



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ

Ústav letadlové techniky

Návrh vrtule

Design of propeller

**Diplomová práce**

2024

Bc. Jan PAŘOUK

Studijní program

Dopravní a transportní technika

Vedoucí práce:

Ing. Jan Klesa Ph.D.

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Paďouk Jméno: Jan Osobní číslo: 475057  
Fakulta/ústav: Fakulta strojní  
Zadávající katedra/ústav: Ústav letadlové techniky  
Studijní program: Dopravní a transportní technika  
Specializace: Spalovací motory

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Návrh vrtule

Název diplomové práce anglicky:

Design of propeller

Pokyny pro vypracování:

Pro vypracování proveďte:

- 1) Úvod do aerodynamiky vrtulí
- 2) Popis návrhových metod vrtulí
- 3) Aerodynamický návrh vrtule pro zvolené parametry
- 4) Pevnostní kontrolu vrtule
- 5) Závěr

Seznam doporučené literatury:

Dle pokynů vedoucího práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jan Klesa, Ph.D. ústav letadlové techniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: 26.04.2024 Termín odevzdání diplomové práce: 24.05.2024

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

Ing. Jan Klesa, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

Ing. Milan Dvořák, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne.....

Podpis:

## Poděkování

Děkuji vedoucímu Ing. Janu Klesovi Ph.D. za cenné rady a za odbornou pomoc při zpracování mé diplomové práce.

# Anotační list

Jméno autora: Jan Paďouk  
Název: Návrh vrtule  
Title: Design of propeller

Akademický rok: 2023/2024  
Studijní program: Dopravní a transportní technika  
Ústav: Ústav letadlové techniky

Vedoucí: Ing. Jan Klesa Ph.D.

Bibliografické údaje: Počet stran: 72  
Počet obrázků: 31  
Počet tabulek: 2  
Počet grafů: 14  
Počet příloh: 1

Klíčová slova: Vrtule, režim letu, tah vrtule, úhel nastavení, E. E. Larrabee,

Keywords: Propeller, flight mode, thrust, pitch angle, E. E. Larrabee

**Abstrakt:**

Tato práce se primárně věnuje aerodynamickému návrhu pevné vrtule dle zvolených vstupních parametrů. Bylo popsáno několik návrhových metod, ze kterých byla při stanovení geometrických charakteristik vrtulového listu jedna vybrána a implementována pomocí programu Matlab. Dílčím cílem práce je pevnostní kontrola navržené vrtule. Za tímto účelem byly nejdříve popsány základní aerodynamické teorie vrtule. Pomocí nich byly odvozeny vztahy pro výpočet výkonových charakteristik vrtule. Ty slouží jako vstupní parametr do pevnostního výpočtu. Na závěr práce byl proveden výpočet hlavních zatížení vrtulového listu a provedena pevnostní kontrola.

**Abstract:**

This work is primarily concerned with the aerodynamic design of a fixed propeller according to the selected input parameters. Several design methods have been described, from which one has been selected and implemented using Matlab to determine the geometric characteristics of the propeller blade. The strength check of the designed propeller is a sub-objective of this work. For this purpose, the basic aerodynamic theories of the propeller were first described. Using these, the relations for the calculation of the propeller performance characteristics were derived. These are used as input parameters for the strength calculation. At the end of the work, the calculation of the main loads on the propeller blade was carried out and a strength check was performed.

## Seznam obrázků:

Obr. 1 Vznik profilu listu, převzato z: [3] .....	14
Obr. 2 Rychlostní trojúhelní řezu listu, převzato a upraveno z: [3] .....	15
Obr. 3 Průběh hloubky profilu v závislosti na poměrném poloměru .....	16
Obr. 4 Závislost $cT$ na $\lambda$ , převzato z: [7] .....	18
Obr. 5 Závislost účinnosti $\eta$ na $\lambda$ , převzato z: [7] .....	18
Obr. 6 Závislost $cP$ na $\lambda$ , převzato z: [7] .....	18
Obr. 7 Režimy vrtule v závislosti na rychlostním poměru a účinnosti, převzato z: [8] .....	19
Obr. 8 Průběh rychlosti a tlaku v okolí ideálního propulzoru, převzato z: [2] .....	20
Obr. 9 Rovina ideálního propulzoru, převzato z: [2] .....	22
Obr. 10 Teorie izolovaného elementu listu, převzato a upraveno z: [2] .....	24
Obr. 11 Podkovovité víry na listu vrtule, převzato z: [18] .....	28
Obr. 12 Rozložení sil na elementu listu, převzato a upraveno z: [3] .....	28
Obr. 13 Soustava víru s proměnnou cirkulací, převzato z: [3] .....	31
Obr. 14 Žukovského vírová teorie, převzato a upraveno z: [11] .....	33
Obr. 15 Úplav za vrtulí, převzato z: [11] .....	36
Obr. 16 Rychlostní vektorový diagram pro obecný element listu, převzato a upraveno z: [1] .....	37
Obr. 17 Rozložení vázané cirkulace dle Prandtla a Goldsteina. převzato z: [12] .....	42
Obr. 18 konstrukční provedení vrtulového listu z hliníkové slitiny, převzato z: [13] .....	43
Obr. 19 Konstrukční řešení listů, převzato z: [13] .....	44
Obr. 20 Skladba sil a momentů působících na vrtuli, převzato z: [13] .....	45
Obr. 21 Vratný moment od odstředivých sil, převzato z: [13] .....	46
Obr. 22 Konstrukční vyklonění těžištní osy, převzato z: [13] .....	47
Obr. 23 Kroutící moment od odstředivých sil, převzato z: [13] .....	49
Obr. 24 Izolovaný element listu, upraveno a převzato z: [3] .....	50
Obr. 25 Průběh kroutícího momentu od aerodynamických sil, převzato z: [13] .....	52
Obr. 26 Změna úhlu náběhu vlivem deformace od krutového zatížení, převzato z [13] .....	52
Obr. 27 Výpočet momentů od aerodynamických sil, převzato a upraveno z: [3] .....	53
Obr. 28 Průběh momentu od aerodynamických sil, převzato z [3] .....	55
Obr. 29 Geometrie profilu Clark Y, převzato z: [14] .....	58
Obr. 30 Aerodynamické charakteristiky profilu pro Reynoldsovo číslo 500 000, převzato z [14] .....	58

Obr. 31 Geometrie navrženého listu .....	62
--	----

### **Seznam grafů:**

Graf. 1 Potřebný tah letounu v závislosti na rychlosti letu .....	56
Graf. 2 Parabolická náhrada poláry .....	56
Graf. 3 Hloubka profilu v závislosti na poměrném poloměru.....	60
Graf. 4 Prandtlova aproximace Goldsteinovy funkce v závislosti na poměrném poloměru....	60
Graf. 5 Úhel nastavení profilu v závislosti na poměrném poloměru .....	61
Graf. 6 Závislost součinitele tahu vrtule 5868-9 na rychlostním poměru .....	64
Graf. 7 Závislost součinitele výkonu vrtule 5868-9 na rychlostním poměru .....	64
Graf. 8 Závislost Účinnosti vrtule 5868-9 na rychlostním poměru .....	65
Graf. 9 Závislost součinitele tahu navržené vrtule na rychlostním poměru .....	66
Graf. 10 Závislost součinitele výkonu navržené vrtule na rychlostním poměru.....	66
Graf. 11 Závislost účinnosti navržené vrtule na rychlostním poměru .....	67
Graf. 12 Průběh odstředivé síly v závislosti na poměrném poloměru.....	68
Graf. 13 Průběh aerodynamického momentu v závislosti na poměrném poloměru .....	68
Graf. 14 Průběh tahového napětí od odstředivých sil v závislosti na poměrném poloměru ..	69



## Seznam symbolů

$a$	[-]	Osový indukční faktor
$b$	[-]	Tangenciální indukční faktor
$c$	[m]	Hloubka profilu
$\bar{c}$	[-]	Poměrná hloubka profilu
$\bar{r}, \xi$	[-]	Poměrný poloměr vrtule
$R$	[m]	Poloměr vrtule
$D$	[m]	Průměr vrtule
$t$	[m]	Tloušťka listu
$\bar{t}$	[-]	Poměrná tloušťka listu
$\alpha$	[°]	Úhel náběhu
$\beta$	[°]	Úhel nastavení
$\varphi$	[°]	Úhel nabíhajícího vzduchu
$\eta$	[-]	Účinnost vrtule
$c_T$	[-]	Součinitel tahu
$c_M$	[-]	Součinitel momentu
$c_P$	[-]	Součinitel výkonu
$\lambda$	[-]	Rychlostní poměr
$\Omega$	[rad/s]	Úhlová rychlost
$V_0, V_\infty$	[m/s]	Rychlost nerušeného proudu vzduchu
$V_1$	[m/s]	Rychlost v rovině vrtule
$V_2$	[m/s]	Rychlost v rovině za vrtulí
$\dot{m}$	[kg/s]	Hmotnostní tok
$A$	[m <sup>2</sup> ]	Plocha aktuátorového disku
$\Delta p$	[Pa]	Rozdíl tlaků
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Hustota vzduchu
$T$	[N]	Tah vrtule
$P$	[W]	Výkon
$v$	[m/s]	Axiální indukovaná rychlost

$u$	[m/s]	Tangenciální indukovaná rychlost
$L$	[N]	Vztlak
$D$	[N]	Odpor
$M$	[Nm]	Kroutící moment
$B$	[-]	Počet listů vrtule
$W$	[m/s]	Celková rychlost
$c_D$	[-]	Součinitel odporu
$c_L$	[-]	Součinitel vztlaku
$U$	[m/s]	Tangenciální rychlost
$F$	[-]	Prandtlůva ztrátová funkce
$f$	[-]	Exponent Prandtlovy ztrátové funkce
$n$	[ot/min]	Otáčky vrtule
$x$	[-]	Inverzní rychlostní poměr
$G$	[-]	Goldsteinova funkce
$\zeta$	[-]	Bezrozměrná zdánlivá rychlost
$Re$	[-]	Reynoldsovo číslo
$I_1, I_2, J_1, J_2$	[-]	integrály zatížení vrtulového listu
$F_r$	[N]	Odstředivá síla
$S$	[m <sup>2</sup> ]	Plocha průřezu listu
$\sigma_\omega$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Tahové napětí
$M_o$	[Nm]	Ohybový moment
$\mu$	[-]	Poměr součinitele vztlaku a odporu
$\Gamma$	[m <sup>2</sup> /s]	Cirkulace
$\bar{\Gamma}$	[-]	Bezrozměrná cirkulace

## Obsah

1	Úvod .....	13
2	Úvod do aerodynamiky vrtulí.....	14
2.1	Základní vztahy a pojmy .....	14
2.1.1	Rychlostní trojúhelník.....	14
2.2	Geometrické charakteristiky.....	15
2.2.1	Průměr vrtule .....	15
2.2.2	Tětiva listu.....	15
2.2.3	Tloušťka listu.....	16
2.2.4	Úhel nastavení profilu listu.....	16
2.3	Výkonnostní charakteristiky vrtulí .....	17
2.4	Letové režimy vrtulí .....	18
3	Aerodynamické teorie vrtulí .....	20
3.1	Hybnostní teorie.....	20
3.1.1	Obecná hybnostní teorie .....	22
3.2	Teorie izolovaného elementu listu (Blade element theory- BET).....	23
3.2.1	Indukované rychlosti .....	25
3.2.2	Blade element momentum theory (BEMT theory) .....	26
3.2.3	Postup iterativního řešení .....	26
3.2.4	Prandtlůva ztrátová funkce.....	27
3.3	Vírová teorie .....	28
3.3.1	Silové účinky na elementu listu .....	28
3.3.2	Bezrozměrné veličiny.....	30
3.3.3	Žukovského vírová teorie.....	31
3.3.4	Základní vztah pro stanovení cirkulace .....	32
3.3.5	Postup iterativního řešení .....	34
4	Popis návrhových metod vrtulí .....	36
4.1	Návrh vrtule podle E. E. Larrabee.....	36
4.1.1	Určení geometrických parametrů listu.....	39
4.1.2	Postup návrhu.....	40
4.2	Návrh vrtule podle Adkinse a Liebecka .....	41
4.3	Návrh vrtule podle Goldsteina .....	42
5	Pevnostní výpočet vrtule.....	43

5.1	Zatížení vrtule .....	43
5.2	Pevnostní výpočet listu.....	44
5.3	Zatížení listu od hmotových sil .....	45
5.3.1	Tahové složka odstředivých sil.....	45
5.3.2	Vratný moment od odstředivých sil .....	46
5.3.3	Konstrukční vyklonění těžištní osy.....	47
5.3.4	Kroučící moment od odstředivých sil.....	48
5.4	Zatížení listu od aerodynamických sil .....	50
5.4.1	Kvazistatické zatížení od aerodynamických sil.....	50
5.4.2	Krutové zatížení od aerodynamických sil .....	51
5.4.3	Výpočet momentů od aerodynamických sil .....	53
6	Aerodynamický návrh vrtule pro zvolené parametry .....	56
6.1	Charakteristiky vybraného letounu .....	56
6.1.1	Parametry vrtule.....	57
6.1.2	Volba pohonné jednotky .....	57
6.2	Charakteristiky vybraného profilu .....	58
6.3	Návrh geometrie listu .....	59
6.3.1	Geometrie navrženého listu .....	62
6.4	Stanovení výkonnostních charakteristik.....	63
6.4.1	Kontrola výpočetních metod .....	63
6.4.2	Charakteristiky navržené vrtule.....	66
6.5	Pevnostní kontrola vrtule .....	67
6.5.1	Zatížení vrtule .....	67
7	Závěr.....	70

# 1 Úvod

Cílem této diplomové práce je popsat a odvodit vztahy pro několik analytických metod sloužících k návrhu leteckých vrtulí. Z těchto metod má být jedna vybrána a využita k návrhu vrtule s minimální indukovanou ztrátou. Jedná se o stanovení geometrických charakteristik jako je hloubka profilu a úhel nastavení podél listu pro pevnou vrtuli daných vstupními parametry a režimem letu, při kterém vrtule dosahuje maximální účinnosti. Pro definování základních parametrů pro výpočet byl zvolen letoun, jehož geometrické a výkonnostní charakteristiky byly stanoveny v předmětu Mechanika letu.

Značná část práce se věnuje vysvětlení základních principů fungování leteckých vrtulí. Cílem práce je také provést pevnostní výpočet navržené vrtule. Jelikož obecné stanovení všech zatížení je dosti náročné a obnáší jak výpočet kvazistatických, tak dynamických jevů, je v práci popsán zjednodušený analytický výpočet pro stanovení sil a momentů působících na vrtuli.

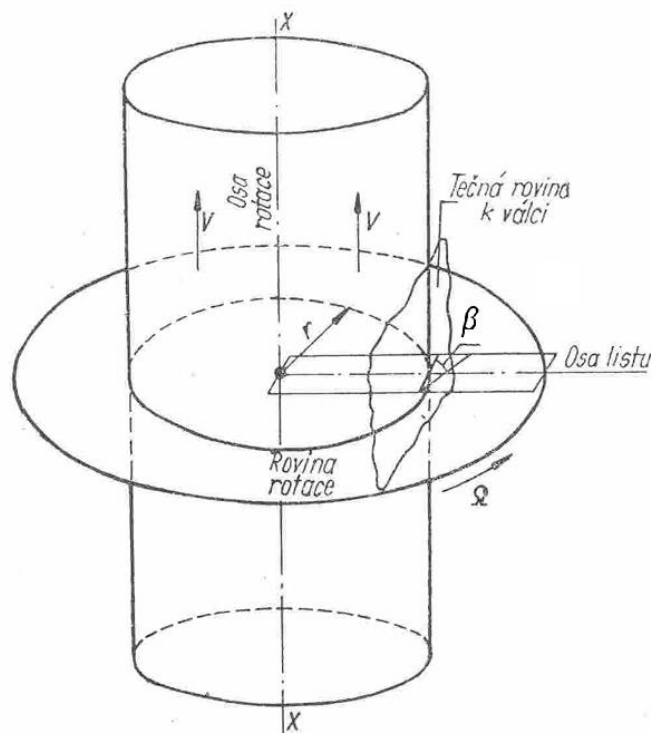
V práci také bude popsáno několik aerodynamických teorií, v rámci kterých jsou odvozeny vztahy pro výpočet výkonnostních charakteristik. Ty jsou třeba pro stanovení výkonů letounu a je možné je využít při pevnostním výpočtu vrtule.

Výpočty geometrických a výkonnostních charakteristik a zatížení vrtulového listu byly provedeny v prostředí programu Matlab.

## 2 Úvod do aerodynamiky vrtulí

### 2.1 Základní vztahy a pojmy

Vrtule slouží v letectví k přeměně energie z motoru na práci při posuvném pohybu. Energie je přiváděna v podobě výkonu na rotující hřídeli. Vrtule převádí tento rotační pohyb na pohyb posuvný. Jinými slovy převádí kroutící moment na hřídeli na tah vrtule. Fyzikální princip vrtule je obdobný jako u křídla, ale v tomto případě je výsledný pohyb složen z pohybu posuvného a rotačního. Princip vrtule je možné ukázat na zjednodušeném případě. List vrtule je v tomto případě zjednodušen a představuje protáhlý obdélník. Kratší stranu obdélníka protíná osa  $x$ . List se otáčí úhlovou frekvencí  $\Omega$  kolem této osy viz. **Obr. 1**. Rovina kolmá na osu rotace představuje rovinu otáčení. S ní svírá rovina listu úhel  $\beta$ . Pro lepší pochopení protněme list válcovou plochou o poloměru  $r$  a s osou totožnou s osou rotace. Následně nahradíme válcovou plochu na poloměru  $r$  rovinou, která je k ní kolmá. Tím získáme řez listu, v tomto případě úsečku. [3]

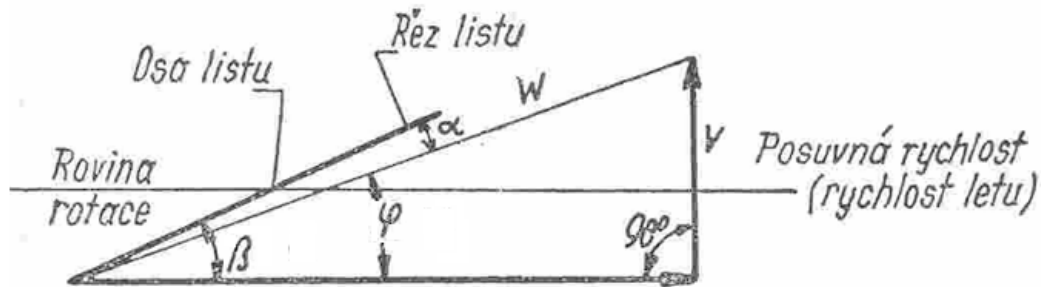


Obr. 1 Vznik profilu listu, převzato z: [3]

#### 2.1.1 Rychlostní trojúhelník

Nyní je možné stanovit rychlosti a úhel, pod kterým budou na vrtulový řez nabíhat. Jak už bylo zmíněno, pohyb vrtule se skládá z pohybu rotačního a posuvného. Bude tedy zapotřebí tyto pohyby složit. Na **Obr. 2** jsou znázorněny rychlostní poměry na řezu listu. První složkou je posuvná rychlost  $V$ . Ta je dána rychlostí letu a je kolmá na rovinu rotace. Druhou složkou je obvodová rychlost  $\Omega r$ , která roste přímo úměrně poloměru, tedy vzdálenosti řezu od osy otáčení. Součtem těchto rychlostí je relativní rychlost  $W$ . Tato rychlost svírá s rovinou listu úhel náběhu  $\alpha$ . Jinými slovy proud vzduchu nabíhá na řez listu po úhlem  $\alpha$ . Tvar listu byl volen jako

obdélníkový, to znamená že pokud by byl vybrány řezy na různých poloměrech, byl by úhel nastavení konstantní. [3]



Obr. 2 Rychlostní trojúhelní řezu listu, převzato a upraveno z: [3]

Jelikož však obvodová rychlost daného řezu roste se vzdáleností od osy rotace, bude se úhel  $\alpha$  se vzdáleností od osy zvětšovat. Posledním úhlem v trojúhelníku je úhel nabíhajícího vzduchu  $\varphi$ , který svírá vektor rychlosti  $W$  s rovinou rotace. Ten se naopak se vzdáleností řezu od osy zmenšuje. Je tedy možné zapsat  $\alpha = \beta - \varphi$ . Obecně platí, že vztaková plocha s rostoucím úhlem generuje větší vztlak. Aby však bylo dosaženo co největší účinnosti, je zapotřebí dosáhnout co největšího poměru vztlaku a odporu  $c_L/c_D$ . V realitě není řezem úsečka, ale aerodynamický profil. Pro něj se dá dohledat z poláry profilu optimální poměr  $c_L/c_D$  a tomu odpovídající optimální úhel náběhu. Pro maximální účinnost je zapotřebí, aby pro všechny řezy byl úhel  $\alpha$  stejný. Zde však již obdélníkový list neobstojí. Je zapotřebí, aby se úhel nastavení podél listu měnil, a to tak, že se bude od největší hodnoty u osy zmenšovat s rostoucím poloměrem. A to takovým způsobem, aby po délce listu bylo dosaženo optimálního úhlu náběhu. [3]

## 2.2 Geometrické charakteristiky

V této kapitole budou definovány základní geometrické charakteristiky vrtule a aerodynamického profilu. Patří mezi ně průměr vrtule, šířka listů, tloušťka listů a zkroucení listů.

### 2.2.1 Průměr vrtule

Průměrem vrtule  $D$  je průměr kružnice, která opisuje konce listů vrtule. Je to základní a asi nejdůležitější parametr vrtule. Definuje její rozměry a zároveň silně ovlivňuje její výkony. Volí se z aerodynamických požadavků. Častým omezením jsou přípustné rozměry dané osazením na letadle. Konce listů musí být při pohybu na zemi v dostatečné vzdálenosti od povrchu. Ta je dána výškou podvozku a uspořádáním letounu. [3]

### 2.2.2 Tětiva listu

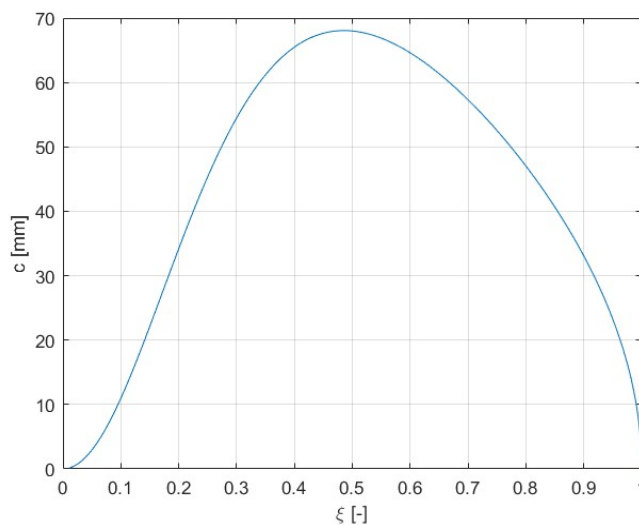
Jde o analogii hloubky profilu. V této práci je značena písmenem  $c$ . V některých literaturách bývá také značena písmenem  $b$ . Většina vrtulí není obdélníková, a z tohoto důvodu je délka tětivy podél listu proměnná. Největší hodnoty dosahuje okolo 50 % poloměru. Příklad

průběhu je na **obr. 3**. Ve výpočtech se často využívá poměrné hodnoty. Ta je vztažena na průměr vrtule. [3]

$$\bar{c} = \frac{c}{D}. \quad (2.1)$$

Symbol  $\xi$  v diagramu značí poměrný poloměr. Je definován jako poloměr místního řezu vztažený na poloměr vrtule. Může být také značen  $\bar{r}$ .

$$\xi = \frac{r}{R}. \quad (2.2)$$



Obr. 3 Průběh hloubky profilu v závislosti na poměrném poloměru

### 2.2.3 Tloušťka listu

Tloušťka se značí písmenem  $t$ . Jedná se o maximální tloušťku profilu na daném poloměru. Její poměrná hodnota se značí  $\bar{t}$  a je definována jako poměr tloušťky a hloubky profilu na daném poloměru. [3]

$$\bar{t} = \frac{t}{c}. \quad (2.3)$$

### 2.2.4 Úhel nastavení profilu listu

Značí se  $\beta$  a jedná se o úhel, který svírá tětiva profilu na daném poloměru s rovinou rotace. Tento úhel je podél listu proměnný a zmenšuje se od maximální hodnoty u osy rotace ke konci listu. Pro snadnější popis je definován tzv. Úhel nastavení listu, kterým se myslí v technické praxi úhel  $\beta$  na poměrném poloměru  $\xi = 0,75$ .



## 2.3 Výkonnostní charakteristiky vrtulí

Při návrhu a porovnávání vrtulí je důležité znát jejich výkonnostní charakteristiky. Nejdůležitějšími parametry jsou tah vrtule  $T$ , výkon  $P$  a účinnost vrtule  $\eta$ . Ty je možné společně s geometrickými charakteristikami vrtule vypočítat pomocí různě složitých analytických metod, nebo je možné využít některou z numerických metod CFD. Další možností je pak experimentální měření, které může být náročné na čas a finance. [2]

Jako jsou u vztlaku a odporu definovány součinitele vztlaku  $c_l$  a odporu  $c_D$ , jsou u vrtulí definovány součinitele pro výkonnostní parametry. V tomto případě jsou vztaheny na průměr vrtule  $D$  a otáčky vrtule  $n$  v otáčkách za sekundu. Je možné je odvodit pomocí rozměrové analýzy. Jsou definovány následovně.

Součinitel tahu:

$$c_T = \frac{T}{\rho \cdot n^2 \cdot D^4} \quad (2.4)$$

Součinitel výkonu:

$$c_P = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot D^5} \quad (2.5)$$

Součinitel kroutícího momentu:

$$c_M = \frac{M}{\rho \cdot n^2 \cdot D^5} \quad (2.6)$$

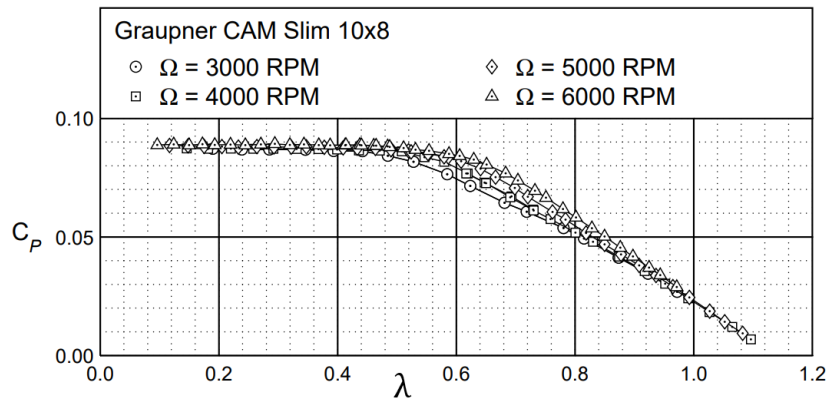
Vlastnost prostředí je definována hustotou  $\rho$ . Tyto součinitele bývají počítány v závislosti na tzv. rychlostním poměru, který je definován následovně:

$$\lambda = \frac{V}{D \cdot n} \quad (2.7)$$

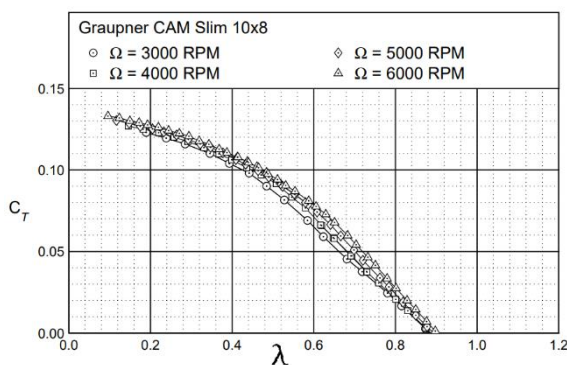
Vyjadřuje tedy poměr rychlosti letu a otáček vrtule. Pomocí těchto součinitelů je možné vyhodnotit účinnost vrtule, a to následovně:

$$\eta = \lambda \cdot \frac{c_T}{c_P} \quad (2.8)$$

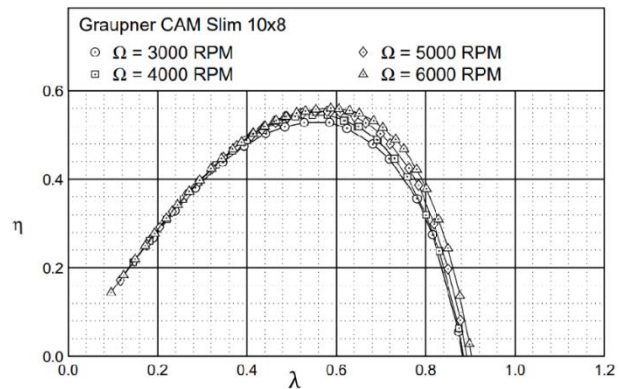
Příklad výkonnostních charakteristik je zobrazen na **obr 4, 5 a 6**. Jsou zde data experimentálně změřená na modelářské vrtuli Graupner CAM Slim 10×8.



Obr. 6 Závislost  $c_p$  na  $\lambda$ , převzato z: [7]



Obr. 4 Závislost  $c_T$  na  $\lambda$ , převzato z: [7]



Obr. 5 Závislost účinnosti  $\eta$  na  $\lambda$ , převzato z: [7]

## 2.4 Letové režimy vrtulí

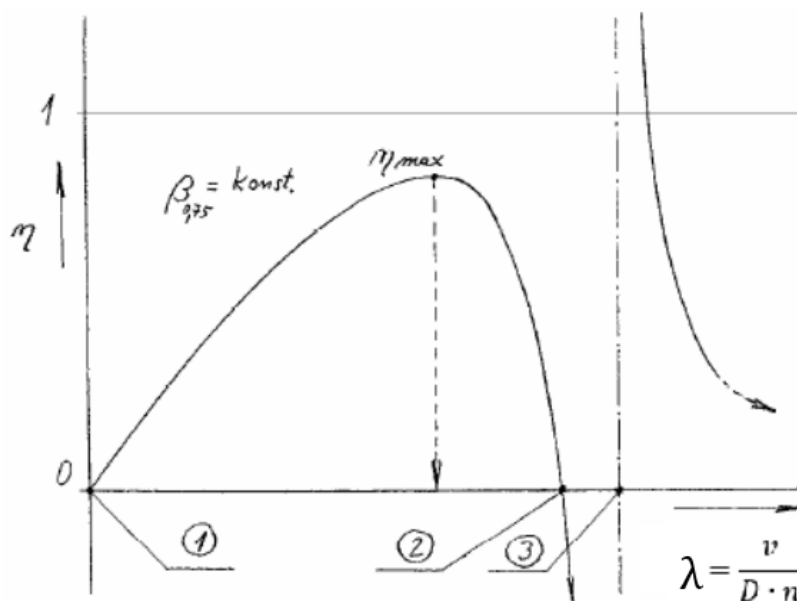
V této kapitole budou popsány režimy vrtulí v závislosti na rychlosti letu. Budou popsány pro pevnou vrtuli, což je vrtule s pevným úhlem nastavení. Z vektorového trojúhelníku rychlostí na profilu je patrné, že celková rychlost nabíhajícího vzduchu  $W$  je dána vektorovým součtem obvodové, dopředné a indukované rychlosti. Ta svírá s tětvou profilu úhel náběhu  $\alpha$ . Při zvyšování rychlosti letu, a tedy i rychlostního poměru  $\lambda$ , se bude postupně zmenšovat úhel náběhu a s ním i tah od daného profilu. Při dalším zvětšování může tedy dojít k tomu, že úhel  $\alpha$  bude záporný a vrtule začne generovat záporný tah. Vrtule se přitom navrhuje tak, aby měla co největší účinnost. K tomu je zapotřebí, aby celková rychlost  $W$  svírala s tětvou profilu optimální úhel, který odpovídá největšímu poměru vztlaku a odporu. Pevná vrtule tuto podmínku splňuje pouze při jediném letovém režimu. Většinou při cestovním režimu, kterému odpovídá konkrétní rychlost a otáčky. Při ostatních režimech bude účinnost vrtule menší. Tento problém z velké části vyřešila stavitelná vrtule. Její stavěcí mechanismus umožňuje změnu úhlu nastavení. Díky tomu je možné kontrolovat i úhel náběhu a dosahovat dostatečné účinnosti pro různé režimy letu. [8] [3]

Závislost propulzní účinnosti na rychlostním poměru pro pevnou vrtuli je zobrazen na **obr. (7)**. Na něm lze popsat několik režimů, ve kterých může vrtule pracovat. Základní vztah pro propulzní účinnost vypadá následovně:

$$\eta = \frac{T \cdot v}{M \cdot \Omega} \quad (2.9)$$

Letové režimy:

1. Nulová rychlost letu: Tento režim je v bodě 1 diagramu. Vrtule se v tomto režimu pohybuje nulovou rychlost. Je generován kladný tah a vrtule spotřebovává výkon ( $c_T > 0, c_P > 0$ ), ale není konána žádná práce.
2. Vrtulové režimy: Toto jsou režimy, ve kterých vrtule běžně pracuje. V diagramu se nachází mezi body 1 a 2. Je generován kladný tah a vrtule spotřebovává výkon ( $c_T > 0, c_P > 0$ ). Je konána práce.
3. Režim nulového tahu: V diagramu se nachází v bodě 2. Jde o režim, kdy vrtule negeneruje žádný tah, ale spotřebovává výkon ( $c_T = 0, c_P > 0$ ).
4. Režim reverzního tahu: Za režimem nulového nastává situace, kdy už je úhel náběhu záporný. Generuje tedy záporný tah a spotřebovává výkon ( $c_T < 0, c_P > 0$ ). Je možné využít tohoto režimu při přistání ke zkrácení dojezdu při přistání.
5. Režim autorotace: V diagramu se nachází v bodě 3. V tomto režimu nespotebovává výkon. ( $c_T < 0, c_P = 0$ ). Lze využít při nouzovém režimu při vysazení motorů. [8]
6. Mlýnkový režim: V tomto režimu je tah záporný. Vrtule brzdí, ale zároveň dodává výkon. ( $c_T < 0, c_P < 0$ ). Tohoto režimu je využíváno u větrných elektráren. [8]



Obr. 7 Režimy vrtule v závislosti na rychlostním poměru a účinnosti, převzato z: [8]

## 3 Aerodynamické teorie vrtulí

### 3.1 Hybnostní teorie

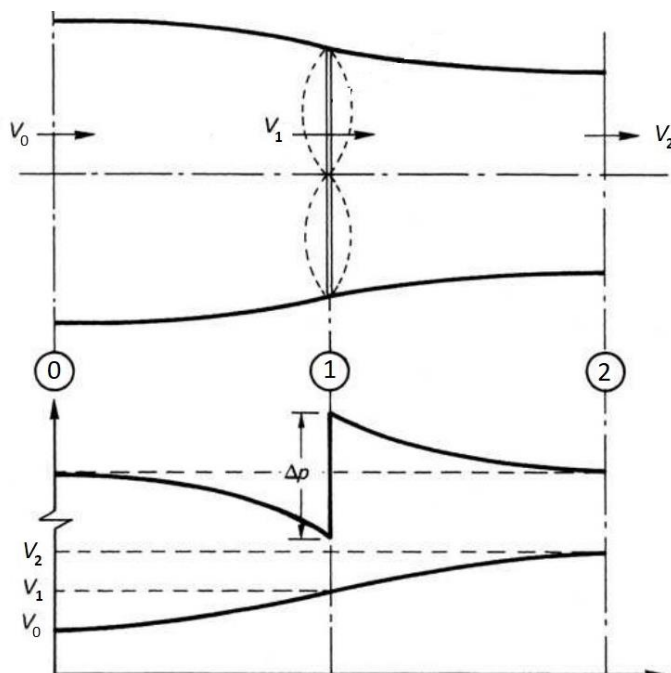
Tato teorie je také známa jako teorie ideálního propulzoru. Tuto teorii původně navrhl William George Rankine (1865), a to pro zkoumání axiálního proudění kapaliny v okolí lodního šroubu. Jak se ale ukázalo, platí zákonitosti vyplývající z ní i pro vrtuli. Nezabývá se vazbou mezi proudovým polem a geometrií vrtulového listu, a z tohoto důvodu nelze tento model využít pro návrh vrtule. Vyplývají z ní ale závislosti výkonu a tahu vrtule na rychlosti nabíhajícího proudu vzduchu. Tyto závislosti byly následně potvrzeny sofistikovanějšími metodami a experimenty. V praxi je možné tuto teorii využít k dimenzování motoru pohánějícím vrtuli o daném tahu. [2]

Tuto teorii založil Rankine na následujících předpokladech:

1. Vrtule pracuje v ideální tekutině, a proto nedochází ke ztrátám v důsledku tření.
2. Vrtule je nahrazena diskem o nekonečně malé tloušťce a o průměru, který odpovídá průměru vrtule.
3. Vrtule vytváří tah, aniž by způsobila rotaci proudu vzduchu v úplavu za vrtulí.

Druhý předpoklad odpovídá vrtuli o nekonečném množství listů. Veškerá energie z motoru je přivedena v rovině disku do proudu vzduchu, což způsobí nespojitý nárůst tlaku. Z třetího předpokladu pak vyplývá, že tato teorie neuvažuje rotaci proudu vzduchu, která reálně nastává. To má za následek, že výsledné výkony reálné vrtule budou horší než u odpovídajícímu ideálnímu propulzoru.

Na **obr. 8** je zobrazeno proudové pole v okolí vrtule nahrazené ideálním propulzorem. Nabíhající vzduch proudí z roviny 0 do roviny 3, kde rovina 0 je v dostatečné vzdálenosti před



Obr. 8 Průběh rychlosti a tlaku v okolí ideálního propulzoru, převzato z: [2]

vrtulí a rychlost  $V_0$  odpovídá nerozrušenému proudu vzduchu. Tlak  $p_0$  odpovídá tlaku atmosférickému ( $p_0 = p_a$ ). Rovina 2 je v dostatečné vzdálenosti za vrtulí a odpovídá jí rychlost  $V_2 = V_0 + v_2$  a tlak  $p_2$ , který se rovná tlaku atmosférickému. Rovina 1 odpovídá rovině vrtule. Ta je dále rozdělena na dvě poloviny (zleva od propulzoru 11, zprava od propulzoru 12). Pro obě poloviny platí stejná rychlost  $V_1 = V_0 + v_1$ , kde  $v_1$  je indukovaná rychlost v rovině vrtule. Statické tlaky pro obě poloviny pak  $p_{11}$  a  $p_{12}$ . [2] [3] [4]

Ze změny hybnosti můžeme určit tah ideálního propulzoru jako:

$$T = \dot{m}(V_2 - V_0). \quad (3.1)$$

Kde  $\dot{m}$  je hmotnostní tok, který lze určit pomocí průřezu v rovině vrtule jako:

$$\dot{m} = \rho V_1 A. \quad (3.2)$$

Tah lze také vyjádřit z rozdílu tlaků na jedné a druhé straně vrtulového disku:

$$T = A(p_{12} - p_{11}). \quad (3.3)$$

Porovnáním rovnic (3.1) a (3.3) lze vyjádřit rozdíl tlaků:

$$\Delta p = p_{12} - p_{11} = \rho V_1 (V_2 - V_0). \quad (3.4)$$

Ze změny kinetické energie lze vyjádřit výkon potřebný pro urychlení proudu vzduchu:

$$P = \frac{dEk}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} (V_2^2 - V_0^2). \quad (3.5)$$

Rozdíl tlaků před a za propulzorem lze také vyjádřit pomocí Bernoulliho rovnice.

Před vrtulí platí:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = p_{11} + \frac{1}{2} \rho V_1^2. \quad (3.6)$$

Za vrtulí platí:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = p_{12} + \frac{1}{2} \rho V_1^2. \quad (3.7)$$

Odečtením rovnic (3.6) a (3.7) je vyjádřen rozdíl tlaků jako:

$$p_{12} - p_{11} = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_0^2). \quad (3.8)$$

Porovnáním rovnic (3.4) a (3.8) lze vyjádřit vzájemný vztah rychlostí v proudovém poli

Rychlost vzduchu v rovině vrtule:

$$V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2}. \quad (3.9)$$

Nebo také pro indukované rychlosti:

$$v_1 = \frac{v_2}{2}. \quad (3.10)$$

Z tohoto vztahu je možné vyvodit závěr, že indukovaná rychlost v rovině vrtule je poloviční oproti celkové indukované rychlosti v proudovém poli. Účinnost vrtule lze vyjádřit jako:

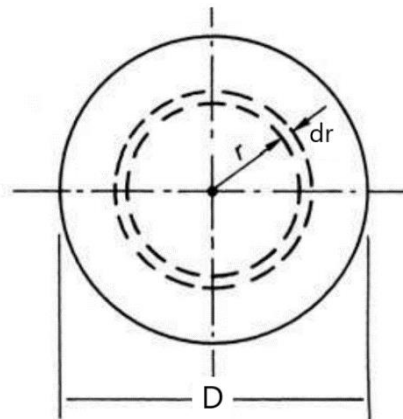
$$\eta = \frac{TV_1}{P} = \frac{2}{\frac{V_2}{V_0} + 1}. \quad (3.11)$$

Pomocí  $v_2$  lze vyjádřit jako:

$$\eta = \frac{V_0}{V_0 + \frac{v_2}{2}}. \quad (3.12)$$

### 3.1.1 Obecná hybnostní teorie

R.E. Froude navázal v roce 1887 na hybnostní teorii od George Rankine. Ve své práci odstranil třetí předpoklad a umožnil tak rotaci proudu vzduchu v úplavu za vrtulí. Touto úpravou vznikl realističtější model pro analýzu vrtule. Tato teorie zohledňuje obvodovou rychlost vrtule a indukované tangenciální rychlosti v proudu vzduchu za vrtulí. Jelikož se však zvyšuje obvodová rychlost přímo úměrně se vzdáleností od osy vrtule, je definována elementární síla  $dT$  a kroutící moment  $dM$ . Ty jsou generovány na mezikruží o tloušťce  $dr$  na poloměru  $r$ , jak je zobrazeno na **obr 9**. [5] [6]



Obr. 9 Rovina ideálního propulzoru, převzato z: [2]

Obdobně jako u teorie ideálního propulzoru musí platit, že se změna hybnosti podél proudnice mezi rovinou daleko před vrtulí a rovinou v dostatečné vzdálenosti za vrtulí rovná tahu vrtule.

$$dT = \dot{m}(V_2 - V_\infty). \quad (3.13)$$

Hmotnostní tok mezikružím je dán:

$$\dot{m} = \rho \cdot V \cdot dA = \dot{m} = \rho V \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr. \quad (3.14)$$

Kde  $V$  je axiální rychlost v rovině vrtule.

Odtud platí:

$$dT = \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot V \cdot (V_2 - V_\infty). \quad (3.15)$$

Pro rychlost  $V$  platí, že odpovídá průměru rychlostí  $V_3$  a  $V_\infty$ . Úpravami lze pro rychlost  $V_3$  odvodit následující:

$$V_2 = V_\infty \cdot (1 + 2a). \quad (3.16)$$

Kde  $a$  je osový indukční faktor. Dosazením do rovnice (2.3) a po úpravách je možné odvodit rovnici elementárního tahu.

$$dT = 4\pi \cdot r \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot (1 + a)a \cdot dr. \quad (3.17)$$

Kroutící moment lze odvodit obdobným způsobem. Pro kroutící moment platí:

$$dM = 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot V_\infty \cdot (1 + a)b \cdot \Omega \cdot dr. \quad (3.18)$$

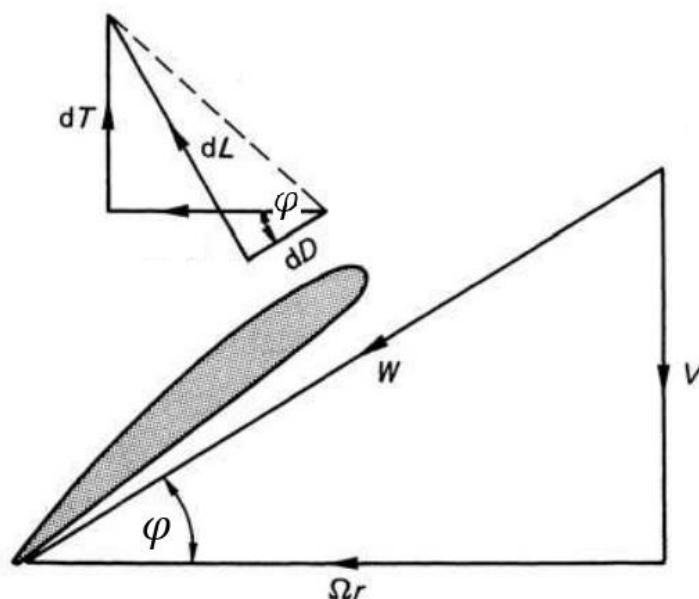
Kde  $b$  je tangenciální indukční faktor.

### 3.2 Teorie izolovaného elementu listu (Blade element theory- BET)

Tuto poměrně jednoduchou metodu pro určení výkonů vrtule navrhl v roce 1878 William Froude. Stejně jako hybnostní teorie byla navržena pro lopatky lodních šroubů. Na rozdíl od ní ale tento model zohledňuje geometrii vrtulového listu. Ve své původní podobě teorie nezohledňovala indukované rychlosti způsobené vrtulí. Zároveň tato teorie nedává do vztahu geometrii vrtule s indukovanými rychlostmi. Z tohoto důvodu nelze použít pro samotný návrh a je zapotřebí ji kombinovat s dalšími metodami. [2] [5]

Principem teorie izolovaného elementu listu je rozdělení vrtulového listu na nekonečný počet elementů nebo také řezů po délce listu. Každý z těchto elementů je možné považovat za aerodynamický profil stejně jako u nosné plochy křídla. Tyto elementy se navzájem nijak neovlivňují a lze tedy předpokládat, že na ně působí 2D aerodynamické síly, které jsou závislé na úhlu náběhu. Na **obr. 10** je obecný element na poloměru  $r$  a o tloušťce  $dr$ . Jsou zde zobrazeny působící aerodynamické síly a rychlostní trojúhelník. Z něj je patrné, že výsledný vektor zdánlivé rychlosti  $W$  se skládá z dopředné rychlosti  $V$ , jejíž vektor je rovnoběžný s osou vrtule a obvodové rychlosti  $U$ . Tyto vektory spolu svírají úhel  $\varphi$ . Výsledná rychlost je dána vztahem:

$$W = \sqrt{V^2 + U^2}. \quad (3.19)$$



Obr. 10 Teorie izolovaného elementu listu, převzato a upraveno z: [2]

Elementární tah a obvodovou sílu profilu lze vypočítat pomocí trigonometrických funkcí a vektorového diagramu následovně:

$$dT = dL \cdot \cos \varphi - dD \cdot \sin \varphi, \quad (3.20)$$

$$dQ = dL \cdot \sin \varphi + dD \cdot \cos \varphi. \quad (3.21)$$

Elementární vztlakovou sílu a čelní odpor lze zapsat takto:

$$dL = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c \cdot dr, \quad (3.22)$$

$$dD = \frac{1}{2} \cdot c_D \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c \cdot dr. \quad (3.23)$$

Kde  $c_l$  a  $c_D$  jsou součinitele vztlaku a odporu, které jsou závislé na úhlu náběhu a geometrii profilu. Ty mohou být po délce listu konstantní, nebo se dle volby profilu mohou i měnit.  $c$  je hloubka profilu.

Pro výkonové charakteristiky vrtule je podstatný kroutící moment, který je dán součinem osově síly  $dQ$  a poloměrem  $r$ , na kterém se element nachází. Odtud:

$$dM = (dL \cdot \sin \varphi + dD \cdot \cos \varphi) \cdot r dr. \quad (3.24)$$

Po dosazení do rovnic (2) a (6) je možné zapsat vztah pro elementární tah a kroutící moment jako:

$$dT = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c (c_l \cdot \cos \varphi - c_D \cdot \sin \varphi) dr, \quad (3.25)$$



$$dM = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c(c_l \cdot \sin \varphi + c_D \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot dr. \quad (3.26)$$

Pokud je počet listů vrtule  $B$ , pak lze celkový tah a kroutící moment vrtule vypočítat integrací rovnic (3.25) a (3.26) po délce listu jako:

$$T = B \int_{r_0}^R \left[ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c(c_l \cdot \cos \varphi - c_D \cdot \sin \varphi) \right] dr, \quad (3.27)$$

$$M = B \int_{r_0}^R \left[ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c(dL \cdot \sin \varphi + dD \cdot \cos \varphi) \cdot r \right] dr. \quad (3.28)$$

Kde  $r_0$  je poloměr vrtulového náboje.

Účinnost vrtule lze následně vyjádřit jako:

$$\eta = \frac{T \cdot V_\infty}{M \cdot \Omega}, \quad (3.29)$$

Kde  $V_\infty$  je rychlost letu.

### 3.2.1 Indukované rychlosti

Složitou částí aplikace této teorie je určení velikosti složek celkové rychlost  $V$  a  $U$ . Složka  $V$  je přibližně rovna dopředné rychlosti letadla  $V_\infty$ , ale je zvýšena o indukovanou axiální složku, způsobenou vrtulí. Složka  $U$  je přibližně rovna obvodové rychlosti ( $\Omega r$ ), ale je mírně snížena v důsledku vířivé povahy proudění vyvolaného vrtulí. Pro výpočet složek celkové rychlost  $V$  a  $U$  je zapotřebí aplikovat rovnováhu axiální i úhlové hybnosti, a to pro předpověď indukovaných axiálních a úhlových rychlostí  $v$  a  $u$ . Tyto indukované rychlosti je také možno definovat jako indukční faktory, které zvyšují nebo naopak snižují složky rychlosti. [5]

Indukované axiální a úhlové rychlosti lze zapsat následovně:

$$v = a \cdot V_\infty, \quad u = b \cdot \Omega r. \quad (3.30)$$

Kde  $a$  je osový indukční faktor a  $b$  je tangenciální indukční faktor.

Složky rychlostí se pak dají zapsat následovně:

$$V = V_\infty + a \cdot V_\infty = V_\infty \cdot (1 + a), \quad (3.31)$$

$$U = \Omega r - b \cdot \Omega r = \Omega r \cdot (1 - b). \quad (3.32)$$

Dosazením rovnic (3.31) a (3.32) do rovnice (3.19) je pak možné vyjádřit výslednou rychlost nabíhajícího proudu vzduchu jako:

$$W = \sqrt{V^2 + U^2} = \sqrt{[V_\infty \cdot (1 + a)]^2 + [\Omega r \cdot (1 - b)]^2}. \quad (3.33)$$

Úhel  $\varphi$  lze zapsat jako

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{V}{U} \right). \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Blade element momentum theory (BEMT theory)

Tato teorie spojuje výsledky obecné hybnostní teorie a teorie izolovaného elementu listu. Tyto teorie kombinuje. Umožňuje tak vypočítat výkonové charakteristiky vrtule, jejíž geometrické charakteristiky, jako průměr, profilové charakteristiky, rozložení hloubky a zkroucení vrtule jsou známy. Tato analýza je založena na tom, že elementární tah  $dT$  a kroučící moment  $dM$  odvozené z obecné hybnostní teorie a teorie izolovaného elementu listu jsou ekvivalentní. [5]

Pro teorie izolovaného elementu listu platí rovnice (3.25) a (3.26):

$$dT = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c(c_l \cdot \cos \varphi - c_D \cdot \sin \varphi) dr,$$

$$dM = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c(c_l \cdot \sin \varphi + c_D \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot dr,$$

Pomocí obecné hybnostní teorie byly odvozeny rovnice (3.17) a (3.18):

$$dT = 4\pi \cdot r \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot (1 + a)a \cdot dr,$$

$$dM = 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot V_\infty \cdot (1 + a)b \cdot \Omega \cdot dr.$$

Celková rychlost  $W$  lze vyjádřit pomocí indukčního faktoru a úhlu  $\varphi$  jako:

$$W = V_\infty \cdot \frac{(1 + a)}{\sin \varphi}. \quad (3.35)$$

### 3.2.3 Postup iterativního řešení

Rovnice pro elementární tah a moment tvoří soustavu rovnic. Ty jsou doplněny o vztah pro výpočet lokální rychlosti:

$$W = \sqrt{V^2 + U^2} = \sqrt{[V_\infty \cdot (1 + a)]^2 + [\Omega r \cdot (1 - b)]^2}. \quad (3.36)$$

a lokální úhel náběhu:

$$\alpha = \beta - \varphi = \beta - \tan^{-1} \left( \frac{V}{U} \right). \quad (3.37)$$

Jelikož rovnice (3.17) a (3.18) stále obsahují proměnné pro elementární tah a moment, nemohou být proto použity přímo pro výpočet indukčních faktorů. Nelineární soustava rovnic obsahuje hledané neznámé  $dT$ ,  $dM$ ,  $a$ ,  $b$ . Pro výpočet je možné iterativní řešení. Pro výpočet

jsou velmi důležitá profilová data, a to hlavně závislost součinitele vztlaku a odporu na úhlu náběhu.

Pro tuto výpočetní metodu je nejprve stanoven prvotní odhad pro indukční faktory  $a$ ,  $b$ . Následně jsou dosazeny do rovnic pro výpočet lokální rychlosti a úhlu náběhu elementu. Následně je pomocí rovnic (3.25) a (3.26), a s dosazením profilových součinitelů  $c_L$  a  $c_D$  vypočítán první odhad  $dT$  a  $dM$ . Pomocí těchto hodnot může být provedena první iterace indukčních faktorů dosazením do rovnic (3.17) a (3.18). [5] [6]

Porovnáním rovnic (3.17) a (3.25) lze odvodit axiální indukční faktor jako:

$$a = \left( \frac{4 \cdot 2\pi r \cdot \sin^2 \varphi}{B \cdot c \cdot (c_L \cdot \cos \varphi - c_D \cdot \sin \varphi)} - 1 \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

Porovnáním rovnic (3.18) a (3.26) lze odvodit tangenciální indukční faktor jako:

$$b = \left( \frac{4 \cdot 2\pi r \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{B \cdot c \cdot (c_L \cdot \sin \varphi + c_D \cdot \cos \varphi)} + 1 \right)^{-1}. \quad (3.39)$$

Tento iterační postup je opakován, dokud hodnoty indukčních faktorů nedokonvergují do požadovaných mezí. Důležité je také poznamenat, že konvergence nelineárních soustav rovnic není zaručena. Po finální iteraci a získání hodnot indukčních faktorů, je vypočten elementární tah a kroutící moment pomocí rovnic (3.25) a (3.26). Celkový tah a moment vrtule, případně jejich součinitel jsou získány numerickou integrací po délce listu.

### 3.2.4 Prandtlova ztrátová funkce

Poznatky zjištěné z BEMT (Blade Element Momentum Theory) platí za předpokladu vrtule s nekonečným počtem listů. Je tak zanedbán vliv prostorového charakteru proudění v úplavu na indukované rychlosti. Tomu bylo předejito tím, že byla do teorie zavedena tzv. Prandtlova ztrátová funkce. Prandtlova ztrátová funkce je definována následovně: [18]

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^{-1}(e^{-f}). \quad (3.40)$$

Kde exponent  $f$  je definován následovně:

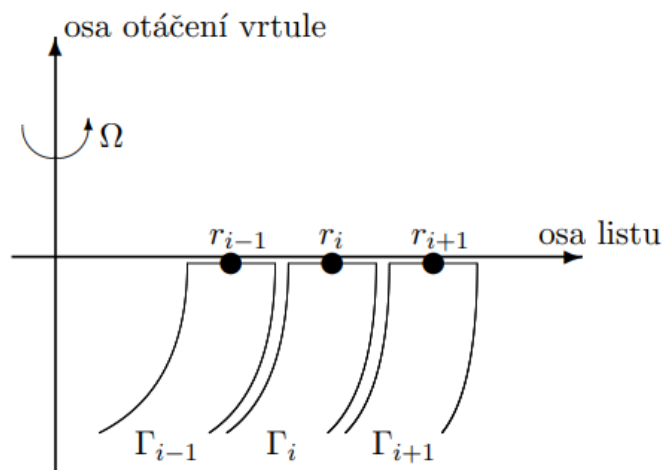
$$f = \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{\lambda} (1 - \bar{r}). \quad (3.41)$$

Kde  $\lambda$  je rychlostní poměr, definován jako:

$$\lambda = \frac{V}{D \cdot n}. \quad (3.42)$$

### 3.3 Vírová teorie

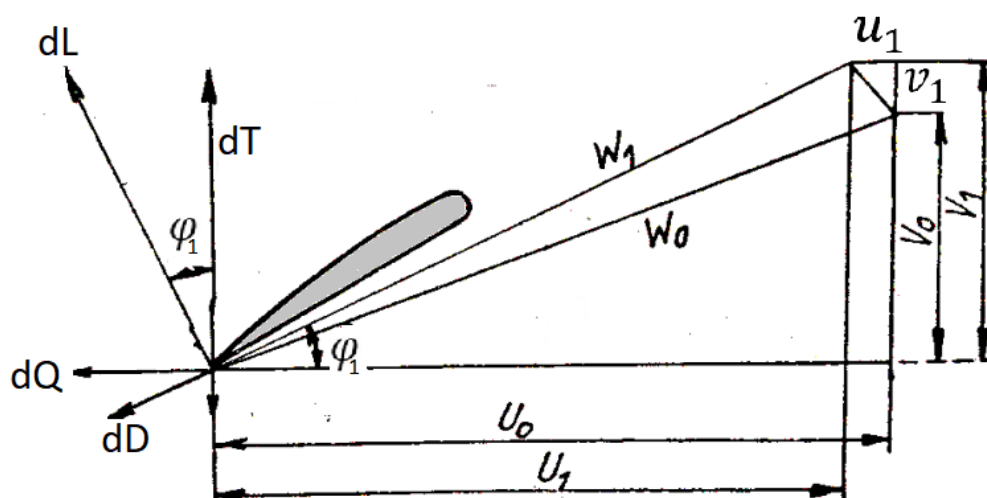
Tato teorie původně vznikla pro určení rozložení sil po rozpětí křídla. Silové účinky vrtule jsou zde nahrazeny účinky soustavy podkovovitých vírů. Soustava se skládá z vázaných vírových vláken, nahrazující listy vrtule a volných vírů odplouvajících za vrtulí viz. **obr. 11**. Na rozdíl od křídla, které má pouze dopřednou translační rychlost, dochází u vrtule i k pohybu rotačnímu. To má za následek, že vírová vlákna mají tvar šroubovice. Nejdůležitějším parametrem této teorie je veličina cirkulace  $\Gamma$ . Pomocí cirkulace jsou počítány rychlosti indukované vrtulí v závislosti na geometrických parametrech vrtule. [17], [18]



Obr. 11 Podkovovité víry na listu vrtule, převzato z: [18]

#### 3.3.1 Silové účinky na elementu listu

Na **obr. 12** jsou zobrazeny síly působící na element listu o šířce  $dr$  na poloměru  $r$ . V pravé části obrázku jsou vektory rychlostí na elementu. Pro elementární tah a obvodovou sílu platí po rozložení složek vztaku a odporu stejné vztahy jako u Teorie izolovaného elementu listu (BET): [3], [18]



Obr. 12 Rozložení sil na elementu listu, převzato a upraveno z: [3]

$$dT = dL \cdot \cos \varphi_1 - dD \cdot \sin \varphi_1, \quad (3.43)$$

$$dQ = dL \cdot \sin \varphi_1 + dD \cdot \cos \varphi_1. \quad (3.44)$$

Zavedením poměru součinitele odporu a vztlaku  $\mu = c_D/c_L$  lze rovnice upravit do následujícího tvaru:

$$dT = dL(\cos \varphi_1 - \mu \cdot \sin \varphi_1), \quad (3.45)$$

$$dQ = dL(\sin \varphi_1 + \mu \cdot \cos \varphi_1). \quad (3.46)$$

Pro vztlak  $dL$  platí při obtékání elementu listu o šířce  $dr$  za přítomnosti cirkulace  $\Gamma$  Kutta-Žukovského věta:

$$dL = \rho W_1 \Gamma dr. \quad (3.47)$$

Po dosazení pro síly platí:

$$dT = \rho W_1 \Gamma (\cos \varphi_1 - \mu \cdot \sin \varphi_1) dr, \quad (3.48)$$

$$dQ = \rho W_1 \Gamma (\sin \varphi_1 + \mu \cdot \cos \varphi_1) dr. \quad (3.49)$$

Z **obr (12)** lze odvodit obvodová složka rychlosti  $U_1 = W_1 \cos \varphi_1$  a osová složka  $V_1 = W_1 \sin \varphi_1$ . Dosazením a následnou integrací podél listu lze vypočítat celkový tah a obvodová síla vrtule:

$$T = \rho \int_0^R \Gamma (U_1 - \mu V_1) dr, \quad (3.50)$$

$$Q = \rho \int_0^R \Gamma (V_1 + \mu U_1) dr. \quad (3.51)$$

Pro výkon vrtule platí:

$$P = Q \cdot r \cdot \Omega. \quad (3.52)$$

Po dosazení:

$$P = \rho \int_0^R \Gamma (V_1 + \mu U_1) r \cdot \Omega dr. \quad (3.53)$$

Pro další výpočet je potřeba znát tzv. rovnici vazby, která uvádí do souvislosti cirkulaci a geometrické parametry vrtule. Elementární vztlak lze zapsat pomocí součinitele vztlaku:

$$dL = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \rho \cdot W_1^2 \cdot c \cdot dr. \quad (3.54)$$

Srovnáním této rovnice s Kutta-Žukovského větou pro cirkulaci platí rovnice vazby:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot c \cdot W_1. \quad (3.55)$$

### 3.3.2 Bezrozměrné veličiny

Zavedením bezrozměrných veličin je možné další výpočet značně zjednodušit. Pro bezrozměrnou cirkulaci platí: [3], [17], [18]

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2 \Omega} \quad (3.56)$$

Bezrozměrná hloubka listu je vztažena na všechny listy vrtule

$$\bar{c} = \frac{Bc}{4\pi R} \quad (3.57)$$

Kde  $B$  je počet listů. Celková rychlost je vztažena na obvodovou rychlost na koncích listů

$$\bar{W}_1 = \frac{W_1}{\Omega R} \quad (3.58)$$

Rovnice vazby lze následně zapsat v bezrozměrném tvaru

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot \bar{c} \cdot \bar{W}_1 \quad (3.59)$$

Cirkulace nelze vypočítat napřímo, jelikož součinitel vzlaku  $c_l$  je závislý na úhlu náběhu  $\alpha$ . Ten je ovlivněn velikostí indukovaných rychlostí, které jsou funkcí cirkulace  $\bar{\Gamma}$ . To vede na iterativní postup řešení, který bude popsán v následujících kapitolách.

Pro bezrozměrné složky rychlostí  $\bar{V}_1$  a  $\bar{U}_1$  platí obdobné vztahy jako pro rychlost  $\bar{W}_1$

$$\bar{V}_1 = \frac{V_1}{\Omega R} \quad (3.60)$$

$$\bar{U}_1 = \frac{U_1}{\Omega R} \quad (3.61)$$

Bezrozměrné složky rychlostí nerušeného proudu  $\bar{V}_0$  a  $\bar{U}_0$ :

$$\bar{V}_0 = \frac{V_0}{\Omega R} = \frac{\lambda}{\pi} \quad (3.62)$$

$$\bar{U}_0 = \frac{U_0}{\Omega R} = \bar{r} \quad (3.63)$$

Kde  $\bar{r}$  je bezrozměrný poloměr daného řezu listu

$$\bar{r} = \frac{r}{R} \quad (3.64)$$

a  $\lambda$  je rychlostní poměr

$$\lambda = \frac{V}{D \cdot n} \quad (3.65)$$

Pomocí vztahů vycházejících z teorie aerodynamické podobnosti vrtulí, lze pro tah vrtule  $T$  a výkon  $P$  vrtulí spotřebovaný zapsat v závislosti na součinitelích  $c_T$  a  $c_P$  ve tvaru:

$$T = c_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4, \quad (3.66)$$

$$P = c_P \cdot \rho \cdot n^3 \cdot D^5. \quad (3.67)$$

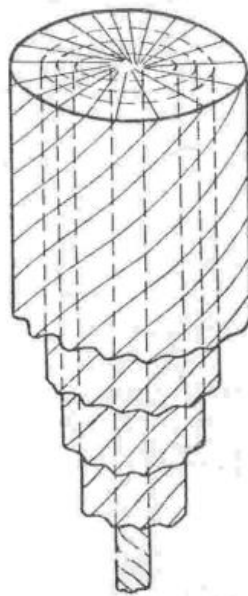
Dosažením bezrozměrných veličin lze odvodit vztah pro součinitel tahu a výkonu

$$c_T = \pi^3 \int_0^1 \bar{\Gamma}(\bar{U}_1 - \mu \bar{V}_1) d\bar{r}, \quad (3.68)$$

$$c_P = \pi^4 \int_0^1 \bar{\Gamma}(\bar{V}_1 + \mu \bar{U}_1) \cdot \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.69)$$

### 3.3.3 Žukovského vírová teorie

Tato teorie předpokládá pro výpočet indukovaných rychlostí několik zjednodušujících předpokladů, které zjednodušují odvození. Hlavním předpokladem je, že vlákna volných vírů vírové soustavy vytvářejí válcové plochy, na kterých jsou vírová vlákna rovnoměrně spojitě rozložena viz. **obr. 13**. Tento předpoklad platí pro vrtuli s nekonečným množstvím listů obdobně jako u teorie Blade element momentum theory (BEMT). Pro lehce zatížené vrtule je také možno předpokládat malé zúžení vírové soustavy a pro zjednodušení výpočtu toto zúžení zanedbat. Díky těmto předpokladům je možné získat vzorce pro indukované rychlosti v uzavřeném tvaru. [3], [17], [18]



Obr. 13 Soustava víru s proměnnou cirkulací, převzato z: [3]

#### Tečná složka indukované rychlosti

Při výpočtu tečné složky indukované rychlosti  $u_1$  lze vyjít z definičního vztahu cirkulace. Cirkulace je definována jako křivkový integrál rychlosti po uzavřené křivce. [17], [18]

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (3.70)$$

Z prvního předpokladu Žukovského teorie plyne, že obvodová složka rychlosti daleko za vrtulí je závislá pouze na poloměru. Pro cirkulaci na poloměru  $r$  je tedy možné zapsat

$$\Gamma = u_2 \cdot 2\pi r. \quad (3.71)$$

Pro obvodovou složku indukované rychlosti lze psát

$$u_2 = \frac{2\pi r}{\Gamma}. \quad (3.72)$$

Dosažením bezrozměrné cirkulace lze odvodit indukovanou rychlost ve tvaru

$$\bar{u}_2 = \frac{u_2}{\Omega R} = 2 \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}}. \quad (3.73)$$

Pro další výpočet je výhodnější počítat s indukovanou rychlostí v rovině vrtule, pro kterou platí

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u}_2}{2} = \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}}. \quad (3.74)$$

Odtud celková obvodová složka rychlosti v rovině vrtule

$$\bar{U}_1 = \bar{r} - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}}. \quad (3.75)$$

### Osová složka indukované rychlosti

Osovou složku indukované rychlosti lze odvodit pomocí rozboru Bernoulliho rovnice mezi rovinou daleko před vrtulí a rovinou v dostatečné vzdálenosti za ní. Pro bezrozměrnou indukovanou rychlost v rovině vrtule platí

$$\bar{v}_1 = -\frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 + \bar{\Gamma}}. \quad (3.76)$$

Odtud celková osová složka rychlosti v rovině vrtule

$$\bar{V}_1 = \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 + \bar{\Gamma}}. \quad (3.77)$$

Toto je nejjednodušší vztah pro výpočet indukované rychlosti v závislosti na bezrozměrné cirkulaci. Pro praxi je však postačující. Při odvození bylo zanedbáno zúžení úplavu za vrtulí a odstředivé síly generované rotací vrtule. V případě potřeby je proto možné tento vztah nadále zpřesnit. [17], [18]

### 3.3.4 Základní vztah pro stanovení cirkulace

Dosažením vztahů pro indukované rychlosti do rovnice (3.68) a (3.69), získáme kompletní vztahy pro výpočet součinitele tahu  $c_T$  a výkonu  $c_P$ . [17], [18]

$$c_T = \pi^3 \int_0^1 \bar{\Gamma} \left[ \left( \bar{r} - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}} \right) - \mu \left( \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 + \bar{\Gamma}} \right) \right] d\bar{r}, \quad (3.78)$$



$$c_P = \pi^4 \int_0^1 \bar{\Gamma} \left[ \left( \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 + \bar{\Gamma}} \right) + \mu \left( \bar{r} - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}} \right) \right] \cdot \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.79)$$

Neznámou v těchto vztazích je rozložení cirkulace podél listu. Pro určení rozložení cirkulace je možný iterační postup, který je uplatněný na rovnici vazby (3.59). Tato rovnice je přímou obdobou Prandtlovy rovnice nosné plochy konečného rozpětí. Pro další výpočet cirkulace platí následující předpoklady: [17], [18]

1. Rozdíl ve velikosti rychlostí  $\overline{W}_1$  a  $\overline{W}_0$  je zanedbatelný. Proto je možné zapsat následující

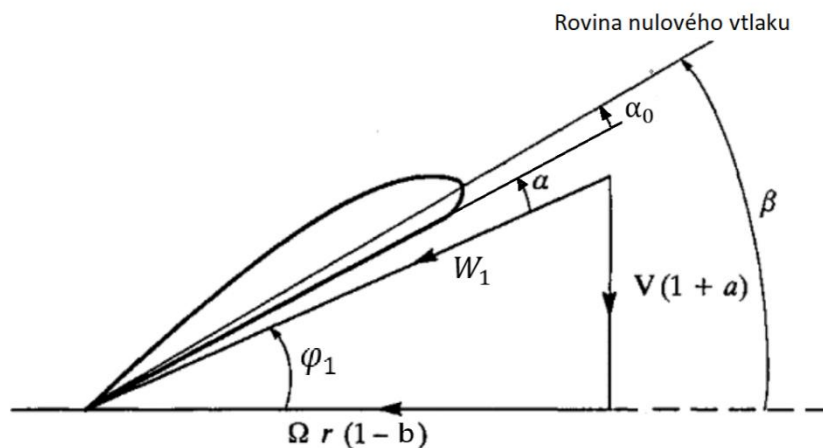
$$\overline{W}_1 \cong \overline{W}_0 = \sqrt{\left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 + \bar{\Gamma}^2}. \quad (3.80)$$

2. Všechny následující výpočty se omezují na přímkovou část vztlakové čáry vybraného profilu, pro kterou platí:

$$c_L = c_L^\alpha (\alpha - \alpha_0). \quad (3.81)$$

Aerodynamický úhel náběhu lze vyčíst z **obr. 14**, na kterém je řez vrtule, ve tvaru

$$\alpha = (\beta - \alpha_0) - \varphi_1. \quad (3.82)$$



Obr. 14 Žukovského vírová teorie, převzato a upraveno z: [11]

Rovnice vazby za těchto předpokladů přejde do tvaru:

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0 = \frac{1}{2} \cdot c_L^\alpha [(\beta - \alpha_0) - \varphi_1] \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0. \quad (3.83)$$

Úhel  $\varphi_1$  je možné vyjádřit pomocí rychlostí  $\overline{U}_1$  a  $\overline{V}_1$ . Poté platí

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{V}_1}{\overline{U}_1} \right). \quad (3.84)$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0 = \frac{1}{2} \cdot c_L^\alpha \left[ (\beta - \alpha_0) - \tan^{-1} \left( \frac{\overline{V}_1}{\overline{U}_1} \right) \right] \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0. \quad (3.85)$$

Dosazením vztahů pro rychlosti  $\overline{U}_1$  a  $\overline{V}_1$

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0 = \frac{1}{2} \cdot c_L^\alpha \left[ (\beta - \alpha_0) - \tan^{-1} \left( \frac{\frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 + \overline{\Gamma}}}{\bar{r} - \frac{\overline{\Gamma}}{\bar{r}}} \right) \right] \cdot \bar{c} \cdot \overline{W}_0. \quad (3.86)$$

Tato rovnice nelze řešit přímo jelikož jak na levé, tak na pravé straně je hledaná veličina cirkulace  $\overline{\Gamma}$ . Je však možné ji řešit pomocí numerických iteračních metod. Pro další výpočet je třeba vypočítat rozložení cirkulace podél listu  $\overline{\Gamma}(\bar{r})$ . Dosazením do rovnic (3.78) a (3.79) se následně vypočítá součinitel tahu  $c_T$  a  $c_P$ . [17], [18]

### 3.3.5 Postup iterativního řešení

Následující postup slouží ke stanovení charakteristik vrtule na základě předpokladů Žukovského vírové teorie. Využívá bezrozměrných veličin, které byly definovány v předchozích kapitolách. Vstupními parametry jsou:

1. Počet listů vrtule
2. Průměr vrtule
3. Úhel nastavení a hloubka průřezu podél listu
4. Rozsah rychlostí a otáček, při kterých bude vrtule operovat.
5. Aerodynamické charakteristiky vybraného profilu.

Výpočetní kroky:

1. Výpočet rychlostí nerušeného proudu  $\overline{V}_0$ ,  $\overline{U}_0$  a  $\overline{W}_0$ .
2. Odhad cirkulace  $\overline{\Gamma}$  pro první iteraci.
3. Výpočet složek rychlostí zahrnující indukované rychlosti.  $\overline{V}_1$ ,  $\overline{U}_1$  viz. vztahy (3.75) a (3.77).
4. Výpočet úhlu nabíhajícího proudu  $\varphi_1$  dle vztahu (3.84).
5. Stanovení úhlu náběhu  $\alpha$ .

6. Stanovení součinitele vzlaku  $c_L(\alpha)$  a odporu  $c_D(\alpha)$  s využitím aerodynamických charakteristik vybraného profilu.
7. Výpočet cirkulace  $\bar{\Gamma}^*$  pro první iteraci.
8. Stabilizace iterativního výpočtu stanovením cirkulace pro vstup do dalšího kroku

$$\bar{\Gamma}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\Gamma}^n + \bar{\Gamma}^*). \quad (3.87)$$

9. Opakování výpočtu dokud  $\|\bar{\Gamma}^n - \bar{\Gamma}^{n+1}\| < \epsilon$ .

Tento výpočet probíhá podél listu s dostatečně malým krokem  $\Delta\bar{r}$ . Výsledkem je rozložení cirkulace podél listu.

10. Výpočet součinitele tahu  $c_T$  a výkonu  $c_P$  numerickou integrací vztahů (3.78) a (3.79).
11. Výpočet účinnosti  $\eta$ .

Celý výpočet probíhá pro zvolený rozsah rychlostního poměru. Výsledkem jsou výkonové charakteristiky vrtule  $c_T(\lambda)$ ,  $c_P(\lambda)$  a  $\eta(\lambda)$ . [18]

## 4 Popis návrhových metod vrtulí

### 4.1 Návrh vrtule podle E. E. Larrabee

Tato metoda se zabývá návrhem geometrie vrtule s minimální indukovanou ztrátou. V porovnání s jinými metodami je poměrně jednoduchá na výpočet a není třeba využít iteračního postupu. Vychází z Betzovy podmínky, která popisuje rozložení indukovaných rychlostí podél listu. Vychází z principu, že se systém šroubovitých vírů za vrtulí pohybuje jako tuhé těleso. Pro návrh platí předpoklad lehce zatížené vrtule. Díky tomu je možné zanedbat zúžení proudu v úplavu a velikost indukovaných rychlostí je řádově menší než axiální a obvodová rychlost vrtule. Pomocí této metody je stanovena Prandtlova-Betzova aproximace Goldsteinovy funkce pro rozložení cirkulace podél listu. Z praxe se ukazuje, že lehce zatížené vrtule je možné touto metodou navrhnout s dostatečnou přesností. [1]

**Obr. 15** popisuje pohyb systému vírů za vrtulí. Je zde zobrazeno vírové vlákno, ze kterých jsou tvořeny jednotlivé vírové šroubovicové plochy. Rychlost částic vírového vlákna je  $w_s$ . Osová složka této rychlosti je:

$$w_{ax} = w_s \cdot \cos \varphi_s \quad (4.1)$$

A obvodová složka:

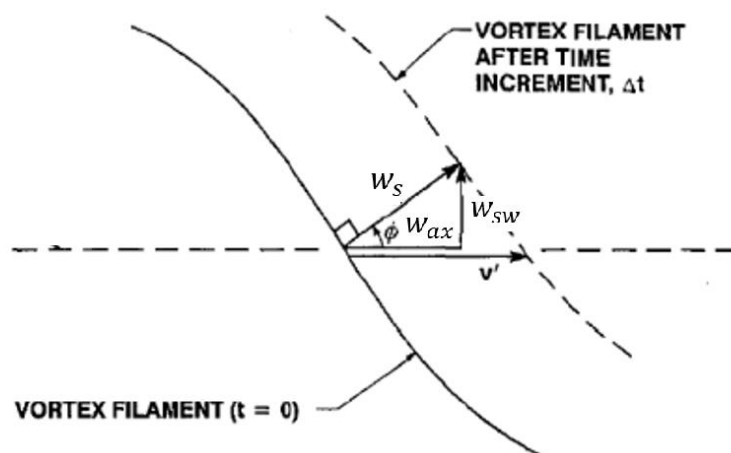
$$w_{sw} = w_s \cdot \sin \varphi_s \quad (4.2)$$

Kde  $\varphi_s$  je úhel stoupání šroubovice vírového vlákna. Z pohledu pozorovatele se však systém vírů pohybuje zdánlivou rychlostí  $v' = w_s \cdot \cos \varphi_s$ . Osová složka  $w_{ax}$  lze pak určit následovně:

$$w_{ax} = v' \cdot \cos^2 \varphi_s \quad (4.3)$$

Obvodová složka:

$$w_{sw} = v' \cdot \sin \varphi_s \cdot \cos \varphi_s \quad (4.4)$$



Obr. 15 Úplav za vrtulí, převzato z: [11]

Prvním krokem této metody je nalezení výrazu pro radiální rozložení cirkulace pro minimální indukovanou ztrátu. Vázaná cirkulace každého listu na poloměru  $r_s$  je rovna cirkulaci okolo proudové trubice o poloměru  $r_s$ . Odtud je možno psát:

$$B\Gamma = 2\pi r_s \cdot w_{sw} \cdot F = 2\pi r_s \cdot w_s \cdot \sin \varphi_s \cdot F. \quad (4.5)$$

Kde  $F$  je Prandtlova ztrátová funkce. Za předpokladu lehce zatížené vrtule je úhel  $\varphi_s$  a poloměr  $r_s$  přibližně roven úhlu stoupání  $\varphi$  elementu listu na poloměru  $r$ . Odtud je možno psát:

$$w_s \cdot \sin \varphi_s \cong v' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (4.6)$$

Pro lehce zatíženou vrtuli platí následující aproximace, odvozená z rychlostního trojúhelníku pro element listu.

$$\sin \varphi \cong \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (4.7)$$

$$\cos \varphi \cong \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (4.8)$$

Kde  $x$  je inverzní rychlostní poměr.

$$x = \frac{\Omega r}{V}.$$

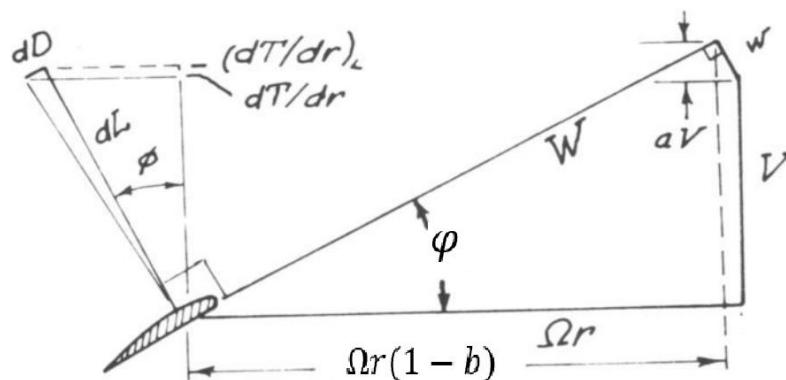
Dosazením rovnic (4.6), (4.7) a (4.8) do rovnice (4.4) lze odvodit hledané rozložení cirkulace.

$$\frac{B\Omega\Gamma}{2\pi V v'} = \frac{x^2}{1+x^2} F = G. \quad (4.9)$$

Kde  $G$  je aproximace Goldsteinovy funkce. Odtud lze vyjádřit cirkulace následujícím způsobem:

$$\Gamma = \frac{2\pi V v' \cdot G}{B\Omega}. \quad (4.10)$$

Pro další výpočty je podstatné najít vztah mezi indukovanými rychlostmi a silami působícími na vrtuli. Na **obr. 16** je zobrazen rychlostní vektorový diagram pro obecný element listu. [1]



Obr. 16 Rychlostní vektorový diagram pro obecný element listu, převzato a upraveno z: [1]

Pokud by nebyl u elementu uvažován profilový odpor, pak by bylo možné dle diagramu vyjádřit elementární tah následovně:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_L = L \cdot \cos\varphi. \quad (4.11)$$

Vztlak elementu lze nahradit pomocí Žukovského věty. Pro elementární tah lze tedy psát:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_L = B \cdot \rho \cdot \Gamma \cdot W \cdot \cos\varphi = B \cdot \rho \cdot \Gamma \cdot \Omega r(1 - b). \quad (4.12)$$

Kde  $b$  je tangenciální indukční faktor. Ten odpovídá polovině poměru obvodové složky indukované rychlosti v úplavu a obvodové rychlosti elementu na poloměru  $r$ :

$$b = \frac{1}{2} \frac{w_{sw}}{\Omega r} = \frac{1}{2} \left( \frac{v' \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\Omega r} \right) \cong \frac{1}{2} \left( \frac{v'}{V} \right) \frac{1}{1 + x^2}. \quad (4.13)$$

Po dosažení výrazu pro indukční faktor a pro cirkulaci do vzorce pro elementární tah je možné odvodit následující:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_L = 2\pi r \cdot \rho \cdot V^2 \frac{v'}{V} \cdot G \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{v'}{V}}{1 + x^2} \right]. \quad (4.14)$$

Jelikož však profilový odpor není nulový, je zapotřebí do rovnice pro elementární tah doplnit člen, který tento odpor zohledňuje.

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{dT}{dr}\right)_L \left(1 - \frac{D/L}{x}\right) = 2\pi r \cdot \rho \cdot V^2 \frac{v'}{V} \cdot G \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{v'}{V}}{1 + x^2} \right] \left(1 - \frac{D/L}{x}\right). \quad (4.15)$$

Při výpočtu geometrie lze vyjít z potřebného tahu. Pro výpočet je potřeba definovat součinitel tahu.

$$T_c = \frac{2T}{\pi R^2 \cdot \rho \cdot V^2}. \quad (4.16)$$

Pro elementární tah tedy platí:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \rho \cdot V^2 \frac{dT_c}{d\xi}. \quad (4.17)$$

Kde  $\xi = \frac{r}{R}$  je bezrozměrný poloměr.

Dosažením rovnice (15) do rovnice (17) je možné získat derivaci  $\frac{dT_c}{d\xi}$ .

$$\frac{dT_c}{d\xi} = 4 \cdot \zeta \cdot G \left( 1 - \frac{D}{L} \frac{1}{x} \right) \xi - 2G \cdot \xi \cdot \zeta^2 \left( \frac{1 - \frac{D}{L}}{1 + x^2} \right). \quad (4.18)$$

Kde  $\zeta = \frac{\dot{v}}{V}$  je bezrozměrná zdánlivá rychlost šroubovitého víru za vrtulí. Po integraci součinitele tahu podle bezrozměrného poloměru lze odvodit parametr  $\zeta$  následovně:

$$\zeta = \frac{I_1}{2I_2} \left( 1 - \sqrt{\frac{4I_2 \cdot T_c}{I_1^2}} \right). \quad (4.19)$$

Kde  $I_1$  a  $I_2$  jsou integrály po délce listu, závislé pouze na hodnotě  $G$  a poměru  $D/L$ .

$$I_1 = 4 \int_0^1 G \left( 1 - \frac{D/L}{x} \right) \xi d\xi. \quad (4.20)$$

$$I_2 = 2 \int_0^1 \frac{G \left( 1 - \frac{D/L}{x} \right)}{1 + x^2} \xi d\xi. \quad (4.21)$$

V případě, že je úloha definována tak, že je zadán potřebný výkon, řešení je obdobné. Je definován součinitel Výkonu:

$$P_c = \frac{2P}{\pi R^2 \cdot \rho \cdot V^2}. \quad (4.22)$$

Parametr  $\zeta$  pak vypadá následovně:

$$\zeta = \frac{J_1}{2J_2} \left( -1 + \sqrt{\frac{4J_2 \cdot P_c}{J_1^2}} \right). \quad (4.23)$$

Integrály  $J_1$  a  $J_2$ :

$$J_1 = 4 \int_0^1 G \left( 1 + \frac{D}{L} x \right) \xi d\xi, \quad (4.24)$$

$$J_2 = 2 \int_0^1 \frac{G \left( 1 + \frac{D}{L} x \right) x^2}{1 + x^2} \xi d\xi. \quad (4.25)$$

#### 4.1.1 Určení geometrických parametrů listu

Skutečný úhel stoupání šroubovice  $\varphi$  lze vypočítat následovně:

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{V(1+a)}{\Omega r(1-b)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{\lambda}{\xi} \left( 1 + \frac{\zeta}{2} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Kde  $\lambda$  je rychlostní poměr  $\lambda = \frac{V}{\Omega R}$ . Skutečná rychlost nabíhajícího vzduchu je následující:

$$\frac{W}{V} = \sqrt{x^2 + 1 - \left(\frac{\zeta \cdot \cos \varphi}{2}\right)}. \quad (4.27)$$

S využitím Žukovského věty lze odvodit délka tětiny elementů podél listu.

$$\frac{c}{R} = \frac{4\pi\lambda}{B} \cdot \frac{G}{\frac{W}{V}} \cdot \frac{\zeta}{c_{l_D}}. \quad (4.28)$$

Kde  $c_{l_D}$  je návrhový součinitel vztlaku. Úhel nastavení je pak dán součtem návrhového úhlu náběhu a úhlu  $\varphi$ . [1]

$$\beta = \varphi + \alpha_D. \quad (4.29)$$

#### 4.1.2 Postup návrhu

Výpočet geometrie listu je jednokrokový. To znamená, že není třeba iterativního řešení a postup je tedy poměrně jednoduchý na naprogramování. Pro výpočet je podstatné si definovat vstupní parametry. Nejpodstatnější je v tomto případě pracovní režim vrtule, tedy rychlost letu  $V$ , Otáčky vrtule  $n$  a požadovaný tah  $T$ , případně požadovaný výkon  $P$ . V praxi se bude jednat o režim cestovní, jelikož v tomto režimu pracuje vrtule po většinu času. Dalšími vstupními parametry jsou průměr vrtule  $D$  a Počet listů  $B$ .

Je také zapotřebí zvolit vhodný profil, pro který jsou známy aerodynamické charakteristiky jako vztlaková čára a aerodynamická polára. Z nich je zvolen návrhový poměr odporu a vztlaku na profilu  $D/L$ , kterému odpovídá návrhový součinitel vztlaku  $c_{l_D}$  a úhel náběhu  $\alpha_D$ . [1]

#### Výpočetní kroky:

1. Definice bezrozměrných parametrů:

Bezrozměrný poloměr:  $\xi = \frac{r}{R}$ , třeba zvolit výpočetní krok po délce listu.

Úhlová rychlost:  $\Omega = \pi \cdot n/30$

Rychlostní poměr:  $\lambda = \frac{V}{\Omega R}$

Inverzní rychlostní poměr:  $x = \frac{\Omega r}{V}$

2. Dle typu úlohy vypočítat součinitel tahu  $T_c$ , případně výkonu  $P_c$  dle vzorců (4.16) nebo (4.22).
3. Definice Prandtlovy ztrátové funkce:

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^{-1} e^{-f}, f = \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda} (1 - \xi)$$

4. Výpočet Goldsteinovy funkce:



$$G = \frac{x^2}{1 + x^2} F.$$

5. Numerická integrace po délce listu a výpočet  $I_1$  a  $I_2$  nebo  $J_1$  a  $J_2$  dle typu úlohy.
6. Výpočet parametru  $\zeta$  podle vzorců (4.19) nebo (4.23) dle typu úlohy.
7. Výpočet skutečného úhlu proudění  $\varphi$  dle rovnice (4.26) a skutečné rychlosti nabíhajícího vzduchu dle vzorce (4.27).
8. Výpočet hledaných geometrických parametrů: délka tětiny dle (4.28) a úhel nastavení dle (4.29).

## 4.2 Návrh vrtule podle Adkinse a Liebecka

Tato metoda vychází z podobných předpokladů a metodologie jako metoda podle Larrabeeho. Neplatí však předpoklad lehce zatížené vrtule. To znamená, že velikost indukovaných rychlostí je srovnatelně velká jako rychlost volného proudu. Tato metoda je tedy obecnější a umožňuje návrh geometrie listu pro širší rozsah vstupních parametrů. To však má za následek zesložitění některých rovnic a díky tomu metoda vede na iterativní postup řešení. Je tedy náročnější na výpočet než metoda podle Larrabeeho. Využívá rovnic Obecné hybností teorie, vycházejících ze změny hybnosti mezi prostorem neovlivněného proudu daleko před vrtulí a v dostatečné vzdálenosti za ní. Pro elementární tah a moment platí: [8]

$$\frac{dT}{dr} = \dot{T} = 4\pi \cdot r \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot (1 + a)a \cdot dr, \quad (4.30)$$

$$\frac{dM}{dr} = \dot{M} = 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot V_\infty \cdot (1 + a)b \cdot \Omega. \quad (4.31)$$

Pomocí Prandtlovy-Betzovy aproximace Goldsteinovy funkce a sil působících na element listu lze odvodit indukční faktory  $a$  a  $b$  ve tvaru:

$$a = \frac{\zeta}{2} \cos^2 \varphi (1 - \mu \tan \varphi), \quad (4.32)$$

$$b = \frac{\zeta}{2x} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \left( 1 + \frac{\mu}{\tan \varphi} \right). \quad (4.33)$$

Kde  $\mu$  je poměr profilového odporu a vztlaku  $\mu = D/L$  a je obecně závislý na úhlu náběhu  $\alpha$ , Reynoldsově a Machově čísle. [8]

Prandtlova ztátová funkce pro tuto metodu je definována následujícím způsobem:

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^{-1} e^{-f}. \quad (4.34)$$

Kde exponent  $f$  je definován následovně:

$$f = \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_T} (1 - \xi). \quad (4.35)$$

Kde:

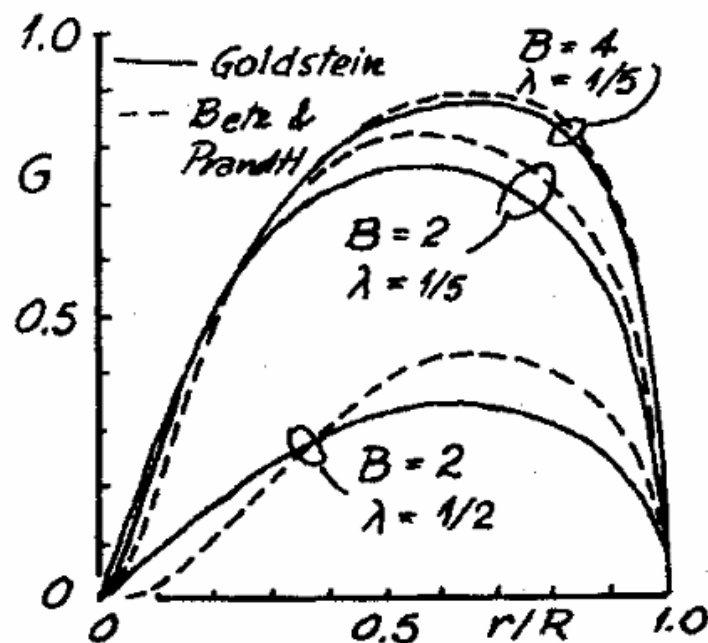
$$\varphi_T = \tan^{-1} \left[ \lambda \left( 1 + \frac{\zeta}{2} \right) \right]. \quad (4.36)$$

### 4.3 Návrh vrtule podle Goldsteina

Goldstein vycházel ze stejného předpokladu jako Larrabee, a to lehce zatížené vrtule. Stejně tak vychází z Betzovy podmínky, tedy že se systém šroubových vírů za vrtulí pohybuje jako tuhé těleso. Rozdíl jeho postupu je ve stanovení rozložení cirkulace podél listu. Nevyužívá Prandtlovu aproximaci, ale hledá přesné řešení numericky. Vychází ze stanovení potenciální funkce  $\phi$ , která popisuje okolní proudění. Ta musí splňovat Laplaceovu parciální diferenciální rovnici:

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

Stanovení funkce  $\phi$  je velmi náročné na výpočet, a tím je i nad rámec této práce. V této práci se tedy detailním řešením dále nebudu zabývat. Výsledky jeho výpočtu je možné odečíst z tabulek. Původně Goldstein z důvodu náročnosti výpočtů spočítal výsledky pouze pro dvoulistou a čtyřlistou vrtuli pro několik rychlostních poměrů  $\lambda$ . S vývojem výpočetní techniky však bylo možné provést výpočet pro široký rozsah rychlostních poměrů a s různým počtem listů. Grafické znázornění jeho výpočtu je na následujícím obrázku, ve kterém je znázorněna Goldsteinova funkce v závislosti na bezrozměrném poloměru. Výsledky jsou porovnány s Prandtlovou aproximací této funkce. [10]



Obr. 17 Rozložení vázané cirkulace dle Prandtla a Goldsteina. převzato z: [12]

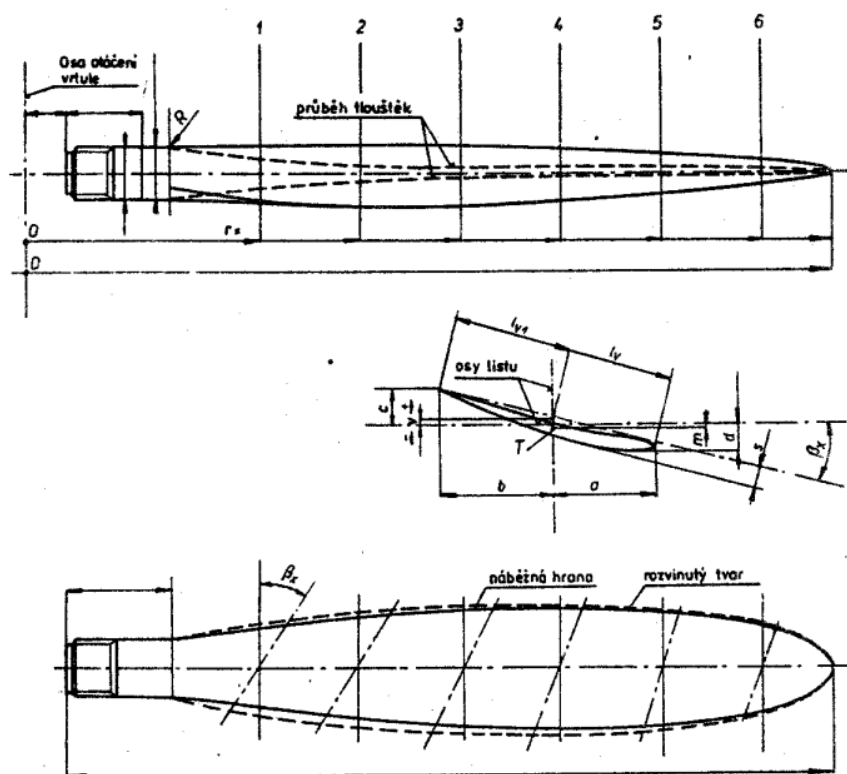
## 5 Pevnostní výpočet vrtule

Na vrtuli, jako aerodynamické zařízení jsou kladeny značné požadavky. Jejím účelem je přeměna kroutícího momentu na hřídeli v tah. Kromě geometrických parametrů vycházejících z očekávaných letových podmínek a výkonnostních charakteristik je při návrhu potřeba dbát na minimální hmotnost a požadavky životnosti a spolehlivosti za předpokládaných podmínek provozu. Vrtuli je zapotřebí také dostatečně vyvážit, a to jak staticky, tak aerodynamicky. Je třeba předpokládat, že celý vrtulový mechanismus musí plnit svou funkci ve značném rozsahu teplot a povětrnostních podmínek. Při provozu také dochází k opotřebené povrchu drobnými částicemi písku a ledu, které jsou zviřeny při pohybu na vzletové dráze. [13]

### 5.1 Zatížení vrtule

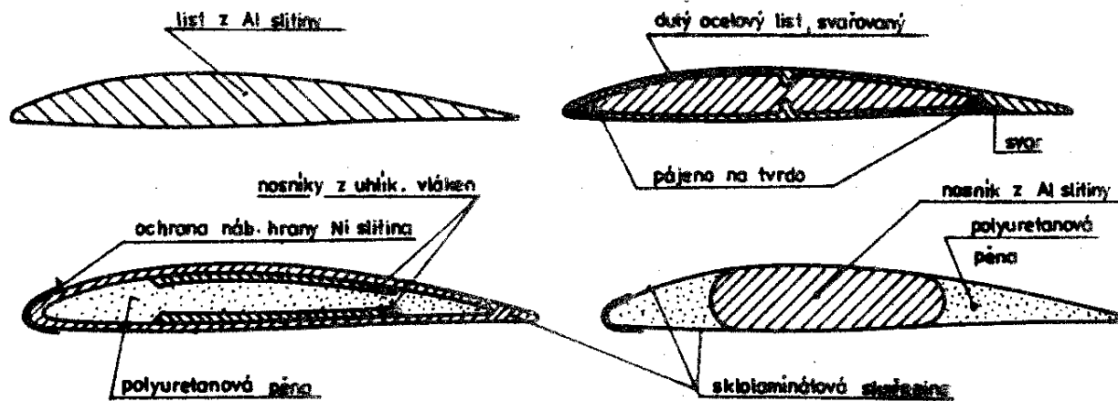
Rozměry vrtule musí být dimenzovány s ohledem na zatížení, která bude konstrukce za provozu přenášet. Zatížení je možné rozdělit na odstředivé a aerodynamické síly kvazistatického charakteru a přídavného zatížení od dynamických jevů. Musí být zajištěna také dostatečná tuhost konstrukce. Deformace mají totiž značný vliv na výkonnostní charakteristiky vrtule. [13]

Celý mechanismus se skládá z náboje, stavěcího mechanismu a vrtulového listu. Ten je nejdůležitějším funkčním prvkem celé konstrukce. List představuje vetknutý nosník s proměnným průřezem viz. **obr 18**.



Obr. 18 konstrukční provedení vrtulového listu z hliníkové slitiny, převzato z: [13]

První vrtule byly vyráběny ze dřeva. Ty byly pro zlepšení mechanických vlastností vyráběny lepením z většího množství desek, které na sebe byly kladeny v rovině rotace. Nevýhodou dřevěných vrtulí byl vliv vlhkosti, díky které se deformoval tvar listu. Celodřevěné vrtule byly postupně nahrazovány vrtulemi celokovovými, vyráběné z hliníkových slitin a dutými vrtulemi,



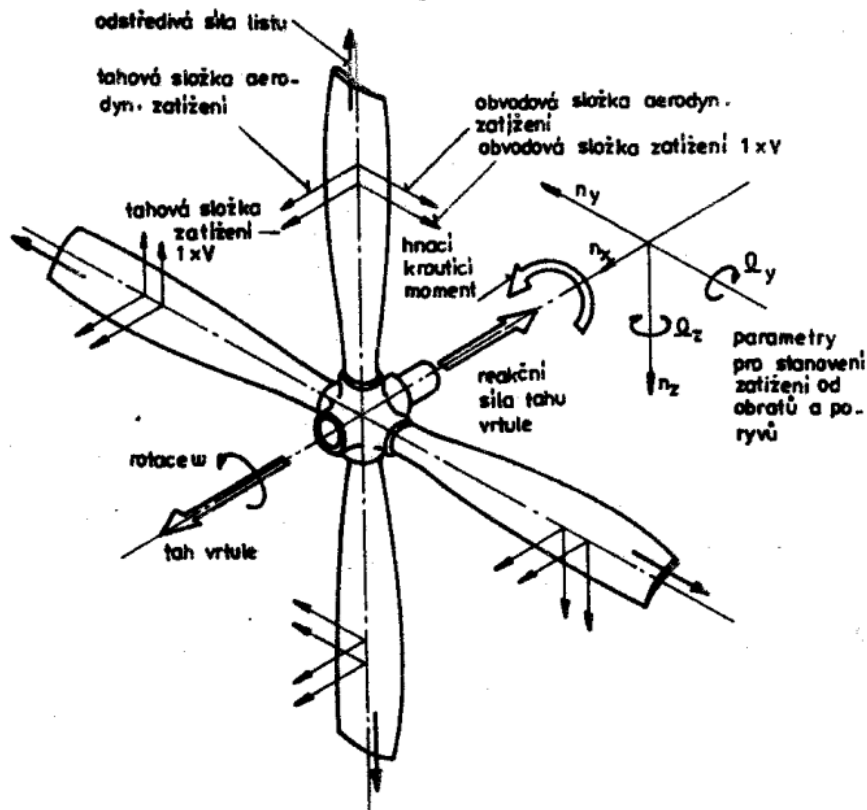
Obr. 19 Konstrukční řešení listů, převzato z: [13]

vyráběné ohýbáním a svařováním ocelových desek. Ke konci 20. století se následně začali vyrábět vrtule z kompozitních materiálů. Na obr. 19 jsou zobrazeny příklady konstrukčních řešení listů.

## 5.2 Pevnostní výpočet listu

Vstupními údaji pro pevnostní výpočet jsou geometrické charakteristiky listů. Z nich jsou vytvářeny konstrukční výkresy. Podstatné jsou také aerodynamické a materiálové podklady. Při výpočtu se vychází z provozních podmínek, které za letu mohou nastat. Výpočet probíhá pro několik pravděpodobných režimů letu. Mezi ně patří rotace vrtule na místě za vzletového režimu motoru, let s maximální rychlostí, let střemhlav a režimy obráceného tahu. [3], [13]

V následujících kapitolách bude popsán výpočet zatížení od jednotlivých sil. Z **obr. 20** je patrná skladba sil působících na list. V této práci se budu zabývat pouze kvazistatickým zatížením od aerodynamických a hmotových sil. Rozbor dynamických složek zatížení je nad rámec této práce. Hmotové síly způsobují tahové zatížení listu ve směru kolmém na osu rotace. Díky rotaci vzniká také kroutící a ohybový moment, který způsobují aerodynamické síly. [13]



Obr. 20 Skladba sil a momentů působících na vrtuli, převzato z: [13]

## 5.3 Zatížení listu od hmotových sil

### 5.3.1 Tahové složka odstředivých sil

Tahové napětí od odstředivých sil je nejpodstatnější složkou zatěžující vrtuli. Výpočet předpokládá, že zatížení je rovnoměrně rozloženo na řezu listu. Elementární odstředivou sílu působící na hmotu  $dm$  je možné definovat následovně: [13]

$$dF_r = r\Omega^2 dm. \quad (5.1)$$

Kde  $r$  je poloměr řezu a  $\Omega$  je úhlová rychlost. Tato síla působí v těžišti elementu ve směru kolmém na něj. Hmotu  $dm$  lze zapsat takto:

$$dm = \rho \cdot S dr. \quad (5.2)$$

Průřez listu  $S$  je proměnný s poloměrem a je přímo závislý na délce tětív jednotlivých řezů:

$$S = k \cdot c \cdot t. \quad (5.3)$$

Kde  $c$  je délka tětiny,  $t$  tloušťka řezu a  $k$  je plošný součinitel odpovídající zvolenému aerodynamickému profilu. Pro profil Clark Y:  $k = 0,725$ . Odstředivá síla na zvoleném poloměru  $r'$  a celková odstředivá síla se získá numerickou integrací vztahu (5.1) podél listu.

$$F_{r'} = \rho \Omega^2 \int_{r'}^R S r dr. \quad (5.4)$$

$$F_r = \rho \Omega^2 \int_0^R S r dr. \quad (5.5)$$

Tahové namáhání na daném řezu:

$$\sigma_\omega = \frac{F_{r'}}{S}. \quad (5.6)$$

### 5.3.2 Vratný moment od odstředivých sil

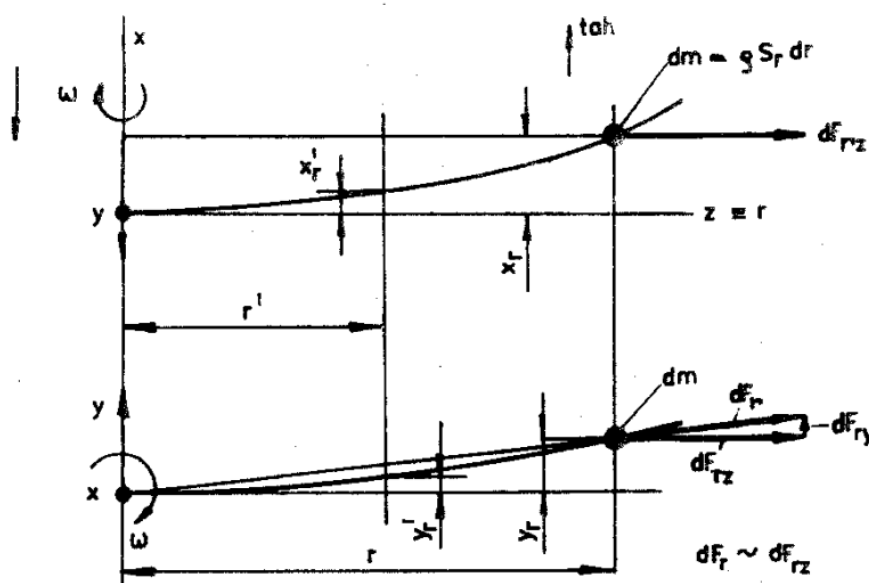
Vrtulový list je z pohledu pevnosti vetknut štíhlý nosník. Ten je prostorově ohýbán aerodynamickými silami. Tuto prostorovou deformaci lze rozložit do dvou na sebe kolmých složek. První složkou je deformace ve směru tahu. Druhá je v rovině vrtulového disku proti směru rotace. Díky vychýlení rotujícího listu vznikají ohybové momenty od odstředivých sil, které deformují list v opačném smyslu. Působí tak proti momentům od aerodynamických sil. Schéma deformací listu a působícího zatížení je na **obr. 21**. [13]

V rovině tahu vrtule působí elementární moment od odstředivé síly:

$$(dM_{oy})_{r'} = (x_r - x_{r'}) dF_r = (x_r - x_{r'}) \rho \cdot \Omega^2 \cdot S \cdot r dr. \quad (5.7)$$

Celkový moment vyvolaný na zvoleném poloměru  $r'$ .

$$(M_{oy})_{r'} = \rho \cdot \Omega^2 \int_{r'}^R (x_r - x_{r'}) \cdot S \cdot r dr. \quad (5.8)$$



Obr. 21 Vratný moment od odstředivých sil, převzato z: [13]

Úpravou lze získat:

$$(M_{Oy})_{r'} = \int_{r'}^R \left(\frac{dx}{dr}\right)_r F_r dr. \quad (5.9)$$

Kde  $\left(\frac{dx}{dr}\right)_r$  značí směrnici průhybové čáry ve směru tahu a  $F_r$  celkovou odstředivou sílu na poloměru  $r$ .

Pro rovinu kolmou na osu rotace platí:

$$(dM_{Ox})_{r'} = (y_r - y_{r'}) dF_{rz} - \frac{y_r}{r} (r - r') dF_r. \quad (5.10)$$

Celkový moment na poloměru  $r'$ :

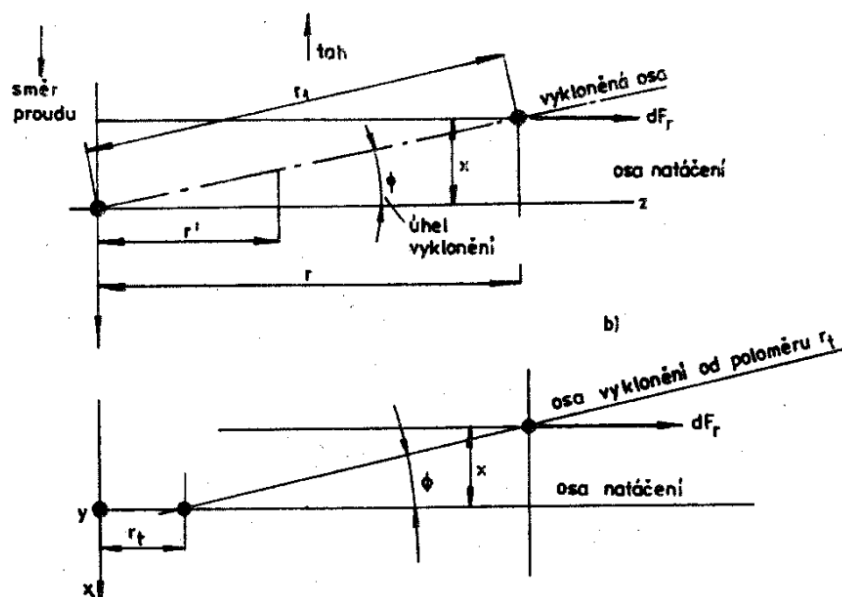
$$(M_{Ox})_{r'} = \int_{r'}^R \left(\frac{dy}{dr}\right)_r F_r dr - \rho \cdot \Omega^2 \iint_{r'}^R y_r \cdot S dr' dr. \quad (5.11)$$

Kde  $\left(\frac{dy}{dr}\right)_r$  značí směrnici průhybové čáry v rovině vrtule na poloměru  $r$ .

Pro výpočet těchto vratných momentů je tedy nejdříve zapotřebí stanovit deformace v obou směry od aerodynamických sil.

### 5.3.3 Konstrukční vyklonění těžištní osy

Vratné momenty stanovené v předchozí kapitole jsou přímým důsledkem ohybových deformací, které jsou způsobeny aerodynamickými silami. Tyto vratné momenty mají opačný smysl a zmenšují tak deformaci těžištní osy aerodynamického zatížení. To umožňuje udělat některé konstrukční změny a zmenšit tak ohybové momenty. Pro zjednodušení bude uveden příklad s vykloněním těžištní osy do směru tahu viz. **obr. 22**. [13]



Obr. 22 Konstrukční vyklonění těžištní osy, převzato z: [13]

Osa je vykloněna o úhel  $\phi$ . Pro směrnici průhybové čáry poté platí:

$$\frac{dx}{dr} = \tan \phi = konst. \quad (5.12)$$

Vratný moment uměle zanesený konstrukční úpravou vychází z rovnice (5.9) a má poté následující tvar:

$$\Delta(M_{Oy})_{r'} = \tan \phi \int_{r'}^R F_r dr. \quad (5.13)$$

Tato základní představa lze využít pouze v případě, kdy je těžištní osa vykloněna jen v rovině tahu. Představa o vyklonění osy od osy rotace je teoretická a v praxi těžko proveditelná. Z konstrukčního a výrobního hlediska se proto posouvá počátek vyklonění na poloměr  $r_t$ , kde končí náboj vrtule.

Pro stavitelné vrtule nemusí být tato úprava vždy výhodná. Příklad vyklonění osy pouze v rovině tahu platí totiž pouze pro jeden konkrétní úhel nastavení  $\beta$ . Pokud stavěcí mechanismus natočí list na nový úhel nastavení při změně letových podmínek, dojde tím k vyklonění těžnice, jak v rovině tahu, tak i v rovině rotace. Dá se dokázat, že pro některé případy se bude vratný moment k aerodynamickému momentu přičítat. Při konstrukčním návrhu se proto musí ověřit vliv vyklonění pro celý rozsah úhlu nastavení, případně zda vyklonění přinese požadovaný užitek. [13]

### 5.3.4 Kroutící moment od odstředivých sil

Kroutící moment od odstředivé síly působící na element listu vzniká v důsledku rozdílné polohy osy natáčení listu, těžiště elementu a polohy působíště příčné složky odstředivé síly  $dF_{sy}$ . Tento moment je podstatný při návrhu stavěcího mechanismu. Je totiž hlavní složkou momentu působící na něj. Princip vzniku momentu je na **obr. 23**. [13]

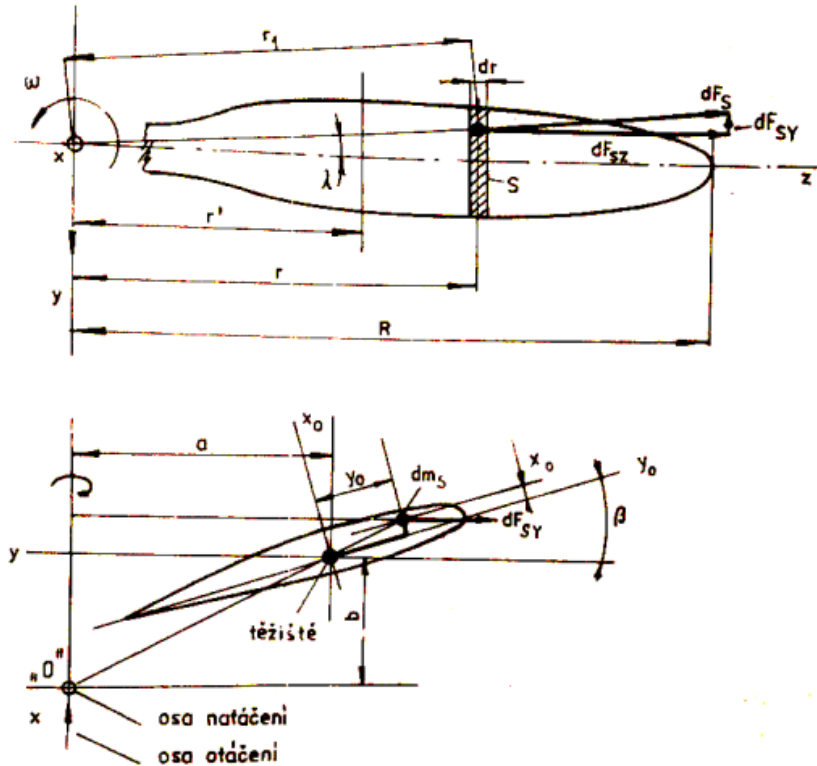
Těžiště elementu je od osy elementu posunuto o vzdálenosti  $a$  a  $b$ . V lokálním souřadnicovém systému je pak působíště vzdálené o  $x_0$  a  $y_0$ . Pro odstředivou sílu platí vztah (5.1). Příčná složka:

$$dF_{sy} = dF_s \cdot \sin \lambda. \quad (5.14)$$

Úhel  $\lambda$  jde pomocí obrázku vyjádřit následovně:

$$\sin \lambda = \frac{a + y_0 \cdot \cos \beta - x_0 \cdot \sin \beta}{r}. \quad (5.15)$$





Obr. 23 Krutící moment od odstředivých sil, převzato z: [13]

Krutící moment vůči ose natáčení:

$$dM_{kF} = dF_{sy}(b + y_0 \cdot \sin\beta + x_0 \cdot \cos\beta). \quad (5.16)$$

Dosazením vztahů (5.14) a (5.15) do vztahu (5.16) a následnou integrací lze získat moment od části listu mezi poloměry  $r'$  a  $R$  ve tvaru:

$$M_{kFr'} = \frac{\rho}{2} \omega^2 \left[ \int_{r'}^R (I_{max} - I_{min}) \cdot \sin(2\beta) dr + \int_{r'}^R a \cdot b \cdot S dr \right]. \quad (5.17)$$

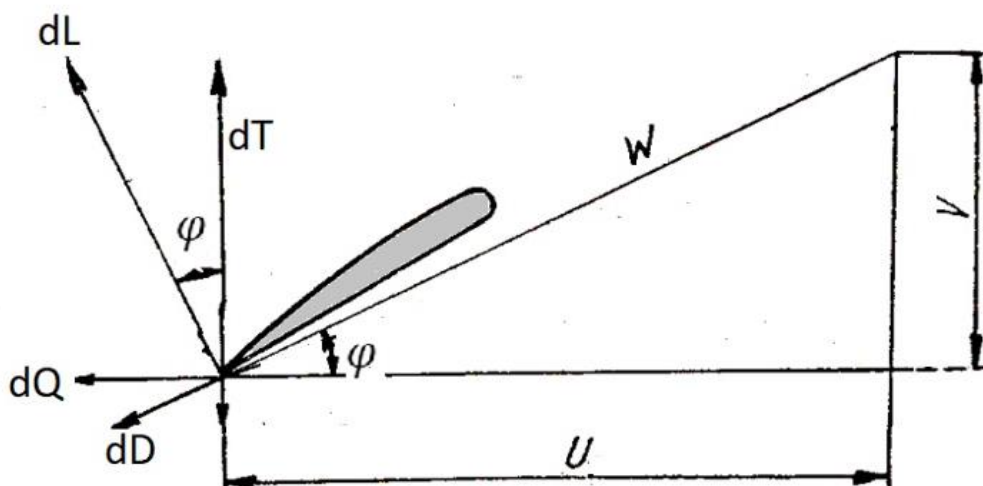
Kde  $I_{max}$  a  $I_{min}$  jsou hlavní momenty setrvačnosti a  $S$  plocha daného elementu. Krutící moment je závislý na úhlu nastavení  $\beta$ . Pro dimenzování stavěcího mechanismu je potřeba znát celkový krutící moment, tedy v mezích  $r_0$  až  $R$ . Druhý integrál ve vztahu (5.17) lze často v praxi zanedbat, jelikož vzdálenosti  $a$  a  $b$  jsou malé. [13]

## 5.4 Zatížení listu od aerodynamických sil

Pro výpočet je třeba nejprve stanovit návrhové provozní podmínky. V praxi se převážně vychází ze vzletového a cestovního režimu. Pro vzletový režim platí nulová dopředná rychlost, tj těsně před odbržděním. Motor je nastaven na vzletový výkon a vrtule dává maximální tah. V tomto režimu bývá zatížení od aerodynamických sil největší. V případě cestovního režimu zatížení takových hodnot povětšinou nedosahuje, ale projevuje se zde cyklické namáhání. Z tohoto režimu tedy vyplývají požadavky na únavovou životnost. V této práci bude zohledněn pouze vliv kvazistatického zatížení od aerodynamických sil. [13]

### 5.4.1 Kvazistatické zatížení od aerodynamických sil

Kvazistatické zatížení lze stanovit jako výslednice aerodynamických sil působících na jednotlivé elementy podél listu. Tyto síly vznikají relativním pohybem mezi vrtulí a nabíhajícím proudem vzduchu. Pohyb je složen z axiálního pohybu vzduchu přes vrtulový disk a rotačním pohybem vrtule. Hledanou výslednicí je tah vrtule a kroučící moment přenášený hřídelí. Stejně jako u teorie izolovaného elementu listu se počítá s izolovanými profily, na které působí elementární aerodynamické síly viz. **obr 24**. Výsledná rychlost  $W$  je dána vektorovým součtem axiální a rotační rychlosti.



Obr. 24 Izolovaný element listu, upraveno a převzato z: [3]

Pro elementární vztahovou a odporovou sílu platí:

$$dL = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c \cdot dr, \quad (5.18)$$

$$dD = \frac{1}{2} \cdot c_D \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c \cdot dr. \quad (5.19)$$

Elementární moment je dán obdobným vztahem:

$$dM = \frac{1}{2} \cdot c_M \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c^2 \cdot dr. \quad (5.20)$$

Kde  $c_L$ ,  $c_D$  a  $c_M$  jsou profilové hodnoty součinitelů vztlaku, odporu a momentu.

Stejně jako u teorie izolovaného elementu listu je třeba složky vztlaku a odporu převést do směru tahu a do roviny vrtule.

$$dT = dL \cdot \cos \varphi - dD \cdot \sin \varphi = t dr,$$

$$dQ = dL \cdot \sin \varphi + dD \cdot \cos \varphi = q dr.$$

Kde  $t$  a  $q$  jsou měrná zatížení dané složky zatížení.

Nyní lze definovat složky ohybového momentu v rovině tahu a v rovině vrtule. Pro první jmenovaný platí:

$$M_{Tr} = \iint_r^R t dr dr. \quad (5.21)$$

Moment v rovině vrtule:

$$M_{Qr} = \iint_r^R q dr dr. \quad (5.22)$$

Oba vztahy udávají moment zatěžující vrtulový list na poloměru  $r$ . Kroutící moment, který musí přenést hřídel odpovídá součtu ohybových momentů od všech listů.

$$M_{KQ} = B \iint_{r_0}^R q dr dr. \quad (5.23)$$

Kde  $B$  je počet listů vrtule a  $r_0$  je maximální poloměr náboje.

Tyto ohybové momenty způsobují prostorovou deformaci. To způsobí vratný ohybový moment popsany v předchozích kapitolách. Tyto momenty vrtulový list odlehčují. To má za následek, že celkový ohybový moment je pro většinu letových režimů menší. [13]

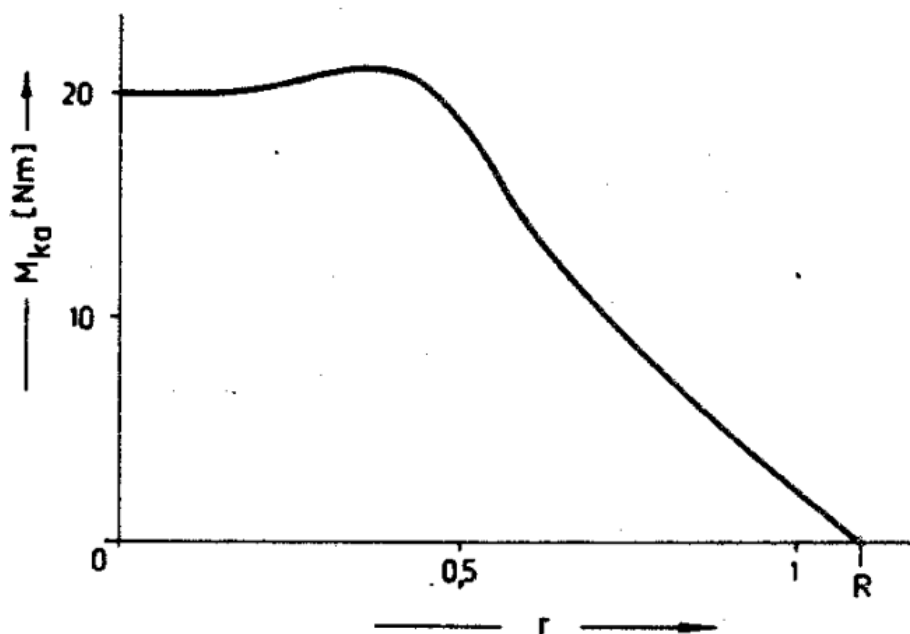
#### 5.4.2 Krutové zatížení od aerodynamických sil

Kroutící moment způsobuje krutovou deformaci listu. Ve většině letových režimů, kdy jsou profily podél listu nastaveny na kladném úhlu náběhu tak, že úhel nastavení profilů se bude zvětšovat. Opačný případ nastane v případě, kdy je vrtule v režimu obráceného tahu. V tomto případě je úhel náběhu záporný a má tendenci úhel nastavení zmenšovat. [13]

Kroutící moment lze zapsat následovně:

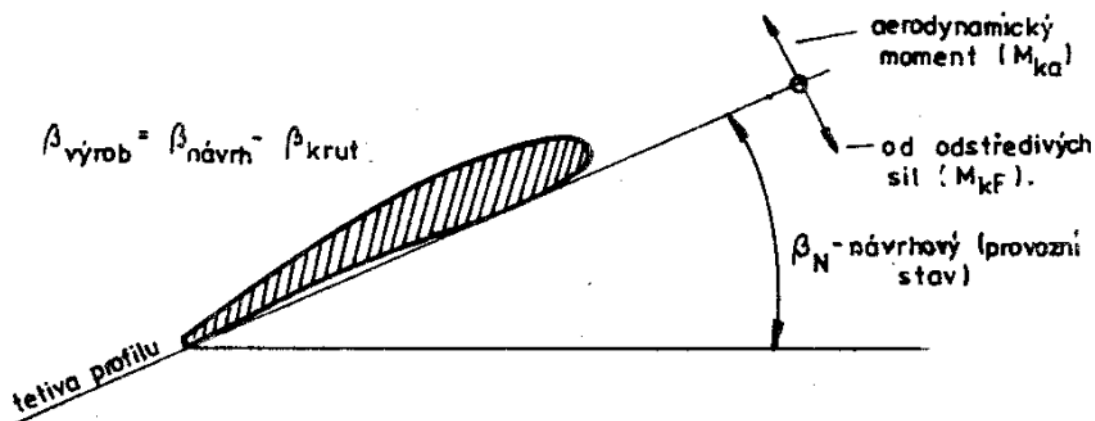
$$M_{Ka} = \frac{1}{2} \int_r^R c_M \cdot \rho \cdot W^2 \cdot c^2 \cdot dr. \quad (5.24)$$

K výpočtu kroutícího momentu je třeba znát geometrii listu a aerodynamické charakteristiky pro daný letový režim. Součinitel  $c_M$  bývá vztažen k ose natačení. Je ale možné ho také vztáhnout k elastické ose. Tento moment je podstatný z pohledu návrhu stavěcího mechanismu. Příklad průběhu kroutícího momentu od aerodynamických sil je zobrazen na obr 25.



Obr. 25 Průběh kroutícího momentu od aerodynamických sil, převzato z: [13]

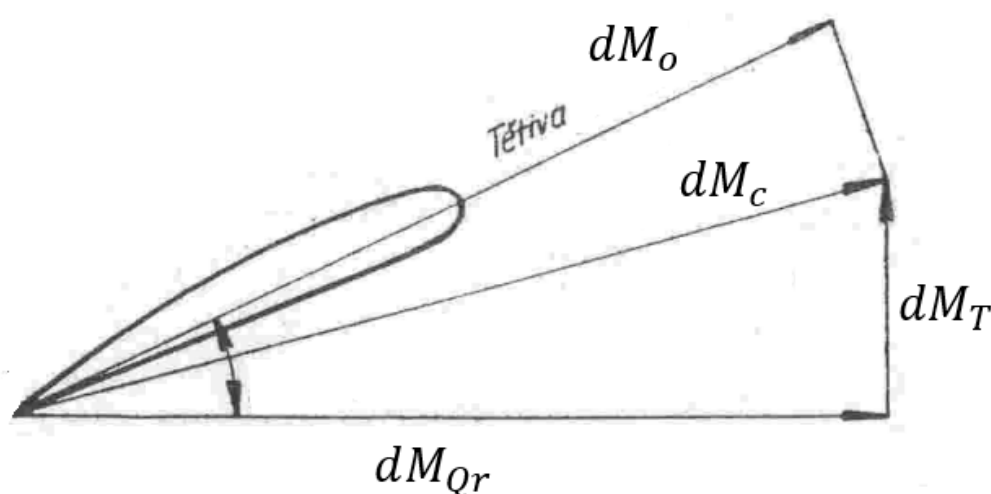
Vliv změny úhlu nastavení, a tedy i úhlu náběhu od kroutícího momentu je vhodné započítat do návrhu geometrie listu. Má totiž vliv na aerodynamické charakteristiky vrtule. Schéma smyslu deformací od krutového zatížení je na následujícím zjednodušeném schématu. Na změnu úhlu nastavení má vliv aerodynamický moment a moment od odstředivých sil, který působí v opačném směru. Pro získání geometrie pro výrobu listu je proto zapotřebí od návrhové (optimální) geometrie odečíst deformace, které jsou za provozu očekávány. [13]



Obr. 26 Změna úhlu náběhu vlivem deformace od krutového zatížení, převzato z [13]

### 5.4.3 Výpočet momentů od aerodynamických sil

V této kapitole bude představen zjednodušený postup výpočtu aerodynamického momentu, který společně s odstředivou silou tvoří převážnou část zatížení vrtulového listu. Z předchozích kapitol je známo, že lze tento moment rozložit na dvě na sebe kolmé složky. Složku rovnoběžnou s osou tahu  $dM_T$  a složkou v rovině rotace  $dM_{Qr}$ . Vektorovým součtem lze pak získat celkový moment  $dM_c$ . Jeho složka do směru nejmenšího odporu je  $dM_o$  viz **obr. 27**. [3]



Obr. 27 Výpočet momentů od aerodynamických sil, převzato a upraveno z: [3]

Praxe ukazuje, že je možné moment  $dM_o$  nahradit momentem od tahové síly  $dM_T$ . Je tedy možné psát:  $dM_o \cong dM_T$ . Tato úvaha se na první pohled zdá chybná, ale v praxi se ukazuje, že pro praktické využití je dostačující. Dle teorie podobnosti vrtulí lze zapsat elementární tah.

$$dT = dc_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4. \quad (5.25)$$

Moment zatěžující element na poloměru  $r_0$  od elementárního tahu na poloměru  $r$  lze zapsat následovně:

$$dM_o = dT \cdot (r - r_0). \quad (5.26)$$

Dosažením vztahu pro tah a úpravou na bezrozměrný poloměr lze dostat:

$$dM_o = \frac{1}{2} dc_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^5 \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0). \quad (5.27)$$

Integrací tohoto vztahu podél listu od  $\bar{r}_0$  po konec listu vyjde celkový moment v místě  $\bar{r}_0$ .

$$M_o = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^5 \int_{\bar{r}_0}^1 \frac{dc_T}{d\bar{r}} (\bar{r} - \bar{r}_0) d\bar{r}. \quad (5.28)$$

Člen  $\frac{dc_T}{d\bar{r}}$  představuje rozložení součinitele tahu podél listu. V případě, že je znám pouze součinitel tahu vrtule pro různé rychlostní poměry, je zapotřebí postupovat následovně:

Vyjdeme ze sil působících na element listu. Působí na něj elementární vztlak  $dL$  a čelní odpor  $dD$ . Pro malé úhly náběhu lze čelní odpor zanedbat. Pro tah lze pak psát:

$$dT = dL \cdot \cos \varphi. \quad (5.29)$$

Kde  $\varphi$  je úhel nabíhajícího vzduchu. Pro vztlak lze odvodit:

$$dL = \frac{1}{4} \cdot c_L \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \bar{c} \cdot D^4 (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) d\bar{r}. \quad (5.30)$$

Pro tah platí:

$$dT = \frac{1}{4} \cdot c_L \cdot \rho \cdot n^2 \cdot \bar{c} \cdot D^4 \cos \varphi \cdot (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) d\bar{r}. \quad (5.31)$$

Nyní je možné tyto vztahy dosadit do výrazu pro elementární moment  $dM_o$ . Celkový moment na poloměru  $\bar{r}_0$ .

$$M_o = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^5 \int_{\bar{r}_0}^1 c_L \cdot (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) (\bar{r} - \bar{r}_0) d\bar{r}. \quad (5.32)$$

Nyní je třeba odvodit součinitel vztlaku  $c_L$ . To lze ze vztahu pro tahu vrtule:

$$T = \frac{1}{4} B \cdot c_L \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4 \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{c} \cdot \cos \varphi \cdot (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) d\bar{r}. \quad (5.33)$$

Kde  $B$  je počet listů vrtule. Pro zjednodušení předpokládáme konstantní součinitel vztlaku  $c_L$ . Z tohoto důvodu je možné ho zapsat před integrál. Ten je označen následovně:  $\int_{\bar{r}_0}^1 \bar{c} \cdot \cos \varphi \cdot (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) d\bar{r} = K$ . Odtud pro  $c_L$  platí:

$$c_L = \frac{4T}{B \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4 \cdot K} = \frac{4c_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4}{B \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4 \cdot K} = \frac{4c_T}{B \cdot K}. \quad (5.34)$$

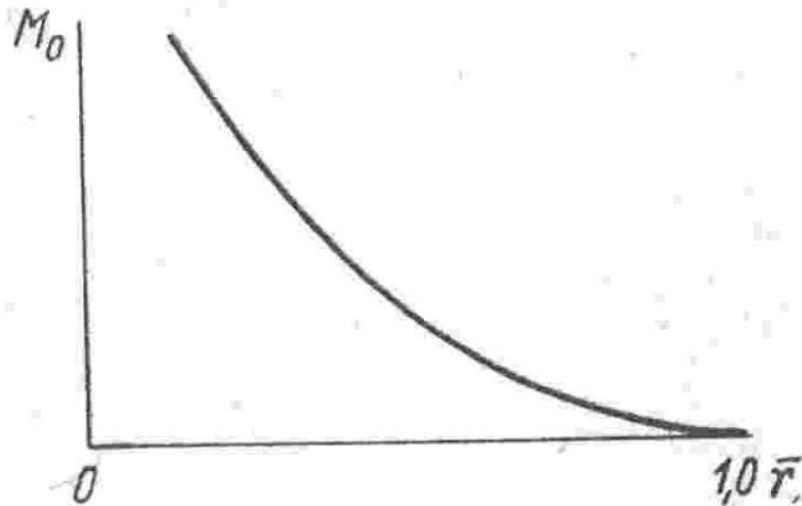
Nyní je možné tento výraz dosadit do vztahu pro ohybový moment. Odsud:

$$M_o = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^5 \cdot \frac{c_T}{B \cdot K} \int_{\bar{r}_0}^1 (\pi^2 \bar{r}^2 + \lambda^2) (\bar{r} - \bar{r}_0) d\bar{r}. \quad (5.35)$$

Postup výpočtu:

1. Volba rychlostního poměru  $\lambda$ .
2. Z výkonnostních charakteristik dané vrtule je třeba odečíst součinitel tahu  $c_T$  pro daný rychlostní poměr.
3. Určení hodnoty  $K$  z aerodynamických a geometrických charakteristik vrtule.
4. Výpočet ohybového momentu pro zvolený rychlostní poměr a poloměr  $\bar{r}_0$ . Tento výpočet je třeba opakovat po délce listu od náboje po špičku vrtule.

Vrtulový list obdobně jako křídlo představuje vetknutý nosník. Moment tedy roste od nulové hodnoty na špičce listu po maximální hodnotu u kořene. Příklad průběhu aerodynamického momentu je na **obr. (28)**. [3]

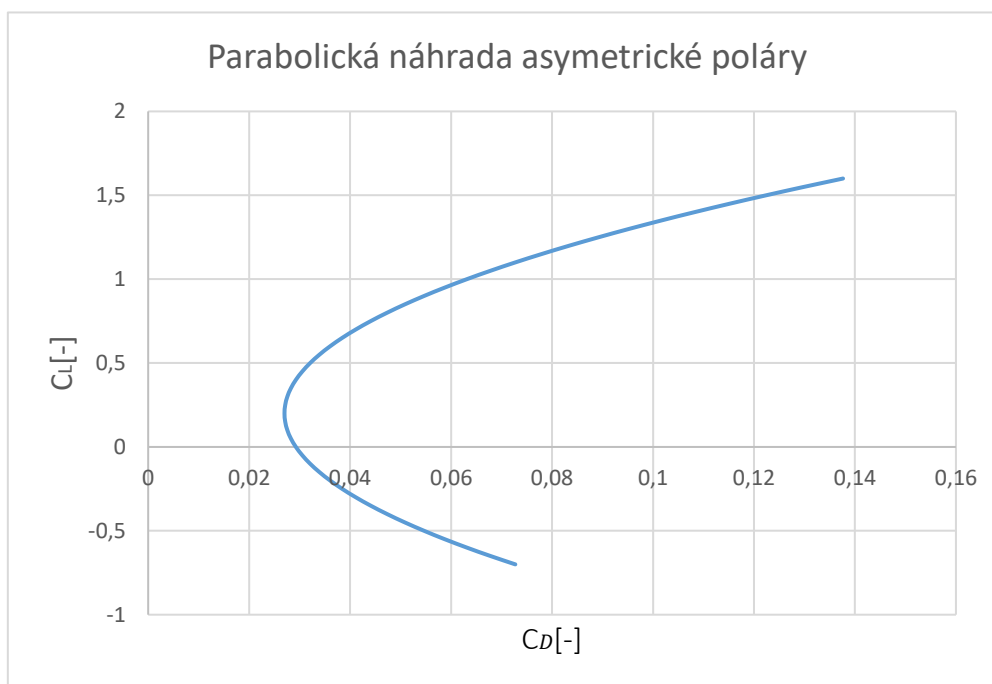


Obr. 28 Průběh momentu od aerodynamických sil, převzato z [3]

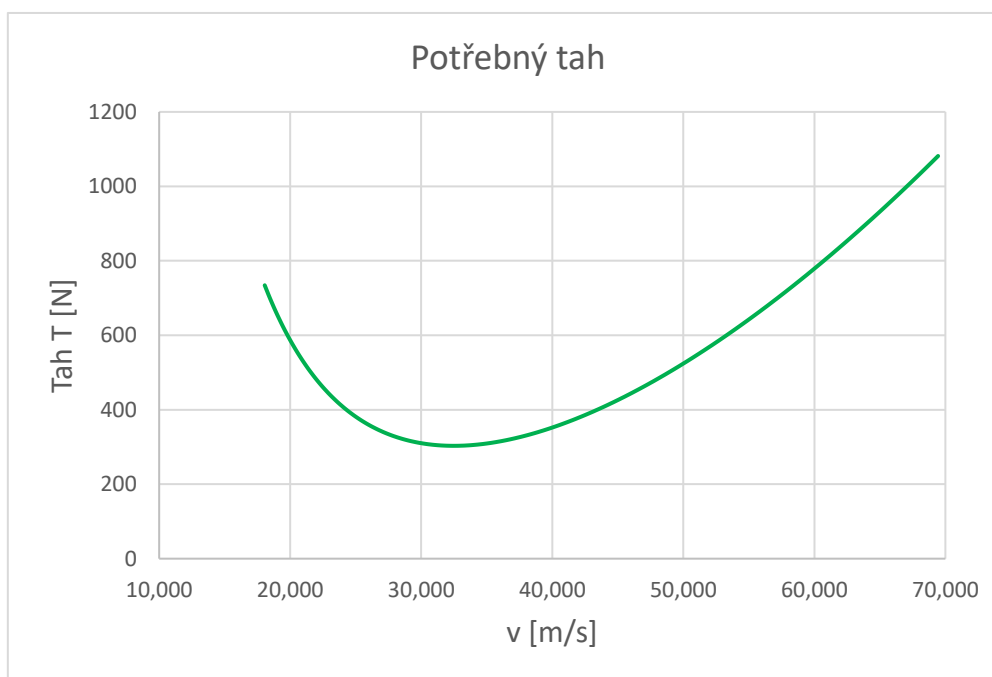
## 6 Aerodynamický návrh vrtule pro zvolené parametry

### 6.1 Charakteristiky vybraného letounu

Cílem této práce je navrhnout pevnou vrtuli pro letoun s maximální vzletovou hmotností  $M_{MTOW} = 700 \text{ kg}$ . Plocha křídla je  $S = 14,8 \text{ m}^2$  a rozpětí křídel  $l = 10,2 \text{ m}$ . Pro tento letoun byla stanovena parabolická náhrada poláry. Polára letounu je zobrazena v **Grafu 2**. Pomocí ní byl následně dopočítán potřebný tah v závislosti na rychlosti letu viz. **Graf 1**.



Graf. 2 Parabolická náhrada poláry



Graf. 1 Potřebný tah letounu v závislosti na rychlosti letu



Závislost potřebného tahu byla stanovena pro výšku  $H=0$  m. Pro tuto výšku budou počítány i všechny následující výpočty. Vrtule je navrhována pro maximální rychlost a jí odpovídající potřebný tah dle grafu 1.

$$V_{max} = 60 \text{ m/s}$$

Této rychlosti odpovídá tah 780 N. Pro návrh vrtule bude počítáno s vyšším tahem pro dostatečnou rezervu.

$$T = 800 \text{ N}$$

### 6.1.1 Parametry vrtule

Nejdůležitějšími parametry vrtule jsou průměr a počet listů. K dosažení co největšího tahu by bylo vhodné navrhnout vrtuli s co největším průměrem. Obecně platí, že čím větší je průměr, tím mohou být listy štíhlejší při generování stejného tahu. Existují ale některá omezení, na které si konstruktér musí dát pozor. Velkým omezením je maximální rychlost na povrchu listu. Jelikož obvodová rychlost roste přímo úměrně vzdálenosti od osy rotace, dosahuje nejvyšší rychlost na koncích listů. Pokud by bylo dosaženo kritického Machova čísla, znamenalo by to, že na některých místech profilu by bylo dosaženo rychlosti zvuku, a tím i snížení účinnosti vrtule. Dalším omezením bývá výška podvozku.

Druhým parametrem je počet listů vrtule. Ten je svázán jak s průměrem, tak hmotností vrtule. Čím více listů má vrtule, tím může mít menší průměr při dosažení stejného tahu. Zároveň ale s rostoucím počtem listů roste i hmotnost vrtule. Což může být dost velké omezení.

Mnou zvolené parametry pro letoun jsou:

Průměr vrtule:

$$D = 1,9 \text{ m.}$$

Počet listů vrtule:

$$B = 2.$$

### 6.1.2 Volba pohonné jednotky

K pohonu je použit čtyřtákní motor Rotax 912 UL vybaveným reduktorem. Jeho převodový poměr je  $i = 2,27$ . V následující tabulce jsou uvedeny parametry motoru.

Vzletové otáčky:	$n = 5800 \text{ 1/min}$
Vzletový výkon:	$P_{vz} = 59,6 \text{ kW}$
Maximální trvalé otáčky:	$n = 5500 \text{ 1/min}$
Maximální trvalý výkon:	$P_{max} = 58 \text{ kW}$

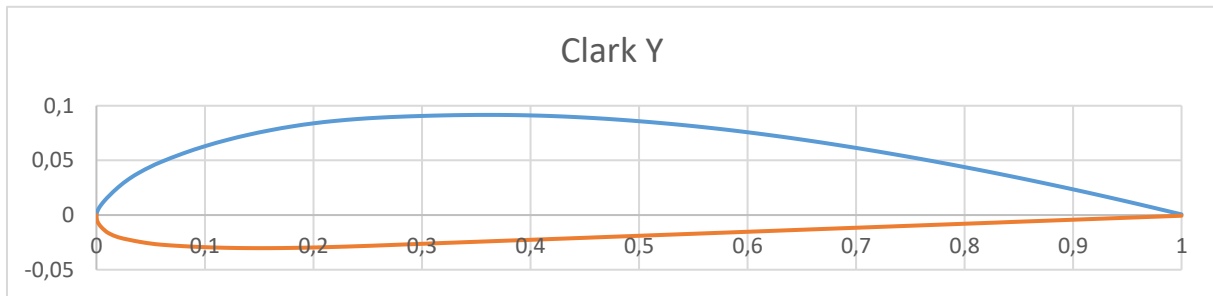
Tabulka 1 Parametry motoru Rotax 912 UL

Při výpočtu vyjdu z maximálních trvalých otáček. Otáčky vrtule jsou dány následovně:

$$N_{vrtule} = \frac{n}{i} = \frac{5500}{2,27} \cong 2400 \text{ ot/min}$$

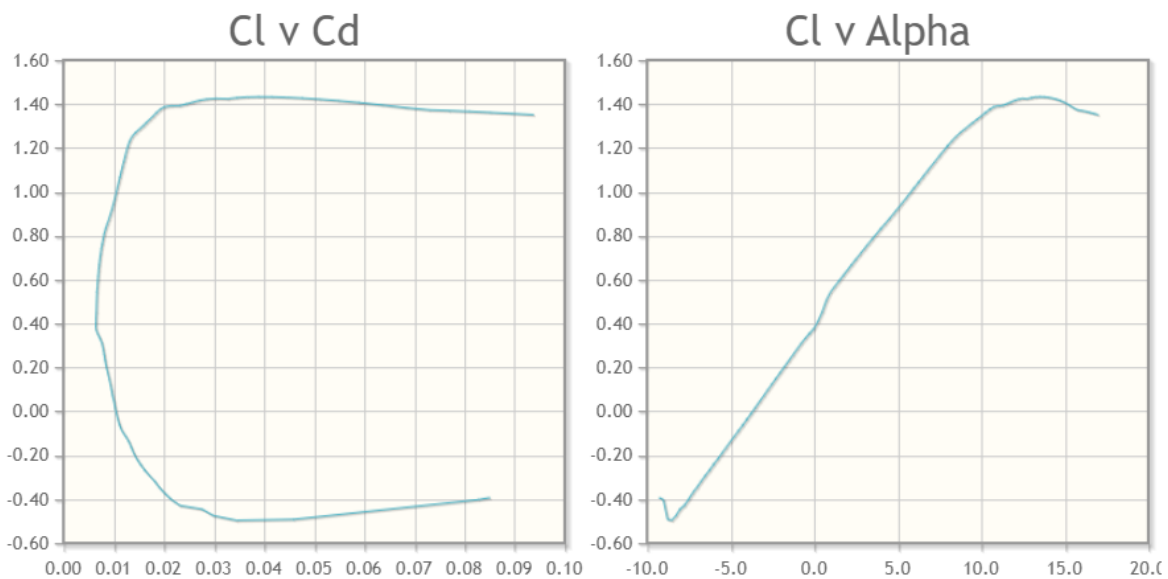
## 6.2 Charakteristiky vybraného profilu

Pro návrh vrtule byl vybrán profil Clark Y. Jedná se o v minulosti hojně využívaný profil jak vrtule, tak nosné plochy letadel. Byl navržen v roce 1922 Virginiusem E. Clarkem. Maximální tloušťky 11,7 % dosahuje ve 28 % hloubky profilu. Jeho geometrie je na obr. (29). [14]



Obr. 29 Geometrie profilu Clark Y, převzato z: [14]

Pro tento profil jsou volně dostupná data k aerodynamickým profilům v širokém rozsahu Reynoldsových čísel. Případně je možné charakteristiky získat v některém z volně dostupných programů, například program XFOIL. Pro Výpočet je důležité dosáhnout maximálního poměru  $c_L/c_D$ , který je odečten z poláry profilu. Následně je pro daný pracovní bod odečten optimální úhel náběhu  $\alpha_D$  ze vztlakové čáry. Maximálního poměru  $\frac{c_L}{c_D} = 98$  dosahuje profil při úhlu náběhu  $\alpha_D = 3,5^\circ$ . Aby však vrtule dosahovala dostatečné účinnosti i při ostatních letových režimech, než je návrhový, byl zvolen úhlu náběhu  $\alpha_D = 0,75^\circ$ , kdy je součinitel vzlaku  $c_L = 0,5$  a  $\frac{c_L}{c_D} = 75$ .



Obr. 30 Aerodynamické charakteristiky profilu pro Reynoldsovo číslo 500 000, převzato z [14]

### 6.3 Návrh geometrie listu

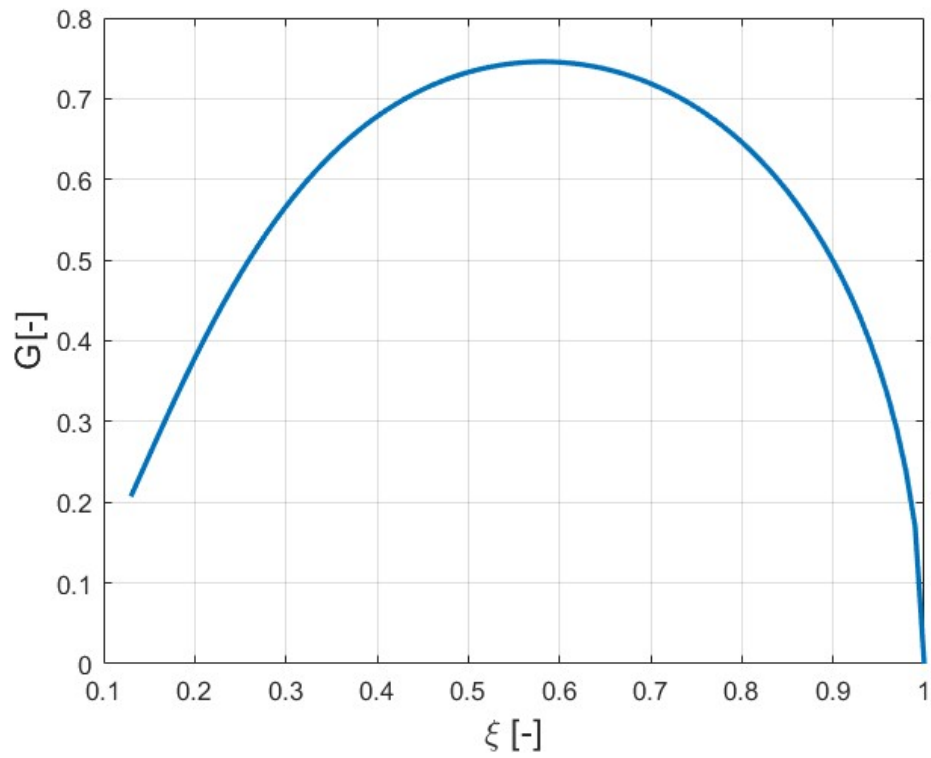
Pro návrh geometrie listu byla vybrána metoda dle E. E. Larrabeeho. Vrtule bude navrhována při relativně nízkém rychlostním poměru  $\lambda$ . Zároveň nebude extrémně zatížena. Pro tyto předpoklady by metoda měla dávat pro praxi dostatečně přesné prostředky. Metoda je jednokroková, není tedy potřeba iterativního řešení a je snadná na naprogramování. Metoda je implementována pomocí programu Matlab.

Geometrií se rozumí průběh hloubek profilů  $c$  a úhel nastavení řezů v závislosti na poměrném poloměru. Výpočet je proveden dle návrhového postupu uvedeného v kapitole 4.1.2. Parametry vzduchu jsou počítány dle pravidel Mezinárodní standardní atmosféry MSA pro výšku  $H=0$  m. Pro rekapitulaci je zde uvedena tabulka vstupních parametrů pro výpočet.

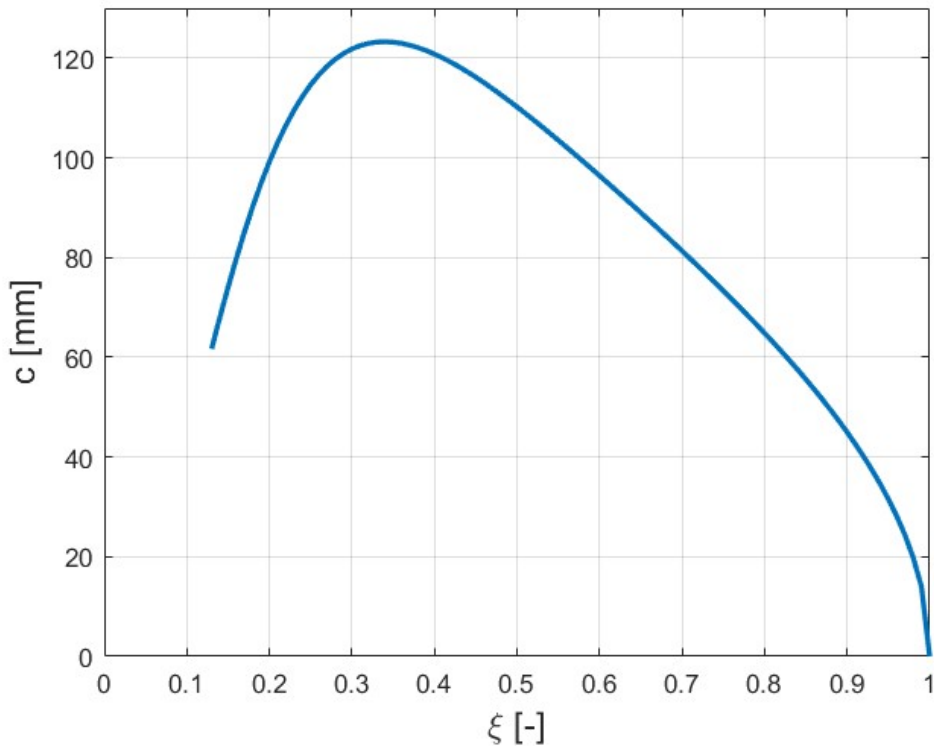
Výpočet byl proveden na základě následujících vstupních parametrů:

Návrhová rychlost letu	$V = 60 \text{ m/s}$
Hustota vzduchu	$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$
Potřebný tah	$T = 800 \text{ N}$
Průměr vrtule	$D = 1,9 \text{ m}$
Počet listů vrtule	$B = 2$
Návrhový součinitel vztlaku	$c_{l_D} = 0,5$
Radiální distribuce	$D/L = 1/75$
Otáčky vrtule	$n = 2400 \text{ ot/min}$
Návrhový úhel náběhu	$\alpha_D = 0,75^\circ$

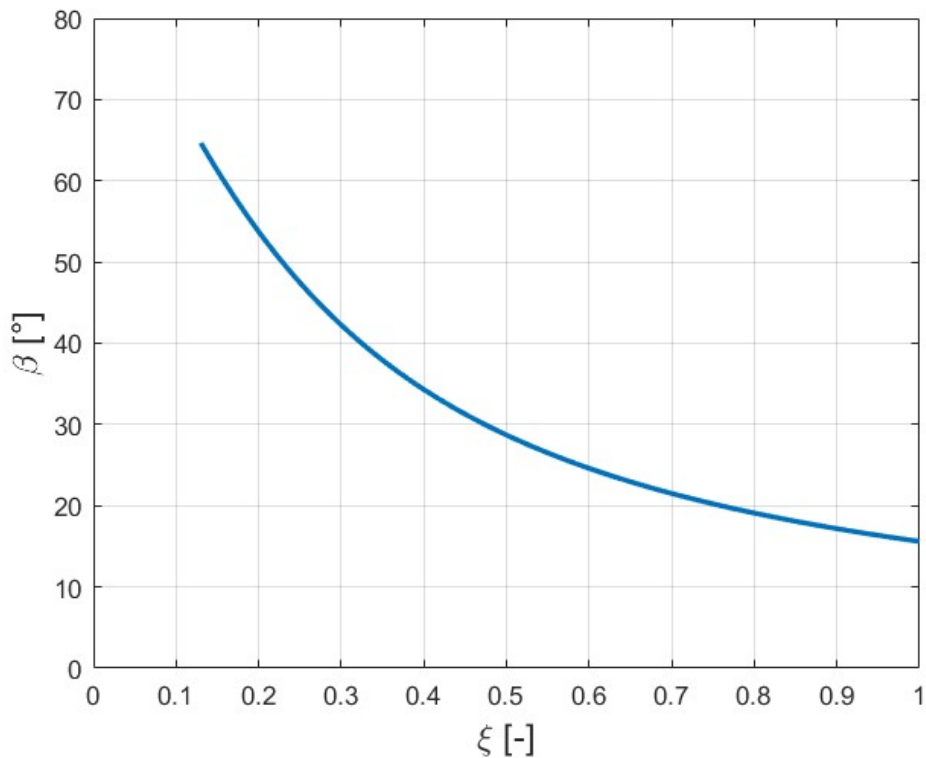
Tabulka 2 Vstupní parametry výpočtu geometrie listu



Graf. 3 Prandtlova aproximace Goldsteinovy funkce v závislosti na poměrném poloměru



Graf. 4 Hloubka profilu v závislosti na poměrném poloměru

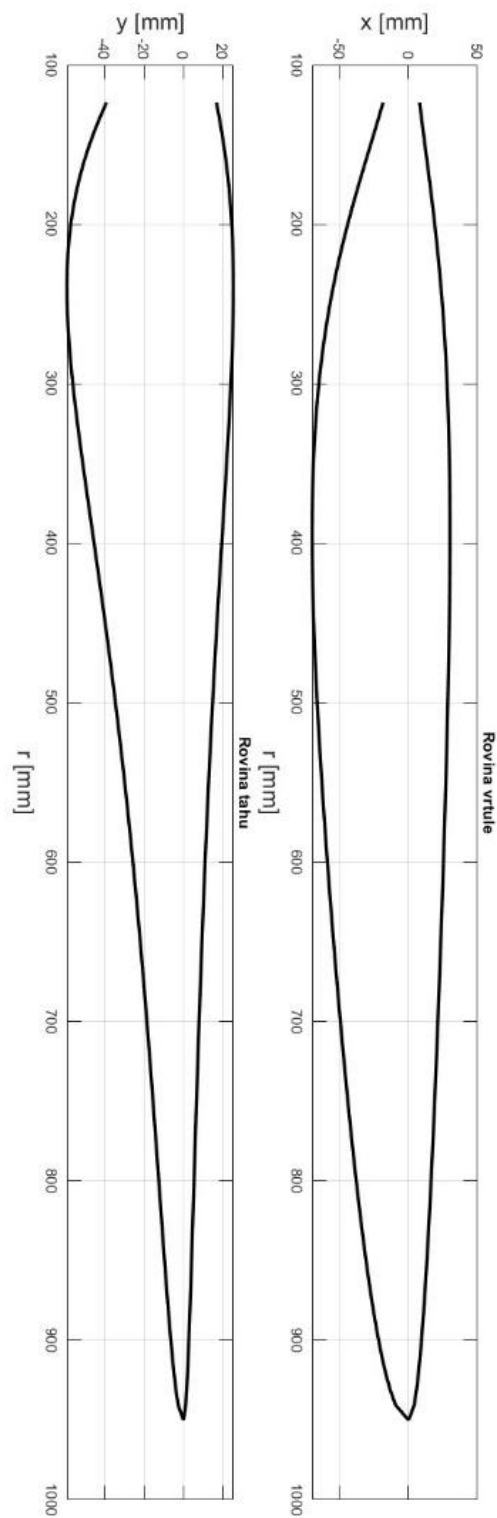


*Graf. 5 Úhel nastavení profilu v závislosti na poměrném poloměru*

Při výpočtu bylo zkontrolováno, zda se Machovo číslo na konci listu nepřiblížilo rychlosti zvuku. Machovo číslo dosahuje hodnoty  $Ma = 0,71$ . Je tedy dostatečně pod hranicí kritického Machova čísla. Zároveň bylo zkontrolováno Reynoldsovo číslo ve třech čtvrtinách délky listu. Dosahuje hodnoty  $Re = 1\,170\,000$ . Byly stanoveny aerodynamické charakteristiky pro toto Reynoldsovo číslo a porovnány s původními charakteristikami. Jelikož jsou v blízkosti pracovního bodu charakteristiky téměř totožné, není třeba výpočet upravovat.

### 6.3.1 Geometrie navrženého listu

List byl navržen tak, že těžištní osa profilů je kolmá na osu otáčení vrtule. Toto rozložení je vhodné z pohledu zatížení vrtule.



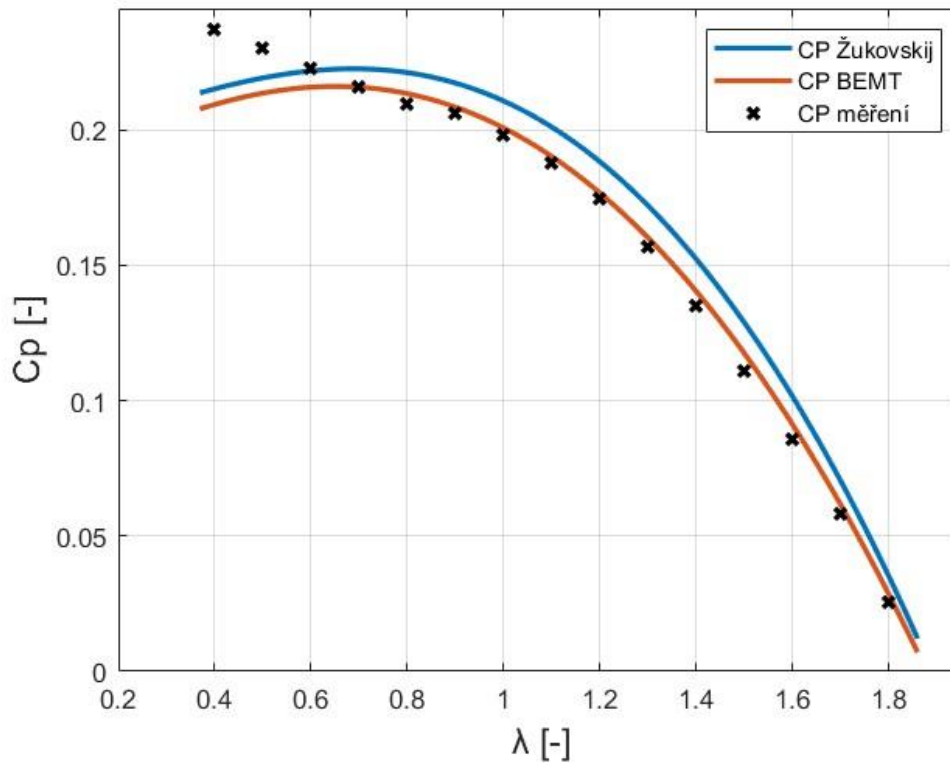
Obr. 31 Geometrie navrženého listu

## **6.4 Stanovení výkonnostních charakteristik**

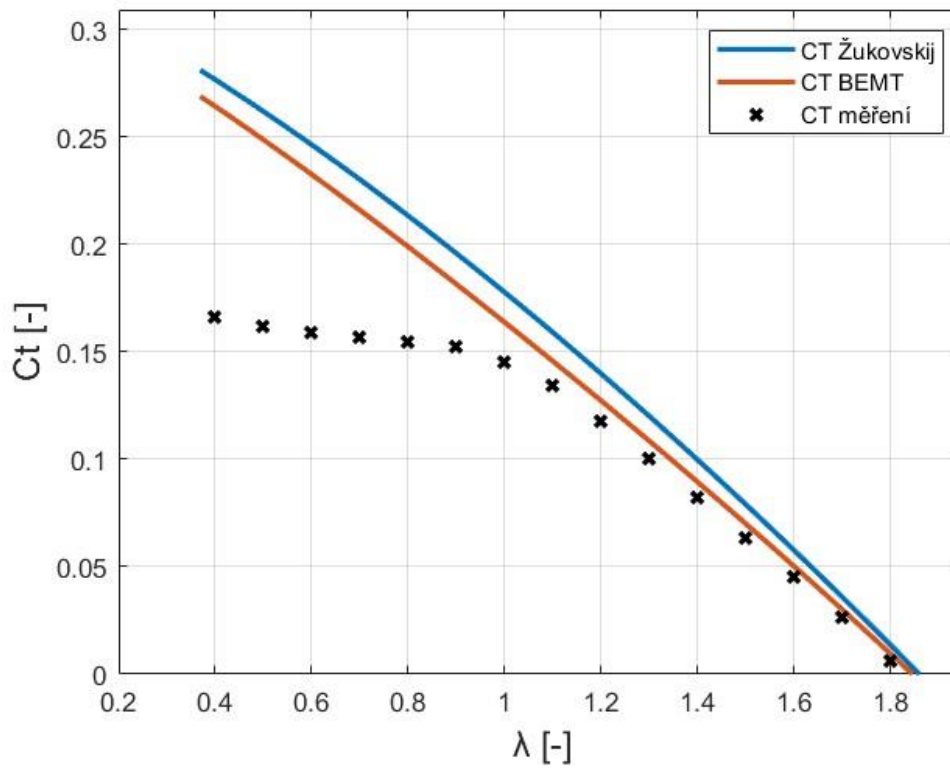
Stanovení výkonnostních charakteristik vrtule je podstatné pro následné výpočty při konstruování letounu. Jsou důležité pro výpočet výkonů letounu v různých režimech letu a také k pevnostnímu výpočtu vrtule. Je možné je spočítat pomocí analytických metod, nebo numerických výpočtů CFD. Možností je také experimentální měření v aerodynamickém tunelu.

### **6.4.1 Kontrola výpočetních metod**

Pro účely této práce byly zvoleny dvě analytické metody, a to Blade element momentum theory a Žukovského vírová teorie. Postup výpočtu je popsán v předchozích kapitolách této práce. V obou případech je využit iterační postup a jsou implementovány v prostředí programu Matlab. Pro kontrolu správnosti výpočtů byla vybrána vrtule, jejíž charakteristiky byly změřeny experimentálně. Konkrétně jde o třílistou vrtuli 5868-9, která využívá profil Clark Y. Geometrické charakteristiky pro výpočet a výkonnostní charakteristiky byly odečteny z NACA Reportu No. 650. Srovnání výsledků analytických metod je zobrazeno v následujících grafech. [15]

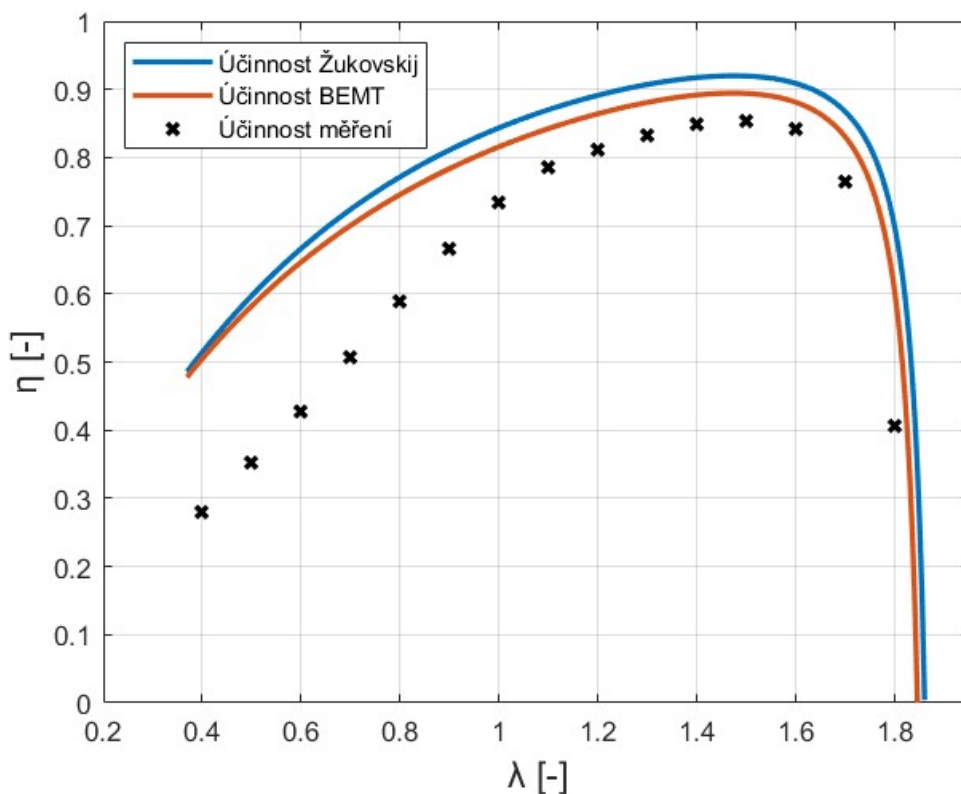


Graf. 7 Závislost součinitele výkonu vrtule 5868-9 na rychlostním poměru



Graf. 6 Závislost součinitele tahu vrtule 5868-9 na rychlostním poměru



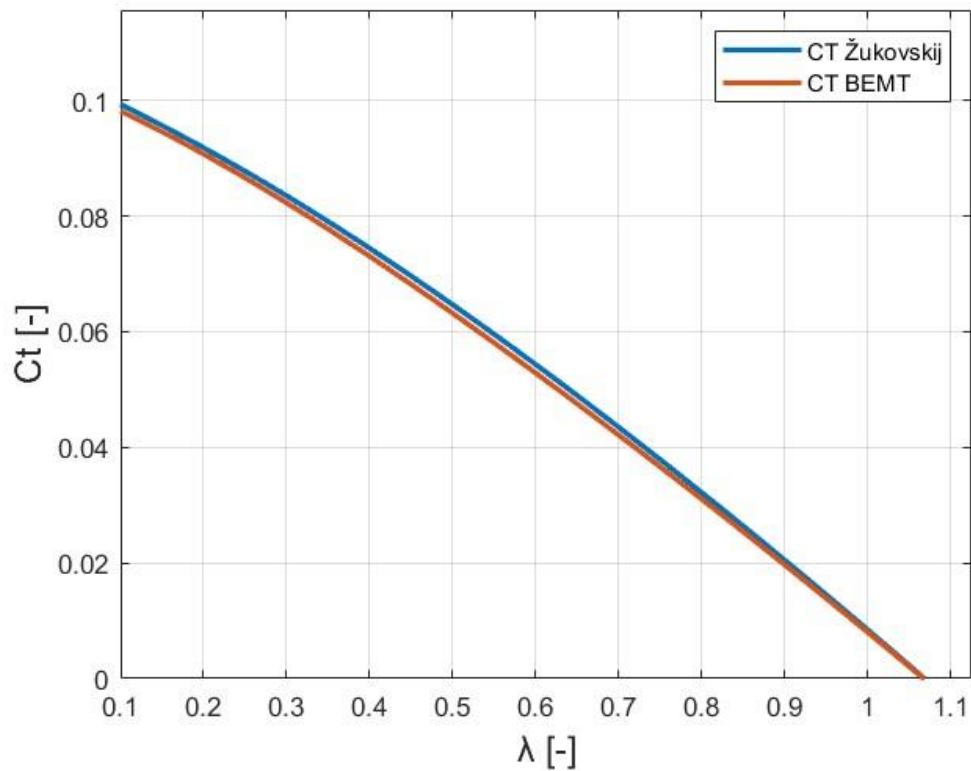


Graf. 8 Závislost účinnosti vrtule 5868-9 na rychlostním poměru

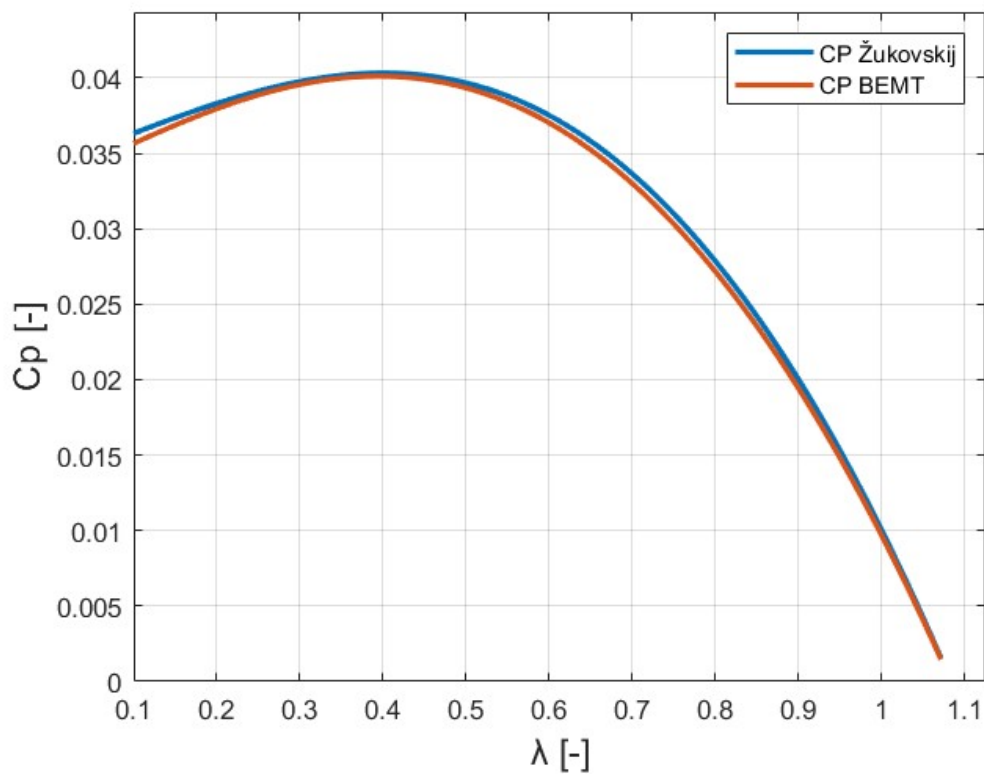
Z výsledků je patrné, že implementace obou výpočetních metod proběhla v pořádku. Obě metody dávají podobné výsledky. S rostoucím rychlostním poměrem se rozdíly mezi metodami zmenšují. S výsledky měření pro všechny proměnné lépe koreluje metoda BEMT. Obecně platí, že metody jsou relativně přesné při vyšších rychlostních poměrech. V případě součinitele výkonu dávají metody dostatečně přesné výsledky od  $\lambda = 0,5$ . Při nižších hodnotách obě metody potřebný výkon na hřídeli podhodnocují. V případě součinitele tahu naopak metody při nižších rychlostních poměrech výsledky nadhodnocují. Reálně tedy vrtule generuje menší tah, než je očekáváno.

Pro výpočty výkonů letounu je třeba počítat s rezervou, jelikož dle vypočítaných charakteristik budou výkony nadhodnocovány. V případě pevnostního výpočtu vrtulového listu bude naopak zatížení podhodnocováno.

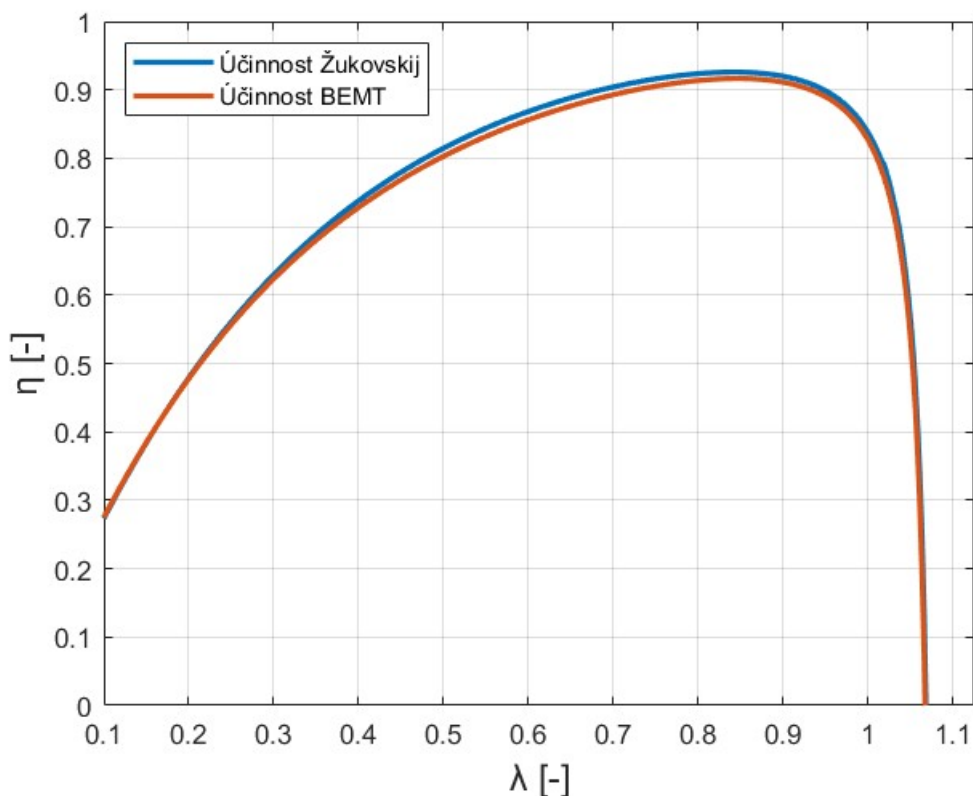
## 6.4.2 Charakteristiky navržené vrtule



Graf. 9 Závislost součinitele tahu navržené vrtule na rychlostním poměru



Graf. 10 Závislost součinitele výkonu navržené vrtule na rychlostním poměru



Graf. 11 Závislost účinnosti navržené vrtule na rychlostním poměru

## 6.5 Pevnostní kontrola vrtule

Pevnostní výpočet musí splňovat požadavky dokumentu Certifikační specifikace pro vrtule CS-P (EASA). Dle CS-P 240 nesmí při nejnáročnějších provozních podmínkách maximální napětí na vrtuli přesáhnout přijatelné hodnoty. Je třeba věnovat pozornost účinkům zbytkových napětí. Dle CS-P 350 (Zkoušky zatížením odstředivými silami) musí být vrtulová hlava, soustava uchycení vrtulových listů a listy vrtule navrženy tak aby přenesly dvojnásobek maximálního zatížení od odstředivých sil. Přibližně to odpovídá 141 % maximálních provozních otáček. Při tomto zatížení nesmí dojít k poruše, trvalé deformaci a nesprávnému fungování vrtule. Předpis se zabývá i dalšími požadavky, jako dopad ptáků, úder blesku nebo dynamickou pevnost. Tyto požadavky však nejsou relevantní pro tuto práci. [16]

### 6.5.1 Zatížení vrtule

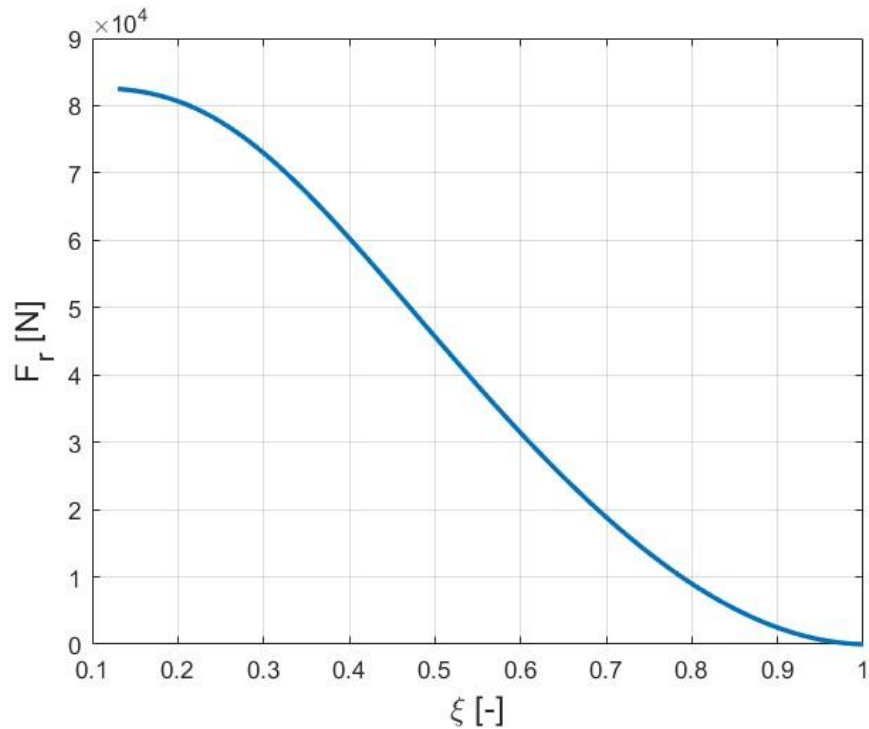
Tato práce vychází ze zjednodušeného výpočtu zatížení od kvazistatických sil. Uvažuje se pouze tahové napětí od odstředivých sil a ohybového napětí od aerodynamických sil. Ostatní účinky je možné zanedbat. Pro celkové napětí tedy platí:

$$\sigma_c = \sigma_\omega + \sigma_o.$$

Kde  $\sigma_c$  je celkové napětí,  $\sigma_\omega$  je tahové napětí od odstředivých sil a  $\sigma_o$  je ohybové napětí. Při výpočtu je již započítán koeficient bezpečnosti  $k = 2$ , který je dán předpisy. Otáčky budou

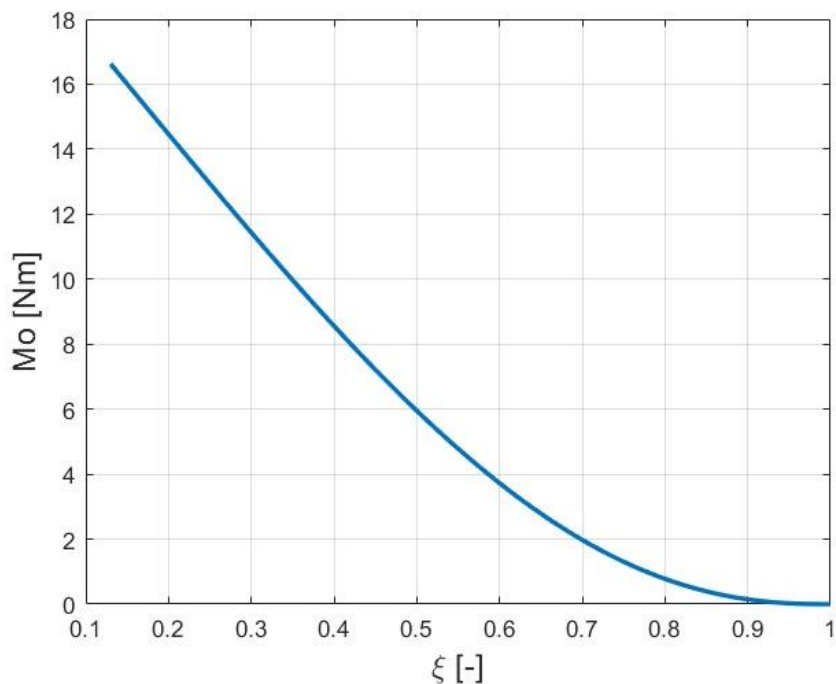
totiž nastaveny na 141 % maximálních provozních otáček. Budou uvažovány statické podmínky, tedy při nulové rychlosti letadla.

Odstředivá síla je stanovena dle postupu popsaného v kapitole 5.3.1. Její průběh v závislosti na poměrném poloměru je zobrazen na následujícím grafu.



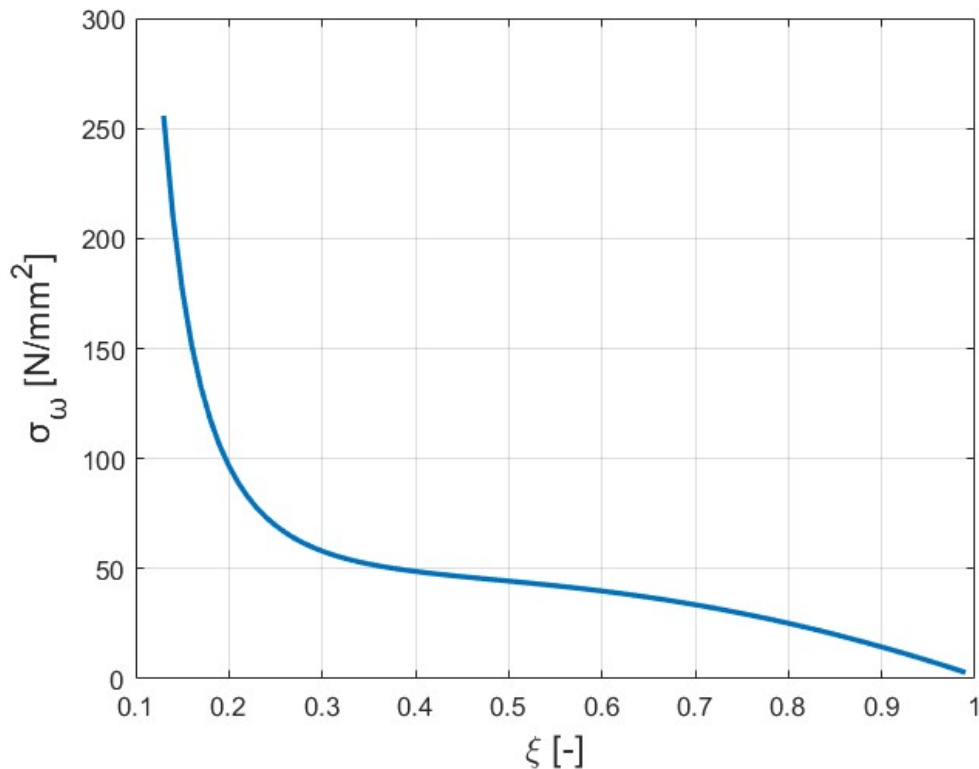
Graf. 12 Průběh odstředivé síly v závislosti na poměrném poloměru

Výpočet aerodynamického momentu byl proveden dle postupu popsaného v kapitole 5.4.3. Jeho průběh v závislosti na poměrném poloměru je zobrazen na následujícím grafu.



Graf. 13 Průběh aerodynamického momentu v závislosti na poměrném poloměru

Jak u odstředivé síly, tak u ohybového momentu platí, že maximální hodnoty nabývají na kořenovém profilu. Tahové napětí od odstředivé síly je dáno podílem odstředivé síly a plochy řezu listu na odpovídajícím poloměru.



Graf. 14 Průběh tahového napětí od odstředivých sil v závislosti na poměrném poloměru

Maximální napětí od odstředivé síly bylo stanoveno  $\sigma_\omega = 255,7 \text{ N/mm}^2$ . Ohybové napětí je stanovené následovně:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{I_{min}} \eta_{1max}.$$

Kde  $\eta_{1max}$  je vzdálenost krajního taženého vlákna průřezu od hlavní osy setrvačnosti a  $I_{min}$  je minimální moment setrvačnosti, k centrální ose. Maximální hodnota byla určena na kořenovém profilu  $\sigma_o = 6,6 \text{ N/mm}^2$ . Pro hodnotu celkového napětí tedy platí  $\sigma_c = 262,3 \text{ N/mm}^2$ . Jako materiál vrtulového listu byla stanovena hliníková slitina 2024 T351 s mezí kluzu  $\sigma_k = 290 \text{ N/mm}^2$ . Jelikož při výpočtu zatížení byl již vzat v potaz součinitel bezpečnosti  $k = 2$ , je možné konstatovat, že vrtulový list pevnostně vyhovuje.

## 7 Závěr

V úvodní části této práce byly popsány základní principy fungování letecké vrtule. Byly vysvětleny základní pojmy související s problematikou vrtulového listu. V této části je nejdůležitější definování geometrických a výkonnostních charakteristik. Ty jsou důležité pro návrh a analýzu vrtule.

V druhé části byly popsány aerodynamické teorie vrtulí. První teorií, která je v práci představena je hybnostní teorie, která definuje vrtuli jako nekonečně tenký disk, na který je přiváděna energie v podobě změny tlaku. Práce pokračuje popisem vztahů teorie izolovaného elementu listu a teorií Blade element momentum theory (BEMT), která předchází dvě teorie kombinuje. Poslední teorií zde představenou je Žukovského vírová teorie, která nahrazuje list soustavou vírů. Tyto teorie je možné využít k výpočtu výkonnostních charakteristik pro definovanou geometrii vrtulového listu.

Ve třetí části je položen teoretický základ pro návrh geometrie vrtule a pro její pevnostní analýzu. Byly zde popsány tři analytické metody pro návrh listu. Z nich byla následně jedna vybrána pro stanovení vlastní geometrie dle vstupních parametrů. Nejdůležitější pro pevnostní analýzu je stanovení všech podstatných typů zatížení. V této práci je kladen důraz na kvazistatické zatížení od hmotových a aerodynamických sil. Největší vliv má tahové zatížení od odstředivých sil a ohybový moment od aerodynamických sil. Je zde proto popsán relativně podrobný postup pro jejich výpočet.

Závěrečnou a nejdůležitější částí této práce je samotný návrh vrtule pro zvolené parametry. Byla vybrána metoda dle E. E. Larrabeho. Jedná se o relativně snadno naprogramovatelnou metodu bez potřeby iterativního řešení. Pro výpočet výkonnostních charakteristik byla využita teorie BEMT a Žukovského vírová teorie. Výpočetní postup byl naprogramován v prostředí programu Matlab. Pro ověření výpočetní metody byly metody testovány na vrtuli NACA 5868-9, pro kterou existují charakteristiky změřené v aerodynamickém tunelu. Obě metody se relativně dobře shodovaly s měřením, zvláště pro vyšší rychlostní poměry. Následně tedy mohly být spočítány charakteristiky pro mnou navrženou vrtuli. V posledním kroku byla provedena pevnostní kontrola dle certifikační specifikace pro vrtule CS-P (EASA). Byla spočtena celková napjatost z dílčích zatížení od aerodynamických a hmotových sil. Dle předpokladů je maximální napětí na kořenovém profilu. Toto napětí bylo porovnáno s mezí kluzu vybraného materiálu. Z výsledků vyplývá, že vrtulový list pevnostně vyhovuje.

# Literatura

- [1]. **LARRABEE, E. Eugene.** Practical Design of Minimum Induced Loss Propellers [online]. In: SAE International, 1979, s. 2053-2062 [cit. 2024-03-18].
- [2]. **CARLTON, John.** Marine Propellers and Propulsion. Second Edition. Elsevier, 2007. ISBN 978-07506-8150-6.
- [3]. **Alexandrov, V. L.** Letecké vrtule. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1954.
- [4]. **SPAKOVŠZKY, Z.S.** Thermodynamics and Propulsion, Performance of Propellers. Online. Dostupné z: <https://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/thermodynamics/notes/node86.html>. [cit. 2024-05-20].
- [5]. Aerodynamics for Students, Blade Element Theory for Propellers. Online. Dostupné z: <https://www.aerodynamics4students.com/propulsion/blade-element-propeller-theory.php>. [cit. 2024-05-20].
- [6]. **RWIGEMA, M. K.** PROPELLER BLADE ELEMENT MOMENTUM THEORY WITH VORTEX WAKE DEFLECTION [online]. S. 3-5 [cit. 2024-05-20].
- [7]. **Brandt, John B.** Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers. Orlando: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2011. 61801.
- [8]. **N. ADKINS,** Charles a Robert H. LIEBECK. *Design of Optimum Propellers* [online]. 1994 [cit. 2024-03-26].
- [9]. **HUJEČEK, Zdeněk.** Vrtule: studijní modul 17. Učební texty dle předpisu JAR-66. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-7204-363-3.
- [10]. **WALD, QuentinR.** The aerodynamics of propellers. In: Progress in Aerospace Sciences. Elsevier, 2006, s. 85-128.
- [11]. **PATRAO, Captao.** Implementation of Blade Element Momentum/Vortex Methods for the Design of Aero Engine Propeller. 2017.
- [12]. **LARRABEE, E. Eugene.** *Five years experience with minimum induced loss propellers.* Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [13]. **STATEČNÝ, Jiří a Zdeněk DOLEŽAL.** Pevnost a životnost leteckých turbínových motorů. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-01-00662
- [14]. "Aerodynamické charakteristiky profilu Clark-Y při Re 500 000." [Online]. Available: 59 <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=clarky-il>. [cit. 2024-05-20].
- [15]. **BIERMANN, David a P. HARTMAN,** Edwin. Report No. 650: The aerodynamic characteristics of six full-scale propellers having different airfoil sections. Langley Memorial Aeronautical Laboratory, 1939.
- [16]. Certification Specifications for Propellers – CS-P - Amendment 1 16 November 2006

[17]. **BROŽ, Václav.** Rozložení cirkulace na vrtulovém listu. Zpravodaj VZLÚ, 1963.

[18]. **KLESA, Jan.** Letecké vrtule. České vysoké učení technické v Praze, 2022.