



**FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Konstrukční řešení spojitosti ve
společném bodě dvou prostorových
křivek**

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hitzger** Jméno: **Lukáš** Osobní číslo: **492660**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Specializace: **Bez specializace**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Konstrukční řešení spojitosti ve společném bodě dvou prostorových křivek

Název bakalářské práce anglicky:

Constructive solution of continuity at common point of two spatial curves

Pokyny pro vypracování:

- Seznámit se s diferenciální geometrií NURBS křivek
- Provést rešerši stávajících přístupů k definici a analýze spojitosti napojení křivek v různých CAD systémech
- Na základě konstrukčního řešení vyvinout vlastní nástroj k analýze spojitosti napojení prostorových křivek a tento nástroj implementovat do zvoleného CAD systému

Seznam doporučené literatury:

Linkeová, I.: Základy počítačového modelování křivek a ploch. https://users.fs.cvut.cz/ivana.linkeova/pgr/pgr_22.pdf
Piegl, L, Tiller, W.: The NURBS book. Springer, Berlin, 1997.
Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Academic Press, INC. San Diego. 1996

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **11.04.2024** Termín odevzdání bakalářské práce: **11.08.2024**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím literárních zdrojů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů.

Datum:

.....

Podpis

Tímto bych rád poděkoval vedoucí práce
doc. Ivaně Linkeové.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje problematice spojitosti NURBS křivek. Cílem bylo odvodit podmínky pro geometrickou spojitost včetně vyšších stupňů (G^3 a G^4). Na základě provedené rešerše dnes vyšší stupně spojitosti, než G^2 , nejsou jednotně definovány. K odvození podmínek pro geometrickou spojitost je zde přistupováno na základě změny parametrizace parametricky spojitých křivek, posouzením druhé křivosti, posouzením derivace první křivosti a derivací křivky jako parametrické funkce. Vyhodnocení výsledků ukazuje, že přístup derivace křivky jako parametrické funkce produkuje obecné podmínky pro libovolný stupeň spojitosti dvou křivek, které lze implementovat při konstrukčním řešení geometricky spojitých křivek. Na základě získaných poznatků byl vytvořen nástroj v softwaru Rhino 7, určený k analýze geometrické spojitosti až do úrovně G^4 .

Abstract

This thesis is focused on the problematic of continuity of NURBS curves. The achievement was to derive conditions for geometric continuity including higher degrees (G^3 and G^4). Based on research these higher degrees are not uniformly defined today. To derive the conditions we used following methods: change of curve parametrisation, equality of second curvature, equality of first curvature derivative and derivative of the curves as parametric functions. The results show, that the last method gives general conditions for any continuity degree which can be implemented into constructive solution of geometrically continuous curves. Based on these results we made a tool implemented in software Rhino 7 capable of analyzing continuity degree of two curves up to G^4 .

Obsah

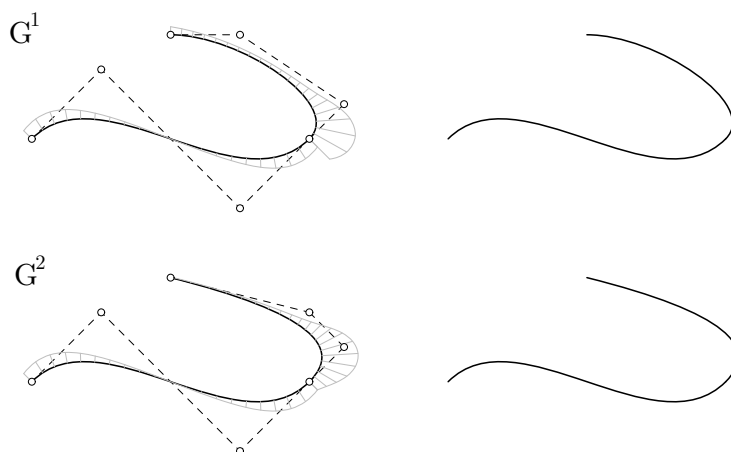
1 Úvod	6
1.1 Současná řešení	6
1.1.1 Catia V5R21	7
1.1.2 SolidWorks 2023	7
1.1.3 Autodesk Inventor 2024	7
1.1.4 FreeCAD 0.19	7
1.1.5 Solid Edge 2024	8
1.1.6 Rhinoceros 7	8
1.2 Konvence značení	9
2 Teoretická část	10
2.1 De Casteljau algoritmus	10
2.2 Bernsteinova formulace	11
2.3 Derivace Bernsteinových polynomů	13
2.4 Parametrická spojitost	17
2.5 Geometrická spojitost	21
3 Praktická část	24
3.1 Přístup změny parametrizace	24
3.2 Přístup rovnosti 2. křivosti	25
3.3 Intermezzo	26
3.3.1 Výpočet složek vektorových funkcí	27
3.3.2 Transformace do přirozeného souřadnicového systému	27
3.3.3 Derivace vzhledem k obloukové souřadnici	28
3.4 Přístup derivace 1. křivosti	28
3.5 Přístup derivace parametrické funkce	30
3.6 Podmínky pro splnění G^0 až G^4 spojitosti	36
3.6.1 G^0 spojitost	36
3.6.2 G^1 spojitost	36
3.6.3 G^2 spojitost	37
3.6.4 G^3 spojitost	37
3.6.5 G^4 spojitost	38
3.7 Algoritmus pro analýzu G^0 až G^4 spojitosti	38
3.7.1 Získání vstupů	38
3.7.2 Konstrukce přirozeného souřadnicového systému	39
3.7.3 Posouzení spojitosti	39

4 Závěrečná část	40
4.1 Výhody a nevýhody jednotlivých přístupů	40
4.1.1 Přístup změny parametrizace	40
4.1.2 Přístup rovnosti 2. křivosti	40
4.1.3 Přístup derivace 1. křivosti	40
4.1.4 Přístup derivace parametrické křivky	40
4.2 Konstrukční řešení spojitosti	41
4.2.1 Spojitost v limitních případech	41
4.2.2 Možnosti využití nezávislých parametrů	42
4.3 Přínos pro praxi	42
Seznam použitých značek a symbolů	43

1 Úvod

Bézierovy křivky jsou široce rozšířené a běžně používané v počítačové grafice, kde jejich význam spočívá nejen ve tvorbě splinů. Ty jsou vytvářeny na základě příkazů a požadavků uživatele, který mnohdy ani netuší, že čára, kterou program vykreslí je složena z jednoho nebo více segmentů, nejčastěji Bézierových křivek. Spliny nachází uplatnění nejen při tvorbě počítačových modelů v CAD (computer aided design) programech, ale i v herním či filmovém průmyslu k definici pohybu kamery, či jiných objektů, definici barvy v čase a mnoha dalších aplikacích. [1] [2]

Ne vždy je možné vše konstruovat jednou křivkou (či plochou - těmi se však v tato práce nezabývá), představme si například karoserii auta či jiné tvarově složité součásti. V těchto případech přirozeně vyvstává otázka a problematika napojení dvou křivek na sebe. V různých aplikacích je vyžadován různý stupeň spojitosti napojení, který má podstatný vliv na vlastnosti výsledné křivky v bodě napojení a nižší stupně spojitosti vedou k méně či více závažným nedokonalostem. V těchto případech například vznikají při obrábění v místě napojení rázy, což způsobuje nadměrné opotřebení nástroje, prodlužování strojního času, i vizuální nedokonalost v místě napojení, kterou je třeba následně zabrousit a tedy zbytečně vynaložit další prostředky. Této problematice se blíže věnuje článek [3]. Další problémy, které nedostatečný stupeň spojitosti přináší, jsou například zalomené odlesky u pohledových ploch (např. karoserie dopravních prostředků) nebo trhavý pohyb kamery v počítačové scéně při přechodu bodu napojení, což by se divákovi jistě nelíbilo. [4]



Obr. 1: Ukázka G^1 a G^2 spojitostě napojených křivek

Abychom pochopili zákeřnost problematiky napojování křivek, podívejme se na obr. 1, kde je ilustrováno, jak malý je na pohled rozdíl mezi různými stupni spojitosti a jak může (nejen) běžný uživatel snadno považovat G^1 nebo G^2 spojitost za dostatečnou, protože vypadá „dostatečně hladce“, bez pochopení geometrie, která s tím souvisí.

1.1 Současná řešení

V této kapitole se zaměříme na zmapování současných možností, které různé CADy uživateli nabízí. Zaměříme se zde na funkce umožňující tvorbu splinů pomocí řídicích bodů, možnosti zobrazení a manipulace s řídicími body, funkce pro hladké napojení křivek (blend) a funkce umožňující analýzu křivek a stupně jejich spojitosti.

1.1.1 Catia V5R21

- v programu lze vytvořit křivku pomocí řídicích bodů, které pak lze znovu zobrazit a editovat, u ostatních křivek a ploch lze řídicí body zobrazit a editovat pomocí vestavěné funkce, která je uživatelsky poměrně složitá
- nabízí možnost napojit křivky G^0 spojitě (Point), G^1 spojitě (Tangent) a G^2 spojitě (Curvature)
- umí zobrazit graf první křivosti na křivce i na rozvinuté křivce (délka namapovaná na osu x)
- dokáže analyzovat spojitost až do G^3 a číselně vypsát odchylky, G^3 spojitost je zde definována jako totožnost tečen grafů křivosti, neboli G^1 spojitý graf křivosti

1.1.2 SolidWorks 2023

- v programu je možnost vytvořit křivku pomocí řídicích bodů, které lze zpětně zobrazit a upravovat, u křivek vytvořených jinak, než jako spline s řídicími body (např. pomocí funkce blend) řídicí polygon zobrazit nelze
- nabízí možnost napojit křivky G^0 spojitě (Point), G^1 spojitě (Tangent), G^2 spojitě (Curvature) a G^3 spojitě (Torsion), G^3 spojitost je zde tedy definována jako spojitost druhé křivosti
- umí zobrazit graf křivosti, který je zde zobrazen pouze normálami různých délek (jejich konce nejsou proložené splinem), což snižuje přehlednost
- automatická analýza spojitosti je zde pouze pro G^0

1.1.3 Autodesk Inventor 2024

- nabízí možnost tvorby křivky pomocí řídicích bodů a ty lze i zpětně zobrazit a upravovat, křivky vytvořené jinak než jako spline s řídicími body lze pomocí vestavěné funkce převést na spline s řídicími body a ty je možné následně upravovat
- program nabízí uživateli napojit křivky G^0 spojitě (Point), G^1 spojitě (Tangent) a G^2 spojitě (Curvature), tyto funkce jsou zde realizovány jako vazby
- lze zobrazit graf křivosti, automatická analýza spojitosti zde implementována není

1.1.4 FreeCAD 0.19

- umí vytvořit křivku definovanou řídicími body, které lze zpětně zobrazit a upravovat
- má vestavěnou funkci pro spojení dvou křivek, která není nijak interaktivní a dle nápovědy křivky napojí s vysokou úrovní spojitosti, detailnější informace však zcela chybí
- automaticky u křivky zobrazí graf křivosti, jiné nástroje analýzy spojitosti zde nejsou
- program je zdarma a existuje mnoho komunitních doplňků, je tedy možné, že existuje nebo vznikne modul pro pokročilejší práci se spliny

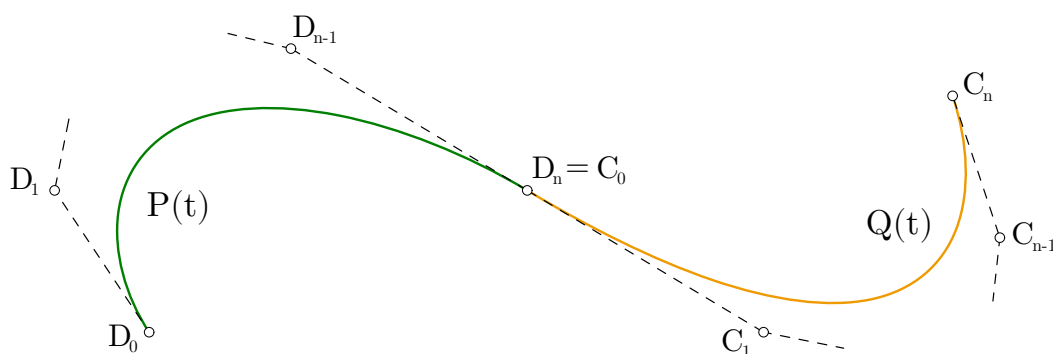
1.1.5 Solid Edge 2024

- lze vytvořit křivku, která se tvoří jako interpolační spline, zpětně uživateli zobrazí a umožní editovat uzlové i řídicí body
- křivky umí napojit pouze G^0 a G^1 spojitě pomocí vazeb
- je zde implementován graf křivosti, u kterého však nelze upravit měřítko a je tím pádem pro méně zakřivené křivky nepoužitelný
- program nenabízí funkci pro spojení dvou křivek další spline křivkou, pouze tečným obloukem

1.1.6 Rhinoceros 7

- program uživateli automaticky zobrazuje řídicí body a umožňuje je upravovat, uživatelsky je zde tato funkce realizována velmi přívětivě a intuitivně
- nabízí možnost napojit křivky G^0 spojitě (Point), G^1 spojitě (Tangent), G^2 spojitě (Curvature), G^3 spojitě a G^4 spojitě, G^3 spojitost je zde definována jako rovnost rovinného zrychlení křivosti a G^4 spojitost jako rovnost prostorového zrychlení křivosti
- umí zobrazit graf křivosti
- dokáže analyzovat spojitost pouze do G^2 , ačkoli umožňuje napojit křivky až G^4 spojitě

Z rešerše vyplývá, že dnes jsou dobře známé a popsané geometrické spojitosti G^1 , jejíž geometrický význam spočívá v totožnosti tečen obou křivek v bodě spojení a G^2 , kterou lze geometricky interpretovat jako stejný poloměr křivosti dvou křivek v bodě napojení, a tyto definice jsou konzistentní napříč všemi testovanými CADy. G^3 spojitost podporují jen některé z testovaných programů (SolidWorks – jen při tvorbě, Rhinoceros – jen při tvorbě, Catia – jen při analýze) a její definice se v každém softwaru liší. Spojitost G^4 je implementována z testovaných jen v programu Rhinoceros a to jen při tvorbě. K analýze spojitosti uživateli všechny testované programy nabízí graf křivosti, mějme však na paměti, že ačkoli je to užitečný a jednoduchý nástroj, nelze jím křivky analyzovat zcela spolehlivě v případě malých odchylek od požadované úrovně spojitosti. Funkce automatické analýzy spojitosti jsou pouze u některých softwarů, Solidworks umí analyzovat pouze spojitost G^0 , Rhinoceros rozliší úroveň spojitosti až do G^2 a Catia poskytuje analýzu až do G^3 . [5]



Obr. 2: Napojení křivek - značení

1.2 Konvence značení

Tato práce intenzivně pracuje s Bézierovými křivkami, jejich řídicími polygony a jejich derivacemi. Křivky $P(t)$ a $Q(t)$ matematicky reprezentujeme pomocí vektorových funkcí jedné proměnné $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(t)$, kde t je z intervalu parametrizace $\langle 0, 1 \rangle$. Řídicí body D_i a C_j reprezentujeme pomocí jejich polohových vektorů \mathbf{D}_i a \mathbf{C}_j . Budeme se zde držet konvence, že vždy napojujeme křivku $Q(t)$ stupně n_2 , definovanou řídicími body C_j ($j = 0, \dots, n_2$) na již existující křivku $P(t)$ stupně n_1 , definovanou řídicími body D_i ($i = 0, \dots, n_1$), viz obr. 2. Více viz [6].

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) & \mathbf{Q}(t) &= (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) \\ \mathbf{D}_i &= (D_{ix}, D_{iy}, D_{iz}) & \mathbf{C}_j &= (C_{jx}, C_{jy}, C_{jz}) \end{aligned} \quad (1)$$

Derivace vektorových funkcí křivek $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(t)$ vzhledem k parametru t označíme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= (\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)) & \dot{\mathbf{Q}}(t) &= (\dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t), \dot{z}_2(t)) \\ \mathbf{P}^{(r)}(t) &= (x_1^{(r)}(t), y_1^{(r)}(t), z_1^{(r)}(t)) & \mathbf{Q}^{(r)}(t) &= (x_2^{(r)}(t), y_2^{(r)}(t), z_2^{(r)}(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

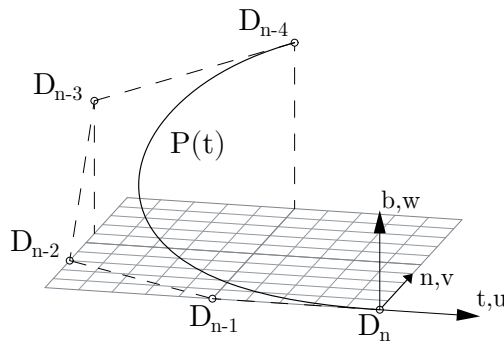
Derivace vektorových funkcí křivek (dále jen derivace křivek) můžeme vyjádřit i v přirozeném souřadnicovém systému křivky tečna–normála–binormála, které tvoří Frenetův průvodní trojhran, viz obr. 3. Jako počátek zde s výhodou budeme používat koncový bod výchozí křivky D_n . Aby nedocházelo k záměnám tečny a stupně křivky s osami přirozeného souřadnicového systému, přeznačíme jeho osy a složky vektorových funkcí křivek v systému (D_n, t, n, b) na u, v, w :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (u_1(t), v_1(t), w_1(t)) & \mathbf{Q}(t) &= (u_2(t), v_2(t), w_2(t)) \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= (\dot{u}_1(t), \dot{v}_1(t), \dot{w}_1(t)) & \dot{\mathbf{Q}}(t) &= (\dot{u}_2(t), \dot{v}_2(t), \dot{w}_2(t)) \\ \mathbf{P}^{(r)}(t) &= (u_1^{(r)}(t), v_1^{(r)}(t), w_1^{(r)}(t)) & \mathbf{Q}^{(r)}(t) &= (u_2^{(r)}(t), v_2^{(r)}(t), w_2^{(r)}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

Souřadnice řídicích bodů a složky diferencí označíme v přirozeném souřadnicovém systému následovně:

$$\mathbf{D}_i^r = (D_{i||}^r, D_{i\perp}^r, D_{i\times}^r) \quad \mathbf{C}_i^r = (C_{i||}^r, C_{i\perp}^r, C_{i\times}^r) \quad (4)$$

Skutečnost, že složky parametrických funkcí křivek i jejich derivací jsou funkcemi parametru, nebudeme dále v zápisu pro lepší přehlednost uvádět.



Obr. 3: Přirozený souřadnicový systém křivky $P(t)$ s počátkem v koncovém bodě D_n

2 Teoretická část

2.1 De Casteljau algoritmus

Bézierova křivka $P(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$ stupně n je určena $(n + 1)$ řídicími body \mathbf{D}_i ($i = 0, \dots, n$), tvořícími řídicí polygon $\mathbf{D}_0\mathbf{D}_1\dots\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{D}_n$. Konstrukce Bézierovy křivky realizujeme De Casteljau algoritmem (viz obr. 4). Body řídicího polygonu nazveme body nulté vrstvy a označíme \mathbf{V}_i^0 , body označené písmenem \mathbf{V} se v této práci budou vztahovat výhradně k DeCasteljau algoritmu:

$$\mathbf{V}_i^0 \equiv \mathbf{D}_i \quad i = 0, \dots, n \quad (5)$$

Zvolíme počáteční hodnotu parametru $t = 0$ a zahájíme samotný De Casteljau algoritmus:

- ramena řídicího polygonu rozdělíme v poměru $t : (1 - t)$, čímž získáme body 1. vrstvy V_i^1 (modře), matematicky vyjádřeno:

$$\mathbf{V}_i^1 = t \cdot \mathbf{V}_{i+1}^0 + (1 - t) \cdot \mathbf{V}_i^0 \quad i = 0, \dots, n - 1 \quad (6)$$

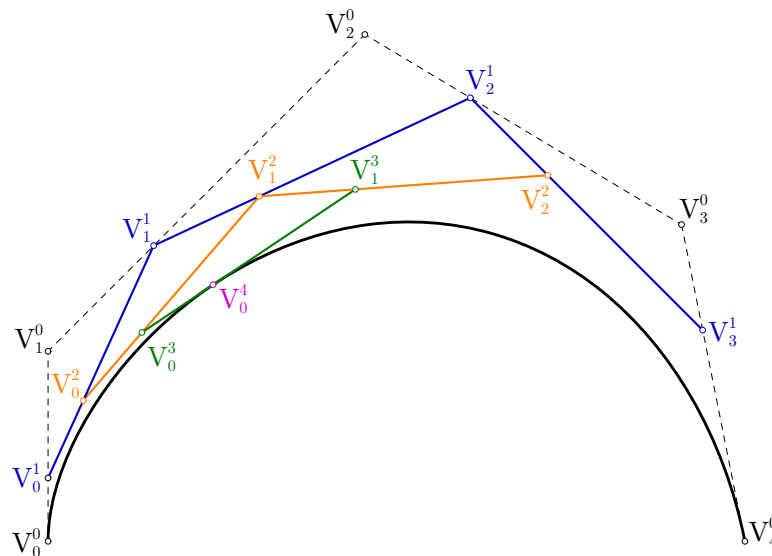
- body 1. vrstvy spojíme do nového polygonu, jehož ramena opět rozdělíme v poměru $t : (1 - t)$ a získáme body 2. vrstvy V_i^2 (oranžově):

$$\mathbf{V}_i^2 = t \cdot \mathbf{V}_{i+1}^1 + (1 - t) \cdot \mathbf{V}_i^1 \quad i = 0, \dots, n - 2 \quad (7)$$

- postupné dělení opakujeme, dokud nedostaneme pouze jeden výsledný bod V_0^n v n -té vrstvě (fialově), který je bodem křivky pro hodnotu parametru t :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{V}_0^n \quad (8)$$

- celý algoritmus opakujeme po krocích parametru t v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, poslední průchod algoritmem musí být pro $t = 1$



Obr. 4: DeCasteljau algoritmus pro $t = 1/3, n = 4$

Obecně lze kroky De Casteljau konstrukce vyjádřit následovně:

$$\mathbf{V}_i^j = t \cdot \mathbf{V}_{i+1}^{j-1} + (1-t) \cdot \mathbf{V}_i^{j-1} \quad j = 0, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n-j \quad (9)$$

Povšimněme si, že konstrukcí DeCasteljau algoritmu pro libovolný parametr $t \in (0, 1)$ získáme dvě Bézierovy křivky stejného stupně n :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(\tilde{t}_1); \tilde{t}_1 \in \langle 0, 1 \rangle, \text{ danou řídícími body } \mathbf{V}_0^0, \mathbf{V}_0^1, \dots, \mathbf{V}_0^{n-1}, \mathbf{V}_0^n \\ \tilde{P}_2(\tilde{t}_2); \tilde{t}_2 \in \langle 0, 1 \rangle, \text{ danou řídícími body } \mathbf{V}_0^n, \mathbf{V}_1^{n-1}, \dots, \mathbf{V}_{n-1}^1, \mathbf{V}_n^0 \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 Bernsteinova formulace

Uvažujme Bézierovu křivku $P(t)$ stupně n , definovanou řídícím polygonem $\mathbf{D}_0\mathbf{D}_1\dots\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{D}_n$. S využitím vztahů (8) a (9) rozložíme vztah pro bod křivky:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{V}_0^n = (1-t) \cdot \mathbf{V}_0^{n-1} + t \cdot \mathbf{V}_1^{n-1} \quad (11)$$

Rovnice (11) vyjadřuje rozklad křivky 1. stupně, kde body \mathbf{V}_i^{n-1} odpovídají řídícím bodům \mathbf{D}_i a jsou přenásobeny bázovými funkcemi. Vidíme, že závislost je lineární. U křivek vyšších stupňů pokračujeme s rozkladem:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (1-t) \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{V}_0^{n-2} + t \cdot \mathbf{V}_1^{n-2}] + t \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{V}_1^{n-2} + t \cdot \mathbf{V}_2^{n-2}] = \\ &= (1-t)^2 \cdot \mathbf{V}_0^{n-2} + 2t \cdot (1-t) \cdot \mathbf{V}_1^{n-2} + t^2 \cdot \mathbf{V}_2^{n-2} \end{aligned} \quad (12)$$

Rovnice (12) představuje rozklad křivky 2. stupně, kde body \mathbf{V}_i^{n-2} opět odpovídají řídícím bodům \mathbf{D}_i a jsou přenásobeny bázovými funkcemi. U křivky 2. stupně je závislost kvadratická. Odvoďme zde ještě vztah pro křivku 3. stupně:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (1-t)^2 \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{V}_0^{n-3} + t \cdot \mathbf{V}_1^{n-3}] + 2t \cdot (1-t) \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{V}_1^{n-3} + t \cdot \mathbf{V}_2^{n-3}] + \\ &\quad + t^2 \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{V}_2^{n-3} + t \cdot \mathbf{V}_3^{n-3}] = \\ &= (1-t)^3 \cdot \mathbf{V}_0^{n-3} + 3t \cdot (1-t)^2 \cdot \mathbf{V}_1^{n-3} + 3t^2 \cdot (1-t) \cdot \mathbf{V}_2^{n-3} + t^3 \cdot \mathbf{V}_3^{n-3} \end{aligned} \quad (13)$$

Rovnice (13) reprezentuje křivku 3. stupně, kde body \mathbf{V}_i^{n-3} opět odpovídají řídícím bodům \mathbf{D}_i a bázové funkce jsou pro křivku 3. stupně kubické. Všimněme si, že bázové funkce jsou součinem členů t a $(1-t)$ v různých mocninách, které postupně pro jednotlivé řídící body stoupají/klesají a jsou přenásobeny binomickými koeficienty. Obecně rozkladem získáme závislost na parametru t a řídících bodech \mathbf{D}_i , stupně n . Zdůrazněme, že tato rovnice vychází pouze z DeCasteljau algoritmu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \binom{n}{0} \cdot (1-t)^n \cdot \mathbf{D}_0 + \binom{n}{1} \cdot t \cdot (1-t)^{n-1} \cdot \mathbf{D}_1 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot (1-t) \cdot \mathbf{D}_{n-1} + \binom{n}{n} \cdot t^n \cdot \mathbf{D}_n \end{aligned} \quad (14)$$

Koeficienty u jednotlivých bodů v rovnici (14) jsou bázové funkce křivky a nazývají se Bernsteinovy polynomy. Stupeň Bernsteinových polynomů odpovídá stupni křivky a křivka stupně n musí mít stejný počet bázových funkcí jako řídicích bodů, tedy $(n + 1)$. Koeficient $B_{i,n}$ u i -tého řídicího bodu \mathbf{D}_i je i -tým Bernsteinovým polynomem stupně n :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}; \quad i = 0, \dots, n \quad (15)$$

Kombinací vztahů (14) a (15) křivku zkráceně vyjádříme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= B_{0,n} \cdot \mathbf{D}_0 + B_{1,n} \cdot \mathbf{D}_1 + \dots + B_{n-1,n} \cdot \mathbf{D}_{n-1} + B_{n,n} \cdot \mathbf{D}_n \\ \mathbf{P}(t) &= \sum_{i=0}^n [B_{i,n}(t) \cdot \mathbf{D}_i] \end{aligned} \quad (16)$$

Rovnice (16) je Bernsteinovým vyjádřením Bézierovy křivky $P(t)$. Pojd' me se podívat na význačné vlastnosti Bernsteinových polynomů, viz obr. (5):

- v definičním oboru $t \in \langle 0, 1 \rangle$ nabývají hodnoty v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$
- jsou symetrické a nezáleží na tom, zda řídicí polygon označíme $\mathbf{D}_0\mathbf{D}_1\dots\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{D}_n$ nebo $\mathbf{D}_n\mathbf{D}_{n-1}\dots\mathbf{D}_1\mathbf{D}_0$, protože platí:

$$\begin{aligned} B_{n-i,n}(1-t) &= \binom{n}{n-i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot [1 - (1-t)]^{n-(n-i)} = \\ &= \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

- mají lokální maxima, což přináší semi-lokální vliv řídicích bodů, každý řídicí bod tedy ovlivní tvar celé křivky, ale jen ve svém okolí ji ovlivní výrazně
- ze vztahu (15) vyplývá, že symetricky pro $t = 0$ a $t = 1$ platí:

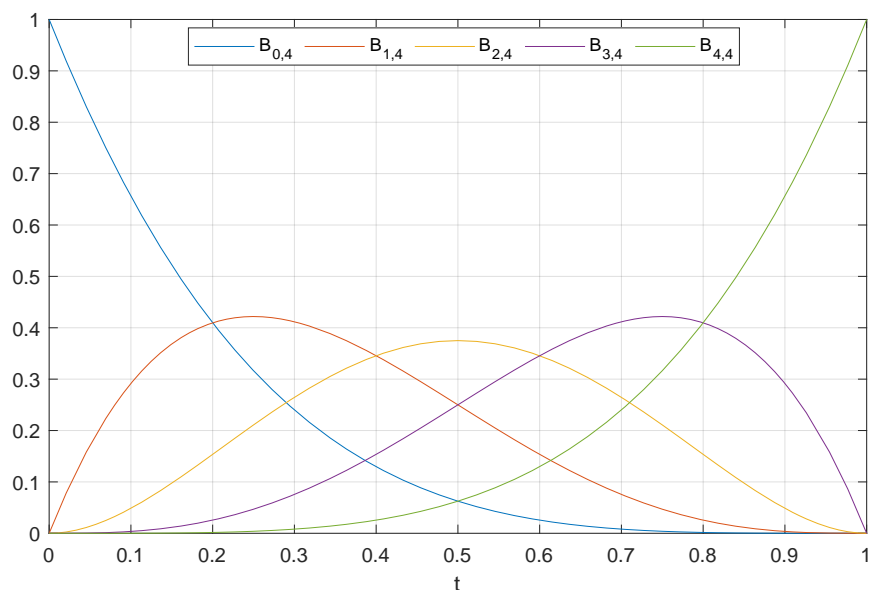
$$\begin{aligned} B_{i,n}(0) = 1 \quad \text{pro } i = 0 & \quad B_{i,n}(1) = 1 \quad \text{pro } i = n \\ B_{i,n}(0) = 0 \quad \text{pro } i > 0 & \quad B_{i,n}(1) = 0 \quad \text{pro } i < n \end{aligned} \quad (18)$$

tato vlastnost zaručuje interpolaci krajních bodů řídicího polygonu Bézierovou křivkou

- součet Bernsteinových polynomů pro libovolnou hodnotu parametru $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je roven jedné, to lze dokázat s pomocí binomické věty [7]:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = [t + (1-t)]^n = 1 \quad (19)$$

- Bernsteinovy polynomy jsou na intervalu $t \in \langle 0, 1 \rangle$ nezáporné a díky platnosti (19) se Bézierova křivka nachází v konvexním obalu řídicího polygonu



Obr. 5: Bernsteinovy polynomy 4. stupně

2.3 Derivace Bernsteinových polynomů

Téma spojitosti Bézierových křivek je úzce spojeno s jejich derivacemi. Derivace křivky přímo vychází z derivací básových funkcí – v případě Bézierových křivek Bernsteinových polynomů, proto se na ně podrobněji zaměříme v této kapitole. Uvažujme opět křivku $P(t)$ stupně n a dodefinujeme:

$$B_{i,n}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad i \notin \{0, \dots, n\} \quad (20)$$

V okrajových bodech Bézierovy křivky (kde budeme derivace křivky vyhodnocovat, abychom dokázali určit podmínky spojitosti, platí pro Bernsteinovy polynomy následující:

$$\begin{aligned} B_{i,n}(0) &= \binom{n}{i} \cdot 0^i \cdot (1-0)^{n-i} \\ B_{i,n}(1) &= \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot (1-1)^{n-i} \end{aligned} \quad (21)$$

Je vidět, že tento výraz je v $t = 0$ nulový s výjimkou případu $i = 0$, kdy vypadne člen t^i a v $t = 1$ je nulový s výjimkou $i = n$, kdy vypadne člen $(1-t)^{n-i}$ a platí tedy:

$$\begin{aligned} B_{i,n}(0) &= \binom{n}{0} \cdot (1-0)^{n-0} = 1 \quad \text{pro} \quad i = 0 \\ B_{i,n}(0) &= \binom{n}{i} \cdot 0^i \cdot (1-0)^{n-i} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq 0 \\ B_{i,n}(1) &= \binom{n}{n} \cdot 1^n = 1 \quad \text{pro} \quad i = n \\ B_{i,n}(1) &= \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot (1-1)^{n-i} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq n \end{aligned} \quad (22)$$

Derivace Bernsteinových polynomů vyjádříme jako derivaci součinu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \cdot B_{i,n}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \right] = \\
&= \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \left[i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - (n-i) \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \right] = \\
&= \frac{n! \cdot i}{(n-i)! \cdot i(i-1)!} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - \frac{n! \cdot (n-i)}{(n-i)(n-i-1)! \cdot i!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} = \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-i)! \cdot (i-1)!} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{(n-i-1)! \cdot i!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \quad (23)
\end{aligned}$$

Kde s využitím $(n-i)! = ((n-1)-(i-1))!$ získáme výraz:

$$n \left[\binom{n-1}{i-1} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \right] \quad (24)$$

a výraz v závorce je rozdíl dvou Bernsteinových polynomů stupně $(n-1)$. Vztah pro derivaci Bernsteinových polynomů tak získáváme také jako:

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n \cdot (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \quad (25)$$

Vztah (25) znovu zderivujeme:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} (n \cdot [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]) = \\
&= n(n-1) \cdot ([B_{i-2,n-2}(t) - B_{i-1,n-2}(t)] - [B_{i-1,n-2}(t) - B_{i,n-2}(t)]) \quad (26)
\end{aligned}$$

Po úpravě získáme vztah pro druhou derivaci Bernsteinových polynomů:

$$\frac{d^2}{dt^2} B_{i,n}(t) = n(n-1) \cdot [B_{i-2,n-2}(t) - 2 \cdot B_{i-1,n-2}(t) + B_{i,n-2}(t)] \quad (27)$$

Aplikací (25) na (27) získáme vztah pro třetí derivaci Bernsteinových polynomů:

$$\frac{d^3}{dt^3} B_{i,n}(t) = n(n-1)(n-2) \cdot [B_{i-3,n-3}(t) - 3 \cdot B_{i-2,n-3}(t) + 3 \cdot B_{i-1,n-3}(t) - B_{i,n-3}(t)] \quad (28)$$

Vidíme, že se zde začíná tvořit určitý vzor. Vyjádříme tedy obecný vztah pro r -tou derivaci Bernsteinových polynomů:

$$\frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} B_{i,n}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \sum_{j=0}^r \binom{n}{j} (-1)^j B_{i-r+j,n-r}(t) \quad (29)$$

Na základě vztahů (22) musí být v sumě v krajních bodech maximálně jeden člen nenulový a pro tento člen musí platit:

$$\begin{aligned}
 t = 0 : \quad & i - r + j = 0 \\
 & j = r - i \\
 t = 1 : \quad & i - r + j = n \\
 & j = r - i + n
 \end{aligned} \tag{30}$$

Dosažením podmínek (30) do (29) získáme vztahy pro derivace v krajních bodech:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} B_{i,n}(0) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \binom{n}{r-i} (-1)^{r-i} B_{0,n-r}(0) \\
 \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} B_{i,n}(1) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \binom{n}{r-i+n} (-1)^{r-i+n} B_{n,n-r}(1)
 \end{aligned} \tag{31}$$

A po další úpravě na základě (22) získáme výsledný vztah pro derivace Bernsteinových polynomů v krajních bodech:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} B_{i,n}(0) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \binom{n}{r-i} (-1)^{r-i} \\
 \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} B_{i,n}(1) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \binom{n}{r-i+n} (-1)^{r-i+n}
 \end{aligned} \tag{32}$$

a dodefinujeme:

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{pro} \quad k \notin \{0, \dots, n\} \tag{33}$$

Nyní proved' me přeznačení pro zjednodušení (32):

$$\begin{aligned}
 w_{i,r}(0) &= \binom{n}{r-i} (-1)^{r-i} \\
 w_{i,r}(1) &= \binom{n}{r-i+n} (-1)^{r-i+n}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Vidíme, že hodnoty derivací jsou součinem členu závislého na stupni křivky a derivace a dalšího členu w , který můžeme chápat jako jakýsi váhový člen, protože z něj získáme informaci o tom, jak velký vliv mají na hodnotu derivace jednotlivé Bernsteinovy polynomy a tedy jednotlivé řídicí body. Abychom pochopili chování členů $w_{i,r}$, podívejme se do tab. 1. Povšimněme si, že členy $w_{i,r}$ nejsou závislé na stupni křivky a že na hodnotu r -té derivace má vliv prvních/posledních $r+1$ řídicích bodů.

Derivace Bézierovy křivky v krajních bodech můžeme vyjádřit jako:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^{(r)}(0) &= \sum_{i=0}^n \frac{d^r}{dt^r} B_{i,n}(0) \cdot \mathbf{D}_i = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-r)!} \cdot w_{i,r}(0) \cdot \mathbf{D}_i \\
 \mathbf{P}^{(r)}(1) &= \sum_{i=0}^n \frac{d^r}{dt^r} B_{i,n}(1) \cdot \mathbf{D}_i = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-r)!} \cdot w_{i,r}(1) \cdot \mathbf{D}_i
 \end{aligned} \tag{35}$$

Tab. 1: Hodnoty koeficientů $w_{i,r}(0)$ a $w_{i,r}(1)$ pro $n \geq 4$, pro $r > n$ jsou nulové.

$w_{i,r}(0)$	i				
	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	-1	1	0	0	0
2	1	-2	1	0	0
3	-1	3	-3	1	0
4	1	-4	6	-4	1

$w_{i,r}(1)$	i				
	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	-1	1
2	0	0	1	-2	1
3	0	-1	3	-3	1
4	1	-4	6	-4	1

Dále zavedeme systém diferencí \mathbf{D}_i^r , kde r značí stupeň diference. Necht' difference nultého stupně odpovídají přímo řídicím bodům:

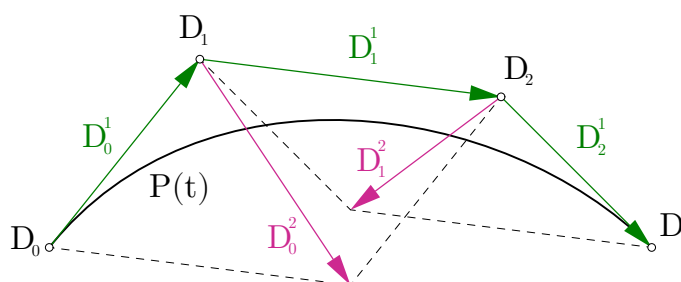
$$\mathbf{D}_i^0 = \mathbf{D}_i; \quad i = 0, \dots, n \quad (36)$$

Diference prvního stupně vyjádříme jako rozdíl dvou sousedních diferencí nultého stupně, neboli dvou sousedních řídicích bodů. Geometricky vyjádřeno jsou to vektory shodné s rameny řídicího polygonu, viz obr. 6 (zeleně):

$$\mathbf{D}_i^1 = \mathbf{D}_{i+1}^0 - \mathbf{D}_i^0; \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (37)$$

Diference druhého stupně vyjádříme jako rozdíl dvou sousedních diferencí prvního stupně, neboli dvou sousedních ramen řídicího polygonu. Geometricky vyjádřeno jsou to úhlopříčky rovnoběžníku vzniklého z těchto dvou ramen (tří řídicích bodů), viz obr. 6 (fialově):

$$\mathbf{D}_i^2 = \mathbf{D}_{i+1}^1 - \mathbf{D}_i^1; \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (38)$$



Obr. 6: Diference 1. stupně (zeleně) a 2. stupně (fialově) - geometrický význam

Diference vyšších stupňů vyjádříme vždy jako rozdíl dvou diferencí nižšího stupně. Z geometrického hlediska se jedná o vektorový rozdíl dvou sousedních diferencí stupně $r-1$. Obecně vyjádříme difference r -tého stupně následovně:

$$\mathbf{D}_i^r = \mathbf{D}_{i+1}^{r-1} - \mathbf{D}_i^{r-1}; \quad r = 1, \dots, n \quad i = 0, \dots, n-r \quad (39)$$

Pojďme nyní vyjádřit diferenci r -tého stupně jako součet řídicích bodů (diferencí stupně 0):

$$\mathbf{D}_i^r = \mathbf{D}_{i+1}^{r-1} - \mathbf{D}_i^{r-1} = \mathbf{D}_{i+2}^{r-2} - 2\mathbf{D}_{i+1}^{r-2} + \mathbf{D}_i^{r-2} = \mathbf{D}_{i+3}^{r-3} - 3\mathbf{D}_{i+2}^{r-3} + 3\mathbf{D}_{i+1}^{r-3} - \mathbf{D}_i^{r-3} = \dots \quad (40)$$

Zde můžeme pozorovat souvislost s členy $w_{i,r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0^r &= \sum_{i=0}^n w_{i,r}(0) \cdot \mathbf{D}_i^0 \\ \mathbf{D}_{n-r}^r &= \sum_{i=0}^n w_{i,r}(1) \cdot \mathbf{D}_i^0 \end{aligned} \quad (41)$$

Dosazením (41) do (35) elegantně získáváme hodnoty r -tých derivací v koncových bodech křivky:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(r)}(0) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \mathbf{D}_0^r; & r = 0, \dots, n \\ \mathbf{P}^{(r)}(1) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \mathbf{D}_{n-r}^r; & r = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (42)$$

2.4 Parametrická spojitost

Uvažujme křivku $P(t)$ stupně n_1 , definovanou řídicími body \mathbf{D}_i ($i = 0, \dots, n_1$), na kterou budeme napojovat křivku $Q(t)$ stupně n_2 , definovanou řídicími body \mathbf{C}_j ($j = 0, \dots, n_2$), jako na obr. 2. Parametrickou spojitost dvou křivek definujeme jako rovnost jejich derivací v koncových bodech. Říkáme, že křivky jsou C^m spojitě v bodě, jestliže jsou v tomto bodě spojitě parametrické derivace jejich vektorových funkcí až do řádu m :

$$\mathbf{Q}^{(r)}(0) = \mathbf{P}^{(r)}(1) \quad \forall r \in \{0, \dots, m\} \quad \Rightarrow \quad C^m \quad (43)$$

Podmínka pro C^0 spojitost vyžaduje rovnost nultých derivací. Z geometrického hlediska odpovídá totožnosti krajních bodů obou křivek v místě napojení.

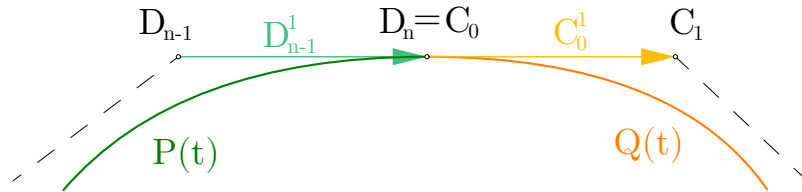
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(0) &= \mathbf{P}(1) \\ \mathbf{C}_0 &= \mathbf{D}_n \end{aligned} \quad (44)$$

Podmínku pro C^1 spojitost získáme z rovnosti 1. derivací dosazením do (42). Horní indexy zde značí stupeň diferencí (viz předchozí kapitola):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(0) &= \dot{\mathbf{P}}(1) \\ n_2 \cdot \mathbf{C}_0^1 &= n_1 \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 \\ n_2 \cdot (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) &= n_1 \cdot (\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}) \end{aligned} \quad (45)$$

a zároveň musíme splniť podmítku (44) pro C^0 . Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{D}_n + \frac{n_1}{n_2} \cdot (\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}) = \mathbf{D}_n + \frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 \quad \text{pro } n_2 \neq n_1 \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{D}_n + (\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}) = \mathbf{D}_n + \mathbf{D}_{n-1}^1 \quad \text{pro } n_2 = n_1 \end{aligned} \quad (46)$$



Obr. 7: C^1 spojitě řídicí polygony pro křivky stejného stupně

Podmítku pro C^2 spojitost získáme z rovnosti 2. derivací, opět dosazením do (42):

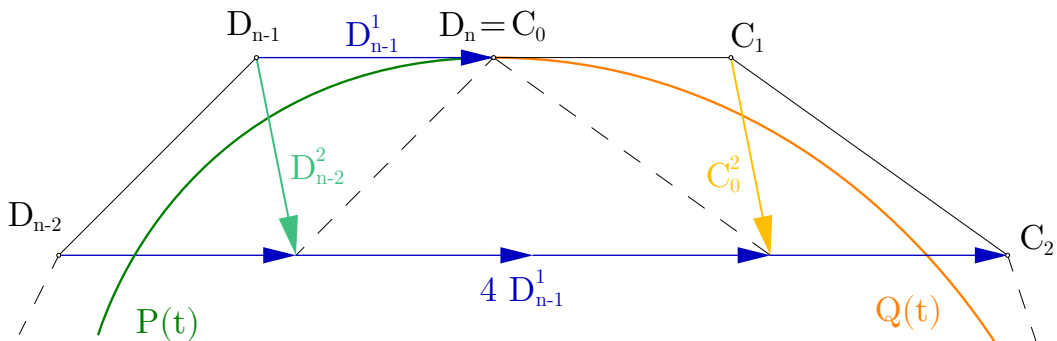
$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}(0) &= \ddot{\mathbf{P}}(1) \\ n_2(n_2 - 1) \cdot \mathbf{C}_0^2 &= n_1(n_1 - 1) \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 \\ n_2(n_2 - 1) \cdot (\mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) &= n_1(n_1 - 1) \cdot (\mathbf{D}_{n-2} - 2\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{D}_n) \end{aligned} \quad (47)$$

kde s využitím podmínek (44) pro C^0 a (46) pro C^1 dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 &= \frac{n_1(n_1 - 1)}{n_2(n_2 - 1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 2\frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \quad \text{pro } n_2 \neq n_1 \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{D}_{n-2} - 4\mathbf{D}_{n-1} + 4\mathbf{D}_n \quad \text{pro } n_2 = n_1 \end{aligned} \quad (48)$$

a pro jednodušší geometrickou interpretaci lze dále zjednodušit, viz obr. 8:

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{D}_{n-2} + 4 \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 \quad \text{pro } n_2 = n_1 \quad (49)$$



Obr. 8: C^2 spojitě řídicí polygony pro křivky stejného stupně

Podmínku pro C^3 spojitost vyjádříme z rovnosti 3. derivací v krajních bodech:

$$\ddot{\mathbf{Q}}(0) = \ddot{\mathbf{P}}(1)$$

$$n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2) \cdot \mathbf{C}_0^3 = n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) \cdot \mathbf{D}_{n-3}^3$$

$$\frac{n_2!}{(n_2 - 3)!} \cdot (\mathbf{C}_3 - 3\mathbf{C}_2 + 3\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) = \frac{n_1!}{(n_1 - 3)!} \cdot (-\mathbf{D}_{n-3} + 3\mathbf{D}_{n-2} - 3\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{D}_n) \quad (50)$$

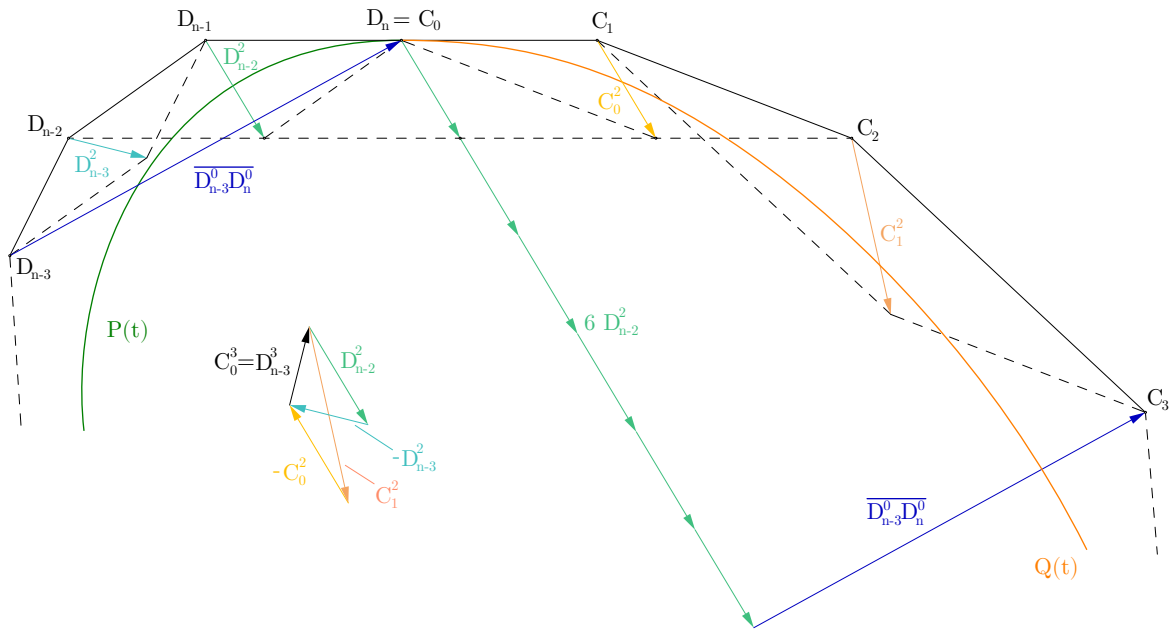
dosadíme podmínky pro spojitosti nižších stupňů (44), (46) a (49) a po úpravách dostáváme:

$$\mathbf{C}_3 = \frac{n_1!(n_2 - 3)!}{n_2!(n_1 - 3)!} \cdot \mathbf{D}_{n-3}^3 + 3 \frac{n_1(n_1 - 1)}{n_2(n_2 - 1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 3 \frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \quad \text{pro } n_2 \neq n_1$$

$$\mathbf{C}_3 = 8\mathbf{D}_n - 12\mathbf{D}_{n-1} + 6\mathbf{D}_{n-2} - \mathbf{D}_{n-3} \quad \text{pro } n_2 = n_1 \quad (51)$$

Geometricky to lze interpretovat různými způsoby, nejjednodušší je pravděpodobně následující, viz obr. 9:

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{D}_n^0 + 6\mathbf{D}_{n-2}^2 + (\mathbf{D}_n^0 - \mathbf{D}_{n-3}^0) \quad \text{pro } n_2 = n_1 \quad (52)$$



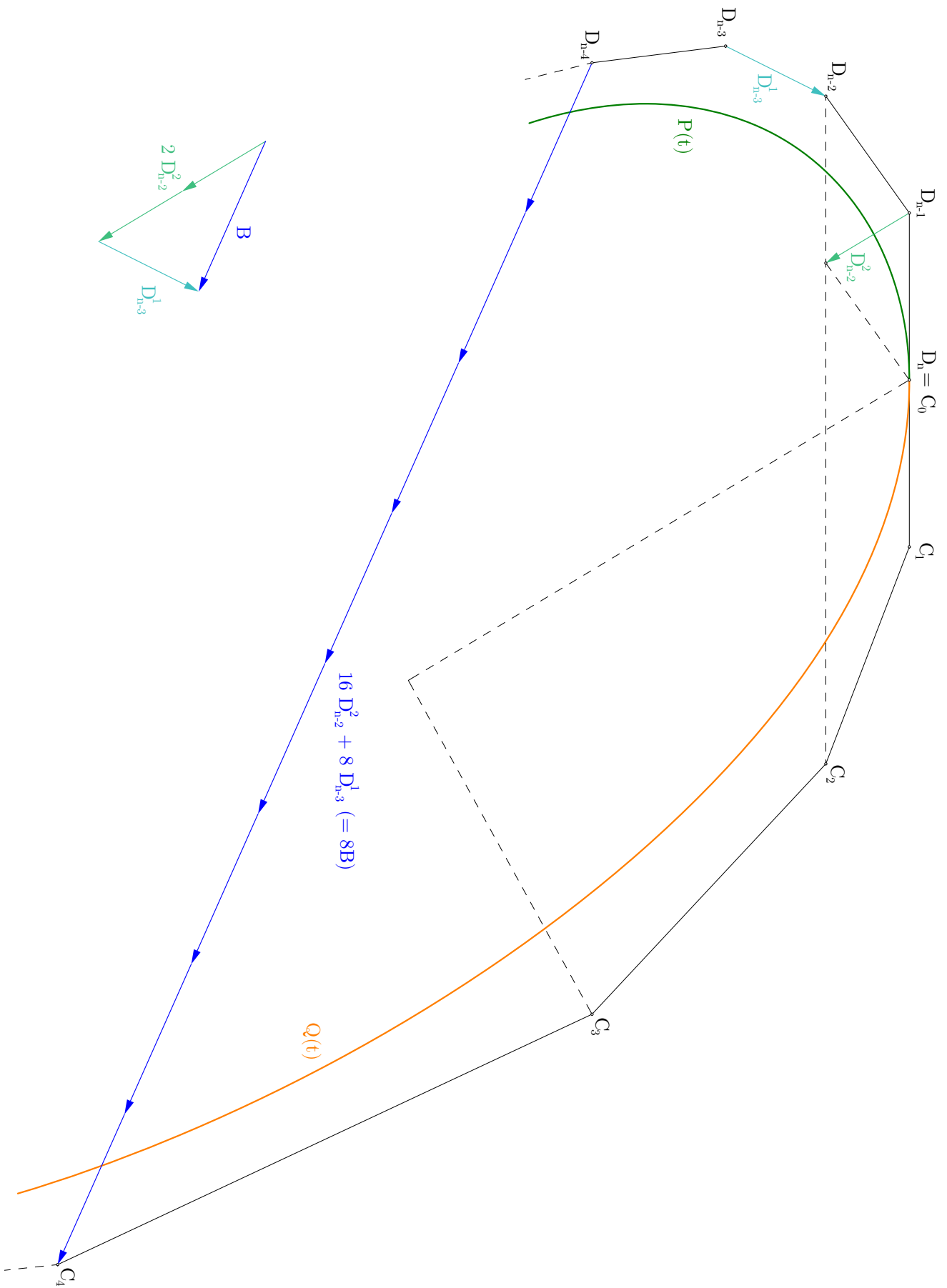
Obr. 9: C^3 spojitě řídicí polygony pro křivky stejného stupně – v diagramu vidíme důkaz rovnosti diferencí 3. stupně, které jsou získané jako rozdíl diferencí 2. stupně

Podmínku pro C^4 spojitost vyjádříme z rovnosti 4. derivací:

$$\mathbf{Q}^{(4)}(0) = \mathbf{P}^{(4)}(1)$$

$$n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3) \cdot \mathbf{C}_0^4 = n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2)(n_1 - 3) \cdot \mathbf{D}_{n-4}^4$$

$$\frac{n_2!}{(n_2 - 4)!} \cdot (\mathbf{C}_4 - 4\mathbf{C}_3 + 6\mathbf{C}_2 - 4\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) = \frac{n_1!}{(n_1 - 4)!} \cdot (\mathbf{D}_{n-4} - 4\mathbf{D}_{n-3} + 6\mathbf{D}_{n-2} - 4\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{D}_n) \quad (53)$$



Obr. 10: C^4 spojité řídicí polygony pro křivky stejného stupně, čárkovaně jsou vyznačené podmínky pro nižší stupně spojitosti, všimněme si, že vyšší stupně parametrické spojitosti výrazně omezují možnosti, jak křivku modeovat a nešikově ji roztahují

po zahrnutí podmínek (44), (46), (49) a (51) pro C^0 až C^3 dostáváme pro $n_2 \neq n_1$:

$$\mathbf{C}_4 = \frac{n_1!(n_2-4)!}{n_2!(n_1-4)!} \cdot \mathbf{D}_{n-4}^4 + 4 \frac{n_1!(n_2-3)!}{n_2!(n_1-3)!} \cdot \mathbf{D}_{n-3}^3 + 6 \frac{n_1(n_1-1)}{n_2(n_2-1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 4 \frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \quad (54)$$

a pro $n_2 = n_1$ po úpravě dostáváme:

$$\mathbf{C}_4 = 16\mathbf{D}_n - 32\mathbf{D}_{n-1} + 24\mathbf{D}_{n-2} - 8\mathbf{D}_{n-3} + \mathbf{D}_{n-4} \quad (55)$$

zde bychom opět mohli najít mnoho geometrických interpretací, jako nejjednodušší se jeví následující, viz obr. 10:

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{D}_{n-4} + 16\mathbf{D}_{n-2}^2 + 8\mathbf{D}_{n-3}^1 \quad (56)$$

2.5 Geometrická spojitost

Uvažujme opět křivky $P(t)$ stupně n_1 a $Q(t)$ stupně n_2 jako v předchozí kapitole. Geometrická spojitost, jak je dnes vnímána, je narozdíl od parametrické založena na totožnosti geometrických invariantů obou křivek v bodě napojení. Upozorníme, že geometrická spojitost je dnes dobře a jednotně definovaná pouze do úrovně G^2 spojitosti. Pro spojitost G^3 a vyšší dnes neexistuje jednotná definice. [8] [9]

Spojitosť G^0 , neboli poziční spojitost, vyžaduje totožnost krajních bodů křivek (stejně jako parametrická spojitost C^0):

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{C}_0 \quad (57)$$

Spojitosť G^1 , neboli tečná spojitost, vyžaduje splnění G^0 a totožnost tečen obou křivek v bodě napojení. Směr tečny je určen jednotkovým vektorem první derivace křivky a nezávisí tedy na jeho velikosti. Tečnou spojitost tak můžeme vyjádřit jako rovnost normovaných vektorů prvních derivací:

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 &= \vec{t}_2 \\ \frac{\dot{\mathbf{P}}}{|\dot{\mathbf{P}}|} &= \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{|\dot{\mathbf{Q}}|} \end{aligned} \quad (58)$$

pro zjednodušení zaved' me konstantu q , která odpovídá poměru délek stran řídicích polygonů D_{n-1}^1 a C_0^1 :

$$q = \frac{|\mathbf{C}_0^1|}{|\mathbf{D}_{n-1}^1|} = \frac{|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0|}{|\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}|} = \frac{n_1}{n_2} \frac{|\dot{\mathbf{Q}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|} \quad (59)$$

a podmínku pro G^1 spojitost vyjádříme jako:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{|\dot{\mathbf{Q}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|} \cdot \dot{\mathbf{P}} = q \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \dot{\mathbf{P}} \quad (60)$$

a vyjádříme jako závislost na řídicích bodech:

$$n_2 \cdot \mathbf{C}_0^1 = q \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot n_1 \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1$$

$$\mathbf{C}_0^1 = q \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 \quad (61)$$

kde q je nezávislá proměnná, která závisí na vzdálenosti voleného bodu C_1^0 od bodu napojení. Vidíme, že aby byly křivky G^1 spojité, musí bod C_1^0 ležet na tečně křivky $P(t)$ v koncovém bodě, nezáleží však na jeho vzdálenosti. Pokud zvolíme bod C_1^0 tak, že bude ležet na polopřímce $D_n^0 D_{n-1}^0$, vznikne v bodě napojení hrot, což však G^1 spojitost technicky umožňuje. V praxi bývá v případě G^1 spojitosti požadován stejný směr tečných vektorů a tento případ by byl považován za G^0 .

Spojitost G^2 , neboli spojitost křivosti, vyžaduje splnění G^0 , G^1 a rovnost poloměru křivosti obou křivek v místě napojení. Výhodnější je využít ekvivalentní podmínku pro rovnost prvních křivostí 1k , které vypočteme ze vztahu: [10]

$${}^1k_1 = \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} \quad {}^1k_2 = \frac{|\dot{\mathbf{Q}} \times \ddot{\mathbf{Q}}|}{|\dot{\mathbf{Q}}|^3} \quad (62)$$

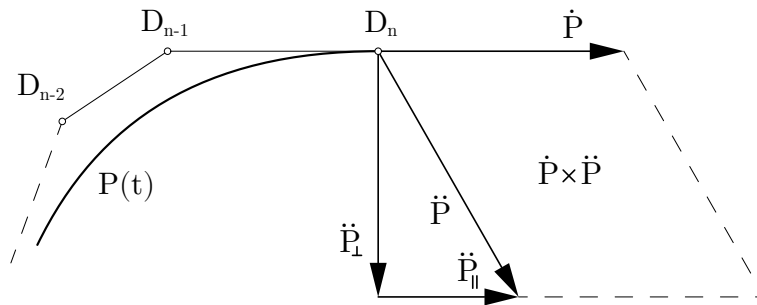
Podmínka rovnosti křivostí v bodě napojení pak má tvar:

$${}^1k_1(1) = {}^1k_2(0)$$

$$\frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{|\dot{\mathbf{Q}} \times \ddot{\mathbf{Q}}|}{|\dot{\mathbf{Q}}|^3} \quad (63)$$

Zde využijeme faktu, že velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníku, jehož strany odpovídají vektorům první a druhé derivace křivky a můžeme ho tedy vyjádřit jako součin normy vektoru první derivace a normy kolmé složky vektoru druhé derivace, viz obr. 11.

$$|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}| = |\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}| \quad |\dot{\mathbf{Q}} \times \ddot{\mathbf{Q}}| = |\dot{\mathbf{Q}}| \cdot |\ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}| \quad (64)$$



Obr. 11: Grafický význam vektorového součinu

po dosazení do (63) dostaneme:

$$\frac{|\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{|\dot{\mathbf{Q}}| \cdot |\ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}|}{|\dot{\mathbf{Q}}|^3} \quad (65)$$

a po úpravě dostáváme:

$$|\ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}| = \frac{|\dot{\mathbf{Q}}|^2}{|\dot{\mathbf{P}}|^2} \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}| = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 q^2 \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|$$

$$n_2(n_2 - 1) \cdot |\mathbf{C}_{0\perp}^2| = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 q^2 \cdot n_1(n_1 - 1) \cdot |\mathbf{D}_{n-2\perp}^2| \quad (66)$$

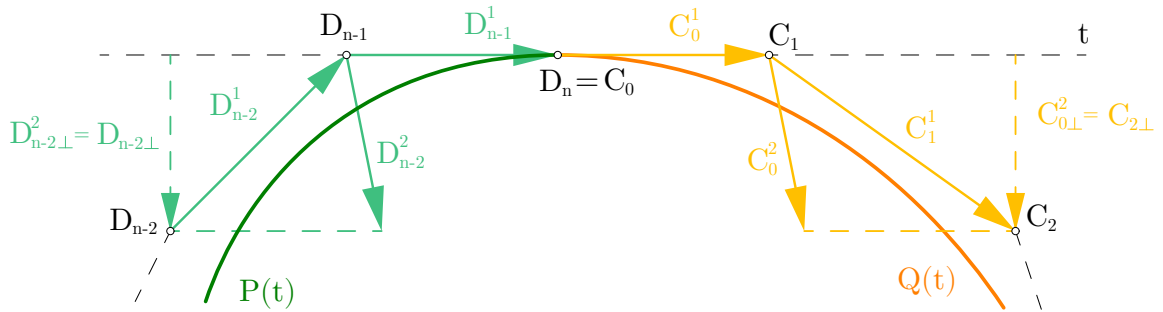
Zde můžeme kolmé složky diferencí 2. stupně nahradit kolmými složkami třetích bodů od bodu napojení, protože první dva musí pro zachování G^1 ležet na tečně a jejich kolmé složky jsou nulové, viz obr. 12:

$$\mathbf{C}_{0\perp}^2 = \mathbf{C}_{2\perp}^0 = \mathbf{C}_{2\perp} \quad \mathbf{D}_{n-2\perp}^2 = \mathbf{D}_{n-2\perp}^0 = \mathbf{D}_{n-2\perp} \quad (67)$$

po dosazení a úpravě dostáváme podmínku pro G^2 spojitost:

$$|\mathbf{C}_{2\perp}| = \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot q^2 \cdot |\mathbf{D}_{n-2\perp}| \quad \text{pro } n_2 \neq n_1$$

$$|\mathbf{C}_{2\perp}| = q^2 \cdot |\mathbf{D}_{n-2\perp}| \quad \text{pro } n_2 = n_1 \quad (68)$$

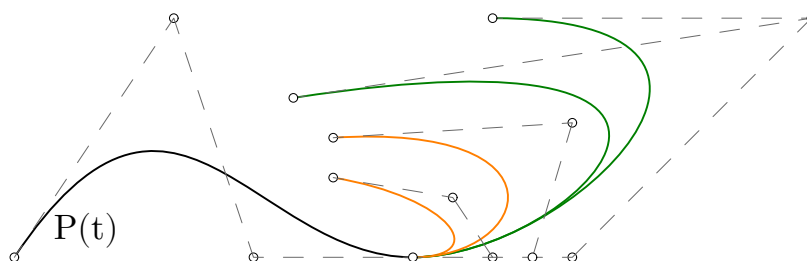


Obr. 12: Grafické znázornění rovností $\mathbf{D}_{n-2\perp} = \mathbf{D}_{n-2\perp}^2$ a $\mathbf{C}_{0\perp} = \mathbf{C}_{0\perp}^2$

všimněme si, že bod C_0^2 musí pro splnění G^2 spojitosti ležet (kdekoli) na přímce rovnoběžné s tečnou, jejíž vzdálenost závisí na vzdálenosti bodu D_{n-2}^2 od tečny, poměru délek stran řídicích polygonů sousedících s bodem napojení a pro různé stupně křivek i na nich. Geometrická spojitost nám tak dává oproti parametrické určitou volnost při modeování navazující křivky, což je samozřejmě žádoucí a výhodné. Spojitost G^2 technicky nevyžaduje totožnost oskulačních rovin a výsledná křivka tak může být v bodě napojení zkroucená, jednají se o prostorovou křivku. V praxi bývá G^2 spojitost používána v kombinaci s podmínkou totožnosti normál i jejich směrů a tento případ by byl považován za G^1 .

3 Praktická část

V této kapitole se budeme zabývat různými způsoby, jak docílit geometrické spojitosti G^0 až G^4 . U vyšších stupňů, které dnes nejsou jednotně definovány, se pokusíme tuto mezeru vyplnit a nabídnout řešení, které by na tuto otázku kladlo jednoznačnou a univerzální odpověď. U jednotlivých přístupů budeme zkoumat, jaké podmínky pro polohu řídicích bodů dostaneme a zda se dají jednoduše a efektivně algoritmicky implementovat. Podmínky zde budeme vyjadřovat pro Bézierovy křivky, z nichž však lze velmi snadno následně vyjádřit podmínky pro polohu řídicích bodů splinu.



Obr. 13: Porovnání C^2 (zeleně) a G^2 (oranžově) napojených křivek 3. stupně na křivku $P(t)$ – vidíme, že geometrická spojitost je flexibilnější. Parametrická spojitost umožňuje v tomto případě volit pouze polohu posledního (čtvrtého) řídicího bodu, zatímco u geometrické spojitosti získáváme další dva stupně volnosti pro umístění druhého a třetího řídicího bodu a pevný je pouze první – viz následující kapitoly.

3.1 Přístup změny parametrizace

Tento přístup se opírá o techniku přemapování parametru na jinou délku křivky a napojení křivek podle podmínek parametrické spojitosti. Vyjdeme zde ze skutečnosti, že konstrukcí De Casteljaou algoritmu pro libovolnou hodnotu parametru t dostaneme novou novou křivku, viz (10). Máme zde 2 ekvivalentní možnosti, kdy můžeme buď nejprve přemapovat parametr na výchozí křivce $P(t)$ a následně napojit křivku $Q(t)$ podle podmínek pro parametrickou spojitost, nebo napojit křivku $Q(t)$ na výchozí křivku a poté přemapovat parametr na ní. Druhá možnost se jeví výhodnější, protože v případě nevyhovujícího tvaru napojované křivky stačí znovu provést pouze krok přemapování parametru na základě znalosti již spočtených řídicích bodů parametricky spojitě napojené křivky $Q(t)$.

Algoritmus tohoto postupu by vypadal následovně:

- Jako vstupní hodnoty budou figurovat řídicí body křivky $P(t)$ – D_0, \dots, D_n , ze kterých spočteme diference D_i^r , které budou sloužit jako vstup pro další krok
- Na základě znalosti těchto bodů a diferencí určíme polohu pomocných bodů, které označíme písmeny V jako u De Casteljaou algoritmu a které odpovídají řídicím bodům parametricky spojitě napojené křivky $Q(t)$. K tomu využijeme vztahy (44), (46), (49) a (51). Pro požadovaný stupeň spojitosti musíme splnit i podmínky pro všechny nižší stupně. Pokud bychom použili body V_i jako řídicí body C_i křivky $Q(t)$, dostaneme parametricky spojitě napojenou křivku.

$$\begin{aligned}
G^0 : \quad \mathbf{V}_0 &= \mathbf{D}_n \\
G^1 : \quad \mathbf{V}_1 &= \frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \\
G^2 : \quad \mathbf{V}_2 &= \frac{n_1(n_1-1)}{n_2(n_2-1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 2\frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \\
G^3 : \quad \mathbf{V}_3 &= \frac{n_1!(n_2-3)!}{n_2!(n_1-3)!} \cdot \mathbf{D}_{n-3}^3 + 3\frac{n_1(n_1-1)}{n_2(n_2-1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 3\frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0 \\
G^4 : \quad \mathbf{V}_4 &= \frac{n_1!(n_2-4)!}{n_2!(n_1-4)!} \cdot \mathbf{D}_{n-4}^4 + 4\frac{n_1!(n_2-3)!}{n_2!(n_1-3)!} \cdot \mathbf{D}_{n-3}^3 + \\
&\quad + 6\frac{n_1(n_1-1)}{n_2(n_2-1)} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + 4\frac{n_1}{n_2} \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{D}_n^0
\end{aligned}$$

- Body V_i budou sloužit jako vstup pro De Casteljau algoritmus. Zde zvolíme hodnotu parametru t , pro kterou chceme algoritmus provést. Pokud zvolíme t z intervalu $(0, 1)$, výsledná křivka bude kratší, než parametricky spojitá křivka určená body V_i , při dodefinování Bernsteinových polynomů i mimo interval parametrizace $\langle 0, 1 \rangle$ bychom mohli zvolit i hodnotu parametru > 1 , kdy dostaneme naopak delší křivku. Na základě zvolené hodnoty t provedeme De Casteljau algoritmus, viz (9). Poloha řídicích bodů pak odpovídá pomocným bodům, získaným pomocí De Casteljau algoritmu, viz (10):

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{V}_0^0 \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0^1 \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{V}_0^2 \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{V}_0^3 \quad \mathbf{C}_4 = \mathbf{V}_0^4 \quad (69)$$

Pro požadovaný stupeň geometrické spojitosti G^m je nutno použít prvních $m + 1$ podmínek. V praxi se ukazuje, že častěji je potřeba křivku korigovat spíše zkrácením.

3.2 Přístup rovnosti 2. křivosti

Jak bylo popsáno v kapitole 2.5, na geometrickou spojitost je nahlíženo jako na totožnost různých geometrických invariantů a v této kapitole zkusíme tuto myšlenku extrapolovat. Logicky se zde pro vyjádření podmínky pro G^3 spojitost nabízí rovnost 2. křivosti (také označována jako torze) obou křivek v bodě napojení. Druhá křivost je definována [11]:

$${}^2k = \frac{\det(\dot{\mathbf{P}}, \ddot{\mathbf{P}}, \ddot{\mathbf{P}})}{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|^2} \quad (70)$$

Na základě skutečnosti, že determinant tří vektorů je roven objemu rovnoběžnostěnu, který vytyčují, a vektorový součin dvou vektorů ploše rovnoběžníku, jehož dvě strany jsou těmito vektory definovány, vztah pro druhou křivost můžeme vyjádřit

$${}^2k = \frac{|\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\times}|}{(|\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|)^2} = \frac{|\ddot{\mathbf{P}}_{\times}|}{|\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|} \quad (71)$$

kde symbol \perp značí složku kolmou k vektoru první derivace (průmět do normály) a symbol \times složku kolmou k rovině první a druhé derivace (průmět do binormály). Potenciální podmínku pro G^3 pak

vyjádříme jako rovnost 2. křivostí obou křivek v bodě napojení:

$$\begin{aligned}
{}^2k_1(1) &= {}^2k_2(0) \\
\frac{|\ddot{\mathbf{P}}_{\times}|}{|\dot{\mathbf{P}}| \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|} &= \frac{|\ddot{\mathbf{Q}}_{\times}|}{|\dot{\mathbf{Q}}| \cdot |\ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}|} \\
|\ddot{\mathbf{Q}}_{\times}| &= \frac{|\dot{\mathbf{Q}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|} \cdot \frac{|\ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}|}{|\ddot{\mathbf{P}}_{\perp}|} \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\times}|
\end{aligned} \tag{72}$$

Zároveň musíme vzít v úvahu podmínky (60) a (66) pro G^1 a G^2 spojitost a využijeme definici (59) pro koeficient q . Po implementaci získáváme

$$\begin{aligned}
|\ddot{\mathbf{Q}}_{\times}| &= \frac{|\dot{\mathbf{Q}}|^3}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\times}| = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 q^3 \cdot |\ddot{\mathbf{P}}_{\times}| \\
n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)|\mathbf{C}_{0\times}^3| &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 q^3 \cdot n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2)|\mathbf{D}_{n-3\times}^3| \\
|\mathbf{C}_{0\times}^3| &= \frac{n_2^2(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{n_1^2(n_2 - 1)(n_2 - 2)} \cdot q^3 \cdot |\mathbf{D}_{n-3\times}^3|
\end{aligned} \tag{73}$$

Zde vezměme v úvahu, že hodnota třetí diference ve směru kolmém na oskulační rovinu (rovinu danou vektory první a druhé derivace) odpovídá vzdálenosti čtvrtého řídicího bodu od této roviny, protože pro splnění G^2 spojitosti musí ležet první tři body každé křivky ve společné oskulační rovině definované v bodě napojení a jejich binormálové složky jsou nulové:

$$|\mathbf{C}_{0\times}^3| = |\mathbf{C}_{3\times}^0| = |\mathbf{C}_{3\times}| \qquad |\mathbf{D}_{n-3\times}^3| = |\mathbf{D}_{n-3\times}^0| = |\mathbf{D}_{n-3\times}| \tag{74}$$

Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{C}_{3\times}| &= \frac{n_2^2(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{n_1^2(n_2 - 1)(n_2 - 2)} \cdot q^3 \cdot |\mathbf{D}_{n-3\times}| && \text{pro } n_1 \neq n_2 \\
|\mathbf{C}_{3\times}| &= q^3 \cdot |\mathbf{D}_{n-3\times}| && \text{pro } n_1 = n_2
\end{aligned} \tag{75}$$

Vidíme, že pro splnění rovnosti 2. křivosti musí bod C_3 ležet v rovině rovnoběžné s oskulační rovinou definovanou v bodě napojení, jejíž vzdálenost je závislá na třetí mocnině poměru délek nejbližších ramen řídicích polygonů k bodu napojení. Nezávislá je však žádnou podmínku pro vzdálenost bodu C_3 od bodu napojení v tečném ani normálovém směru.

3.3 Intermezzo

Tato kapitola je rychlým shrnutím vztahů, které budou používány v následujících kapitolách a bude na ně odkazováno.

3.3.1 Výpočet složek vektorových funkcí

Uvažujme přirozený souřadnicový systém a značení (4). Jednotlivé složky vektorových funkcí křivek dopočítáme velmi snadno pomocí (42):

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= n_1 \cdot D_{n-1||}^1 & \dot{u}_2 &= n_2 \cdot C_{0||}^1 \\
 \ddot{u}_1 &= n_1(n_1 - 1) \cdot D_{n-2||}^2 & \ddot{u}_2 &= n_2(n_2 - 1) \cdot C_{0||}^2 \\
 \dddot{u}_1 &= n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) \cdot D_{n-3||}^3 & \dddot{u}_2 &= n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2) \cdot C_{0||}^3 \\
 \\
 \dot{v}_1 &= n_1 \cdot D_{n-1\perp}^1 & \dot{v}_2 &= n_2 \cdot C_{0\perp}^1 \\
 \ddot{v}_1 &= n_1(n_1 - 1) \cdot D_{n-2\perp}^2 & \ddot{v}_2 &= n_2(n_2 - 1) \cdot C_{0\perp}^2 \\
 \ddot{v}_1 &= n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) \cdot D_{n-3\perp}^3 & \ddot{v}_2 &= n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2) \cdot C_{0\perp}^3 \\
 \\
 \dot{w}_1 &= n_1 \cdot D_{n-1\times}^1 & \dot{w}_2 &= n_2 \cdot C_{0\times}^1 \\
 \ddot{w}_1 &= n_1(n_1 - 1) \cdot D_{n-2\times}^2 & \ddot{w}_2 &= n_2(n_2 - 1) \cdot C_{0\times}^2 \\
 \ddot{w}_1 &= n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) \cdot D_{n-3\times}^3 & \ddot{w}_2 &= n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2) \cdot C_{0\times}^3 \quad (76)
 \end{aligned}$$

Vyšší derivace vyjádříme analogicky. Zároveň na základě definice přirozeného souřadnicového systému v bodě napojení platí:

$$\dot{v}_1 = 0 \qquad \dot{w}_1 = 0 \qquad \ddot{w}_1 = 0 \qquad (77)$$

3.3.2 Transformace do přirozeného souřadnicového systému

Přirozený souřadnicový systém křivky je definován tečným, normálovým a binormálovým jednotkovým vektorem:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\mathbf{P}}}{|\dot{\mathbf{P}}|} \qquad \vec{b} = \frac{\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}}{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|} \qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \qquad (78)$$

Přirozený souřadnicový systém v této práci zavádíme v bodě napojení a transformaci mezi systémy $(0, x, y, z)$ a (D_n, u, v, w) tak můžeme vnímat jako posun o vzdálenost bodu napojení D_n od počátku a následný průmět do os (u, v, w) přirozeného souřadnicového systému. Algoritmicky lze transformaci velmi jednoduše provést ve dvou krocích:

- Posunutí vyjádříme prostým rozdílem radiusvektoru bodu D_n a radiusvektoru transformovaného bodu. Pokud transformujeme diference 1. a vyššího řádu, můžeme tento krok přeskočit, protože jsou vůči posunutí počátku souřadnicového systému invariantní.
- Získaný radiusvektor či diferenci promítneme do os u, v, w přirozeného souřadnicového systému. Tento krok lze snadno realizovat skalárním součinem s jednotkovými vektory těchto os:

$$\mathbf{D}_i^r = (D_{i||}^r, D_{i\perp}^r, D_{i\times}^r) = (\mathbf{D}_i^r \cdot \vec{t}, \mathbf{D}_i^r \cdot \vec{n}, \mathbf{D}_i^r \cdot \vec{b}) \quad \text{pro} \quad r \geq 1 \qquad (79)$$

3.3.3 Derivace vzhledem k obloukové souřadnici

Derivaci vzhledem k obloukové souřadnici vyjádříme operátorem $\frac{d}{ds}$. V přirozeném souřadnicovém systému platí

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2} = du \quad (80)$$

protože členy dv a dw musí být z definice přirozeného souřadnicového systému nulové. Derivaci vzhledem k obloukové souřadnici tak můžeme vyjádřit jako:

$$\frac{d}{ds} = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \quad (81)$$

3.4 Přístup derivace 1. křivosti

Téma spojitosti je obecně úzce spjato s derivacemi – čím vyšší stupeň spojitých derivací, tím hladší napojení. Vyjděme ze skutečnosti, že tečnu můžeme vnímat jako míru změny polohy bodu na křivce (neboli funkcí hodnoty parametrické funkce křivky) a křivost můžeme vnímat jako míru změny tečného vektoru. Zkusme tuto myšlenku extrapolovat a vyjádřit ukazatel změny pro křivost, což provedeme derivací křivosti vzhledem k obloukové souřadnici s . V této kapitole se budeme striktně pohybovat v přirozeném souřadnicovém systému křivek a využívat značení (4). Nejprve uvažujme rovinnou křivku a vyjádřeme křivost jako závislost na složkách derivací vektorových funkcí:

$$\begin{aligned} {}^1k &= \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{|(\dot{u}, \dot{v}, 0) \times (\ddot{u}, \ddot{v}, 0)|}{|(\dot{u}, \dot{v})|^3} = \frac{|(0, 0, \dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v})|}{(\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2})^3} \\ {}^1k &= \frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^3} \end{aligned} \quad (82)$$

Nyní vztah zderivujeme vzhledem k obloukové souřadnici, viz (81):

$$\begin{aligned} \frac{d({}^1k)}{ds} &= \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d({}^1k)}{dt} = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^3} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{(\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v})' \cdot \dot{u}^3 - (\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}) \cdot (\dot{u}^3)'}{(\dot{u}^3)^2} = \\ &= \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{(\dot{u}\ddot{v} + \ddot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\ddot{v}) \cdot \dot{u}^3 - (\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}) \cdot 3\dot{u}^2\ddot{u}}{\dot{u}^6} \end{aligned} \quad (83)$$

Zde vezměme v úvahu, že pro dodržení G^1 spojitosti musí platit, že $\dot{v} = 0$, protože dva nejbližší body k místu napojení musí ležet na tečně a jejich normálové souřadnice jsou nulové. Po úpravě získáme vztah pro derivaci křivosti rovinné křivky v bodě napojení:

$$\frac{d({}^1k)}{ds} = \frac{\dot{u}\ddot{v} - 3\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^4} = \frac{\ddot{v}}{\dot{u}^3} - \frac{3\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^4} \quad (84)$$

Potenciální podmínku pro G^3 spojitost vyjádříme jako rovnost derivací křivostí obou křivek v bodě napojení:

$$\begin{aligned} \frac{d({}^1k_2)}{ds} &= \frac{d({}^1k_1)}{ds} \\ \frac{\dot{u}_2 \ddot{v}_2 - 3\ddot{u}_2 \dot{v}_2}{\dot{u}_2^4} &= \frac{\dot{u}_1 \ddot{v}_1 - 3\ddot{u}_1 \dot{v}_1}{\dot{u}_1^4} \\ \ddot{v}_2 &= \left[\frac{\dot{u}_2^4}{\dot{u}_1^4} \cdot (\dot{u}_1 \ddot{v}_1 - 3\ddot{u}_1 \dot{v}_1) + 3\ddot{u}_2 \dot{v}_2 \right] \cdot \frac{1}{\dot{u}_2} \end{aligned} \quad (85)$$

Po úpravách získáme s využitím koeficientu q viz (59) vztah:

$$\ddot{v}_2 = q^3 \cdot \frac{n_2^3}{n_1^3} \cdot \left(\ddot{v}_1 - \frac{3\ddot{u}_1 \dot{v}_1}{\dot{u}_1} \right) + \frac{3\ddot{u}_2 \dot{v}_2}{\dot{u}_2} \quad (86)$$

Odtud bychom již pomocí (76) získali podmínky pro polohu řídicích bodů, viz následující kapitola. Všimněme si, že zde získáváme podmínku pro hodnotu třetí derivace, neboli polohu čtvrtého řídicího bodu C_3 v normálovém směru, nezískáváme žádnou podmínku pro polohu ve směru tečném, což je konzistentní s podmínkami pro splnění G^1 a G^2 spojitosti. Pokud bychom uvažovali prostorovou křivku, vyjádření křivosti pomocí složek vektorových funkcí se velmi zkomplikuje:

$${}^1k = \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{|(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) \times (\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w})|}{|(\dot{u}, \dot{v})|^3} = \frac{\sqrt{(\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v})^2 + (\dot{u}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{u})^2 + (\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u})^2}}{(\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2})^3} \quad (87)$$

Částečně to můžeme obejít tím, že budeme požadovat rovnost vektorového součinu v čitateli po složkách. Pokud bychom vyjádřili rovnost druhých složek, můžeme substituovat $v = w$ v rovnici (86), protože struktura a úpravy jsou totožné:

$$\ddot{w}_2 = q^3 \cdot \frac{n_2^3}{n_1^3} \cdot \left(\ddot{w}_1 - \frac{3\ddot{u}_1 \dot{w}_1}{\dot{u}_1} \right) + \frac{3\ddot{u}_2 \dot{w}_2}{\dot{u}_2} \quad (88)$$

Zde vezmeme v úvahu, že na základě definice přirozeného souřadnicového systému platí $\ddot{w} = 0$ a po úpravě dostaneme:

$$\ddot{w}_2 = q^3 \cdot \frac{n_2^3}{n_1^3} \cdot \ddot{w}_1 \quad (89)$$

Vidíme, že zde dostáváme stejnou podmínku, jako (75) v předchozí kapitole. Zkusme vyjádřit i rovnost prvních složek vektorového součinu, které zderivujeme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v}}{\dot{u}^3} \right) &= \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v}}{\dot{u}^3} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{(\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v})' \cdot \dot{u}^3 - (\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v}) \cdot (\dot{u}^3)'}{\dot{u}^6} = \\ &= \frac{(\dot{v}\ddot{w} + \dot{v}\ddot{w}' - \dot{w}\ddot{v}' - \dot{w}\ddot{v}) \cdot \dot{u}^3 - (\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v}) \cdot 3\dot{u}^2 \dot{u}}{\dot{u}^7} = \\ &= \frac{(\dot{v}\ddot{w} - \dot{w}\ddot{v}) \cdot \dot{u} - (\dot{v}\ddot{w}' - \dot{w}\ddot{v}') \cdot 3\dot{u}}{\dot{u}^5} \end{aligned} \quad (90)$$

Po aplikaci (77) zjistíme, že výsledný výraz je nulový. Pokud bychom chtěli vyjádřit podmínku pro rovnost derivací prvních složek vektorového součinu, bude splněna vždy, dokud budou splněny podmínky G^2 a první dva řídicí body budou ležet na tečně a první tři v oskulační rovině a bude tak platit i předpoklad (77).

3.5 Přístup derivace parametrické funkce

Na Bézierovy křivky lze pohlížet jako na parametrické funkce jedné proměnné. Pro dosažení určité kvality hladkosti (která souvisí se stupněm spojitosti) dvou parametrických funkcí musí mít tyto funkce odpovídající počet spojitých derivací. Nelogičtější se zde jeví pohybovat se v přirozeném souřadnicovém systému křivky a derivace vyjadřovat vůči tečné ose u . Tato volba souřadnicového systému navíc zajistí, že derivace výchozí křivky budou vždy definované. Podmínku pro G^m spojitost pak obecně vyjádříme

$$\frac{d^r(\mathbf{P})}{d(u_1)^r} = \frac{d^r(\mathbf{Q})}{d(u_2)^r} \quad \text{pro} \quad r = 0, \dots, m \quad (91)$$

Všimněme si, že podmínka je stejná, jako kdybychom vyjadřovali derivaci vůči obloukové souřadnici v přirozeném souřadnicovém systému v místě napojení. Podmínku pro G^0 spojitost vyjádříme jako rovnost nultých derivací, neboli funkčních hodnot v bodě napojení a získáme opět podmínku pro poziční spojitost:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1) &= \mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{D}_n &= \mathbf{C}_0 \end{aligned} \quad (92)$$

Podmínku pro G^1 spojitost vyjádříme jako spojitost prvních derivací vzhledem k tečné souřadnici:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{P})}{d(u_1)} &= \frac{d(\mathbf{Q})}{d(u_2)} \\ \frac{d(u_1, v_1, w_1)}{d(u_1)} &= \frac{d(u_2, v_2, w_2)}{d(u_2)} \end{aligned} \quad (93)$$

Tuto rovnost nyní vyjádříme po složkách. Povšimněme si, že tento postup je ekvivalentní tomu, kdybychom vyjadřovali spojitost průmětů obou funkcí (křivek) do rovin vw (normálová, směr u), uw (rektifikační, směr v) a uv (oskulační, směr w):

$$u : \quad \frac{du_1}{du_1} = \frac{du_2}{du_2} \quad v : \quad \frac{dv_1}{du_1} = \frac{dv_2}{du_2} \quad w : \quad \frac{dw_1}{du_1} = \frac{dw_2}{du_2} \quad (94)$$

Vidíme, že podmínka v rovině vw bude splněna vždy. Podmínky v rovinách uw a uv upravíme, obdobně jako v případě derivace vůči obloukové souřadnici, viz (81), zohledníme 77 a dostáváme:

$$\begin{aligned} u : \quad \frac{\dot{u}_1}{\dot{u}_1} &= \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_2} & v : \quad \frac{\dot{v}_1}{\dot{u}_1} &= \frac{\dot{v}_2}{\dot{u}_2} & w : \quad \frac{\dot{w}_1}{\dot{u}_1} &= \frac{\dot{w}_2}{\dot{u}_2} \\ &1 = 1 & \dot{v}_2 &= \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} \cdot \dot{v}_1 & \dot{w}_2 &= \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} \cdot \dot{w}_1 \\ \dot{u}_2 &\in \mathbb{R}^+ & \dot{v}_2 &= 0 & \dot{w}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Vidíme, že po úpravě dostáváme podmínky pro jednotlivé hodnoty derivací složek vektorové funkce $\mathbf{Q}(t)$, ze kterých již lze vyjádřit podmínky pro jednotlivé souřadnice řídicích bodů v přirozeném souřadnicovém systému a ty pak transformovat do systému $(0, x, y, z)$. Všimněme si zároveň, že podmínka nulových derivací ve směru v a w znamená, že bod C_1 musí ležet na tečně a podmínka tak je konzistentní s dnes známou interpretací spojitosti G^1 .

Zároveň vidíme, že přesná poloha bodu C_1 na společné tečně je libovolná, musí však ležet na opačné polopřímce (dané tečnou a bodem napojení D_n), než bod D_{n-1} , jinak by v bodě napojení nebyl přirozený souřadnicový systém křivky $Q(t)$ totožný se systémem křivky $P(t)$ a výše provedené úpravy by byly neplatné. Volbou polohy bodu C_1 prakticky zvolíme hodnotu koeficientu q .

Po dosazení do (95) a úpravách dostáváme podmínky pro složky diference \mathbf{C}_0^1 , kde platí $\mathbf{C}_0^1 = \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_0^0$ a zároveň z definice souřadnicového systému platí $\mathbf{C}_0^0 = \vec{0}$. Můžeme tedy psát přímo podmínky pro polohu bodu C_1 , protože složky jeho radiusvektoru jsou (v zavedeném souřadnicovém systému) totožné se složkami diference \mathbf{C}_0^1 :

$$C_{1\parallel} = C_{0\parallel}^1 \in \mathbb{R}^+ \quad C_{1\perp} = C_{0\perp}^1 = 0 \quad C_{1\times} = C_{0\times}^1 = 0 \quad (96)$$

Podmínku pro G^2 vyjádříme jako rovnost druhých derivací složek parametrických funkcí vůči společné ose u :

$$\begin{aligned} u : \quad & \frac{d^2(u)}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{u}}{\dot{u}} \right) = \frac{d}{du}(1) = 0 \\ v : \quad & \frac{d^2(v)}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^2} = \frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^3} \\ w : \quad & \frac{d^2(w)}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{w}}{\dot{u}} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{w}}{\dot{u}} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \frac{\dot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w}}{\dot{u}^2} = \frac{\dot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w}}{\dot{u}^3} \end{aligned} \quad (97)$$

Nyní opět po složkách sestavíme podmínky pro G^2 spojitost:

$$\frac{d^2(u_1)}{du_1^2} = \frac{d^2(u_2)}{du_2^2} \quad \frac{d^2(v_1)}{du_1^2} = \frac{d^2(v_2)}{du_2^2} \quad \frac{d^2(w_1)}{du_1^2} = \frac{d^2(w_2)}{du_2^2} \quad (98)$$

Pro složku u dostáváme triviální podmínku $0 = 0$ a pro složky v a w dostáváme:

$$v : \quad \frac{\dot{u}_1\ddot{v}_1 - \ddot{u}_1\dot{v}_1}{\dot{u}_1^3} = \frac{\dot{u}_2\ddot{v}_2 - \ddot{u}_2\dot{v}_2}{\dot{u}_2^3} \quad \frac{\dot{u}_2\ddot{w}_2 - \ddot{u}_2\dot{w}_2}{\dot{u}_2^3} = \frac{\dot{u}_2\ddot{w}_2 - \ddot{u}_2\dot{w}_2}{\dot{u}_2^3} \quad (99)$$

Výraz zjednodušíme s využitím skutečnosti, že pro výchozí křivku musí platit (77) a pro napojovanou křivku musí platit podmínka pro G^1 (95). Po úpravě získáme podmínky pro druhé derivace složek vektorové funkce $\mathbf{Q}(t)$:

$$u : \quad \ddot{u}_2 \in \mathbb{R} \quad v : \quad \ddot{v}_2 = \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \cdot \ddot{v}_1 \quad \ddot{w}_2 = 0 \quad (100)$$

Odtud můžeme vyjádřit podmínky pro složky diference \mathbf{C}_0^2 a následně pro polohu řídicího bodu C_2 .

Podmínky pro složky v tečném a normálovém směru vyjádříme snadno:

$$C_{0\parallel}^2 = C_{2\parallel} \in \mathbb{R} \qquad C_{2\times} = C_{0\times}^2 = 0 \qquad (101)$$

a podmínku pro složku v normálovém směru vyjádříme s využitím (76):

$$\begin{aligned} n_2(n_2 - 1) \cdot C_{0\perp}^2 &= \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot q^2 \cdot n_1(n_1 - 1) \cdot D_{n-2\perp}^2 \\ C_{2\perp} - 2C_{1\perp} + C_{0\perp} &= \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot q^2 \cdot (D_{n-2\perp} - 2D_{n-1\perp} + D_{n\perp}) \\ C_{2\perp} &= \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot q^2 \cdot D_{n-2\perp} \end{aligned} \qquad (102)$$

Vidíme, že poloha bodu C_2 v binormálovém směru musí být nulová, neboli musí ležet v oskulační rovině definované v bodě napojení, normálová složka je dána polohou bodů C_0 , C_1 , D_n , D_{n-1} a normálovou složkou bodu D_{n-2} a poloha v tečném směru může být libovolná, aniž by to ovlivnilo G^2 spojitost. To opět odpovídá současnému chápání G^2 spojitosti.

Nyní zkusme analogicky vyjádřit podmínky pro G^3 spojitost derivací (97):

$$\begin{aligned} u : \quad \frac{d^3(u)}{du^3} &= \frac{d}{du}(0) = 0 \\ v : \quad \frac{d^3(v)}{du^3} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^3} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^3} \right) = \\ &= \frac{1}{\dot{u}} \frac{(\dot{u}\ddot{v} + \ddot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v} - \ddot{u}\dot{v})\dot{u}^3 - (\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v})3\dot{u}^2\ddot{u}}{\dot{u}^6} = \\ &= \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{v} + 3\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^4} + \frac{3\dot{u}^2\ddot{v}}{\dot{u}^5} \right) \\ w : \quad \frac{d^3(w)}{du^3} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w}}{\dot{u}^3} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w}}{\dot{u}^3} \right) = \\ &= \frac{1}{\dot{u}} \frac{(\dot{u}\ddot{w} + \ddot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w} - \ddot{u}\dot{w})\dot{u}^3 - (\dot{u}\ddot{w} - \ddot{u}\dot{w})3\dot{u}^2\ddot{u}}{\dot{u}^6} \\ &= \left(\frac{\ddot{w}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{w} + 3\ddot{u}\ddot{w}}{\dot{u}^4} + \frac{3\dot{u}^2\ddot{w}}{\dot{u}^5} \right) \end{aligned} \qquad (103)$$

po implementaci (77) a úpravě získáváme:

$$\begin{aligned} \frac{d^3(v)}{du^3} &= \frac{\dot{u}\ddot{v} - 3\ddot{v}\dot{u}}{\dot{u}^4} = \frac{\ddot{v}}{\dot{u}^3} - \frac{3\ddot{v}\dot{u}}{\dot{u}^4} \\ \frac{d^3(w)}{du^3} &= \frac{\ddot{w}}{\dot{u}^3} \end{aligned} \qquad (104)$$

Nyní můžeme po složkách vyjádřit podmínku pro G^3 spojitost jako rovnost třetích derivací:

$$\frac{d^3(u_1)}{du_1^3} = \frac{d^3(u_2)}{du_2^3} \quad \frac{d^3(v_1)}{dv_1^3} = \frac{d^3(v_2)}{dv_2^3} \quad \frac{d^3(w_1)}{dw_1^3} = \frac{d^3(w_2)}{dw_2^3} \quad (105)$$

Podmínka pro složky u je opět triviální a pro složky v a w získáváme:

$$\begin{aligned} v : \quad \frac{\dot{u}_1 \ddot{v}_1 - 3\dot{v}_1 \ddot{u}_1}{\dot{u}_1^4} &= \frac{\dot{u}_2 \ddot{v}_2 - 3\dot{v}_2 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2^4} \\ \ddot{v}_2 &= \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \cdot \ddot{v}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1^4} \cdot 3\dot{v}_1 \ddot{u}_1 + \frac{3\dot{v}_2 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2} \\ w : \quad \frac{\ddot{w}_1}{\dot{u}_1^3} &= \frac{\ddot{w}_2}{\dot{u}_2^3} \\ \ddot{w}_2 &= \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{w}_1 \end{aligned} \quad (106)$$

Odtud již můžeme stanovit podmínky pro složky diference C_0^3 , kdy za \ddot{v}_2 a $C_{2\perp}$ substituujeme podmínky (100) a (102) pro G^2 :

– složka v :

$$\begin{aligned} \ddot{v}_2 &= \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \cdot \ddot{v}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1^4} \cdot 3\dot{v}_1 \ddot{u}_1 + \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \cdot \frac{3\dot{v}_1 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2} \\ \ddot{v}_2 &= \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \cdot \ddot{v}_1 - \frac{3\dot{v}_1}{\dot{u}_1} \left(\frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \cdot \ddot{u}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} \cdot \ddot{u}_2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{0\perp}^3 &= q^3 \frac{n_2^2(n_1-1)(n_1-2)}{n_1^2(n_2-1)(n_2-2)} \cdot D_{n-3\perp}^3 - \frac{3n_2(n_1-1)D_{n-2\perp}^2}{n_1(n_2-2)D_{n-1\parallel}^1} \left(q^3 \frac{n_2(n_1-1)}{n_1(n_2-1)} \cdot D_{n-2\parallel}^2 - q \cdot C_{0\parallel}^2 \right) \\ C_{3\perp} &= C_{0\perp}^3 + 3C_{2\perp} = C_{0\perp}^3 + 3 \frac{n_2(n_1-1)}{n_1(n_2-1)} \cdot q^2 \cdot D_{n-2\perp} \end{aligned} \quad (107)$$

– složka w :

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 &= \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{w}_1 \\ C_{0\times}^3 &= q^3 \frac{n_2^2(n_1-1)(n_1-2)}{n_1^2(n_2-1)(n_2-2)} \cdot D_{n-3\times}^3 \\ C_{3\times} &= q^3 \frac{n_2^2(n_1-1)(n_1-2)}{n_1^2(n_2-1)(n_2-2)} \cdot D_{n-3\times} \end{aligned} \quad (108)$$

Tečná složka bodu C_3 může být pro zachování G^3 opět libovolná, pro normálovou složku získáváme vztah, kde figuruje poměr prvních stran řídících polygonů (neboli poloha D_{n-1} a C_1), stupně křivek a poloha bodů D_{n-3} , D_{n-2} a C_2 . Podmínka pro binormálovou složku se shoduje s podmínkou rovnosti druhé křivosti (75), což opět naznačuje, že tento komplexní přístup poskytuje relevantní výsledky.

Pro vyjádření podmínky pro G^4 spojitost budeme postupovat obdobně jako pro nižší stupně opětovnou derivací vůči souřadnici u :

$$\begin{aligned}
u : \quad \frac{d^4(u)}{du^4} &= \frac{d}{du}(0) = 0 \\
v : \quad \frac{d^4(v)}{du^4} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{v} + 3\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^4} + \frac{3\ddot{u}^2\dot{v}}{\dot{u}^5} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{v} + 3\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^4} + \frac{3\ddot{u}^2\dot{v}}{\dot{u}^5} \right) = \\
&= \frac{1}{\dot{u}} \left(\frac{v^{(4)}\dot{u}^3 - 3\ddot{v}\ddot{u}\dot{u}^2}{\dot{u}^6} - \frac{(u^{(4)}\dot{v} + \ddot{u}\ddot{v} + 3\ddot{u}\ddot{v} + 3\ddot{u}\ddot{v})\dot{u}^4 - (\ddot{u}\dot{v} - 3\ddot{u}\ddot{v})4\dot{u}^3\ddot{u}}{\dot{u}^8} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(6\ddot{u}\ddot{u}\dot{v} + 3\ddot{u}^2\ddot{v})\dot{u}^5 - 15\ddot{u}^3\dot{v}\dot{u}^4}{\dot{u}^{10}} \right) = \\
&= \frac{v^{(4)}}{\dot{u}^4} - \frac{u^{(4)}\dot{v} - 2\ddot{u}\ddot{v} + 6\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^5} + \frac{10\ddot{u}\ddot{u}\dot{v} - 9\ddot{u}^2\ddot{v}}{\dot{u}^6} - \frac{15\ddot{u}^3\dot{v}}{\dot{u}^7} \\
w : \quad \frac{d^4(w)}{du^4} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\ddot{w}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{w} + 3\ddot{u}\ddot{w}}{\dot{u}^4} + \frac{3\ddot{u}^2\dot{w}}{\dot{u}^5} \right) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{w}}{\dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}\dot{w} + 3\ddot{u}\ddot{w}}{\dot{u}^4} + \frac{3\ddot{u}^2\dot{w}}{\dot{u}^5} \right) = \\
&= \frac{1}{\dot{u}} \left(\frac{w^{(4)}\dot{u}^3 - 3\ddot{w}\ddot{u}\dot{u}^2}{\dot{u}^6} - \frac{(u^{(4)}\dot{w} + \ddot{u}\ddot{w} + 3\ddot{u}\ddot{w} + 3\ddot{u}\ddot{w})\dot{u}^4 - (\ddot{u}\dot{w} - 3\ddot{u}\ddot{w})4\dot{u}^3\ddot{u}}{\dot{u}^8} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(6\ddot{u}\ddot{u}\dot{w} + 3\ddot{u}^2\ddot{w})\dot{u}^5 - 15\ddot{u}^3\dot{w}\dot{u}^4}{\dot{u}^{10}} \right) = \\
&= \frac{w^{(4)}}{\dot{u}^4} - \frac{u^{(4)}\dot{w} - 2\ddot{u}\ddot{w} + 6\ddot{u}\ddot{w}}{\dot{u}^5} + \frac{10\ddot{u}\ddot{u}\dot{w} - 9\ddot{u}^2\ddot{w}}{\dot{u}^6} - \frac{15\ddot{u}^3\dot{w}}{\dot{u}^7} \tag{109}
\end{aligned}$$

po implementaci (77) a úpravě získáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4(v)}{du^4} &= \frac{v^{(4)}}{\dot{u}^4} - \frac{6\ddot{v}\ddot{u} - 2\ddot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^5} - \frac{9\ddot{u}^2\ddot{v}}{\dot{u}^6} \\
\frac{d^4(w)}{du^4} &= \frac{w^{(4)}}{\dot{u}^4} - \frac{6\ddot{w}\ddot{u}}{\dot{u}^5} \tag{110}
\end{aligned}$$

Podmínku pro G^4 spojitost vyjádříme z rovnosti čtvrtých derivací jednotlivých složek parametrických funkcí:

$$\frac{d^4(u_1)}{du_1^4} = \frac{d^4(u_2)}{du_2^4} \quad \frac{d^4(v_1)}{du_1^4} = \frac{d^4(v_2)}{du_2^4} \quad \frac{d^4(w_1)}{du_1^4} = \frac{d^4(w_2)}{du_2^4} \tag{111}$$

Pro složku u dostáváme opět triviální podmínku $0 = 0$. Pro složku v dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{v_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} - \frac{6\ddot{v}_1\ddot{u}_1 - 2\ddot{u}_1\ddot{v}_1}{\dot{u}_1^5} - \frac{9\ddot{u}_1^2\ddot{v}_1}{\dot{u}_1^6} &= \frac{v_2^{(4)}}{\dot{u}_2^4} - \frac{6\ddot{v}_2\ddot{u}_2 - 2\ddot{u}_2\ddot{v}_2}{\dot{u}_2^5} - \frac{9\ddot{u}_2^2\ddot{v}_2}{\dot{u}_2^6} \\
v_2^{(4)} &= \dot{u}_2^4 \left(\frac{v_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \frac{6\ddot{v}_2\ddot{u}_2 - 2\ddot{u}_2\ddot{v}_2}{\dot{u}_2^5} - \frac{6\ddot{v}_1\ddot{u}_1 - 2\ddot{u}_1\ddot{v}_1}{\dot{u}_1^5} + \frac{9\ddot{u}_2^2\ddot{v}_2}{\dot{u}_2^6} - \frac{9\ddot{u}_1^2\ddot{v}_1}{\dot{u}_1^6} \right) \tag{112}
\end{aligned}$$

kde za \ddot{v}_2 a \ddot{v}_1 dosadíme podmínky (107) a (100):

$$v_2^{(4)} = \dot{u}_2^4 \left\{ \frac{v_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \left[\frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{v}_1 - \frac{3\ddot{v}_1}{\dot{u}_1} \left(\frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{u}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} \ddot{u}_2 \right) \right] \frac{6\ddot{u}_2}{\dot{u}_2^5} - \frac{6\ddot{v}_1 \ddot{u}_1 - 2\ddot{u}_1 \ddot{v}_1}{\dot{u}_1^5} - \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \frac{2\ddot{u}_2 \ddot{v}_1}{\dot{u}_2^5} + \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \frac{9\ddot{u}_2^2 \ddot{v}_1}{\dot{u}_2^6} - \frac{9\ddot{u}_1^2 \ddot{v}_1}{\dot{u}_1^6} \right\} \quad (113)$$

podmínku pro normálovou složku bodu C_4 vyjádříme pomocí diference, kdy platí:

$$C_{0\perp}^4 = C_{0\perp} - 4C_{1\perp} + 6C_{2\perp} - 4C_{3\perp} + C_{4\perp} = 6C_{2\perp} - 4C_{3\perp} + C_{4\perp} \\ v_2^{(4)} = n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3) \cdot C_{0\perp}^4 \quad (114)$$

a kombinací získáváme podmínku:

$$C_{4\perp} = \frac{v_2^{(4)}}{n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3)} - 6C_{2\perp} + 4C_{3\perp} \quad (115)$$

Vidíme, že stěžejní a nejkompexnější krok je určení čtvrté derivace podle souřadnice u . Nyní provedeme stejný postup pro binormálovou složku:

$$\frac{w_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} - \frac{6\ddot{w}_1 \ddot{u}_1}{\dot{u}_1^5} = \frac{w_2^{(4)}}{\dot{u}_2^4} - \frac{6\ddot{w}_2 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2^5} \\ w_2^{(4)} = \dot{u}_2^4 \left(\frac{w_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \frac{6\ddot{w}_2 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2^5} - \frac{6\ddot{w}_1 \ddot{u}_1}{\dot{u}_1^5} \right) \quad (116) \\ \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \ddot{v}_1$$

kde za \ddot{w}_2 dosadíme podmínku (108):

$$w_2^{(4)} = \dot{u}_2^4 \left(\frac{w_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \frac{6\ddot{w}_1 \ddot{u}_2}{\dot{u}_2^5} - \frac{6\ddot{w}_1 \ddot{u}_1}{\dot{u}_1^5} \right) \quad (117)$$

a podmínku pro binormálovou složku bodu C_4 opět vyjádříme pomocí diference:

$$C_{0\times}^4 = C_{0\times} - 4C_{1\times} + 6C_{2\times} - 4C_{3\times} + C_{4\times} = -4C_{3\times} + C_{4\times} \\ w_2^{(4)} = n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3) \cdot C_{0\times}^4 + 4C_{3\times} \quad (118)$$

po dosazení a úpravě získáváme:

$$C_{4\times} = \frac{w_2^{(4)}}{n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3)} + 4C_{3\times} \quad (119)$$

Vidíme, že opakováním derivací složek parametrických funkcí vzhledem k tečné souřadnici u , zavedené v bodě napojení, bychom získali podmínky i pro vyšší stupně spojitosti, které se však již od 3. stupně komplikují. Výhodou je, že pro algoritmickou konstrukci či kontrolu geometricky spojitých křivek stačí tyto vztahy určit jednou a pouze implementovat do kódu.

3.6 Podmínky pro splnění G^0 až G^4 spojitosti

Na základě poznatků z předchozích kapitol se jeví jako nejobecnější definice geometrické spojitosti podmínky získané na základě rovnosti derivací složek parametrických funkcí obou křivek. Tento přístup je totiž konzistentní s přístupem parametricky napojených křivek a změny parametrizace, dnes známým přístupem rovnosti geometrických invariant i přístupem derivace první křivosti. Z toho důvodu budou v této kapitole prezentovány výsledky právě přístupu derivace parametrické funkce. Všechny podmínky vyjádříme v přirozeném souřadnicovém systému vztahenému k bodu napojení, kdy složky obou parametrických funkcí jsou vyjádřeny pro parametr odpovídající právě tomuto společnému bodu, neboli $\mathbf{P}(t = 1)$ a $\mathbf{Q}(t = 0)$.

3.6.1 G^0 spojitost

Pro úplnost zde uvádíme i podmínku pro G^0 , neboli poziční spojitost. Zcela obecně bychom tuto podmínku vyjádřili jako rovnost nultých derivací složek parametrických funkcí v bodě napojení. Nezáleží zde na tom, v jakém souřadnicovém systému se pohybujeme, pro zachování konzistence uvažujeme přirozený souřadnicový systém:

$$\frac{d^0(\mathbf{P}(t))}{du_1^0} = \frac{d^0(\mathbf{Q}(t))}{du_2^0} \quad (120)$$

při rozepsání do složek získáváme:

$$u_2 = 0 \qquad v_2 = 0 \qquad w_2 = 0 \quad (121)$$

Pro polohu řídicích bodů platí:

$$C_0 = D_n \quad (122)$$

3.6.2 G^1 spojitost

Podmínka pro G^1 spojitost, neboli tečnou spojitost, vyžaduje rovnost prvních derivací složek parametrických funkcí:

$$\frac{d^1(\mathbf{P}(t))}{du_1^1} = \frac{d^1(\mathbf{Q}(t))}{du_2^1} \quad (123)$$

pro jednotlivé složky jsme získali podmínky:

$$\dot{u}_2 \in \mathbb{R}^+ \qquad \dot{v}_2 = 0 \qquad \dot{w}_2 = 0 \quad (124)$$

Pro polohu řídicích bodů platí (122) a:

$$C_{1\parallel} \in \mathbb{R}^+ \quad C_{1\perp} = 0 \quad C_{1\times} = 0 \quad (125)$$

3.6.3 G^2 spojitost

Pro splnění G^2 spojitosti, neboli spojitosti křivosti si musí být rovny druhé derivace:

$$\frac{d^2(\mathbf{P}(t))}{du_1^2} = \frac{d^2(\mathbf{Q}(t))}{du_2^2} \quad (126)$$

vyjádřeno pro jednotlivé složky:

$$\ddot{u}_2 \in \mathbb{R} \quad \ddot{v}_2 = \frac{\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2} \cdot \ddot{v}_1 \quad \ddot{w}_2 = 0 \quad (127)$$

Pro polohu řídicích bodů platí (122), (125) a:

$$C_{2\parallel} \in \mathbb{R} \quad C_{2\perp} = \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot q^2 \cdot D_{n-2\perp} \quad C_{2\times} = 0 \quad (128)$$

3.6.4 G^3 spojitost

K dosažení G^3 spojitosti je nutné splnit rovnost třetích derivací, což v sobě zahrnuje rovnost derivací prvních křivostí a rovnost druhých křivostí:

$$\frac{d^3(\mathbf{P}(t))}{du_1^3} = \frac{d^3(\mathbf{Q}(t))}{du_2^3} \quad (129)$$

pro jednotlivé složky tak platí podmínky:

$$\ddot{\ddot{u}}_2 \in \mathbb{R} \quad \ddot{\ddot{v}}_2 = \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{\ddot{v}}_1 - \frac{3\dot{v}_1}{\dot{u}_1} \left(\frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{u}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} \ddot{u}_2 \right) \quad \ddot{\ddot{w}}_2 = \frac{\dot{u}_2^3}{\dot{u}_1^3} \ddot{\ddot{w}}_1 \quad (130)$$

Pro polohu řídicích bodů platí (122), (125), (128) a:

$$\begin{aligned} C_{3\parallel} \in \mathbb{R} \quad C_{3\times} &= q^3 \frac{n_2^2(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{n_1^2(n_2 - 1)(n_2 - 2)} \cdot D_{n-3\times} \\ C_{3\perp} &= q^3 \frac{n_2^2(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{n_1^2(n_2 - 1)(n_2 - 2)} \cdot D_{n-3\perp}^3 + 3 \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot q^2 \cdot D_{n-2\perp} - \\ &\quad - \frac{3n_2(n_1 - 1)D_{n-2\perp}^2}{n_1(n_2 - 2)D_{n-1\parallel}^1} \left(q^3 \frac{n_2(n_1 - 1)}{n_1(n_2 - 1)} \cdot D_{n-2\parallel}^2 - q \cdot C_{0\parallel}^2 \right) \end{aligned} \quad (131)$$

3.6.5 G^4 spojitost

Splnění G^4 spojitosti vyžaduje rovnost čtvrtých derivací parametrických funkcí vzhledem k tečné ose u , neboli rovnost druhých derivací první křivosti a prvních derivací druhé křivosti:

$$\frac{d^4(\mathbf{P}(t))}{du_1^4} = \frac{d^4(\mathbf{Q}(t))}{du_2^4} \quad (132)$$

rozepsáním do složek získáme podmínky:

$$v_2^{(4)} = \dot{u}_2^4 \left[\frac{v_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \frac{6\ddot{u}_2}{\dot{u}_2^2 \dot{u}_1^3} \left(\ddot{v}_1 - \frac{3\dot{v}_1 \dot{u}_1}{\dot{u}_1} + \frac{3\dot{v}_1 \dot{u}_1}{\dot{u}_2^2} \ddot{u}_2 \right) - \frac{6\ddot{v}_1 \dot{u}_1 - 2\ddot{u}_1 \dot{v}_1}{\dot{u}_1^5} - \frac{2\ddot{u}_2 \dot{v}_1}{\dot{u}_1^2 \dot{u}_2^3} + \frac{9\ddot{u}_2^2 \dot{v}_1}{\dot{u}_1^2 \dot{u}_2^4} - \frac{9\ddot{u}_1^2 \dot{v}_1}{\dot{u}_1^6} \right]$$

$$u_2^{(4)} \in \mathbb{R} \quad w_2^{(4)} = \dot{u}_2^4 \left(\frac{w_1^{(4)}}{\dot{u}_1^4} + \frac{6\ddot{u}_1 \ddot{u}_2}{\dot{u}_1^3 \dot{u}_2^2} - \frac{6\ddot{u}_1 \ddot{u}_1}{\dot{u}_1^5} \right) \quad (133)$$

Explicitní podmínku pro polohu bodu C_4 zde záměrně z důvodu velké komplexity neuvádíme, protože lze snadno určit s využitím (118) a (119).

3.7 Algoritmus pro analýzu G^0 až G^4 spojitosti

Struktura algoritmu:

- získání uživatelských vstupů (dvě křivky)
- určení řídicích bodů krajních segmentů
- výpočet derivací v bodě napojení
- konstrukce přirozeného souřadnicového systému
- transformace derivací do přirozeného souřadnicového systému
- vyloučení nestandardních případů a posouzení úrovně spojitosti

3.7.1 Získání vstupů

Funkce subscriptu:

- získání vstupů od uživatele (2 testované křivky) – algoritmus je navržen k analýze ukotvených křivek s jednotkovými vahami řídicích bodů
- v případě splinu transformace na jednotlivé segmenty (Bézierovy křivky)
- orientace řídicích polygonů tak, aby začínaly ve společném bodě, pokud existuje
- export matic souřadnic řídicích bodů a stupně obou křivek

3.7.2 Konstrukce přirozeného souřadnicového systému

Funkce subscriptu:

- konstrukce přirozeného souřadnicového systému v koncovém bodě první zadané křivky
- určení stupně linearit (počet ramen řídicího polygonu ležících na tečně)
- export jednotkových vektorů os přirozeného souřadnicového systému, stupně linearit obou křivek a jednotkového tečného vektoru druhé křivky v počátečním bodě

Nestandardní případy:

- křivka nemá definovanou normálu ve společném bodě (začíná jako přímka, neboli první tři řídicí body leží na tečně) – konstrukce fiktivní normály podle prvního ramene řídicího polygonu, které neleží na tečně
- křivka je úsečka – konstrukce fiktivního přirozeného souřadnicového systému (tečna odpovídá skutečné, normála volena v rovině xy , binormála dle tečny a normály)
- křivka má nulovou tečnu ve společném bodě (první dva řídicí body jsou totožné) – konstrukce fiktivní tečny dle prvního nenulového ramene řídicího polygonu

3.7.3 Posouzení spojitosti

Funkce scriptu:

- získání uživatelských vstupů a výpočet transformovaných matic derivací a přirozeného souřadnicového systému pomocí subscriptů
- posouzení spojitosti včetně nestandardních případů a výpis informace o spojitosti

Standardní případ:

- pro křivky, které mají definovaný přirozený souřadnicový systém v bodě napojení, se uplatní pravidla z předchozí kapitoly

Nestandardní případy:

- pokud první zvolená křivka nemá definovanou normálu v koncovém bodě, konstruuje se fiktivní souřadnicový systém a následně se uplatní standardní podmínky
- pokud je jedna z křivek úsečka, posuzuje se úroveň linearit druhé křivky, která odpovídá stupni spojitosti
- pokud jsou obě křivky úsečky, stupeň spojitosti je roven jejich stupni
- pokud některá z křivek nemá definovanou tečnu, je úroveň spojitosti považována za G^0 , pokud mají křivky společný bod a shodují se fiktivní jednotkové tečné vektory, jsou křivky považovány za G^1 spojitě

4 Závěrečná část

Tato kapitola shrnuje poznatky získané v předchozích kapitolách, výhody a nevýhody jednotlivých přístupů a možnosti využití podmínek pro dosažení geometrické spojitosti při konstrukčním řešení.

4.1 Výhody a nevýhody jednotlivých přístupů

Níže jsou shrnuty výhody a nevýhody jednotlivých přístupů popsanych v předchozích kapitolách.

4.1.1 Přístup změny parametrizace

- výhodou je matematická i algoritmická jednoduchost
- získáváme zde pouze jeden stupeň volnosti při tvorbě navazující křivky, daný volbou parametru t

4.1.2 Přístup rovnosti 2. křivosti

- výhodou je opět matematická i algoritmická jednoduchost
- získáváme zde 2 stupně volnosti při volbě polohy bodu C_3 – volíme polohu v tečném a normálovém směru, z ostatních přístupů však vyplývá, že rovnost druhé křivosti v kombinaci se splněním spojitosti G^2 není postačující pro splnění spojitosti G^3

4.1.3 Přístup derivace 1. křivosti

- tento přístup je matematicky a algoritmicky stále poměrně snadný
- získáváme zde podmínky jednotlivě pro normálovou a binormálovou složku bodu C_3
- není zcela jasné, jak získat podmínku pro G^3 spojitost u prostorové křivky – pokud bychom se drželi definice první křivosti, budou všechny souřadnice bodu C_3 svázány v jedné rovnici
- výsledky tohoto přístupu korelují s pojetím geometrické spojitosti a s výsledky přístupu derivace parametrické funkce

4.1.4 Přístup derivace parametrické křivky

- přístup je velmi komplexní a pro vyšší stupně spojitosti je matematicky i algoritmicky složitý
- tento přístup se na základě experimentů a své podstaty jeví jako velmi obecný a spolehlivý způsob, jak vyjádřit podmínky pro konstrukční řešení libovolného stupně geometrické spojitosti, kdy získáváme jeden stupeň volnosti pro každý bod navazující křivky, který má na spojitost daného stupně vliv – volíme polohu v tečném směru
- výsledky tohoto přístupu v sobě zahrnují výsledky všech ostatních přístupů a je konzistentní s dnešní definicí G^0 , G^1 a G^2 spojitosti

4.2 Konstrukční řešení spojitosti

V kapitole 3.7 je ukázáno, jaké obecné podmínky pro konstrukci geometricky spojitých křivek platí. V této kapitole se budeme zabývat některými limitními případy, které vedou ke zjednodušení těchto podmínek. Uvažujme konstrukci G^m spojitých křivek stupně $n_{1,2} \geq m$.

4.2.1 Spojitost v limitních případech

Prvním možným zjednodušením je linearizace v okolí společného bodu. Pokud umístíme prvních $m + 1$ řídicích bodů každé křivky v okolí bodu napojení (včetně) na společnou tečnu, pak platí

$$v_{1,2}^{(r)} = 0 \quad w_{1,2}^{(r)} = 0 \quad \text{pro } r \in \{0, \dots, m\} \quad (134)$$

a podmínka (91) pro rovnost složek derivací parametrických funkcí se zjednoduší na triviální podmínku $0 = 0$. Umístění prvních $m + 1$ řídicích bodů na společnou tečnu, při zachování stejné orientace tečného vektoru ve společném bodě, je tedy postačující podmínkou pro splnění spojitosti G^m . Této skutečnosti lze zejména využít při konstrukci křivky, která má spojitě navazovat na úsečku – zde už ze zadání musíme dodržet nulové derivace složek v a w parametrických funkcí v přirozeném souřadnicovém systému. Pro získání kvalitní křivky je vhodné volit tečné souřadnice bodů navazující křivky vzestupně.

Pokud budeme požadovat umístění pouze prvních m řídicích bodů na společnou tečnu, získáme tím další dva stupně volnosti při konstrukci – volíme normálovou a binormálovou souřadnici bodu $D_{n-(m+1)}$ a získáme podmínky pro polohu bodu C_{m+1} v normálovém a binormálovém směru. I v tomto případě dode k výraznému zjednodušení 91 do tvaru

$$v_{1,2}^{(r)} = 0 \quad w_{1,2}^{(r)} = 0 \quad \text{pro } r \in \{0, \dots, m-1\} \quad (135)$$

a pro m -té derivace platí

$$\begin{aligned} \frac{v_1^{(m)}}{\dot{u}_1^m} &= \frac{v_2^{(m)}}{\dot{u}_2^m} & \frac{w_1^{(m)}}{\dot{u}_1^m} &= \frac{w_2^{(m)}}{\dot{u}_2^m} \\ v_2^{(m)} &= \frac{\dot{u}_2^m}{\dot{u}_1^m} \cdot v_1^{(m)} = \left(\frac{n_2}{n_1}q\right)^m v_1^{(m)} & w_2^{(m)} &= \frac{\dot{u}_2^m}{\dot{u}_1^m} \cdot w_1^{(m)} = \left(\frac{n_2}{n_1}q\right)^m w_1^{(m)} \end{aligned} \quad (136)$$

odtud již lze vyjádřit podmínku pro polohu bodu C_{m+1} :

$$\begin{aligned} C_{(m+1)\perp} &= \left(\frac{n_2}{n_1}q\right)^m \cdot \frac{n_1!(n_2-m)!}{n_2!(n_1-m)!} \cdot D_{n-(m+1)\perp} \\ C_{(m+1)\times} &= \left(\frac{n_2}{n_1}q\right)^m \cdot \frac{n_1!(n_2-m)!}{n_2!(n_1-m)!} \cdot D_{n-(m+1)\times} \end{aligned} \quad (137)$$

poloha bodů C_{m+1} a $D_{n-(m+1)}$ v tečném směru zůstává libovolná.

4.2.2 Možnosti využití nezávislých parametrů

Z analýzy geometrické spojitosti vyplývá, že při konstrukci G^m spojitě napojených křivek řešíme polohu prvních $m + 1$ řídicích bodů, kde pro splnění G^0 spojitosti je první bod pevně daný (totožný s koncovým bodem výchozí křivky) a pro každý stupeň geometrické spojitosti získáváme dvě rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}v_2^{(m)} &= f(\dot{u}_1, \dots, u_1^{m-1}, \dot{u}_2, \dots, u_2^{m-1}, \dot{v}_1, \dots, v_1^m) \\w_2^{(m)} &= f(\dot{u}_1, \dots, u_1^{m-1}, \dot{u}_2, \dots, u_2^{m-1}, \dot{w}_1, \dots, w_1^m)\end{aligned}\quad (138)$$

Získáváme tedy 2 rovnice dávající do závislosti dané derivace složek parametrických funkcí pro 3 souřadnice každého bodu a zbývá jeden stupeň volnosti pro volbu souřadnice u . Jelikož jsou všechny souřadnice svázané, můžeme volbou tečné souřadnice bodu C_i ovlivnit normálové a binormálové souřadnice bodů $C_{j>i}$. Tato skutečnost je při konstrukci zcela zásadní, představme si úlohu, kdy napojujeme křivku druhého stupně na výchozí křivku s požadavkem G^2 spojitosti. V případě parametrické spojitosti by byla poloha bodů pevně daná. Za předpokladu nelineární výchozí křivky lze s využitím geometrické spojitosti docílit libovolného umístění bodu C_2 ve stejné polorovině (t, D_{n-1}) jako bod D_{n-1} díky dvěma stupňům volnosti, které z G^2 spojitosti vyplývají.

Uvažujemeli křivky třetího stupně a požadavek G^3 spojitosti, lze předepsat podmínku pro polohu bodu C_3 a stále zbývá jeden stupeň volnosti, který lze využít například k předepsání směru tečny v koncovém bodě v rovině. Při požadavku parametrické spojitosti toho docílit nelze, zde by byla poloha všech řídicích bodů napojované křivky dána pevně.

4.3 Přínos pro praxi

Jak bylo řečeno v úvodu této práce, spojitost křivek zasahuje do mnoha různých odvětví. Význam G^3 spojitosti spočívá ve skutečnosti, že parametrické funkce křivek mají spojitě třetí derivace vzhledem k obloukové souřadnici (která ve společném bodě odpovídá tečné souřadnici), což implikuje hladké druhé derivace, které v praxi souvisí se zrychlením. Tato práce poskytuje odpověď na to, jak docílit vyšších stupňů spojitosti (G^3 , G^4) a jak odvodit podmínky pro libovolný stupeň geometrické spojitosti. Implementací v konkrétních konstrukčních řešeních geometricky spojitých křivek lze odstranit problémy vyplývající z ostrých změn zrychlení (druhých derivací), jako rázy při obrábění [3], či grafické nedokonalosti při tvorbě počítačových scén.

S využitím geometrické spojitosti také při zachování stejné kvality hladkosti v bodě napojení, jakého bychom dosáhli s využitím parametrické spojitosti, získáváme pro každý stupeň spojitosti (kromě poziční) jeden nezávislý parametr, který při konstrukci lze využít k ovlivnění tvaru napojované křivky (například jak rychle se v bodě napojení utahuje) či dalších parametrů (poloha koncového bodu, tečný vektor v koncovém bodě, křivost v koncovém bodě).

Seznam použitých značek a symbolů

$P(t), \mathbf{P}(t)$	výchozí křivka, vektorová funkce výchozí křivky
$Q(t), \mathbf{Q}(t)$	napojovaná křivka, vektorová funkce napojované křivky
t	parametr
n_1, n_2	stupeň křivky $P(t), Q(t)$
x, y, z	složky vektorových funkcí v systému $(0, x, y, z)$
u, v, w	složky vektorových funkcí v systému (D_n, t, n, b)
s	oblouková souřadnice
D_i, \mathbf{D}_i	řídící body křivky $P(t)$, polohové vektory
\mathbf{D}_i^r	diference křivky $P(t)$
C_i, \mathbf{C}_i	řídící body křivky $Q(t)$, polohové vektory
\mathbf{C}_i^r	diference křivky $Q(t)$
\mathbf{V}_i^n	pomocné body De Casteljaou algoritmu
$B_{i,n}(t)$	Bernsteinův polynom n -tého stupně
$w_{i,r}$	koeficient (kap. derivace Bernsteinových polynomů)
C^m	parametrická spojitost stupně m
G^m	geometrická spojitost stupně m
1k	1. křivost
2k	2. křivost
q	koeficient (kap. geometrická spojitost)
$\dot{\mathbf{P}}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t)$	derivace vektorové funkce křivky podle parametru t

Seznam použité literatury a zdrojů

1. PERNOT, J-P.; FALCIDIENO, B.; GIANNINI, F.; GUILLET, S.; LÉON, J-C. Modelling free-form surfaces using a feature-based approach. In: *Proceedings of the Eighth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*. Seattle, Washington, USA: Association for Computing Machinery, 2003. SM '03. ISBN 1581137060.
2. PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS book*. Springer-Verlag, 1997.
3. KUČERA, D.; LINKEOVÁ, I.; STEJSKAL, M. The influence of CAD model continuity on accuracy and productivity of CNC machining. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2023. All Open Access, Green Open Access.
4. VARADY, T.; MARTIN, R. The Handbook of Computer-Aided Geometric Design. In: 2002, s. 651–681.
5. DEROSE, T. D.; BARSKY, B. A. Geometric continuity, shape parameters, and geometric constructions for Catmull-Rom splines. *ACM Trans. Graph.* 1988, roč. 7, č. 1.
6. LINKEOVÁ, I. *NURBS křivky*. 2007.
7. FARIN, G. E. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design a practical guide*. Academic Press, 1997.
8. FARIN, G. 11 - Geometric Continuity. In: FARIN, Gerald (ed.). *Curves and Surfaces for CAGD (Fifth Edition)*. Fifth Edition. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002, s. 191–203. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics. ISBN 978-1-55860-737-8.
9. BARSKY, B.A.; DEROSE, T.D. Geometric continuity of parametric curves: three equivalent characterizations. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1989, roč. 9, č. 6.
10. DOCARMO, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Publications, 2016. Dover Books on Mathematics.
11. JEŽEK, F.; TOMICZKOVÁ, S. *Geometrie pro FST 2*. 2013.