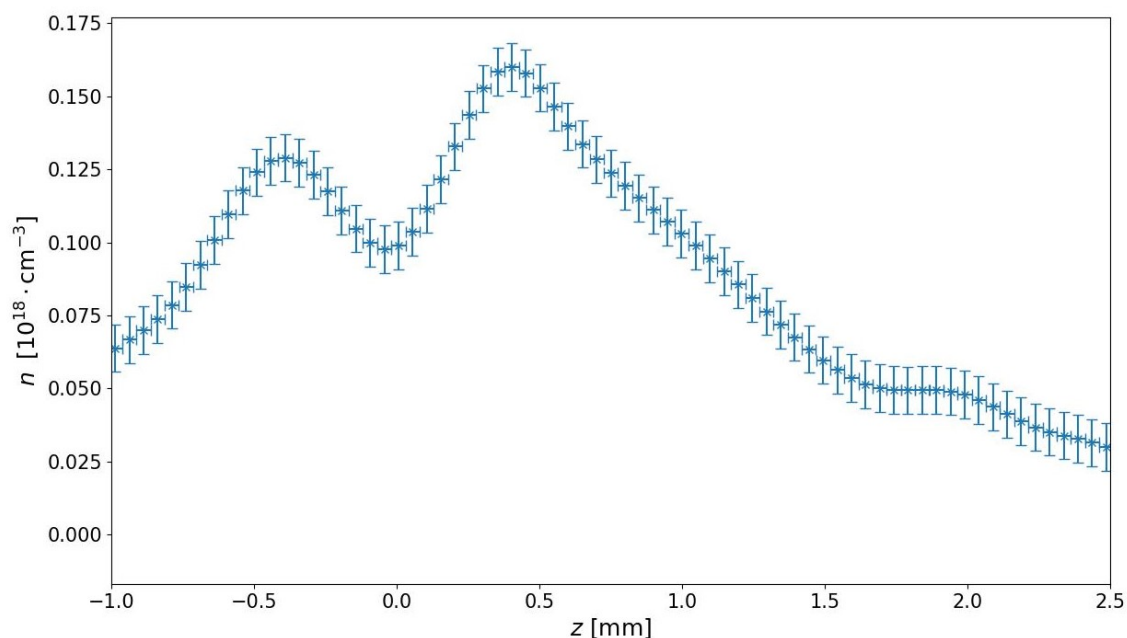
Aby byl terč vhodný, je nutné aby se vytvořil pík vyšší hustoty a následně plato nižší hustoty, jak jsme popsali v sekci 3.1. Vhodný profil jsme našli pouze pro výšky mezi 0,8 až 1,7 mm nad drátem. Jeden z těchto profilů je na Obr. 3.8 a to pro výšku 1,23 mm. Na tomto grafu je patrné hustotní plato, které vzniklo v oblasti mezi 1,5 až 2,5 mm. Pro oblasti mimo výše uvedené výškový interval se plato nevytvořilo, jako příklad uvádíme průběh hustot pro výšku 0,5 a 1,9 mm na Obr. 3.9.

Pro interval výšek 0,8 až 1,7 mm nad drátem budeme nyní sledovat průběh několika parametrů. Prvním z nich bude maximální hustota v oblasti s vyšší hustotou a průměrná hustota vytvořeného platu. Tento průběh je na Obr. 3.10.

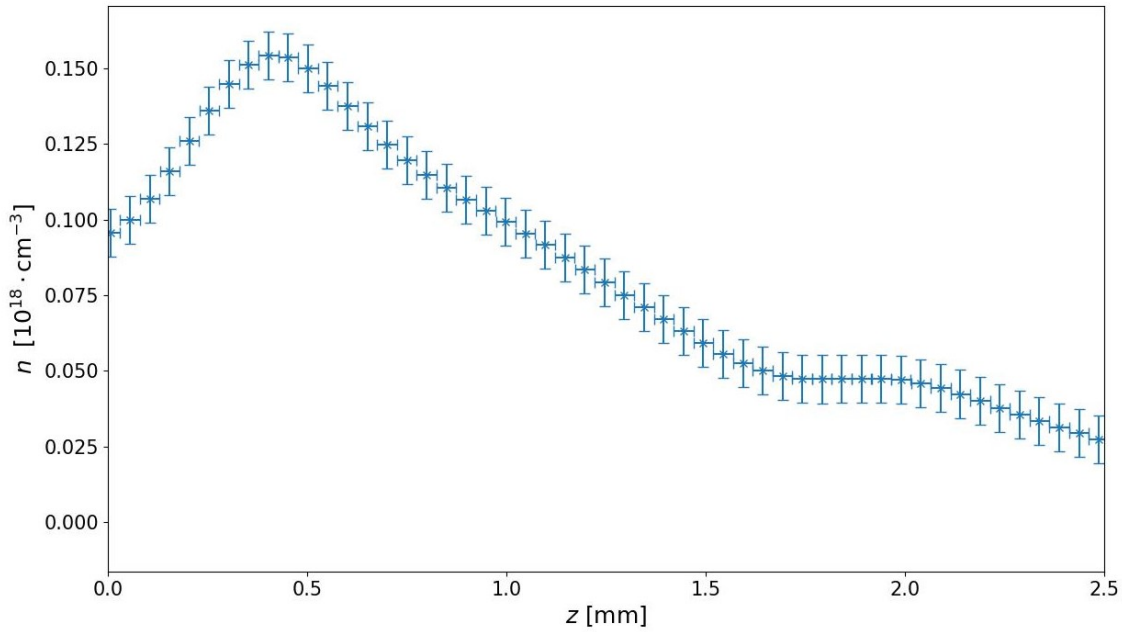




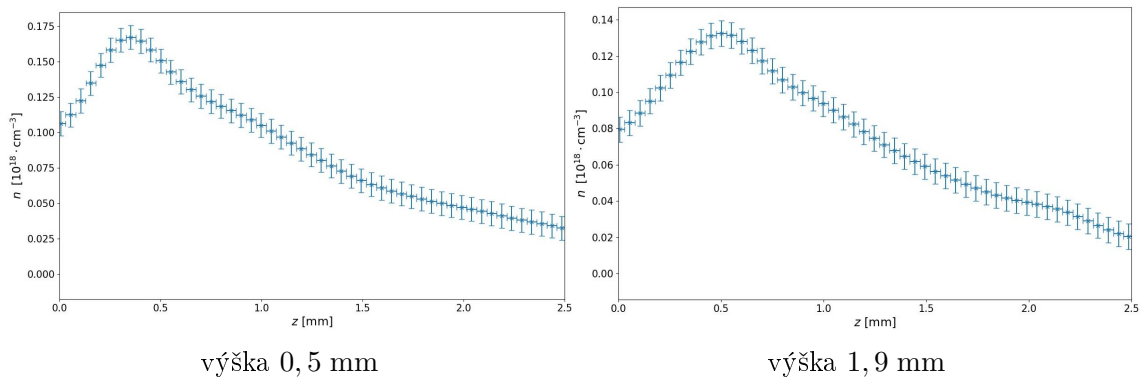
Obr. 3.6: Průběh hustoty plynného terče  $n$  v rovině, ve které očekáváme interakci laserového pulzu s tímto terčem.



Obr. 3.7: Průběh hustoty plynného terče 1 mm nad drátem. Chyby měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.



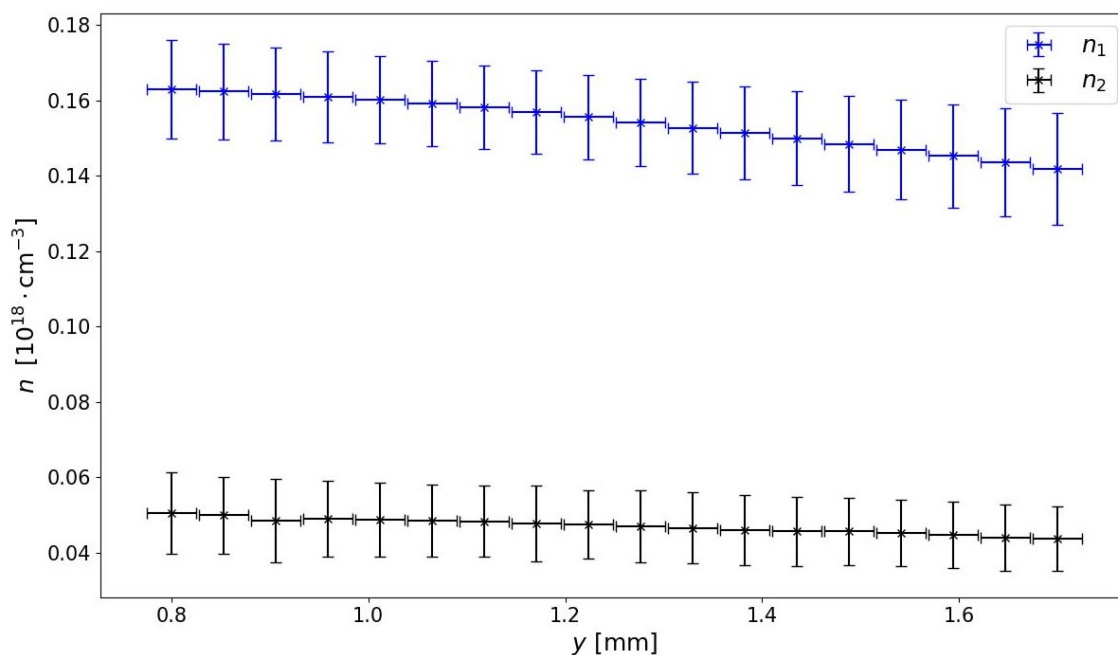
Obr. 3.8: Část průběh hustoty plynného terče 1,23 mm nad drátem, kde očekáváme vznik vhodného profilu k zachycení elektronů. Chyba měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.



Obr. 3.9: Část průběh hustoty plynného terče ve výškách 0,5 mm a 1,9 mm nad drátem, kde očekáváme vznik vhodného profilu k zachycení elektronů. Chyby měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Chybu měření polohy jsme stanovili z přesnosti měření senzoru.

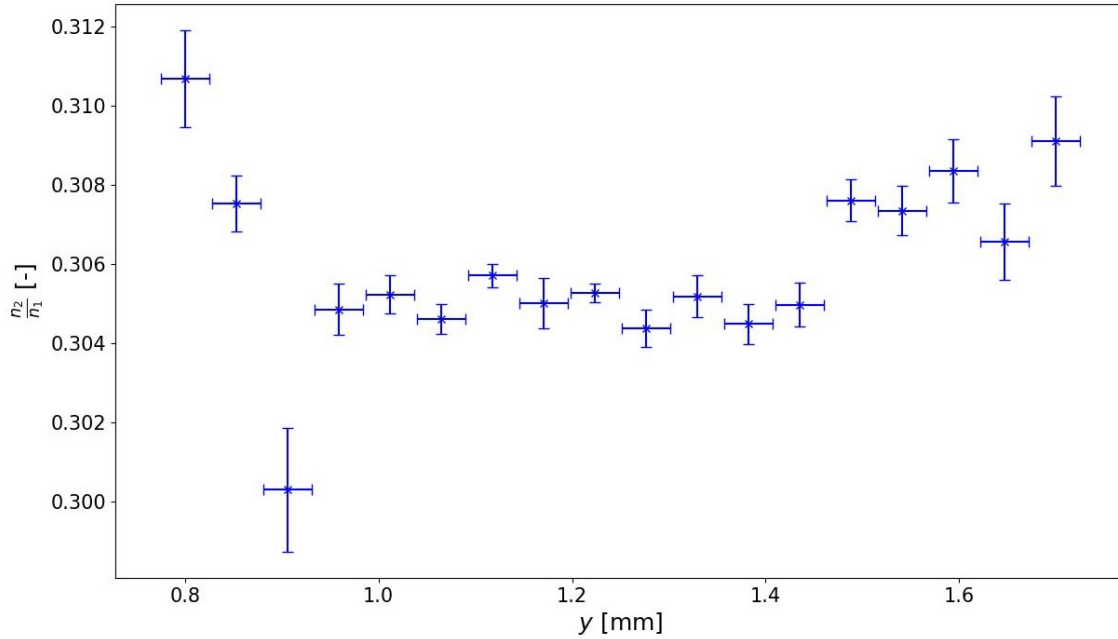
Hodnoty jsme získali průměrováním hodnot v daných oblastech. Toto zpracování je důvodem vzniku statistické části chyby měření hodnoty hustoty. Graf ukazuje mírný pokles pro rostoucí výšku v oblasti vyšší hustoty a převážně konstantní závislost pro hustotu plata. Pro poměry těchto hustot dostáváme průběh na Obr. 3.11. Pro tuto závislost neuvažujeme chybu způsobenou korekcí před tomografickou rekonstrukcí (viz. Příloha B sekce B.4), protože předpokládáme, že tato korekce ovlivňuje pouze absolutní hodnotu nikoliv poměr těchto hodnot.

Nyní ještě stanovíme délky důležitých oblastí. První délkou je délka oblasti s vyšší

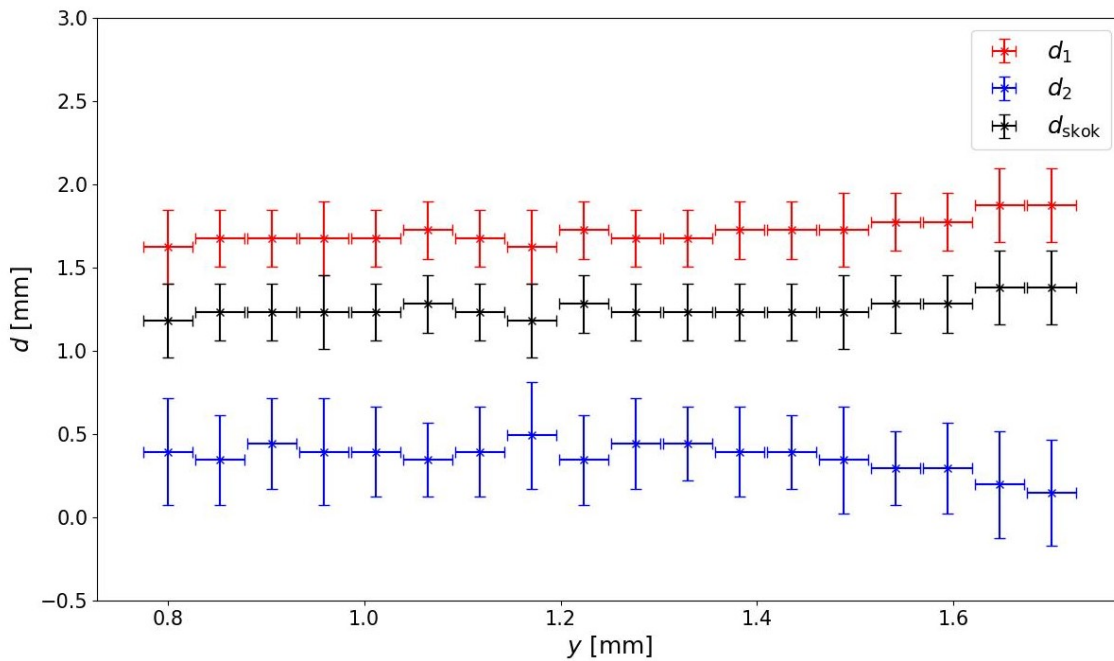


Obr. 3.10: Průběh maximální hustoty v oblasti s vyšší hustotou  $n_1$  a hustoty plata  $n_2$  v závislosti na výšce nad drátem  $y$ . Chyba měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4) a statistickou odchylkou. Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.

hustotou, tu stanovíme jako vzdálenost mezi minimem mezi dvěma hustotními píky (patrné je toto minimum např. na Obr. 3.7) a začátkem hustotního plata. Druhá je délka hustotního plata. Třetí délkou je délka skoku, kterou stanovíme jako vzdálenost mezi maximem hustotního píku a začátkem hustotního plata. Průběh těchto délek pro naše měření je na Obr. 3.12. V tomto případě jsme již v přesnosti námi určené hodnoty uvažovali systematickou chybu danou rozlišením tomografické rekonstrukce podle vztahu (2.15). Námi naměřené průběhy jsou v rámci chyby měření konstantní. Taktéž můžeme pozorovat, že délka hustotního plata je méně než poloviční oproti délce hustotního skoku a délce oblasti s vyšší hustotou. Současně je také patrné, že velká část oblasti s vyšší hustotou je tvořena sestupným přechodem do oblasti s nižší hustotou (délce tohoto přechodu odpovídá délka skoku).



Obr. 3.11: Průběh poměru hustoty v oblasti s vyšší hustotou  $n_1$  a hustoty plata  $n_2$  v závislosti na výšce nad drátem  $y$ . Chyba měření hustoty je způsobena statistickou odchylkou. Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.



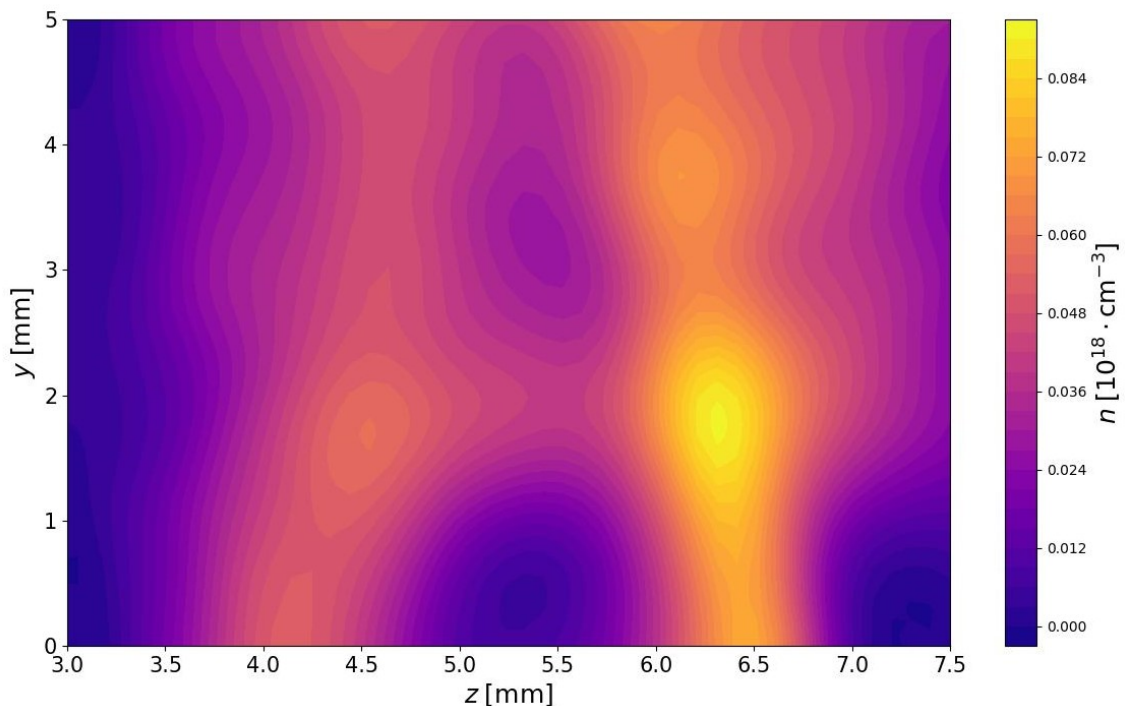
Obr. 3.12: Průběh délky oblasti s vyšší hustotou  $d_1$ , délky hustotního plata  $d_2$  a délky skoku  $d_{\text{skok}}$  v závislosti na výšce nad drátem  $y$ . Chyba měření délek je způsobena statistickou odchylkou a rozlišením tomografické rekonstrukce. Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.

### 3.3.2 Drát umístěný na trysce

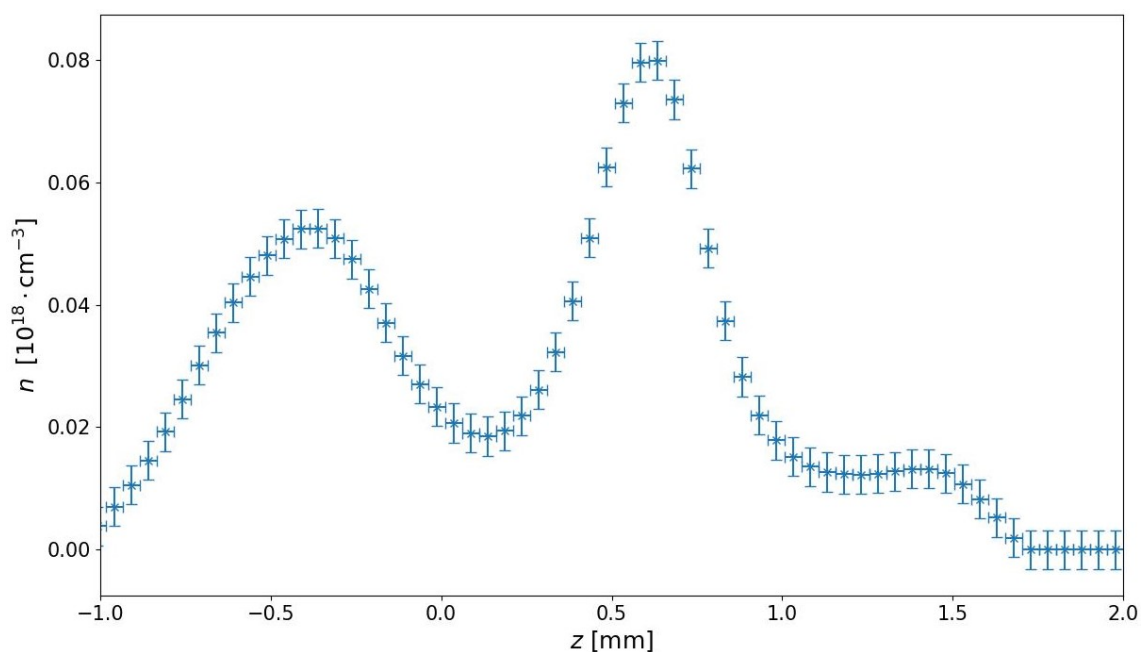
V druhé případě jsme umístili drát přímo na trysku. Uvažujeme nyní stejnou rovinu jako jsme uvažovali v předchozím měření. V této rovině má hustota průběh, který je na Obr. 3.13. Pokud nyní opět projdeme hustotní průběhy v jednotlivých výškách zjistíme, že jediná vhodná výška pro záchyt elektronů je výška 0,5 mm nad drátem, pro níž je hustotní průběh na Obr. 3.14. Pouze pro tuto výšku došlo ke vzniku hustotního plata. Pro nižší výšky dojde k vytvoření třetího hustotního píku a pro vyšší výšky v oblasti, kde bychom očekávali hustotní plato, pozorujeme pouze postupný pokles hustoty (viz. Obr. 3.15).

Pro výšku 0,5 mm nad drátem jsme stanovili hustotu maxima oblasti s vyšší hustotou jako  $n_1 = (0,080 \pm 0,03 \text{ (sys)} \pm 0,007 \text{ (stat)}) \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  a hustotu plata jako  $n_2 = (0,012 \pm 0,03 \text{ (sys)} \pm 0,0000002 \text{ (stat)}) \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , kde systematická měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Poměr těchto hustot je  $\frac{n_2}{n_1} = 0,150 \pm 0,013$ , kde opět očekáváme, že výše uvedená systematická chyba neovlivnila poměr těchto hustot.

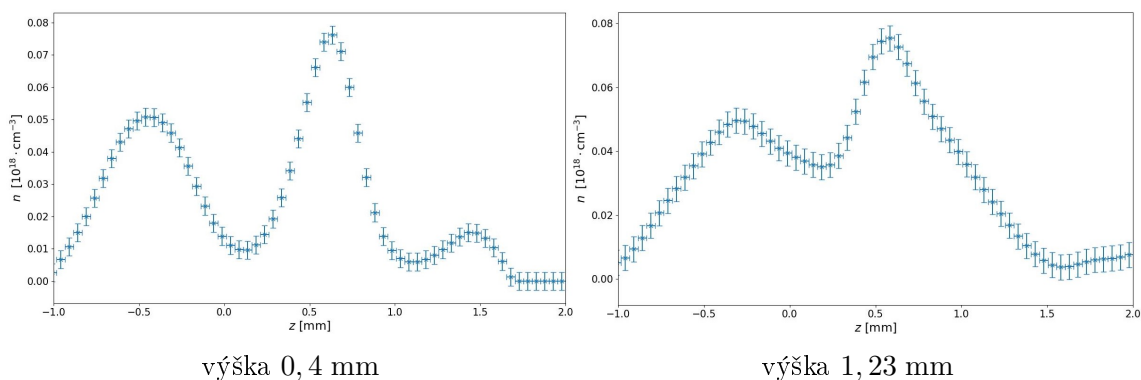
Pro tuto výšku jsme také určili délky zavedené v předchozí podkapitole. Délku oblasti s vyšší hustotou jsme určili jako  $d_1 = (0,94 \pm 0,06 \text{ (sys)} \pm 0,05 \text{ (stat)}) \text{ mm}$ , délku plata jako  $d_2 = (0,44 \pm 0,06 \text{ (sys)} \pm 0,14 \text{ (stat)}) \text{ mm}$  a délku skoku jako  $d_{\text{skok}} = (0,44 \pm 0,06 \text{ (sys)} \pm 0,10 \text{ (stat)}) \text{ mm}$ , kde systematická chyba je dána rozlišením tomografické rekonstrukce podle vztahu (2.15). Pro druhý terč vidíme, že délky plata a skoku jsou v rámci chyby totožné a současně jsou přibližně poloviční oproti délce oblasti s vyšší hustotou.



Obr. 3.13: Průběh hustoty plynného terče  $n$  v rovině, ve které očekáváme interakci laserového pulzu s tímto terčem.



Obr. 3.14: Část průběh hustoty plynného terče 0,5 mm nad drátem, kde očekáváme vznik vhodného profilu k zachycení elektronů. Chyba měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Chybu měření polohy jsme stanovili z rozlišení senzoru.



Obr. 3.15: Průběh hustoty plynného terče ve výškách 0,4 mm a 1,23 mm na drátem, kde očekáváme vznik vhodného profilu k zachycení elektronů. Chyby měření hustoty je způsobena korekcí celkového fázového posunu (viz. Příloha B sekce B.4). Chybu měření polohy jsme stanovili z přesnosti měření senzoru.

### 3.4 Diskuze naměřených výsledků

Pro obě konfigurace se nám povedlo nalézt oblast s vhodným hustotním profilem. Pro drát umístění 6 mm nad tryskou byla tato oblast mezi 0,8 až 1,7 mm nad drátem. Pro drát umístěný přímo na trysce jsme vhodný hustotní profil našli pouze ve výšce 0,5 mm. Abychom udrželi životnost drátu během delšího experimentu stanovili jsme spodní limit pro výšku nad drátem jako 0,7 mm. V takovémto případě je využitelný pouze terč s drátem umístěným v 6 mm nad tryskou. Druhý terč je možné využít pouze pro lasery s nižší energií pulzu. Přesné stanovení maximální energie pulzu těchto laserů by bylo nutné stanovit experimentálně, ale očekáváme ji nižší než energii pulzu laseru použitého v [45] (tj. 1 J).

Pro drát ve výšce 6 mm nad tryskou jsme naměřili hodnoty maxima oblasti s vyšší hustotou okolo  $0,16 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , což je přibližně dvojnásobek oproti hodnotě při měření s drátem umístěným na trysce. Hustotu plata jsme potom pro drát ve výšce 6 mm nad tryskou naměřili okolo  $0,5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , což odpovídá přibližně čtyřnásobku hodnoty pro drát umístěný na trysce. Poměr hustot pro drát ve výšce 6 mm nad tryskou se pohybuje mezi 0,3 až 0,312. Pro drát umístění na trysce je tato hodnota  $0,150 \pm 0,013$ , která je přibližně poloviční oproti hodnotám z druhého měření. V tomto případě vhodnost parametrů nedokážeme posoudit, museli bychom provést simulace, které by stanovily výsledné spektrum urychlených elektronů, popř. toto spektrum nalézt experimentálně.

Poslední co jsme pro dané terče stanovovali jsou délky jednotlivých oblastí. Tyto délky pro různé výšky u terče s drátem 6 mm nad tryskou byly v rámci chyb konstantní, což v kontextu ostatních parametrů, které se také pohybují ve velmi malém rozptylu, dělá z oblasti vhodnou oblast pro urychlení elektronů jako celek. Je nutné vzít v potaz, že průběh hustoty plata se s vyšší výškou začíná více "naklánět" až nakonec přejde ve tvar, který je na Obr. 3.9 vpravo. Proto je vhodnější využívat především střed této oblasti (pro nižší výšky dochází k obdobnému efektu jako pro vyšší). Velkou nevýhodou tohoto terče je délka skoku, kterou potřebujeme minimalizovat, ale v našem případě je delší než 1 mm a více než dvojnásobná oproti délce plata (přibližně 0,4 mm). Současně je tato délka větší než polovina délky oblasti s vyšší hustotou z čehož plyne, že více než polovina této oblasti je tvořena sestupným hustotním profilem. V případě využití tohoto terče je tedy nutné počítat s nezanedbatelným rozptylem v energetickém spektru urychlených elektronů. Pro druhý terč, kdy umísťujeme drát přímo na trysku jsou parametry těchto délek lepší. Délka skoku je kratší než 0,5 mm a je shodná s délkou hustotního plata a současně je poloviční oproti délce oblasti s vyšší hustotou. Ani v tomto případě se nevyhneme nezanedbatelnému energetickému rozptylu. Současně velkým problémem tohoto terče je, že oblast vhodná pro urychlování je menší než pro druhý terč. Přesnou interval výšek jsme nedokázali stanovit, protože je podle našich výsledků menší než je rozlišení našeho měření (0,05 mm).





# Závěr

Cílem této práce bylo studium injekčních mechanismů se zaměřením na injekci pomocí hustotního gradientu. Dalším cílem bylo navrzení terče umožňující záchyt elektronů pomocí hustotního skoku. Dále pak také tento navržený terč charakterizovat.

V úvodní kapitole jsou popsány základní fyzikální principy elektronového urychlování pomocí plazmových vln, které jsou generovány intenzivním laserovým pulzem, nebo svazkem nabitých částic. Nejprve je popsáno samotné vytvoření plazmové vlny, její tvar a limity její existence (lámání vln). Následně je pomocí znalostí průběhů veličin (perturbace elektronové hustoty, podélná elektrická intenzita, radiální elektrická intenzity) popsána možnost urychlení elektronů na této plazmové vlně. V následující podkapitole jsou poté popsány možnosti injekce elektronů do plazmové vlny, tak aby mohly být urychleny. V této podkapitole se zaměřujeme především na injekci pomocí změny hustoty v terči, u které nastiňujeme její fyzikální princip a požadavky na generaci urychlených monoenergetických elektronů.

V druhé kapitole je popsán princip interferometrie a možnost stanovení hustoty plynného terče pomocí interferometrie. Následně je popsána tomografická rekonstrukce jako nástroj pro rekonstrukci 3D objektu z 2D projekcí. Je také popsáno maximální rozlišení této rekonstrukce a nastiňena praktická implementace pomocí algoritmu s názvem Filtrovaná zpětná projekce. Na závěr této kapitoly je popsáno experimentální uspořádání interferometrického systému, který byl využit v měření popsaném ve třetí kapitole.

V třetí kapitole jsou nejprve popsány způsoby jakými lze docílit vhodného hustotního profilu pro injekci elektronů. Současně jsou uvedeny některé výsledky (experimentální i pomocí simulací), které byly získány a které jsou základem pro návrh našeho terče. Návrh tohoto terče je uveden v další podkapitole. Jedná se o návrh, který generuje hustotní skok pomocí drátu umístěného nad tryskou. Zkoumány jsou dvě varianty umístění drátu a to ve výšce 0 a 6 mm nad tryskou. V následující podkapitole jsou uvedeny výsledky získané měřením pomocí interferometrického systému. Na závěr této kapitoly je uvedena diskuze dosažených výsledků.

Pro oba navržené terče jsme našli vhodné oblasti pro urychlení elektronů. Pro tyto terče jsme stanovili důležité parametry, jako jsou velikosti hustoty jednotlivých oblastí, poměr těchto hustot, délka oblasti s vyšší hustotou, délka hustotního plata a délka skoku. Právě délka hustotního plata byla pro obě měření v rámci chyby shodná a pohybovala se okolo 0,4 mm. V podkapitole 3.1.1 jsem uvedl, že právě délka tohoto hustotního plata může výrazně ovlivnit energii urychlených elektronů. Experimentálně studované délky byly sice menší než 0,4 mm, zároveň ale byly studovány pro laserové pulzy kratší než 10 fs, což mohlo vhodnou délku hustotního plata ovlivnit.

Dosažení delšího hustotního plata by mohlo být možné použitím delší trysky a případným posouváním drátu nad touto tryskou.

Pro zlepšení našeho měření bychom potřebovali získat přesnější hodnoty jednotlivých délek a to především délky plata. Naším měřením mělo velkou relativní chybu naměřených délek plata (v průměru 80 % pro drát 6 mm nad tryskou a 45 % pro drát přímo na trysce). Pro zvýšení přesnosti měření by bylo vhodné zvětšení interferometrického systému a zaměřit se pouze na námi nalezené oblasti, kde byl nalezen vhodný hustotní profil.

# Literatura

1. SEDLÁK, B.; ŠTOLL, I. *Elektrina a magnetismus*. 3. vyd. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-802-4621-982.
2. KRANE, K. S. *Introductory nuclear physics*. New York, NY: Wiley, 1988. Dostupné také z: <<https://cds.cern.ch/record/359790>>.
3. KULHÁNEK, P. To je on, elektron! *Aldebaran bulletin*. 2019, roč. 17, č. 13. ISSN 1214-1674. Dostupné také z: <[https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019\\_13\\_ele.php](https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_13_ele.php)>.
4. BRÜNING, O.; ROSSI, L. High-Luminosity Large Hadron Collider. *CERN yellow reports Monographs* [online]. 2020 [cit. 2024-07-21]. ISSN 2519-8076. Dostupné z DOI: 10.23731/CYRM-2020-0010.1.
5. ANDRÉ, K.D.J. FCC-ee Collider Design Overview. In: *ICHEP 2024*. Prague, 18.7.2024.
6. TAJIMA, T.; DAWSON, J. M. Laser Electron Accelerator. *Physical Review Letters*. 1979, roč. 43, č. 4.
7. MALKA, V.; FRITZLER, S.; LEFEBVRE, E.; aj.: Electron Acceleration by a Wake Field Forced by an Intense Ultrashort Laser Pulse. *Science* [online]. 2002-11-22, roč. 298, č. 5598, s. 1596–1600 [cit. 2024-07-21]. ISSN 0036-8075. Dostupné z DOI: 10.1126/science.1076782.
8. BLUMENFELD, I.; CLAYTON, Ch. E.; DECKER, F.-J.; aj.: Energy doubling of 42GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator. *Nature* [online]. 2007, roč. 445, č. 7129, s. 741–744 [cit. 2024-07-21]. ISSN 0028-0836. Dostupné z DOI: 10.1038/nature05538.
9. ŠTOLL, I.; TOLAR, J.; JEX, I. *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2017. ISBN 978-80-246-3545-3.
10. GIBBON, P. Short Pulse Laser Interactions with Matter: An Introduction. In: 2005. Dostupné z DOI: 10.1142/P116.
11. CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Third edition. Cham: Springer International Publishing, [2016]. ISBN 978-3-319-22308-7.
12. KULHÁNEK, P. *Úvod do teorie plazmatu*. Praha: AGA, 2011. ISBN 978-80-904582-2-2.
13. WENZ, J.; KARSCH, S. Physics of Laser-Wakefield Accelerators (LWFA). *arXiv: Accelerator Physics*. 2020. Dostupné také z: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:220424558>>.

14. ESAREY, E.; SPRANGLE, P.; KRALL, J.; aj.: Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Transactions on Plasma Science*. [B.r.], roč. 24, č. 2, s. 252–288. ISSN 00933813. Dostupné z DOI: 10.1109/27.509991.
15. CHEN, P.; DAWSON, J.M.; HUFF, R. W.; aj.: Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma. *Physical Review Letters*. 1985, roč. 54, č. 7.
16. ZHAO, L.; JIANG, T.; LU, Ch.; aj.: Few-femtosecond electron beam with terahertz-frequency wakefield-driven compression. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2018, roč. 21, č. 8. ISSN 2469-9888. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.21.082801.
17. MALÝ, P.; TROJÁNEK, F. *Laserová fyzika a nelineární optika*. Praha: MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, 2022. ISBN 978-80-7378-461-4.
18. KALLOS, E.; KATSIOULEAS, T.; KIMURA, W. D.; aj.: High-Gradient Plasma-Wakefield Acceleration with Two Subpicosecond Electron Bunches. *Physical Review Letters*. 2008, roč. 100, č. 7. ISSN 0031-9007. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.074802.
19. ELKAMASH, I. S.; KOURAKIS, I. Electrostatic wave breaking limit in a cold electronegative plasma with non-Maxwellian electrons. *Scientific Reports*. 2021, roč. 11, č. 1. ISSN 2045-2322. Dostupné z DOI: 10.1038/s41598-021-85228-z.
20. ESAREY, E.; SCHROEDER, C. B.; LEEMANS, W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Reviews of Modern Physics*. 2009, roč. 81, č. 3, s. 1229–1285. ISSN 0034-6861. Dostupné z DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1229.
21. TAJIMA, T.; YAN, X. Q.; EBISUZAKI, T. Wakefield acceleration. *Reviews of Modern Plasma Physics*. 2020, roč. 4, č. 1. ISSN 2367-3192. Dostupné z DOI: 10.1007/s41614-020-0043-z.
22. LAMAČ, M. *Laser-driven hard X-ray source for imaging applications*. Diplomová práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2020.
23. ESIRKEPOV, T.; BULANOV, S. V.; YAMAGIWA, M.; aj.: Electron, Positron, and Photon Wakefield Acceleration: Trapping, Wake Overtaking, and Ponderomotive Acceleration. *Physical Review Letters* [online]. 2006, roč. 96, č. 1 [cit. 2023-11-21]. ISSN 0031-9007. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.014803.
24. KIM, C.; KIM, G.H.; KIM, J.U.; KO, I.S.; LEE, H.J.; SUK, H. Self-injection of electrons from evolution of wake wave. *Proceedings of the 2003 Bipolar-/BiCMOS Circuits and Technology Meeting (IEEE Cat. No.03CH37440)*. 2003, s. 1852–1854. ISBN 0-7803-7738-9. Dostupné z DOI: 10.1109/PAC.2003.1288697.
25. FAURE, J. Plasma Injection Schemes for Laser–Plasma Accelerators. *CERN Yellow Reports*. 2016, Vol 1 (2016): Proceedings of the 2014 CAS–CERN Accelerator School: Plasma Wake Acceleration. Dostupné z DOI: 10.5170/CERN-2016-001.143.

26. THAURY, C.; GUILLAUME, E.; LIFSCHITZ, A.; aj.: Shock assisted ionization injection in laser-plasma accelerators. *Scientific Reports*. 2015-12-21, roč. 5, č. 1. ISSN 2045-2322. Dostupné z DOI: 10.1038/srep16310.
27. HORNÝ, V.; MAŠLÁROVÁ, D.; PETRŽÍLKA, V.; aj.: Optical injection dynamics in two laser wakefield acceleration configurations. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2018-06-01, roč. 60, č. 6. ISSN 0741-3335. Dostupné z DOI: 10.1088/1361-6587/aabd07.
28. GUILLAUME, E. *Control of electron injection and acceleration in Laser-Wakefield Accelerators*. 2015. Doctorat de l'Ecole Polytechnique. l'Ecole Polytechnique.
29. ESPINOS, D. O.; RONDEPIERRE, A.; ZHIDKOV, A.; aj.: Notable improvements on LWFA through precise laser wavefront tuning. *Scientific Reports*. 2023, roč. 13, č. 1. ISSN 2045-2322. Dostupné z DOI: 10.1038/s41598-023-45737-5.
30. HARIHARAN, P. *Optical interferometry*. 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, 2003. ISBN 01-231-1630-9.
31. SUBRAHMANYAM, N.; LAL, B. *Textbook of optics : 25th ed*. New Delhi : S. Chand a Company Limited, 2014.
32. PEATROSS, J.; WARE, M. *Physics of Light and Optics*. 2015. vyd. Brigham Young University, 2015. ISBN 978-1-312-92927-2. Dostupné také z: <<https://optics.byu.edu/docs/opticsbook.pdf>>.
33. MEYZONNETTE, J.-L.; MANGIN, J.; CATHELINAUD, M. *Refractive Index of Optical Materials*. 2019. Dostupné také z: <<https://univ-rennes.hal.science/hal-02405126>>.
34. BIDEAU-MEHU, A.; GUERN, Y.; ABJEAN, R.; aj.: Measurement of refractive indices of neon, argon, krypton and xenon in the 253.7–140.4 nm wavelength range. Dispersion relations and estimated oscillator strengths of the resonance lines. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 1981, roč. 25, č. 5, s. 395–402. ISSN 00224073. Dostupné z DOI: 10.1016/0022-4073(81)90057-1.
35. MAUCH, S.; REGER, J. Real-Time Spot Detection and Ordering for a Shack–Hartmann Wavefront Sensor With a Low-Cost FPGA. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* [online]. 2014, roč. 63, č. 10, s. 2379–2386 [cit. 2024-07-27]. ISSN 0018-9456. Dostupné z DOI: 10.1109/TIM.2014.2310616.
36. HSIEH, J. *Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances*. 2nd ed. Hoboken: Wiley-Interscience, c2009. ISBN 978-047-0563-533.
37. BUZUG, T. *Computed Tomography*. 1. vyd. Heidelberg: Springer Berlin, 2008. ISBN 978-3-540-39408-2. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-540-39408-2.
38. STEARNS, C.W. A Generalized Hann Window for Apodization of Filtered Backprojection Images. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, 2005*. 2005, s. 2719–2721. ISBN 0-7803-9221-3. Dostupné z DOI: 10.1109/NSSMIC.2005.1596898.

39. RACLAVSKÝ, M.; RAO, K. H.; CHAULAGAIN, U.; aj.: High-sensitivity optical tomography of instabilities in supersonic gas flow. *Optics Letters*. 2024, roč. 49, č. 9. ISSN 0146-9592. Dostupné z DOI: 10.1364/OL.510289.
40. KARATODOROV, S.; LERA, R.; RACLAVSKY, M. aj.: Multi-pass probing for high-sensitivity tomographic interferometry. *Scientific Reports*. 2021, roč. 11, č. 1. ISSN 2045-2322. Dostupné z DOI: 10.1038/s41598-021-94436-6.
41. SWANSON, K. K.; TSAI, H.-E.; BARBER, S. K.; aj.: Control of tunable, monoenergetic laser-plasma-accelerated electron beams using a shock-induced density downramp injector. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2017, roč. 20, č. 5. ISSN 2469-9888. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.20.051301.
42. BUCK, A.; WENZ, J.; XU, J.; aj.: Shock-Front Injector for High-Quality Laser-Plasma Acceleration. *Physical Review Letters*. 2013, roč. 110, č. 18. ISSN 0031-9007. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.185006.
43. WILLIAMSON, B.; XIA, G.; DÖBERT, S.; aj.: Simulation study of an LWFA-based electron injector for AWAKE Run 2. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2018, roč. 909, s. 126–129. ISSN 01689002. Dostupné z DOI: 10.1016/j.nima.2018.02.005.
44. CARDENAS, D. E.; CHOU, S.; WALLIN, E.; aj.: Electron bunch evolution in laser-wakefield acceleration. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2020, roč. 23, č. 11. ISSN 2469-9888. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.23.112803.
45. BURZA, M.; GONOSKOV, A.; SVENSSON, K.; aj.: Laser wakefield acceleration using wire produced double density ramps. *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. 2013, roč. 16, č. 1. ISSN 1098-4402. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.16.011301.
46. HANSSON, M.; AUDET, T. L.; EKERFELT, H.; aj.: Localization of ionization-induced trapping in a laser wakefield accelerator using a density down-ramp. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2016-05-01, roč. 58, č. 5. ISSN 0741-3335. Dostupné z DOI: 10.1088/0741-3335/58/5/055009.
47. LASER L3 HAPLS. *ELI Beamlines*. [B.r.]. Dostupné také z: <[www.eli-beams.eu/facility/lasers/laser-3-hapls-1-pw-30-j-10-hz/](http://www.eli-beams.eu/facility/lasers/laser-3-hapls-1-pw-30-j-10-hz/)>.
48. WALT, S. van der; SCHÖNBERGER, J. L.; NUNEZ-IGLESIAS, J.; aj.: Scikit-image: image processing in Python [online]. [B.r.] [cit. 2024-07-07]. Dostupné z DOI: 10.7717/peerj.453.
49. PASCHOTTA, R. *Gaussian beams*. RP Photonics, 2004. Dostupné z DOI: 10.61835/mla.
50. VIRTANEN, P.; GOMMERS, R.; OLIPHANT, T. E.; aj.: SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*. 2020, roč. 17, s. 261–272. Dostupné z DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

# Příloha A

## Gaussovský svazek

Standardním nástrojem pro popis vln je rovinná vlna. Tato vlna se sice vyznačuje tím, že je její amplituda konstantní během šíření, zároveň ale není příčně omezená a vlna má nekonečnou energii. Dalším případem je sférická vlna, její zdroj je bodový a je tedy příčně omezená a má konečnou energii, zároveň ale její amplituda se rostoucí vzdáleností klesá nepřímo úměrně vzdálenosti od počátku.

Nedokážeme tedy najít takové řešení vlnové rovnice (1.3) pro elektromagnetickou vlnu, která by vyhovovalo požadavků na příčnou omezenost a šíření s nedivergentní amplitudou. Řešením tohoto problému je paraxiální aproximace, která vede na vlnu v následujícím tvaru [49]

$$\mathbf{E}(r, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(i \left[ kz - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \right]\right), \quad (\text{A.1})$$

tuto vlnu označujeme jako Gaussův svazek. Gaussův svazek je ve vztahu (A.1) popsán ve válcových souřadnicích  $(r, \varphi, z)$ . Jako šířku svazku označujeme  $w$  a  $w_0 = w(z=0)$  a platí pro ni následující vztah

$$w = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}; \quad w_0 = \sqrt{\frac{z_R \lambda}{\pi}}, \quad (\text{A.2})$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka v prostředí, kde se svazek šíří. Parametr  $z_R$ , neboli Rayleighova vzdálenost, udává do jaké vzdálenosti je zanedbatelná divergence svazku [49]. Další parametry jsou vlnové číslo  $k$  a poloměr zakřivení svazku  $R$  daný vztahem

$$R = z \left[ 1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right]. \quad (\text{A.3})$$

Jako poslední parametr zavedeme divergenci svazku  $\theta$  vztahem

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (\text{A.4})$$

Gaussův svazek je tedy jednoznačně určen vlnovou délkou a jedním z parametrů  $w_0$ ,  $z_R$  a  $\theta$ .





# Příloha B

## Úprava dat před tomografickou rekonstrukcí

V této kapitole popíšeme úpravu vstupních dat před jejich zpracováním tomografickou rekonstrukcí. Za vstupní data považujeme relativní fázové zpoždění naměřené senzorem vlnoplochy<sup>1</sup>. Předpokládáme, že tato data nejsou zatížena žádnou nestatistickou chybou (tj. že všechny nestatistické vlivy jsme již odfiltrovali).

### B.1 Inverze dat

Prvním krokem, který musíme učinit je invertování vstupních dat. Námi použitý senzor měří fázové zpoždění vůči nějaké pevné hodnotě<sup>2</sup>. Na Obr. B.1 jsou data naměřená senzorem z nichž je patrné, že pro oblast s nejvyšší hustotou plynu senzor naměřil nulové fázové zpoždění a pro vakuum okolo plynu naměřil fázové zpoždění nejvyšší. Pro vakuum definujeme fázové zpoždění jako nulové, proto data zkalibrujeme tak, že fázové zpoždění bude definované jako rozdíl mezi naměřeným zpožděním pro vakuum a naměřeným zpožděním v daném bodě.

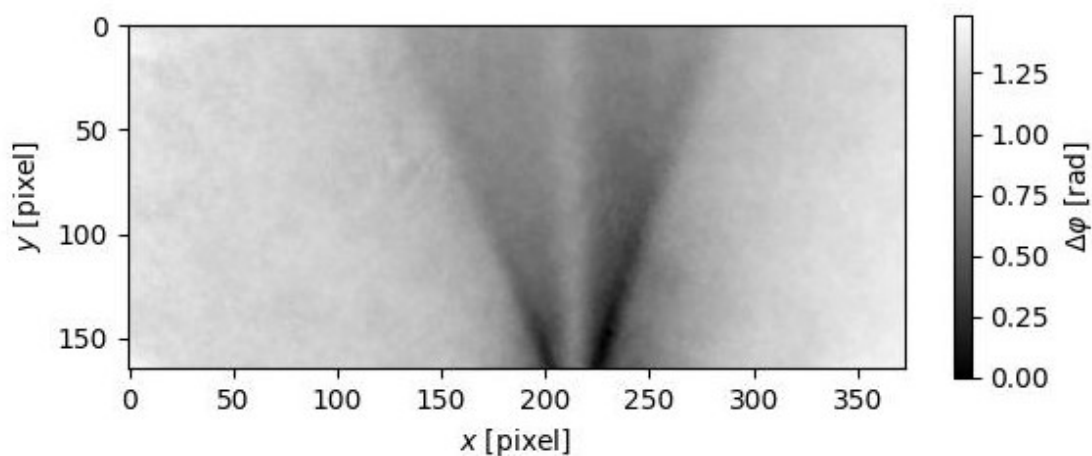
### B.2 Filtrace šumu

Další úpravou kterou provedeme je filtrace šumu. K filtraci využijeme gaussův filtr implementovaný v knihovně SciPy [50]. Rozdíl mezi filtrovanou a nefiltrovanou fázovou mapou je na Obr. B.2. Současně odstraněním šumu dojde k mírnému rozmazání původní fázové mapy a efektivnímu snížení prostorového rozlišení našeho měření.

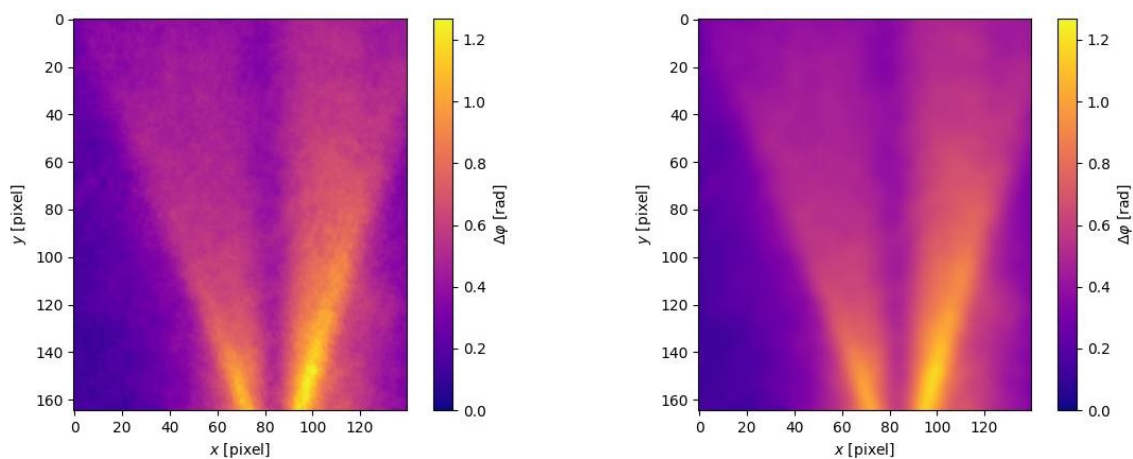
---

<sup>1</sup>Senzor neměří přesně fázové zpoždění, ale pouze deformaci vlnoplochy, z níž je toto fázové zpoždění vypočteno. Blíže je fungování námi použitého senzoru vlnoplochy popsáno v [35].

<sup>2</sup>Tato pevná hodnota opět plyne ze způsobu jakým se relativní fázové zpoždění z měření získává.



Obr. B.1: Fázová mapa naměřená senzorem.



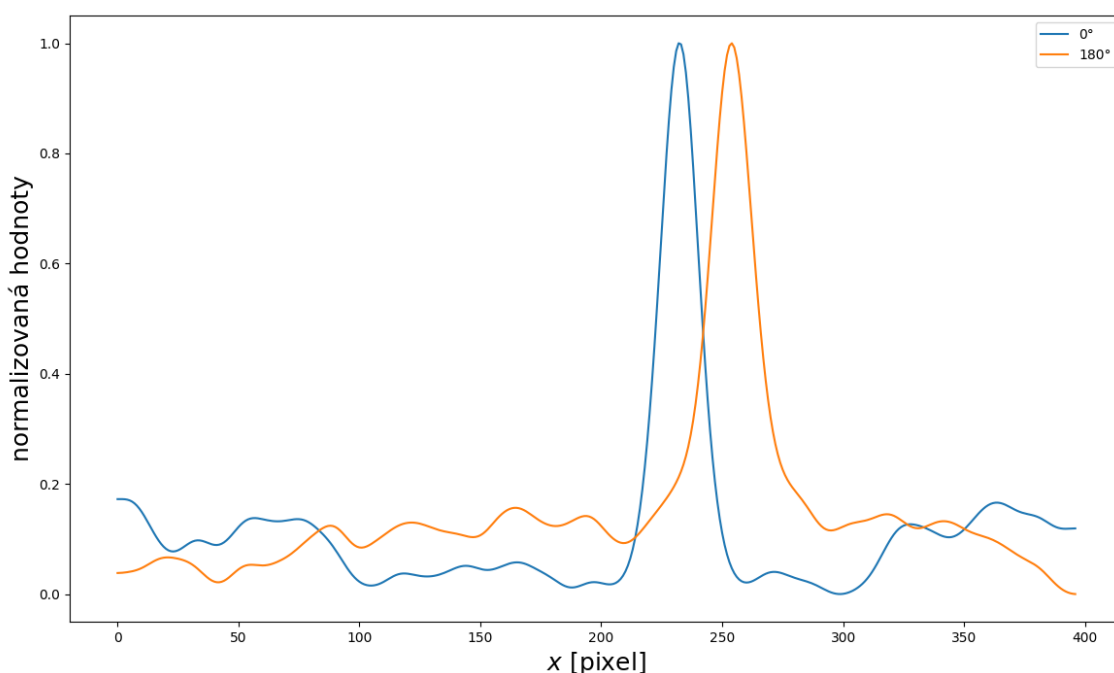
**A**-Fázová mapa před filtrováním

**B**-Filtrovaná fázová mapa

Obr. B.2: Ukázka rozdílu mezi nefiltrovanými daty **A** a daty filtrovanými gaussovým filtrem **B**. K filtrování byl použit gaussový filtr se šířkou 2 pixely implementovaný v knihovně *SciPy* v programovacím jazyce Python [50].

## B.3 Úprava osy rotace

Aby rekonstrukční algoritmus správně zpracoval data je nutné, aby osa rotace, kolem které daný objekt rotujeme, byla přesně ve středu námi získané projekce. To pro naše projekce platit nemusí. Osu rotace volíme pomocí projekce pro úhel  $0^\circ$  a úhel  $180^\circ$ . Pro pevnou výšku ve fázové mapě nalezneme maxima pro tyto dvě projekce a jejich polohy a polohu osy rotace definujeme jako průměr těchto poloh. Výšku ve fázové mapě volíme tak, aby využívaná data byla co nejméně zasažena statistickými fluktuacemi a aby měla co nejvýraznější maximum. Následně projekci ořízneme tak, aby námi definovaná osa rotace skutečně projekci rozdělovala na dvě stejné poloviny. Příklad průběhu naměřené fáze pro pevně zvolenou výšku je na Obr. B.3. Na tomto příkladu je vidět, že osa rotace se nachází okolo hodnoty 250 pixelů.



Obr. B.3: Průběh naměřených normalizovaných hodnot fázového posunu pro projekci při natočení o úhel  $0^\circ$  a  $180^\circ$  v stejné výšce fázové mapy.

## B.4 Korekce celkového fázového posunu

Ještě než budeme používat tomografickou rekonstrukci musíme provést poslední krok. Nejprve zavedeme důležitý pojem sinogram. Sinogram je 2D graf, který představuje průběh hodnot projekcí v pevné výšce projekční roviny. Na osu  $y$  vynášíme hodnotu úhlu pod kterým jsme projekci získali a osa  $x$  odpovídá horizontální souřadnici v projekční rovině. Důležitou poznámkou je, že sinogram můžeme tvořit až ve chvíli, kdy máme osu rotace zavedenou tak, jak jsem učinili v předchozí podkapitole, pak také platí následující tvrzení. Sinogram je pro libovolnou výšku a libovolný

objekt tvořen vzájemně se překrývajícími sinusoidami, které jsou funkcemi projekčního úhlu  $\theta$  [36]. Předchozí věta pochopitelně nemůže být splněna pro konečný počet projekcí (konečným počtem dat se můžeme pouze přiblížit spojitě funkci), ale dává nám představu o správném vzhledu sinogramu. Pokud nyní vytvoříme sinogram pro výšku 5 pixelů pro naše měření dostaneme Obr. B.4-A, pro výšku 40 pixelů je to Obr. B.5-A. Z těchto grafů je patrné, že naše měření obsahuje projekce, které narušují očekávanou spojitost dat. Abychom dosáhli očekávaného průběhu, můžeme tyto projekce nahradit daty, která budeme interpolovat ze sousedních projekcí. Tímto postupem ztrácíme informace o měřeném objektu. Budeme tedy postupovat jinak. Jako motivace nám poslouží graf na Obr. B.6. Tento graf zobrazuje data použitá pro tvorbu sinogramu ve výšce 5 pixelů v rozmezí 20° až 29°. Je z nich patrné, že všechny projekce nesou informace o rozložení fázového zpoždění, ale některé se jeví jakoby přenásobené koeficientem, který sniž/zvýší hodnotu ve všech bodech naměřených dat.

Pro vyřešení tohoto problému využijeme tvrzení, že součet všech fázových posunutí v pevné výšce fázové mapy je pro všechny projekce stejný. Toto tvrzení odvodíme ze vztahu (2.10), kde budeme integrovat přes všechna  $x$  (to v diskretním případě odpovídá sumě přes všechna naměřená data násobená délkou oblasti)

$$\int_0^{x_{\max}} \varphi_2(x) dx = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} \int_0^{x_{\max}} \int_0^L (N(x, y) - 1) dy dx. \quad (\text{B.1})$$

Tento integrál můžeme přepsat jako integrál přes plochu vyznačenou na Obr. 2.1 modrými čarami, což odpovídá oblasti, kde se nachází výtrysk plynu obklopený vakuem. Tuto oblast budeme označovat jako  $S$ . Dostáváme tedy vztah

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} \int_0^{x_{\max}} \int_0^L (N(x, y) - 1) dy dx = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} \int_S (N(x, y) - 1) dS. \quad (\text{B.2})$$

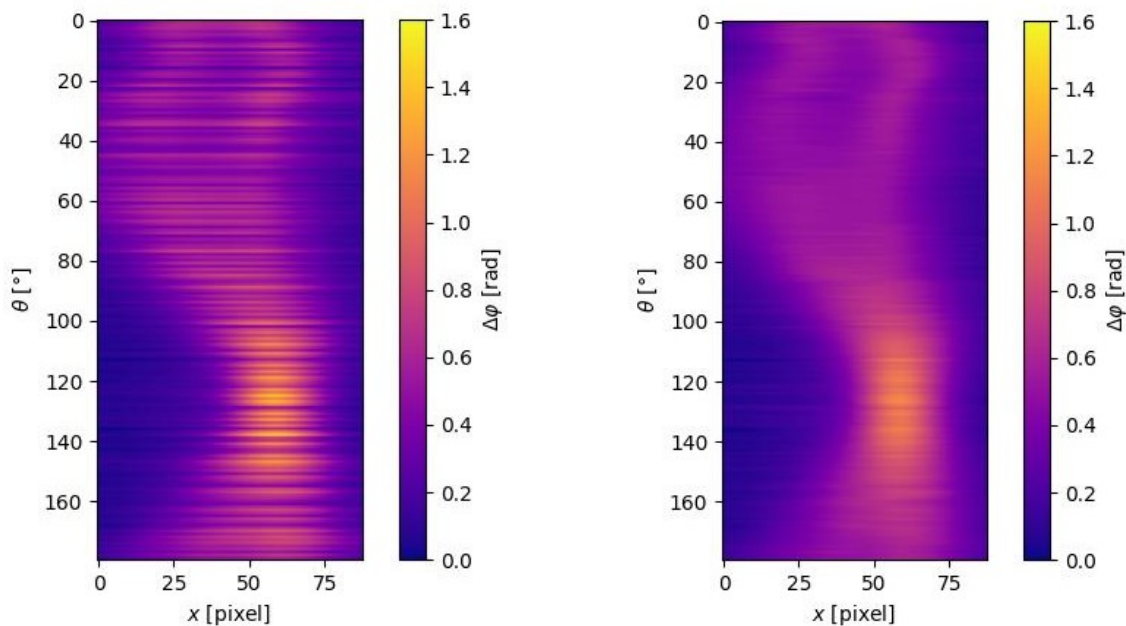
Jako poslední využijeme vztah (2.9), kde známe hustotu  $n_1$  a index lomu  $N_1$  a proto za  $\frac{N_1-1}{n_1}$  dosadíme konstantu  $C$ . Ve výsledku tedy dostáváme vztah

$$\int_0^{x_{\max}} \varphi_2(x) dx = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} \int_S C \cdot n(x, y) dS = \textit{konst}. \quad (\text{B.3})$$

Poslední rovnost platí, protože neočekáváme, že by se v průběhu měření měnila hustota v zkoumané oblasti. Naše tvrzení získáme nahrazením integrálu za diskretní sumu.

Poslední otázkou je, jak zvolit tuto konstantu na kterou budeme normalizovat naše projekce. Pokud se podíváme na rozložení součtu fázového posunu  $\Delta\Phi(\vartheta) = \sum_x \Delta\varphi(\vartheta)$  na Obr. B.7, pak můžeme usoudit, že vhodně zvolená hodnota této konstanty bude průměr. Současně můžeme také určit s jakou přesností jsme tento průměr naměřili a jaká tedy bude výsledná přesnost našeho měření. Pro měření na Obr. B.7 je  $\Delta\phi = (36 \pm 7)$  rad, což odpovídá relativní odchylce 20 %.

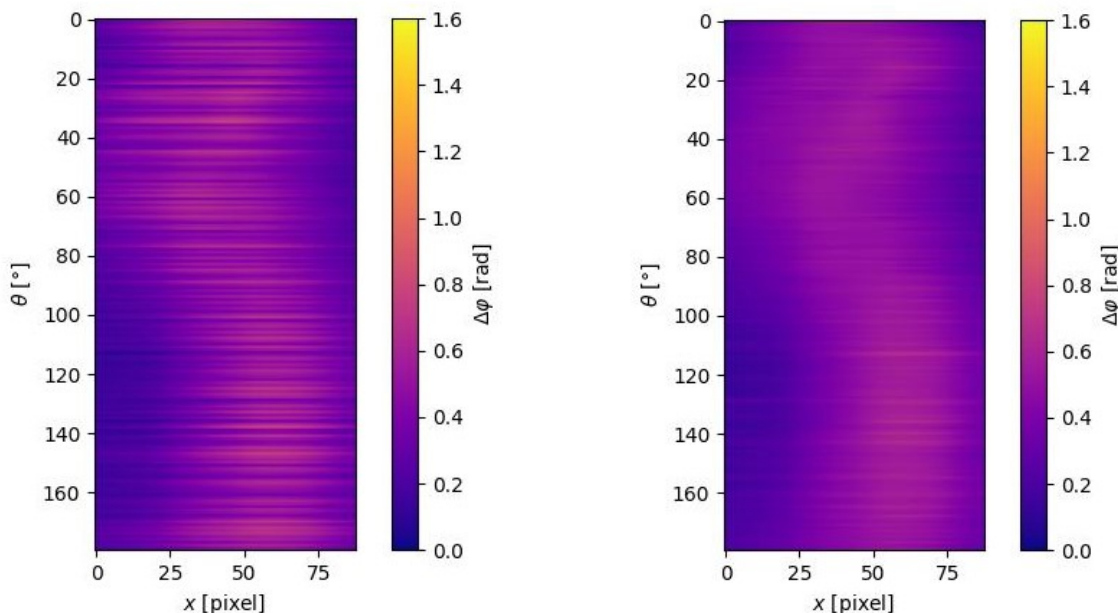
Naši korekci provádíme pro všechny výšky se stejným koeficientem pro danou projekci. Tyto korekční koeficienty stanovujeme tak, aby výsledný fázový součet (tak jak byl zaveden výše) odpovídal vypočtenému průměru. Tyto koeficienty vypočítáváme ve výšce 5 pixelů. Po této korekci dostáváme sinogram na Obr. B.4-B, který již odpovídá našemu očekávání. Pro vyšší výšku (40 pixelů) je sinogram na Obr. B.5-B. Z tohoto obrázku je patrné, že i pro vyšší výšky korekční faktor vhodně upravitel získaná data do očekávané podoby sinogramu.



**A**-Sinogram před korekcí

**B**-Sinogram po korekci

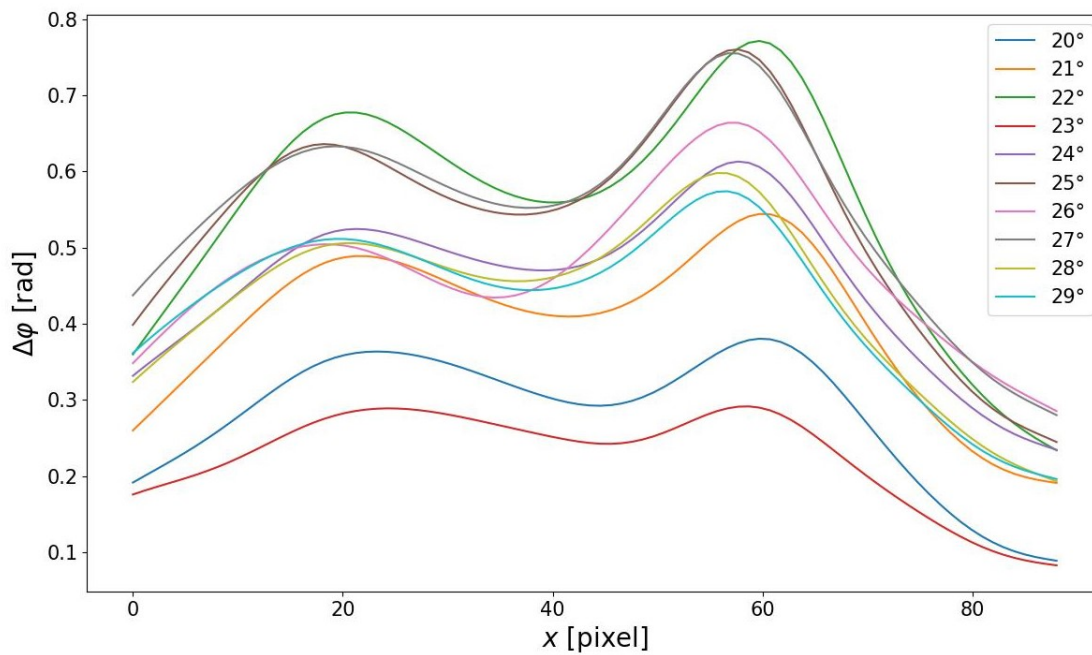
Obr. B.4: Sinogram pro výšku 5 pixelů, ve které vypočítáváme korekční faktor. Úhel  $\theta$  odpovídá úhlu, pod kterým byla projekce získána. Osa  $x$  představuje osu  $x$  ve fázové mapě každé z projekcí. Data byla získána ze 180 projekcí vytvořených s krokem  $1^\circ$ .



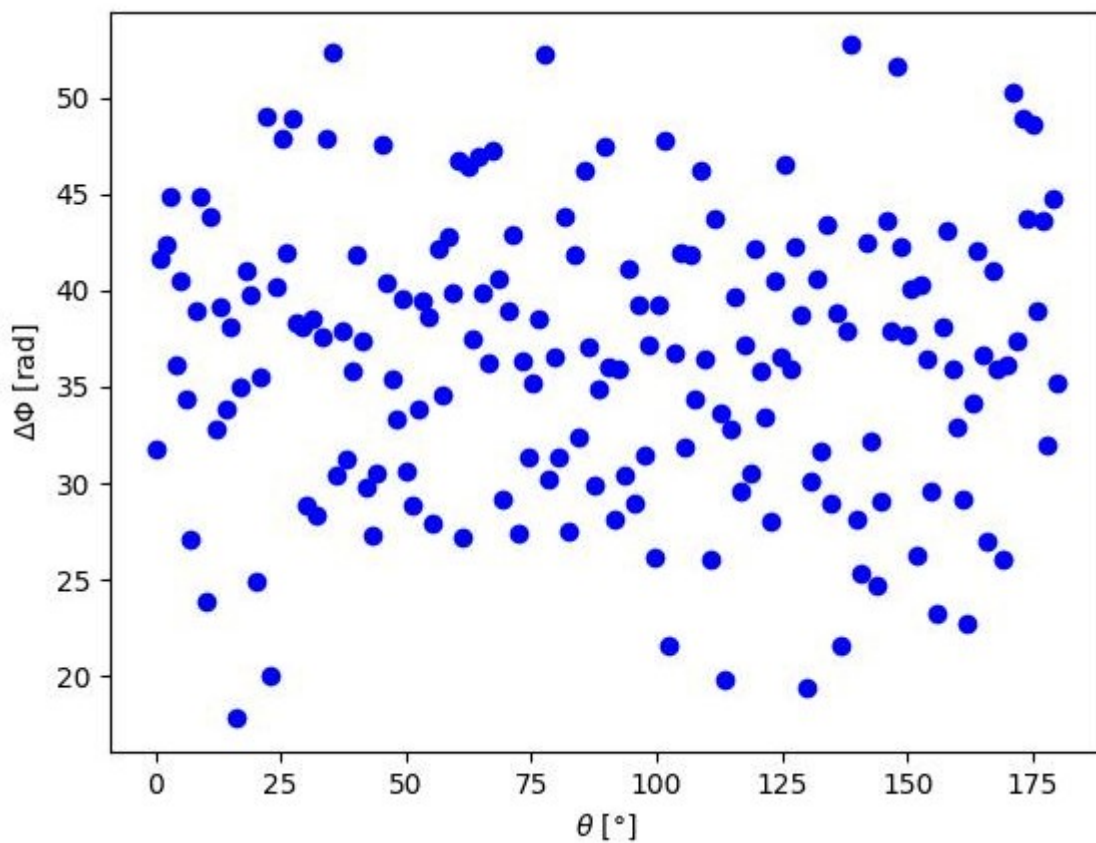
**A**-Sinogram před korekcí

**B**-Sinogram po korekci

Obr. B.5: Sinogramy pro výšku 40 pixelů. Úhel  $\theta$  odpovídá úhlu, pod kterým byla projekce získána. Osa  $x$  představuje osu  $x$  ve fázové mapě každé z projekcí. Data byla získána ze 180 projekcí vytvořených s krokem  $1^\circ$ .



Obr. B.6: Naměřené hodnoty fázového posunu  $\Delta\varphi$  v výšce 5 pixelů pro fázové mapy naměřené v úhlech 20° až 29°.



Obr. B.7: Hodnoty součtu fázového posunu  $\Delta\Phi(\vartheta)$  v závislosti na úhlu pořízení projekce. Součet fázového posunu je dán součtem jednotlivých fázových posunů ve výšce 5 pixelů.