



**FAKULTA  
STROJNÍ  
ČVUT V PRAZE**

## **Ústav letadlové techniky**

### **Analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle**

### **Analysis of multicopter rotor at low Reynolds number**

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**2024**

**Pavel RŮŽIČKA**

**Studijní program:** N0716A270010 LETECTVÍ A KOSMONAUTIKA

**Specializace:** Letadla a bezpilotní systémy

**Vedoucí práce:** Ing. Jan Klesa, Ph.D.

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Růžička** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **483934**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav letadlové techniky**  
Studijní program: **Letectví a kosmonautika**  
Specializace: **Letadla a bezpilotní systémy**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle**

Název diplomové práce anglicky:

**Analysis of multicopter rotor at low Reynolds number**

Pokyny pro vypracování:

Pro vypracování proveďte:

- 1) Metody aerodynamické analýzy rotoru ve visu
- 2) Popis základní geometrie rotoru a její parametrizace
- 3) Simulace proudění pomocí CFD
- 4) Numerická simulace rotoru ve visu pomocí CFD
- 5) Pevnostní kontrola rotoru
- 6) Závěr

Seznam doporučené literatury:

Dle pokynů vedoucího práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jan Klesa, Ph.D. ústav letadlové techniky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **26.04.2024**

Termín odevzdání diplomové práce: **24.05.2024**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Ing. Jan Klesa, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
Ing. Milan Dvořák, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci s názvem: „Analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle“ vypracoval samostatně s použitím literatury a programů uvedených v příložených seznamech.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne .....

.....

Pavel Růžička

## **Poděkování**

Rád bych touto cestou vyjádřil své upřímné poděkování panu Ing. Janu Klesovi, Ph.D. za odborné vedení práce, ochotný přístup a cenné rady, které mi pomohly tuto práci zkompletovat. Dále bych chtěl poděkovat panu Ing. Jiřímu Teichmanovi za poskytnutí podkladů a užitečných rad v oblasti výpočetní dynamiky tekutin. Mé poděkování také patří pracovníkům CIIRC ČVUT za konzultace související s 3D tiskem rotorů. V neposlední řadě děkuji své rodině a svým blízkým za neustálou podporu a trpělivost během celého studia.

## Anotační list

Autor: Pavel Růžička  
Název práce: Analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle  
Rok: 2024  
Studijní program: Letectví a kosmonautika  
Studijní obor: Letadla a bezpilotní systémy  
Ústav: Ústav letadlové techniky  
Vedoucí práce: Ing. Jan Klesa, Ph.D.  
Bibliografické údaje: počet stran: 109  
počet obrázků: 40  
počet tabulek: 28  
počet grafů: 26  
počet příloh: 12

**Klíčová slova:** analýza rotoru, multikoptéra, výpočetní dynamika tekutin, Ansys Fluent, Newtonova metoda, MATLAB, pevnostní analýza, Abaqus, experimentální měření rotoru

**Anotace:** Diplomová práce se zabývá analýzou rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle. Úvodní část je věnována metodám aerodynamické analýzy rotoru multikoptéry nacházející se ve visu. Na základě získaných teoretických poznatků byla provedena numerická simulace rotoru multikoptéry ve visu pomocí výpočetní dynamiky tekutin. Výsledky analýzy následně posloužily jako vstupní data pro optimalizaci geometrie rotoru, v rámci níž byla použita Newtonova metoda. Část optimalizačního procesu byla implementována do výpočetního prostředí MATLAB. V závěru práce je věnován prostor 3D tisku rotorů, jejich pevnostní kontrole v programu Abaqus a experimentálnímu měření k ověření správnosti výsledků získaných pomocí výpočetní dynamiky tekutin.

## Annotation list

Author: Pavel Růžička  
Title: Analysis of multicopter rotor at low Reynolds number  
Year: 2024  
Study Programme: Aerospace Engineering  
Field of study: Aircraft and UASs  
Institute: Department of Aerospace Engineering  
Supervisor: Ing. Jan Klesa, Ph.D.  
Bibliographic data: number of pages: 109  
number of figures: 40  
number of tables: 28  
number of graphs: 26  
number of appendix: 12

**Keywords:** analysis of rotor, multicopter, Computational Fluid Dynamics, Ansys Fluent, Newton's method, MATLAB, strength analysis, Abaqus, experimental measurement of rotor

**Annotation:** The Master thesis deals with the analysis of a multicopter rotor at low Reynolds number. The introductory part is devoted to the methods of aerodynamic analysis of the rotor of a multicopter in hover. Based on the theoretical knowledge obtained, numerical simulation of the rotor of multicopter in the hover was performed using Computational Fluid Dynamics. The results of the analysis were subsequently used as input data for rotor geometry optimization, in which Newton's method was applied. Part of the optimization process was implemented in the MATLAB. The thesis concludes with the 3D printing of the rotors, their strength analysis in Abaqus and experimental measurements to verify the accuracy of the results obtained by Computational Fluid Dynamics.

# Obsah

|   |    |
|---|----|
| Seznam použitých symbolů .....                              | 10 |
| Seznam použitých zkratk .....                               | 14 |
| Seznam použitých programů.....                              | 14 |
| Seznam obrázků .....  | 15 |
| Seznam grafů.....   | 16 |
| Seznam tabulek.....   | 17 |
| Seznam příloh.....  | 18 |
| 1. Úvod.....  | 19 |
| 2. Aerodynamická analýza rotoru multikoptéry .....          | 20 |
| 2.1 Jednodušší výpočetní modely .....                       | 20 |
| 2.1.1 Teorie ideálního propulzoru .....                     | 20 |
| 2.1.2 Teorie izolovaného elementu listu .....               | 22 |
| 2.2 Metody s vyšší přesností.....                           | 24 |
| 2.2.1 Metody experimentálního měření rotorů.....            | 24 |
| 2.2.1.1 Měření v aerodynamických tunelech .....             | 24 |
| 2.2.1.2 Měření na rotorové věži.....                        | 28 |
| 3. Popis základní geometrie rotorových listů .....          | 29 |
| 3.1 Parametrizace základní geometrie rotorových listů ..... | 29 |
| 4. Výpočetní dynamika tekutin.....                          | 31 |
| 4.1 Navier-Stokesovy rovnice .....                          | 31 |
| 4.1.1 Navier-Stokesovy rovnice v rámci CFD .....            | 33 |
| 4.1.2 Zjednodušení Navier-Stokesových rovnic.....           | 35 |
| 4.2 Struktura numerické simulace.....                       | 35 |
| 4.3 Diskretizace .....                                      | 36 |
| 4.3.1 Generování sítě .....                                 | 37 |
| 4.4 Řešení turbulentního proudění.....                      | 38 |
| 4.4.1 Přímá numerická simulace.....                         | 41 |

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 4.4.2   | Metoda LES .....  | 41 |
| 4.4.3   | RANS modely .....   | 42 |
| 4.4.3.1 | Modely turbulence s turbulentní viskozitou .....                          | 43 |
| 4.4.3.2 | Modely Reynoldsových napětí .....   | 46 |
| 4.4.4   | Modelování proudění v blízkosti stěny .....                               | 46 |
| 4.5     | Okrajové podmínky .....   | 48 |
| 4.6     | Chyby a vlastnosti numerické simulace .....                               | 49 |
| 5.      | Tvarová optimalizace .....  | 51 |
| 5.1     | Optimalizační metody .....  | 52 |
| 5.1.1   | Metody globální optimalizace .....  | 52 |
| 5.1.2   | Metody lokální optimalizace .....   | 53 |
| 5.2     | Parametrizace tvaru .....   | 54 |
| 6.      | Numerická simulace rotoru multikoptéry ve visu.....                       | 56 |
| 6.1     | Metody výpočtu .....  | 57 |
| 6.1.1   | Metoda MRF.....   | 58 |
| 6.1.2   | Metoda Sliding Mesh .....   | 58 |
| 6.2     | Příprava geometrie .....  | 59 |
| 6.3     | Generování numerické sítě .....   | 61 |
| 6.3.1   | Mezní vrstva .....  | 61 |
| 6.3.2   | Studie nezávislosti sítě .....  | 63 |
| 6.4     | Numerické nastavení .....   | 65 |
| 6.5     | Průběh výpočtu .....  | 67 |
| 6.6     | Výsledky analýzy .....  | 69 |
| 7.      | Tvarová optimalizace rotorových listů.....                                | 72 |
| 7.1     | Postup optimalizace.....  | 72 |
| 7.2     | Výsledky optimalizace .....   | 74 |
| 7.3     | Úprava geometrie rotoru na konci listu .....                              | 74 |
| 8.      | Modifikace původního výpočetního skriptu pro návrh rotorových listů ..... | 76 |
| 8.1     | Vliv parametrů geometrie .....  | 77 |



---

|  |     |
|--|-----|
| 9. Pevnostní analýza.....                          | 81  |
| 9.1 Zatížení rotoru.....                           | 81  |
| 9.2 Pevnostní kontrola rotoru .....                | 82  |
| 9.2.1 Nastavení řešiče .....                       | 83  |
| 9.2.2 Výsledky pevnostní kontroly .....            | 84  |
| 10. 3D tisk.....                                   | 87  |
| 11. Experimentální měření rotoru multikoptéry..... | 88  |
| 11.1 Popis měřicího zařízení .....                 | 88  |
| 11.2 Vyvažování rotorů.....                        | 90  |
| 11.3 Výsledky experimentálního měření .....        | 90  |
| 12. Závěr .....                                    | 101 |
| Seznam použité literatury .....                    | 103 |
| Přílohy.....                                       | 110 |

## Seznam použitých symbolů

|               |               |                                       |
|---------------|---------------|---------------------------------------|
| $a$           | $[m/s]$       | rychlost zvuku                        |
| $\vec{a}$     | $[-]$         | jednotkový vektor                     |
| $A$           | $[m^2; mm^2]$ | plocha disku                          |
| $B$           | $[-]$         | Prandtlův ztrátový faktor             |
| $C$           | $[-]$         | empirická konstanta                   |
| $c$           | $[m; mm]$     | délka tětiny                          |
| $C_d$         | $[-]$         | součinitel odporu                     |
| $C_{d0}$      | $[-]$         | součinitel odporu při nulovém vztlaku |
| $C_l$         | $[-]$         | součinitel vztlaku                    |
| $C_{l\alpha}$ | $[-]$         | stoupání vztlakové čáry               |
| $C_p$         | $[-]$         | součinitel výkonu                     |
| $C_{pi}$      | $[-]$         | indukovaný součinitel výkonu          |
| $C_{p0}$      | $[-]$         | profilový součinitel výkonu           |
| $C_T$         | $[-]$         | součinitel tahu                       |
| $D$           | $[N]$         | odpor                                 |
| $D$           | $[m; mm]$     | průměr                                |
| $D_R$         | $[m; mm]$     | průměr rotoru                         |
| $E$           | $[J/kg]$      | celková energie na jednotku hmotnosti |
| $E(\kappa)$   | $[m^3/s^2]$   | Energetické spektrum                  |
| $E_K$         | $[J]$         | kinetická energie                     |
| $\vec{f}$     | $[N/kg]$      | vektor vnějších sil                   |
| $\vec{f}_e$   | $[N/kg]$      | vektor vnějších objemových sil        |
| $F$           | –             | kriteriální funkce                    |
| $\vec{F}$     | –             | vektor toku                           |
| $F_{od}$      | $[N]$         | odstředivá síla                       |
| $F_x$         | $[N]$         | síla ve směru osy x                   |
| $F_y$         | $[N]$         | síla ve směru osy y                   |
| $F_z$         | $[N]$         | síla ve směru osy z                   |
| $F_C$         | –             | konvenční tok                         |
| $F_D$         | –             | difúzní tok                           |

|                 |                                   |                               |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| $F_V$           | –                                 | viskózní tok                  |
| $FM$            | [–]                               | Figure of Merit (účinnost)    |
| $\vec{G}$       | –                                 | gradient kritériální funkce   |
| $\underline{H}$ | –                                 | Hessián kritériální funkce    |
| $j$             | [–]                               | jistota                       |
| $k$             | [ $m^2/s^2$ ]                     | turbulentní kinetická energie |
| $k$             | [–]                               | součinitel bezpečnosti        |
| $K$             | [–]                               | zúžení listu                  |
| $K_V$           | [–]                               | motorová konstanta            |
| $l$             | [ $m$ ]                           | délková škála                 |
| $L$             | [ $N$ ]                           | vztlak                        |
| $L$             | [–]                               | Lagrangeova funkce            |
| $m$             | [ $kg$ ]                          | hmotnost                      |
| $\dot{m}$       | [ $kg/s$ ]                        | hmotnostní průtok             |
| $M_x$           | [ $Nm$ ]                          | moment k ose x                |
| $M_y$           | [ $Nm$ ]                          | moment k ose y                |
| $M_z$           | [ $Nm$ ]                          | moment k ose z                |
| $M_K$           | [ $Nm$ ]                          | kroučící moment               |
| $n$             | [ $min^{-1}$ ]                    | otáčky rotoru                 |
| $\vec{n}$       | [–]                               | normálový vektor              |
| $N_b$           | [–]                               | počet listů                   |
| $p$             | [ $Pa$ ]                          | tlak                          |
| $P$             | [ $W$ ]                           | výkon rotoru                  |
| $Q_V$           | –                                 | objemové zdroje               |
| $Q_S$           | –                                 | plošné zdroje                 |
| $\dot{q}_h$     | [ $N \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ] | rychlost přenosu tepla        |
| $r$             | [–]                               | poměrný poloměr               |
| $\vec{r}$       | [ $m$ ]                           | polohový vektor               |
| $\vec{r}_0$     | [ $m$ ]                           | počáteční polohový vektor     |
| $R$             | [ $m; mm$ ]                       | poloměr rotoru                |
| $Re$            | [–]                               | Reynoldsovo číslo             |
| $S_p$           | [ $m^2; mm^2$ ]                   | plocha řezu                   |

|                |                                   |   |
|----------------|-----------------------------------|---|
| $\bar{S}_{ij}$ | [m/s]                             | složky Reynoldsova zprůměrovaného tenzoru rychlosti deformace |
| $t$            | [s]                               | čas   |
| $T$            | [N]                               | tah   |
| $T_0$          | [N]                               | požadovaný tah  |
| $T_S$          | [K]                               | teplota   |
| $\vec{u}$      | [m/s]                             | vektor rychlosti  |
| $\vec{u}_r$    | [m/s]                             | relativní rychlost pohyblivé soustavy                         |
| $u^+$          | [–]                               | bezrozměrná rychlost  |
| $\vec{v}$      | [m/s]                             | vektor rychlosti<br>(s komponenty $u, v, w$ )                 |
| $\vec{v}_r$    | [m/s]                             | relativní rychlost  |
| $\vec{v}_t$    | [m/s]                             | translační rychlost   |
| $V$            | [m/s]                             | rychlost  |
| $V_{tip}$      | [m/s]                             | obvodová rychlost konce listu rotoru                          |
| $V_0$          | [m/s]                             | rychlost v rovině 0   |
| $V_\infty$     | [m/s]                             | rychlost v rovině $\infty$                                    |
| $\vec{W}$      | –                                 | vektor konzervativních veličin                                |
| $\vec{x}$      | –                                 | vektor proměnných   |
| $y$            | [m; mm]                           | vzdálenost od osy rotace (poloměr)                            |
| $y^+$          | [–]                               | bezrozměrná vzdálenost od stěny                               |
| $\alpha$       | [rad; °]                          | úhel náběhu   |
| $\alpha_1$     | [rad; °]                          | úhel náběhu pro max. poměr $\frac{C_l}{C_d}$                  |
| $\alpha_{75}$  | [rad; °]                          | úhel náběhu v 75 % poloměru                                   |
| $\varepsilon$  | [m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ] | rychlost disipace   |
| $\theta$       | [rad; °]                          | úhel nastavení listu  |
| $\theta_{75}$  | [rad; °]                          | úhel nastavení listu v 75 % poloměru                          |
| $\theta_{tw}$  | [rad; °]                          | zkroucení listu   |
| $\delta_{ij}$  | [–]                               | Kroneckerovo delta  |
| $\kappa$       | [–]                               | Karmanova konstanta   |
| $\kappa_P$     | [–]                               | součinitel indukovaného výkonu                                |
| $\rho$         | [kg/m <sup>3</sup> ]              | hustota   |
| $\Omega$       | [m <sup>3</sup> ]                 | kontrolní objem   |

|                         |                                  |                                   |
|-------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| $\Omega$                | $[rad/s]$                        | úhlová rychlost                   |
| $\partial\Omega$        | $[-]$                            | hranice kontrolního objemu        |
| $\Phi$                  | $-$                              | obecná veličina proudění          |
| $\bar{\Phi}$            | $-$                              | časově střední složka             |
| $\Phi'$                 | $-$                              | fluktuace                         |
| $\sigma$                | $[-]$                            | plnost rotoru                     |
| $\sigma_0$              | $[-]$                            | plnost rotoru kořene listu        |
| $\sigma_{tip}$          | $[-]$                            | plnost rotoru konce listu         |
| $\sigma_{max}$          | $[N/mm^2]$                       | max. normálové napětí             |
| $\bar{\tau}$            | $[N/m^2]$                        | tenzor viskózního napětí          |
| $\tau_{ij}^R$           | $[N/m^2]$                        | složky Reynoldsova tenzoru napětí |
| $\Gamma$                | $-$                              | cirkulace                         |
| $\lambda$               | $[-]$                            | Lagrangeovy multiplikátory        |
| $\Theta$                | $[J]$                            | práce viskózních napětí           |
| $\mu$                   | $[N \cdot s \cdot m^{-2}]$       | dynamická viskozita               |
| $\mu_T$                 | $[N \cdot s \cdot m^{-2}]$       | turbulentní viskozita             |
| $\omega$                | $[s^{-1}]$                       | specifická rychlost disipace      |
| $\overline{\rho u' v'}$ | $[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]$ | tenzor turbulentních napětí       |

## Seznam použitých zkratek

- BEMT – Teorie izolovaného elementu listu v kombinaci s teorií ideálního propulzoru  
(*The Blade Element Momentum Theory*)
- BET – Teorie izolovaného elementu listu (*The Blade Element Theory*)
- BLDC – Bezkartáčový stejnosměrný motor (*Brushless DC Electric Motor*)
- BOI – Část výpočetní domény pro lokální zjemnění sítě (*Body of Influence*)
- CFD – Výpočetní dynamika tekutin (*Computational Fluid Dynamics*)
- CST – Metoda parametrizace tvaru (*Class-Shape-Transformation*)
- DNS – Přímá numerická simulace (*Direct Numerical Simulation*)
- EASA – Evropská agentura pro bezpečnost letectví (*European Union Aviation Safety Agency*)
- EVM – Modely turbulence s turbulentní viskozitou (*Eddy Viscosity Models*)
- GCI – Index konvergence sítě (*Grid Convergence Index*)
- LES – Simulace velkých vírů (*Large Eddy Simulation*)
- MJF – Metoda 3D tisku (*Multi Jet Fusion*)
- MRF – Metoda řešení proudění kolem pohyblivých částí (*Multiple Reference Frame*)
- PDR – Parciální diferenciální rovnice
- RANS – Reynoldsovy středované Navier-Stokesovy rovnice  
(*Reynolds Averaged Navier-Stokes*)
- RSM – Reynoldsovy napěťové modely (*Reynolds Stress Models*)
- URANS – Nestacionární RANS (*Unsteady RANS*)
- SST – Dvourovnicový turbulentní model (*Shear Stress Transport*)

## Seznam použitých programů

- Abaqus – softwarová sada pro analýzu konečných prvků firmy Dassault Systemes
- Ansys Fluent – software pro simulaci proudění firmy Ansys
- Ansys SpaceClaim – software pro 3D CAD modelování firmy Ansys
- Autodesk Inventor – adaptivní 3D modelář, softwarová CAD aplikace firmy Autodesk
- ChatGPT – chatbot firmy OpenAI
- Microsoft Excel – tabulkový procesor firmy Microsoft
- MATLAB – interaktivní programové prostředí a skriptovací programovací jazyk  
(*Matrix laboratory*)

## Seznam obrázků

|   |    |
|---|----|
| obr. 1: Rychlosti a aerodynamické prostředí na elementu listu.....                  | 22 |
| obr. 2: Testovací sekce aerodynamického tunelu UIUC.....                            | 25 |
| obr. 3: Měřicí technika.....  | 26 |
| obr. 4: Snímač kroutícího momentu instalovaný v měřícím zařízení.....               | 26 |
| obr. 5: Stojan k uchycení testovaných rotorů.....                                   | 27 |
| obr. 6: Zařízení k uchycení multikoptér a rotoru na stojan.....                     | 27 |
| obr. 7: Měřicí rotorová věž.....  | 28 |
| obr. 8: Vyznačení specifických částí základní geometrie rotoru.....                 | 30 |
| obr. 9: Definice konečného kontrolního objemu.....                                  | 32 |
| obr. 10: Struktura a postup numerické simulace.....                                 | 35 |
| obr. 11: Klasifikace diskretizačních metod dle flexibility a přesnosti.....         | 37 |
| obr. 12: Rozdělení metod k řešení turbulentního proudění.....                       | 39 |
| obr. 13: Rozdíl výsledků jednotlivých metod.....                                    | 39 |
| obr. 14: Energetické spektrum turbulence $E(\kappa)$ s rozsahem použití modelů..... | 40 |
| obr. 15: Rozdíl metod DNS, LES a RANS.....  | 40 |
| obr. 16: Schématické rozdělení struktur v rámci metody LES.....                     | 42 |
| obr. 17: Rozdělení mezní vrstvy.....  | 47 |
| obr. 18: Řešení proudění v blízkosti stěny pro různá Reynoldsova čísla.....         | 48 |
| obr. 19: Vztah mezi řešeními, chybami a vlastnostmi.....                            | 50 |
| obr. 20: Obecné schéma optimalizačního procesu.....                                 | 51 |
| obr. 21: Algoritmus optimalizace.....   | 52 |
| obr. 22: Postup tvarové optimalizace pomocí Adjoint solveru.....                    | 54 |
| obr. 23: Postup CFD úlohy.....  | 56 |
| obr. 24: Stacionární a pohyblivá vztažná soustava.....                              | 57 |
| obr. 25: Výpočetní doména.....  | 60 |
| obr. 26: Rozdělení oblastí rotoru.....  | 60 |
| obr. 27: Mezní vrstva – řez v 75 % poloměru rotoru.....                             | 63 |
| obr. 28: Okrajové podmínky.....   | 67 |
| obr. 29: Proudové pole rotoru – základní geometrie.....                             | 71 |
| obr. 30: Schéma optimalizace geometrie rotorových listů.....                        | 73 |
| obr. 31: Původní a modifikovaná geometrie.....                                      | 75 |
| obr. 32: NACA měření – profil NACA 23012.....                                       | 80 |

|  |    |
|--|----|
| obr. 33: Zatížení rotoru .....   | 83 |
| obr. 34: Pevnostní analýza – Výsledná optimalizovaná geometrie – max. otáčky.....        | 85 |
| obr. 35: HP-Multi-Jet-Fusion 4200.....   | 87 |
| obr. 36: Vytisknutá optimalizovaná geometrie (3. iterace) se zaoblením konce listu ..... | 87 |
| obr. 37: Rám stojanu měřicího zařízení .....   | 89 |
| obr. 38: Umístění komponent u horizontální varianty měření .....                         | 90 |
| obr. 39: Vyvažování rotorů .....   | 90 |
| obr. 40: Detail měřicího zařízení a uchycení rotoru .....                                | 91 |

## Seznam grafů

|   |    |
|---|----|
| graf 1: Výsledné hodnoty bezrozměrné vzdálenosti od stěny $y^+$ .....                             | 63 |
| graf 2: Průběh kroutícího momentu v závislosti na počtu iterací – základní geometrie.....         | 68 |
| graf 3: Průběh tahu v závislosti na počtu iterací – základní geometrie .....                      | 68 |
| graf 4: Závislost kroutícího momentu z CFD simulací a výpočetního skriptu .....                   | 77 |
| graf 5: Závislost kroutícího momentu rotoru na zúžení listu .....                                 | 78 |
| graf 6: Závislost kroutícího momentu rotoru na úhlu náběhu v 75 % poloměru .....                  | 78 |
| graf 7: Závislost kroutícího momentu rotoru na zkroucení listu .....                              | 79 |
| graf 8: Závislost proudu naprázdno na přípusti motoru.....  | 88 |
| graf 9: Tahová křivka rotoru – základní geometrie .....   | 92 |
| graf 10: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – základní geometrie .....                      | 92 |
| graf 11: Výkonová křivka rotoru – základní geometrie.....   | 92 |
| graf 12: Tahová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 1. iterace .....                           | 93 |
| graf 13: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optimalizovaný rotor – 1. iterace.....        | 93 |
| graf 14: Výkonová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 1. iterace.....                          | 94 |
| graf 15: Tahová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 2. iterace .....                           | 94 |
| graf 16: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optimalizovaný rotor – 2. iterace.....        | 95 |
| graf 17: Výkonová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 2. iterace.....                          | 95 |
| graf 18: Tahová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení).....                     | 96 |
| graf 19: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení)..... | 96 |
| graf 20: Výkonová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení).....                   | 96 |
| graf 21: Tahová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení).....                         | 97 |
| graf 22: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení).....     | 97 |
| graf 23: Výkonová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení) .....                      | 98 |
| graf 24: Tahová křivka – všechny rotory .....   | 98 |



|   |    |
|---|----|
| graf 25: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – všechny rotory..... | 99 |
| graf 26: Výkonová křivka – všechny rotory.....                          | 99 |

## Seznam tabulek

|  |     |
|--|-----|
| tab. 1: Rozměry domén .....  | 59  |
| tab. 2: Vstupní hodnoty – y+ calculator.....   | 62  |
| tab. 3: Výsledky – y+ calculator.....  | 62  |
| tab. 4: Nastavení sítě – mezní vrstva .....  | 62  |
| tab. 5: Výsledky studie nezávislosti sítě .....  | 64  |
| tab. 6: Studie nezávislosti sítě – vliv velikosti domény .....                               | 64  |
| tab. 7: Numerické nastavení .....  | 65  |
| tab. 8: Okrajové podmínky.....   | 66  |
| tab. 9: Popis geometrií – CFD .....  | 69  |
| tab. 10: Výsledky analýzy – CFD.....   | 69  |
| tab. 11: Porovnání výsledků – CFD simulace a MATLAB .....                                    | 70  |
| tab. 12: Výsledky optimalizace rotorových listů .....  | 74  |
| tab. 13: Porovnání původní a modifikované geometrie .....                                    | 75  |
| tab. 14: Porovnání výsledků – CFD simulace a MATLAB – modifikovaný skript .....              | 76  |
| tab. 15: Popis vybraných geometrií – pevnostní kontrola.....                                 | 83  |
| tab. 16: Vlastnosti – polyamid 12.....   | 84  |
| tab. 17: Nastavení řešiče – Abaqus.....  | 84  |
| tab. 18: Pevnostní kontrola – Základní geometrie navržená v rámci bakalářské práce.....      | 85  |
| tab. 19: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 1. iterace – zaoblení konce listu .....     | 85  |
| tab. 20: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 2. iterace – zaoblení konce listu .....     | 85  |
| tab. 21: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 3. iterace – zaoblení konce listu .....     | 86  |
| tab. 22: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 3. iterace – bez zaoblení konce listu ..... | 86  |
| tab. 23: Data z měření – základní geometrie .....  | 91  |
| tab. 24: Data z měření – optimalizovaný rotor – 1. iterace (zaoblení konce listu).....       | 93  |
| tab. 25: Data z měření – optimalizovaný rotor – 2. iterace (zaoblení konce listu).....       | 94  |
| tab. 26: Data z měření – optimalizovaný rotor – 3. iterace (bez zaoblení konce listu).....   | 95  |
| tab. 27: Data z měření – optimalizovaný rotor – 3. iterace (zaoblení konce listu).....       | 97  |
| tab. 28: Porovnání výsledků – CFD simulace a experimentální měření.....                      | 100 |

## Seznam příloh

|   |     |
|---|-----|
| Příloha 1: Odvození zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie..... | 110 |
| Příloha 2: Obecné vyjádření gradientu a Hessiánu funkce F .....     | 111 |
| Příloha 3: Výkres základní geometrie rotoru .....                   | 112 |
| Příloha 4: Parametry sítě – studie nezávislosti sítě .....          | 113 |
| Příloha 5: Nastavení parametrů sítě .....                           | 113 |
| Příloha 6: Metoda Lagrangeových multiplikátorů.....                 | 114 |
| Příloha 7: Parametry tiskárny HP Multijet Fusion 4200 .....         | 115 |
| Příloha 8: Hmotnost tisknutých rotorů.....                          | 115 |
| Příloha 9: Parametry elektromotoru Dualsky XM3542EA-6.....          | 115 |
| Příloha 10: Parametry regulátoru Mezon 120 .....                    | 116 |
| Příloha 11: Parametry váhového senzoru YZC-131 .....                | 116 |
| Příloha 12: Parametry vývojové desky Arduino UNO R3 .....           | 116 |

# 1. Úvod

Bezpilotní letecké prostředky neboli drony nabývají v současné době stále většího významu, a to především díky jejich schopnosti plnit různorodé úkoly v širokém spektru aplikací. Velmi významnou roli hrají ve zbrojním průmyslu, což je patrné i z průběhu a způsobu vedení vojenských konfliktů v posledních letech. Výrazný nárůst případů využití dronů lze pozorovat i v civilním sektoru, ve kterém jsou nedílnou součástí přepravy nákladů, pozorování a průzkumu různých oblastí či stavebního průmyslu. I přes jejich rozšíření nedosáhly bezpilotní letecké prostředky svého plného potenciálu. Lze tedy očekávat, že v budoucnu počet jejich nasazení nadále poroste a další vývoj umožní jejich využití například při transportu lidí.

Nejčastěji jsou bezpilotní letecké prostředky rozděleny do tří kategorií, a to na multikoptéry, bezpilotní letouny a hybridní drony, které jsou kombinací dvou předchozích typů. Vzhledem k rozsahu tématu a značným odlišnostem mezi jednotlivými podskupinami se tato diplomová práce zabývá pouze problematikou multikoptér. Multikoptéry setrvávají převážnou část svého letového času ve visu a pro generování potřebného tahu využívají rotory, které se tak řadí k nejdůležitějším prvkům konstrukce multikoptér.

Cílem diplomové práce je analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle. V první části práce budou nejprve prodiskutovány různé metody aerodynamické analýzy rotorů multikoptéry. Prostor bude věnován především výpočetní dynamice tekutin, která se řadí mezi moderní metody návrhu a analýzy rotorů. Získané teoretické poznatky z dané oblasti budou aplikovány v další části práce, kdy bude realizována samotná numerická simulace rotoru multikoptéry ve visu. Modely rotorů, které budou simulacím podrobeny, budou vycházet z bakalářské práce *Návrh rotoru pro multikoptéru* [1], v rámci níž byla pomocí jednodušších výpočetních modelů navržena geometrie rotorových listů. S rozvojem multikoptér je kladen stále větší důraz na zlepšení aerodynamických vlastností rotorů. Z tohoto důvodu se další část práce zaměří na optimalizaci geometrie rotorů, při které budou jako vstupní data brány výsledky z předchozí analýzy. Pro implementaci optimalizačního procesu bude použit program MATLAB. Práce se bude následně zabývat pevnostní kontrolou rotorů, která proběhne v programu Abaqus. V závěrečné části bude věnován prostor 3D tisku rotorů a jejich následnému experimentálnímu měření, kterým se ověří správnost výsledků získaných pomocí výpočetní dynamiky tekutin.

## 2. Aerodynamická analýza rotoru multikoptéry

Bezpilotní prostředky nabývají v současné době stále většího významu, čímž narůstá zájem o kvalitní a podrobné analýzy aerodynamických vlastností rotorů či vrtulí. K aerodynamické analýze rotoru multikoptéry je možné přistupovat různými způsoby. Lze využít jednodušších výpočetních modelů, výpočetní dynamiku tekutin či experimentální měření. K ověření správnosti výsledků se v praxi často aplikuje kombinace všech tří přístupů. [2; 3; 4]

### 2.1 Jednodušší výpočetní modely

Termín jednodušší výpočetní modely zahrnuje teorie, které jsou v důsledku zanedbání některých fyzikálních jevů a zavedení několika zjednodušení považovány za metody s nižší přesností. V angličtině jsou souhrnně označeny termínem *Low fidelity methods*. V praxi jsou využívány relativně často, a to především z důvodu jejich jednoduchosti a rychlosti výpočtu. Zároveň poskytují cenné informace především v počáteční fázi návrhu. Mezi tyto teorie se řadí např. teorie ideálního propulzoru či teorie izolovaného elementu listu. Teorie izolovaného elementu listu rozšířená o základní principy teorie ideálního propulzoru se v anglické literatuře označuje zkratkou BEMT (*Blade Element Momentum Theory*). [2; 3; 4]

Pro lepší přehlednost diplomové práce budou v následujících kapitolách popsány pouze základní teoretické poznatky a nejdůležitější vztahy těchto teorií. Jejich podrobnější rešerši a návrhem rotorových listů pomocí teorie BEMT se zabývá bakalářská práce s názvem *Návrh rotoru pro multikoptéru* [1], na kterou tato diplomová práce navazuje. Výsledkem bakalářské práce byl základní model lineárně zkrouceného lichoběžníkového listu, který bude blíže popsán v kap. 3.

#### 2.1.1 Teorie ideálního propulzoru

Teorie ideálního propulzoru je považována za nejjednodušší teorii. V rámci této teorie se předpokládá, že rotor je nekonečně tenký disk a proud, který jím prochází, je kvazistacionární, jednorozměrný, nestlačitelný a neviskózní. Jako jediný zdroj ztrát jsou uvažovány indukované ztráty. Už z názvu vyplývá, že touto teorií lze dosáhnout ideálního případu rotoru, který má účinnost vždy vyšší než reálný rotor. [3]

Tah lze vypočítat na základě druhého Newtonova zákona, tedy

$$T = \dot{m}(V_{\infty} - V_0), \quad (2.1)$$

kde  $\dot{m}$  označuje hmotnostní průtok, rychlost  $V_\infty$  je celková rychlost daleko za rotorem a rychlost  $V_0$  je celková rychlost nerušeného proudu před rotorem. Výkon lze poté stanovit na základě zákona zachování energie

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} (V_\infty^2 - V_0^2). \quad (2.2)$$

Z rovnice (2.2) je patrné, že výkon rotoru je roven přírůstku kinetické energie tekutiny. [3]

Pomocí tahu  $T$  a výkonu  $P$  lze stanovit bezrozměrné součinitele tahu a výkonu, tedy

$$C_T = \frac{T}{\rho A V_{tip}^2} = \frac{T}{\rho A \Omega^2 R^2}, \quad (2.3)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho A V_{tip}^3} = \frac{P}{\rho A \Omega^3 R^3}, \quad (2.4)$$

kde parametr  $\rho$  vyjadřuje hustotu,  $A$  plochu disku,  $V_{tip}$  označuje obvodovou rychlost na konci listu,  $\Omega$  úhlovou rychlost a  $R$  poloměr rotoru. Pokud se multikoptéra nachází ve visu, lze výkon definovat jako

$$P = \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\rho A}}, \quad (2.5)$$

a součinitel výkonu stanovit pomocí součinitele tahu

$$C_P = \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}}. \quad [3] \quad (2.6)$$

Důležitou veličinou pro porovnání jednotlivých rotorů je účinnost  $FM$  (angl. *Figure of Merit*). Tato veličina vyjadřuje poměr ideálního výkonu potřebného pro dosažení visu ke skutečnému potřebnému výkonu. Několika úpravami lze dosáhnout konečného vztahu pro vyjádření  $FM$  jako

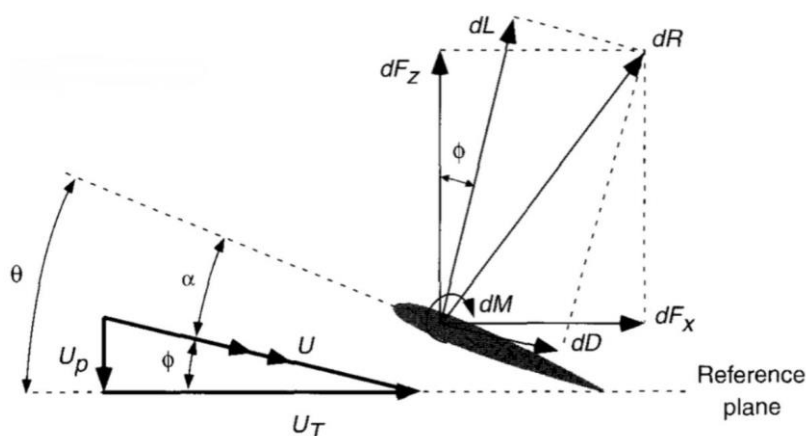
$$FM = \frac{\frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}}}{C_{Pi} + C_{P0}} = \frac{\frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\kappa_P C_T^{3/2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma C_{d0}}{8}}, \quad (2.7)$$

kde  $\kappa$  značí součinitel indukovaného výkonu,  $\sigma$  plnost rotoru a  $C_{d0}$  součinitel odporu. [3]

## 2.1.2 Teorie izolovaného elementu listu

V anglické literatuře je klasická teorie izolovaného elementu listu označována zkratkou BET (angl. *The Blade Element Theory*) a rozšířená teorie izolovaného elementu listu o základní principy teorie ideálního propulzoru zkratkou BEMT (angl. *The Blade Element Momentum Theory*). [1; 3]

V rámci teorie izolovaného elementu listu je zaváděn předpoklad, že každý element rotorového listu mezi řezy na poloměrech  $y$  a  $y + dy$  lze popsat jako kvazi-2D profil produkující aerodynamické síly. Na každý takový element je aplikovaná silová rovnováha složek aerodynamických sil, viz. obr. 1. [3]



obr. 1: Rychlosti a aerodynamické prostředí na elementu listu [3]

Výsledný vztlak elementu listu  $dL$  a odpor elementu listu  $dD$  lze definovat jako

$$dL = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_l dy, \quad (2.8)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_d dy, \quad (2.9)$$

kde veličina  $C_l$  označuje místní součinitel vztlaku,  $C_d$  místní součinitel odporu a  $U$  výslednou lokální rychlost elementu, kterou lze stanovit pomocí obvodové rychlosti  $U_T$  a posuvné rychlosti  $U_p$ . Elementární síly v ose  $x$  a  $z$  jsou dány

$$dF_x = dL \sin \phi + dD \cos \phi, \quad (2.10)$$

$$dF_z = dL \cos \phi - dD \sin \phi, \quad (2.11)$$

kde  $\phi$  označuje úhel proudu. [3]

Zavedením předpokladů, že je úhel proudu  $\phi$  malý a posuvná rychlost  $U_p$  je oproti rotační rychlosti  $U_T$  zanedbatelná, a následující úpravou vztahů lze poté stanovit elementární tah a výkon jako

$$dT = N_b dL, \quad (2.12)$$

$$dP = N_b \Omega (\phi dL + dD) y, \quad (2.13)$$

kde  $N_b$  vyjadřuje počet listů rotoru. [3]

Pro součinitel tahu a výkonu platí vztahy

$$dC_T = \frac{1}{2} \sigma C_l r^2 dr, \quad (2.14)$$

$$dC_P = \frac{1}{2} \sigma (\phi C_l + C_d) r^3 dr. \quad (2.15)$$

Zavedený předpoklad, že každý element listu odpovídá kvazi-2D profilu, který produkuje aerodynamické síly, by ve skutečnosti platil pouze tehdy, pokud by rotor měl nekonečně mnoho listů. Ztrátu vztlaku vlivem prostorového proudění v důsledku konečného počtu listů řeší Prandtlova ztrátová funkce či Prandtlův ztrátový faktor. Po zavedení Prandtlova ztrátového faktoru  $B$  je součinitel tahu dán

$$C_T = \frac{1}{2} \int_0^B \sigma C_l r^2 dr, \quad (2.16)$$

čímž se sníží efektivní plocha listu. [3; 5]

Pomocí teorie BEMT lze odvodit optimální rotor pro vis, pro který platí

$$C_T = \left( \frac{\sigma_{tip} C_{l\alpha}}{4} \right) \alpha_1, \quad (2.17)$$

kde  $\alpha_1$  označuje úhel náběhu při maximální klouzavosti a  $\sigma_{tip}$  plnost rotoru konce listu.

Účinnost FM optimálního rotoru pro vis je dána vztahem

$$FM = \frac{\frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\kappa C_T^{3/2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma C_{d0}}{9}}. \quad (2.18)$$

Optimální rotor pro vis je charakteristický hyperbolickým průběhem lokální plnosti  $\sigma$  a tětivy  $c$  po délce listu a ideálním zkroucením. [3]

## 2.2 Metody s vyšší přesností

Výpočetní dynamika tekutin a experimentální měření se řadí mezi metody s vyšší přesností (angl.: *High fidelity methods*). Jedná se o významné a velmi užitečné nástroje pro návrh a analýzu rotorů. Umožňují detailnější aerodynamický popis proudového pole kolem rotoru. Nevýhoda však spočívá v jejich časové a výpočetní náročnosti. Výpočetní dynamika tekutin má oproti experimentálnímu měření výhodu v tom, že je možné výpočet provést ještě před samotnou stavbou modelu a data lze analyzovat opakovaně. [4; 6]

Experimentální měření rotorů bude blíže probráno v následující kapitole. Výpočetní dynamika tekutin bude v diplomové práci předmětem kap. 4.

### 2.2.1 Metody experimentálního měření rotorů

Jak již bylo zmíněno na začátku kap. 2, při návrhu a analýze rotorů či vrtulí se často pracuje s experimentálním měřením. Zároveň platí, že každý rotor či vrtule by měly být před samotným použitím v praxi všestranně odzkoušeny. Tím bude zajištěna bezpečnost a také skutečnost, že budou v provozu plnit požadovanou funkci. V praxi se provádí především pevnostní a aerodynamické zkoušky. Pro aerodynamické zkoušky rotorů multikoptér se obvykle využívají aerodynamické tunely a rotorové měřicí věže, u nichž poloha rotoru odpovídá poloze rotorů, když je multikoptéra ve visu. [2; 7]

Parametry, které jsou obvykle měřeny, jsou tah, kroutící moment, výkon, maximální otáčky a elektrický proud, který je odebírán daným motorem. Naměřená data těchto parametrů poskytují firmy pouze v omezené míře. Analýza rotorů dostupných na trhu a přehled naměřených dat byl předmětem již zmíněné bakalářské práce [1]. Výrobci multikoptér často nazývají rotory jako vrtule, protože u multikoptér mají tyto dva pojmy totožný význam. Avšak dle normy ČSN 31 0001 [8] by měly být správně označovány jako rotory.

#### 2.2.1.1 Měření v aerodynamických tunelech

Jednou z možností, jak dané parametry rotorů měřit, je využití aerodynamických tunelů. Ty slouží ke studiu aerodynamických vlastností modelů a k popisu proudového pole kolem nich. Jsou nedílnou součástí mnoha návrhů nejenom v letectví a kosmonautice, ale také v automobilovém průmyslu. Obecně se tunely dělí dle geometrie na otevřené a uzavřené. Dále pak na tunely s otevřenou a uzavřenou měřicí sekcí. Lze je charakterizovat i dle rychlosti proudu vzduchu. [9; 10]



Měření aerodynamických veličin se musí provádět za kontrolovaných a definovaných podmínek tak, aby byla i přes přítomnost stěn zajištěna korektnost výsledků. Vytvoření proudění, které je aspoň částečně ekvivalentní proudění, které nastane v provozu, je základním předpokladem jejich použití. Aerodynamické měření na zmenšených modelech je přenosné, pokud je zajištěna geometrická podobnost mezi modelem a originálem a podobnost Machova čísla a Reynoldsova čísla. Chyby měření způsobené omezeným měřícím prostorem a uchycením modelu musí být stanoveny a korigovány. Mezi typické korekce se řadí korekce vlivu stěny kanálu, ucpání kanálu a vlivu uchycení (podpory) modelu. [9]

Jakmile je k dispozici model, aerodynamické tunely nabízí vysokou produktivitu měření. Nevýhody však spočívají v dlouhé přípravě modelů a ve složitosti jejich úprav. Také deformační chování a vibrace modelů, které často nejsou reprezentativní pro originální části, ovlivňují výsledky měření. [9; 10]

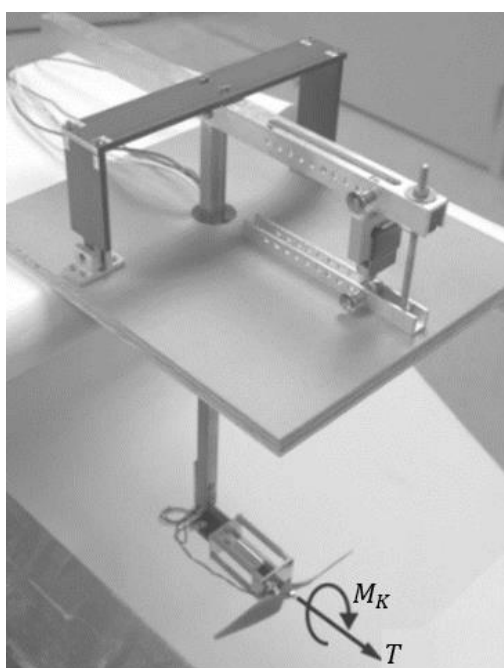
V aerodynamických tunelech se v praxi nejčastěji využívá měření pomocí snímačů. Konkrétním příkladem takových měření jsou následující dvě aplikace, kterými se zabývají publikace od Brandta a Seliga [11] a od Russella et al. [12].

V první zmíněné publikaci byla zveřejněna databáze údajů pouze o výkonnosti vrtulí, včetně tahu a výkonu. Stejný princip měření by však mohl být s menší úpravou použit i pro rotory. Měření probíhalo v subsonickém aerodynamickém tunelu s obdélníkovou testovací sekcí o velikosti  $0,853 \times 1,219 \text{ m}$  v průřezu a délky  $2,438 \text{ m}$ . V testovací sekci bylo možné dosáhnout rychlosti až  $71,53 \text{ m/s}$ . Daný tunel je k nahlédnutí na obr. 2. [11]

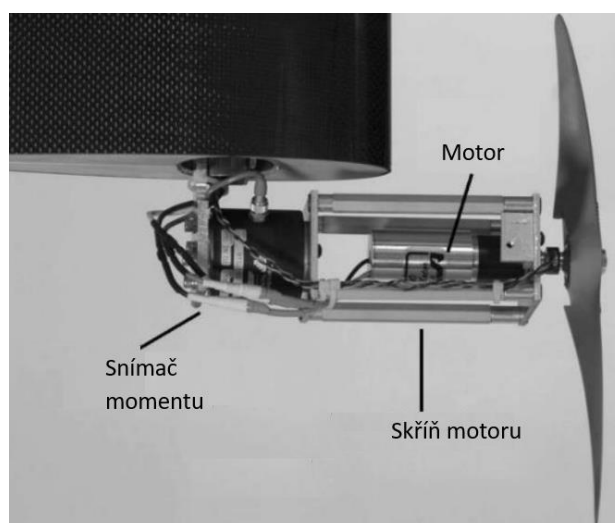


*obr. 2: Testovací sekce aerodynamického tunelu UIUC [11]*

Pro měření tahu a kroutícího momentu bylo využito zařízení, které je zobrazeno na obr. 3, kde  $T$  označuje tah a  $M_K$  kroutící moment vrtule. Měření tahu se provádělo mimo aerodynamický tunel pomocí kyvadlové konstrukce, která byla uložena pomocí dvou ohybových čepů. Tah byl získán pomocí tenzometrických siloměrů. Kroutící moment vyprodukovaný vrtulí byl měřen reakčními momentovými snímači. Tato zařízení fungují jako snímače síly, které vhodným umístěním a kalibrováním stanoví kroutící moment. Jak je zobrazeno na obr. 4, momentové snímače byly umístěny mezi motorové pouzdro a nosné rameno mechanismu tahu. Otáčky byly měřeny pomocí fotoelektrického snímače otáček. Z naměřených veličin lze poté vypočítat výkon vrtule a hustotu. [11]



obr. 3: Měřicí technika [11]



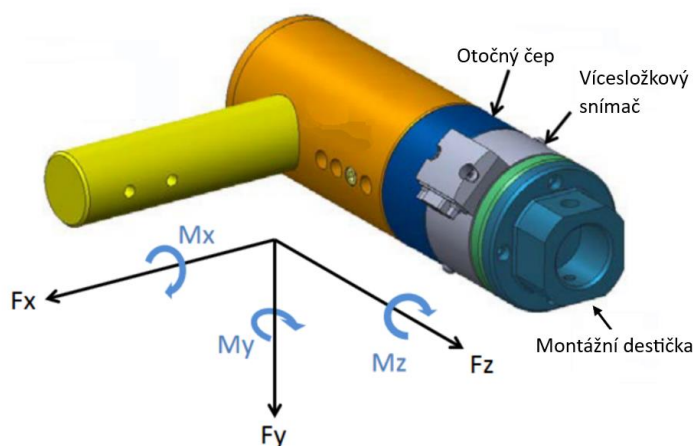
obr. 4: Snímač kroutícího momentu instalovaný v měřicím zařízení [11]

Autoři druhé zmíněné publikace se zabývali měřením sil, momentů a výkonu motorů v závislosti na rychlosti větru, poloze multikoptéry a otáčkách rotoru. Měření bylo provedeno pro multikoptéry i samostatné rotory, a to jak pro dopředný let, tak i pro vis. K měření sil a momentů byly použity vícesložkové snímače zatížení JR3. Každá zkoušená multikoptéra i rotor byly v aerodynamickém tunelu umístěny pomocí stojanu, který je zobrazen na obr. 5. Multikoptéry a rotory byly instalovány pod úhlem  $90^\circ$ , což umožnilo použití otočného stolu tunelu ke změně úhlu náběhu. K měření otáček rotorů byl použit snímač otáček bezkartáčových motorů BLDC (*Brushless DC electric motor*). Tyto snímače poskytují sinusový výstupní napěťový signál, jehož frekvence odpovídá komutační frekvenci motoru. [12]



obr. 5 Stojan k uchycení testovaných rotorů [12]

Na obr. 6 je zobrazeno zařízení, které bylo použito k uchycení multikoptér a rotoru na stojan. Zde je znázorněna orientace sil a momentů, které byly měřeny vícesložkovým snímačem zatížení. [12]

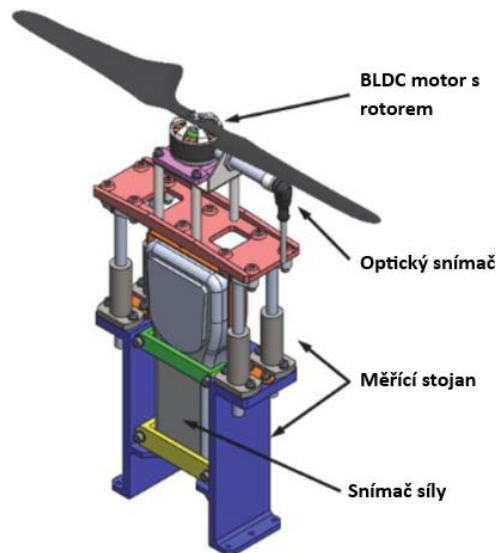


obr. 6: Zařízení k uchycení multikoptér a rotoru na stojan [12]

### 2.2.1.2 Měření na rotorové věži

Multikoptéry setrvávají významnou část svého letového času ve visu. Typickým měřicím zařízením používaným při zkouškách rotorů jsou tedy rotorové věže. Při těchto zkouškách jsou rotory umístěny v takové poloze, že jejich osa rotace je kolmá k zemi. Měření na rotorové věži lze považovat za jednodušší měřicí techniku, než je tomu u aerodynamických tunelů.

Konkrétní příklad zkoušky tohoto typu popisuje publikace od Kósa et al. [13], kde se autoři zaměřili na stanovení tahu a otáček rotoru a maximálního elektrického proudu požadovaného BLDC motorem. Tah rotoru byl měřen kalibrovaným siloměrem FG-6020SD. Otáčky BLDC motoru byly určeny reflexním optickým snímačem a hodnota elektrického proudu, který odebírá motor, proudovým senzorem. Na obr. 7 je znázorněn navržený měřicí stojan, který byl vybaven již zmíněnými senzory. [13]



obr. 7: Měřicí rotorová věž [13]

Na výsledky měření má značný vliv umístění testovaného rotoru. Je důležité, aby rotor byl v dostatečné vzdálenosti od země a stěn laboratoře. Při zkouškách totiž může docházet k tzv. zemnímu a stropnímu efektu. Tyto efekty lze nejlépe popsat v rámci letu multikoptéry. Při letu multikoptéry v blízkosti země dochází ke zdánlivému nárůstu vztlaku. Podobný fenomén nastává i při přiblížení ke stropu, kdy také zdánlivě narůstá vztlak a multikoptéra má tendenci se ke stropu přiblížit. V blízkosti vertikální zdi vzniká zdánlivá přitažlivá síla a klonivý moment a multikoptéra se znovu snaží k dané zdi přibližovat. Při zkouškách je tedy důležité, aby těmito interakcím bylo zabráněno a nedocházelo k ovlivnění výsledků měření. Z důvodu zamezení vlivu blízkosti země byl rotor namontován v obrácené poloze, tedy generovaný tah vertikálně tlačil na snímač síly. [13; 14]

### 3. Popis základní geometrie rotorových listů

V rámci bakalářské práce [1] byl na základě získaných teoretických poznatků vytvořen výpočetní skript v programovém prostředí MATLAB. Ten slouží k návrhu geometrie rotorových listů a výpočtu požadovaného výkonu pro daný tah, účinnosti  $FM$  a výkonového zatížení pomocí metody BEMT. Tah byl stanoven na základě navržené hmotnosti kvadrokoptéry, která byla zvolena  $m_K = 4 \text{ kg}$ . Jeden rotor by měl tedy generovat tah  $T = 14,715 \text{ N}$ . Jako výchozí profil pro návrh byl zvolen nesymetrický profil NACA 23012, který se oproti symetrickým profilům vyznačuje vyšším součinitelem vztlaku a nižším součinitelem odporu. Návrh byl proveden pro lichoběžníkový a obdélníkový půdorys a pro tři různé typy zkroucení, a to ideálně zkroucený, lineárně zkroucený a nezkroucený list. Nejhoršími výsledky se prezentoval nezkroucený obdélníkový list. Nejlepší výsledky byly získány u ideálně zkrouceného lichoběžníkového listu, který se svým tvarem nejvíce blížil teoretickému optimálnímu rotoru pro vis. Závěrem práce bylo poté dle získaných výsledků zhotovení konkrétního modelu rotoru, pro který byl vybrán lineárně zkroucený lichoběžníkový list o průměru 12 palců. U lineárně zkrouceného lichoběžníkového listu byl sice požadovaný výkon vyšší a účinnost  $FM$  nižší než u ideálně zkrouceného, ale z důvodu vlastností při dopředném letu byl nakonec vybrán lineárně zkroucený list. Ideálně zkroucený list se totiž při dopředném letu vyznačuje relativně velkým odporem. [1]

#### 3.1 Parametrizace základní geometrie rotorových listů

Pomocí výpočetního skriptu lze navrhnout geometrii pouze pro interval poměrného poloměru  $r \in (0,2; 1)$ , který je na obr. 8 vyznačen oranžovou barvou. Jak již bylo zmíněno výše, pro tuto část byl vybrán lineárně zkroucený lichoběžníkový list. Zbylá část rotoru  $r \in (0; 0,2)$ , tedy část listu a především náboj (na obr. 8 vyznačeno modrou barvou), byla modelována na základě již v praxi zavedených rotorů a s ohledem na hladký přechod mezi jednotlivými částmi. Samotný náboj nemá z hlediska aerodynamiky výrazný vliv. Je však důležité, aby pevnostně vyhovoval a umožňoval správné uchycení rotoru k motoru. Při jeho návrhu je tedy nutné brát ohled i na používaný typ motoru. [1]

Pro lichoběžníkový list lze průběh plnosti rotoru pospat následujícím vztahem

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 r. \quad (3.1)$$

Zavedením zúžení listu  $K$  lze daný vztah dále upravit na

$$\sigma = \sigma_0(1 + Kr), \quad (3.2)$$

kde  $\sigma_0$  reprezentuje plnost rotoru u kořene listu. Zúžení bylo bráno jako jeden z návrhových parametrů. Plnost rotoru  $\sigma$  není možné z rovnice (3.2) zjistit přímo. Pro první iteraci výpočtu je nutné zvolit hodnotu  $\sigma_0$ . Iterativním výpočtem lze poté získat správný průběh plnosti  $\sigma$ , který odpovídá danému součiniteli tahu. Z dané plnosti rotoru lze následně stanovit délku tětiny  $c$ , tedy

$$c = \frac{\sigma\pi R}{N_b}, \quad (3.3)$$

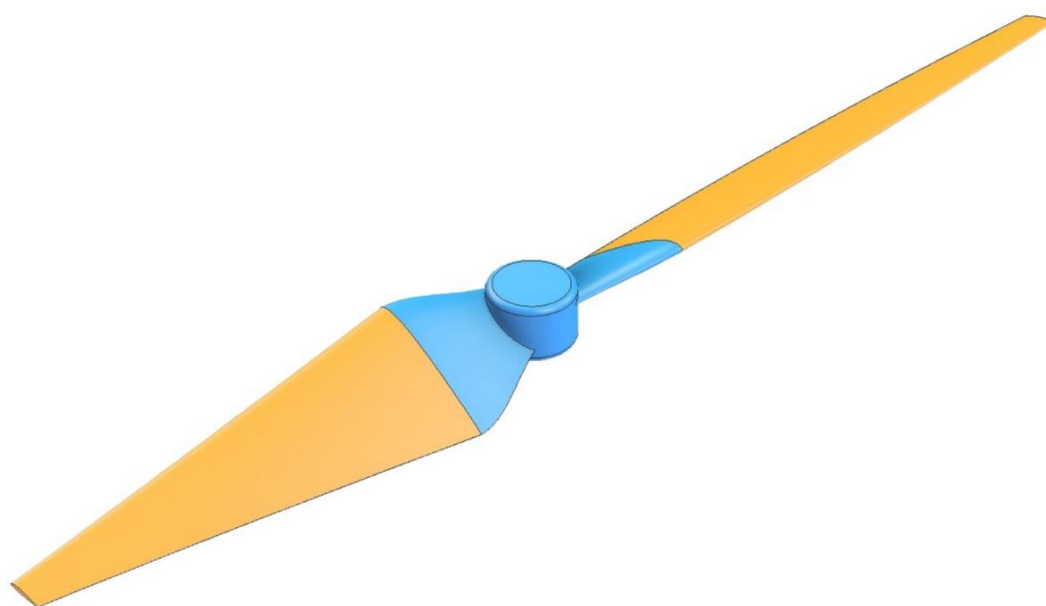
kde  $N_b$  vyjadřuje počet listů a  $R$  poloměr rotoru. [1; 3]

Lineární zkroucení listu lze popsat vztahem

$$\theta = \theta_{75} + (r - 0,75)\theta_{tw}, \quad (3.4)$$

kde člen  $\theta_{75}$  představuje úhel nastavení listu v 75 % poloměru a  $\theta_{tw}$  zkroucení listu. Hodnota  $\theta_{75}$  je vypočtena pomocí úhlu náběhu v 75 % poloměru  $\alpha_{75}$ , který je společně se zkroucením listu  $\theta_{tw}$  návrhovým parametrem. [1; 3]

Při výpočtu v rámci bakalářské práce byly návrhové parametry stanoveny konkrétně na hodnoty:  $K = -0,8$ ,  $\theta_{tw} = -20^\circ$  a  $\alpha_{75} = 7^\circ$ . [1]



obr. 8: Vyznačení specifických částí základní geometrie rotoru

## 4. Výpočetní dynamika tekutin

Výpočetní dynamika tekutin, která je v anglické literatuře označována zkratkou CFD (*Computational Fluid Dynamics*), se řadí mezi metody s vyšší přesností. Jedná se o softwarové nástroje, které umožňují detailnější a přesnější analýzy proudění tekutin, než je tomu např. u metody BEMT, a zefektivňují proces popisu proudění tekutin. První aplikace CFD, které proběhly ve druhé polovině 20. století, byly umožněny zvýšením výkonu počítačů. V současné době se CFD využívá v mnoha technických disciplínách související např. s letadly, lopatkovými stroji, automobily či stavbami. Aplikace a vývoj CFD je stále úzce spjat s výpočetní technikou. [15; 16; 17]

### 4.1 Navier-Stokesovy rovnice

Proudění lze obecně popsat pomocí zákonů zachování hmoty (rovnice kontinuity), zachování hybnosti (rovnice hybnosti) a zachování energie (rovnice energie). Soustavu těchto základních rovnic lze při popisu proudění newtonské tekutiny souhrnně označit jako Navier-Stokesovy rovnice, které jsou základem CFD výpočtů. [16; 18]

Dané rovnice zachování vychází z obecného zákona zachování, který platí pro veličinu, kterou lze v kontrolním objemu ukládat, pomocí konvekce a difúze přenášet a uvnitř objemu nebo na povrchu převést na jinou bilanční veličinu. Obecný zákon zachování pro veličinu proudění je také označován termínem Reynoldsův transportní teorém. [15; 16]

K vyjádření zákonů zachování lze využít Eulerův popis kontinua, při kterém je konečný kontrolní objem pozorován jako část proudového pole. Čas a souřadnice jsou nezávislé proměnné a mezi závislé proměnné se řadí rychlost, tlak a další stavové veličiny. Tento přístup je základem většiny CFD softwarů založených na metodě konečných objemů. [18]

Definici konečného kontrolního objemu zobrazuje obr. 9, kde je kontrolní objem  $\Omega$  definován konečnou oblastí proudění, která je ohraničena uzavřenou plochou  $\partial\Omega$ . Dále se zavádí povrchový element  $dS$  a s ním spojený jednotkový normálový vektor  $\vec{n}$ . [16]

Obecný zákon zachování aplikovaný na skalární veličinu se skládá z výrazu popisující časovou změnu veličiny  $\Phi$  uvnitř kontrolního objemu  $\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega . \quad (4.1)$$

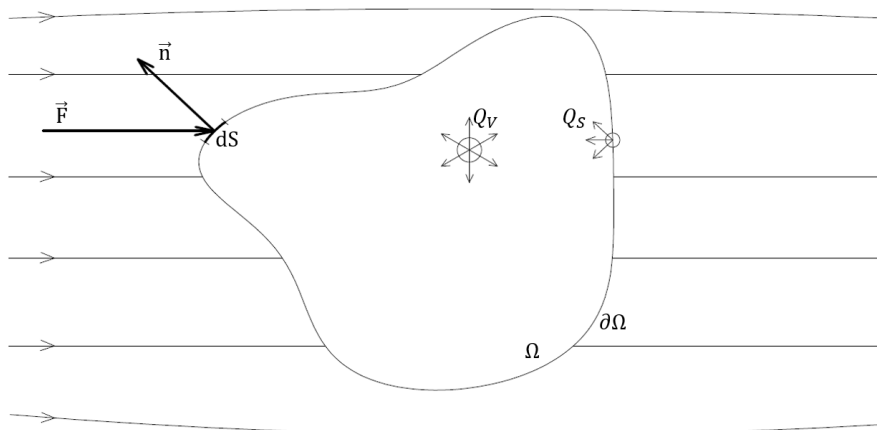
Další výraz vyjadřuje příspěvek veličiny  $\Phi$  způsobený konvekčním a difúzním tokem, tedy

$$\oint_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS. \quad (4.2)$$

Tyto dva výrazy jsou rovny množství veličiny  $\Phi$ , která je prostřednictvím objemových a plošných zdrojů produkována, tedy

$$\int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS, \quad (4.3)$$

kde  $Q_V$  označuje objemové a  $\vec{Q}_S$  plošné zdroje. [16; 17]



obr. 9: Definice konečného kontrolního objemu [16; 17]

Po sečtení výše uvedených výrazů lze obecný zákon zachování aplikovaný na skalární veličinu zapsat pomocí rovnice (4.4),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS. \quad (4.4)$$

Pokud je sledovaná veličina  $\Phi$  vektor, rovnice (4.4) je přepsána do tvaru (4.5),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{\Phi} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [(\vec{F}_C - \vec{F}_D) \cdot \vec{n}] dS = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS, \quad (4.5)$$

kde se v případě konvekčního toku  $\vec{F}_C$ , difúzního toku  $\vec{F}_D$  a plošných zdrojů  $\vec{Q}_S$  jedná o tenzor a v případě objemových zdrojů  $\vec{Q}_V$  o vektor. [16; 17]



Obecný zákon zachování lze zapsat i v diferenciálním tvaru, který je pro skalární veličinu popsán vztahem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{Q}_S) = Q_V \cdot [17] \quad (4.6)$$

Integrální tvar se však vyznačuje vlastnostmi, které zapříčiňují, že většina dnešních CFD kódů využívá integrální tvar. Dané vlastnosti jsou:

- pokud nejsou přítomny žádné objemové zdroje, časová změna veličiny  $\Phi$  uvnitř kontrolního objemu  $\Omega$  závisí pouze na toku přes hranici  $\partial\Omega$ ,
- integrální tvar zůstává platný i v případě nespojitostí v proudění, jako jsou např. kontaktní nespojitosti. [16]

Pro získání jednotlivých zákonů zachování z obecného zákona zachování je výhodnější vyjádřit výrazy popisující konvekční a difúzní tok. Při tomto kroku se získá transportní rovnice (4.7),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \Phi d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\rho \Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \oint_{\partial\Omega} (\Gamma \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{n}) dS \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS, \quad (4.7)$$

která je v některé literatuře nazývána také jako Konvekčně-difúzní rovnice. [17]

Odvození rovnic zákonů zachování hmoty, zachování hybnosti a zachování energie z obecného zákona zachování je uvedeno v příloze 1.

### 4.1.1 Navier-Stokesovy rovnice v rámci CFD

V rámci CFD jsou rovnice zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie sdruženy do jedné soustavy, která je popsána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_C - \vec{F}_V) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega, \quad (4.8)$$

který je zapsán ve tvaru vhodném pro CFD. [16]

Vektor  $\vec{W}$  v trojrozměrném systému obsahuje pět členů, a to

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Vektor  $\vec{F}_C$  popisuje konvekční tok a vektor  $\vec{F}_V$  viskózní tok, tedy

$$\vec{F}_C = \begin{bmatrix} \rho \vec{n} \cdot \vec{v} \\ \rho u \vec{n} \cdot \vec{v} + n_x p \\ \rho v \vec{n} \cdot \vec{v} + n_y p \\ \rho w \vec{n} \cdot \vec{v} + n_z p \\ \rho \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \vec{n} \cdot \vec{v} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Ve vztahu (4.11) popisují členy  $\Theta$  práci viskózních napětí a práci vedení tepla. [16]

Vektor  $\vec{Q}$  vyjadřující zdroje je dán rovnicí

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix}. \quad [16] \quad (4.12)$$

V případě newtonské tekutiny je soustava označena souhrnně termínem Navier-Stokesovy rovnice. V trojrozměrném systému pak představují soustavu pěti rovnic pro pět členů, viz. vektor  $\vec{W}$  ve vztahu (4.9). Celkově však vektor  $\vec{W}$  obsahuje sedm neznámých veličin. Je tedy nutné doplnit další dvě rovnice, které představují termodynamické vztahy mezi stavovými veličinami – např. tlak lze vyjádřit jako funkci hustoty a teploty. Pro úplné uzavření soustavy rovnic je dále nezbytné uvést součinitel dynamické viskozity  $\mu$ , který je obsažen v tenzoru  $\bar{\tau}$ , a součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  jako funkce stavu tekutiny. [16]

V rotujících systémech, jako je např. rotor multikoptéry, se kontrolní objem otáčí kolem určité osy. Navier-Stokesovy rovnice jsou v takovém případě transformovány do rotující vztažné soustavy a do vektoru  $\vec{Q}$  vstupují i účinky, které jsou způsobené Coriolisovými a odstředivými silami. [17]

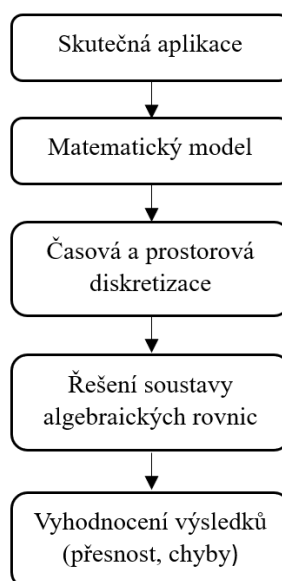
## 4.1.2 Zjednodušení Navier-Stokesových rovnic

Rovnice zachování hmoty, hybnosti a energie jsou nelineární, provázané a obtížně řešitelné. Pouze ve velmi malém počtu případů, kdy se jedná převážně o proudění v jednoduchých geometriích, je možné získat analytické řešení Navier-Stokesových rovnic. Praktický význam těchto proudění je však velice omezený. V ostatních případech je nutné soustavu řešit numerickými metodami. V případě, kdy jsou některé členy rovnic nedůležité a tedy zanedbatelné, dochází z důvodu vysoké výpočetní náročnosti často ke zjednodušení rovnic. Tato zjednodušení však mohou ovlivnit výsledky, protože do výpočtu zavádí chyby. Příklady zjednodušení jsou např.:

- Laplaceova rovnice (potenciální proudění) – proudění je nestlačitelné, neviskózní a nevířivé,
- Eulerovy rovnice – proudění je neviskózní,
- Prandtlova rovnice mezní vrstvy – dochází pouze k řešení mezní vrstvy,
- RANS rovnice – modely pro řešení turbulentního proudění. [15]

## 4.2 Struktura numerické simulace

Strukturu a postup numerické simulace zobrazuje obr. 10. Nejprve dochází k převedení skutečné aplikace na matematický model, což je soubor parciálních diferenciálních rovnic nebo integro-diferenciálních rovnic a okrajových podmínek. Jak již bylo zmíněno v kap. 4.1.2, matematický model může obsahovat některá zjednodušení, která sníží výpočetní náročnost. [15]



obr. 10: Struktura a postup numerické simulace [15; 16; 17; 19]

Následně dochází k oddělení časové a prostorové diskretizaci, kdy je nutné zvolit vhodnou metodu aproximace diferenciálních rovnic soustavou algebraických rovnic pro proměnné v určité množině diskrétních míst v prostoru a čase. Po diskretizaci následuje samotné řešení soustavy algebraických rovnic, která je dle povahy parciálních diferenciálních rovnic lineární nebo nelineární. Obecně se k řešení soustavy algebraických rovnic využívají přímé nebo iterační metody. Záleží na charakteru dané soustavy. Strukturu CFD simulace uzavírá vyhodnocení výsledků, při kterém je vyhodnocena přesnost použité simulace a chyby výpočtu. [15; 16; 17; 19; 20; 21]

## 4.3 Diskretizace

V případě Navier-Stokesových rovnic se jedná o parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Změny proměnných jsou definovány spojitě v prostoru a v čase. V případě numerického řešení pro soustavu diferenciálních rovnic jsou však proměnné definovány pouze v diskrétních bodech výpočetní sítě. Proces, při kterém dochází k převodu spojitého modelu na diskrétní se nazývá diskretizace. Tento proces je nutný k převedení parciálních diferenciálních rovnic na soustavu algebraických rovnic. [20; 22]

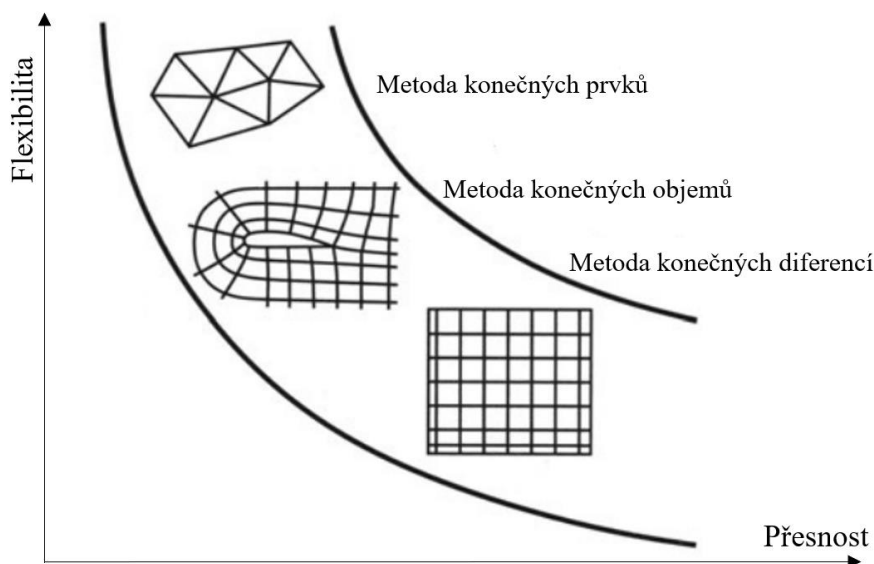
V současné době většina numerických metod, které se využívají k řešení Navier-Stokesových rovnic, používá pro matematický model oddělenou diskretizaci v prostoru a v čase. Tato oddělená diskretizace je označována jako metoda přímek. Metoda přímek je výhodná díky své flexibilitě, kdy lze snadno zvolit různé úrovně aproximace dle požadavků řešeného problému. [16; 17]

Prostorovou diskretizaci lze rozdělit do dvou kroků. Prvním krokem je diskretizace výpočtové oblasti, která spočívá v nahrazení kontinua prostoru konečným počtem bodů či buněk. Při tomto kroku tedy dochází k vytvoření sítě (mřížky), v jejíž bodech se poté určují číselné hodnoty proměnných. Jakmile je síť definována, následuje druhý krok prostorové diskretizace, při němž nastává samotná prostorová diskretizace rovnic. To vede k aproximaci diferenciálních nebo integrálních rovnic matematického modelu prostřednictvím soustavy algebraických rovnic, což je zásadní pro provedení numerického řešení. [16; 17; 21]

Prostorovou diskretizaci rovnic lze provést třemi metodami, a to metodou konečných diferencí, konečných objemů a konečných prvků. [15; 16; 17; 22]

Klasifikace jednotlivých metod dle flexibility a přesnosti je zobrazeno na obr. 11. Nejpoužívanější metodou CFD je metoda konečných objemů. V rámci této metody jsou využity Navier-Stokesovy rovnice v integrálním tvaru, které jsou diskretizovány přímo v prostoru.

Z fyzikálního hlediska je tato metoda založena na vyrovnávání toků přes kontrolní objemy. Je vhodná jak pro strukturované, tak i pro nestrukturované mřížky. Lze ji tedy implementovat i při řešení problémů se složitější geometrií. [15; 16; 17; 20; 22]



obr. 11: Klasifikace diskretizačních metod dle flexibility a přesnosti [22]

Součástí metody přímek je také časová diskretizace, kdy dochází k rozdělení časového intervalu na diskrétní kroky času. Proměnné jsou tedy počítány a ukládány pouze v určitých časových okamžicích, mezi nimiž jsou časové derivace a časové průběhy proměnných aproximovány. K řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, která se získá aplikací metody přímek na rovnici (4.8), lze využít explicitní či implicitní schéma. [16; 21; 22; 23]

### 4.3.1 Generování sítě

Přesnost numerické aproximace je přímo závislá na velikosti sítě, tedy čím blíže jsou jednotlivé body mřížky, tím více odpovídá diskretizovaný prostor kontinuu, a tím je aproximace numerického schématu lepší. Vliv na kvalitu výsledků má také tvar mřížky. U složitějších geometrií je nutné definovat sítě, které jsou přizpůsobeny geometrickým složitostem. [17]

Existují dva druhy sítě, a to strukturované a nestrukturované. Strukturované sítě jsou tvořeny rodinami čar, přičemž síťové čáry jedné rodiny se neprotínají a čáry různých rodin se protínají pouze jednou. Průsečíky síťových čar se nazývají uzly. Každý uzel je jednoznačně identifikován indexy  $i, j, k$  a odpovídajícími kartézskými souřadnicemi. Pro elementy ve 2D se aplikují především čtyřúhelníky a ve 3D šestistěny. Z hlediska času a požadované výpočtové kapacity vedou strukturované sítě k efektivnějšímu řešení soustav rovnic. Oproti nestrukturovaným sítím jsou však charakterizovány složitější automatizací a často časově

náročným síťováním složitějších geometrií. V rámci strukturovaných sítí se také často využívá tzv. blokové síťování, což umožňuje lokální zjemnění sítí, a tím jednodušší síťování složitějších geometrií. [15; 16; 17]

Body u nestrukturovaných sítí jsou rozloženy libovolně a nelze je přímo identifikovat podle jejich indexů. Chybí omezení při definování směrů síťových čar. Využívají se různé typy elementů, např. čtyřstěny, pyramidy, hranoly či šestistěny. Různorodé elementy poté tvoří hybridní mřížky, které nabízejí větší volnost při lokálním zjemňování sítí. Další výhodou je jejich jednodušší automatizace a možnost generování sítí pro složitější geometrie. Oproti strukturovaným sítím však mají větší nároky na výpočetní paměť a efektivita daného výpočtu není tak vysoká. Jelikož nejsou buňky protékány ortogonálně, dochází k větším numerickým chybám. [15; 16; 17]

Generování sítě a její kvalita velmi významně ovlivňuje výsledky numerického výpočtu a v současné době se jedná o jeden z nejkritičtějších prvků v nákladech na provoz CFD simulací. [17]

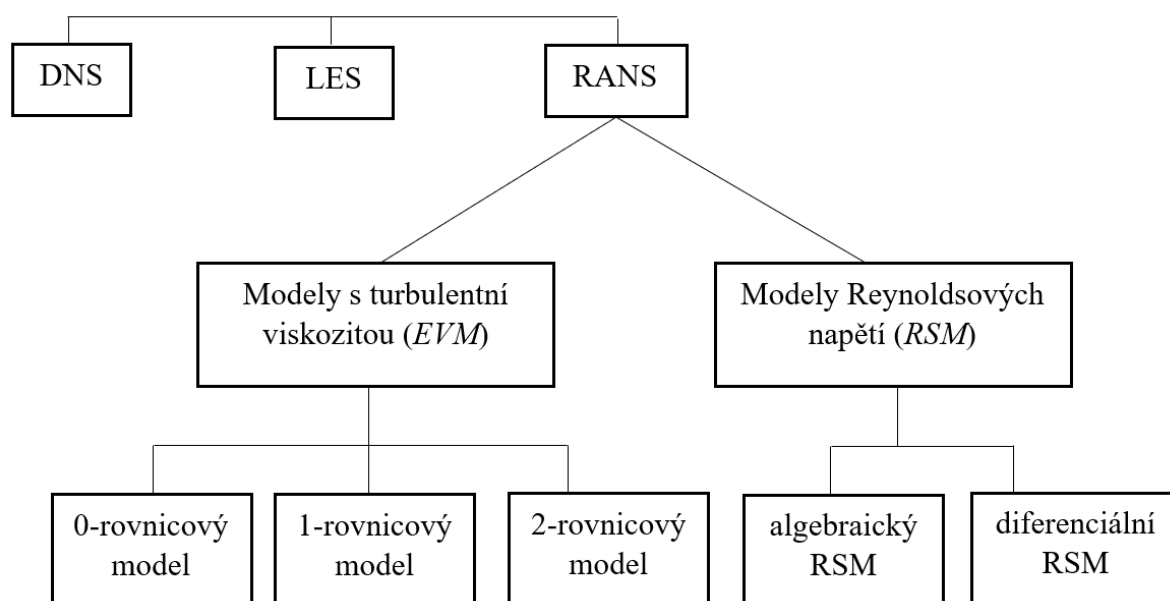
## 4.4 Řešení turbulentního proudění

V rámci výpočetní dynamiky tekutin je řešení turbulentního proudění jedním z nejdůležitějších faktorů, který ovlivňuje průběh a výsledky simulace. S turbulentním prouděním se lze setkat při řešení proudění většiny technických aplikací.

Na rozdíl od laminárního proudění se turbulentní proudění pozorovateli jeví jako chaotický pohyb molekul po nepravidelných drahách. Lze ho definovat jako nestacionární trojrozměrné proudění, které obsahuje velké množství vírových koherentních struktur v různých měřítkách. Velikost struktur se řídí určitými zákonitostmi, avšak jejich okamžité polohy a orientace v prostoru jsou náhodné. Dalším charakteristickým prvkem turbulence je difúze, tedy silné míšení jednotlivých vrstev tekutiny, což vede ke zvýšené výměně hybnosti a energie mezi strukturami. Největší měřítko obsahují většinu kinetické energie proudění. Postupně dochází k rozpadu větších měřítek na menší, přičemž nastává i přenos energie. Kinetická energie nejmenších měřítek se nakonec přeměňuje na teplo – nastává disipace energie. Tento proces lze označit termínem energetická kaskáda. [15; 16; 24; 25]

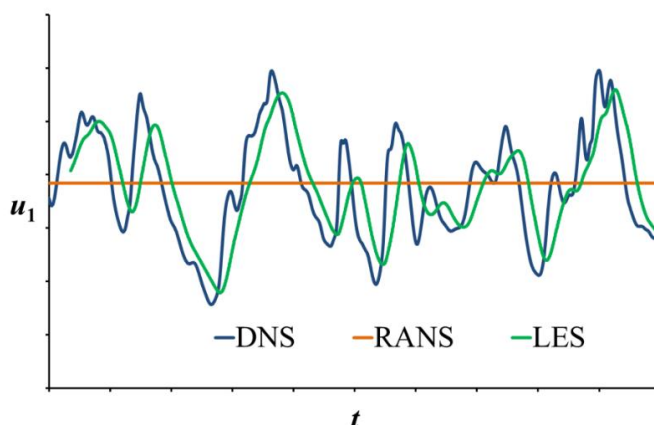
K řešení turbulentního proudění se používají Navier-Stokesovy rovnice. Existují tři metody, jak s rovnicemi pracovat. Je to jednak přímá numerická simulace Navier-Stokesových rovnic (angl.: *Direct Numerical Simulation – DNS*). Dále jsou to RANS modely (angl.: *Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS*), při kterých se aplikují Reynoldsovy

sředované Navier-Stokesovy rovnice. RANS modely jsou rozděleny do několika podskupin. Kombinací dvou předchozích metod je pak metoda simulace velkých vírů (angl.: *Large Eddy Simulation – LES*). Rozdělení metod k řešení turbulentního proudění zobrazuje obr. 12. V praxi se lze setkat s dalšími metodami, které představují přechodné stádium mezi metodou RANS a LES, např. metoda URANS (*Unsteady RANS*). [15; 16; 24; 26]



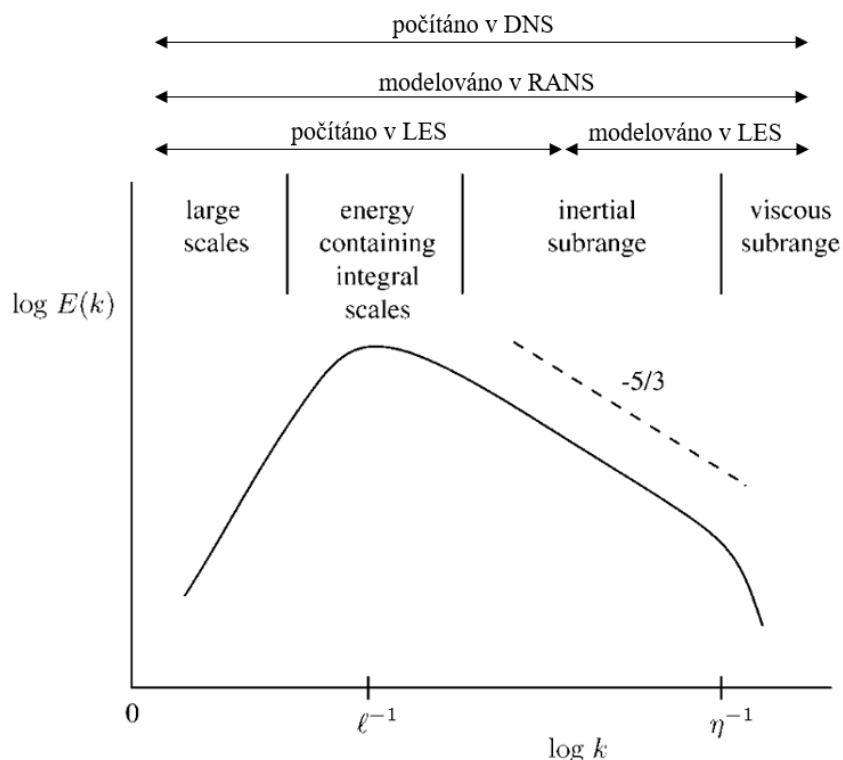
obr. 12: Rozdělení metod k řešení turbulentního proudění [15; 16; 24; 26]

Na obr. 13 je znázorněn časový průběh sledované veličiny v určitém bodě proudění. Na rozdíl od metody RANS, která poskytuje pouze střední hodnotu sledované veličiny v čase, lze pomocí metody DNS získat přesný časový průběh. Průběh získaný metodou LES se jeví jako vyhlazený signál sledující průběh DNS. [24]



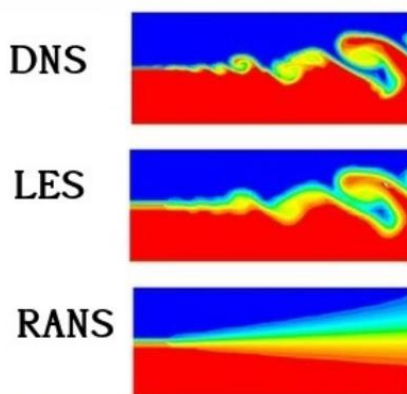
obr. 13: Rozdíl výsledků jednotlivých metod [24]

Rozdíly jednotlivých metod lze také vyjádřit pomocí energetického spektra turbulence, které je na obr. 14. Lze vidět, že DNS řeší numericky všechna měřítka turbulentního proudění, naopak RANS modely všechna měřítka modelují. V metodě LES jsou simulována pouze velká měřítka. Malá měřítka, která jsou relativně univerzální a způsobují především disipaci, jsou modelována. Hranice mezi simulací a modelováním v metodě LES není jasně definovaná a dle aplikace ji lze různě posouvat. [15; 16; 17; 23; 27]



obr. 14: Energetické spektrum turbulence  $E(k)$  s rozsahem použití modelů [27; 28]

Další schématické znázornění rozdílů metod DNS, LES a RANS při řešení turbulentního proudění je k vidění na obr. 15.



obr. 15: Rozdíl metod DNS, LES a RANS [29]



### 4.4.1 Přímá numerická simulace

Nejpřesnějším přístupem k simulaci turbulentního proudění je přímé řešení časově závislých Navier-Stokesových rovnic, tedy bez průměrování a aproximace. Při přímé numerické simulaci dochází k simulaci celého spektra vírových struktur, které se vyskytují v reálném proudění. Oblast, na které se výpočet provádí, musí být alespoň tak velká jako největší turbulentní vír. Simulace musí také zachytit veškerou disipaci kinetické energie, ke které dochází na nejmenších měřítkách, která jsou nazývána Kolmogorovova měřítko. Tudíž velikost buněk mřížky nesmí být větší než vír o rozměru tohoto měřítko. [15; 24]

Nevýhodou této metody je vysoká výpočetní náročnost. I přes výkonnost moderních počítačů je přímá simulace použitelná pouze pro geometricky jednoduché aplikace při nízkých Reynoldsových číslech. Častějšímu využití DNS brání skutečnost, že počet potřebných bodů mřížky roste s  $Re^{9/4}$  a potřebný výpočetový čas s  $Re^3$ . [15; 16]

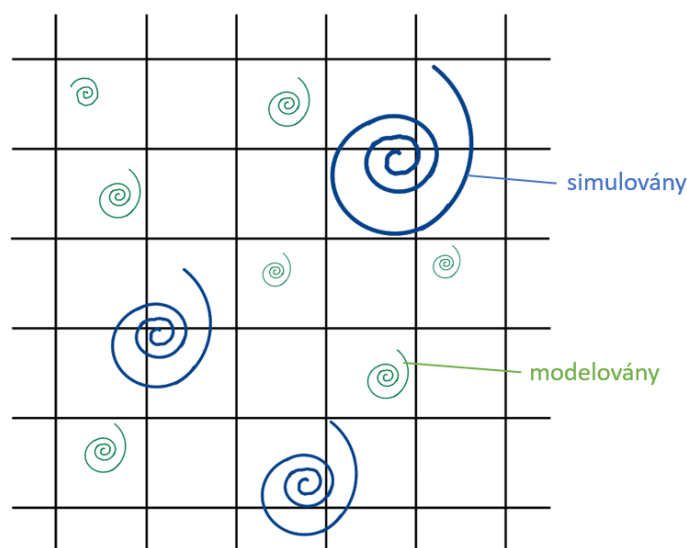
Z důvodu vysoké náročnosti se metoda DNS využívá především ve výzkumné oblasti. Umožňuje získat velmi podrobné informace o veličinách charakterizující dané proudění a výsledky simulace lze považovat za ekvivalentní experimentálním výsledkům. Značné množství informací lze následně využít při kvalitativním porozumění fyzikálního charakteru proudění. Z tohoto důvodu je přímá numerická simulace často aplikována při vývoji turbulentních modelů, např. RANS modelů. [15; 24]

### 4.4.2 Metoda LES

Metoda LES je založena na prostorovém filtrování Navier-Stokesových rovnic. V turbulentním proudění se vyskytují struktury různých velikostí, kdy velké struktury obsahují větší množství energie než struktury malé. Při této metodě je postup řešení rozdělen na dvě části. Struktury, které jsou větší než rozlišení mřížky, jsou simulovány jako při metodě DNS, zatímco účinky menších struktur jsou modelovány podobně jako u metody RANS. Modely, které slouží k náhradě těchto malých turbulentních struktur, se nazývají Subgrid-Scale modely. [15; 16; 24; 25]

Schématické rozdělení struktur v rámci metody LES je znázorněno na obr. 16. Zelené struktury jsou modelovány, zatímco struktury modré jsou simulovány.

Metoda LES je využívána v případech, kdy je geometrie příliš složitá či Reynoldsovo číslo příliš velké na to, aby byla použita metoda DNS. Obecně však platí, že pokud je to možné, je díky své přesnosti preferovanější přímá numerická simulace. [15]



obr. 16: Schématické rozdělení struktur v rámci metody LES [15]

### 4.4.3 RANS modely

Využití metod DNS a LES je díky jejich vysoké výpočetní náročnosti ve většině případů neefektivní. V současné době jsou pro běžné aplikace výhodnější RANS modely, které vycházejí z Reynoldsových středovaných Navier-Stokesových rovnic. [24]

Reynoldsovy středované Navier-Stokesovy rovnice lze získat dosazením Reynoldsova rozkladu do Navier-Stokesových rovnic. Reynoldsovův rozklad je obecně popsán rovnicí

$$\Phi(x, t) = \bar{\Phi}(x) + \Phi'(x, t), \quad (4.13)$$

kde se při výpočtu statisticky středných stavů proudění vychází z předpokladu, že každou veličinu lze zapsat jako součet časově střední složky  $\bar{\Phi}(x)$  a fluktuace  $\Phi'(x, t)$  kolem této složky. [15; 23; 24]

Zprůměrováním Navier-Stokesových rovnic se v soustavě vyskytne nová veličina, která se nazývá tenzor Reynoldsových napětí. Tento tenzor vyjadřuje vliv turbulentních fluktuací na přenos hybnosti v tekutině. Obsahuje dalších šest neznámých veličin, což způsobí neuzavřenost soustavy rovnic. Soustavu rovnic lze uzavřít dvěma způsoby, a to buď aproximací Reynoldsových napětí nebo aproximací neznámých výrazů v transportních rovnicích pro Reynoldsova napětí. První způsob využívají modely založené na modelování turbulentní viskozity. Druhý způsob aplikují Reynoldsovy napěťové modely. [15; 23; 24; 26]

### 4.4.3.1 Modely turbulence s turbulentní viskozitou

První podskupinou RANS modelů jsou modely turbulence s turbulentní viskozitou (angl.: *Eddy Viscosity Models – EVM*). Turbulentní modely slouží k modelování vlivu neznámých Reynoldsových napětí, což umožní následné uzavření systému rovnic. EVM jsou založeny na jedné z nejdůležitějších hypotéz k modelování Reynoldsových napětí, kterou v roce 1877 představil Boussinesq. [16; 24; 27]

Boussinesqova hypotéza vychází z předpokladu, že analogicky k laminárnímu proudění je i v turbulentním proudění smykové napětí úměrné střední rychlosti deformace. [16]

Účinek turbulentních fluktuací je tedy znázorněn pomocí turbulentní viskozity  $\mu_T$ , která je zavedena analogicky k molekulární viskozitě jako míra přenosu hybnosti. Pomocí turbulentní viskozity lze následně vyjádřit tenzor Reynoldsových napětí, tedy

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u_i' u_j'} = 2\mu_T \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} , \quad (4.14)$$

kde výraz  $\overline{S_{ij}}$  vyjadřuje Reynoldsův zprůměrovaný tenzor rychlosti deformace,  $k$  turbulentní kinetickou energii a člen  $\delta_{ij}$  Kroneckerovo delta. [15; 16; 27]

Při zavedení turbulentní viskozity se vychází z předpokladu, že vliv turbulentních fluktuací je analogický k vlivu molekulárních fluktuací. Avšak kvůli prostorové koherenci turbulentních struktur daný předpoklad ve skutečnosti není platný. Přesto je tato hypotéza snadno aplikovatelná a v mnoha případech proudění poskytuje dobré výsledky. [15; 27]

Turbulentní viskozitu lze charakterizovat délkovou škálou a rychlostní škálou či turbulentní kinetickou energií. [15]

EVM se rozdělují na tři podskupiny, a to na nularovnicové, jednorovnicové a dvourovnicové modely. [16; 24; 27]

#### Nularovnicové modely

Za jeden z nejjednodušších turbulentních modelů je považována Prandtlova teorie směšovací délky, kterou Prandtl vytvořil se záměrem definovat obecný vztah mezi turbulentní viskozitou a středním rychlostním polem. Podle této teorie je charakteristická délka turbulence  $l$  úměrná tloušťce turbulentní oblasti a turbulentní kinetická energie je určována ze středního rychlostního pole. Charakteristická délka turbulence bývá pojmenována termínem směšovací délka. [15; 24; 27; 30]

Po úpravách lze následně turbulentní viskozitu  $\mu_T$  definovat pomocí rovnice

$$\mu_T = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \quad (4.15)$$

a tenzor Reynoldsových napětí dle

$$|-\rho \overline{u'v'}| = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (4.16)$$

který je v tomto případě označen členem  $-\rho \overline{u'v'}$ . [27; 30]

Prandtlovu směšovací délku  $l$  lze získat z algebraického vztahu. Z tohoto důvodu jsou tyto modely nazývány také jako algebraické modely. [24; 27]

Nularovnicové modely jsou vhodné pouze pro jednoduchá proudění, kde je produkce turbulentní energie v rovnováze s disipací, tedy například pro proudění pro mezní vrstvy či jednoduché úplavy. [24; 27]

### **Jednorovnicové modely**

Jednorovnicové modely jsou nejjednoduššími modely, které využívají transportní rovnice pro turbulentní veličiny. V těchto modelech je nejčastěji řešena transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii. Další turbulentní veličina, kterou je obvykle délkové měřítko, je definována pomocí algebraického vztahu. [24; 27]

Jednorovnicové modely zohledňují transport a produkci turbulence, proto poskytují mnohem lepší výsledky než nularovnicové modely. Vyjádření délkového měřítka algebraickým vztahem však značně komplikuje jejich aplikaci ve složitějších 2D případech a zejména při řešení prostorového proudění. Využívají se pro výpočet tenkých smykových vrstev. [26; 27]

### **Dvourovnicové modely**

V rámci dvourovnicových modelů jsou řešeny dvě transportní rovnice pro turbulentní veličiny. První transportní rovnice je nejčastěji definována pro turbulentní kinetickou energii  $k$  a druhá transportní rovnice obvykle pro rychlost disipace  $\varepsilon$  nebo specifickou rychlost disipace  $\omega$ . Pomocí těchto turbulentních veličin je následně možné vyjádřit turbulentní viskozitu a tím i Reynoldsova napětí. Dvourovnicové modely lze aplikovat k předpovědi vlastností daného turbulentního proudění, a to bez předchozí znalosti struktury turbulence. Téměř všechny modely jsou založeny na hypotéze dle Boussinesqa. [15; 27]

Transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii  $k$  popisuje vztah

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho}{2} \overline{u_j' u_i' u_i'} + \overline{p' u_j'} \right)}_{IV} - \underbrace{\rho \overline{u_i' u_j'}}_V \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j}}_{VI}, \quad (4.17)$$

který se získá úpravou obecné transportní rovnice. [15; 24; 31]

Na levé straně rovnice znázorňuje člen  $I$  časovou změnu veličiny a člen  $II$  konvekci. Na pravé straně rovnice vyjadřuje člen  $III$  viskózní difúzi, člen  $IV$  turbulentní difúzi, člen  $V$  produkci a člen  $VI$  disipaci. Členy znázorňující turbulentní difúzi, produkci a disipaci musí být modelovány. [24; 31]

Obdobně lze odvodit také exaktní transportní rovnici pro rychlost disipace  $\varepsilon$ , která je dána vztahem

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k}}_{III} - \underbrace{\rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)}_V. \quad (4.18)$$

Stejně jako ve vztahu (4.17), tak i v této rovnici znázorňuje člen  $I$  časovou změnu veličiny a člen  $II$  konvekci. Na pravé straně rovnice charakterizuje člen  $III$  produkci, člen  $IV$  disipaci a člen  $V$  difúzi. [15]

Model založený na transportních rovnicích (4.17) a (4.18) se nazývá  $k$ - $\varepsilon$  model, který byl definován roku 1972 Jonesem a Launderem [32]. V praxi se jedná o jeden z nejvíce využívaných modelů, který je výhodný především pro volné proudění. Z důvodu vyjádření turbulentního délkového měřítka pomocí rychlosti disipace  $\varepsilon$  není však tento model výhodný pro řešení proudění v blízkosti stěny. [26; 32; 33]

Dalším známým modelem je model  $k$ - $\omega$ , který byl vytvořen roku 2006 a jehož autorem je Wilcox [27]. Už z názvu je patrné, že v tomto modelu se namísto transportní rovnice pro rychlost disipace  $\varepsilon$  pracuje s transportní rovnicí pro specifickou rychlost disipace  $\omega$ . Z tohoto důvodu je model výhodný pro proudění v blízkosti stěny, např. pro výpočty proudění v kompresorech leteckých motorů. [26; 27]

Mezi dvourovnicové modely se řadí také  $k$ - $\omega$  SST (*Shear Stress Transport*) model, který kombinuje výhody modelů  $k$ - $\varepsilon$  a  $k$ - $\omega$ . Pomocí modelu  $k$ - $\omega$  je řešeno proudění v blízkosti

stěny. Naopak model  $k-\varepsilon$  je aplikován pro volné proudění. Model  $k-\omega$  SST ve srovnání s modelem  $k-\varepsilon$  disponuje při podobné přesnosti vyšší numerickou stabilitou. [16; 33; 34]

Model  $k-\omega$  SST obsahuje oproti standardnímu modelu  $k-\omega$  několik zpřesnění, a to:

- využívá směřovací funkci, která je navržena tak, aby v blízkosti stěny byl aktivován model  $k-\omega$  a dál od povrchu ve volném proudění model  $k-\varepsilon$ ,
- rovnice pro specifickou rychlost disipace  $\omega$  obsahuje tlumící člen křížové derivace,
- turbulentní viskozita je definována tak, že je zohledňován přenos turbulentního smykového napětí. [34]

#### 4.4.3.2 Modely Reynoldsových napětí

Modely Reynoldsových napětí, které v anglické literatuře nesou název Reynolds Stress Models (RSM), jsou nejsložitějšími RANS modely. Tyto modely lze rozdělit na algebraické a diferenciální RSM. Jsou založeny na řešení transportní rovnice pro tenzor Reynoldsových napětí, kterou lze odvodit z Navier-Stokesových rovnic. [15; 24; 27]

Transportní rovnice obsahuje tlakově deformační člen a členy charakterizující produkci, disipaci a turbulentní difúzi. K uzavření soustavy rovnic je nutné tlakově deformační člen a členy znázorňující disipaci a turbulentní difúzi vyjádřit pomocí modelů Reynoldsových napětí. Člen charakterizující produkci však v těchto modelech na rozdíl od modelů turbulentní viskozity modelován není. [15]

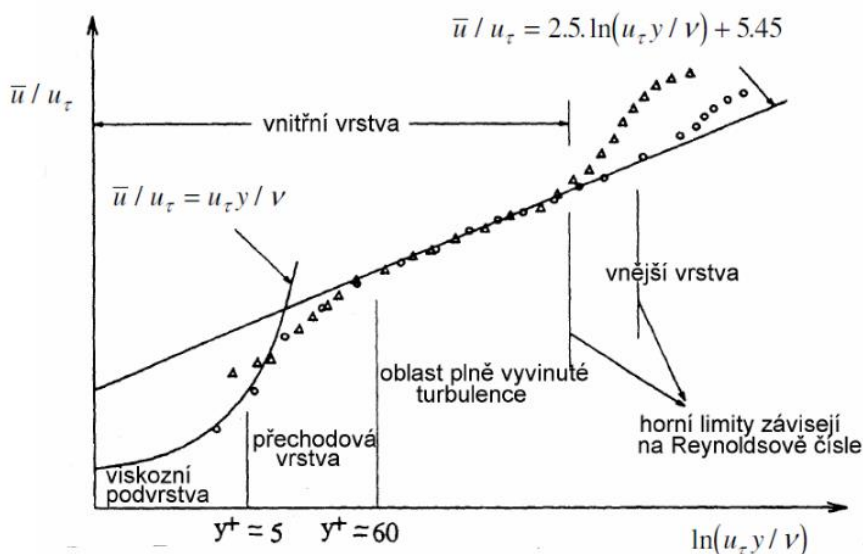
Jelikož jsou tyto modely založené přímo na řešení transportních rovnic pro složky tenzoru Reynoldsových napětí, mají velký potenciál pro řešení složitějších turbulentních jevů. Jejich numerický výpočet je však náročný, nestabilní a často diverguje. [15; 26]

#### 4.4.4 Modelování proudění v blízkosti stěny

Kvalita výsledků simulace turbulentního proudění je významně ovlivněna numerickým řešením v blízkosti stěny. V blízkosti stěny dochází k výraznému přenosu hybnosti a skalárních veličin a turbulence zde nemá izotropní charakter. [26; 35]

Mezní vrstvu lze rozdělit na tři vrstvy, a to na viskózní, přechodovou a plně turbulentní vrstvu. Viskózní vrstva se vyskytuje bezprostředně u stěny a proudění je zde téměř laminární. Přechodová vrstva se nachází mezi viskózní a plně turbulentní vrstvou. V této vrstvě mají účinky molekulární viskozity a turbulence srovnatelný vliv. Plně turbulentní vrstva pak

představuje vnější část mezní vrstvy, kde má převládající vliv turbulence. Jednotlivé vrstvy jsou znázorněny na obr. 17. [35]



obr. 17: Rozdělení mezní vrstvy [35]

Proudění v blízkosti stěny lze řešit dvěma přístupy. Výpočetně méně náročným přístupem je použití tzv. stěnových funkcí. Jedná se o soubor poloempirických vztahů a funkcí, při jejichž použití se předpokládá existence logaritmické oblasti v rychlostním profilu. Okrajové podmínky se poté nezadávají přímo na stěně, ale v bodě v této oblasti. V této oblasti je rychlostní profil popsán logaritmickým zákonem

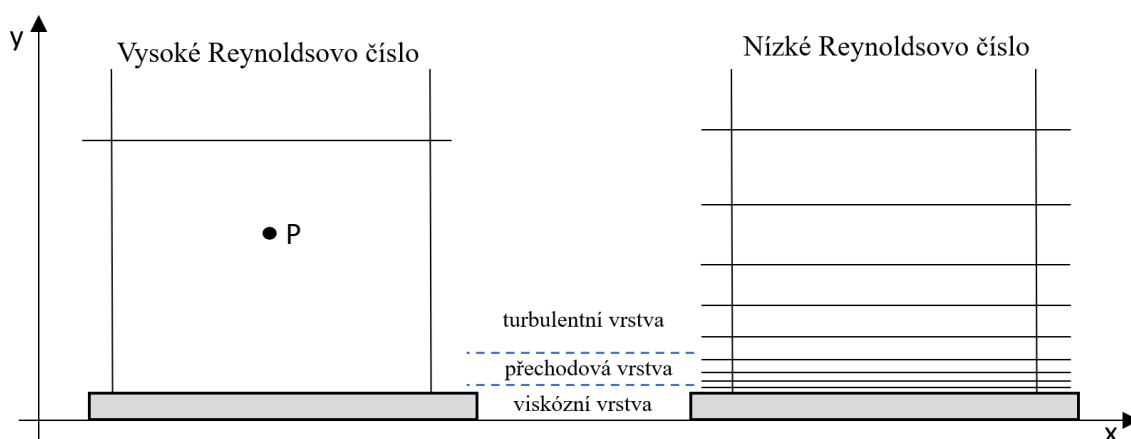
$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C, \quad (4.19)$$

kde  $u^+$  vyjadřuje bezrozměrnou rychlost,  $\kappa$  Karmanovu konstantu,  $y^+$  bezrozměrnou vzdálenost od stěny a člen  $C$  empirickou konstantu. Logaritmický zákon může být dále modifikován s ohledem na drsnost povrchu. [15; 26; 27; 35]

S rostoucím Reynoldsovým číslem se tloušťka mezní vrstvy zmenšuje a je nutné využít jemnější numerickou síť, což výrazně zvýší požadovanou výpočetní kapacitu. V úlohách s vysokým Reynoldsovým číslem, kdy je viskózní podvrstva velmi tenká a k jejímu rozlišení je obtížné použít dostatečný počet bodů sítě, jsou tedy často využívány stěnové funkce. Tento přístup snižuje výpočetní náročnost, ale přitom poskytne dostatečně přesné řešení pro mnoho aplikací. Stěnové funkce se nedoporučuje aplikovat pro výpočty, ve kterých se vyskytují trojrozměrné a odtržené mezní vrstvy. Tato skutečnost se považuje za jejich velkou nevýhodu. [26; 27; 35]

Druhý přístup, který se aplikuje při výpočtech komplexního turbulentního proudění, spočívá v podrobném modelování proudění až k obtékané stěně. V takovém případě je nutné modifikovat turbulentní model pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla. V transportních rovnicích pro turbulentní veličiny jsou využívány tlumicí funkce, které v blízkosti stěny mění chování daného turbulentního modelu. Okrajové podmínky jsou definovány přímo na stěně. Výhodou tohoto přístupu je, že při výpočtu nevznikají chyby přijímáním dalších modelových předpokladů. Na druhou stranu tento přístup vyžaduje velmi jemné sítě, což výrazně zvyšuje výpočetní náročnost. Jemná síť v případě silně nestrukturovaných mřížkách také zhoršuje konvergenční chování výpočtu. [23; 26; 35]

Rozdíl přístupů v jemnosti sítě je zobrazen na obr. 18.



obr. 18: Řešení proudění v blízkosti stěny pro různá Reynoldsova čísla [35; 36]

Hodnota bezrozměrné vzdálenosti od stěny  $y^+$  hraje v numerických simulacích významnou roli. Pokud je mezní vrstva řešena pomocí stěnových funkcí, v CFD softwarech se pracuje s hodnotou  $y^+ \geq 30$ . V takovém případě je první buňka mřížky umístěna mimo viskózní vrstvu. Při podrobném modelování proudění až k obtékané stěně je  $y^+ \approx 1$  a první buňka mřížky se nachází ve viskózní vrstvě. [15; 37]

## 4.5 Okrajové podmínky

Bez ohledu na zvolenou numerickou metodiku jsou pro řešení Navier-Stokesových rovnic a rovnic modelů turbulence zapotřebí vhodné počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínky popisují stav tekutiny v čase  $t = 0$ . Čím blíže k řešení je počáteční odhad, tím rychleji se dosáhne konečného řešení. V praxi se pro tekutiny často předepisují hodnoty tlaku, hustoty a rychlosti. Okrajové podmínky souvisí s tím, že numerická simulace uvažuje pouze



určitou část fyzikální oblasti nebo systému. Omezení výpočetní oblasti poté vytváří umělé hranice, na kterých je nutné stanovit hodnoty fyzikálních veličin. Nesprávná implementace podmínek může negativně ovlivnit stabilitu a konvergenci schématu řešení a může dojít k nepřesné simulaci skutečného systému. [16; 20; 26]

Obecně lze okrajové podmínky zadávat na různých typech hranic výpočetní oblasti, a to na stěně, vstupu, výstupu a na tzv. otevřené hranici. Názvy okrajových podmínek se liší dle použitého CFD softwaru. Lze se setkat s následujícími typy okrajových podmínek:

- podmínky na stěně,
- podmínky pro vstup a výstup proudu,
- podmínky symetrie,
- periodické podmínky,
- vnitřní podmínky,
- podmínky pro vzdálené pole ve vnějších tocích. [16; 20; 35; 37]

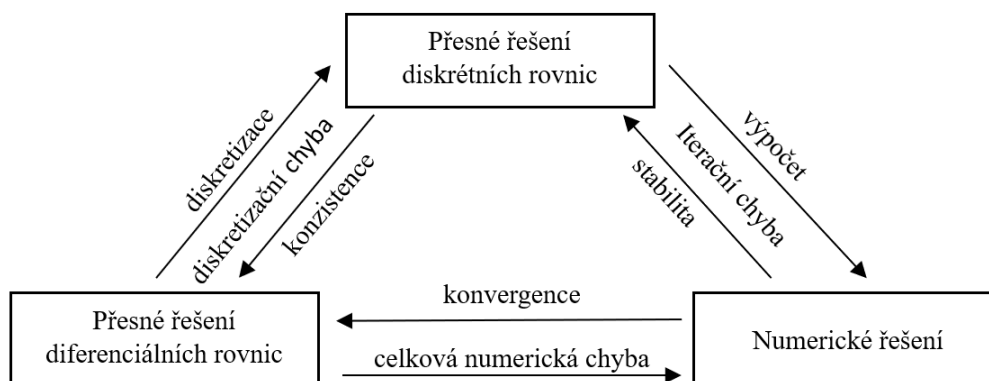
Nejjednodušší okrajovou podmínkou je podmínka na stěně, která popisuje chování systému na hranici mezi pevnou plochou a tekutinou. Stěny mohou být definovány různě, např. jako rotující stěna, stěna bez tření či hladká stěna. Na stěně lze stanovit např. normálovou rychlost proudu nebo teplotu. [16; 35; 37]

Na hranicích, kterými tekutina vstupuje do výpočetní oblasti (vstup) nebo ji opouští (výstup), lze definovat tlak a rychlost proudu. Další významnou podmínkou je podmínka symetrie. Při této podmínce dochází k zrcadlení proudového pole přes rovinu symetrie. Pokud geometrie zahrnuje periodické prvky, lze využít periodickou podmínku. Při této podmínce je určena periodická hranice a proměnné podél jedné strany hranice jsou následně numericky spojeny s druhou stranou. Vnitřní podmínka je aplikována v případě, kdy je výpočetní oblast rozdělena do samostatných bloků. Podmínka poté umožňuje výměnu informací mezi jednotlivými bloky. Pro stlačitelné proudění jsou využívány podmínky pro vzdálené pole, kterými lze definovat Machovo číslo, tlak a teplotu na vstupu a výstupu. [35; 37]

## 4.6 Chyby a vlastnosti numerické simulace

Pro správnou funkčnost a interpretaci dosažených výsledků musí numerická metoda disponovat určitými vlastnostmi. Je nutné, aby přibližné řešení konvergovalo k přesnému řešení. Přímé dosažení konvergence je však v mnoha případech velmi obtížné. [20; 21]

Na obr. 19 je zobrazeno schéma popisující vztah mezi řešeními, chybami a vlastnostmi. Na daném schématu jsou uvedeny různé typy řešení, které je nutné při použití diskretizačních metod na diferenciální rovnice rozlišovat. Jedná se o přímé řešení diferenciálních rovnic, přímé řešení diskretních rovnic a numerické řešení. Obecně se jejich výsledné hodnoty neshodují, protože během diskretizace a řešení vznikají chyby. [21]



obr. 19: Vztah mezi řešeními, chybami a vlastnostmi [21]

Numerická řešení obsahují vždy modelovací chyby, diskretizační chyby a iterační chyby. Dále to jsou chyby zaokrouhlením a chyby, které mohou být do systému vneseny při programování nebo stanovení okrajových podmínek. [15; 20; 21]

K vyhodnocení přesnosti lze výsledky porovnat s analytickým řešením pro související, ale zjednodušený problém. Druhý způsob je získání řešení na postupně zjemněných mřížkách a prokázání konvergence. S tím souvisí studie nezávislosti sítě. Jejím provedením se zajistí, že síť bude dostatečně jemná, aby měla pouze zanedbatelný vliv na numerické řešení. Zároveň však nebude příliš jemná, jelikož by to vedlo k výraznému nárůstu výpočetní náročnosti. Obecně lze přesnost zlepšit zjemněním mřížky, případně aplikací schémat vyššího řádu. [20; 37]

Na obr. 19 jsou dále uvedeny tři základní vlastnosti numerických metod, a to konzistence, stabilita a konvergence. Numerická metoda je konvergentní, pokud se přibližné řešení blíží k přesnému řešení diferenciálních rovnic s tím, jak se velikost mřížky blíží nule. Konvergence úzce souvisí se stabilitou a konzistencí. V případě lineárního problému je vztah těchto vlastností vyjádřen pomocí Laxovy věty. Pro konzistentní numerickou metodu platí, že stabilita je nutnou a postačující podmínkou její konvergence. U nelineárních problémů Laxova věta v dané podobě neplatí a konvergence je obvykle ověřována pomocí numerických experimentů na postupně zjemňovaných sítích. [15; 21]

V rámci komerčních CFD programů se k monitorování konvergence využívají především průběhy residuí proměnných proudění.

## 5. Tvarová optimalizace

Nedílnou součástí návrhu moderních leteckých konstrukcí je optimalizační proces, jehož cílem je získání optimálního řešení pro daný návrhový problém. Při optimalizaci dochází k modifikaci geometrie za účelem zlepšení převážně aerodynamických vlastností při splnění určitých kritérií. Důležitou součástí optimalizačního procesu je parametrizace tvaru. Daná metoda parametrizace musí tvar tělesa přesně modelovat a zároveň být dostatečně flexibilní, aby zahrnovala všechny možné varianty geometrie v návrhovém prostoru. [38; 39; 40; 41]

Z matematického pohledu představuje optimalizační úloha nalezení takového vektoru optimalizačních proměnných  $\vec{x}^* \in M$ , že pro libovolný vektor  $\vec{x} \in M$  platí vztah

$$F(\vec{x}^*) \leq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M, \quad (5.1)$$

kde  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  je kriteriální funkce,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  vektor proměnných a  $M$  je množina přípustných řešení. [42; 43]

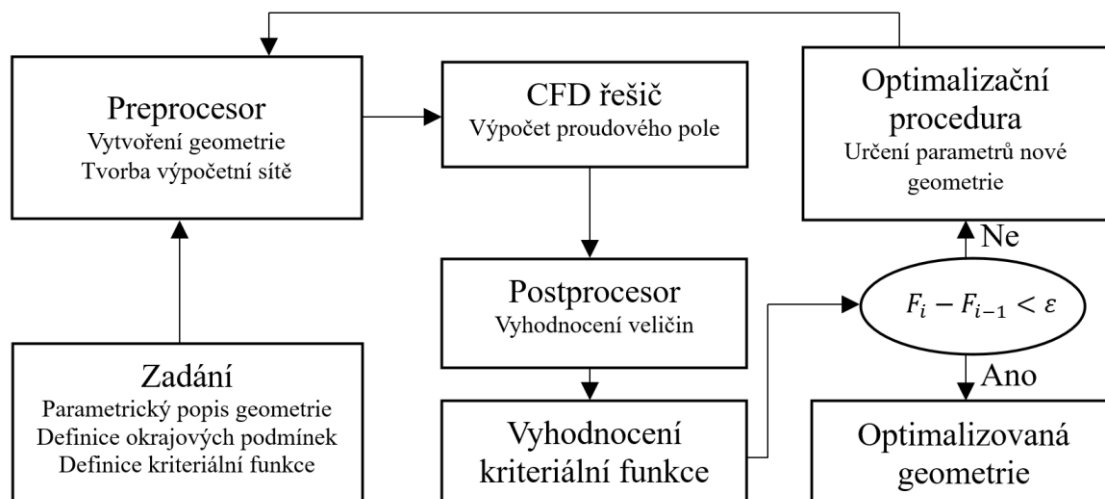
K nalezení optimálního řešení se aplikují optimalizační postupy, které jsou založeny na optimalizačních metodách, parametrizaci geometrie a numerických výpočtech. Optimalizační proces je uveden na obr. 20, kde je patrné, že jednotlivé sekce optimalizačního procesu jsou na sebe závislé a dochází mezi nimi k výměně informací. [38]



obr. 20: Obecné schéma optimalizačního procesu [38]

Dané obecné schéma optimalizačního procesu lze aplikovat při hledání optimálního řešení různých typů úloh. Pro provedení numerické analýzy proudění a stanovení aerodynamických charakteristik je možné aplikovat např. programy Ansys Fluent či XFOIL. [38]

Při použití CFD simulací lze algoritmus optimalizace popsat pomocí obr. 21. Z daného schématu je patrné, že jedním z prvních úkonů je definice kriteriální funkce  $F$ , tedy cíle optimalizačního procesu. [44]



obr. 21: Algoritmus optimalizace [44]

## 5.1 Optimalizační metody

Optimalizační metody lze dle vyhledávacího prostoru rozdělit na metody globální optimalizace, které hledají globální extrém, a lokální optimalizace, které hledají lokální extrém. [45; 46]

### 5.1.1 Metody globální optimalizace

Metody globální optimalizace jsou vhodné a v praxi využívané především k vyhledávání optimálního celkového uspořádání konfigurace. Výhodou je zajištění konvergence ke globálnímu extrému. Nevýhodou těchto metod však představuje obvykle značná časová náročnost výpočtu, protože vyžadují vyhodnocení vyššího počtu funkcí. Pokud jsou součástí optimalizačního procesu CFD výpočty, metody globální optimalizace se téměř nevyužívají, jelikož by bylo zapotřebí obrovské množství simulací. [38; 45; 46; 47]

Mezi globální optimalizační metody se řadí metoda simulovaného žíhání, která je založena na statistické termodynamice, a genetický algoritmus, který vychází z Darwinovy přírodní evoluční teorie. Tyto optimalizační algoritmy napodobují přírodní jevy a fyzikální procesy. U genetického algoritmu dochází pomocí mutací, křížení a reprodukce různých návrhů k napodobení biologické evoluce. Globální optimum je tedy získáno na základě imitace přírodních selekčních procesů. [45; 46; 48; 49]

Možné řešení jejich výpočetní náročnosti spočívá v použití Metody plochy odezvy. Jedná se v podstatě o náhradní model návrhového prostoru, který je stanoven pomocí experimentů, při kterých se definují kombinace hodnot jednotlivých návrhových proměnných. [38; 45; 47]

## 5.1.2 Metody lokální optimalizace

Metody lokální optimalizace jsou schopny nalézt pouze lokální optima. Přesto jsou v praxi preferovány, a to z důvodu jejich nižší výpočetní náročnosti. Do této skupiny metod se řadí gradientní metody, které hledají optimum na základě gradientu cílové funkce. Příkladem jsou např. Newtonova metoda, adjungovaná metoda či metoda největšího spádu. [46; 47]

Newtonova metoda vychází z aproximace kriteriální funkce  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pomocí Taylorova polynomu druhého stupně, tedy

$$F(\vec{x}) \approx F(\vec{x}_k) + \vec{G}^T(\vec{x}_k)(\vec{x} - \vec{x}_k) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_k)^T \underline{H}(\vec{x}_k)(\vec{x} - \vec{x}_k), \quad (5.2)$$

kde  $\vec{G}$  označuje gradient kriteriální funkce  $F$  v bodě  $\vec{x}_k$  a  $\underline{H}(\vec{x}_k)$  Hessián parciálních derivací druhého řádu kriteriální funkce  $F$  v bodě  $\vec{x}_k$ . Obecný předpis pro stanovení gradientu a Hessiánu funkce  $F$  je k dispozici v příloze 2. Z podmínky pro anulování gradientu funkce  $F(\vec{x})$  a následnou úpravou lze dosáhnout rovnice

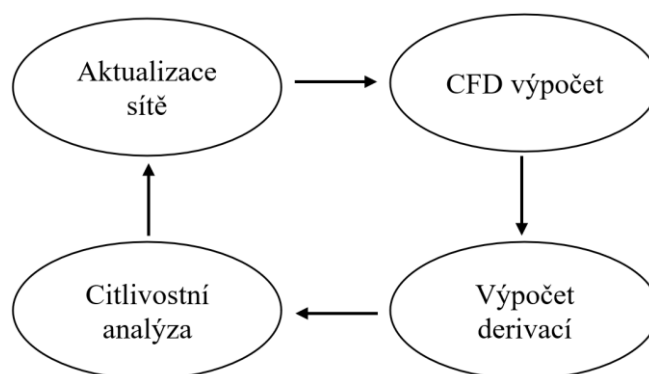
$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \underline{H}^{-1}(\vec{x}_k)\vec{G}(\vec{x}_k). \quad (5.3)$$

Pro dosažení konvergence ke stacionárnímu bodu s minimem funkce  $F$  je důležité, aby výchozí bod  $\vec{x}_0$  ležel v blízkosti hledaného bodu. V případě lokálního minima funkce  $F$  je Hessián pozitivně semidefinitní a v případě lokálního maxima negativně semidefinitní. [43; 49; 50; 51]

Adjungovaná metoda se často využívá, pokud je optimalizační proces založen na numerických simulacích. Její výhodou je relativně časově nenáročný a přesný způsob výpočtu numerických gradientů. Tato metoda je základem specializovaného nástroje Adjoint solver, který je součástí softwaru Ansys Fluent. Poskytuje podrobnou citlivostní analýzu systému proudění, čímž rozšiřuje rozsah analýzy získané standardním řešičem CFD. Umožňuje výpočet derivace pozorované veličiny vzhledem k velkému počtu vstupních parametrů současně. [46; 47; 52]

Adjoint solver je v praxi využíván především k tvarové optimalizaci, protože umožňuje nalézt optimální tvar pro dané provozní podmínky. Postup tvarové optimalizace pomocí Adjoint solveru lze dle obr. 22 rozdělit do čtyř kroků. CFD výpočet je proveden standardním řešičem

proudění. Adjoint solver následně vypočítá derivace (gradienty) a zpracuje data získané citlivostní analýzou. Dále na základě omezení prostředí a dat o citlivosti dochází k aktualizaci sítě, s čímž souvisí pojem morfování sítě. Tento proces je možné opakovat vícekrát, aby se dosáhlo optimálního návrhu. [52]



obr. 22: Postup tvarové optimalizace pomocí Adjoint solveru [52]

Adjungovanou rovnicí je možné formulovat dvěma přístupy, a to diskrétním a spojitým. V diskrétním přístupu jsou adjungované rovnice získány diskretizací a následnou linearizací PDR (*parciální diferenciální rovnice*). V rámci spojitého přístupu jsou PDR diferencovány a následně diskretizovány pro numerické řešení. Hlavní výhodou diskrétního přístupu je generování derivací, které jsou numericky konzistentní bez ohledu na jemnost sítě. S diskrétním přístupem však souvisí vyšší výpočetní náročnost, než je tomu u spojitého přístupu. Adjoint solver, aplikovaný v softwaru Ansys Fluent, je založený na diskrétním přístupu. [52; 53]

## 5.2 Parametrizace tvaru

Nedílnou součástí optimalizačního procesu je parametrizace tvaru, při které je daný tvar vyjádřen konečným počtem proměnných, ideálně co nejmenším, aby se minimalizovaly výpočetní náklady. Je žádoucí, aby daná metoda parametrizace byla schopná přesně modelovat aerodynamický povrch a snadno se přizpůsobovala změnám tvaru. Volba metody parametrizace a její implementace má vliv na kvalitu výsledků a výpočetní náročnost celého procesu. Je také důležité si uvědomit, že při nevhodné volbě parametrů nebo matematického popisu může parametrizace omezit návrhový prostor, a tím nemusí být některé geometrické tvary v optimalizačním procesu postihnuty. [38; 39; 45]

Existují různé metody parametrického popisu aerodynamických tvarů. Mezi nejčastěji používané lze zařadit Bézierovy křivky, B-spline křivky a plochy, PARSEC metodu či parametrizaci CST (*Class-Shape-Transformation*). [38; 39; 47; 54]

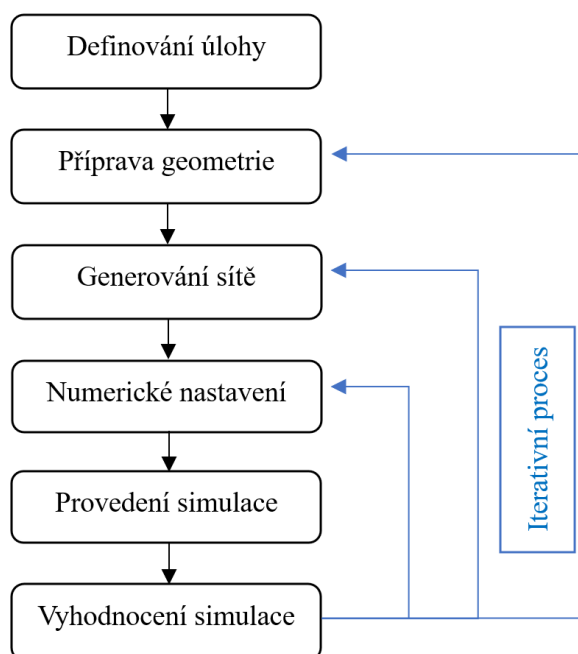
V rámci CFD simulací je často využíváno tzv. morfování sítě. Nejedná se o typickou parametrizaci tvaru tělesa, nýbrž parametrizaci sítě. Postupně dochází k deformaci a změnám výpočetní sítě během numerické simulace, tedy k plynulému transformování jednoho síťového modelu na druhý. Dle změn sítě lze následně modifikovat geometrii modelů, které jsou numerické simulaci podrobeny. Příklady metod morfování sítě, které jsou využívány v softwaru Ansys, jsou přímá interpolace, RBF (*Radial Basis Function*) či polynomická metoda. [55; 56]

## 6. Numerická simulace rotoru multikoptéry ve visu

V této kapitole bude popsán postup numerické simulace rotoru multikoptéry nacházející se ve visu. K provedení numerické simulace byly využity programy od firmy Ansys. Jednalo se o software Ansys SpaceClaim, který umožnil úpravu modelu rotoru před samotnou numerickou simulací. Pro ni byl následně použit software Ansys Fluent, který patří mezi nejpoužívanější nástroje k řešení CFD úloh.

Numerická simulace byla provedena pro různé geometrie rotorů, jejichž rotorové listy byly parametrizovány třemi parametry, a to zúžením listu  $K$ , úhlem náběhu v 75 % poloměru  $\alpha_{75}$  a zkroucením listu  $\theta_{tw}$ , jak bylo popsáno v kap. 3.1. Geometrie jednotlivých rotorových listů byly získány pomocí výpočetního skriptu, který byl předmětem praktické části bakalářské práce [1]. Náboj rotoru byl modelován tak, aby jeho tvar odpovídal rotorům, které jsou dnes běžně využívány v praxi, a zároveň splňoval svou funkci.

Schématické znázornění postupu numerické simulace je zobrazeno na obr. 23. Na danou úlohu lze nahlížet jako na iterativní proces, protože došlo k opakované úpravě a optimalizaci geometrie, sítě a numerického nastavení.



obr. 23: Postup CFD úlohy

Příprava geometrie a generování sítě, včetně studie nezávislosti sítě, byla nejprve provedena pro rotor se základní geometrií ( $K = -0,8$ ,  $\theta_{tw} = -20^\circ$  a  $\alpha_{75} = 7^\circ$ ). Po odladění celého procesu byly simulovány další modely rotorů, u nichž se využila stejná výpočetní doména a stejné parametry sítě.

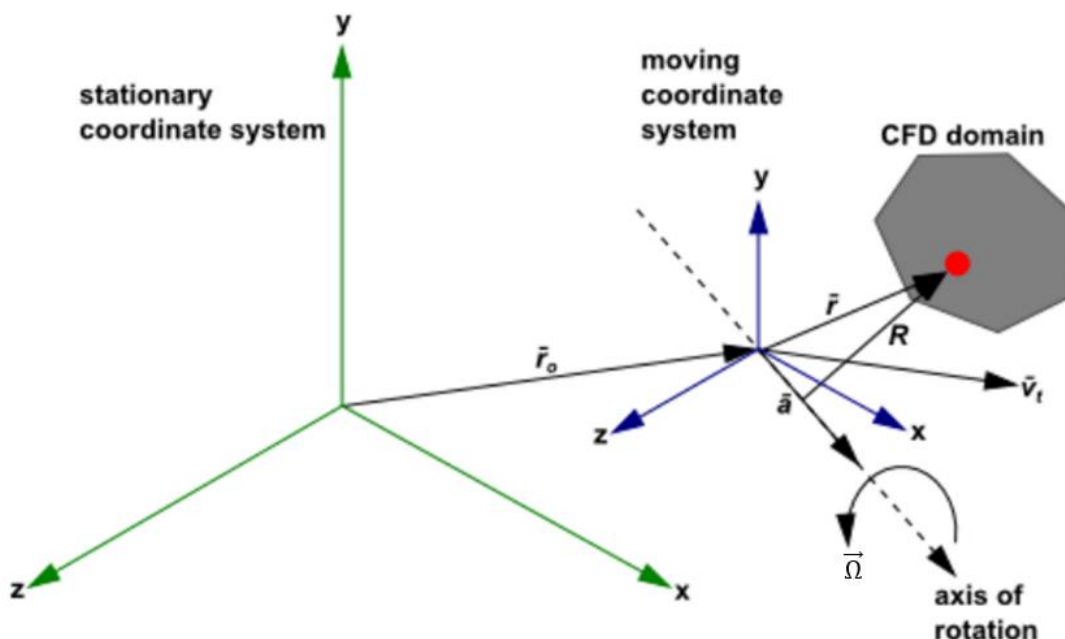


## 6.1 Metody výpočtu

Ve výchozím nastavení řeší program Ansys Fluent rovnice proudění ve stacionární (inerciální) vztažné soustavě. V rámci úloh zahrnující pohyblivé části je však žádoucí modelovat proudění v pohyblivé (neinerciální) vztažné soustavě (angl.: *Moving reference frame*). V těchto případech aktivuje Ansys Fluent ve vybraných zónách buněk pohyblivé vztažné soustavy. [57]

Při aplikaci pohyblivé vztažné soustavy je snahou převést problém, který je ve stacionární vztažné soustavě nestacionární, na ustálený vzhledem k pohyblivé vztažné soustavě. V úlohách s konstantní úhlovou rychlostí je tedy možné transformovat pohybové rovnice do pohyblivé soustavy tak, že lze použít ustálené řešení. [57]

Na obr. 24 je znázorněn souřadnicový systém, jehož počátek je definován polohovým vektorem  $\vec{r}_0$ . Tento systém se vůči stacionární soustavě souřadnic pohybuje translační rychlostí  $\vec{v}_t$  a otáčí úhlovou rychlostí  $\vec{\Omega}$  kolem osy definované jednotkovým vektorem  $\vec{a}$ . Polohový vektor  $\vec{r}$  vyjadřuje polohu libovolného bodu CFD domény. [57]



obr. 24: Stacionární a pohyblivá vztažná soustava [57]

Vztah mezi relativní rychlostí  $\vec{v}_r$ , tedy rychlostí z pohledu pohyblivé vztažné soustavy, a absolutní rychlostí z pohledu stacionární vztažné soustavy  $\vec{v}$  je dán vztahem

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u}_r, \quad (6.1)$$

kde  $\vec{u}_r$  označuje relativní rychlost pohyblivé soustavy vůči inerciální vztažné soustavě. Tato rychlost lze vyjádřit pomocí rovnice

$$\vec{u}_r = \vec{v}_t + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (6.2)$$

Pohybové rovnice popisující proudění se následně rozšíří o dodatečné členy zrychlení vznikající v důsledku transformace ze stacionární do pohyblivé vztažné soustavy. [57]

Ansyst Fluent umožňuje k numerickému řešení proudění kolem pohyblivých částí přistupovat různými způsoby. Pro případy, jako je např. úloha rotoru multikoptéry ve visu, kdy jsou v modelu zahrnuty jak stacionární, tak i pohyblivé zóny, lze využít dva přístupy, a to metodu Multiple Reference Frame (MRF) a metodu Sliding Mesh. Stacionární zóny, tedy zóny, kde se nevyskytují žádné pohyblivé části, lze následně řešit pomocí rovnic stacionární vztažné soustavy. Zatímco zóny, které obsahují pohyblivé části, jsou řešeny pomocí rovnic pohyblivé vztažné soustavy. [57]

### 6.1.1 Metoda MRF

V rámci metody MRF se využívá řešení v pohyblivé vztažné soustavě. Dochází k aproximaci ustáleného stavu, při níž lze jednotlivým zónám přiřadit různé rotační a translační rychlosti. Pokud se jedná o pohyblivou zónu, pak se k řešení aplikují rovnice pohyblivé vztažné soustavy. Naopak zóny neobsahující pohyblivé části lze řešit pomocí rovnic ve stacionárním tvaru. Na rozhraní mezi jednotlivými zónami se předpokládá, že rychlost je v absolutních hodnotách pro každou zónu stejná. Tato metoda tedy nezohledňuje relativní pohyb pohybující se zóny vůči sousedním zónám a síť se nepohybuje. [57]

Přestože při aplikaci metody MRF dochází ke zjevné aproximaci, může tento přístup poskytnout rozumný model proudění pro mnoho aplikací. Zároveň je možné ho využít jako počáteční podmínku pro výpočet pomocí metody Sliding Mesh, která je výpočtově významně náročnější. [57]

### 6.1.2 Metoda Sliding Mesh

Dále je možné k simulaci přistupovat pomocí dynamického pohybu sítě, kdy lze posouvat hranice buněčných zón vzhledem k ostatním hranicím a podle toho upravovat síť. Speciálním případem je metoda Sliding Mesh, při níž se uzly v dané dynamické zóně pohybují pevně. Doména je rozdělena na stacionární a pohybující se zóny, které jsou odděleny nekonformními rozhraními. Pohyb sítě i nekonformní rozhraní se poté aktualizují v čase. Jedná se tedy

o nestacionární metodu. Je nutné, aby zóny, které jsou propojené nekonformními rozhraními, zůstaly ve vzájemném kontaktu. [58]

Tato metoda umožňuje simulovat nestacionární interakce mezi stacionárními a pohyblivými částmi a zachytit přechodné chování proudění. Nevýhodou je však velmi vysoká výpočtová náročnost a časté divergentní chování. Jako počáteční podmínka je v mnoha případech využíván výpočet proudového pole pomocí metody MRF, čímž se získá přesný počáteční stav a ke konvergenci řešení dochází rychleji. [58]

## 6.2 Příprava geometrie

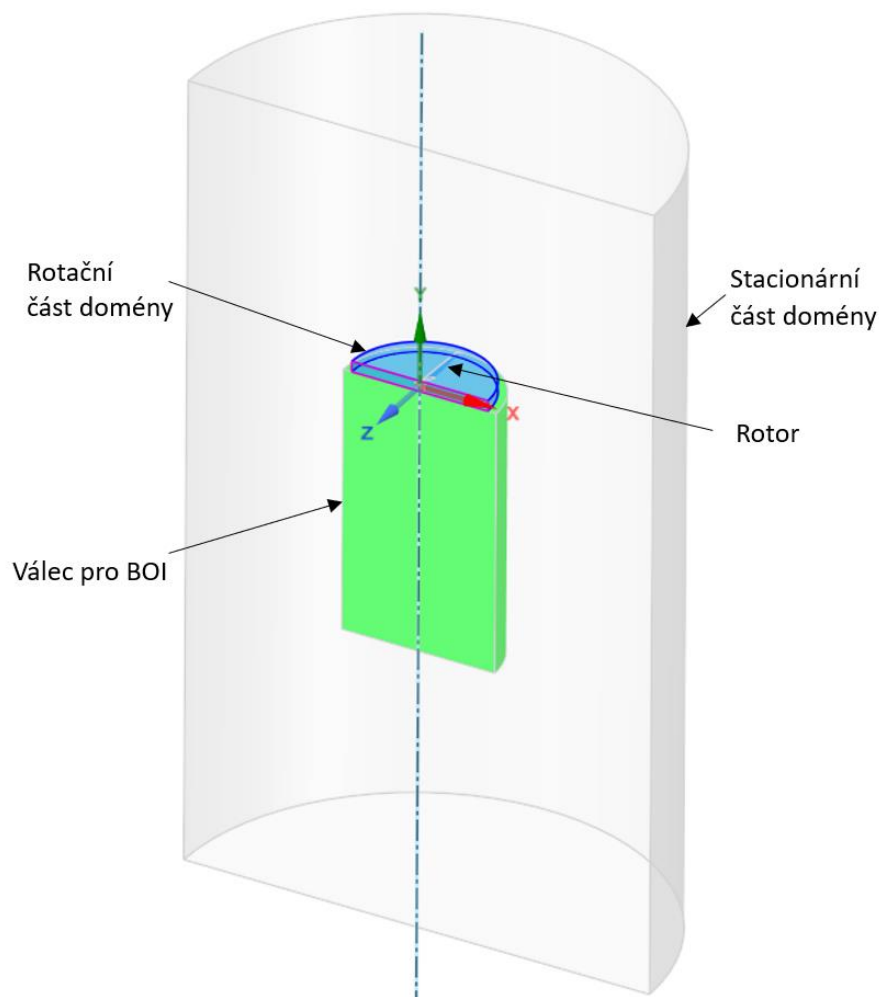
Jak již bylo zmíněno výše, pro první CFD simulaci byl vybrán rotor se základní geometrií z bakalářské práce [1], která je charakterizována parametry  $K = -0,8$ ,  $\alpha_{75} = 7^\circ$  a  $\theta_{tw} = -20^\circ$ . Model rotoru je k nahlédnutí v příloze 3.

Při numerické simulaci byla použita metoda MRF. Výpočetní doména byla definována v programu Ansys SpaceClaim. Při prvním CFD výpočtu byl simulován celý rotor. Pro snížení výpočetní náročnosti se však následně přistoupilo k simulaci pouze poloviny rotoru a doména tak byla poloviční, viz. obr. 25. Doména byla rozdělena na globální stacionární část a rotační část domény. Obě oblasti domény byly vymezeny válci, jejich průměry a výšky jsou uvedeny v tab. 1. Pod rotační částí byl umístěn válec jako oblast pro nástroj *Body of Influence (BOI)*, který se aplikuje při lokálním síťování.

tab. 1: Rozměry domén

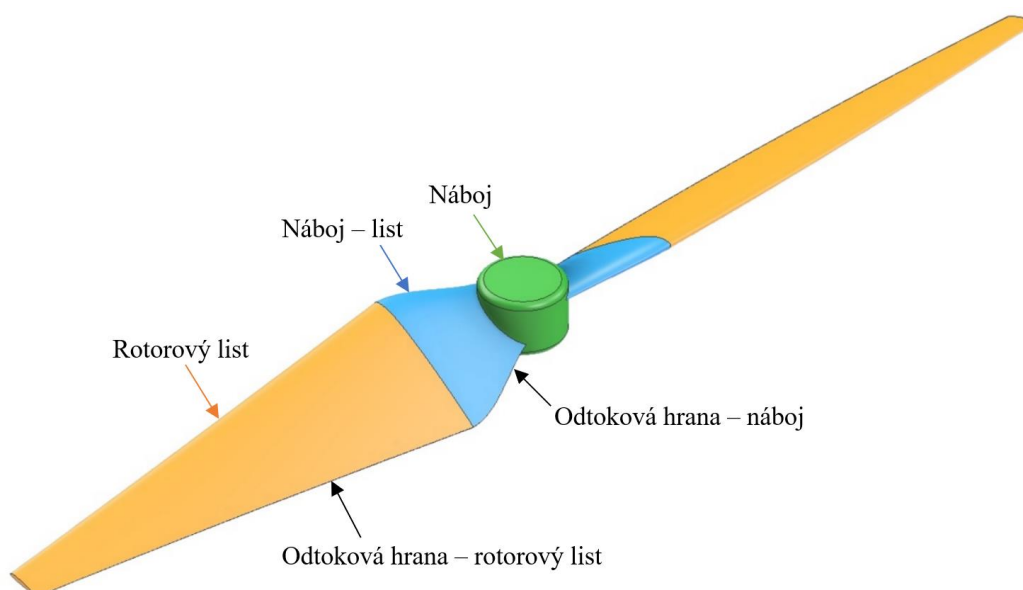
|                         |                 |                            |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|
| stacionární část domény | průměr $D$ [mm] | 1066,8 ( $3,5 \cdot D_R$ ) |
|                         | výška $H$ [mm]  | 1800                       |
| rotační část domény     | průměr $D$ [mm] | 312                        |
|                         | výška $H$ [mm]  | 24                         |
| Body of Influence (BOI) | průměr $D$ [mm] | 350                        |
|                         | výška $H$ [mm]  | 600                        |

Hodnoty průměrů a výšek válců byly voleny z hlediska počítačové paměti a možného ovlivnění výsledků analýzy. Je důležité, aby hranice stacionární oblasti byly od rotoru dostatečně daleko, čímž se zabraní např. zpětnému proudění, které by mohlo způsobovat divergentní chování. Na délku výpočetní domény měla také vliv studie nezávislosti sítě, která bude v diplomové práci uvedena později.



obr. 25: Výpočetní doména

Na obr. 26 je ukázáno rozdělení rotoru na jednotlivé oblasti, které se provedlo také v programu Ansys SpaceClaim. Toto rozdělení umožňovalo lokálně zjemnit síť.



obr. 26: Rozdělení oblastí rotoru

## 6.3 Generování numerické sítě

Generování numerické sítě probíhalo v programu Ansys Fluent Meshing, kde byl zvolen *Watertight Geometry Workflow*. K řízení velikosti sítě v určitých oblastech geometrie bylo využito lokální síťování, které umožňuje zjemnit nebo zhrubnout síť, a tím ovlivnit přesnost simulace a výpočetní čas. Dané oblasti byly uvedeny na obr. 26.

Síťování se rozděluje do dvou skupin, a to na povrchové a objemové síťování. Povrchová síť je výchozím bodem k definování hranic pro objemovou síť. V rámci povrchové sítě byla využita funkce *local sizing* umožňující lokální nastavení její velikosti. Dále byl také sledován parametr *skewness* vyjadřující kvalitu povrchové sítě a hrající významnou roli v kvalitě následně generované objemové sítě. Nastavení sítě bylo voleno vždy tak, aby jeho hodnota byla menší než 0,7.

Při objemovém síťování byla aplikována metoda polyhexcore, která využívá kombinaci polyhedral a hexcore buněk. Obecně lze říci, že tato metoda využívá při řešení méně paměti RAM a řešení je dosaženo během kratšího výpočetního času. Zároveň se vyznačuje lepší aproximací gradientů a menšími efekty numerické difúze. Ke zlepšení kvality objemové sítě byla následně využita funkce *Improve Volume Mesh* zlepšující hodnoty ortogonální kvality. [59]

Jelikož se jedná o iterativní proces, numerická síť byla dle výsledků simulace zpětně upravována a optimalizována. Zároveň byla provedena studie o nezávislosti sítě, která bude v práci zmíněna později. Konečné nastavení parametrů při generování sítí je uvedeno v příloze 5. Nastavení sítě u simulací ostatních rotorů bylo identické.

### 6.3.1 Mezní vrstva

Numerické řešení proudění v blízkosti stěny má rozhodující vliv na kvalitu výsledků simulace. Bylo tedy nutné nastavit síť v blízkosti rotoru s ohledem na velikost mezní vrstvy. V programu Ansys Fluent Meshing byl aplikován typ mezní vrstvy *uniform*. K danému problému se přistoupilo také iterativně, kdy se pro první přiblížení tloušťky mezní vrstvy a první vrstvy buněk v mezní vrstvě využil volně dostupný *y+ calculator* [60]. Vstupní hodnoty do tohoto nástroje byly stanoveny, jako by se jednalo o rovinnou desku o charakteristické délce, která je rovna těživě profilu v 75 % poloměru rotoru. Při výpočtu bylo proudění modelováno až k obtékané stěně. Z tohoto důvodu byla bezrozměrná vzdálenost od stěny  $y^+$  stanovena na  $y^+ = 1$ . Všechny vstupní hodnoty pro *y+ calculator* jsou k nahlédnutí v tab. 2 a hodnoty získané pomocí *y+ calculator* pro první přiblížení jsou poté v tab. 3.

*tab. 2: Vstupní hodnoty –  $y^+$  calculator*

|                                      |                       |
|--------------------------------------|-----------------------|
| rychlost proudu [ $m/s$ ]            | 98                    |
| hustota [ $kg/m^3$ ]                 | 1,225                 |
| dynamická viskozita [ $Pa \cdot s$ ] | $18,13 \cdot 10^{-6}$ |
| charakteristická délka [ $m$ ]       | 0,01775               |
| požadované $y^+$                     | 1                     |

*tab. 3: Výsledky –  $y^+$  calculator*

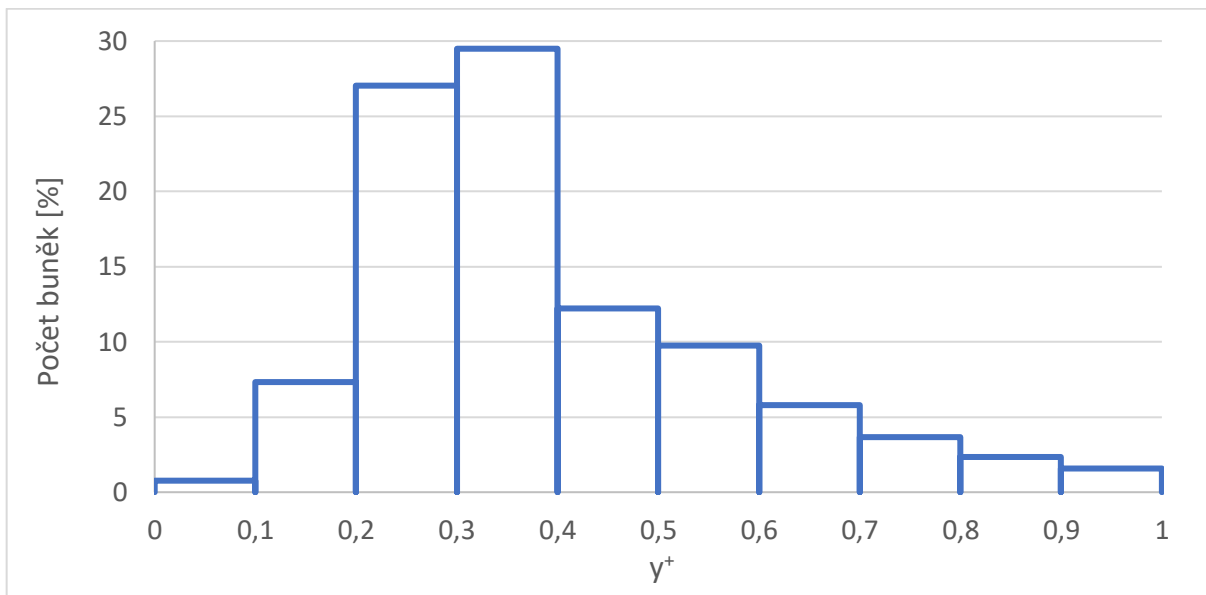
|  |         |
|--|---------|
| tloušťka první vrstvy buněk [ $mm$ ]   | 0,00570 |
| celková tloušťka mezní vrstvy [ $mm$ ] | 0,63587 |

Dle výsledků uvedených v tab. 3 byly při generování sítě v programu Ansys Fluent Meshing nastaveny dva případy mezní vrstvy, které jsou blíže specifikovány v tab. 4.

*tab. 4: Nastavení sítě – mezní vrstva*

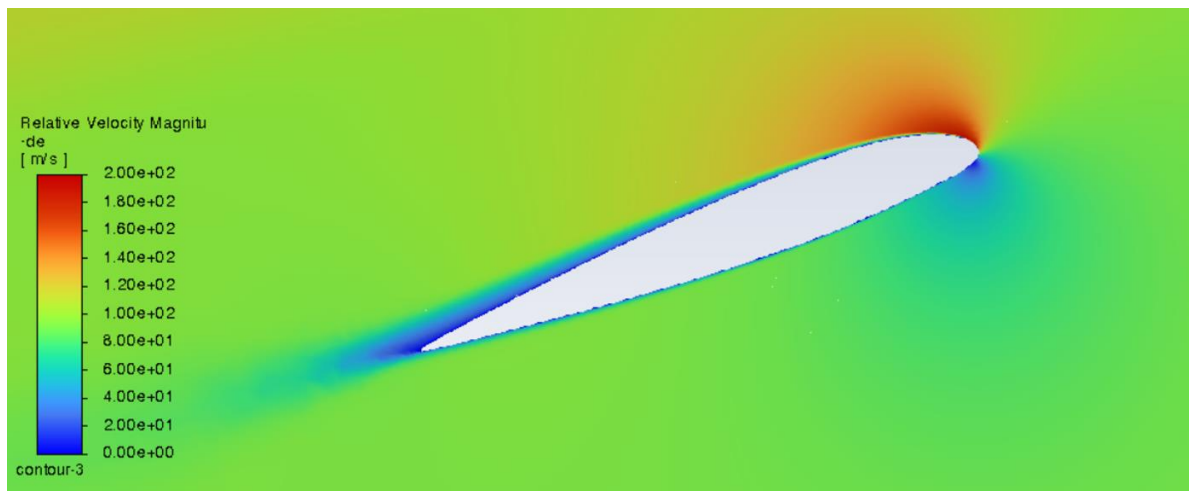
|               |                       |             |
|---------------|-----------------------|-------------|
| rotorový list | typ                   | uniform     |
|               | počet vrstev          | 20          |
|               | koeficient růstu      | 1,2         |
|               | velikost první vrstvy | 0,0048 $mm$ |
| náboj         | typ                   | uniform     |
|               | počet vrstev          | 15          |
|               | koeficient růstu      | 1,2         |
|               | velikost první vrstvy | 0,009 $mm$  |

Během výpočtu se následně aplikovala automatická adaptace sítě na  $y^+$ , při které byla maximální hodnota stanovena jako  $y^+ = 1$ . Výsledné hodnoty  $y^+$  původní geometrie jsou znázorněny v grafu 1.



graf 1: Výsledné hodnoty bezrozměrné vzdálenosti od stěny  $y^+$

Na obr. 27 je zobrazena mezní vrstva v řezu v 75 % poloměru rotoru.



obr. 27: Mezní vrstva – řez v 75 % poloměru rotoru

### 6.3.2 Studie nezávislosti sítě

Generování sítě může být časově velice náročné. Je však žádoucí tomuto kroku věnovat dostatek času, protože kvalita sítě je rozhodující pro přesnost řešení a konvergenci výsledků. Pro zjištění, zda je řešení nezávislé na síti, se využívá studie nezávislosti sítě (angl.: *Grid Independence Study*). [19; 37]

V případě úloh s jednoduchou geometrií jsou během studie nezávislosti sítě porovnávány řešení minimálně třech různých, ale rovnoměrně zjemněných sítí. Výsledkem je index

konvergence sítě (angl.: *Grid Convergence Index – GCI*), pro jehož vyjádření je nutná Richardosonova extrapolace. GCI lze popsat jako standardizovaný a systematický odhad numerické chyby způsobené mřížkou. [19; 37]

Při provedení studie nezávislosti sítě na geometrii využívanou v této práci však nebylo možné sítě rovnoměrně zjemnit, a tudíž nemohl být GCI použit. Ke studii se přistoupilo obecněji – byly vytvořeny tři sítě, u kterých byly měněny parametry uvedené v příloze 4, čímž byly získány rozdílné velikosti sítě. U daných sítí byly následně porovnány vypočtené hodnoty tahu a kroutícího momentu, které jsou k nahlédnutí v tab. 5. Tyto hodnoty jsou uvedeny pouze pro polovinu rotoru. Tah a kroutící moment celého rotoru je tedy roven dvojnásobku uvedených hodnot. Dle výsledků byla pro provedení dalších simulací vybrána 2. síť, jejíž celkové nastavení je uvedeno v příloze 5.

tab. 5: *Výsledky studie nezávislosti sítě*

| Síť    | Počet buněk | Tah [N] | Kroutící moment [Nm] |
|--------|-------------|---------|----------------------|
| 1. síť | 14,503 mil. | 7,611   | 0,1637               |
| 2. síť | 17,468 mil. | 7,862   | 0,1574               |
| 3. síť | 24,934 mil. | 7,868   | 0,1576               |

Do studie nezávislosti sítě byl dále zahrnut vliv velikosti domény na výsledky tahu a kroutícího momentu. Byly porovnány dvě různě velké domény, které jsou popsány v tab. 6. Z uvedených výsledků v této tabulce je patrné, že velikost výsledné domény nemá významný vliv na výsledky simulace.

tab. 6: *Studie nezávislosti sítě – vliv velikosti domény*

| Doména | Průměr $D$ [mm]            | Výška $H$ [mm] | Tah [N] | Kroutící moment [Nm] |
|--------|----------------------------|----------------|---------|----------------------|
| Menší  | 1066,8 ( $3,5 \cdot D_R$ ) | 1800           | 7,862   | 0,1574               |
| Větší  | 1219,2 ( $4 \cdot D_R$ )   | 2100           | 7,865   | 0,1576               |



## 6.4 Numerické nastavení

K řešení proudového pole byl využit software Ansys Fluent, v rámci něhož bylo zvoleno nastavení, které je blíže popsáno v tab. 7. Popis okrajových podmínek je poté k dispozici v tab. 8.

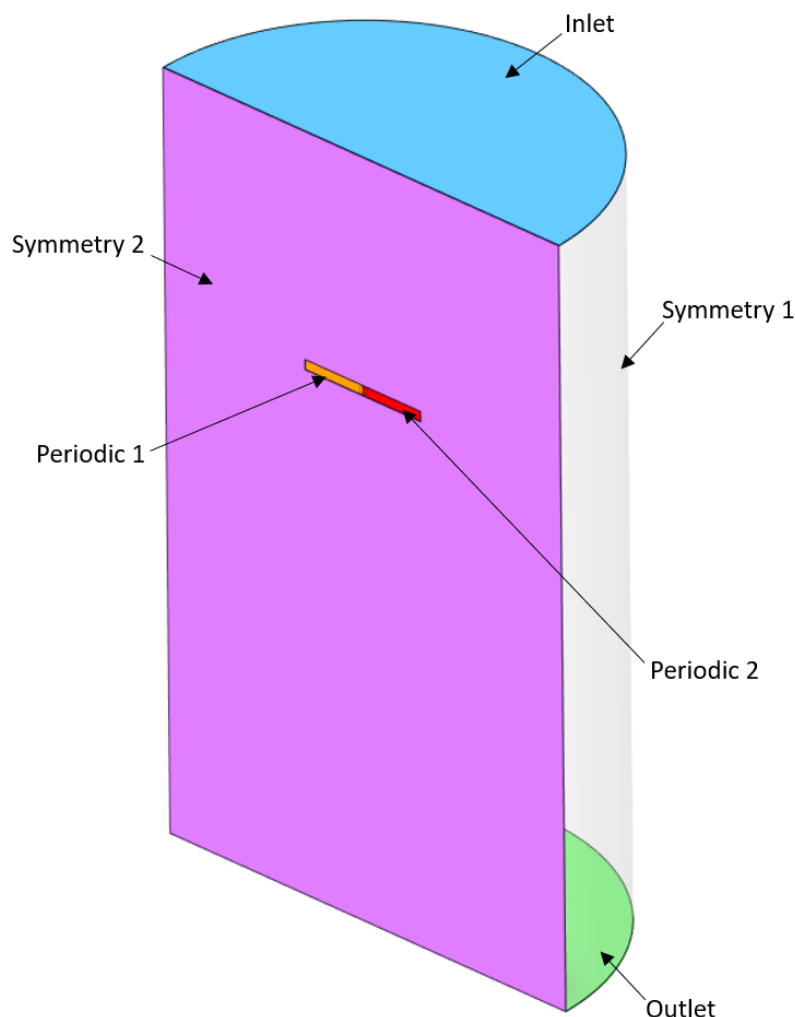
tab. 7: Numerické nastavení

| Nastavení                                |  |
|--|--|
| Řešič                                    | Pressure-Based, Steady time  |
| Modely                                   | SST k-omega, Energy Equation   |
| Materiál – vzduch                        | Hustota: <i>ideal-gas</i>  |
|  | Měrná tepelná kapacita: $c_p = 1006,43 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
|  | Tepelná vodivost: $\lambda = 0,0242 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$     |
|  | Viskozita: <i>sutherland</i>   |
|  | Molekulární hmotnost: $28,966 \text{ kg/kmol}$   |
| Operační tlak                            | 101325 Pa  |
| Podmínky zón buněk (rotační část domény) | Frame Motion   |
|  | Úhlová rychlost: $\Omega = -858,388 \text{ rad/s}$ (osa y)                                 |
| Řešení                                   |  |
| Metody                                   | Schéma: <i>Coupled</i>   |
|  | Gradient: <i>Least Squares Cell Based</i>  |
|  | Tlak: <i>Second Order</i>  |
|  | Hustota: <i>Second Order Upwind</i>  |
|  | Hybnost: <i>Second Order Upwind</i>  |
|  | Turbulentní kinetická energie: <i>Second Order Upwind</i>                                  |
|  | Specifická rychlost disipace: <i>Second Order Upwind</i>                                   |
|  | Energie: <i>Second Order Upwind</i>  |
| Controls                                 | Výchozí nastavení  |
| Inicializace                             | Hybridní   |
| Výpočet                                  | Time Scale Factor: <i>dle konvergence</i>  |
|  | Length Scale Method: <i>konzervativní</i>  |

Při výpočtu byl využit přístup pomocí metody MRF. Úhlová rychlost rotoru byla volena dle výpočtu, který byl proveden již ve zmíněné bakalářské práci. V něm byly otáčky pro rotor o průměru 12 palců stanoveny na hodnotu  $n = 8197 \text{ min}^{-1}$ . Pro zachování správného směru otáčení byla daná hodnota zadána jako záporná. Z důvodu provedení numerické simulace pro letový režim vis byla na vstupu volena podmínka Pressure Inlet. Protože byla simulována pouze polovina rotoru, byla aplikována periodická podmínka. Pro lepší přehlednost jsou okrajové podmínky znázorněny na výpočetní doméně na obr. 28.

tab. 8: Okrajové podmínky

|                 |  |
|-----------------|--|
| Pressure Inlet  | Vstup výpočetní domény   |
|                 | Intenzita turbulence = 5 %   |
|                 | Poměr turbulentní viskozity = 10   |
|                 | Celková teplota = 288,15 K   |
| Pressure Outlet | Výstup výpočetní domény  |
|                 | Intenzita turbulence = 5 %   |
|                 | Poměr turbulentní viskozity = 10   |
|                 | Celková teplota = 288,15 K   |
| Wall            | Stěny modelu rotoru  |
|                 | Stationary Wall  |
| Periodic        | Rotační část domény  |
|                 | Rotační  |
| Symmetry 1      | Plášť válce pro stacionární část domény  |
|                 | Výchozí nastavení: nulové normálové složky rychlosti a nulové gradienty všech veličin po celé symetrické ploše |
| Symmetry 2      | Přední strana půlválce   |
|                 | Výchozí nastavení: nulové normálové složky rychlosti a nulové gradienty všech veličin po celé symetrické ploše |
| Internal        | Vnitřní objem – tekutina   |

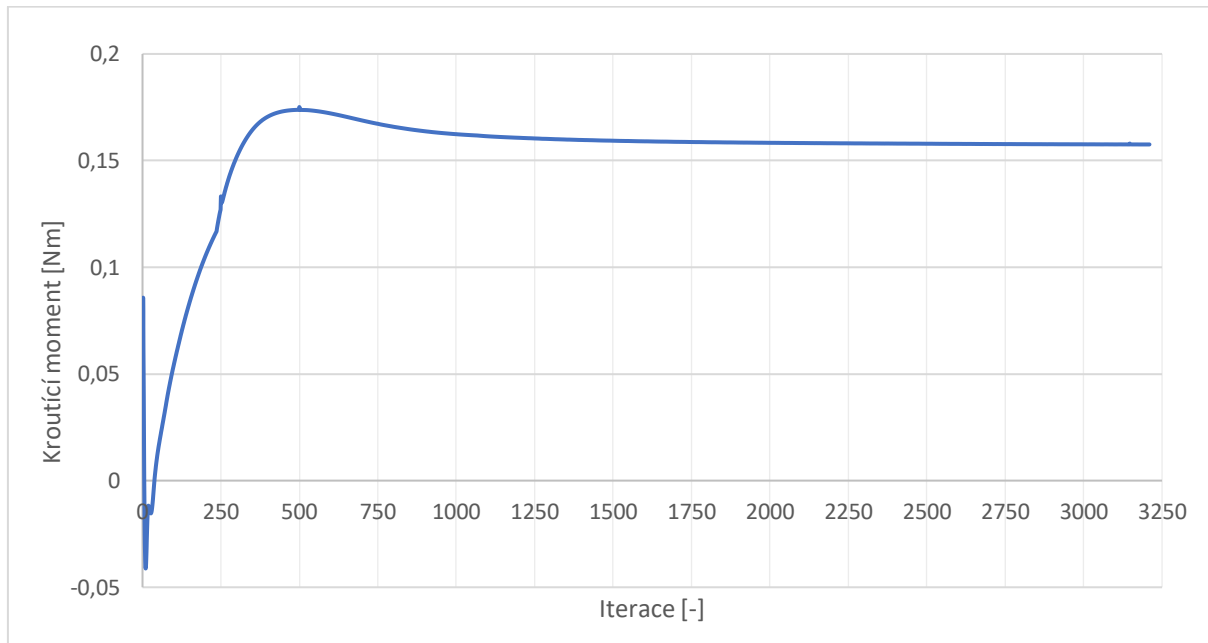


obr. 28: Okrajové podmínky

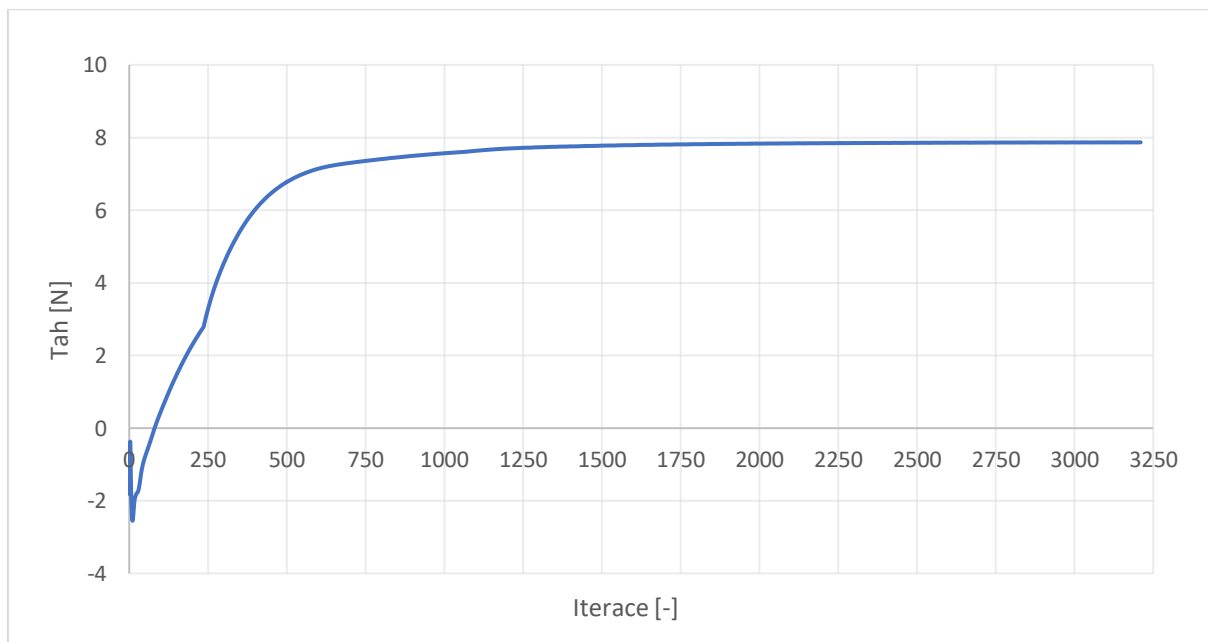
## 6.5 Průběh výpočtu

Během výpočtu je nutné, aby řešič provedl dostatečný počet iterací a zároveň splnil podmínky konvergence. Konvergence je základní vlastností numerických řešení. Obecně lze říci, že je numerická metoda konvergentní, pokud se přibližné řešení blíží k přesnému řešení diferenciálních rovnic. Monitorování konvergence, respektive ověření, že jsou implementované rovnice řešeny správně, lze provádět různými způsoby, např. pozorováním reziduí. Stanovení konvergence pouze na základě poklesu reziduí však nemusí být vždy zcela správné, protože samotný pokles absolutních hodnot reziduí ne vždy vypovídá o konvergenci výpočtu. Z tohoto důvodu je žádoucí také pozorovat průběh sledovaných veličin, které v tomto případě byly tah a kroutící moment. Výpočet byl prováděn do doby, kdy byly splněny podmínky konvergence reziduí a zároveň se průběh sledovaných veličin ustálil na konkrétní hodnotě. Příklad takových průběhů je znázorněn v grafech 2 a 3. Podmínky konvergence reziduí byly voleny dle

původního nastavení programu Ansys Fluent. Při zcela korektním přístupu ke konvergenci by se výpočet ukončil až ve chvíli, kdy by se i průběhy reziduí ustálily. V rámci této práce to však nebylo nutné, protože výsledkem numerické simulace byly pouze hodnoty tahu a kroutícího momentu.



*graf 2: Průběh kroutícího momentu v závislosti na počtu iterací – základní geometrie*



*graf 3: Průběh tahu v závislosti na počtu iterací – základní geometrie*

## 6.6 Výsledky analýzy

V rámci práce byla nejprve simulována základní geometrie z bakalářské práce [1]. Následně byly simulovány další geometrie, u nichž byly měněny parametry:  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$ . Geometrie byly generovány pomocí výpočetního skriptu z bakalářské práce [1]. Z důvodu časové náročnosti byl výpočet proveden pouze pro šest geometrií, které jsou popsány v tab. 9.

tab. 9: Popis geometrií – CFD

| Označení geometrie | $\alpha_{75}$ [°] | $K$ [–] | $\theta_{tw}$ [°] |
|--------------------|-------------------|---------|-------------------|
| Základní geometrie | 7,0               | -0,80   | -20,0             |
| Geometrie 2        | 7,0               | -0,90   | -20,0             |
| Geometrie 3        | 8,0               | -0,80   | -20,0             |
| Geometrie 4        | 9,0               | -0,80   | -20,0             |
| Geometrie 5        | 7,0               | -0,80   | -15,0             |
| Geometrie 6        | 6,5               | -0,75   | -20,5             |

V tab. 10 jsou uvedeny výsledky z CFD simulací, a to již pro obě poloviny rotoru.

tab. 10: Výsledky analýzy – CFD

| Označení geometrie | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] |
|--------------------|---------|------------|
| Základní geometrie | 15,7232 | 0,3149     |
| Geometrie 2        | 15,3271 | 0,3056     |
| Geometrie 3        | 14,9764 | 0,3528     |
| Geometrie 4        | 14,8397 | 0,4263     |
| Geometrie 5        | 15,0225 | 0,3088     |
| Geometrie 6        | 15,1414 | 0,3077     |

V tab. 11 jsou poté porovnány výsledky z CFD simulací s výsledky z výpočetního skriptu z bakalářské práce [1], kde byla pro výpočet aplikována teorie BEMT, tedy metoda s nižší přesností. Výpočetní skript stanovuje pro zadaný tah  $T = 14,715 N$  kroutící moment,

respektive požadovaný výkon. V daném skriptu je ve výpočtu uvažován pouze interval poměrného poloměru rotoru  $r \in (0,2; 1)$ . Také v této tabulce jsou hodnoty uvedeny již pro obě poloviny rotoru.

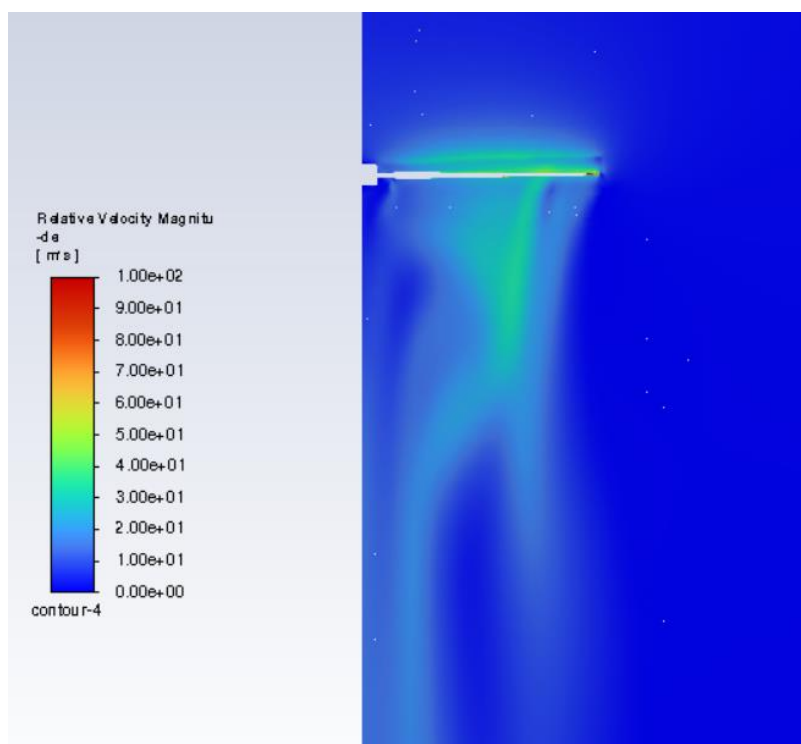
Z daných výsledků je patrné, že pomocí CFD simulací byly získány vyšší hodnoty tahu i kroutícího momentu. V případě geometrie 4 byl dokonce kroutící moment vyšší o více než 40 %. Výpočet pomocí teorie BEMT tedy významně podhodnocuje hodnoty kroutícího momentu, respektive požadovaného výkonu. V případě tahu jsou rozdíly významně menší, a to pouze v jednotkách procent.

Na rozdílnost výsledků daných metod mohlo má vliv vícero faktorů. Jedním z nich je skutečnost, že v rámci CFD simulací byl výpočet proveden pro celý rotor. Uvažovala se tedy i střední část rotoru (náboj + část listu), která také generuje tah. Naopak ve výpočetním skriptu byl zaveden předpoklad, že tah je generován pouze na poměrném poloměru rotoru  $r \in (0,2; 1)$ . Zároveň však nejsou rozdíly v hodnotách tahu tak výrazné, protože do výpočetního skriptu byla zavedena korekce tahu ve formě Prandtlova ztrátového faktoru, který zachycuje ztrátu vztlaku vlivem prostorového proudění v důsledku konečného počtu listů. Vliv mohl mít také fakt, že se při výpočtu teorií BEMT pro některá Reynoldsova čísla využila interpolace hodnot součinitele vztlaku a odporu. I když výpočet pomocí teorie BEMT vykazuje nižší přesnost, trend výsledků je u obou metod v závislosti na volbě parametrů  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$  stejný.

tab. 11: Porovnání výsledků – CFD simulace a MATLAB

| Geometrie          | $T_{CFD}$<br>[N] | $T_{Matlab}$<br>[N] | Rozdíl<br>[%] | $M_{K_{CFD}}$<br>[Nm] | $M_{K_{Matlab}}$<br>[Nm] | Rozdíl<br>[%] |
|--------------------|------------------|---------------------|---------------|-----------------------|--------------------------|---------------|
| Základní geometrie | 15,7232          | 14,7150             | 6,41          | 0,3149                | 0,2350                   | 25,37         |
| Geometrie 2        | 15,3271          | 14,7150             | 3,99          | 0,3056                | 0,2337                   | 23,54         |
| Geometrie 3        | 14,9764          | 14,7150             | 1,75          | 0,3528                | 0,2385                   | 32,40         |
| Geometrie 4        | 14,8397          | 14,7150             | 0,84          | 0,4263                | 0,2442                   | 42,72         |
| Geometrie 5        | 15,0225          | 14,7150             | 2,047         | 0,3088                | 0,2337                   | 24,17         |
| Geometrie 6        | 15,1414          | 14,7150             | 2,82          | 0,3077                | 0,2344                   | 23,82         |

Na obr. 29 je pro ukázkou zobrazeno proudové pole části domény ze simulace rotoru se základní geometrií.



obr. 29: Proudové pole rotoru – základní geometrie

## 7. Tvarová optimalizace rotorových listů

V rámci diplomové práce byla provedena tvarová optimalizace rotorových listů. Nejprve bylo snahou optimalizovat geometrii pomocí specializovaného nástroje Adjoint solver, který je součástí softwaru Ansys Fluent. V průběhu výpočtů se však objevilo velké množství chybových hlášek programu, které se nedařilo odstranit. Z tohoto důvodu se pro optimalizaci využila Newtonova metoda, která byla již zmíněna v kap. 5.1.2. Časová náročnost celého optimalizačního procesu se tedy výrazně snížila. Část optimalizační úlohy byla implementována do výpočetního prostředí MATLAB.

### 7.1 Postup optimalizace

K optimalizační úloze se přistoupilo tak, že pro daný tah  $T = 14,715 \text{ N}$  bylo cílem snížit kroutící moment, respektive požadovaný výkon. Požadovaná hodnota tahu vycházela z návrhu rotorového listu v rámci bakalářské práce [1]. Kriteriační funkce byla stanovena pomocí Lagrangeových multiplikátorů, jejichž teorie je popsána v příloze 6.

Pomocí Lagrangeových multiplikátorů lze převést optimalizační úlohu s omezeními na optimalizační úlohu bez omezení, respektive dojde k modifikaci kriteriační funkce  $F$  tak, že se k ní přičtou všechny vedlejší podmínky, které jsou vynásobené neznámým koeficientem  $\lambda$ , tedy Lagrangeovým multiplikátorem. [43; 51]

Na začátku výpočtu byla nejprve stanovena Lagrangeova funkce, která má pro tuto konkrétní úlohu následující tvar

$$L(K, \alpha_{75}, \theta_{tw}, \lambda) = P(K, \alpha_{75}, \theta_{tw}) + \lambda[T(K, \alpha_{75}, \theta_{tw}) - T_0], \quad (7.1)$$

kde  $P$  označuje funkci pro výpočet výkonu,  $T$  funkci pro výpočet tahu a  $T_0$  je požadovaný tah, tedy  $T_0 = 14,715 \text{ N}$ . Funkce popisující tah a výkon jsou závislé na zúžení listu  $K$ , úhlu náběhu v 75 % poloměru  $\alpha_{75}$  a zkroucení listu  $\theta_{tw}$ . Pro vyjádření těchto funkcí se v programu MATLAB provedla regresní analýza. Ta vycházela prvně z výsledků numerických simulací, které byly předmětem kap. 6.6. Konkrétně se jednalo o vypočítané hodnoty tahu a kroutícího momentu pro konkrétní geometrii definovanou parametry  $K, \alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$ . Lagrangeova funkce byla následně derivována podle proměnných  $K, \alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$ , čímž byl získán gradient a Hessián Lagrangeovy funkce. K celé úloze by se mohlo přistoupit i tak, že by byl gradient a Hessián stanoven pomocí numerických derivací. Jelikož je však Lagrangeova funkce v této úloze závislá na 4 proměnných, pro výpočet Hessiánu by bylo zapotřebí minimálně 30 CFD simulací, což by bylo časově neproveditelné. Pro nalezení optimalizované geometrie byla následně na

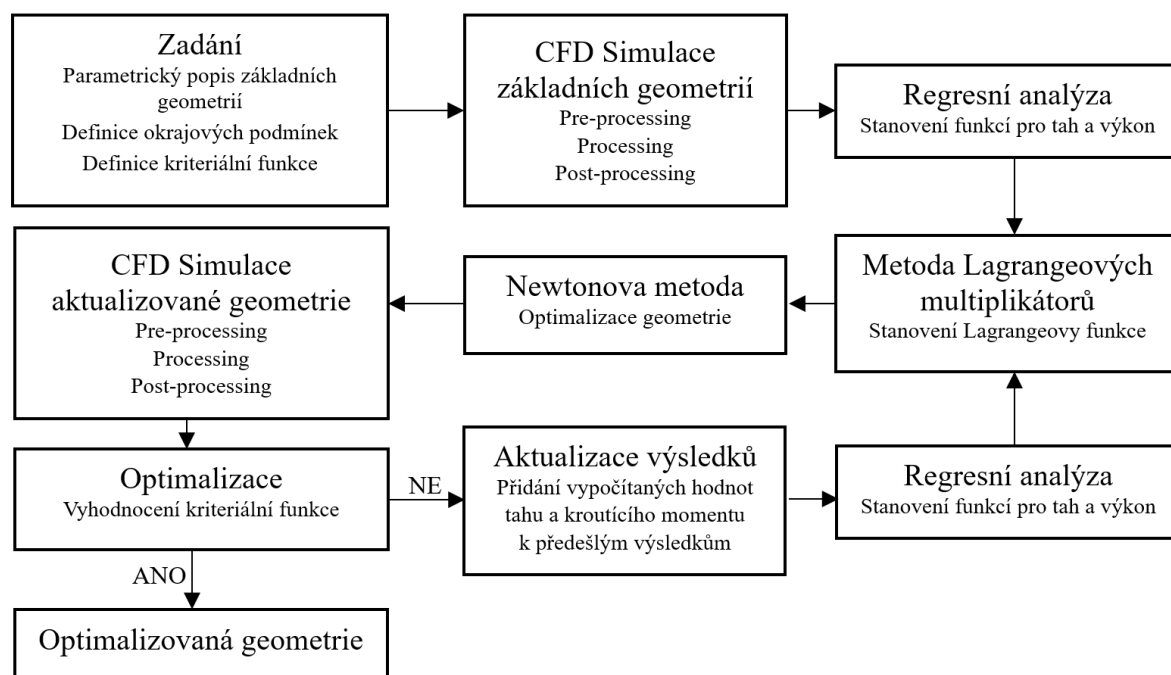


Lagrangeovou funkci  $L$  aplikována Newtonova metoda, která určila nové hodnoty parametrů  $\vec{x} = (K, \alpha_{75}, \theta_{tw})$  definující novou geometrii rotorových listů (viz. kap. 3.1). V případě Newtonovy metody se jednalo o iterační výpočet, který byl ukončen při splnění podmínky

$$|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k| \leq 10^{-4}. \quad (7.2)$$

Do výpočtu byly také přidány podmínky, které zabraňovaly překročení určitých hodnot  $K$  a  $\alpha_{75}$ . Tím se zajistilo generování geometrie s ohledem na dopředný let, vyrobitelnost a pevnostní analýzu rotoru a samotnou konvergenci výpočtu, protože zpočátku výpočet často divergoval. Pro lepší konvergenci byl dále do Newtonovy metody zaveden relaxační součinitel, který zmenšoval skok mezi parametry během jednotlivých iterací. Významný vliv měla pro konvergenci také volba počátečních hodnot parametrů  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$ .

Pro numerické simulace v kap. 6.6 platil relativně velký rozptyl návrhových parametrů  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$  a výsledků tahu a kroutícího momentu. Regresní analýza tak nestanovila rovnice pro tah a výkon zcela přesně. Z tohoto důvodu bylo nutné celý optimalizační proces několikrát opakovat, a to tak, že pro nově definovanou geometrii byla provedena CFD simulace, z níž byl získán tah a kroutící moment. Tyto hodnoty pak byly přidány k původním výsledkům, z nichž se pomocí regresní analýzy předepsaly nové rovnice pro tah a výkon a z nich nová Lagrangeova funkce  $L$ . Tento postup se opakoval přesně třikrát. Výsledkem bylo navýšení počtu bodů v oblasti lokálního minima výkonu  $P$ , a tím přesnější optimalizační proces. Schéma celého optimalizačního procesu je na obr. 30.



obr. 30: Schéma optimalizace geometrie rotorových listů

MATLAB skript *optimalizace\_rotorovych\_listu.m* provádějící optimalizaci rotorových listů je k práci dodán jako samostatná příloha. Při generování určitých částí kódu (např. předpis pro regresní analýzu) byl použit jazykový model ChatGPT [61].

## 7.2 Výsledky optimalizace

V rámci optimalizačního procesu se provedly tři iterace. Pro zcela přesné stanovení optimální geometrie by bylo žádoucí postup opakovat vícekrát, avšak dle získaných výsledků lze předpokládat, že by to výrazné zlepšení nepřineslo.

Toto tvrzení podporují i dostupná data od několika firem zabývajících se výrobou vrtulí a rotorů, kdy např. česká firma Mejlík udává pro svůj rotor o stejném průměru účinnost  $FM = 0,56$ . [62]

V tab. 12 jsou uvedeny výsledky optimalizovaných geometrií, včetně jejich parametrizace. Pro srovnání jsou v tabulce zahrnuty výsledné hodnoty základní geometrie. Optimalizovaná geometrie (3. iterace) se v porovnání se základní geometrií vyznačuje snížením tahu o 3,84 % a kroutícího momentu o 10,21 %. Výsledná účinnost rotoru  $FM$  se u optimalizovaného rotoru zvýšila o 2,27 %.

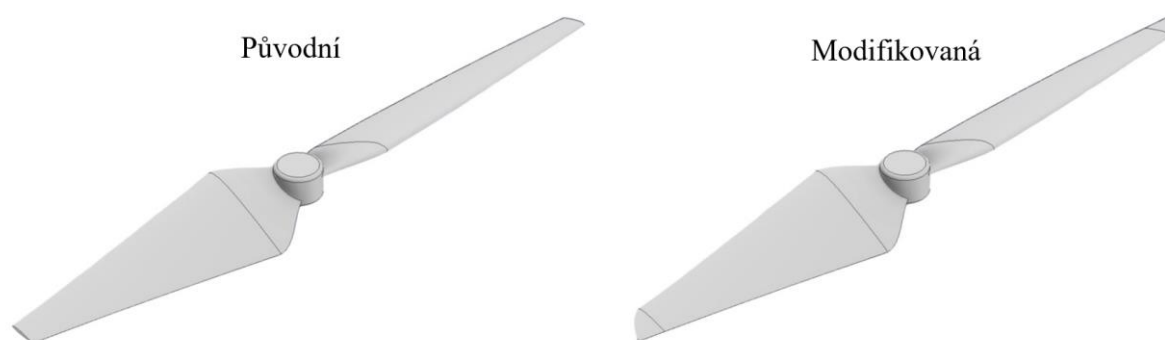
tab. 12: Výsledky optimalizace rotorových listů

| Optimalizovaná geometrie | $\alpha_{75}$ [°] | $K$ [–] | $\theta_{tw}$ [°] | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] | $FM$ [–] |
|--------------------------|-------------------|---------|-------------------|---------|------------|----------|
| základní geometrie       | 7,00              | -0,800  | -20,00            | 15,7232 | 0,3149     | 0,5455   |
| 1. iterace               | 5,41              | -0,799  | -18,78            | 14,5718 | 0,2795     | 0,5484   |
| 2. iterace               | 5,55              | -0,770  | -15,52            | 14,9483 | 0,2873     | 0,5543   |
| 3. iterace               | 5,27              | -0,779  | -16,00            | 15,1418 | 0,2857     | 0,5682   |

## 7.3 Úprava geometrie rotoru na konci listu

U optimalizovaných geometrií 2. iterace a 3. iterace byla provedena modifikace konce listu, která je zobrazena na obr. 31.

Upravená geometrie byla následně podrobena numerické simulaci. Z výsledků simulací, které jsou k dispozici v tab. 13, vyplývá, že modifikovaný rotor je charakterizovaný nižší hodnotou tahu i kroutícího momentu. Při porovnání účinnosti  $FM$  si však lze povšimnout, že úpravou geometrie se účinnost nepatrně zvýšila.



obr. 31: Původní a modifikovaná geometrie

tab. 13: Porovnání původní a modifikované geometrie

| Optimalizovaná geometrie | Bez zaoblení konce listu |            |          | Zaoblení konce listu |            |          |
|--------------------------|--------------------------|------------|----------|----------------------|------------|----------|
|                          | $T$ [N]                  | $M_K$ [Nm] | $FM$ [-] | $T$ [N]              | $M_K$ [Nm] | $FM$ [-] |
| 2. iterace               | 14,9483                  | 0,2873     | 0,5543   | 14,7616              | 0,2794     | 0,5593   |
| 3. iterace               | 15,1418                  | 0,2857     | 0,5682   | 14,9695              | 0,2779     | 0,5742   |

Z dostupných výsledků vyplývá, že u optimalizované geometrie (3. iterace) se zaoblením konce listu se tah oproti základní geometrie snížil o 5,03 % a kroučící moment o 13,31 %. Výsledná účinnost rotoru  $FM$  se tedy zvýšila o 2,87 %. I přes relativně výrazné snížení tahu se výsledná optimalizovaná geometrie stále vyznačuje vyšší hodnotou tahu než hodnota  $T = 14,715$  N, která byla požadována v rámci optimalizačního procesu. Pro dosažení správného tahu by bylo nutné provést další iterace optimalizace. Případně by se hodnota tahu mohla snížit nastavením listu rotoru na nižší úhel nastavení listu, což je legitimní postup používaný v praxi. Chyba však v tomto případě byla jen 1,7 %. Z tohoto důvodu se další snížení tahu neprovedlo.

## 8. Modifikace původního výpočetního skriptu pro návrh rotorových listů

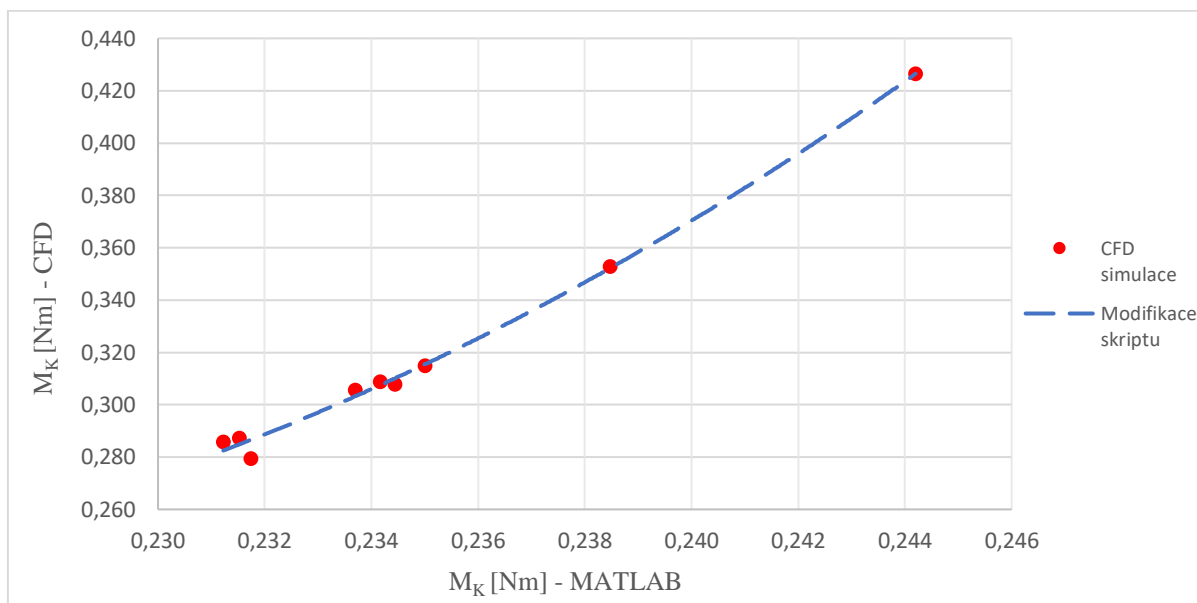
Závislost výsledků kroutícího momentu z CFD simulací a výpočetního skriptu lze popsat pomocí polynomu druhého stupně. Toto nahrazení je zobrazeno na grafu 4. Daným polynomem byl následně modifikován původní výpočetní skript pro návrh rotorových listů, tedy

$$M_{K_{modif}} = 258,7902 \cdot M_{K_{původ}}^2 - 111,9413 \cdot M_{K_{původ}} + 12,3299, \quad (8.1)$$

kde  $M_{K_{modif}}$  označuje kroutící moment z výpočetního skriptu po modifikaci a  $M_{K_{původ}}$  kroutící moment před modifikací. V případě tahu nelze závislost výsledků stanovit, protože skript počítá vždy s požadovanou hodnotou tahu  $T = 14,715$  N. Rozdíl v hodnotách tahu však nebyl nijak výrazný a jako výstup stačí zmínit, že výpočetní skript vykazuje chybu v jednotkách procent. Porovnání aktualizovaných výsledků je k dispozici v tab. 14. Rozdíly kroutícího momentu jsou po modifikaci maximálně do 3 %.

tab. 14: Porovnání výsledků – CFD simulace a MATLAB – modifikovaný skript

| Geometrie                 | $T_{CFD}$<br>[N] | $T_{Matlab}$<br>[N] | Rozdíl<br>[%] | $M_{K_{CFD}}$<br>[Nm] | $M_{K_{Matlab}}$<br>[Nm] | Rozdíl<br>[%] |
|---------------------------|------------------|---------------------|---------------|-----------------------|--------------------------|---------------|
| Základní geometrie        | 15,7232          | 14,7150             | 6,41          | 0,3149                | 0,3154                   | -0,16         |
| Geometrie 2               | 15,3271          | 14,7150             | 3,99          | 0,3056                | 0,3031                   | 0,82          |
| Geometrie 3               | 14,9764          | 14,7150             | 1,75          | 0,3528                | 0,3522                   | 0,17          |
| Geometrie 4               | 14,8397          | 14,7150             | 0,84          | 0,4263                | 0,4264                   | -0,03         |
| Geometrie 5               | 15,0225          | 14,7150             | 2,05          | 0,3088                | 0,3075                   | 0,44          |
| Geometrie 6               | 15,1414          | 14,7150             | 2,82          | 0,3077                | 0,3100                   | -0,74         |
| Optimalizace - 1. iterace | 14,5718          | 14,7150             | -0,98         | 0,2795                | 0,2865                   | -2,51         |
| Optimalizace - 2. iterace | 14,9483          | 14,7150             | 1,56          | 0,2873                | 0,2848                   | 0,86          |
| Optimalizace - 3. iterace | 15,1418          | 14,7150             | 2,82          | 0,2857                | 0,2825                   | 1,14          |



graf 4: Závislost kroučícího momentu z CFD simulací a výpočetního skriptu

Navzdory menšímu množství simulací se předpokládalo, že závislost výsledků by byla zachována i pro jiné hodnoty parametrů  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$ . Pro ověření tohoto tvrzení by však bylo zapotřebí provést další výpočty. K tomu však v důsledku časové náročnosti CFD simulací nedošlo.

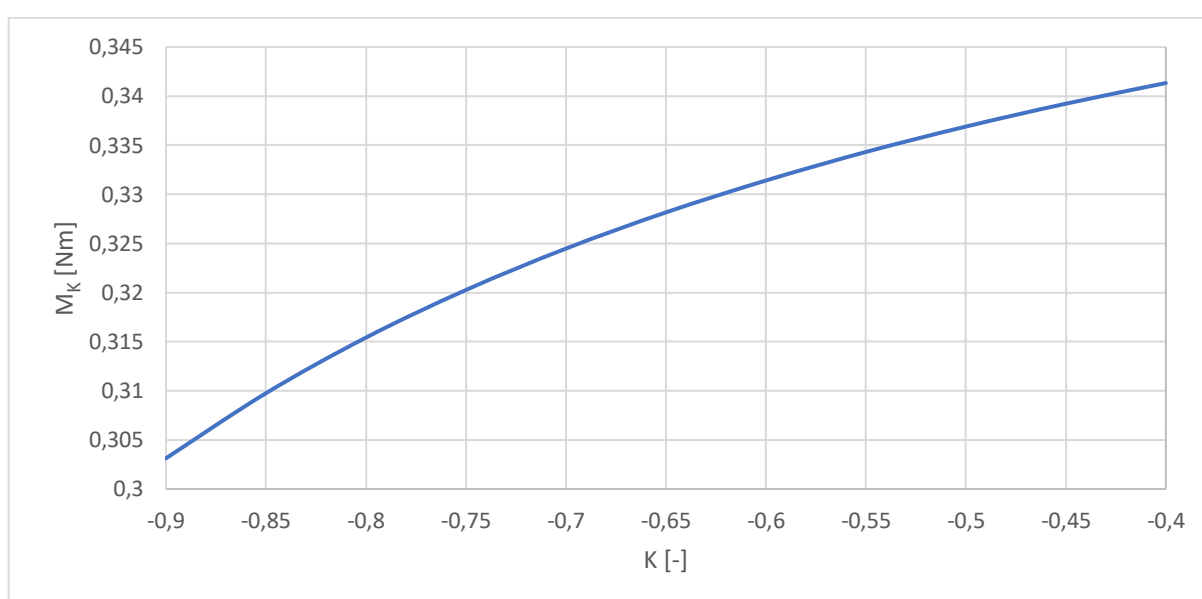
## 8.1 Vliv parametrů geometrie

Při zavedení předpokladu, že závislost výsledků by byla zachována i pro jiné hodnoty parametrů, lze pomocí modifikovaného výpočetního skriptu stanovit vliv zúžení listu  $K$ , úhlu náběhu v 75 % poloměru  $\alpha_{75}$  a zkroucení listu  $\theta_{tw}$  na kroučící moment a požadovaný výkon. Závislosti kroučícího momentu na jednotlivých parametrech jsou k dispozici v grafech 5 až 7. Závislosti jsou vykresleny vždy pro určitý interval hodnot daného parametru. Zároveň platí, že se vždy mění pouze jeden parametr a zbylé dva mají hodnotu  $K = -0,8$ ,  $\alpha_{75} = 7^\circ$  nebo  $\theta_{tw} = -20^\circ$  (základní geometrie). Intervaly byly voleny s ohledem na samotnou geometrii, a to tak, aby hodnoty plnosti a tětivy po délce listu byly zachovány v rozumné míře a odpovídaly rotorům používaných v praxi. Je totiž nutné brát zřetel i na chování rotorů v dopředném letu a pevnost. Zavedly se tedy následující podmínky pro plnost rotoru

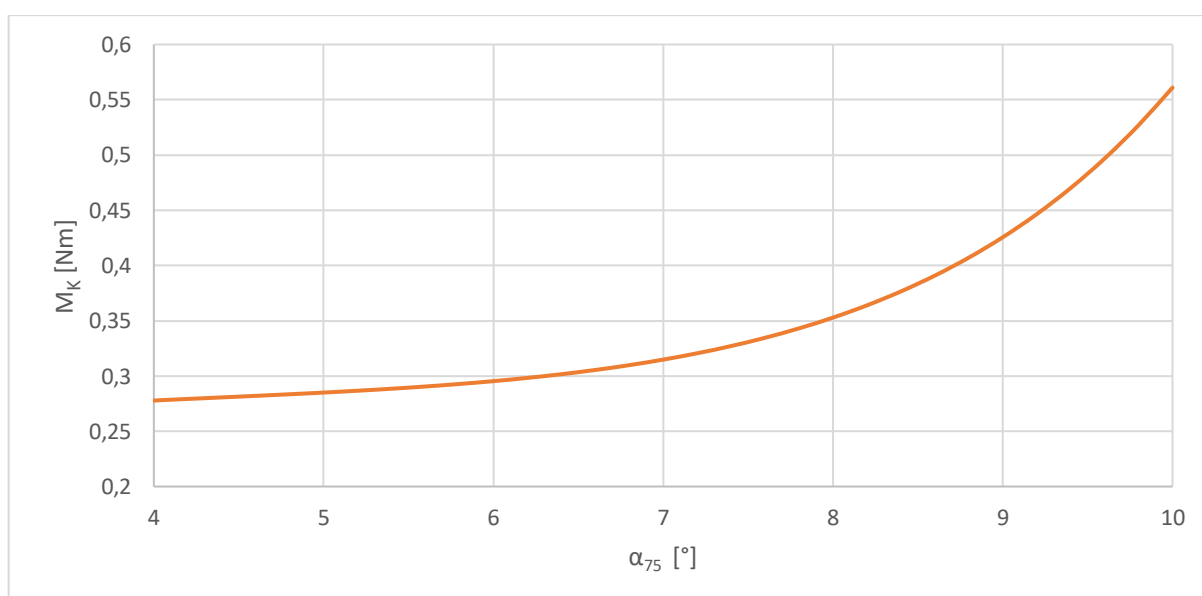
$$\sigma(r = 0,2) \leq 0,19, \quad (8.2)$$

$$\sigma(r = 1) \geq 0,016. \quad (8.3)$$

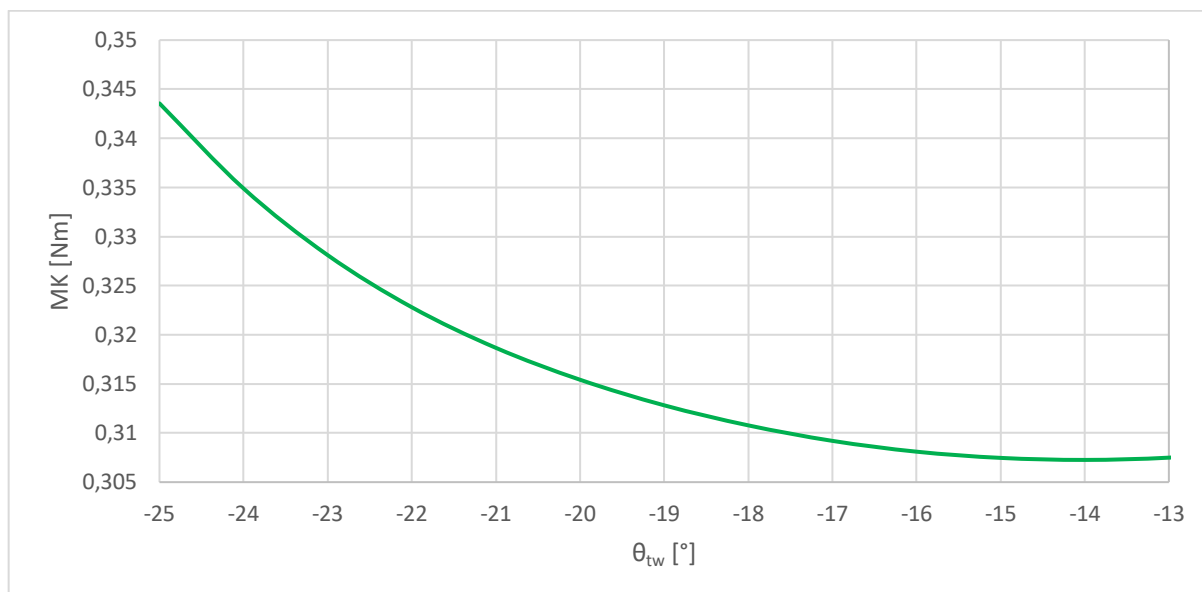
Z daných závislostí je patrné, že v případě zvětšení záporné hodnoty zúžení listu při zachování zbylých parametrů dochází ke snížení kroučícího momentu. Naopak při vyšších úhlech náběhu při zachování zbylých parametrů dochází ke zvýšení kroučícího momentu. Zmenšení záporných hodnot zkroucení listu při zachování zbylých parametrů má za následek snížení kroučícího momentu, a to až do hodnoty  $\theta_{tw} = -14$ , pro kterou lze dosáhnout minima. Pro stanovení vlivu vícero parametrů najednou by bylo zapotřebí větší množství numerických simulací. Zároveň by určité kombinace  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$  nemusely splňovat podmínku velikosti plnosti a tětivy po délce listu.



graf 5: Závislost kroučícího momentu rotoru na zúžení listu



graf 6: Závislost kroučícího momentu rotoru na úhlu náběhu v 75 % poloměru



graf 7: Závislost kroučícího momentu rotoru na zkroucení listu

Je důležité si uvědomit, že na průběhy kroučícího momentu a výkonu v závislosti na daných parametrech má významný vliv Reynoldsovo číslo. Pro tyto konkrétní geometrie při návrhových otáčkách  $n = 8197 \text{ min}^{-1}$  se hodnoty Reynoldsova čísla v 75 % poloměru rotoru vyskytovaly typicky v oblasti  $Re \in \langle 60\,000; 180\,000 \rangle$ . Tato oblast je charakterizována tím, že i malá změna Reynoldsova čísla má relativně velký vliv na součinitel vztlaku, respektive součinitel odporu. Toto tvrzení také potvrzují závislosti součinitele vztlaku na úhlu náběhu a součinitele odporu na součiniteli vztlaku pro profil NACA 23012 naměřené při výzkumném měření NACA [63] z roku 1939. Hodnoty z tohoto měření jsou pro ukázkou na obr. 32. Z tohoto důvodu je nutné konstatovat, že v případě výrazně jiných průměrů rotorů a návrhových otáček, a tím i jiného Reynoldsova čísla, by účinek parametrů  $K$ ,  $\alpha_{75}$  a  $\theta_{tw}$  na kroučící moment a výkon mohl vykazovat zcela jiný charakter.

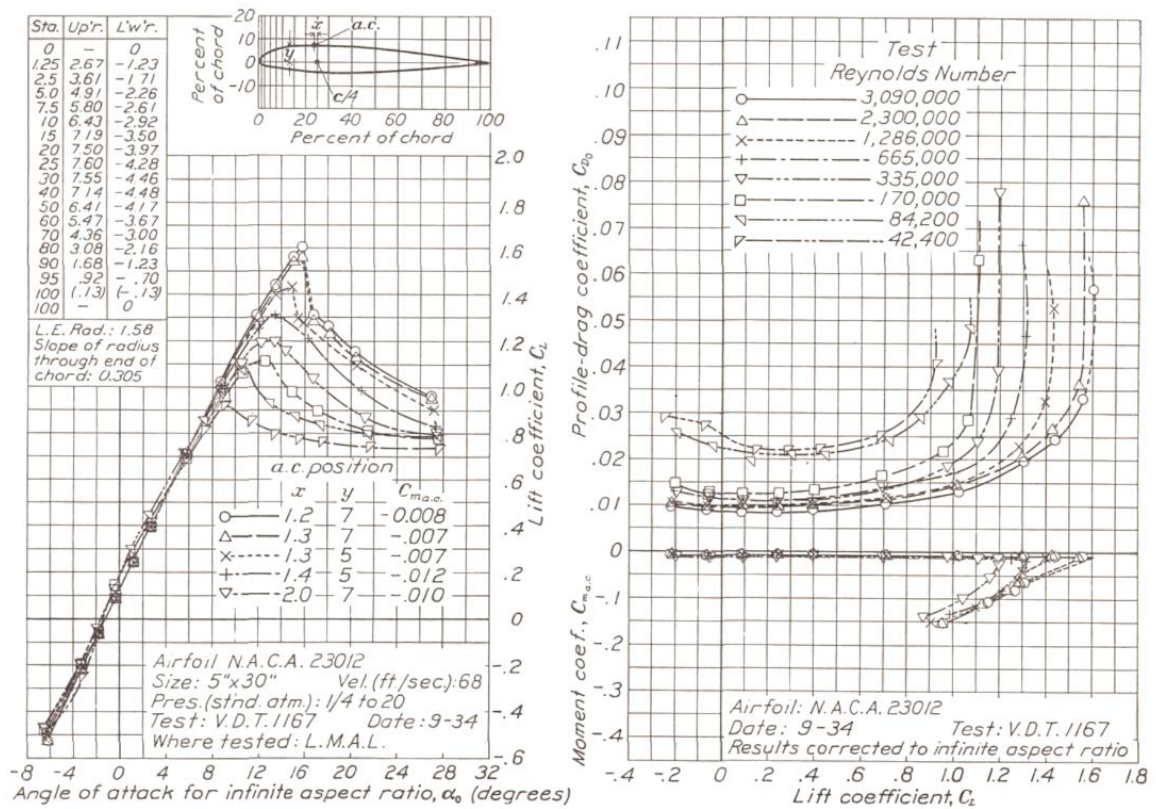


FIGURE 12.—N. A. C. A. 23012.

obr. 32: NACA měření – profil NACA 23012 [63]



## 9. Pevnostní analýza

V dnešní době jsou multikoptéry aplikovány i ve velice nepříznivých podmínkách a vystavovány širokému spektru teplot. Rotorové listy musí mít v daných prostředích dostatečnou živostnost a spolehlivost, aby v provozu mohly plnit požadované funkce. Zároveň má provedení pevnostní analýzy svůj význam i před zkouškami rotorů a vrtulí, a to z pohledu bezpečnosti obsluhy experimentu. [64]

Z hlediska funkční, pevnostní a dynamické stránky je nejdůležitější částí rotoru rotorový list, který lze chápat jako spojitě zatížený jednostranně vetknutý nosník s proměnným průřezem a obecně zakřivenou těžnicí. [2; 64]

### 9.1 Zatížení rotoru

Obecně lze síly a momenty působící na rotor dělit na kvazistatická, která zahrnují odstředivé a aerodynamické síly, a dynamická zatížení. Rotor se obecně otáčí nerovnoměrně, čímž vznikají významné setrvačné síly. Zkoumání dynamických jevů rotoru zahrnující vynucené a samobuzené kmitání je důležitou součástí vývoje a návrhu. Jelikož je však pevnostní výpočet se zřetelem k dynamickým silám a momentům složitý, často se v praxi analyzují pouze statické účinky. [2; 64]

Odstředivé síly, které způsobují tahové, torzní a ohybové zatížení listu, jsou vlivem velkých obvodových rychlostí značné. Odstředivou sílu působící na element listu lze definovat následujícím vztahem

$$dF_{od} = y\Omega^2 dm = y\Omega^2 \rho S_p dy, \quad (9.1)$$

kde  $dm$  je hmotný element,  $S_p$  plocha řezu,  $y$  je vzdálenost od osy rotace,  $\Omega$  úhlová rychlost a  $\rho$  hustota. Celkovou odstředivou sílu listu lze získat sečtením všech odstředivých sil jednotlivých elementů listu, tedy

$$F_{od} = \rho\Omega^2 \int_{r_0}^R S_p \cdot y dy. \quad (9.2)$$

Z této rovnice vyplývá, že nejvyšší hodnoty dosahuje odstředivá síla v ose rotoru. [64]

Aerodynamické síly, jejichž výslednicí je kroutící moment a tah, vyvolávají ohyb a kroucení. Při analýze aerodynamického zatížení se často využívá teorie obtékání izolovaného elementu listu, která byla předmětem kap. 2.1.2. Zatížení izolovaného elementu listu je

zobrazeno na obr. 1. Výsledný vztlak elementu listu  $dL$  a odpor elementu listu  $dD$  lze definovat jako

$$dL = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_l dy, \quad (9.3)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_d dy, \quad (9.4)$$

kde veličina  $C_l$  označuje místní součinitel vztlaku a  $C_d$  místní součinitel odporu. Elementární síly v ose  $x$  a  $z$  jsou dány

$$dF_x = dL \sin \phi + dD \cos \phi, \quad (9.5)$$

$$dF_z = dL \cos \phi - dD \sin \phi, \quad (9.6)$$

kde  $\phi$  označuje úhel proudu. [3; 64]

## 9.2 Pevnostní kontrola rotoru

Pevnostní kontrola rotoru byla provedena dle certifikační specifikace pro vrtule CS – P [65] od agentury EASA (*European Union Aviation Safety Agency*), která mimo jiné uvádí průběh zkoušek vrtulí a stanovuje minimální součinitel bezpečnosti. Tato certifikační specifikace požaduje v odstavci *CS-P 240*, aby součinitel bezpečnosti neměl hodnotu menší než 2. [66]

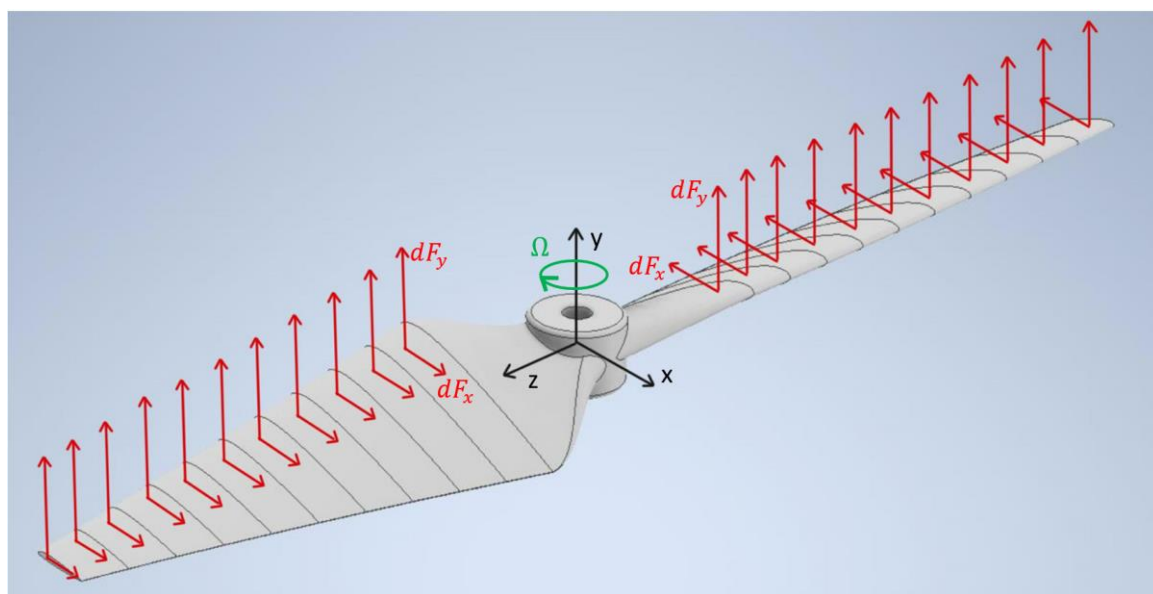
Dále v odstavci *CS-P 350* definuje zkoušku zatížením od odstředivých sil, a to tak, že rotor musí být zkoušen po dobu 1 hodiny při zatížení, které je rovno dvojnásobku zatížení při maximálních přípustných otáčkách. [67]

Pro pevnostní analýzu byl využit software Abaqus, který využívá metodu konečných prvků. Pevnostní kontrola byla provedena pro pět různých geometrií, které jsou blíže specifikovány v tab. 15. Zatížení, které bylo na daný model rotoru aplikováno, vycházelo z kap. 9.1 a z certifikační specifikace pro vrtule CS-P. V rámci výpočtu byla zavedena úhlová rychlost odpovídající maximálním přípustným otáčkám, které byly stanoveny na základě již zmíněné bakalářské práce dle Machova čísla na konci listu. Pro rotor o průměru 12 palců byly maximální přípustné otáčky stanoveny na  $n = 10\,000 \text{ min}^{-1}$ . Další část zatížení rotoru představovaly osamělé síly  $dF_x$  a  $dF_y$ , které byly zavedeny v 11 řezech po délce listu, viz. obr. 33. Tyto síly byly vypočteny dle kap. 9.1 pomocí výpočetního skriptu v programu

MATLAB. Místní součinitel vzlaku  $C_l$  a místní součinitel odporu  $C_d$  v daném řezu byl získán z výpočetního skriptu pro návrh rotoru pomocí metody BEMT z dané bakalářské práce.

tab. 15: Popis vybraných geometrií – pevnostní kontrola

| Popis geometrie  | $\alpha_{75}$ [°] | $K$ [–] | $\theta_{tw}$ [°] |
|--|-------------------|---------|-------------------|
| Základní geometrie navržená v rámci bakalářské práce             | 7,00              | -0,800  | -20,00            |
| Optimalizovaná geometrie – 1. iterace – zaoblení konce listu     | 5,41              | -0,799  | -18,78            |
| Optimalizovaná geometrie – 2. iterace – zaoblení konce listu     | 5,55              | -0,770  | -15,52            |
| Optimalizovaná geometrie – 3. iterace – zaoblení konce listu     | 5,27              | -0,779  | -16,00            |
| Optimalizovaná geometrie – 3. iterace – bez zaoblení konce listu | 5,27              | -0,779  | -16,00            |



obr. 33: Zatížení rotoru

## 9.2.1 Nastavení řešiče

Pevnostní analýze byla podrobena vždy geometrie celého rotoru. Danému modelu byl přiřazen materiál Polyamid 12 (PA12), jehož vlastnosti byly stanoveny dle dostupného datasheetu [68] a které jsou k nahlédnutí v tab. 16. Pro usnadnění výpočtu a zároveň zajištění vyšší bezpečnosti byl modul pružnosti nastaven celkově na hodnotu  $E = 1,7 \text{ GPa}$ . Celkové nastavení řešiče popisuje tab. 17. Při síťování byly použity tetraedrické elementy. V místě přechodu list-náboj byla síť lokálně zjemněna. Na rotor byla aplikována úhlová rychlost a aerodynamické síly v 11 řezech po délce listu. Působíště sil odpovídalo aerodynamickému

středu profilu v daném řezu. Konkrétní hodnoty zatížení byly získány pomocí výpočetního skriptu *pevnost\_rotor.m*, který je k práci přiložen jako samostatná příloha.

tab. 16: Vlastnosti – polyamid 12 [68]

| $\rho$ [ $g \cdot cm^{-3}$ ] | $\sigma_{mXY}$ [MPa] | $\sigma_{mZ}$ [MPa] | $E_{XY}$ [GPa] | $E_Z$ [GPa] |
|------------------------------|----------------------|---------------------|----------------|-------------|
| 1,01                         | 50                   | 50                  | 1,7            | 1,9         |

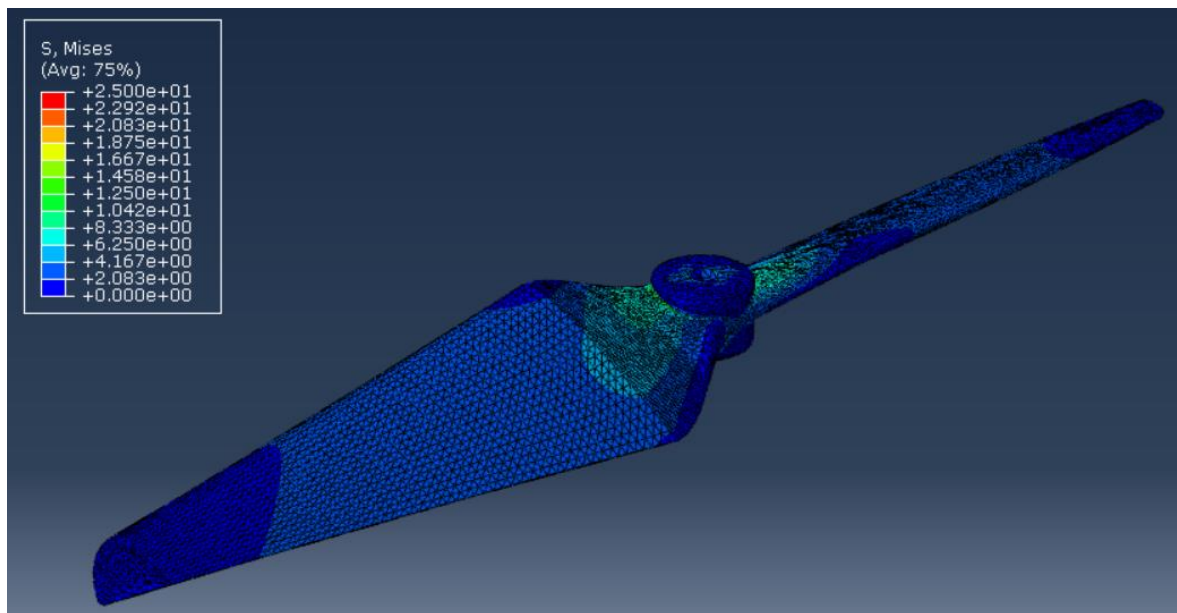
tab. 17: Nastavení řešiče – Abaqus

|                   |  |
|-------------------|--|
| Materiál          | Polyamid 12 (PA12)   |
| Steps             | Initial  |
|                   | Step 1 – Static, General   |
| Constraints       | Reference points: Coupling   |
| Síť               | Tetraedrické elementy (Tet)  |
|                   | Globální velikost = 1,4  |
| Zatížení          | Úhlová rychlost (osa y):<br>$\Omega_1 = -858,388 \text{ rad/s}$ , $\Omega_2 = -1047,198 \text{ rad/s}$ |
|                   | Aerodynamické síly v jednotlivých řezech   |
| Okrajové podmínky | Díra náboje – Encastre ( $U1=U2=U3=UR1=UR2=UR3=0$ )  |

## 9.2.2 Výsledky pevnostní kontroly

Pevnostní kontrola byla provedena pro pět různých geometrií rotorů, které byly popsány v tab. 15. Nejprve byly zanalyzovány modely rotorů, které byly využity i v rámci CFD simulací. Nejkritičtější místem u všech modelů byl přechod mezi listem a nábojem, což je patrné také z obr. 34. Jelikož žádný model pevnostně nevyhovoval, bylo nutné u nich provést modifikaci, která spočívala ve zvětšení tloušťky u kořene listu.

V tab. 18 až tab. 21 jsou uvedeny výsledné hodnoty pevnostní analýzy všech geometrií, u nichž byla provedena modifikace přechodu náboj-list. V programu Abaqus byly pro všechny tyto geometrie počítány dva případy zatížení, a to případ odpovídající návrhovým otáčkám  $n = 8\,197 \text{ min}^{-1}$  a případ odpovídající maximálním přípustným otáčkám  $n = 10\,000 \text{ min}^{-1}$ . Ze získaného maximálního napětí  $\sigma_{max}$  byl stanoven součinitel bezpečnosti  $k$  a jistota  $j$ .



obr. 34: Pevnostní analýza – Výsledná optimalizovaná geometrie – max. otáčky

tab. 18: Pevnostní kontrola – Základní geometrie navržená v rámci bakalářské práce

| Základní geometrie navržená v rámci bakalářské práce |                      |         |         |
|--|----------------------|---------|---------|
| případ zatížení                                      | $\sigma_{max}$ [MPa] | $k$ [–] | $j$ [–] |
| aerodynamické síly + návrh. otáčky                   | 17,22                | 2,904   | 1,452   |
| aerodynamické síly + max. otáčky                     | 24,44                | 2,046   | 1,023   |

tab. 19: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 1. iterace – zaoblení konce listu

| Optimalizovaná geometrie – 1. iterace – zaoblení konce listu |                      |         |         |
|--|----------------------|---------|---------|
| případ zatížení  | $\sigma_{max}$ [MPa] | $k$ [–] | $j$ [–] |
| aerodynamické síly + návrh. otáčky                           | 11,46                | 4,363   | 2,182   |
| aerodynamické síly + max. otáčky                             | 17,03                | 2,936   | 1,468   |

tab. 20: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 2. iterace – zaoblení konce listu

| Optimalizovaná geometrie – 2. iterace – zaoblení konce listu |                      |         |         |
|--|----------------------|---------|---------|
| případ zatížení  | $\sigma_{max}$ [MPa] | $k$ [–] | $j$ [–] |
| aerodynamické síly + návrh. otáčky                           | 13,08                | 3,823   | 1,911   |
| aerodynamické síly + max. otáčky                             | 19,12                | 2,615   | 1,308   |

*tab. 21: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 3. iterace – zaoblení konce listu*

| Výsledná optimalizovaná geometrie – bez zaoblení konce listu |                      |         |         |
|--|----------------------|---------|---------|
| případ zatížení  | $\sigma_{max}$ [MPa] | $k$ [–] | $j$ [–] |
| aerodynamické síly + návrh. otáčky                           | 12,83                | 3,897   | 1,949   |
| aerodynamické síly + max. otáčky                             | 18,55                | 2,695   | 1,348   |

*tab. 22: Pevnostní kontrola – Optim. geometrie – 3. iterace – bez zaoblení konce listu*

| Výsledná optimalizovaná geometrie – zaoblení konce listu |                      |         |         |
|--|----------------------|---------|---------|
| případ zatížení  | $\sigma_{max}$ [MPa] | $k$ [–] | $j$ [–] |
| aerodynamické síly + návrh. otáčky                       | 15,83                | 3,159   | 1,579   |
| aerodynamické síly + max. otáčky                         | 22,87                | 2,186   | 1,093   |

## 10. 3D tisk

Pro 3D tisk byly vybrány rotory, které byly uvedeny v tab. 15. Rotory byly tisknuty na 3D tiskárně HP Multijet Fusion 4200 [68], která využívá technologii Multi Jet Fusion (MJF). Tiskárna je zobrazena na obr. 35 a její parametry jsou uvedeny v příloze 7. Vstupním materiálem u takového typu tiskárny je polymerní prášek o velikosti 10 až 60  $\mu m$ . Jako materiál byl zvolen polyamid 12, jehož vlastnosti byly popsány v tab. 16 v kap. 9.2.1.



*obr. 35: HP-Multi-Jet-Fusion 4200 [69]*

Na obr. 36 je fotografie vytisknuté optimalizované geometrie (3. iterace) se zaoblením konce listu. Hmotnosti jednotlivých rotorů jsou uvedeny v příloze 8.



*obr. 36: Vytisknutá optimalizovaná geometrie (3. iterace) se zaoblením konce listu*

## 11. Experimentální měření rotoru multikoptéry

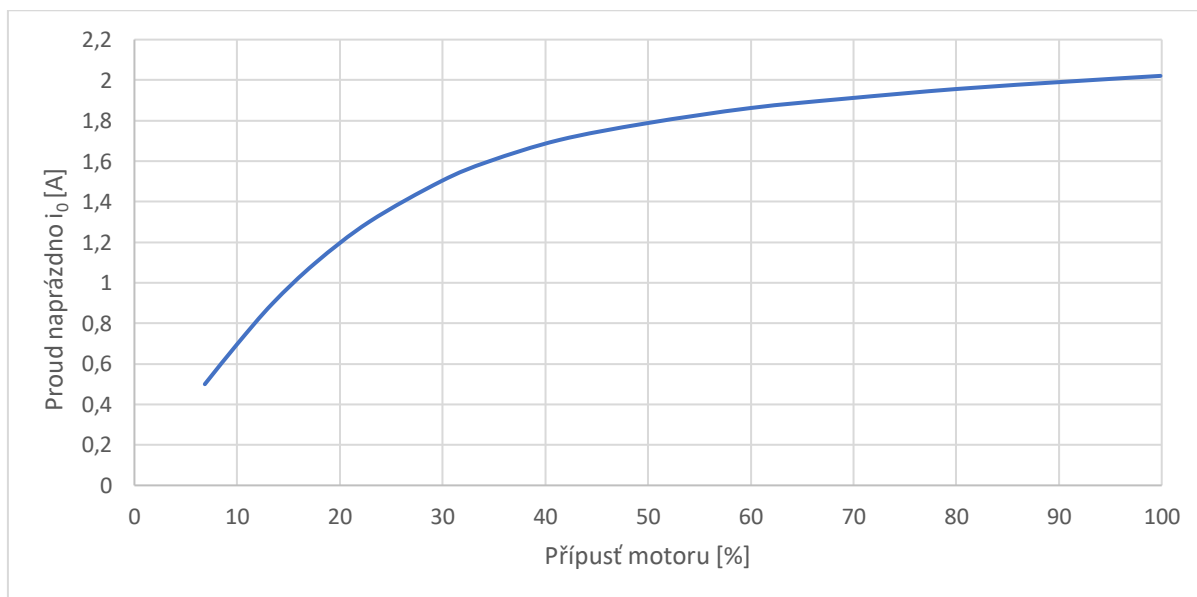
Pro ověření výsledků získaných pomocí CFD bylo provedeno experimentální měření rotorů. K měření bylo využito měřicí zařízení, které bylo navrženo v rámci diplomové práce *Statický tah vrtule* [70]. Při měření byly získány údaje o tahu, dodávaném proudu a otáčkách. Z daných veličin bylo následně možné podle následujících vztahů dopočítat kroutící moment  $M_K$  a výkon  $P$ , tedy

$$M_K = \frac{i - i_0}{K_V} , \quad (11.1)$$

$$P = M_K \cdot \Omega = \frac{i - i_0}{K_V} \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} , \quad (11.2)$$

kde  $i_0$  označuje dodávaný proud motoru naprázdno,  $i$  dodávaný proud motoru v zátěži a  $K_V$  motorovou konstantu. [71]

Závislost proudu naprázdno  $i_0$  na přípusti motoru je k dispozici v grafu 8. Při vyhodnocení měřicích dat se předpokládalo, že se tato závislost nebude při zatížení rotory měnit.



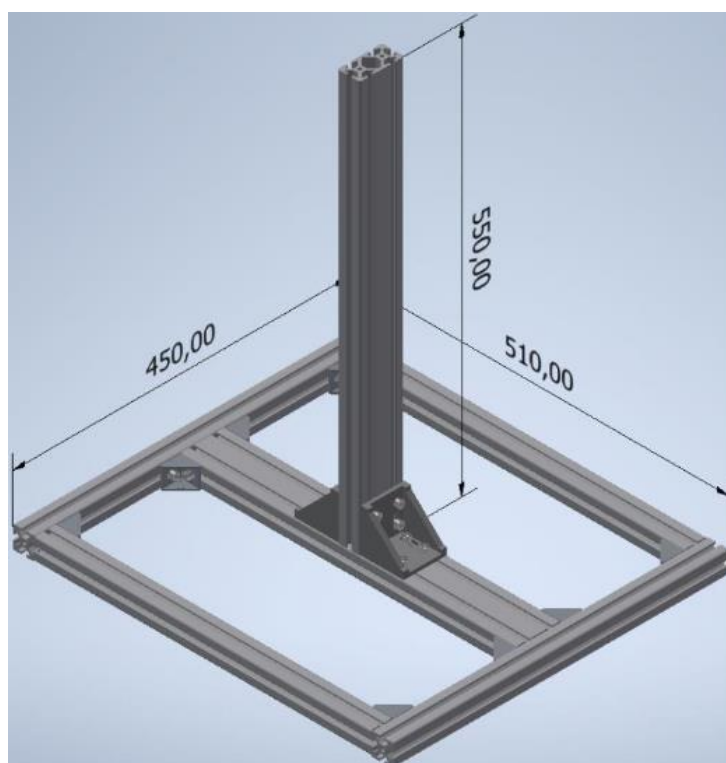
graf 8: Závislost proudu naprázdno na přípusti motoru

### 11.1 Popis měřicího zařízení

Celé měřicí zařízení se skládá ze stojanu, elektronického regulátoru otáček Mezon 120, elektromotoru Dualsky XM3542EA-6, váhového senzoru YZC-131 a vývojové desky Arduino UNO R3. Rám stojanu a jeho rozměry jsou zobrazeny na obr. 37 a umístění

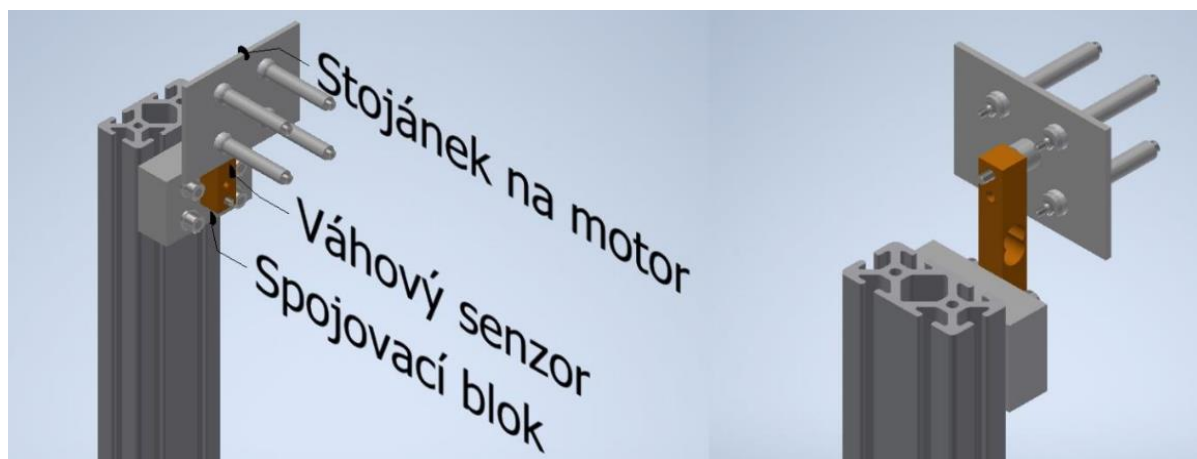


jednotlivých komponent na obr. 38. Měřicí zařízení umožňuje měřit jak v horizontálním, tak i ve vertikálním směru. V rámci měření rotorů multikoptéry byla využita pouze varianta v horizontálním směru, aby se při měření zachovala vyšší bezpečnost. Parametry elektromotoru Dualsky XM3542EA-6 jsou k nahlédnutí v příloze 9. Pro získání aktuálních otáček a proudu elektromotoru byl využit regulátor Mezon 120, jehož parametry jsou k dispozici v příloze 10. Měření tahu spočívalo ve stanovení deformace nosníkového váhového senzoru YZC-131, který je působením rotoru ohýbán. Deformace senzoru byla měřena pomocí tenzometrů. Pro převod analogového signálu z váhového senzoru na diskrétní signál posloužila deska Arduino UNO R3 obsahující A/D převodník. Zároveň byl k desce připojen regulátor. Parametry váhového senzoru YZC-131 a desky Arduino UNO R3 jsou k nahlédnutí v přílohách 11 a 12. [70]



*obr. 37: Rám stojanu měřicího zařízení [70]*

Z obr. 38 je patrné spojení váhového senzoru s pevným rámem, které je realizováno pomocí spojovacího bloku. Ten je možné uchytit v různé výšce nad zemí. Je však žádoucí, aby byl umístěn co nejvýše, aby byl co možná nejvíce eliminován vliv země, který byl již zmíněn v kap. 2.2.1.2. [70]



obr. 38: Umístění komponent u horizontální varianty měření [70]

## 11.2 Vyvažování rotorů

Před samotným experimentálním měření bylo nutné jednotlivé rotory vyvážit. Vyvažování probíhalo tím způsobem, že se pomocí brusného papíru postupně na spodní straně těžšího listu ubíral materiál. Příklad vyváženého rotoru je k dispozici na obr. 39.

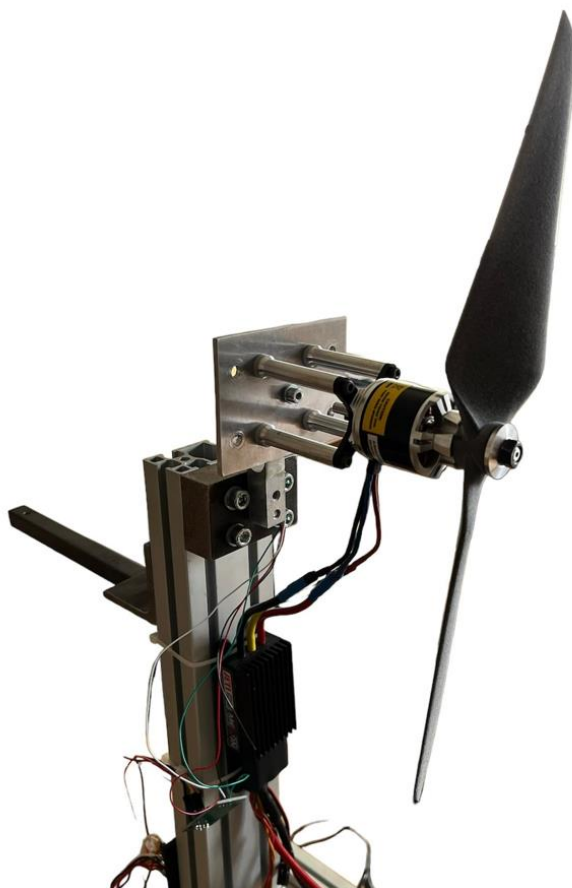


obr. 39: Vyvažování rotorů

## 11.3 Výsledky experimentálního měření

V tabulkách jsou uvedeny data z měření. Tah byl odečítán přímo. Kroutící moment a výkon byly stanoveny na základě naměřeného proudu a přípusti motoru dle rovnic (11.1), respektive (11.2). Maximální otáčky dosažené během měření se pohybovaly okolo  $7\,500\text{ min}^{-1}$ . Vyšších hodnot otáček nebylo možné dosáhnout kvůli riziku překročení

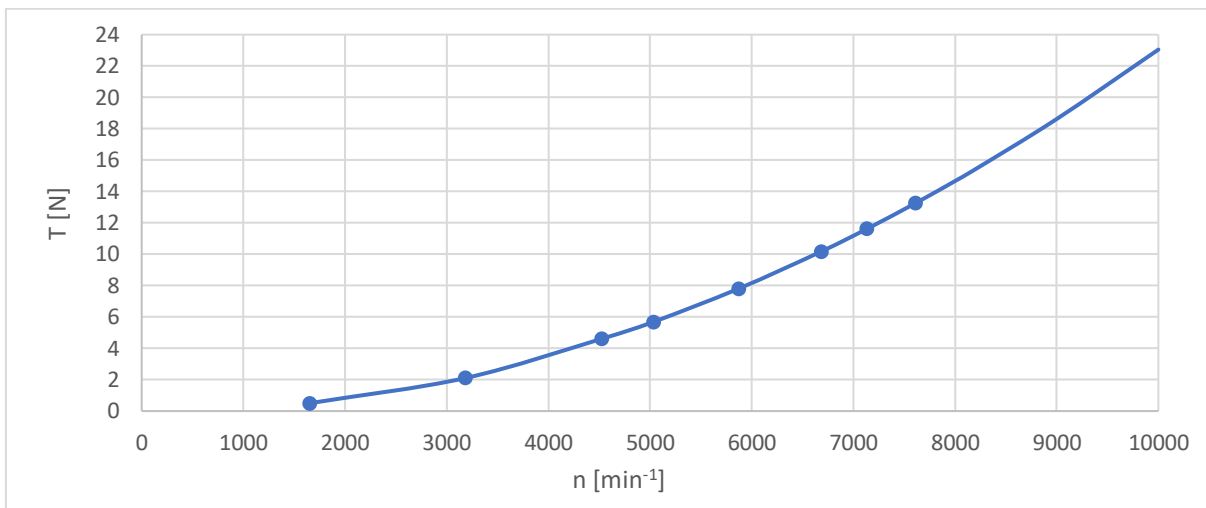
špičkového proudu motoru. Z naměřených dat však bylo možné sestavit tahové křivky, závislosti krouticího momentu na otáčkách a výkonové křivky až do maximálních otáček  $n = 10\,000\text{ min}^{-1}$ . Tyto křivky a závislosti jsou pro jednotlivé geometrie rotorů zobrazeny v grafech 9 až 23. Na obr. 40 je k dispozici detail měřicího zařízení a uchycení rotoru.



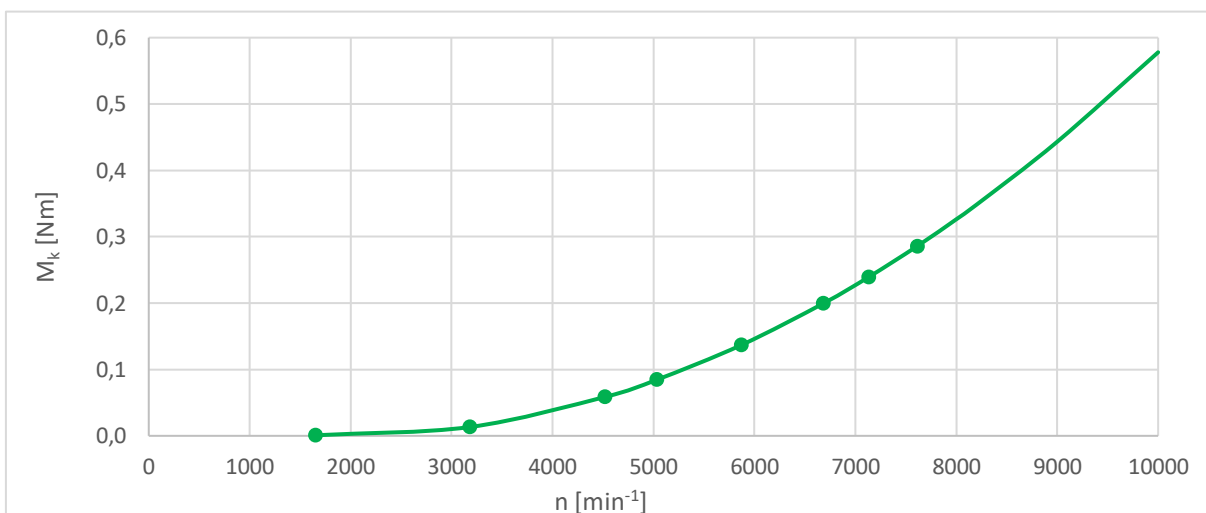
obr. 40: Detail měřicího zařízení a uchycení rotoru

tab. 23: Data z měření – základní geometrie

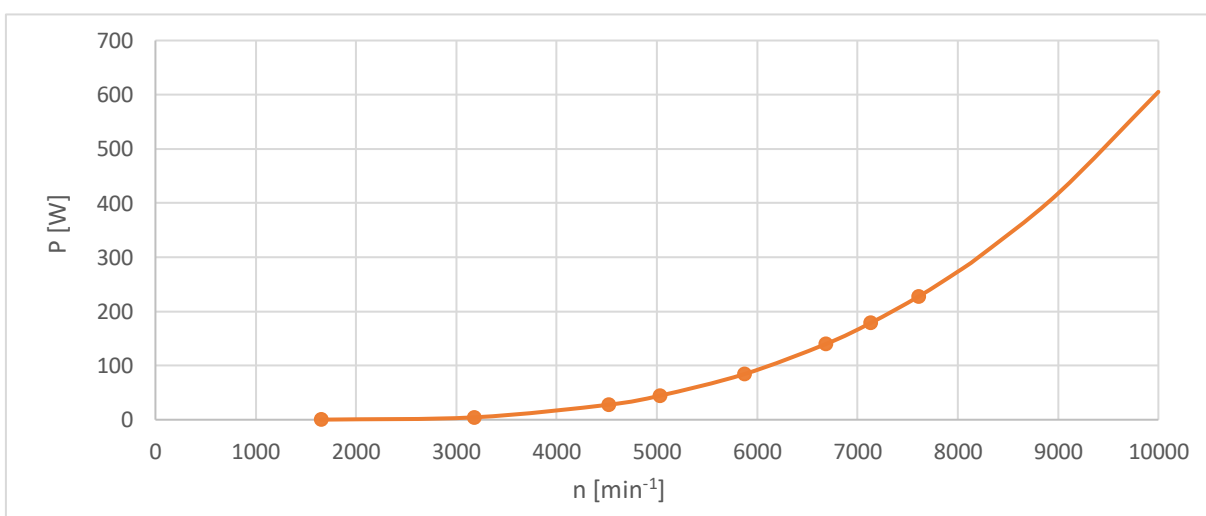
| $n\text{ [min}^{-1}\text{]}$ | $T\text{ [N]}$ | $M_K\text{ [Nm]}$ | $P\text{ [W]}$ |
|------------------------------|----------------|-------------------|----------------|
| 1650                         | 0,5            | 0,0008            | 0,14           |
| 3180                         | 2,1            | 0,0133            | 4,42           |
| 4520                         | 4,6            | 0,0586            | 27,76          |
| 5030                         | 5,7            | 0,0843            | 44,42          |
| 5870                         | 7,8            | 0,1368            | 84,08          |
| 6680                         | 10,2           | 0,1993            | 139,41         |
| 7130                         | 11,6           | 0,2391            | 178,51         |
| 7610                         | 13,3           | 0,2855            | 227,52         |



graf 9: Tahová křivka rotoru – základní geometrie



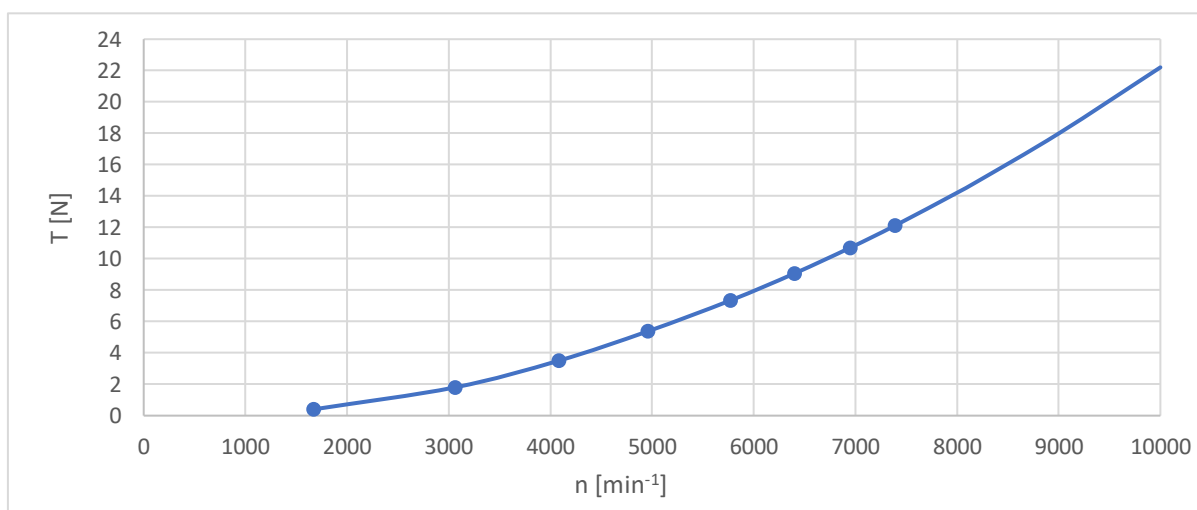
graf 10: Závislost kroučícího momentu na otáčkách – základní geometrie



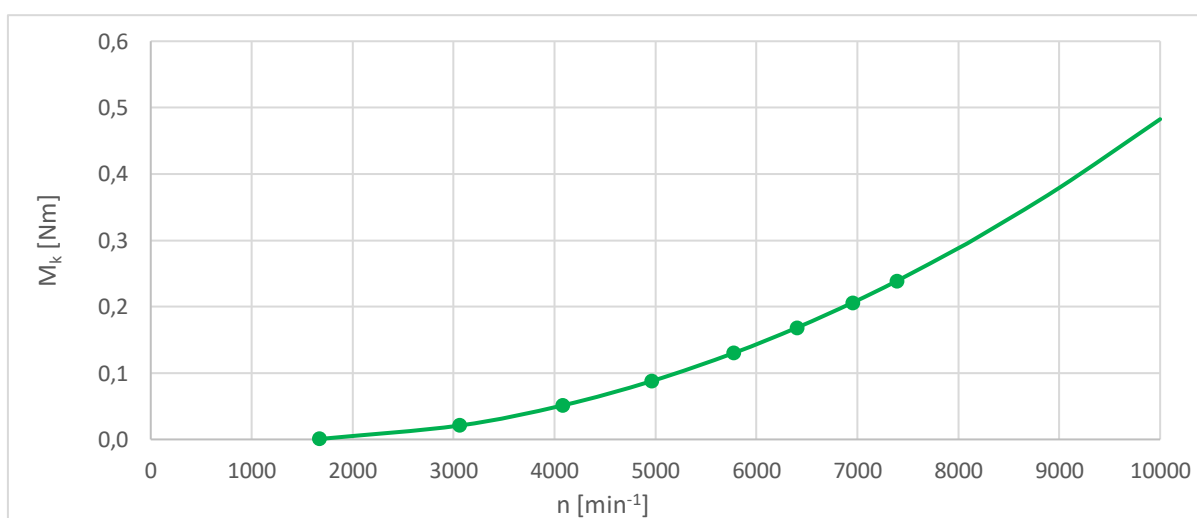
graf 11: Výkonová křivka rotoru – základní geometrie

tab. 24: Data z měření – optimalizovaný rotor – 1. iterace (zaoblení konce listu)

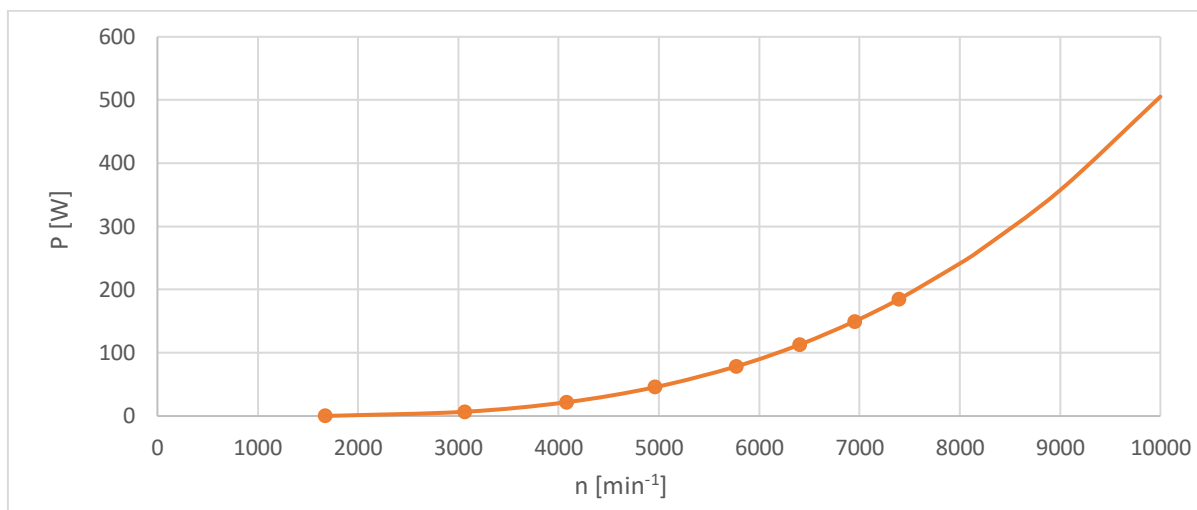
| $n$ [ $\text{min}^{-1}$ ] | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] | $P$ [W] |
|---------------------------|---------|------------|---------|
| 1670                      | 0,4     | 0,0006     | 0,10    |
| 3060                      | 1,8     | 0,0209     | 6,71    |
| 4080                      | 3,5     | 0,0512     | 21,89   |
| 4960                      | 5,4     | 0,0877     | 45,58   |
| 5770                      | 7,3     | 0,1299     | 78,48   |
| 6400                      | 9,1     | 0,1683     | 112,79  |
| 6950                      | 10,7    | 0,2059     | 149,83  |
| 7390                      | 12,1    | 0,2386     | 184,67  |



graf 12: Tahová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 1. iterace



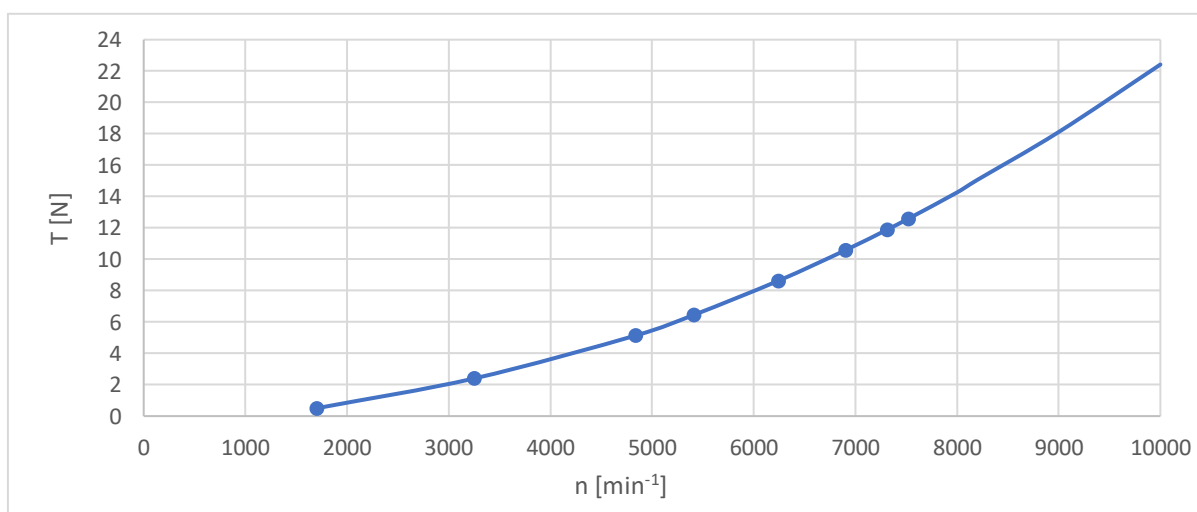
graf 13: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optimalizovaný rotor – 1. iterace



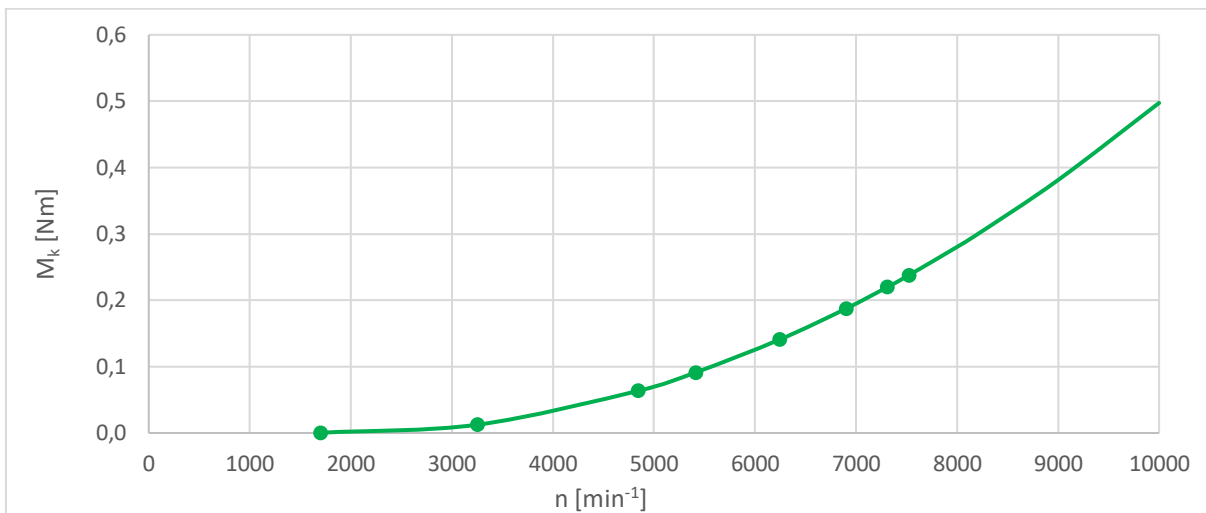
graf 14: Výkonová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 1. iterace

tab. 25: Data z měření – optimalizovaný rotor – 2. iterace (zaoblení konce listu)

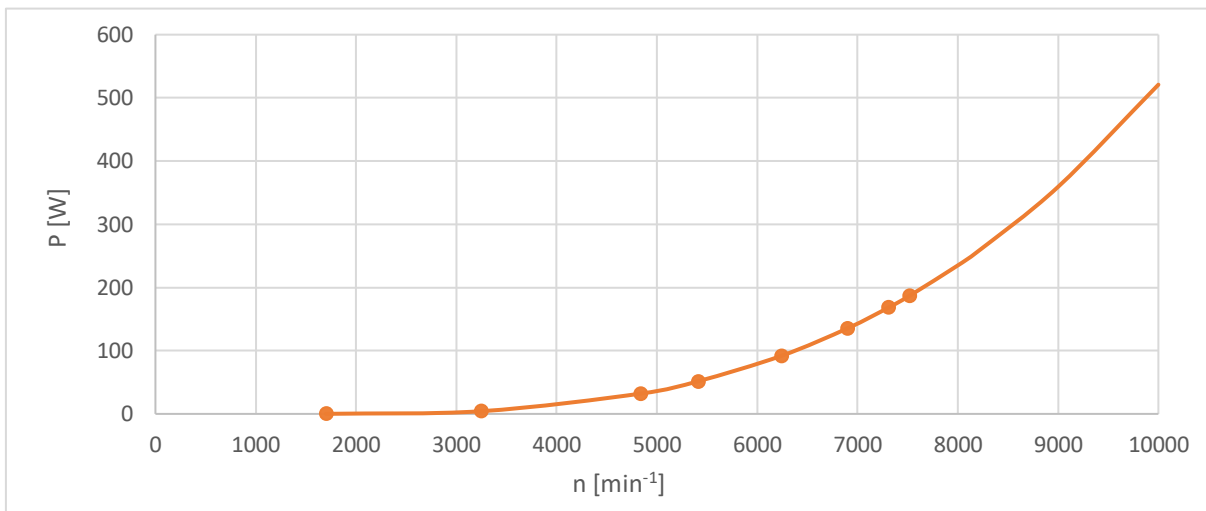
| $n$ [ $\text{min}^{-1}$ ] | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] | $P$ [W] |
|---------------------------|---------|------------|---------|
| 1700                      | 0,5     | 0,0004     | 0,07    |
| 3250                      | 2,4     | 0,0125     | 4,24    |
| 4840                      | 5,1     | 0,0634     | 32,11   |
| 5410                      | 6,5     | 0,0911     | 51,62   |
| 6240                      | 8,6     | 0,1405     | 91,80   |
| 6900                      | 10,6    | 0,1873     | 135,36  |
| 7310                      | 11,9    | 0,2198     | 168,28  |
| 7520                      | 12,6    | 0,2375     | 187,01  |



graf 15: Tahová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 2. iterace



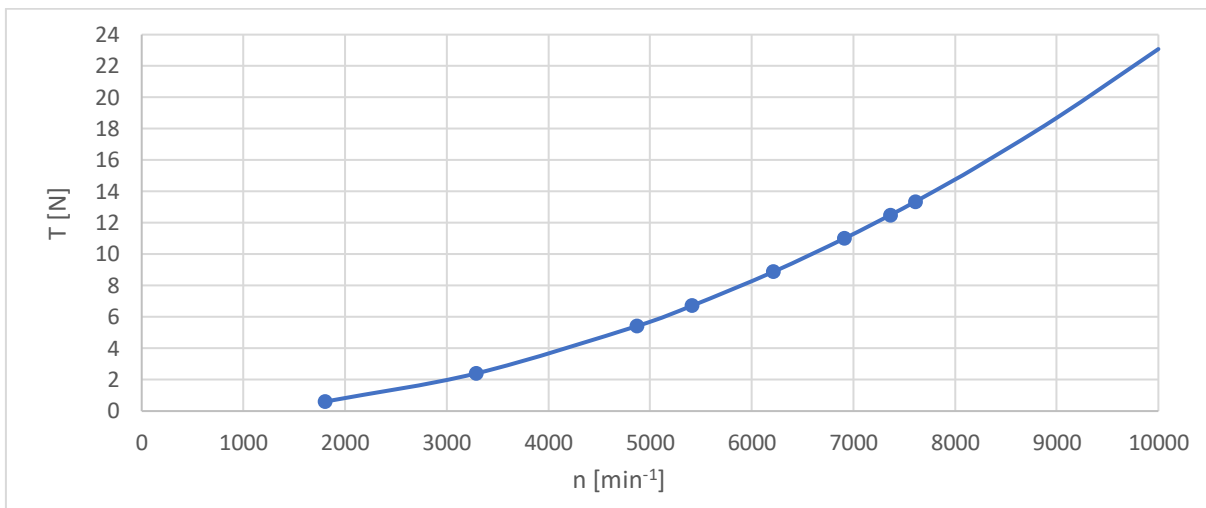
graf 16: Závislost kroučícího momentu na otáčkách – optimalizovaný rotor – 2. iterace



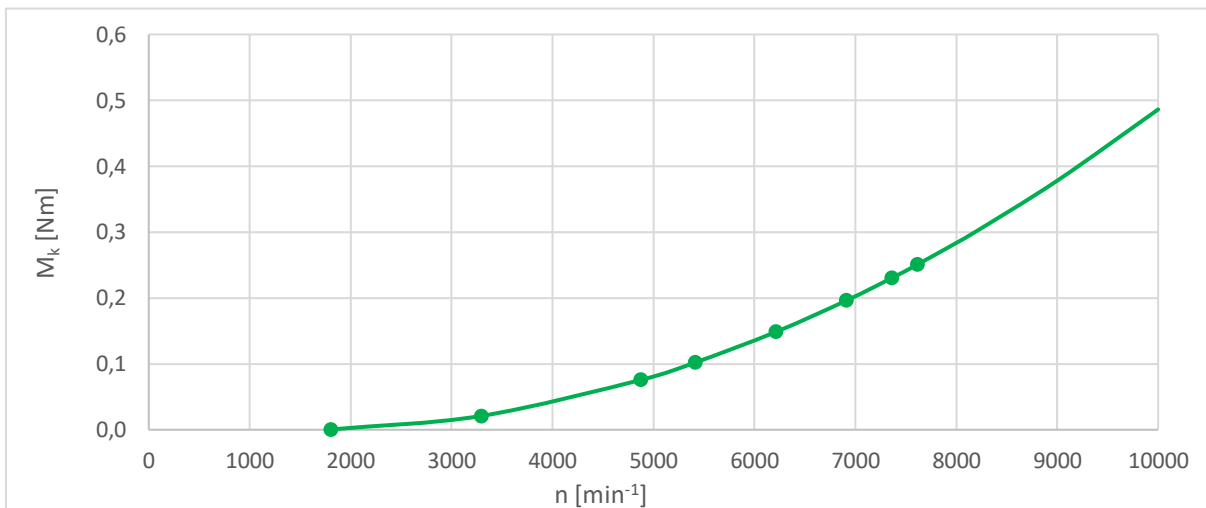
graf 17: Výkonová křivka rotoru – optimalizovaný rotor – 2. iterace

tab. 26: Data z měření – optimalizovaný rotor – 3. iterace (bez zaoblení konce listu)

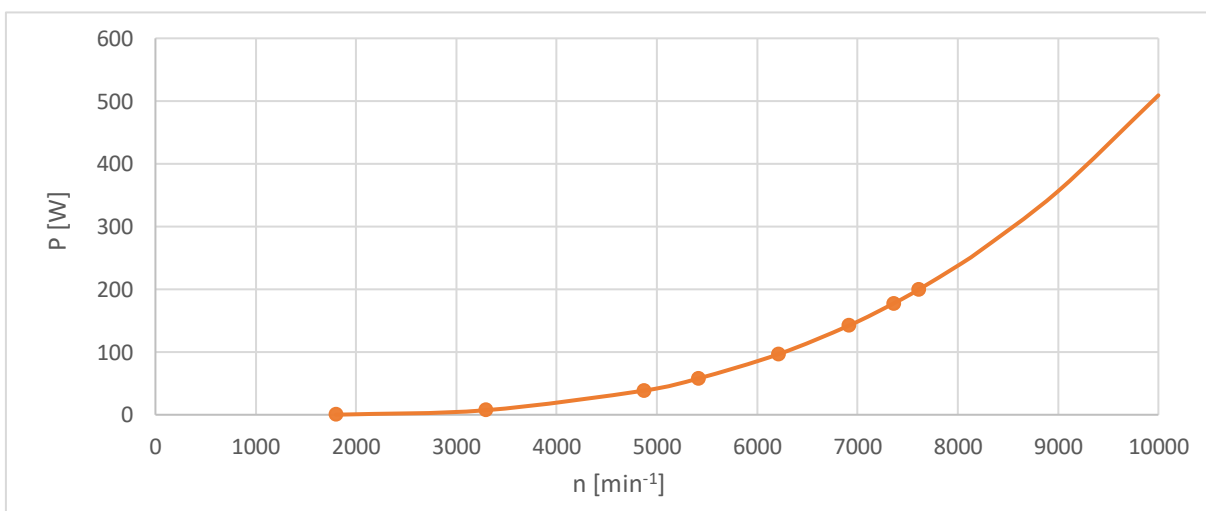
| $n$ [min <sup>-1</sup> ] | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] | $P$ [W] |
|--------------------------|---------|------------|---------|
| 1800                     | 0,6     | 0,0004     | 0,08    |
| 3290                     | 2,4     | 0,0209     | 7,18    |
| 4870                     | 5,4     | 0,0754     | 38,47   |
| 5410                     | 6,7     | 0,1019     | 57,71   |
| 6210                     | 8,9     | 0,1483     | 96,42   |
| 6910                     | 11,0    | 0,1960     | 141,83  |
| 7360                     | 12,5    | 0,2302     | 177,42  |
| 7610                     | 13,4    | 0,2504     | 199,53  |



graf 18: Tahová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení)



graf 19: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení)

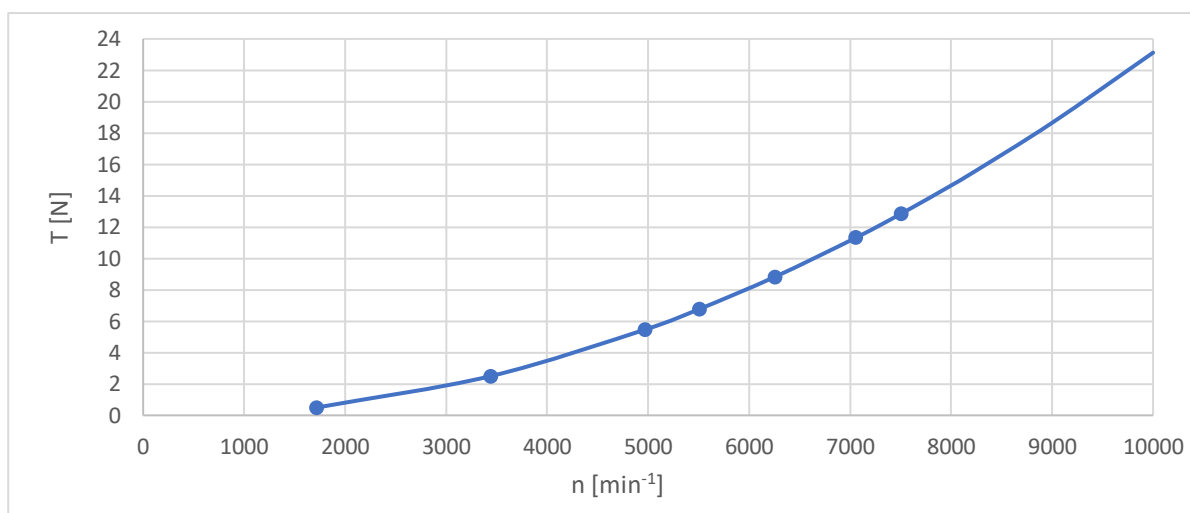


graf 20: Výkonová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (bez zaoblení)

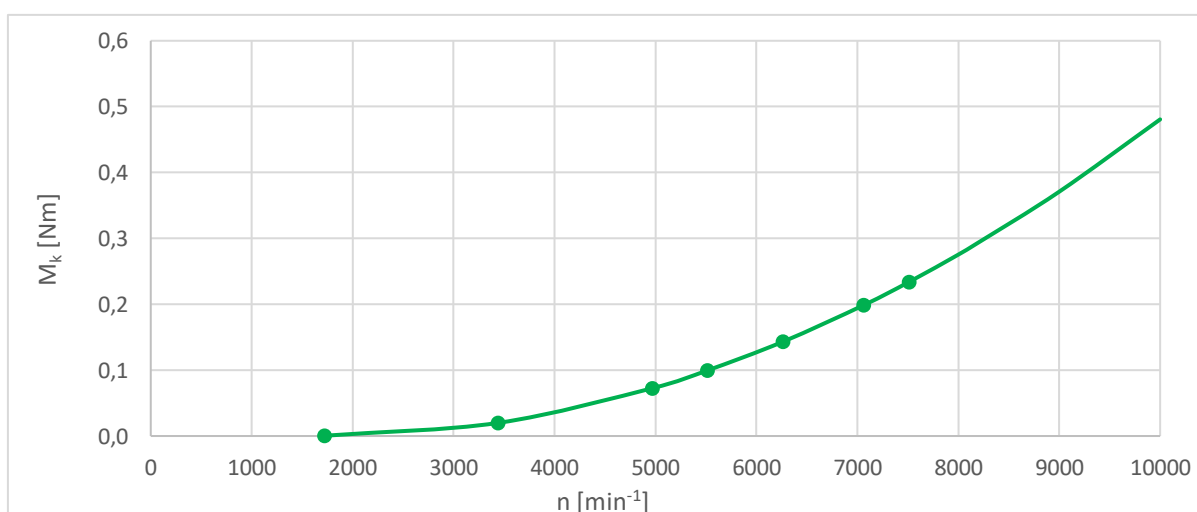


tab. 27: Data z měření – optimalizovaný rotor – 3. iterace (zaoblení konce listu)

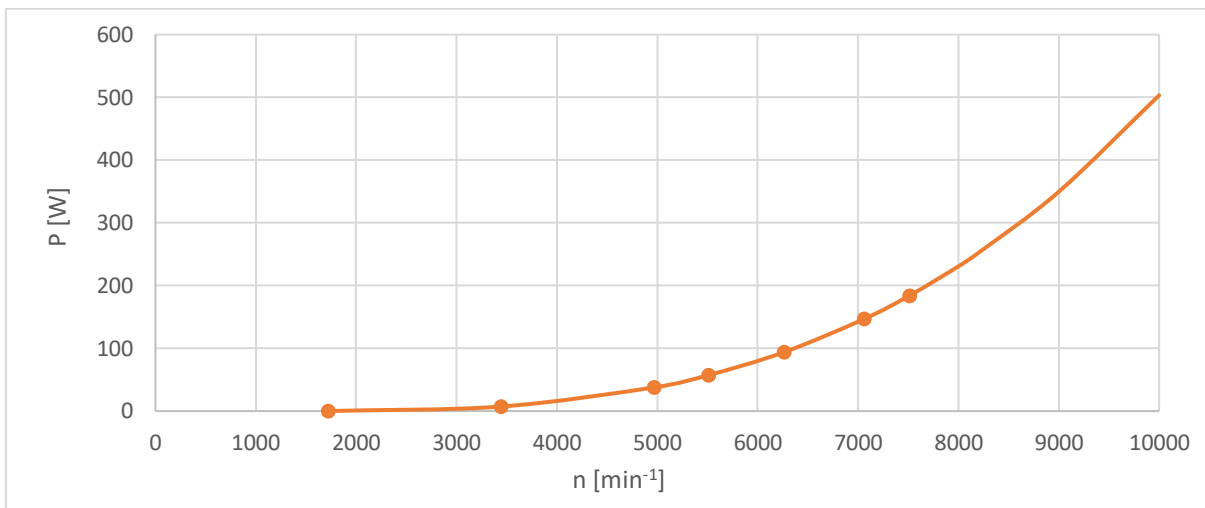
| $n$ [ $\text{min}^{-1}$ ] | $T$ [N] | $M_K$ [Nm] | $P$ [W] |
|---------------------------|---------|------------|---------|
| 1720                      | 0,5     | 0,0004     | 0,07    |
| 3440                      | 2,5     | 0,0199     | 7,17    |
| 4970                      | 5,5     | 0,0726     | 37,80   |
| 5510                      | 6,8     | 0,0992     | 57,23   |
| 6260                      | 8,8     | 0,1430     | 93,72   |
| 7060                      | 11,3    | 0,1985     | 146,72  |
| 7510                      | 12,9    | 0,2337     | 183,77  |



graf 21: Tahová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení)

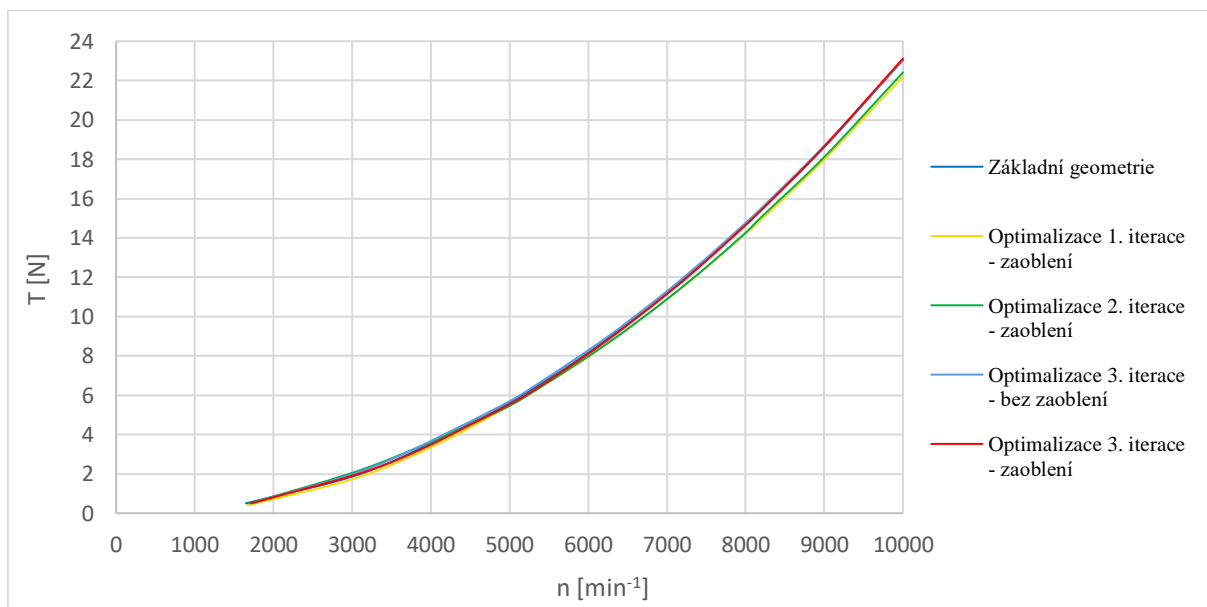


graf 22: Závislost kroutícího momentu na otáčkách – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení)

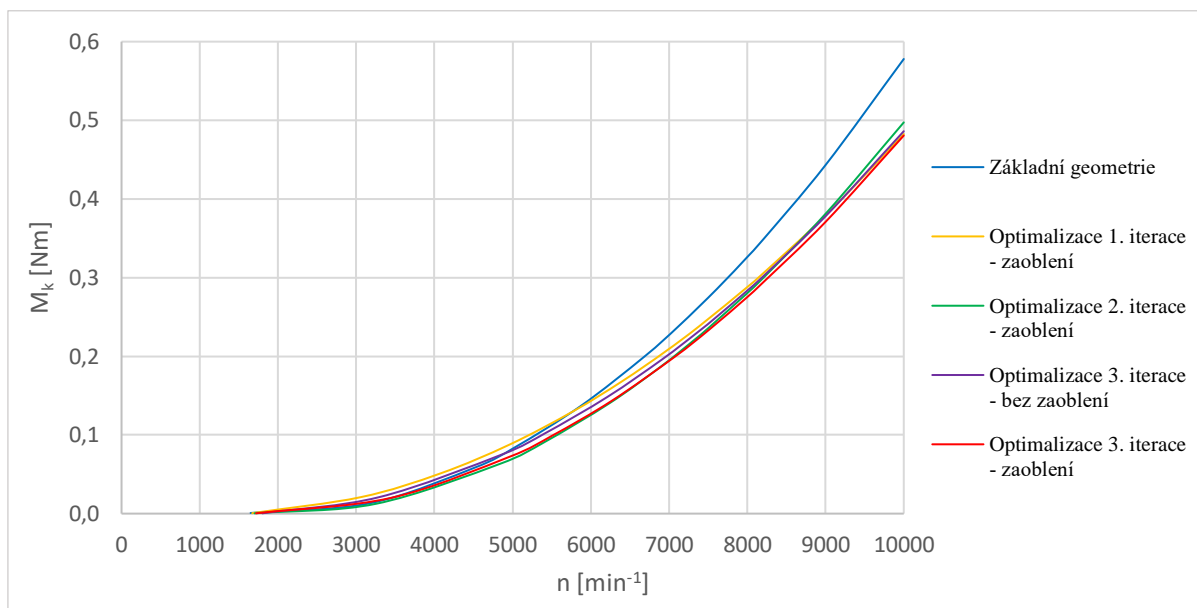


graf 23: Výkonová křivka rotoru – optim. rotor – 3. iterace (zaoblení)

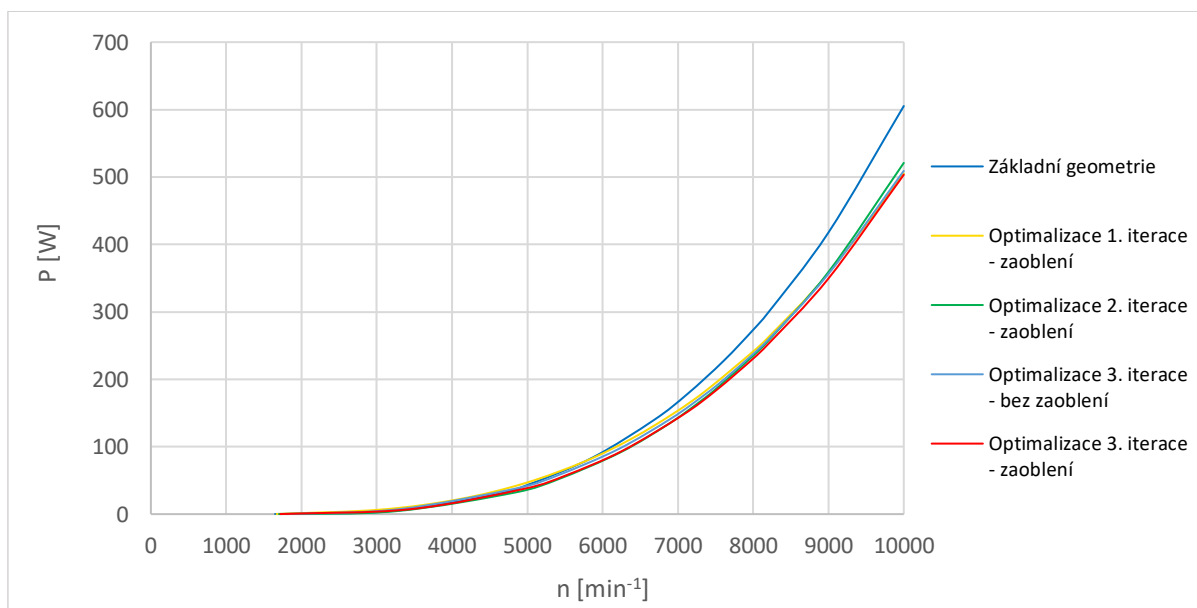
V grafech 24 až 26 jsou uvedeny tahové křivky, závislosti kroutícího momentu na otáčkách a výkonové křivky pro všechny měřené rotory. Z daných průběhů je patrné, že se základní geometrie oproti ostatním rotorům vyznačuje výrazně vyšším kroutícím momentem, respektive výkonem. V případě tahu nejsou rozdíly nikterak významné.



graf 24: Tahová křivka – všechny rotory



graf 25: Závislost kroučícího momentu na otáčkách – všechny rotory



graf 26: Výkonová křivka – všechny rotory

V tab. 28 jsou poté porovnány výsledky z CFD simulací a experimentálního měření pro návrhové otáčky  $n = 8197 \text{ min}^{-1}$ . Z tabulky je patrné, že naměřený kroučící moment je o několik procent vyšší, což se předpokládalo už před samotným měřením, a to z důvodu zvětšení tloušťky u kořene listu při pevnostní kontrole (CFD simulace byly provedeny pro geometrie bez této modifikace). Rozdíly v hodnotách tahu jsou do 3 %. U všech rotorů, kromě toho se základní geometrií, se naměřila vyšší hodnota tahu. Z hlediska kroučícího momentu a účinnosti  $FM$  rotorů je trend výsledků identický jako u CFD simulací. Účinnost  $FM$  byla

u všech měřených rotorů nižší než dle výsledků z numerických simulací. Stejně jako u CFD simulací, i z měření vycházela nejvyšší účinnost pro optimalizovanou geometrii (3. iterace) se zaoblením na konci listu. Dle měření se dosáhlo zlepšení účinnosti mezi základní a výslednou optimalizovanou geometrií rotoru o 8,65 %, což je vyšší hodnota než u CFD simulací. Pro zcela korektní porovnání by bylo vhodné provést simulace i pro geometrie s modifikací tloušťky kořene.

tab. 28: Porovnání výsledků – CFD simulace a experimentální měření

| Geometrie                    | $T_{CFD}$<br>[N] | $T_{měření}$<br>[N] | Rozdíl<br>[%] | $M_{K_{CFD}}$<br>[Nm] | $M_{K_{měření}}$<br>[Nm] | Rozdíl<br>[%] | $FM_{CFD}$<br>[-] | $FM_{měř.}$<br>[-] |
|------------------------------|------------------|---------------------|---------------|-----------------------|--------------------------|---------------|-------------------|--------------------|
| základní                     | 15,7232          | 15,40               | -2,04         | 0,3149                | 0,3479                   | 9,48          | 0,5455            | 0,4790             |
| 1. iterace<br>(zaoblení)     | nepočítáno       | 14,90               | –             | nepočítáno            | 0,3050                   | –             | –                 | 0,5207             |
| 2. iterace<br>(zaoblení)     | 14,7616          | 15,10               | 1,92          | 0,2794                | 0,2990                   | 6,56          | 0,5593            | 0,5380             |
| 3. iterace<br>(bez zaoblení) | 15,1418          | 15,50               | 2,32          | 0,2857                | 0,3011                   | 5,11          | 0,5682            | 0,5585             |
| 3. iterace<br>(zaoblení)     | 14,9695          | 15,40               | 2,81          | 0,2779                | 0,2934                   | 4,80          | 0,5742            | 0,5655             |

Je důležité také zmínit, že výsledky experimentálního měření mohou být ovlivněny několika faktory. Jedním z nich je odečítání otáček, kdy regulátor neposkytuje jednu konkrétní hodnotu, ale spíše oscilující průběh, ze kterého se poté otáčky stanovují. Další chyba může být způsobena předpokladem, že se závislost proudu naprázdno na přípusti motoru nebude měnit se zátěží motoru. Vliv může mít také samotné měřicí zařízení, a to především způsob uchycení rotoru. Z obr. 40 je patrné, že profil, ke kterému byl motor uchycen, představuje v proudovém poli za rotorem významnou překážku. Způsobená blokáce proudu vzduchu pak může ovlivnit výsledky měření. Pro eliminaci tohoto jevu by bylo zapotřebí uchytit motor na výrazně menší konstrukci nebo ve větší vzdálenosti. Při měření ve svislém směru by bylo dále nutné zahrnout vliv země. To však při tomto konkrétním měření nebylo zapotřebí.

## 12. Závěr

S nárůstem využití multikoptér je kladen stále větší důraz na podrobné analýzy jejich rotorů a zlepšení aerodynamických vlastností. Náplní diplomové práce byla analýza rotoru multikoptéry při nízkém Reynoldsově čísle, typicky v rozmezí od 60 000 do 180 000. Pro přehlednost byla práce rozdělena do čtyř částí.

V úvodní části byly diskutovány jednotlivé metody aerodynamické analýzy rotoru multikoptéry ve visu. Významný prostor byl věnován simulaci proudění pomocí výpočetní dynamiky tekutin. Získané teoretické poznatky z této oblasti byly využity v dalších částech práce. Dále byla parametrizována základní geometrie rotoru, která vycházela z bakalářské práce *Návrh rotoru pro multikoptéru* [1].

Druhá část se zabývala numerickou simulací rotoru ve visu pomocí výpočetní dynamiky tekutin. Simulace byly primárně zaměřeny na výpočet tahu a kroutícího momentu rotoru. CFD simulacím byla nejprve podrobena základní geometrie, pro kterou se také provedla studie nezávislosti sítě. Následně byly simulovány další geometrie rotoru, u nichž se měnily hodnoty vždy jednoho z parametrů zúžení listu, úhlu náběhu v 75 % poloměru listu nebo zkroucení listu. Dle výsledků CFD simulací byl pro tuto úlohu vyjádřen vliv daných parametrů na kroutící moment rotoru s těmito závěry:

- zvětšení záporné hodnoty zúžení listu  $K$  má za následek snížení kroutícího momentu,
- zvýšení úhlu náběhu  $\alpha_{75}$  má za následek zvýšení kroutícího momentu,
- zvětšení záporné hodnoty zkroucení  $\theta_{tw}$  má za následek zvýšení kroutícího momentu.

Výsledné hodnoty tahu a kroutícího momentu byly dále porovnány s výsledky z výpočetního skriptu pro návrh rotorových listů z již zmíněné bakalářské práce, ve kterém byla aplikována metoda s nižší přesností (teorie BEMT). Na základě výsledků CFD simulací byl tento skript také modifikován, čímž se výrazně zvýšila přesnost jeho návrhů geometrie rotorů.

Požadavky na aerodynamické vlastnosti rotorů jsou s rozvojem multikoptér stále vyšší. Z tohoto důvodu byla v práci provedena optimalizace geometrie rotoru z hlediska snížení kroutícího momentu. Pro optimalizaci byla aplikována Newtonova metoda a část optimalizačního procesu byla implementována do programu MATLAB. Dle CFD výsledků se výsledná optimalizovaná geometrie oproti základní geometrii vyznačuje nárůstem účinnosti rotoru  $FM$  o 2,87 %.

Následující část práce se věnovala pevnostní kontrole rotorů, která vycházela z certifikační specifikace pro vrtule CS-P od agentury EASA. Bylo analyzováno pět různých

rotorů a celý proces probíhal v programu Abaqus. Vzhledem k tomu, že žádný z původních modelů použitých v CFD simulaci pevnostně nevyhovoval, bylo nutné u nich provést modifikaci, která spočívala ve zvětšení tloušťky u kořene listu. Po modifikaci se všechny rotory vyznačovaly jistotou větší než jedna.

Závěrečná část se zabírala 3D tiskem rotorů a jejich následným experimentálním měřením za účelem ověření výsledků získaných pomocí výpočetní dynamiky tekutin. U všech rotorů byla naměřená hodnota krouticího momentu o několik procent vyšší než hodnota získaná pomocí CFD simulací, maximálně však do 10 %. Tento nárůst se předpokládal již před samotným měřením, a to z důvodu zvětšení tloušťky u kořene listu při pevnostní kontrole. Rozdíly v hodnotách tahu byly do 3 %. Účinnost  $FM$  byla u všech měřených rotorů nižší než dle výsledků z numerických simulací. Za zmínku však stojí vyšší zlepšení účinnosti mezi základní a výslednou optimalizovanou geometrií rotoru, kdy bylo dosaženo navýšení účinnosti o 8,65 %. Z hlediska krouticího momentu a účinnosti  $FM$  rotorů je trend výsledků identický jako u CFD výpočtů.

Všechny body zadání diplomové práce byly splněny. Nad rámec stanovených požadavků byla provedena tvarová optimalizace rotoru a experimentální měření. Ačkoli tyto části nejsou součástí původního zadání, jejich zahrnutí přispělo k detailnějšímu výzkumu dané problematiky a ověření výstupu práce. Výsledky práce a jednotlivé výpočtové skripty mají významný aplikační potenciál pro návrh a analýzu rotorů multikoptér.

## Seznam použité literatury

- [1] RŮŽIČKA, Pavel. *Návrh rotoru pro multikoptéru*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2021.
- [2] ALEKSANDROV, Vladimir Leont'jevič. *Letecké vrtule*. Řada energetické strojírenské literatury. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1954.
- [3] LEISHMAN, J. Gordon. *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 05-215-2396-6.
- [4] LOUREIRO, E. Vargas. Evaluation of low fidelity and CFD methods for the aerodynamic performance of a small propeller. online. *Aerospace Science and Technology*. 2021, č. 108. ISSN 1270-9638. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106402>. [cit. 2024-01-30].
- [5] JOHNSON, Wayne. *Helicopter theory*. New York: Dover Publications, 1980. ISBN 978-0-486-68230-3.
- [6] KATZ, Joseph. Aerodynamics of Race Cars. online. 2006. Dostupné z: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092016>. [cit. 2024-01-31].
- [7] FESZTY, D. a NITZSCHE, F. Review of Active Rotor Control Research in Canada. online. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. Dostupné z: <https://doi.org/10.5139/IJASS.2011.12.2.93>. [cit. 2024-01-30].
- [8] ČSN 31 0001. *Letectví a kosmonautika: terminologie*. 2005.
- [9] EWALD, B.F.R. *Wind Tunnel Wall Corection*. Quebec: AGARD, 1998. ISBN 978-9283610762.
- [10] BAALS, D. D. a CORLISS, W. R. *Wind Tunnels of NASA*. online. Washington D.C.: NASA, 1981. Dostupné z: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19810023610>. [cit. 2024-01-31].
- [11] BRANDT, John B. a SELIG, Michael S. Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers. online. 2011. Dostupné z: <https://doi.org/10.2514/6.2011-1255>. [cit. 2024-01-31].
- [12] RUSSELL, Carl; JUNG, Jaewoo; WILLINK, Gina a GLASNER, Brett. Wind Tunnel and Hover Performance Test Results for Multicopter UAS Vehicles. online. *NASA*. 2018. Dostupné z: <https://rotorcraft.arc.nasa.gov/Publications/files/72-2016-374.pdf>. [cit. 2024-01-31].
- [13] KÓSA, Patrik; KIŠEV, Marián a VACHO, Lukáš. Experimental Measurement of a UAV Propeller's Thrust. online. *Technical Gazette*. 2022, s. 73-80. ISSN 1848-6339.

- Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.17559/TV-20201212185220>. [cit. 2024-02-02].
- [14] CONYERS, Stephen Austin. *Empirical Evaluation of Ground, Ceiling, and Wall Effect for Small-Scale Rotorcraft*. online, Disertace. University of Denver, 2019. Dostupné z: <https://digitalcommons.du.edu/etd/1570/>. [cit. 2024-02-03].
- [15] FERZIGER, Joel H. a PERIC, Milovan. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. vydání. Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6.
- [16] BLAŽEK, Jiří. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. 2. vydání. Elsevier Science & Technology, 2005. ISBN 9780080529677.
- [17] HIRSCH, Charles. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. 2nd ed. 2007. ISBN 978-0-7506-6594-0.
- [18] MCLEAN, Doug. *Understanding Aerodynamics: Arguing from the Real Physics*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2012. ISBN 9781118454220.
- [19] LECHELER, Stefan. *Numerische Strömungsberechnung: Schneller Einstieg durch anschauliche Beispiele mit ANSYS 15.0*. online. 3rd ed. Springer Vieweg Wiesbaden, 2014. ISBN 978-3-658-05201-0. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-658-05201-0>. [cit. 2023-10-03].
- [20] KOLDITZ, Olaf. *Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics*. Berlín: Springer, 2002. ISBN 978-3-642-07683-1.
- [21] SCHÄFER, Michael. *Computational Engineering — Introduction to Numerical Methods*. Springer Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-30685-6.
- [22] OERTEL, Herbert a LAURIEN, Eckart. *Numerische Strömungsmechanik: Grundgleichungen, Lösungsmethoden, Softwarebeispiele*. online. 2. vyd. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 2003. ISBN 978-3-322-96851-7. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-322-96851-7>. [cit. 2023-10-01].
- [23] KOZEL, Karel. *Numerická simulace proudění II*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-010-3109-8.
- [24] URUBA, Václav. *Turbulence*. 2., přeprac. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 978-80-01-05600-4.
- [25] BERSELLI, L.C; ILIESCU, T. a LAYTON, W.J. *Mathematics of Large Eddy Simulation of turbulent flows*. Scientific computation. Berlin: Springer, 2006. ISBN 978-3-540-26316-6.
- [26] PŘÍHODA, Jaromír a LOUDA, Petr. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03623-5.
- [27] DAVID C., Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd ed. DCW Industries, 2006. ISBN 978-1-928729-08-2.



- [28] PETERS, Norbert. *Turbulent Combustion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521660822.
- [29] PACHPUTE, Sharad N. *Turbulence Modeling in CFD simulations*. online. In: CFD Flow Engineering. Dostupné z: <https://cfdflowengineering.com/turbulence-modeling-in-cfd-simulations/>. [cit. 2023-09-27].
- [30] ROTTA, Julius C. *Turbulente Strömungen: Eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung*. online. Universitätsverlag Göttingen, 2010. ISBN 978-3-941875-74-6. Dostupné z: <https://d-nb.info/1011023474/34>. [cit. 2023-09-26].
- [31] SCHNEIDER, Elena. *Numerische Simulation turbulenter vorgemischter Verbrennungssysteme: Entwicklung und Anwendung eines RANS-basierten Gesamtmodells*. online, Disertace. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt., 2005. Dostupné z: <https://d-nb.info/978167988/34>. [cit. 2023-09-28].
- [32] JONES, W.P a LAUNDER, B.E. *The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*. online. 1972. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com>. [cit. 2023-09-27].
- [33] MENTER, F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. online. In: *AIAA JOURNAL*. 1994. Dostupné z: <https://doi.org/10.2514/3.12149>. [cit. 2023-09-27].
- [34] ANSYS, Inc. Shear-Stress Transport (SST) k-w Model. *Ansys Fluent Theory Guide 15.0*. 2013, s. 62-65.
- [35] KOZUBKOVÁ, Milada; DRÁBKOVÁ, Sylva a ŠTÁVA, Pavel. *Matematické modely nestlačitelného a stlačitelného proudění: metoda konečných objemů*. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 1999. ISBN 80-707-8709-0.
- [36] BODE, Christoph. *Numerische Simulation (CFD) [přednáška]*. Braunschweig: Institut für Flugantriebe und Strömungsmaschinen, Technische Universität Braunschweig, 2022.
- [37] ÇENGEL, Yunus A. a CIMBALA, John M. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2014. ISBN 978-0-07-338032-2.
- [38] DOFEK, Ivan. *Parametrická tvarová optimalizace letounu z aerodynamického hlediska*. online, Disertace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2014. Dostupné z: <https://dspace.vut.cz/items/7fad9a4f-1093-4152-a471-34d6558b17e2>. [cit. 2024-02-03].
- [39] JAISWAL, A. Shikhar. Shape Parameterization of Airfoil Shapes Using Bezier Curves. online. *Innovative Design and Development Practices in Aerospace and Automotive Engineering*. 2016, s. 79-85. ISSN 2195-4364. Dostupné z: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-10-1771-1\\_13](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-10-1771-1_13). [cit. 2024-02-03].

- [40] BURGER, Christoph. *Propeller Performance Analysis and Multidisciplinary Optimization Using a Genetic Algorithm*. online, Disertace. Auburn University, 2007. Dostupné z: <https://etd.auburn.edu/xmlui/handle/10415/210>. [cit. 2024-02-03].
- [41] DIRKX, Dominic a MOOIJ, Erwin. *Conceptual Shape Optimization of Entry Vehicles*. online. Springer Cham, 2017. ISBN 978-3-319-46055-0. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-46055-0>. [cit. 2024-02-03].
- [42] ČERMÁK, Libor a HLAVIČKA, Rudolf. *Numerické metody*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-802-1437-524.
- [43] LEDERER, Pavel. *Teorie a optimalizace mechanických systémů I*. Praha: České vysoké učení technické, 1988.
- [44] SVOZIL, Jan. *Optimalizace potrubních tvarovek*. online, Disertace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010. Dostupné z: [https://www.vut.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=59582](https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=59582). [cit. 2024-02-12].
- [45] POPELA, Robert. *Využití optimalizačních metod při aerodynamickém návrhu letounu*. online, Disertace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2005. Dostupné z: [https://www.vut.cz/vutium/spisy?action=ukazka&id=1101&publikace\\_id=13746](https://www.vut.cz/vutium/spisy?action=ukazka&id=1101&publikace_id=13746). [cit. 2024-02-05].
- [46] CHEN, Wei; CHIU, Kevin a FUGE, Mark D. Airfoil Design Parameterization and Optimization using Bézier Generative Adversarial Networks. online. *AIAA Journal*. 2020, s. 4723-4735. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.2514/1.J059317>. [cit. 2024-02-11].
- [47] STRAATHOF, M.H. *Shape Parameterization in Aircraft Design: A Novel Method, Based on B-Splines*. online, Disertace. Technische Universiteit Delft, 2012. Dostupné z: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3Ab4aee571-0489-42ff-ab55-d74e980f724a>. [cit. 2024-02-09].
- [48] ÜMÜTLÜ, Hatice Cansu Ayaz a KIRAL, Zeki. Airfoil shape optimization using Bézier curve and genetic algorithm. online. *Aviation*. 2022, s. 32-40. Dostupné z: <https://doi.org/10.3846/aviation.2022.16471>. [cit. 2024-02-11].
- [49] MAREŠ, Tomáš. *Základy konstrukční optimalizace*. online. Praha, 2006. ISBN 80-239-6508-5. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/tomas.mares/z/z/ZakladyKonstrukcniOptimalizace/zko.pdf>. [cit. 2024-04-21].
- [50] WERNER, Tom a KROUPA, Tom. Optimalizace - 7. Volné lokální extrémy. online. *FEL ČVUT*. s. 13-17. Dostupné z: [https://cw.fel.cvut.cz/b221/\\_media/courses/b0b33opt/07metody.pdf](https://cw.fel.cvut.cz/b221/_media/courses/b0b33opt/07metody.pdf). [cit. 2024-04-21].

- [51] VÍTEČKOVÁ, Miluše a JEDLIČKA, David. *Statická optimalizace systémů*. online. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2003. Dostupné z: <http://books.fs.vsb.cz/StatickaOptimalizace/>. [cit. 2024-04-22].
- [52] KELECY, Franklyn J. Adjoint Shape Optimization for Aerospace Applications. online. *Advanced Modeling & Simulation (AMS) Seminar Series*. 2021. Dostupné z: [https://www.nas.nasa.gov/assets/nas/pdf/ams/2021/AMS\\_20210408\\_Kelecy.pdf](https://www.nas.nasa.gov/assets/nas/pdf/ams/2021/AMS_20210408_Kelecy.pdf). [cit. 2024-02-15].
- [53] BARARA, Daamanjyot. *Propeller Analysis with Adjoint Method using SU2*. online, Diplomová práce. Technische Universiteit Delft, 2022. Dostupné z: <http://repository.tudelft.nl/>. [cit. 2024-02-16].
- [54] ANITHA, D. a SHAMILI, G.K. Airfoil Shape Optimization Using Cfd And Parametrization Methods. online. *Materials Today: Proceedings*. 2018, s. 5364-5373. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.12.122>. [cit. 2024-02-09].
- [55] ZHU, Zun-Jian a PANG, Ming-Yong. Morphing 3D Mesh Models Based on Spherical Parameterization. online. 2009. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/MINES.2009.29>. [cit. 2024-02-11].
- [56] GROTH, C. a CHIAPPA, A. Shape optimization using structural adjoint and RBF mesh morphing. online. *Procedia Structural Integrity*. 2018, č. 8, s. 379-389. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.12.038>. [cit. 2024-02-11].
- [57] ANSYS, Inc. Flows with Rotating Reference Frames. *Ansys Fluent Theory Guide 15.0*. 2013, s. 17-25.
- [58] ANSYS, Inc. Flows Using Sliding and Deforming Meshes. *Ansys Fluent Theory Guide 15.0*. 2013, s. 33-37.
- [59] ANSYS, Inc. *Ansys Innovation Courses*. online. In: . Dostupné z: <https://courses.ansys.com/>. [cit. 2024-01-14].
- [60] VOLUPE. *Y+ calculator*. online. In: . 2023-09-13. Dostupné z: <https://volupe.se/wall-y-calculator-when-meshing-a-geometry-for-cfd-analysis-this-hand-y-calculator-computes-the-height-of-the-first-mesh-cell-off-the-wall-required-to-achieve-a-desired-y-using-flat-plate-boun/>. [cit. 2023-11-14].
- [61] OPENAI, . online. In: *ChatGPT-4*. Dostupné také z: <https://chat.openai.com/chat>.
- [62] *Mejzlik*. online. Dostupné z: <https://www.mejzlik.eu/>. [cit. 2024-04-23].
- [63] SHERMAN, Albert a JACOBS, Eastman N. *Airfoil Section Characteristics as Affected by Variations of the Reynolds Number*. online. NACA, 1937. Dostupné také z: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19930091662/downloads/19930091662.pdf>.

- [64] STATEČNÝ, Jiří; SEDLÁŘ, František a DOLEŽAL, Zdeněk. *Pevnost a životnost leteckých turbínových motorů*. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-010-0420-1.
- [65] *Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Propellers (CS-P)*. online. EASA, 2020. Dostupné z: <https://www.easa.europa.eu/en/document-library/certification-specifications/group/cs-p-propellers#cs-p-propellers>. [cit. 2024-04-07].
- [66] Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Propellers: CS-P 240 Strength. In: . EASA, 2020. Dostupné také z: [https://www.easa.europa.eu/sites/default/files/dfu/cs-p\\_amendment\\_2.pdf](https://www.easa.europa.eu/sites/default/files/dfu/cs-p_amendment_2.pdf).
- [67] Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Propellers: CS-P 350 Centrifugal Load Tests. In: . EASA, 2020. Dostupné také z: [https://www.easa.europa.eu/sites/default/files/dfu/cs-p\\_amendment\\_2.pdf](https://www.easa.europa.eu/sites/default/files/dfu/cs-p_amendment_2.pdf).
- [68] Testbed pro Průmysl 4.0. online. *Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky*. Dostupné z: [https://testbed.ciirc.cvut.cz/wp-content/uploads/2023/09/Prezentace.pdf?fbclid=IwZXh0bgNhZW0CMTAAAR2\\_AnrbkbAVhomdwhssOcMxrEYaIQ3Hoxvl3m4k4gljFx3mXyjEwFp1M7w\\_aem\\_AaD5myltiNU64aylEt\\_Y-k-KOZ0XRbaiViVzkzkwu07pK0BmqwuTQj0bxWHBLkd8PBo-U6tqBbVXXpqcCwwyRPQbI](https://testbed.ciirc.cvut.cz/wp-content/uploads/2023/09/Prezentace.pdf?fbclid=IwZXh0bgNhZW0CMTAAAR2_AnrbkbAVhomdwhssOcMxrEYaIQ3Hoxvl3m4k4gljFx3mXyjEwFp1M7w_aem_AaD5myltiNU64aylEt_Y-k-KOZ0XRbaiViVzkzkwu07pK0BmqwuTQj0bxWHBLkd8PBo-U6tqBbVXXpqcCwwyRPQbI). [cit. 2024-04-17].
- [69] RICAIP TESTBED PRAGUE. *HP Multi Jet Fusion 4200*. online. In: . Dostupné z: <https://testbed.ciirc.cvut.cz/labs/3d-printing-centre/hp-mjf/>. [cit. 2024-05-11].
- [70] ZÍKA, Vojtěch. *Statický tah vrtule*. online, Diplomová práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2023. Dostupné z: [https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/110162/F2-DP-2023-Zika-Vojtech-zika\\_DP.pdf?sequence=-1&isAllowed=y](https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/110162/F2-DP-2023-Zika-Vojtech-zika_DP.pdf?sequence=-1&isAllowed=y). [cit. 2024-04-18].
- [71] DC Motor / Propeller Matching. online. *Massachusetts Institute of Technology*. 2005. Dostupné z: <https://web.mit.edu/drela/Public/web/qprop/motorprop.pdf>. [cit. 2024-04-18].
- [72] DUALSKY. *Xmotor EA brushless outrunners for air*. online. Dostupné z: [http://www.dualsky.com/motor/Xmotor\\_EA.shtml](http://www.dualsky.com/motor/Xmotor_EA.shtml). [cit. 2024-04-20].
- [73] JETI MODEL. *MEZON 120*. online. Dostupné z: <https://shop.jetimodel.cz/mezon-120.htm>. [cit. 2024-04-20].
- [74] HADEx. *Váhový senzor 1kg YZC-131*. online. Dostupné z: <https://www.hadex.cz/m522-vahovy-senzor-1kg-yzc-131-snimac-hmotnosti-arduino/>. [cit. 2024-04-20].

- [75] SHARPLAYERS. *Arduino UNO R3 - vývojová deska s ATmega328P-AU*. online.  
Dostupné z: [https://eshop.sharplayers.cz/p/arduino-uno-r3-vyvojova-deska-s-atmega328p-au?gad\\_source=1&gclid=CjwKCAjwz42xBhB9EiwA48pT71pRnKDpt21zebCLycX-I998R117Rtywd0CZ-AYz7Kyj6iXEfel36xoCZcQQAuD\\_BwE](https://eshop.sharplayers.cz/p/arduino-uno-r3-vyvojova-deska-s-atmega328p-au?gad_source=1&gclid=CjwKCAjwz42xBhB9EiwA48pT71pRnKDpt21zebCLycX-I998R117Rtywd0CZ-AYz7Kyj6iXEfel36xoCZcQQAuD_BwE). [cit. 2024-04-20].

## Přílohy

### *Příloha 1: Odvození zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie*

#### Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hmoty, který je vyjádřen pomocí rovnice kontinuity

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad (0.1)$$

je získán z obecného zákona zachování dosazením  $\Phi = 1$ . Dále platí, že hmota v daném systému nemůže vznikat ani zanikat. Tudíž se v rovnici kontinuity nevyskytují výrazy vyjadřující objemové a plošné zdroje. Také nedochází k difúznímu toku. [15; 16; 17]

#### Zákon zachování hybnosti

Při odvození rovnice zachování hybnosti se vychází z druhého Newtonova zákona a v obecném zákoně zachování je za veličinu  $\Phi$  dosazen vektor rychlosti  $\vec{v}$ . Zákon zachování hybnosti lze poté určit rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{f}, \quad (0.2)$$

kde na levé straně rovnice první integrál vyjadřuje časovou změnu hybnosti uvnitř kontrolního objemu a druhý integrál konvekční tok. Po úpravě pravé strany rovnice (0.2) pomocí objemových, hmotových a povrchových sil získáme následující vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS, \quad (0.3)$$

který vyjadřuje zachování hybnosti uvnitř libovolného řídicího objemu  $\Omega$ . [16; 17]

#### Zákon zachování energie

Při odvození zákona zachování energie je použit 1. termodynamický zákon, který při aplikaci na kontrolním objem říká, že časová změna celkové energie uvnitř objemu je rovna práci sil působících na kontrolní objem a tepelnému toku. Výsledný vztah má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho E(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_D \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS, \quad (0.4)$$

kde  $\vec{F}_D$  označuje difúzní tok,  $Q_V$  objemové zdroje a  $\vec{Q}_S$  povrchové zdroje. [16; 17]

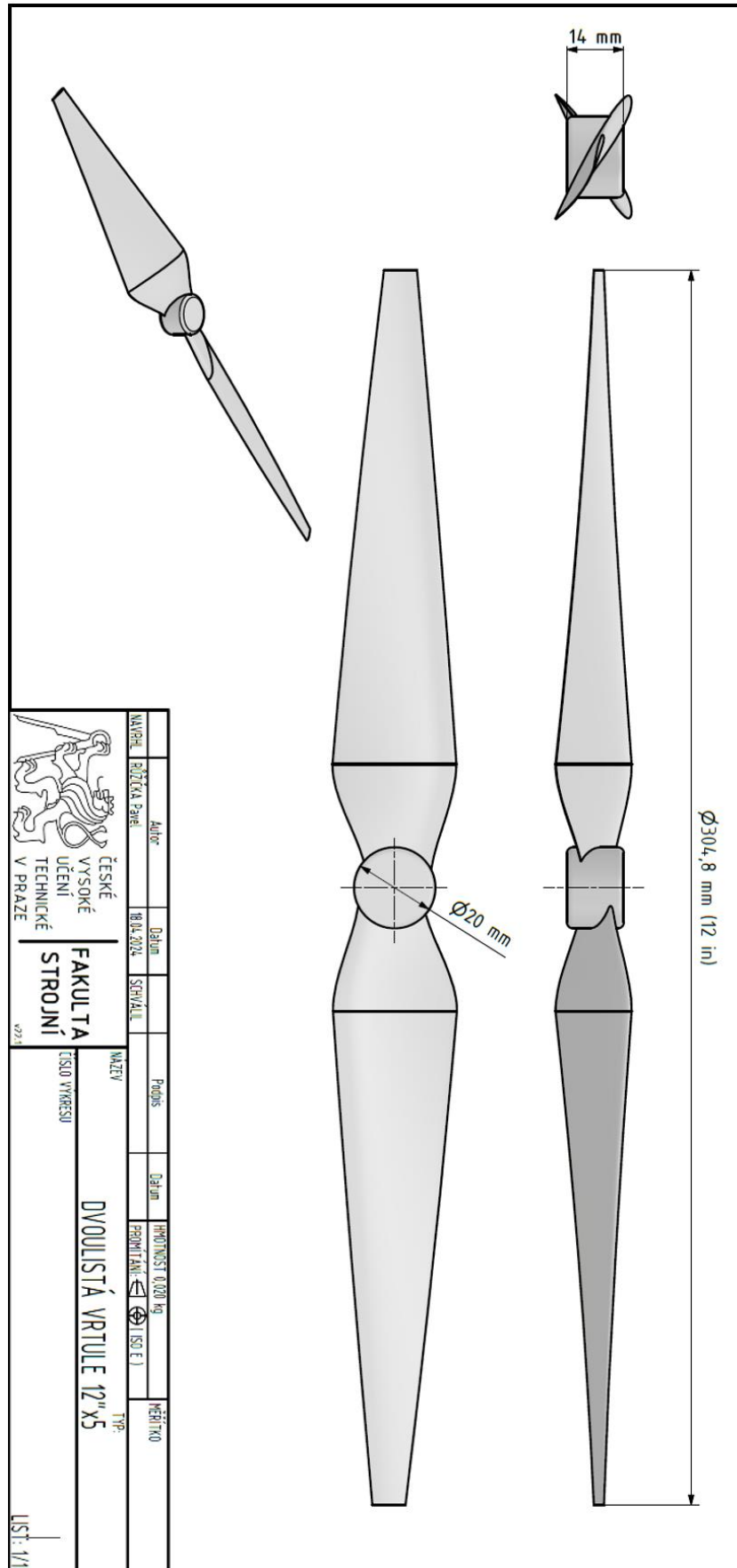
***Příloha 2: Obecné vyjádření gradientu a Hessiánu funkce F [42]***

Následující vztahy vyjadřují gradient  $\vec{G}(\vec{x})$  a Hessián  $\underline{H}(\vec{x})$  kritériální funkce F, které jsou nezbytné pro řešení optimalizační úlohy Newtonovou metodou.

$$\vec{G}(\vec{x}) = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]. \quad (0.5)$$

$$\underline{H}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (0.6)$$

*Příloha 3: Výkres základní geometrie rotoru*





**Příloha 4: Parametry sítě – studie nezávislosti sítě**

| Parametr  | 1. síť    | 2. síť    | 3. síť   |
|---|-----------|-----------|----------|
| Lokální síť (Odtoková hrana – rotor. list) – velikost | 0,034 mm  | 0,018 mm  | 0,018 mm |
| Lokální síť (Body of Influence) – velikost            | 14 mm     | 7 mm      | 5 mm     |
| Lokální síť (Rotační část domény) – velikost          | 3,6 mm    | 1,8 mm    | 1,5 mm   |
| Povrchová síť – min. velikost                         | 0,18 mm   | 0,08 mm   | 0,068 mm |
| Povrchová síť – max. velikost                         | 90 mm     | 42 mm     | 20 mm    |
| Objemová síť – min. velikost                          | 0,034 mm  | 0,018 mm  | 0,018 mm |
| Objemová síť – max. velikost                          | 69,632 mm | 36,864 mm | 4,608 mm |

**Příloha 5: Nastavení parametrů sítě**

| Lokální síťování               |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| Odtoková hrana – rotorový list | Target mesh size - 0,018 mm  |
| Odtoková hrana – náboj         | Target mesh size - 0,034 mm  |
| Rotorový list                  | min - 0,06 mm, max - 0,12 mm |
| Body of Influence              | Target mesh size - 7 mm      |
| Rotační část domény            | Target mesh size - 1,8 mm    |
| Povrchová síť                  |                              |
| Minimální velikost             | 0,08 mm                      |
| Maximální velikost             | 42 mm                        |
| Normálový úhel zakřivení       | 10 °                         |
| Objemová síť                   |                              |
| Typ                            | Poly-hexcore                 |
| Minimální velikost             | 0,018 mm                     |
| Maximální velikost             | 36,864 mm                    |

### *Příloha 6: Metoda Lagrangeových multiplikátorů*

V této příloze je blíže popsána teorie metody Lagrangeových multiplikátorů. Obecně lze Lagrangeova funkce zapsat jako

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda}^T [\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}], \quad (0.7)$$

kde  $f(\vec{x})$  označuje kritériální funkci,  $\vec{g}(\vec{x})$  je vektor omezujících funkcí a  $\vec{b}$  vektor omezujících konstant. Nutnou podmínkou pro existenci lokálního řešení je

$$\nabla L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = 0. \quad (0.8)$$

Ze soustavy  $n + m$  rovnic lze získat  $n$  proměnných  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , které určují lokální řešení a  $m$  Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ . Zda se jedná o lokální minimum či maximum lze stanovit z Hessiánu Lagrangeovy funkce. Pokud je Hessián kladně semidefinitní, jedná se o lokální minimum, pokud je záporně semidefinitní, tak o lokální maximum. Metoda Lagrangeových multiplikátorů umožňuje stanovení lokální vázaných extrémů kritériální funkce  $f(\vec{x})$  pomocí lokálních volných extrémů Lagrangeovy funkce  $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ . Dojde tedy k převedení optimalizační úlohy s omezeními na úlohu bez omezení. [42; 50]

**Příloha 7: Parametry tiskárny HP Multijet Fusion 4200 [67]**

|                     |                       |
|---------------------|-----------------------|
| Stavební prostor    | 380 x 284 x 380 mm    |
| Výška vrstvy        | až 0,08 mm            |
| Hmotnost            | 750 kg                |
| Rozměry (Š x H x V) | 2210 x 1200 x 1448 mm |

**Příloha 8: Hmotnost tisknutých rotorů**

| Popis geometrie  | Hmotnost [g] |
|--|--------------|
| Původní geometrie navržená v rámci bakalářské práce              | 19,4         |
| Optimalizovaná geometrie – 1. iterace – zaoblení konce listu     | 26,9         |
| Optimalizovaná geometrie – 2. iterace – zaoblení konce listu     | 27,2         |
| Optimalizovaná geometrie – 3. iterace – zaoblení konce listu     | 27,6         |
| Optimalizovaná geometrie – 3. iterace – bez zaoblení konce listu | 28,4         |

**Příloha 9: Parametry elektromotoru Dualsky XM3542EA-6 [72]**

|                       |         |
|-----------------------|---------|
| RPM/V (KV)            | 790     |
| Průměr motoru         | 34,5 mm |
| Délka motoru          | 40,3 mm |
| Průměr závitu         | M6      |
| Proud naprázdno @10V  | 2,1 A   |
| Odpor                 | 31 mΩ   |
| Špičkový výkon (15 s) | 548 W   |

***Příloha 10: Parametry regulátoru Mezon 120 [73]***

|                          |                  |
|--------------------------|------------------|
| Hmotnost                 | 165 g            |
| Rozměry                  | 36 x 24 x 109 mm |
| Trvalý proud             | 120 A            |
| Napájecí napětí          | 6 až 35 V        |
| Rozsah pracovních teplot | -10 až 130 °C    |
| Max. proud BEC           | 8 A              |

***Příloha 11: Parametry váhového senzoru YZC-131 [74]***

|                           |                 |
|---------------------------|-----------------|
| Hmotnost                  | 30 g            |
| Rozměry                   | 80 x 13 x 13 mm |
| Jmenovité zatížení        | 120 A           |
| Výstup                    | 1,0 ± 0,15 mV/V |
| Maximální pracovní napětí | 15 VDC          |
| Ochrana                   | IP65            |

***Příloha 12: Parametry vývojové desky Arduino UNO R3 [75]***

|                     |                           |
|---------------------|---------------------------|
| Procesor            | ATmega328P (16 MHz)       |
| DC proud na pin     | 40 mA                     |
| Vstupy a výstupy    | 14x digitální I/O, 6x PWM |
| Napájecí napětí     | 7 – 12 V                  |
| max. proud sekce 5V | 800 mA                    |