

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní  
Teoretický základ strojního inženýrství



**Návrh experimentu pro ověření statické tuhosti robotů v rovině**

**Design of an experiment to verify the static stiffness of robots in a  
plane**

*Filip Vaško*

Teoretický základ strojního inženýrství

Praha, červen 2024

**Supervisor:**

Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D.  
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky  
Fakulta strojní  
České vysoké učení technické  
Technická 4  
160 00 Praha 6  
Česká republika

Copyright © 2024 Filip Vaško



# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vaško** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **509150**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Návrh experimentu pro ověření statické tuhosti robotů v rovině**

Název bakalářské práce anglicky:

**Design of an experiment to verify the static stiffness of robots in a plane**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s problematikou kinematiky a dynamiky rovinných soustav tuhých těles.
2. Navrhněte experimentální zařízení pro určení tuhosti robotických systémů v rovině.
3. Vytvořte model tohoto zařízení a simulačně ověřte vhodnost navrženého experimentu.
4. Proveďte simulační experiment založený na dynamickém modelu jednoduchého robota.
5. Porovnejte tuhost robota s tuhostí dvou propojených robotů.

Seznam doporučené literatury:

- Valášek M., Stejskal V., Březina J.: Mechanika A (skripta), Praha, ČVUT, 2002.
- Valášek M., Bauma V., Šika Z.: Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004.
- Stejskal, V., Brousil, J. a Stejskal, S.: Mechanika III, Vyd. 2, ČVUT v Praze, 2001.
- <http://www.mathworks.com> (on-line dokumentace prostředí Matlab)

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D. odbor mechaniky a mechatroniky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **23.04.2024** Termín odevzdání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



# Poděkování

Chtěl bych v první řadě poděkovat svému vedoucímu práce panu Ing.Zdeňku Neusserovi, Ph.D. za skvělé vedení práce, cenné rady, množství konzultací a odbornou pomoc ve fázích, kdy jsem si nevěděl rady. Taktéž chci poděkovat panu Ing.Martinu Nečasovi, MSc., Ph.D. za zajištění potřebných součástí k realizaci experimentální části a pomoc při návrhu experimentální části. Dále bych chtěl poděkovat kolegovi Jiřímu Bláhovi za vstupní cenné rady v prostředí Matlab Simulink a úvod do psaní v prostředí L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. V neposlední řadě také děkuji rodině a kamarádům za podporu.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářkou práci s názvem: „Návrh experimentu pro ověření statické tuhosti robotů v rovině“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Zdeňka Neussera, Ph.D., s použitím literatury uvedené v kapitole Literatura.

V Praze dne .....

.....

# Anotační list

Autor	Filip Vaško
Název (CZ)	Návrh experimentu pro ověření statické tuhosti robotů v rovině
Název (EN)	Design of an experiment to verify the static stiffness of robots in a plane
Rok	2023/2024
Studijní program	Teoretický základ strojího inženýrství
Ústav	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor	Odbor mechaniky a mechatroniky
Vedoucí práce	Ing.Zdeněk Neusser, Ph.D.
Rozsah	82 stran 33 obrázků 4 tabulky
Klíčová slova	statická tuhost, dynamika robotů, tuhostní mapy, spojení robotů, linearizace
Keywords	static stiffness, dynamics of robots, maps of stiffness, coupled robots, linearization
Abstrakt	Tato práce se zabývá statickou tuhostí robotických ramen v rovině, kde výsledkem bude směrové rozložení statické tuhosti jednoho robotického ramena a dvou spojených ramen v konkrétním bodě jeho pracovního prostoru. Součástí práce bude návrh experimentu, který bude následně ověřovat tuhosti reálné robotické soustavy v rovině. Dále je uvedený analytický výpočet tuhosti robotických ramen pomocí Lagrangeových rovnic II.druhu.
Abstract	This work deals with the static stiffness of robotic arms in the plane, where the result will be the directional distribution of the static stiffness of one robotic arm and two connected arms at a specific point in its workspace. The work will include the design of an experiment that will subsequently verify the in-plane stiffness of a real robotic system. An analytical calculation of the stiffness of the robotic arms using Lagrange's equations of the second kind is also presented.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tuhost robotických ramen</b>	<b>3</b>
2.1	Zlepšení přesnosti průmyslových robotů . . . . .	3
2.2	Tuhost ramen robota . . . . .	4
2.3	Tuhost kloubů robota . . . . .	5
2.4	Tuhostní mapa . . . . .	8
2.5	Variabilní tuhost motorů . . . . .	9
2.5.1	Výhody použití pružného článku . . . . .	9
2.5.2	Příklady použití VSA motorů . . . . .	9
2.5.3	Princip změny tuhosti VSA motoru . . . . .	10
2.5.4	Princip změny poměru mezi silami . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Úvodní pojmy v mechanice</b>	<b>13</b>
3.1	Definice tuhého tělesa . . . . .	13
3.2	Poloha tuhého tělesa . . . . .	13
3.3	Moment setrvačnosti . . . . .	14
3.4	Vazby tuhých těles . . . . .	14
3.5	Značení vazeb a jejich uvolnění . . . . .	15
3.6	Grublerova formulace . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Kinematika tuhých těles</b>	<b>17</b>
4.1	Dopředná kinematika . . . . .	18
4.1.1	Posuvný pohyb tuhého tělesa . . . . .	18
4.2	Rotační pohyb tuhého tělesa . . . . .	19
4.3	Inverzní kinematika . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Dynamika tuhých těles a mechanismů</b>	<b>25</b>
5.1	Lagrangeovy rovnice II.druhu . . . . .	25
5.1.1	Kinetické energie mechanismu . . . . .	26
5.1.2	Potenciální energie mechanismu . . . . .	26
5.1.3	Princip virtuálních prací . . . . .	27
5.2	Newton-Eulerovy rovnice . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Experimentální část</b>	<b>31</b>



6.1	Popis experimentu . . . . .	31
6.2	Stavba experimentu . . . . .	32
6.3	Simulační model experimentu . . . . .	34
6.4	Reálná konstrukce experimentu . . . . .	35
6.5	Typy lineárních vedení a jejich popis . . . . .	37
6.6	Další kroky . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Simulační část</b>	<b>39</b>
7.1	Návrh rozměrů ramen a pracovního prostoru . . . . .	39
7.2	Modelování mechanismu . . . . .	41
7.3	Tvorba simulačního modelu . . . . .	43
7.4	Inverzní kinematika mechanismu . . . . .	47
7.4.1	Analytický výpočet relativních úhlů natočení jednotlivých ramen . . . . .	47
7.5	Linearizace a SVD rozklad . . . . .	50
7.6	Směrové rozložení tuhosti soustavy v rovině . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Analytické ověření simulační části</b>	<b>55</b>
8.1	Výpočet kinetických energií ramen . . . . .	55
8.1.1	Kinetická energie ramena 1 . . . . .	56
8.1.2	Kinetická energie ramena 2 . . . . .	57
8.1.3	Kinetická energie ramena 3 . . . . .	57
8.1.4	Kinetická energie ramena 4 . . . . .	58
8.2	Sestavení Lagrangeových rovnic II.druhu . . . . .	58
8.3	Porovnání analytického a simulačního modelu . . . . .	63
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>67</b>
	<b>Literatura</b>	<b>69</b>

# Seznam obrázků

2.1	Hybridní struktura robota . . . . .	5
2.2	Zjednodušení šesti-stupňového robota pomocí pružin . . . . .	6
2.3	Tuhostní mapy hybridní struktury robota . . . . .	8
2.4	Schéma uložení VSA aktuátoru . . . . .	10
2.5	Detailní pohled na princip fungování VSA motorů . . . . .	11
3.1	Poloha volného tělesa v prostoru . . . . .	14
3.2	Rovinné vazby a jejich uvolnění . . . . .	16
4.1	Ukázkový dvouramenný rovinný mechanismus . . . . .	17
4.2	Posuvný pohyb tělesa v rovině . . . . .	18
4.3	Vyjádření polohy bodu $O'$ vzhledem k počátečnímu systému . . . . .	20
4.4	Natočení systému $O-x_2, y_2'$ vůči systému $O-x_0, y_0$ kolem osy $z$ . . . . .	21
4.5	Dopředná kinematika mechanismu . . . . .	22
4.6	Ukázka získaných dvou řešení z inverzní kinematiky . . . . .	23
5.1	Dynamický model lineární pružiny se závažím . . . . .	29
5.2	Dynamický popis tělesa pomocí Newton-Eulerových rovnic . . . . .	29
6.1	Schéma reálného experimentu při čtyřramenné konfiguraci . . . . .	32
6.2	Schéma reálného experimentu při dvouramenné konfiguraci . . . . .	33
6.3	Simulační model experimentu v Matlab Simulink . . . . .	34
6.4	Konstrukce reálného zatěžovacího zařízení . . . . .	35
6.5	Detailní zobrazení vedení energetických řetězců . . . . .	36
6.6	Námi vytvořený mezičlen spojující lineární vedení . . . . .	36
6.7	Magnetický aktuátor . . . . .	37
7.1	Schéma experimentu . . . . .	40
7.2	Použité CAD modely v simulační části . . . . .	42
7.3	Simulační model pro zkoumané robotické systémy mechanismus . . . . .	46
7.4	Řešení inverzní kinematiky mechanismu . . . . .	49
7.5	Elipsa tuhosti . . . . .	51
7.6	Tuhostní mapy . . . . .	53
7.7	Tuhostní mapy . . . . .	54
8.1	Schéma deformací torzních pružin . . . . .	60

8.2	Průběh TCP do osy x . . . . .	64
8.3	Průběh TCP do osy y . . . . .	65
8.4	Odchylka v poloze bodu TCP mezi analytickým a simulačním modelem, hodnoty na svislé ose jsou v řádu $10^{-8}$ . . . . .	65

# Seznam tabulek

3.1	Typy vazeb a jejich počet stupňů volnosti . . . . .	15
5.1	Tabulka proměnných pro popis Newton-Eulerových rovnic . . . . .	30
7.1	Souhrn výsledků získaných tuhostí . . . . .	52
8.1	Tabulka použitých proměnných . . . . .	55



## Úvod

V neustále se rozvíjejícím robotickém průmyslu, kde lidská práce je nahrazena robotem, je potřeba tyto roboty stále optimalizovat. V dnešní době jsou některé typy průmyslových šesti-stupňových robotů poměrně hmotné a jejich přemístování může být tímto faktorem ovlivněno. Ideálním řešením je jejich hmotnost zredukovat, což bude mít za následek zhoršení vlastností jako přesnost polohování, tuhost, nosnost, atd. Mechanickou vlastnost robotické struktury jako např. tuhost můžeme výrazně ovlivnit třeba spojením více robotů dohromady. Tito spojení roboti by mohli být lehčí a menší, než kdyby místo nich pracoval pouze jeden průmyslový šesti-stupňový robot a zároveň by minimálně umožnily zachovat vlastnosti původního robota, ovšem za využití většího zástavbového prostoru. Toto téma je ve světě robotiky poměrně nové a odborných článků zabývajícím se touto problematikou je relativně málo.

Proto se tato práce bude zabývat návrhem experimentálního zařízení, které ověří tuhost reálné robotické soustavy. Provede se simulační ověření statické tuhosti robotického mechanismu pro získání představy o tuhosti robota a dojde k porovnání statické tuhosti jednoho robota a dvou spojených robotů.



## Tuhost robotických ramen

V dnešní době se použití robotů v průmyslu rozšířilo, díky jejich širokému spektru použití jako např. manipulační práce (přemisťování výrobků z bodu A do bodu B, skladování výrobků) nebo montážní či technologické činnosti (soustružení, frézování, vrtání, svařování, atd.). Mezi jejich výhody řadíme rozsáhlý pracovní prostor, hmotnost, cena, atd.), oproti obráběcím strojům CNC však mají nevýhodnou nižší tuhost, a proto nedosahují průmyslový roboti tak přesných parametrů. Tuhost průmyslových robotů je silně závislá na elastických deformacích vznikajících v jednotlivých ramenech robota a deformacích v kloubech robota, konkrétně v převodovkách nebo motorech samotných. Obecně lze říci, že velikost elastické deformace záleží na geometrii a materiálu použitých komponent. Tyto parametry lze zařadit do pasivní tuhosti, které nelze během chodu robota ovlivnit. Celková tuhost koncového bodu robota je ve velké míře ovlivněna aktuální polohou robota v jeho pracovním prostoru. Tuto aktuální polohu můžeme aktivně měnit a při znalosti rozložení statické tuhosti v pracovním prostoru robota se lze místům s nepříznivou tuhostí vyhnout. [1, 2]

### 2.1 Zlepšení přesnosti průmyslových robotů

Jednou z variant je optimalizovat strukturu robota. S inovativním návrhem přišli autoři článku [1]. Ti vytvořili hybridní strukturu s kombinací paralelně uspořádaných ramen a s vnořenými elektrickými píсты viz obrázek 2.1a. Dále výrobci jako ABB nebo KUKA vylepšili své průmyslové roboty, aby zlepšili tuhost robota tím, že přidali paralelní rameno a zlepšili uspořádání ložisek, které lépe překonávají kolísající síly při obrábění. [2]

Dalším přístupem je kompenzace elastických deformací vznikajících při práci robota. Toto řešení spočívá v zaznamenávání vnějších sil působících na koncový bod robota pomocí senzorů a z dat o aktuální pozici koncového bodu získanou např. z laser trackeru nebo 3D kamer. Díky těmto informacím lze dopočítat elastickou výchylku a změnit úhel natočení kloubu právě o tuto výchylku. [2]

## 2.2 Tuhost ramen robota

Velký vliv na tuhost robota má právě elastická deformace ramen. Důležitými faktory pro návrh ramen jsou jejich rozměry a materiál. U materiálu je důležitá mez úměrnosti, neboli mez elasticity, což je hodnota, kdy při jejím překročení nastávají již plastické (nevratné) deformace. Hodnota meze úměrnosti pro daný materiál je dána jeho příslušným modulem pružnosti v tahu  $E$  [MPa], čím vyšší hodnota, tím je materiál tužší. U rozměrů je důležitý poměr délky a plochy průřezu ramena. Tento vliv zohledňuje Hookův zákon  $\sigma = \varepsilon E$ . Po úpravě, kdy za napětí  $\sigma$  dosadíme vztah  $\frac{F}{A}$  a za poměrnou deformaci  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ , tak dostáváme výsledný vztah pro určení deformace ramen při tahovém nebo tlakovém zatížení. [3]

$$\Delta L = \frac{F \cdot L_0}{E \cdot A}$$

kde  $\Delta L$  je změna délky ramena,  $F$  je zobecněná síla kolmá na plochu průřezu ramena  $A$ ,  $L_0$  je počáteční délka ramena. Další velmi důležitým faktorem je ohybová tuhost ramen. Při řešení ohybové tuhosti se vychází z Mohrova integrálu, kde výsledkem bude rovnice průhybové čáry po celé délce ramena a má tvar

$$w(x)'' = -\frac{M_o(x)}{E \cdot J_y}$$

Kde  $w(x)$  představuje rovnici průhybové čáry a po dosazení libovolného bodu na rameni dostáváme v tomto místě jeho průhyb.  $M_o(x)$  je průběh ohybového momentu přes celou délku ramena v jedné rovině,  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $J_y$  je kvadratický moment průřezu k ose  $y$ . Moment kvadratického průřezu se stanovuje vzhledem k ose ramena, která je kolmá na směr působení ohybového momentu. Jestliže na rameno působí ohybový moment ve více rovinách, tak celkový průhyb (deformace) ramena bude jejich kvadratický součet pod druhou odmocninou. [3]

V článku [1] autoři vytvořili paralelní strukturu robota 2.1a, díky níž by měli dosáhnout lepších tuhostních výsledků. Použili kombinaci delších a kratších ramen. Na ovládání ramen použili elektrické písty (válce), které také zvyšují celkovou tuhost struktury. Z obrázku 2.1b autoři nahradili delší ramena pružinou, jelikož je považovali za elastická, ale u kratších ramen deformace zanedbali a považovali je za tuhá tělesa. Tuhost struktury zjišťovali třemi způsoby - experimentálně, analyticky a metodu konečných prvků. V experimentální části robota zatížili konstantní silou vždy pouze v jednom směru  $x, y, z$  a sledovali tuhost struktury v různých polohách v rovině  $x-z$ . Výsledkem bylo vytvoření tuhostních map viz obrázek 2.3, kde sledovali jak se tuhost měnila v různých polohách. Analyticky lze tuhost spočítat jako převrácenou hodnotu deformace, která se získá z Castiglianovy věty, kde se zderivuje vnitřní energie struktury podle zatěžující síly v daném směru. [1]

V dnešní době se nejčastěji používají výpočtové programy, které využívají metodu konečných prvků MKP. Princip spočívá ve vytvoření CAD modelu,

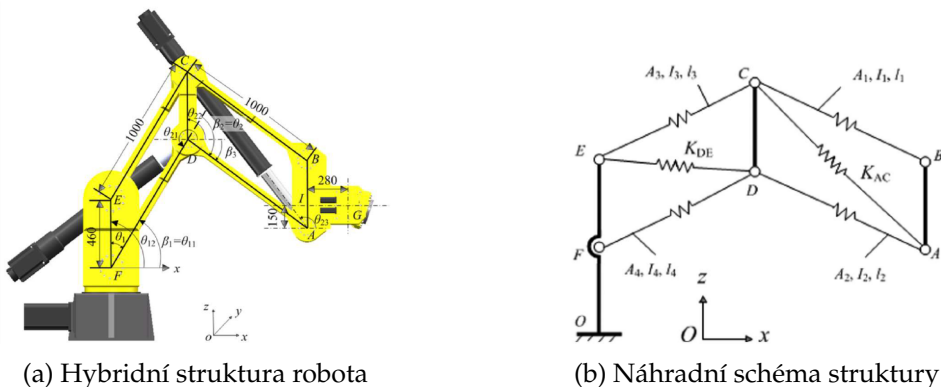


který by měl být co nejméně reálnému tělesu a zároveň jsou z modelu odstraněny všechny ostatní komponenty jako motor, převodovka, ložiska, atd. Následně se vloží model do simulace, ve které se stanoví parametry simulace, počáteční podmínky a vnější síly působící na těleso. Na povrch tělesa se nanese síť bodů, čím více bodů na povrchu je, tím je simulace přesnější. Po úspěšném skončení programu získáme deformace tělesa do všech směrů. Díky znalosti těchto deformací můžeme stanovit tuhosti pro dané směry deformací. [2] Lineární deformace označíme  $U_x, U_y, U_z$  a úhlové deformace  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ . Tuhost  $K_{ij}$  ve směru síly  $F_x$  určí následovně

$$K_{11} = \frac{F_x}{U_x}, K_{12} = \frac{F_x}{U_y}, K_{13} = \frac{F_x}{U_z}$$

$$K_{14} = \frac{F_x}{\phi_x}, K_{15} = \frac{F_x}{\phi_y}, K_{16} = \frac{F_x}{\phi_z}$$

Postupně by se dopočetly tuhosti do směrů vnějších sil  $F_y$  a  $F_z$ . Dále by se vypočetly tuhosti pod vlivem točivého momentu  $M_{x,y,z}$ , dohromady by matice tuhosti měla rozměr  $6 \times 6$ . [4] Mezi běžně používanými MKP simulačními programy řadíme Abaqus, Ansys a Comsol. [2]



(a) Hybridní struktura robota

(b) Náhradní schéma struktury

Obrázek 2.1: Hybridní struktura robota [1]

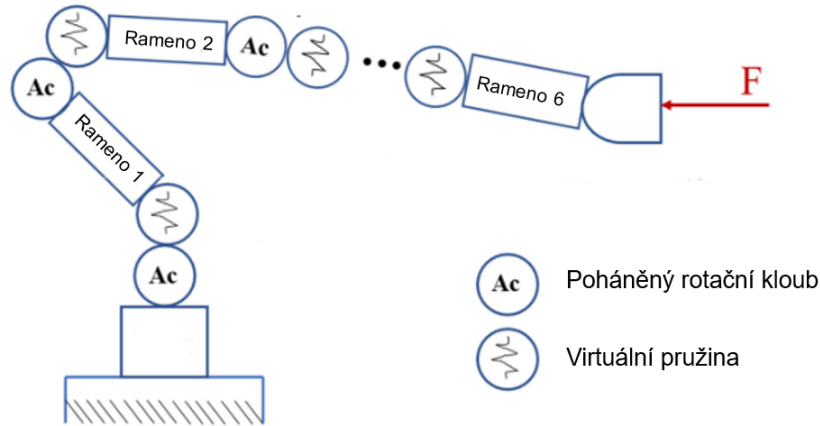
Experimentem v [1] bylo ukázáno, že tuhost struktury byla lepší než u běžného průmyslového robota a v některých místech jeho pracovního prostoru byla hodnota tuhosti srovnatelná s obráběcím CNC strojem. Tento výsledek je obdivuhodný, jelikož celková hmotnost hybridní struktury robota vážila kolem 200 kg, naproti tomu obráběcí CNC stroje se pohybují v řádech tun. [1]

## 2.3 Tuhost kloubů robota

Pro určení tuhosti kloubů se klouby nahrazují virtuálními pružinami a předpokládá se, že spojovací části pružiny jsou dokonale tuhé. Nejpoužívanější metoda nahrazení kloubu je pomocí pružiny s jedním stupněm volnosti. To znamená, že se pružina deformuje pouze po jedné dráze. K určení velikosti natočení pružiny

v daném kloubu a tím určení tuhosti daného kloubu je potřeba znát velikost zatížení. Dané zatížení lze získat například ze statických rovnic nebo z odebíraného proudu motoru pohánějící daný kloub, ale tato metoda občas vede k nepřesným výsledkům. U těchto kloubů se rozlišuje lineární a nelineární tuhost.

Na obrázku 2.2 je šesti-stupňový robot, kde se hnací klouby nahradili jedno-stupňovými pružinami, konkrétně se jedná o torzní pružiny. Při uvážení lineární



Obrázek 2.2: Schematické znázornění šesti-stupňového robota, kde se klouby nahradily hnanými pružinami [2]

tuhosti kloubů se pro každý kloub stanoví rotační diagonální matice tuhosti  $K_\theta$ , kde na diagonále jsou konstantní hodnoty tuhosti kloubu, tudíž se nepředpokládá změna chování pružiny. Tu lze získat přímým zatížením daného kloubu vnějším momentem a sledovat jeho deformaci, z toho lze následně vytvořit matici tuhosti kloubu  $K_\theta$ . U měření tuhosti kloubů je potřeba zafixovat všechny ostatní klouby, abychom vyloučili vlivy deformací ostatních kloubů. Pro určení celkové tuhosti  $K_c$  robota vyjdeme z následujícího vztahu

$$J_\theta^T \cdot K_c \cdot J_\theta = K_\theta$$

Kde  $J_\theta$  je Jakobiho kinetická matice. Další studie vylepšily výpočet celkové tuhosti tím, že zohlednily strukturální změny vlivem zatěžující vnější síly  $f$ . Tento vliv je zohledněn v matici  $K_g$ .

$$K_g = \left[ \left( \frac{\partial J_\theta^T}{\partial \theta_1} f \right) \left( \frac{\partial J_\theta^T}{\partial \theta_2} f \right) \cdots \left( \frac{\partial J_\theta^T}{\partial \theta_n} f \right) \right]$$

Kde  $\theta_i$  je úhel natočení  $i$ -tého kloubu a  $\frac{\partial J_\theta^T}{\partial \theta_i} f$  je  $n \times 1$  sloupcový vektor s  $i=1, \dots, n$  počet kloubů. Matice  $K_g$  je čtvercová matice  $n \times n$ . Celková tuhost se upraví do vztahu

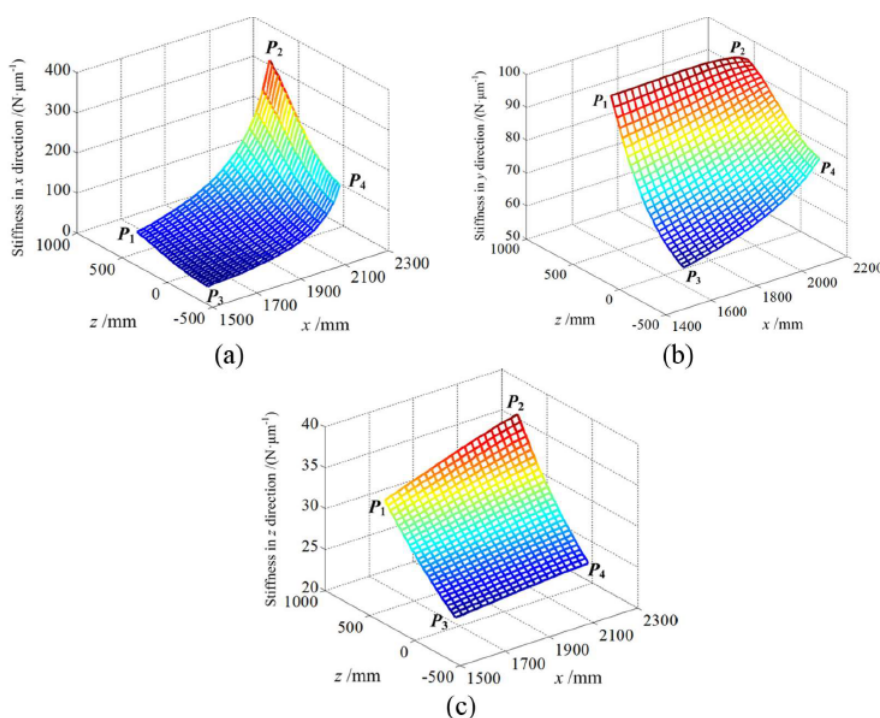
$$J_\theta^T \cdot K_c \cdot J_\theta = K_\theta - K_g$$

Pro ověření této myšlenky byla vytvořena simulace dvouramenného rovinového manipulátoru, kde se výsledky simulační části blížily těm analyticky získaným. Pokud bychom uvažovali nelineární pružiny, tak v matici tuhostí kloubů  $K_\theta$  se prvky tuhosti mění s různým úhlem natočení kloubu, což více odpovídá skutečnosti. Aby se zjistilo chování pružin, tak se snímala zatěžovací síla a moment na konci šesti-stupňového robota. Dále se snímala deformace pružin v kloubech při zatížení a v klidovém stavu. Výsledkem bylo zjištění, že deformace do os  $x, y, z$  nelze popsat pomocí funkce, tj. s postupně měnící se silou se velikosti deformace mění nespojitě, což je pro určení tuhosti kloubů v různých bodech obtížné. V případě úhlových deformací kolem osy  $x$  a  $y$  byla zjištěna lineární závislost mezi zatěžující silou a velikostí úhlové deformace. Kolem osy  $z$  byla tato závislost kubická. Tyto závislosti pomohou pro určení tuhosti kloubů v různých konfiguracích robotického systému. Podrobnější vysvětlení a grafické závislosti mezi zatěžovací silou a úhlovou deformací pružin lze najít v článku [2].

## 2.4 Tuhostní mapa

V robotice se tuhostní mapy používají jako nástroje pro analýzu vlastností robota, především se jedná o mechanické vlastnosti (pevnost, tuhost). Tuhostní mapy nám říkají, jak pracovat s robotem v určitých bodech jeho pracovního prostoru, jelikož jsou místa, kde může mít robot horší mechanické vlastnosti a mohlo by v tomto místě dojít k samotnému poškození nebo k ohrožení jeho okolí. Naopak jsou místa, kde robot má lepší vlastnosti a můžeme třeba zvýšit rychlost jeho pohybu nebo klást větší důraz na přesnost. [4]

Níže jsou uvedeny tuhostní mapy získané z MKP simulace z článku [1], kde získanou matici tuhostí přenesli do grafické podoby a pro čtyři polohy koncového bodu získali představu o vývoji tuhosti v pracovním prostoru robota. Na



Obrázek 2.3: Tuhostní mapy hybridní struktury robota [1]

obrázku 2.3 lze vidět tři tuhostní mapy do směru  $x, y, z$  v rovinách  $xz, xy, yz$ , kde nejvyšších tuhostí dosahují body v červených oblastech a nejmenší tuhost je naopak v modrých oblastech. Jednou z nevýhod těchto konkrétních map je, že ukazují velikosti tuhosti pouze ve směru os  $x, y, z$ . V běžné situaci dochází k tomu, že síla působící na robota je vektor  $F$  o nenulových složkách  $F_x, F_y, F_z$ . Tudíž tyto mapy jsou pro určitou optimalizaci nedostačující, a proto naším cílem je vyřešit tuhost robota do všech směrů v konkrétním bodě jeho pracovního prostoru.

## 2.5 Variabilní tuhost motorů

V předchozích kapitolách se rozebrala tuhost ramen a kloubů. Pod kloubem si můžeme představit motor s převodovkou, které je pevně spojeno s ramenem a polohuje ho do konkrétní polohy. Cílem je získat co největší možnou tuhost kloubu. Nyní si můžeme ukázat, jak lze tuhost na výstupu z převodovky měnit a uzpůsobit ji aktuálnímu pohybu. Představme si dětskou hračku robotického panáčka, který má pár funkcí - chození, házení, stání na místě. Pro každou funkci je potřeba mít různou tuhost motorů. Když robot nic nedělá, tak požadujeme, aby byly motory poddajné a naopak při chůzi či házení by se tuhost měla zvýšit. Tato myšlenka se rozvinula s nápadem N. Hogana o impedanci<sup>1</sup> a G. A. Pratta a M. M. Williamsona o sériových elastických motorech. Jejich koncepce zavedla pružný prvek s konstantní tuhostí na výstupu z převodovky. Později tento koncept vylepšili o záměrnou změnu impedance, která vedla k vytvoření variabilních impedančních akuatorů (VIA) s podskupinou motorů s proměnnou tuhostí (VSA). [6]

### 2.5.1 Výhody použití pružného článku

Mezi hlavní výhody patří tlumení nárazu při srážce dvou těles, kdy pružina pohlcuje náraz a částečně jej přeměňuje na tepelnou energii. Pokud by robotické rameno nemělo tento pružný článek mezi motorem s převodovkou a samotným ramenem, tak náraz se bude tlumit v rameni a v motoru, což může vést k jejich poškození. Zároveň pružný člen může pomoci při krátkodobém přetížení hnací soustavy, kde opět přebytek energie pohltí. Pokud by energie nárazu nebo přetížení byla větší než schopnost pružiny ji absorbovat, tak se motor posune a senzory na robotovy tuto výchytku zaznamenají a dojde k přerušení činnosti. [6]

### 2.5.2 Příklady použití VSA motorů

Prvním příkladem je nastavení tuhosti motoru pro konstantní polohu, kdy cílem je minimalizovat odchylky koncového bodu robota od konstantní polohy při působení vnějších sil. Při působení vnější síly nebo momentu na koncový bod robota, potřebuji mít tuhost celého robota co největší, aby změna polohy koncového bodu byla co nejmenší. Pokud by však vnější síla působila na základnu robotického ramena, např. na 1.osu šesti-stupňového robota, pak právě tuhost robota v této ose by měla být snížena, aby vychýlení 1.osy neovlivnilo polohu koncového bodu robota.

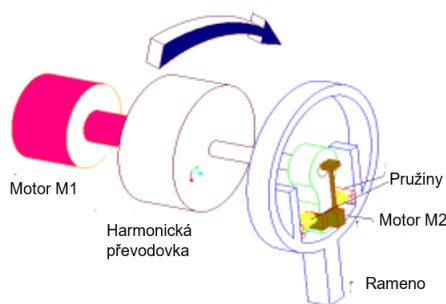
Dalším příkladem je použít pružný prvek k zajištění prudkého pohybu s velkým počátečním zrychlením. Princip spočívá v zamknutí polohy ramena, motor napne pružinu, která v sobě uchová energii a po uvolnění ramena dojde k přeměně uchované energie v pružině na kinetickou energii ramena. Důvodem

<sup>1</sup>Mechanická impedance vyjadřuje vztah mezi hnací silou na vstupu do tělesa a výsledným pohybem tělesa, v případě dokonalého tuhého tělesa je tento poměr roven jedné [5]

použití pružného prvku je, že vlastnosti motoru neumožňují velkou akceleraci, a proto je vhodné použití pružiny. Směr prudkého pohybu ramena je závislý na směru napnutí pružiny, jelikož motor je schopen reverzace, tak se rameno může pohybovat prudce i v opačném směru. [6]

### 2.5.3 Princip změny tuhosti VSA motoru

Tuhost aktuátoru lze měnit několika způsoby, první z nich využívá napnutí pružiny v aktuátoru, jedná se o nejjednodušší způsob. Princip je založen na natažení/stlačení pružiny pomocí motoru a ve zdeformované pružině je uložena potenciální energie, která je tak velká, že se do pružiny už žádná jiná energie (např. absorpcí rázů) nevejde a dojde ke zvýšení tuhosti VSA a aktuátor se chová jako tuhý kloub. Na obrázku 2.4 je vidět, že pro správnou funkci je zapotřebí dvou motorů, motor M1 zajišťuje správné natočení, polohu ramena, harmonická převodovka redukuje otáčky z motoru M1, motor M2 zajišťuje deformaci pružin, a tím změnu tuhosti aktuátoru. [7]



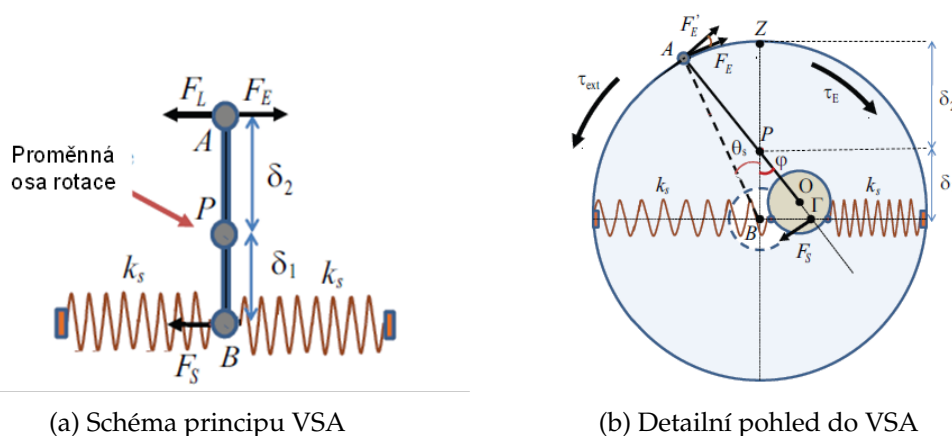
Obrázek 2.4: Schéma složení VSA aktuátoru [7]

Další metodou je změna poměru mezi vstupní silou od motoru a vzniklé síly v pružině danou její deformací. Tato metoda je blíže rozebrána v podkapitole 2.5.4. Třetí metodou je změna fyzikálních vlastností pružiny, používají se materiály jako polymery, nanomateriály nebo ocelové pružiny, které mohou měnit svojí volnou délku pružiny<sup>2</sup>, a tím rozdíl mezi aktuální deformací a volnou délkou pružiny bude jiný, což vyvolá sílu o jiné velikosti. [6] Dalším trochu odlišným způsobem je měnit tuhost pomocí magnetů. Aktuátor se skládá z motoru, dvou prstenců, které se skládají z obloukového magnetu odděleného distančními podložkami a lineárního vedení, který dané prstence posouvá k sobě nebo od sebe a tím mění tuhost kloubu. Zjednodušeně tuhost kloubu závisí na průniku ploch dvou magnetů. Výhodou takového aktuátoru je nízká spotřeba energie na změnu tuhosti, avšak velká nevýhoda je malý rozsah tuhosti. [7]

<sup>2</sup>Volná délka pružiny představuje stav, kdy všechny vnitřní síly a vnější síly působící na pružinu jsou v rovnováze, rozdíl mezi aktuální délkou a délkou volnou je pak rovna deformaci pružiny.

### 2.5.4 Princip změny poměru mezi silami

Tato podkapitola se zabývá detailněji změnou poměru mezi vstupní silou od motoru M2 a silou vygenerovanou v pružině. Na obrázku 2.5a bod P představuje proměnlivou osu rotace, síla  $F_S$  je síla vzniklá v pružině od vstupní síly motoru  $F_E$ , která způsobí otáčení ramena  $|AB|$  kolem bodu P. Síla  $F_L$  je pružná, setrvačná síla v bodě A. Změna tuhosti je docílena velikostí síly  $F_E$  působící na poloměru otáčení  $|PA|$ , kdy bod P může aktivně měnit svojí polohu na úseku  $|AB|$ . Pohybem středu otáčení P se mění poměr mezi úseky  $|BP|$  a  $|AP|$ , jestliže se nachází bod P v bodě A, tak je poměr nekonečný a tudíž je tuhost maximální možná, opačně pokud se bod P nachází v bodě B, tak je poměr nulový a akutátor je poddajný. [8]



(a) Schéma principu VSA

(b) Detailní pohled do VSA

Obrázek 2.5: Detailní pohled na princip fungování VSA motorů [8]

Podrobnější schéma je na obrázku 2.5b, kde  $\tau_{ext}$  je kroutící moment vyvolaný vstupní silou od motoru M2  $F_E$  na rameni  $|AB|$ . V článku [7] autoři vytvořili závislost mezi délkou ramena  $|AB|$  a velikostí tuhosti pružin. Například pro tuhost pružiny 200 N/mm a délce ramena  $|AB|$  90 mm dosáhli maximální tuhosti aktuátoru skoro 3500 Nm. Podrobnější data jsou dostupná v článku [7].





## Úvodní pojmy v mechanice

V rámci bakalářské práce je zkoumána statická, kinematická a dynamická soustava tuhých těles. V následujících kapitolách budou popsány důležité pojmy a vztahy, jež budou v práci využity, přičemž se převážně zaměříme na rovinné případy.

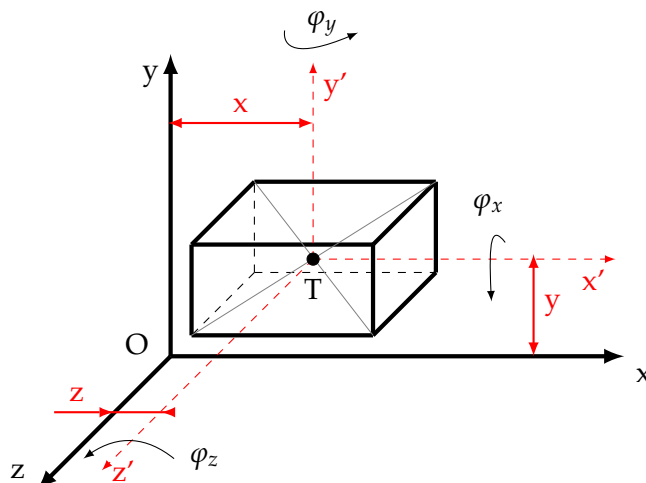
### 3.1 Definice tuhého tělesa

U dokonale tuhého tělesa se zanedbávají strukturní změny tělesa, to znamená, že těleso nepodléhá deformaci. Obecně tělesa lze definovat jako soustavu hmotných bodů. Tyto hmotné body mezi sebou udržují konstantní vzdálenost i pod vlivem vnějších sil. Hmotný bod lze chápat jako ideální velmi malou částici, ve které je soustředěna jeho veškerá hmotnost. U hmotného bodu se zanedbávají jeho rozměry a sleduje se pouze jeho hmotnost a poloha v čase. Často se právě nahrazuje těleso jedním hmotným bodem, jehož poloha se nachází v těžišti tělesa a je v něm soustředěna veškerá hmotnost tělesa. [9]

### 3.2 Poloha tuhého tělesa

Obecně těleso v prostoru se může pohybovat v Kartézském souřadnicovém systému  $x, y, z$  translačně třemi směry ve směrech  $os\ x, y, z$ . Dále se může otáčet kolem třech  $os\ x, y, z$ . Lze tedy říci, že volné těleso v prostoru má 6 stupňů volnosti. Pro popis polohy tělesa v prostoru se zavede těžiště tělesa. Těžiště  $T$  je bod, ve kterém je soustředěna veškerá hmotnost tělesa a musí se nacházet v homogenním tíhovém poli. Pro jednoznačné určení polohy těžiště je nutné, aby těleso mělo konstantní hustotu v celém svém objemu. Aby šlo popsat polohu volného tělesa v prostoru bude potřeba 6 nezávislých souřadnic  $x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Souřadnice  $x, y, z$  jsou lineární vzdálenosti mezi souřadnicovým systémem  $O-xyz$  a těžištěm

T. Úhly natočení  $\varphi_{(x,y,z)}$  reprezentují natočení tělesa vůči počátečnímu souřadnicovému systému O-xyz. [10, 11] U rovinného případu, např. v rovině xy stačí pro popis polohy pouze 3 nezávislé souřadnice pro 3 stupně volnosti tělesa. Jeho poloha se vyjádří pomocí lineárních souřadnic x,y a úhlem natočení kolem osy z.



Obrázek 3.1: Poloha volného tělesa v prostoru

### 3.3 Moment setrvačnosti

Dynamika také řeší rotací těles, a proto je důležité si stanovit pojem moment setrvačnosti. Jedná se o fyzikální vlastnost tělesa, která charakterizuje rozložení hmoty kolem osy otáčení. Udává míru odporu tělesa vůči změnám jeho rotačního pohybu. Moment setrvačnosti vždy stanovujeme k ose rotace. Tato osa rotace se může nacházet i mimo těleso. V našem případě osa rotace bude procházet těžištěm tělesa. Jeho velikost je definována jako součet součinů hmotnosti všech částic tělesa a kvadrátu jejich vzdálenosti od osy rotace viz vztah

$$I = \int_{(m)} r^2 \cdot dm$$

Kde I je moment setrvačnosti [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ], r je vzdálenost částice hmoty od osy rotace a dm je hmotnost částice. [12]

### 3.4 Vazby tuhých těles

Mechanika se nezabývá jenom jedním tuhým tělesem, ale též soustavou tuhých těles označovanou jako mechanismus. Jednotlivá tělesa jsou mezi sebou propojeny určitou vazbou, která definuje vzájemný pohyb spojených těles. Vazba

slouží pro spojení maximálně dvou těles a omezuje jejich pohyb v určitých směrech. Obecně lze říci, že typ a počet vazeb snižuje počet stupňů volnosti mechanismu. Na začátku jsme si řekli, že volné těleso v prostoru má šest stupňů volnosti a každá vazba sebou nese počet zamezujících pohybů, tj. pohybů, které vazba neumožňuje. Například máme dveře v pantech, které jsou pevně spojeny se stěnou. Pant uvažujeme jako rotační vazbu a víme, že dveře nemohou konat translační pohyb (odebrány 3 stupně volnosti) a může konat pouze jeden rotační pohyb kolem osy pantu (odebrány 2 stupně volnosti). Celkový počet stupňů volnosti dveří v prostoru je jeden. Rozeznáváme několik druhů vazeb, které lze použít v rovině nebo v prostoru a liší se počtem pohybů, které umožňují. Mezi nejpoužívanější vazby řadíme pevnou, rotační, posuvnou, šroubovici, válcovou, univerzální, sférickou. [10]

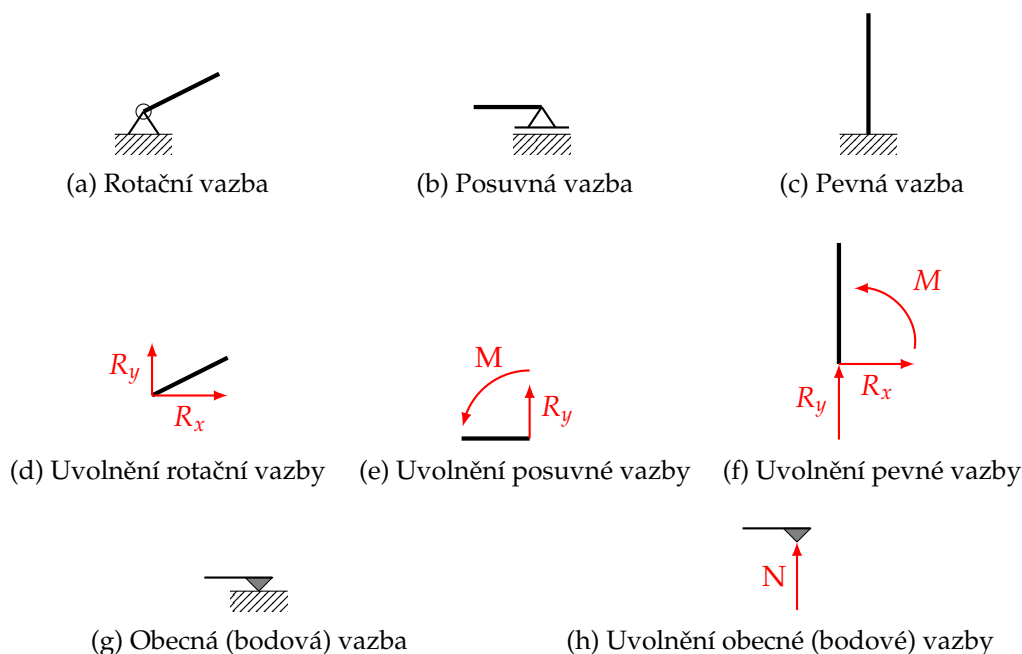
Typ vazby	PSV	PZPR	PZPP
Pevná	0	3	6
Rotační	1	2	5
Posuvná	1	2	5
Šroubová	1	–	5
Válcová	2	–	4
Univerzální	2	–	4
Sférická	3	–	3

Tabulka 3.1: Ukázka typů vazeb a jejich počtu stupňů volnosti [10]

V tabulce 3.1 jsou uvedeny hodnoty PSV, což znamená počet stupňů volnosti (kolik druhů pohybu vazba umožňuje), dále PZPR - počet zamezujících pohybů v rovině a PZPP je počet zamezujících pohybů v prostoru. Vazby typu šroubovice, válcová vazba, univerzální a sférická lze použít pouze v prostorové úloze. [10]

### 3.5 Značení vazeb a jejich uvolnění

Mechanismy často kreslíme ve zjednodušených schématech, a proto je důležité schematicky rozlišit jednotlivé vazby. Na obrázku 3.2 jsou schematicky znázorněny značky charakterizující typ rovinné vazby viz kapitola 3.4. Při řešení silových účinků na tělesa spojená vazbami se jednotlivé vazby uvolní a namísto vazby se použijí tzv. reakční síly. Jejich počet je dán počtem zamezujících pohybů viz tabulka 3.1. Pro ukázkou jsem zvolil rovinné případy, jelikož některé zmíněné vazby jsou použity při konstrukci jednoduchého robota.



Obrázek 3.2: Schematické značení rovinných vazeb a jejich nahrazení silami/momenty

### 3.6 Grublerova formulace

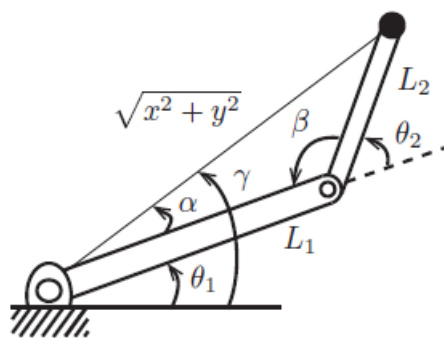
Počet stupňů volnosti (psv) pro libovolný mechanismus lze spočítat pomocí Grublerovy formulace. Mějme mechanismus skládající se z  $N$  těles včetně rámu.  $J$  představuje počet použitých vazeb spojující tělesa v jeden mechanismus,  $m$  představuje počet stupňů volnosti tuhého tělesa v rovině ( $m = 3$ ) nebo v prostoru ( $m = 6$ ),  $f_i$  udává kolik stupňů volnosti daná vazba umožňuje a  $c_i$  udává počet zamezujících pohybů každé vazby a musí platit  $f_i + c_i = m$ , neboli řečeno, součet počtu stupňů volnosti každé vazby a počet zamezujících pohybů každé vazby musí dát počet stupňů volnosti tuhého tělesa v rovině nebo v prostoru. [10]

$$\begin{aligned}
 psv &= m \cdot (N - 1) - \sum_{i=1}^J c_i \\
 &= m \cdot (N - 1) - \sum_{i=1}^J (m - f_i) \\
 &= m \cdot (N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rovnice 3.1 platí pouze pro mechanismy, jejichž vazbová omezení jsou nezávislá.

## Kinematika tuhých těles

V předchozí kapitole bylo definováno, že pro popis tělesa v prostoru je potřeba šest nezávislých souřadnic. V rovině se jedná pouze o tři nezávislé souřadnice. Jelikož se poloha tělesa v čase mění, tak je potřeba tyto změny popsat. K tomu bude sloužit kapitola kinematika tuhých těles, která popíše závislost polohy tuhého tělesa na čase. Pro souřadnice polohy určitého tělesa bude platit, že nebudou konstantní, ale jejich hodnota bude funkcí času. Kinematiku tuhých těles lze rozlišit na dopřednou a inverzní. Představme si sériový mechanismus viz obrázek 4.1. Dopřednou kinematikou získáme polohu koncového bodu manipulátoru  $[x,y]$  (černá tečka) v závislosti na zvolených relativních úhlech natočení jednotlivých ramen  $\theta_1, \theta_2$ . Pokud bychom chtěli dostat koncový bod manipulátoru do námi zvolené polohy  $[x,y]$  tak inverzní kinematikou se vypočtou potřebné úhly natočení  $\theta_1, \theta_2$ , které nám zajistí potřebnou polohu koncového bodu. [10]



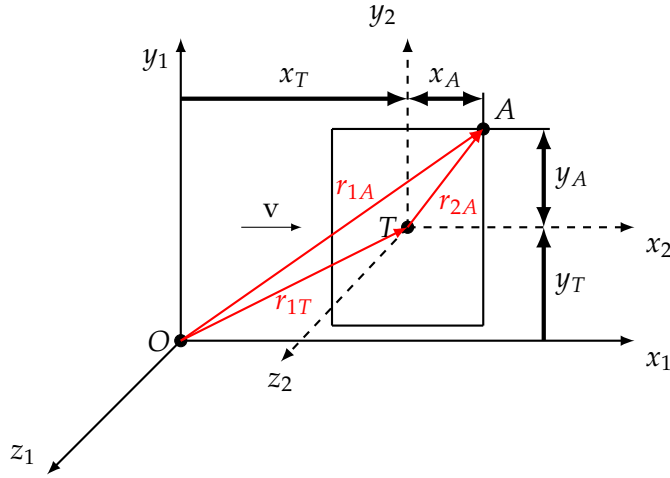
Obrázek 4.1: Ukázkový dvouramenný rovinný mechanismus [10]

## 4.1 Dopředná kinematika

Nejprve si rozebereme dopřednou kinematiku tuhého tělesa, kde budou popsány translační a rotační pohyby těles v rovině.

### 4.1.1 Posuvný pohyb tuhého tělesa

Těleso se pohybuje posuvným pohybem, jestliže alespoň dvě jeho navzájem nerovnoběžné přímky nemění při pohybu svůj směr (úhel natočení systému tělesa  $T-x_2, y_2, z_2$  se nemění vůči počátku souřadnicovému systému  $O-x_1y_1z_1$ ). [13]



Obrázek 4.2: Posuvný pohyb tělesa v rovině

Kde na obrázku 4.2 je těleso, které koná posuvný pohyb podél osy  $x$  konstantní rychlostí  $\mathbf{v}$ . Bod  $O$  je středem souřadnicového systému  $O-x_1y_1z_1$ , bod  $T$  je těžiště tělesa a naším cílem je popsat polohu bodu  $A$  v čase  $t$  vzhledem k základnímu souřadnicovému systému  $O-x_1y_1z_1$ , polohu bodu  $A$  vyjádříme pomocí vektoru  $\mathbf{r}_{1A}$ .

$${}^1\mathbf{r}_{1A} = {}^1\mathbf{r}_{1T} + {}^1\mathbf{r}_{2A} \quad (4.1)$$

Vektor  $\mathbf{r}_{1T}$  je průvodič bodu  $T$  v základním souřadnicovém systému  $O-x_1y_1z_1$ ,  $\mathbf{r}_{2A}$  je konstantní vektor, jehož velikost je vzdálenost těžiště  $T$  od bodu  $A$ , přičemž sklon vektoru  $\mathbf{r}_{2A}$  je konstantní (díky posuvnému pohybu). Horní levý index u vektorů  ${}^1\mathbf{r}$  značí vůči jakému systému vyjádříme polohu bodu. [13] Pro rychlost pohybu bodu  $A$  vzhledem k základnímu souřadnicovému systému vyjdeme z první časové derivace polohy a dostaneme:

$$\mathbf{v}_{1A} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{1A}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{1T} + \mathbf{r}_{2A}) = \mathbf{v}_{1T} + 0 = \mathbf{v}_{1T} \quad (4.2)$$

Zrychlení bodu  $A$  vzhledem k základnímu souřadnicovému systému vyjádříme jako druhou časovou derivaci polohy nebo první časové derivace rychlosti.

$$\mathbf{a}_{1A} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_{1A}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{1A}) = \mathbf{a}_{1T} \quad (4.3)$$

Pohyb tělesa je tedy určen pohybem jednoho bodu. Velmi často se pro popis polohy využívá těžiště tělesa. Posuvný pohyb můžeme popsat pomocí rozšířených matic. V rovině má transformační matice tvar  $3 \times 3$ , v prostoru je to  $4 \times 4$ . V této matici jsou uvedeny údaje o úhlové orientaci bodu vůči danému referenčnímu systému a jeho posuvech vůči těmto referenčním systémům. Pro každý směr posuvu či natočení se zavádí právě jedna transformační matice. Chceme-li vyjádřit polohu konkrétního bodu vzhledem k základnímu souřadnicovému systému pomocí jedné transformační matice, tak všechny transformační matice popisující dané změny polohy vynásobíme a dostaneme výslednou matici  $T_{1n}$ , kde  $n$  označuje souřadnicový systém. [13] Vyjádříme-li polohu souřadnicového systému  $T, x_2, y_2, z_2$  v základním souřadnicovém systému  $O, x, y, z$ , transformační matice budou vypadat následovně:

$$T_{12} = T_x(x_T) \cdot T_y(y_T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & y_T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

V rovnici 4.4 je vyjádřena transformační matice pro rovinný posuvný pohyb v rovině  $x$ - $y$ , kde  $x_T, y_T$  jsou vzdálenosti mezi základním souřadnicovým systémem a těžištěm tělesa  $T$ . Pokud bychom uvažovali prostorový posuvný pohyb, transformační matice  $T_{12}$  by měla tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & 0 & y_T \\ 0 & 0 & 1 & z_T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor  $\mathbf{r}_{1A}$  popisující polohu bodu  $A$  vzhledem k základnímu souřadnicovému systému  $O, x, y, z$  v rovině  $x$ - $y$  je roven:

$$\mathbf{r}_{1A} = T_{12} \cdot \mathbf{r}_{2A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & y_T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Kde  $x_A, y_A$  jsou konstantní vektory popisující polohu bodu  $A$  vzhledem k těžišti  $T$  v tělese 2.

## 4.2 Rotační pohyb tuhého tělesa

Při rotačním pohybu tělesa zůstává jedna jeho přímka trvale v klidu, tato přímka se nazývá osa rotace tělesa a těleso se kolem této osy rotace otáčí. Trajektorie všech bodů tělesa jsou kružnice ležící v rovinách kolmých na osu rotace a mají střed na této ose. V případě rotujícího tělesa uvažujeme pouze jeden stupeň volnosti, to znamená, že pro popis jeho polohy v čase budeme potřebovat pouze jednu souřadnici, což bude úhel pootočení  $\varphi$ . [13] V obrázku 4.3 si zavedeme ortonormální počáteční souřadnicový systém  $O - xyz$ , kde  $x, y, z$  jsou jednotkové

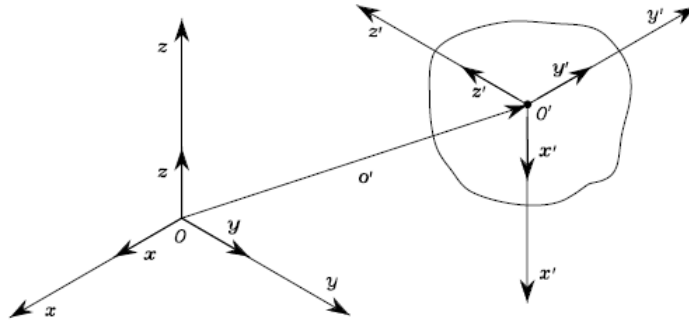
vektory ve směru jejich os. [14] Poloha bodu  $O'$  tuhého tělesa bude vyjádřena k systému  $O - xyz$  ve tvaru

$$\mathbf{o} = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z}$$

Kde složky  $o'_x, o'_y, o'_z$  označují složky vektoru  $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$  vyjádřené v systému  $O - xyz$ . Vektor  $\mathbf{o}'$  lze napsat jako vektor  $(3 \times 1)$  [14].

$$\mathbf{o}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

Abychom dokázali popsat orientaci tuhého tělesa tak si zavedeme ortonormální



Obrázek 4.3: Vyjádření polohy bodu  $O'$  vzhledem k počátečnímu souřadnicovému systému  $O, x, y, z$  [14]

souřadnicový systém  $O' - x'y'z'$ , tento systém je vztažený k tuhému tělesu. Bod  $O'$  je počátek souřadnicového systému tuhého tělesa a vektory  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  jsou jednotkové. Rovnice popisující natočení souřadnicového systému  $O' - x'y'z'$  vzhledem k systému  $O - xyz$  jsou [14]

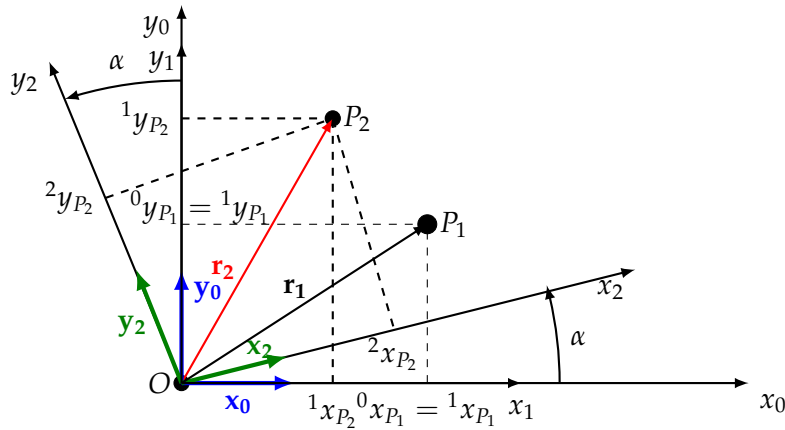
$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z} \\ \mathbf{y}' &= y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z} \\ \mathbf{z}' &= z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Prvky rovnic jako např.  $x'_x$  jsou přírůstky vzdálenosti od souřadnicového systému  $O - xyz$  k systému  $O' - x'y'z'$  ve směru osy  $x$ . Složky každého jednotkového vektoru  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  jsou směrové kosiny osy souřadnicového systému tuhého tělesa  $O' - x'y'z'$  vzhledem k základnímu souřadnicovému systému  $O - xyz$ . Vektory 4.6 můžeme zapsat do jedné matice  $3 \times 3$ . Tuto matici budeme nazývat rotační matici  $\mathbf{R}$  a bude nám popisovat rotaci tělesa v prostoru. [14] Obecně tato matice má tento tvar

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'\mathbf{x}^T & \mathbf{y}'\mathbf{x}^T & \mathbf{z}'\mathbf{x}^T \\ \mathbf{x}'\mathbf{y}^T & \mathbf{y}'\mathbf{y}^T & \mathbf{z}'\mathbf{y}^T \\ \mathbf{x}'\mathbf{z}^T & \mathbf{y}'\mathbf{z}^T & \mathbf{z}'\mathbf{z}^T \end{bmatrix} \quad (4.7)$$



Jednotkové vektory v rotační matici představují směrové kosiny a platí, jsou-li na sebe dva vektory kolmé, tak jejich skalární součin je nulový. Například pro rotaci kolem osy  $z$  budeme vycházet z následujícího obrázku:



Obrázek 4.4: Natočení systému  $O-x_2, y_2'$  vůči systému  $O-x_0, y_0$  kolem osy  $z$

Mějme základní souřadnicový systém  $O-x_0, y_0$  a v něm se nachází neotočený souřadnicový systém tuhého tělesa  $O-x_1, y_1$ . Bod  $P_1$  představuje bod v neotočeném tuhém tělese. V tomto stavu souřadnice  ${}^0x_{P_1}$  (popisující bod  $P_1$  v systému 0) a  ${}^1x_{P_1}$  (popisující bod  $P_1$  v systému 1) jsou totožné, to samé platí i pro souřadnice  ${}^0y_{P_1}$  a  ${}^1y_{P_1}$ . Vektor  $r_1$  vyjadřuje vzdálenost bodu  $P_1$  od počátku systému  $O$ . Při otočení tuhého tělesa kolem osy  $z$ , se bod  $P_1$  otočí do polohy  $P_2$  a s ním se otočí jeho souřadnicový systém  $O-x_1, y_1$  (v otočeném stavu ho popíšeme  $O-x_2, y_2$ ). Jednotkové vektory  $x_0$  a  $y_0$  reprezentují základní neotočený systém. Jednotkové vektory  $x_2$  a  $y_2$  reprezentují natočený systém  $O-x_2, y_2$  o úhel  $\alpha$  vzhledem k základnímu systému  $O-x_0, y_0$ . Chceme-li vyjádřit souřadnice bodu  $P_2$  v základním souřadnicovém systému  $O-x_0, y_0$ , tak si nejprve musíme vyjádřit matici rotace. [15] K tomu bude potřeba souřadnice jednotkových vektorů

$$x_0 = (1, 0); y_0 = (0, 1); x_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha); y_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

vektory  $x_2$  a  $y_2$  jsou vyjádřeny vzhledem k počátečnímu souřadnicovému systému. Prvky matice rotace sestavíme podle vztahu 4.7.

$$\begin{aligned} x_0 \cdot x_2 &= 1 \cdot \cos \alpha \\ x_0 \cdot y_2 &= 1 \cdot (-\sin \alpha) \\ x_0 \cdot z_2 &= 0 \\ y_0 \cdot x_2 &= 1 \cdot \sin \alpha \\ y_0 \cdot y_2 &= 1 \cdot \cos \alpha \\ y_0 \cdot z_2 &= 0 \\ z_0 \cdot x_2 &= 0 \\ z_0 \cdot y_2 &= 0 \\ z_0 \cdot z_2 &= 1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

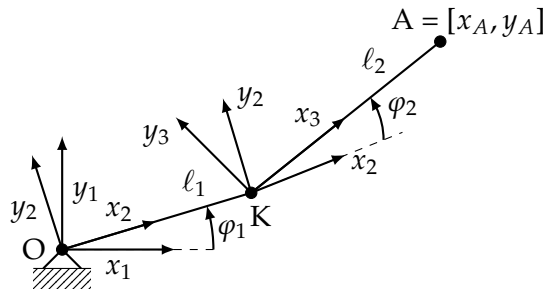
Skalární součiny obsahující jednotkové vektory  $\mathbf{z}_0$  a  $\mathbf{z}_2$  jsou nulové, jelikož při rotaci kolem osy  $z$ , jsou všechny ostatní vektory na sebe kolmé. Výsledkem toho je rozšířená rotační matice  $3 \times 3$  kolem osy  $z$

$$R_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelikož je náš cíl rovinný mechanismus, tak nás bude zajímat pouze rotační matice typu  $2 \times 2$ .

$$R_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Níže je schematicky znázorněná dopředná kinematika rovinného mechanismu, viz obrázek 4.1. Mechanismus se skládá ze dvou ramen o délkách  $\ell_1$  a  $\ell_2$ . Úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou relativní úhly natočení ramen a představují natočení souřadnicového systému jednoho ramena vůči souřadnicovému systému předchozího ramena.



Obrázek 4.5: Dopředné řešení kinematiky mechanismu, viz obrázek 4.1

Pro vyjádření polohy bodu  $A$  vůči základnímu souřadnicovému systému  $O-x_1y_1$  použijeme rozšířené transformační matice a výsledný tvar bude

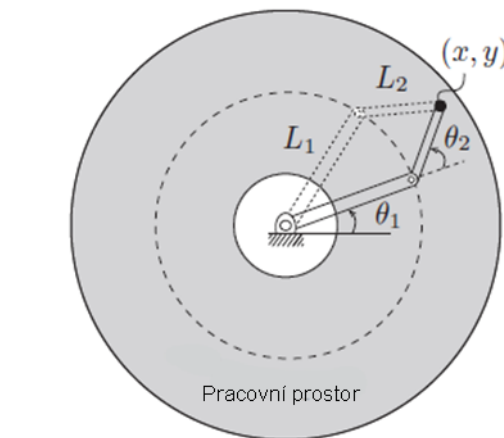
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1A} &= [x_A, y_A, 1]^T = \mathbf{T}_{13}\mathbf{r}_{3A} \\ [x_A, y_A, 1]^T &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}[\ell_2, 0, 1]^T \\ [x_A, y_A, 1]^T &= \mathbf{R}_{z,\varphi_1}\mathbf{T}_{x,\ell_1}\mathbf{R}_{z,\varphi_2}[\ell_2, 0, 1]^T \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozšířená transformační matice  $\mathbf{T}_{12}$  obsahuje údaje o rotaci systému  $O-x_2y_2$  o úhel  $\varphi_1$  kolem osy  $z$  vůči základnímu systému. Rozšířená transformační matice  $\mathbf{T}_{23}$  nese informace o změně polohy systému  $K-x_3, y_3$  vůči systému  $O-x_2y_2$  ve směru osy  $x_2$  o vzdálenost  $\ell_1$  a následně rotaci kolem osy  $z$  o úhel  $\varphi_2$ . Následný vektor  $\mathbf{r}_{3A}$  popisuje polohu bodu  $A$  v systému  $K-x_3y_3$ .

### 4.3 Inverzní kinematika

Cílem inverzní kinematiky je dostat mechanismus do námi určené polohy. V případě robotického ramena se volí souřadnice koncového bodu robota a výpočtem se dostanou úhly natočení jednotlivých ramen. Pro správné řešení je důležité zjistit pracovní prostor mechanismu, kdy podle pracovního prostoru jsme schopni zvolit souřadnice určitého bodu. Podle zvolených souřadnic bodu můžeme dostat jedno řešení, dvě řešení a nebo žádné řešení. Jedno řešení inverzní kinematiky dostaneme právě pokud souřadnice koncového bodu robota budou ležet na hraniční ploše<sup>1</sup> jeho pracovního prostoru. V této konfiguraci by byl robot maximálně napnut (všechny ramena by ležely v jedné ose). V případě získaných dvou a více řešení inverzní kinematiky se bod nachází uvnitř pracovního prostoru a počet konfigurací je dán výsledkem inverzní kinematiky, to lze vidět na obrázku 4.6. Pokud bychom nedostali žádné řešení, tak se koncový bod nachází mimo pracovní prostor robota a robot není schopen této pozice dosáhnout. [10]



Obrázek 4.6: Ukázka získaných dvou řešení z inverzní kinematiky [10]

Inverzní kinematiku mechanismu viz obrázek 4.1 lze vyřešit analyticky a pro její řešení je potřeba znalosti goniometrických funkcí a trigonometrie. Níže je ukázán postup řešení inverzní kinematiky pro dvouramenný mechanismus z obrázku 4.1. Ze znalosti souřadnic koncového bodu získáme průvodič  $R$ , který vyjádří vzdálenost a orientaci v rovině koncového bodu vzhledem k počátku mechanismu<sup>2</sup>.

Velikost průvodiče  $R$  je dána souřadnicemi koncového bodu a má tvar

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<sup>1</sup>Hraniční plochou je myšlena plocha, která vymezuje pracovní prostor robota od okolí.

<sup>2</sup>Za počátek mechanismu budeme uvažovat střed rotační vazby mezi prvním tělesem a rámem.

Orientaci průvodiče  $\mathbf{R}$  vyjádříme úhlovou kótou  $\gamma$ , která vyjádří úhel natočení průvodiče od kladné osy  $x$ . Úhel  $\gamma$  má tvar

$$\gamma = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dále je potřeba vyjádřit úhel  $\alpha$ . K tomu se použije kosinova věta

$$\begin{aligned} L_2^2 &= R^2 + L_1^2 - 2 \cdot L_1 \cdot R \cdot \cos \alpha \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{R^2 + L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot R}\right) \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{x^2 - y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

Stejný postup lze použít i pro určení úhlu  $\beta$ :

$$\begin{aligned} R^2 &= L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos \beta \\ \beta &= \arccos\left(\frac{L_2^2 + L_1^2 - R^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}\right) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{L_2^2 + L_1^2 - (x^2 + y^2)}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}\right) \end{aligned}$$

Nyní známe všechny potřebné rozměry a již lze vypočítat úhly natočení ramen  $\theta_1, \theta_2$ .

$$\theta_1 = \gamma - \alpha$$

$$\theta_2 = \pi - \beta$$

V případě druhé konfigurace ramen by úhly natočení vypadaly takto:

$$\theta_1 = \gamma + \alpha$$

$$\theta_2 = \beta - \pi$$

U úhlu  $\alpha$  došlo ke změně znaménka ze záporné na kladné. To je dáno funkcí kosinus. U úhlu  $\beta$  se změnilo pořadí, jelikož se rameno nenatočí směrem nahoru (kladný směr rotace), ale dolů, proto bude úhel  $\theta_2$  záporný.

V případě, že nelze použít analytické řešení inverzní kinematiky, tak lze použít numerickou metodu. V rámci numerického řešení inverzní kinematiky se velmi často používá Newton-Raphsonova metoda. Tato metoda využívá Taylorova rozvoje prvního řádu. Podrobnější postup výpočtu lze najít v knize [10].

# Dynamika tuhých těles a mechanismů

Dynamika se zabývá pohybem soustav těles, na které působí vnější síly a momenty. Dynamický model simuluje pohyb mechanismu a slouží pro návrh a konstrukci manipulátorů, umožňuje vytvářet řídicí strategie a plánování pohybů, návrh kloubů, aktuátorů, atd. Mezi dvě základní metody tvorby dynamického modelu patří Lagrangeovy rovnice a Newton-Eulerovy rovnice. [14]

## 5.1 Lagrangeovy rovnice II.druhu

V rámci Lagrangeových rovnic si uvedeme Lagrangeovy rovnice II.druhu, které vycházejí z kinetické a potenciální energiemi soustavy. Výsledné Lagrangeovy rovnice II.druhu budou popisovat pohyb mechanismu v čase. Pro jejich řešení je potřeba si zvolit množinu nezávislých parametrů  $\mathbf{q}$  popisujících konfiguraci mechanismu. Počet nezávislých parametrů vychází z počtu stupňů volnosti mechanismu viz 3.1, a platí, že počet prvků množiny  $\mathbf{q}$  = počet stupňů volnosti pro daný mechanismus. [10, 14]. Pro sestavení Lagrangeových rovnic použijeme Lagrangeovu funkci  $\mathcal{L}$ , která bude závislá na zvolených nezávislých parametrech  $q_j$ .

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{P}(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

Kde  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  je kinetická energie mechanismu a  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$  je potenciální energie. Lagrangeovy rovnice II.druhu pro  $j$ -tý nezávislý parametr  $q$  lze vyjádřit

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (5.2)$$

Kde  $Q_j$  je zobecněná síla vztažená k  $j$ -tému nezávislému parametru  $q$  působící na mechanismus.

### 5.1.1 Kinetické energie mechanismu

Představme si kloubový mechanismus s počtem ramen rovno  $n$ , tak celková kinetická energie mechanismu bude rovna součtu všech dílčích kinetických energií ramen. [14] Celková kinetická energie mechanismus se vyjádří jako

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{K}_{\ell_i} + \mathcal{K}_{m_i})$$

Kde  $\mathcal{K}_{\ell_i}$  je kinetická energie ramena  $i$  a  $\mathcal{K}_{m_i}$  je kinetická energie motoru pohánějící kloub ramena. Pod touto kinetickou energií je obsažena energie převodovky a motoru samotného. V naší práci je tato energie zanedbána, jelikož reálné motory nejsou součástí simulačního modelu, ale jsou nahrazeny torzními pružinami, které mají simulovat elektromechanickou sílu motoru. [14] Kinetická energie posuvného pohybu ramena  $i$  bude obecně dána

$$\mathcal{K}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{p}_{\ell_i}^2$$

Kde  $m_{\ell_i}$  je hmotnost ramena  $i$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}$  představuje vektor rychlosti těžiště ramene  $i$ . [14] Kinetická energie pro rotační pohyb ramena  $i$  bude ve tvaru

$$\mathcal{K}_{\ell_i} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_{\ell_i} \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2} I_{\ell_i} \omega_i^2$$

Kde  $\boldsymbol{\omega}_i$  je vektor úhlové rychlosti ramena  $i$ ,  $\mathbf{I}_{\ell_i}$  je tenzor momentu setrvačnosti vztážený k těžišti ramena  $i$ . [14] V naší úloze rameno bude konat obecně rovinný pohyb, což znamená, že se pohyb skládá z posuvného a rotačního pohybu, a proto kinetická energie bude součet kinetických energií těchto pohybů. Pokud se bude náš mechanismus pohybovat v rovině  $x$ - $y$ , tak moment setrvačnosti  $I_{\ell_i}$  bude vyjádřen vzhledem k ose  $z$  procházející těžištěm ramena  $i$  označen  $I_z$  a celková kinetická energie pro rameno  $i$  bude rovna

$$\mathcal{K}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{p}_{\ell_i}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Potenciální energie mechanismu

Potenciální energie se vyjádří analogicky s kinetickou energií, při uvážení  $n$ -ramenného mechanismu budeme uvažovat potenciální energii od tíhové síly působící na jednotlivá ramena a potenciální energii uloženou v motorech kloubů. [14]

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{P}_{\ell_i} + \mathcal{P}_{m_i})$$

Potenciální energie  $\mathcal{P}_{\ell_i}$  ramen dána působící tíhovou silou bude ve tvaru

$$\mathcal{P}_{\ell_i} = -m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{\ell_i}$$

Výše je vyjádřena potenciální energie ramena  $i$  vzhledem k počátečnímu souřadnicovému systému a k vertikální ose z kartézského souřadnicového systému. Vektor  $\mathbf{g}_0$  má tvar  $[0 \ 0 \ -g]^T$ . Vektor  $\mathbf{p}_{\ell_i}$  představuje změnu polohy těžiště ramena  $i$  vzhledem k ose počátečního systému rovnoběžnou s vektorem gravitačního zrychlení  $\mathbf{g}_0$ .  $m_{\ell_i}$  je hmotnost ramena  $i$ . [14] V případě našeho reálného mechanismu (zmíněn v dalších kapitolách) je změna polohy horizontální a tudíž bude vektor změny polohy  $\mathbf{p}_{\ell_i}$  nulový a s tím i potenciální energie  $\mathcal{P}_{\ell_i}$ . Potenciální energie kloubů v motorech  $\mathcal{P}_{m_i}$  může obsahovat např. energii uloženou ve formě stlačené pružiny, viz VSA motory 2.5. V této práci tuto energii nebudeme zohledňovat, jelikož ji pro výpočet statické tuhosti robotického mechanismu nepotřebujeme.

### 5.1.3 Princip virtuálních prací

Zobecněné síly  $Q$ , které představují výsledné působení vnějších sil na mechanismus, je potřeba je promítnout do nezávislých parametrů  $q$ , který popisuje pohyb mechanismu. Má-li mechanismus více nezávislých parametrů, tak každému parametru bude příslušet jedna zobecněná síla  $Q_j$ . Jedna z metod, která nám určí tvar zobecněných sil  $Q$  se nazývá princip virtuálních prací. Mezi vnější síly můžeme řadit hnací síly a momenty, síly od pružin, od tlumení, atd. Princip je založen na vyjádření virtuální práce od každé síly působící na mechanismus na virtuálním posunutí. Virtuální posunutí se rozumí velmi malý posuv ve směru působení síly, který je v souladu s pohybovými možnostmi mechanismu. Virtuální posun nepřerušuje vazby soustavy a je pouze fiktivní a nemusí ve skutečnosti nastat. Virtuálním posuvem je myšleno i natočení v případě torzních pružin. Prvním krokem je potřeba si zvolit nulovou, referenční polohu, od které vyneseme délkové kóty, představující virtuální posuvy k působišťům vnějších sil. Pokud smysl působení vnější síly působí proti kótě jdoucí od referenční polohy k působišti vnější síly, tak účinek práce vykonanou vnější silou na dráze představující virtuální posuv je záporný. V opačném případě se jedná o kladně vykonanou práci. Dalším krokem je vyjádřit všechny virtuální posuvy na nezávislém parametru  $q_j$  popisující pohyb mechanismu. Jejich součtem dostaneme výslednou virtuální práci, kde při eliminování virtuálních posuvů získáme výslednou zobecněnou sílu  $Q_j$ .

Na obrázku 5.1a je znázorněn jednoduchý příklad se závažím a lineární pružinou. Jedná se o jednohmotový systém, kdy na závaží působí tíhová síla  $G$ , vnější hnací síla  $F$  a síla od pružiny  $F_p$ , viz obrázek 5.1b. Síla pružiny  $F_p$  je rovna součinu tuhosti pružiny  $k$  a její deformací  $\xi$ . V našem případě je  $\xi$  rovno  $\Delta\ell$ , při zanedbání rozměrů závaží a považování ho za hmotný bod. Do potenciální energie se zahrne tíhová síla a do zobecněné síly bude patřit vnější síla  $F$  a síla od pružiny  $F_p$ . Jelikož parametr popisující pohyb mechanismu je pouze poloha závaží ve směru osy  $y$ , označena kótou  $\xi$ , tak výsledkem bude jedna Lagrangeova

rovnice II.druhu s jednou zobecněnou silou  $Q$ .

$$\begin{aligned} Q \cdot \delta\zeta &= F \cdot \delta\zeta - F_p \cdot \delta\zeta \\ F_p &= k \cdot \zeta \\ Q \cdot \delta\zeta &= F \cdot \delta\zeta - k \cdot \zeta \cdot \delta\zeta \\ Q &= F - k \cdot \zeta \end{aligned} \tag{5.4}$$

Virtuální posuv použitý v rovnici 5.4 je označen  $\delta\zeta$ . Pro kompletní dynamický popis mechanismu použijeme Lagrangeovy rovnice II.druhu

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\zeta, \dot{\zeta}) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\zeta}^2 \\ \mathcal{P}(\zeta) &= -m \cdot \mathbf{g}_0^T \cdot \zeta \end{aligned} \tag{5.5}$$

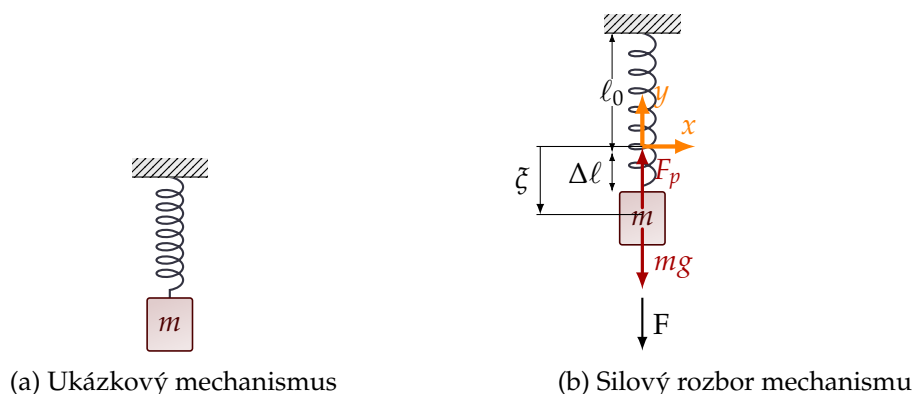
Při vyjádření Lagrangeových rovnic II.druhu do směru osy  $y$  nahradíme vektor  $\mathbf{g}_0$  prvkem  $-g_0$  působící proti směru osy  $y$  a vektor  $\zeta$  se nahradí kótou  $-\zeta$ . Po dosažení do rovnic 5.5 dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\zeta, \dot{\zeta}) &= \mathcal{K}(\zeta, \dot{\zeta}) - \mathcal{P}(\zeta) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-\dot{\zeta})^2 - (-m \cdot (-g) \cdot (-\zeta)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\zeta}^2 + m \cdot g \cdot \zeta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} &= m \cdot g \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} &= m \cdot \dot{\zeta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} &= m \cdot \ddot{\zeta} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Výsledná pohybová rovnice mechanismus dle rovnice 5.2 závislá na parametru  $\zeta$  bude ve tvaru

$$m \cdot \ddot{\zeta} - m \cdot g = F - k \cdot \zeta$$





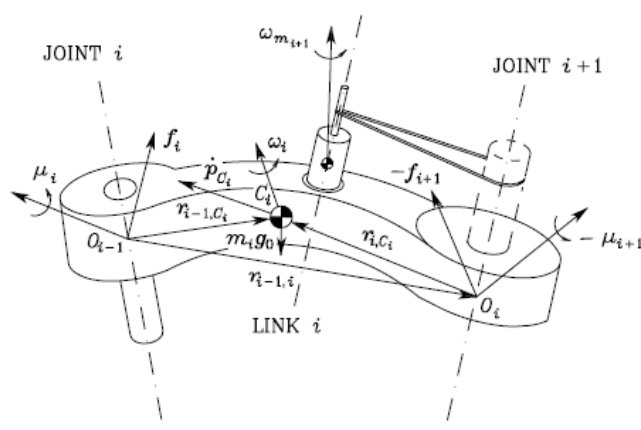
(a) Ukázkový mechanismus

(b) Silový rozbor mechanismu

Obrázek 5.1: Dynamický model lineární pružiny se závažím

## 5.2 Newton-Eulerovy rovnice

Při použití Lagrangeových rovnic II.druhu se pro popis systému vychází z Lagrangeovy funkce, která závisí na kinetické a potenciální energii mechanismu. V případě Newton-Eulerovo dynamickém popisu mechanismu se vychází z rovnováhy všech sil působících na jednotlivá tělesa mechanismu (metoda uvolňování). [14] Newton - Eulerovou metodou získáme pohybové rovnice pro všechna tělesa (v rovině pro každé těleso přesně 3 rovnice). Na rozdíl od Lagrangeových rovnic jsou v pohybových rovnicích obsaženy i reakce ve vazbách těles. Řešení Newton-Eulerových rovnic vede na algebro-diferenciální rovnice, což může být v některých situacích složité na výpočet. Představme si poháněné těleso  $i$  ve dvou kloubech rotačními motory.



Obrázek 5.2: Dynamický popis tělesa pomocí Newton-Eulerových rovnic [14]

Pro popis mechanismu je potřeba si zadefinovat potřebné parametry k odvození Newton-Eulerových rovnic pro dané těleso.

V rovnici 5.7 je obecně vyjádřená Newton-Eulerova rovnice pro translační

Použitý symbol veličiny	Význam veličiny
$m_i$	Hmotnost zkoumaného tělesa
$\mathbf{I}_i$	Tenzor momentu setrvačnosti tělesa
$I_{m_i}$	Moment setrvačnosti použitých motorů
$\mathbf{r}_{i-1,c_i}$	Vektor popisující vzdálenost mezi kloubem ( $i-1$ ) a těžištěm tělesa $c_i$
$\mathbf{r}_{i,c_i}$	Vektor popisující vzdálenost mezi kloubem $i$ a těžištěm tělesa $c_i$
$\ddot{\mathbf{p}}_{c_i}$	Lineární zrychlení těžiště tělesa $c_i$
$\boldsymbol{\omega}_i$	Úhlová rychlost tělesa
$\mathbf{g}_0$	Gravitační zrychlení
$\mathbf{f}_i$	Síla vynaložená tělesem $i-1$ na těleso $i$
$-\mathbf{f}_{i+1}$	Síla vynaložená tělesem $i+1$ na těleso $i$
$\boldsymbol{\mu}_i$	Moment vynaložený tělesem $i-1$ na těleso $i$
$-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$	Moment vynaložený tělesem $i+1$ na těleso $i$

Tabulka 5.1: Tabulka proměnných pro popis Newton-Eulerových rovnic [14]

pohyb [14]

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_0 = m_i \ddot{\mathbf{p}}_{c_i} \quad (5.7)$$

V rovnici 5.8 je obecně vyjádřena Newton-Eulerova rovnice popisující rotační pohyb tělesa. Tuto rovnici vyjádříme vůči těžišti tělesa  $c_i$ .

$$\boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,c_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,c_i} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (5.8)$$

V Newton-Eulerově rovnici pro rotační pohyb se neprojevil příspěvek tíhové síly od hmotnosti tělesa, jelikož se působíště tíhové síly nachází v samotném těžišti tělesa  $c_i$  a negeneruje moment vůči tomuto bodu. V knize [14] autoři uvažují v rovnici pro rotační pohyb i rotaci od motorů. Tuto myšlenku jsem ve své práci nevedl, jelikož náš simulační model neobsahuje reálné motory a polohování ramen se provede příkazem, tak jsem žádné otáčky motorů neuvažoval. Rovnice 5.7 a 5.8 tvoří soustavu Newton-Eulerových rovnic popisující pohyb tělesa  $i$ .

## Experimentální část

V této kapitole se popíše návrh experimentálního zařízení pro určení tuhosti robotických systémů v rovině. Za robotický systém považujeme dvouramenný mechanismus, který je řízen v kloubech každého ramena. Následné spojení těchto dvou mechanismů nám vzniká paralelní struktura o čtyřech ramenech. Proto experimentální zařízení musí být připraveno na oba případy robotických systémů. Experiment se bude skládat ze dvou částí. První část bude sloužit pro vygenerování síly o určité velikosti a směru působení, která bude zatěžovat druhou část experimentu a to samotný robotický systém.

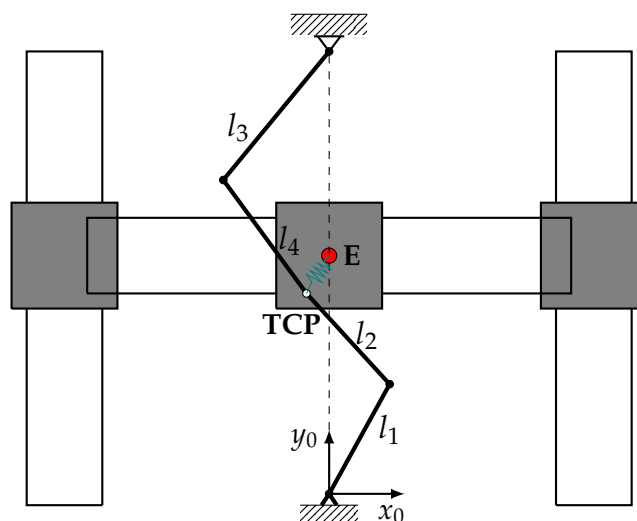
### 6.1 Popis experimentu

Prvotním cílem bylo vytvořit první část experimentu označenou jako zatěžovací zařízení. Koncový bod E viz obrázek 6.1 zatěžovacího zařízení by měl dosáhnout libovolného místa v rovině v námi stanovém pracovním prostoru. Aby byl pohyb plynulý a přesný, bez velkých ztrát, tak byly použity tři magneticky řízené lineární vedení. Délky všech tří lineárních vedení jsou stejně dlouhé o délkách 650 mm. Po uspořádání vedení do požadovaného rozmístění nám vznikl pracovní prostor pro řízení zatěžovacího zařízení 500 x 500 mm. K tomu byly navrženy rozměry dvouramenného mechanismu, viz kapitola 7. Pro vygenerování síly o určité velikosti a směru působení se přichytí na zatěžovací mechanismus do bodu E lineární pružina, která bude dále spojena s koncovým bodem TCP<sup>1</sup>. robotického systému. Pohybem zatěžovacího zařízení dojde k deformaci pružiny a tím vznik tahové síly. Důležitým výstupem z experimentu bude změna polohy koncového bodu TCP během silového působení. Polohu bodu TCP plánujeme měřit pomocí Laser Tracku.

Na obrázku 6.1 je schematicky znázorněn návrh našeho experimentu při spojených dvou dvouramenných robotech a na obrázku 6.2 je verze s pouze jed-

<sup>1</sup>Tool Center Point je bod označován jako koncový bod robotického mechanismu.

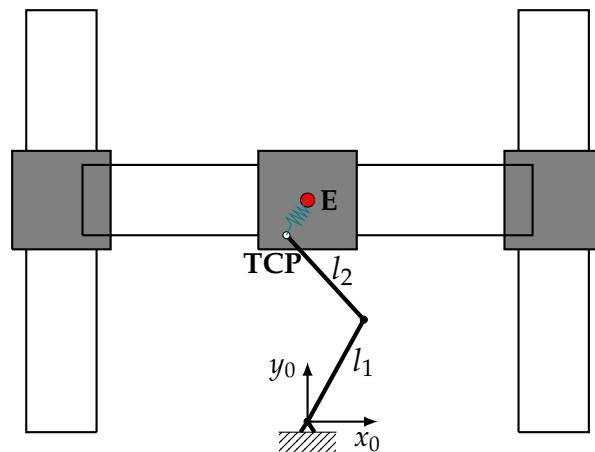
ním dvouramenným robotem. Zatěžovací zařízení je tvořeno třemi lineárními vedeními (bílé bloky), šedé bloky znázorňují vzájemné ukotvení jednotlivých vedení. Červený bod označen písmenem E představuje koncový bod zatěžovacího zařízení. Robotický systém je již znázorněn v čtyřramenném provedení. Princip spočívá v nastavení polohy koncového bodu robotického systému TCP natočením hnacích motorů v kloubech jednotlivých ramen (černé tečky). Poté se nastaví poloha koncového bodu vedení E do vzdálenosti, která představuje volnou délku pružiny. Dále dojde k tahové deformaci pružiny a obkroužení pružiny v této vzdálenosti kolem bodu TCP. Tahovou deformací pružiny vyvineme sílu o určité velikosti. Změna polohy vyvolaná touto silou odpovídá poddajnosti robotického systému pouze ve směru působení síly od pružiny, inverzí k poddajnosti se dostane tuhost. Pro získání tuhostního rozložení viz obrázek 7.6a je potřeba měnit směr působení síly od pružiny po kružnici, čím větší dělení nastavíme, tím přesnější pak následné tuhostní rozložení bude.



Obrázek 6.1: Schéma reálného experimentu při čtyřramenné konfiguraci

## 6.2 Stavba experimentu

Jelikož výchozí lineární vedení nebyly uzpůsobeny na vzájemné ukotvení, tak se musel vytvořit mezičlen, který výsledné spojení zprostředkuje. Byl zvolen vypálený hliníkový plech tloušťky 10 mm. Další variantou bylo použít technologii 3d tisku, jenže samotná vedení jsou poměrně těžká a při pohybu vedení by mohlo dojít k poškození mezičlenu. Finální provedení bylo provedeno pomocí hliníkového plechu, který nám vypálila firma Plehaso k.s. Další úpravy plechu byly provedeny v dílně ústavu mechaniky. Dalším krokem bylo sestavit základní strukturu, na které bude zatěžovací zařízení přichyceno. Základní strukturu je sestavena z hliníkových profilů s drážkami pro T šrouby od firmy Alutec kk. Právě pomocí šroubů s válcovou hlavou a matic, které jsou vhodné do

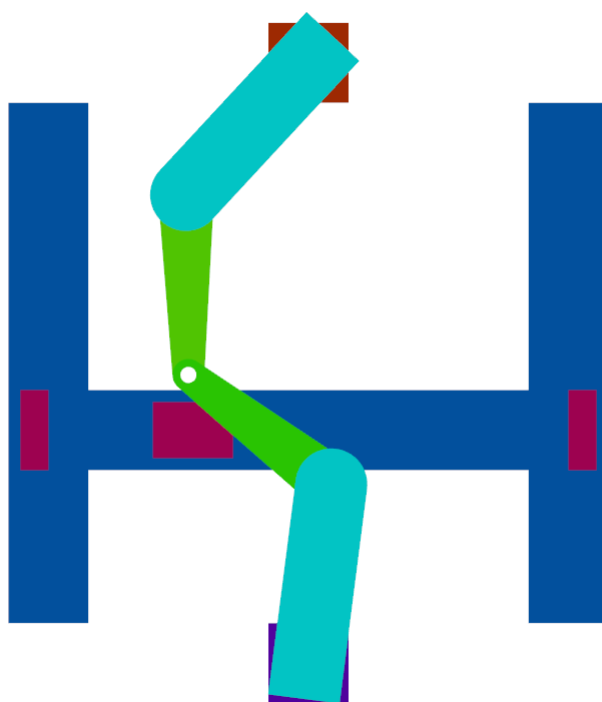


Obrázek 6.2: Schéma reálného experimentu při dvouramenné konfiguraci

T drážek bylo možné spojit lineární vedení se základní strukturou. Dále bylo potřeba vyřešit přívody kabelů pro řízení a napájení lineárních vedení. Tento problém byl vyřešen pomocí pohyblivých energetických plastových řetězů, které jsou pevně spojeny se základní strukturou a lineárním vedením, které se bude vůči základní struktuře pohybovat. Do energetických řetězů se pak následně vloží přívodní kabely, které blokovat v pohybu lineárního vedení. Pro přesné vedení těchto řetězů byly vymodelovány a následně pomocí 3d tisku vyrobeny pojezdy, které se pomocí šroubů přichytí k základní struktuře. V rámci elektronických záležitostí byly napájeny přívodní kabely pro řízení a pohony na DB konektory, které jsou dále spojeny s kabely od jednotlivých vedení, které byly dány již od výroby. Místo kde dojde k tomuto spojení je zobrazeno na obrázku 6.4 jako spojení přívodních kabelů. Tento díl byl opět vymodelován a vytisknut na 3d tiskárně.

### 6.3 Simulační model experimentu

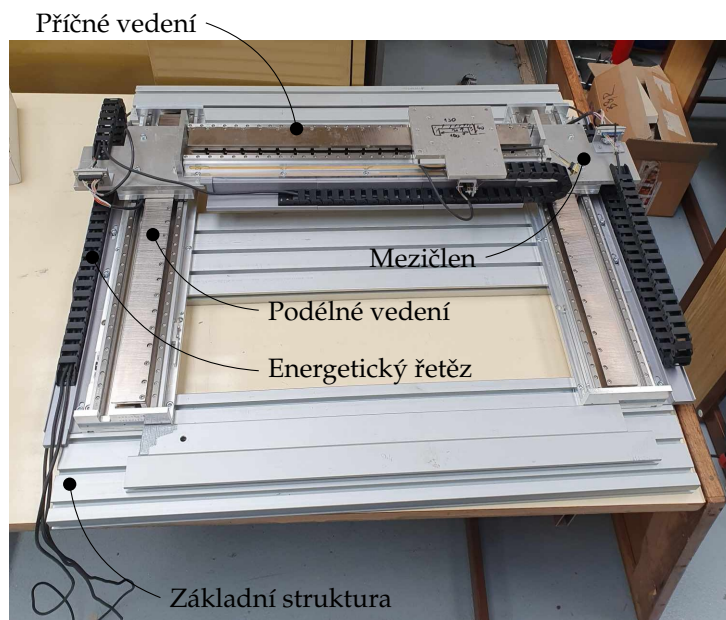
Na obrázku 6.3 je animačně vykreslen budoucí reálný experiment, který bude sloužit k ověření tuhosti robotických systémů. Modré bloky představují lineární magnetické vedení, červené bloky jsou mezičleny spojující vedení. Zbylé modely představují kompletní robotický systém. Na příčném červeném bloku bude přichycena lineární pružina, která bude silově namáhat koncový bod systému TCP (bílý bod). Zároveň jsme provedli simulaci, kde jsme napoložovali robota do několika míst jeho pracovního prostoru<sup>2</sup> a kolem koncového bodu TCP se objelo zatěžovacím zařízením s pružinou a bylo vyvinuto tak zatížení na robota. Během simulace jsme zkoumali změnu polohy koncového bodu TCP. Výsledkem bylo ukázat jak výsledný experiment bude pracovat. Jelikož jsme během simulace narazili na možné kinematické singularity, tak se ramena pohybují v pracovním prostoru rozpojeně a v následné poloze, ve které se provede zatížení budou již ramena spojena. Na reálném experimentu již bude potřeba mít vyřešené kinematické singularity, aby robot mohl pracovat bezproblémově. Program obsahující tuto simulaci je součástí příložených programů.



Obrázek 6.3: Simulační model experimentu v Matlab Simulink

<sup>2</sup>Pracovní prostor robota je zmíněn v podkapitole 7.1.

## 6.4 Reálná konstrukce experimentu



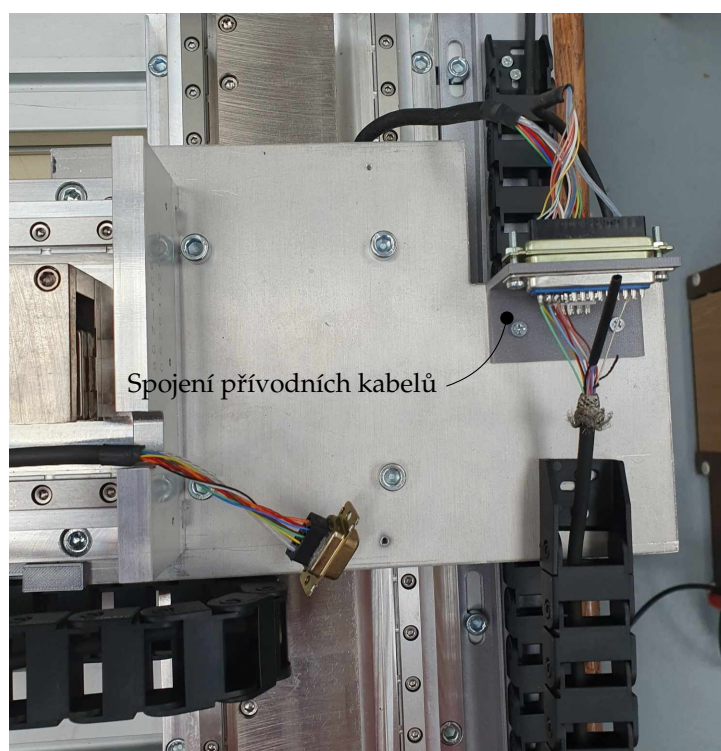
Obrázek 6.4: Konstrukce reálného zatěžovacího zařízení

Na obrázku 6.4 je znázorněn aktuální stav reálného zatěžovacího zařízení. Základní struktura je tvořena třemi hliníkovými obdélníkovými profily o šířce 180 mm a délce 900 mm na ní jsou našroubovaná dvě podélná lineární magnetická vedení. Příčné vedení je pak spojeno pomocí mezičlenů, které jsou pevně spojeny s podélnými vedeními. Černé energetické řetězce po stranách vedení slouží na vedení kabelů pro pohon a řízení lineárních vedení. Detailnější pohled je na obrázku 6.5. V levém dolním rohu obrázku 6.4 má zařízení výstup všech kabelů, které se připojí následně k řídicím jednotkám, které budou umístěny mimo pracovní prostor experimentu.

Na obrázku 6.5 jsou zároveň vidět pojezdové dráhy pro pohybující se energetické řetězce. Na koncích pojezdových drah jsou výstupky, které slouží pro ukotvení své polohy, zároveň jsou přišroubovány k příčnému lineárnímu vedení. Pojezdové dráhy jsou vyrobeny 3d tiskem. Na mezičlenu dochází ke spojení příčného vedení, které je k mezičlenu spojena dvěma šrouby a také na propojení kabelů od lineárních vedení a kabelů putující dále do řídicí jednotky.



Obrázek 6.5: Detailní zobrazení vedení energetických řetězů

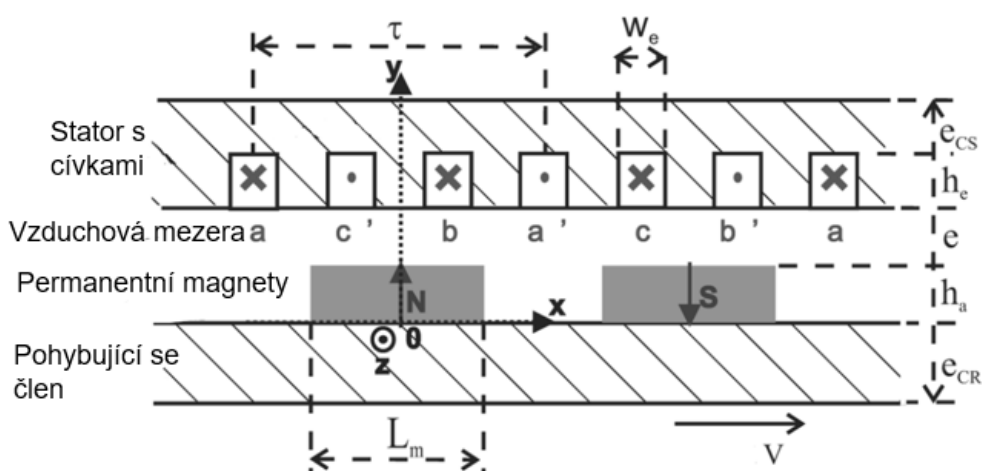


Obrázek 6.6: Námí vytvořený mezičlen spojující lineární vedení



## 6.5 Typy lineárních vedení a jejich popis

Mimo magnetické lineární vedení existují i mechanická vedení, která pracují na třecích poměrech. Mechanický způsob fungování posuvných aktuátorů, zejména pomocí ozubeného řemene nebo kuličkového šroubu, spočívá v přeměně rotačního pohybu z motoru (jako je krokový motor, servomotor, synchronní motor atd.) na lineární pohyb. Magnetické lineární aktuátory s permanentními magnety se skládají z permanentních magnetů a elektromagnetickými cívkami. Pohyb se uskutečňuje změnou proudu v cívkách, které vytvářejí magnetické pole a permanentní magnety na tuto změnu reagují změnou polohy. Po celé délce je několik cívek, které jsou od sebe vzdáleny roztečí  $\tau$ . [16]



Obrázek 6.7: Schéma magnetického lineárního aktuátoru s permanentními magnety [16]

U mechanických lineárních vedení je nezbytným faktorem materiál, který je v lineárních akuatorích použit. Ozubený řemen je obvykle vyroben z elastomeru vyztuženými vlákny nebo z polyuretanu vyztuženého ocelí. Kuličkový šroub má válcovaný nebo broušený závit a kuličky jsou kalené a vyrobené z oceli. Řemenový lineární aktuátor má výhodu dosažení větších délek (10 až 12 m), kdežto kuličkový šroub se pohybuje v rozmezí 0 - 1 m. Co se týče zatížení, tak kuličkový šroub dokáže přenést tělesa o větších hmotnostech (až 5-ti násobek než u řemenového převodu). Z hlediska údržby je potřeba u obou mechanismů mazat komponenty (šroub, matice, ložiska), abychom dosáhli co největší možné životnosti. U řemenových převodů je potřeba řemen napínat pro správný přenos momentu.[17]

Použití magnetických lineárních aktuátorů je podobné jako u lineárních akuatorů s mechanickými prvky, takže např. robotika, obráběcí stroje, souřadnicové měřicí přístroje, lékařství - chirurgické nástroje, atd. Obecně se jedná o velmi přesné vedení, řízení a rychlost polohování. Při pohybu nedochází ke kontaktu mezi statickou a pohyblivou částí, díky magnetickému poli, které způsobuje levitaci pohyblivého členu. Určitou nevýhodou je vyšší spotřeba

energie při pracovní zátěži, horší vlastnosti za vyšších teplot nebo pokud se aktuátor nachází v jiném magnetickém poli. [18]

## 6.6 Další kroky

Momentálně je postavené zatěžovací zařízení tvořené třemi magnetickými lineárními vedeními. Dále byl připraven prostor a dráhy pro přívod řídicích a napájecích kabelů. Dalším krokem bude zprovoznit zatěžovací zařízení. Poté co zatěžovací zařízení bude plně funkční, je potřeba postavit základny pro uchycení robotických systémů. Základny jsou vyobrazeny na obrázku 6.1 pomocí rámu a rotační vazby. Experiment by měl vypadat tak, že zatěžovací zařízení bude operovat pod robotickým systémem. Abychom zabránili deformaci ramen robotického systému ve směru osy  $z$ , tak je v plánu na zatěžovací mechanismus vytvořit vzduchové podpory, které budou vytvářet virtuální podporu koncového bodu TCP. Dále bude potřeba vyřešit měření polohy koncového bodu TCP, to provedeme pomocí Laser Tracku.

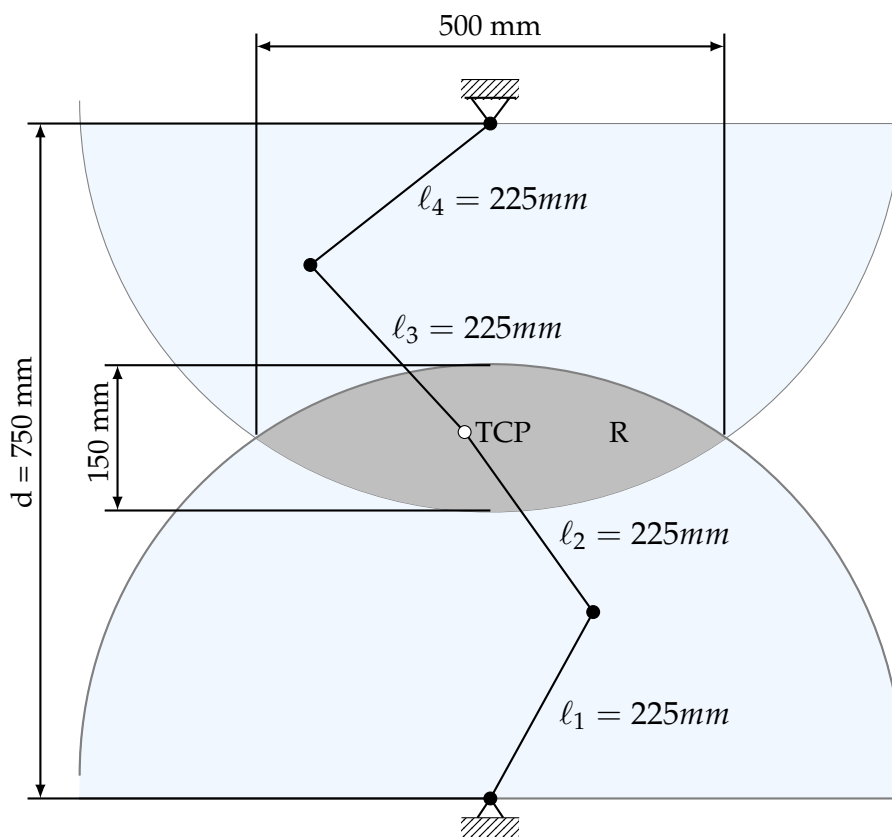
V rámci stavby robotických systémů je potřeba sehnat hnací rotační motory, které se umístí do ramen. Prvotní plán je použít krokové motory nebo BLDC motory. V návaznosti na použité motory je potřeba doladit prostor na jejich umístění na rameni. Nakonec se ramena vytisknou na 3d tiskárně a po jejich sestavení se budeme zabývat problémem jejich řízení.

## Simulační část

V minulé kapitole bylo navrženo zatěžovací zařízení, které nám připravilo pracovní prostor pro robotické systémy o rozměrech 500 x 500 mm. Nyní se na tento pracovní prostor navrhne robotický systém, který se bude skládat ze dvou ramen a v každém kloubu ramena bude umístěn hnací motor. Spojením dvou těchto systémů dostaneme čtyřramenný mechanismus. V této kapitole bude sestaven simulační model našeho robotického systému, s jehož pomocí získáme tuhostní rozložení robotického systému v konkrétním bodě jeho pracovního prostoru. Zároveň budeme chtít ukázat rozdíl v tuhostech při jednom dvouramenném mechanismu a spojeném čtyřramenném mechanismu.

### 7.1 Návrh rozměrů ramen a pracovního prostoru

Při návrhu rozměrů dvouramenného mechanismu se vycházelo z námi vytvořeného pracovního prostoru zatěžovacího zařízení, zároveň bylo stanoveno, že všechny ramena budou stejně dlouhá ( $l_1 = l_2$ ). Reálný pracovní prostor robotických systémů bude menší, jelikož pracovní prostor jednoho dvouramenného mechanismu činí kruh o poloměru součtu délek dvou ramen, ale při paralelním spojení dvou dvouramenných mechanismů se pracovní prostor zmenší na průnik jednotlivých pracovních prostorů dvou dvouramenných mechanismů. Tento průnik pracovních ploch je znázorněn na obrázku 7.1, kde se jedná o šedou oblast označenou písmenem R.



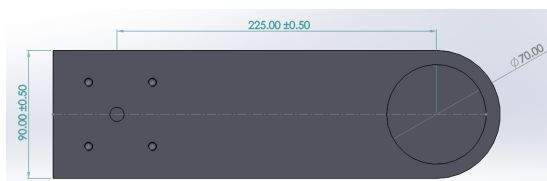
Obrázek 7.1: Zjednodušené schéma robotického systému v čtyřramenném provedení

Na obrázku 7.1 je zjednodušené schéma již spojeného čtyřramenného mechanismu. Černé úsečky reprezentují jednotlivá ramena o délkách  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Černě vybarvené kruhy, představují rotační vazby ramen, kde budou uloženy hnací rotační motory. Bíle vybarvený kruh představuje spojení dvou dvouramenných mechanismů a místo, kde bude připevněna lineární pružina, tento bod označíme jako koncový bod mechanismu TCP. Průnik pracovních ploch (tzv. "oko") nevyplní celý náš pracovní prostor zatěžovacího zařízení 500 x 500 mm, a tak byla stanovena šířka "oka" na hodnotu 500 mm a k tomu se dopočetla výška "oka". Toto bylo získáno z našeho vytvořeného programu v Matlabu, kde vstupní parametr byla výška "oka" a k tomu se dopočetly odpovídající délky ramen ( $l_i$ ) a vzdálenost mezi počátky mechanismů ( $d$ ). Výsledkem byla hodnota délky jednoho ramena 225 mm a vzdálenost mezi počátky mechanismů 750 mm při výšce "oka" 150 mm, viz obrázek 7.1.

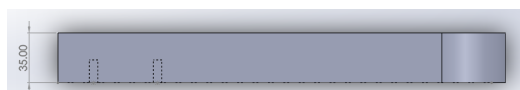
## 7.2 Modelování mechanismu

V minulé kapitole byly navrženy rozměry robotického systému. Nyní je potřeba daný návrh převést do CAD modelu, který se použije v následném simulačním modelu. Jelikož zatím nemáme potřebné rotační motory, tak pro návrh ramen jsem se inspiroval bakalářskou prací Adama Šenkeříka [19], který zjednodušený mechanismus již zhotovil s motory, které se pravděpodobně použijí v experimentu. Jelikož tuhosti získané ze simulačního modelu bychom chtěli porovnat s reálným experimentem, tak se modely ramen zhotovily v programu SOLIDWORKS 3D CAD, které se následně přetáhnou do Matlab Simulinku. Níže jsou ukázány všechny modely použité v simulační části, kde model 7.2g znázorňuje základnu pro model motoru 1 7.2h, na kterém je uchyceno rameno 1 7.2a, na druhém konci ramena 1 se přichytí motor 2, který bude pohánět rameno 2 7.2c. Tímto je sestaven jeden dvouramenný mechanismus a spojením dvou těchto mechanismů dostaneme výsledný čtyřramenný mechanismus. Spojení bude provedeno pomocí čepu, kde budou rotačně spojeny ramena 2 a 4 viz obrázek 7.4. Rameno 4 má upravené zakončení pro optimální spojení s ramenem 2.

Pro simulaci jsou nezbytné pouze modely ramen, které sebou do simulačního modelu berou mechanické vlastnosti jako hmotnost, rozměry a momenty setrvačnosti. Ostatní komponenty jako podstava pro motory nebo samotný model motoru 1,2 simulaci neovlivňují a pouze se snaží přiblížit k experimentální části.



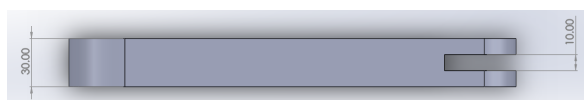
(a) Rameno 1



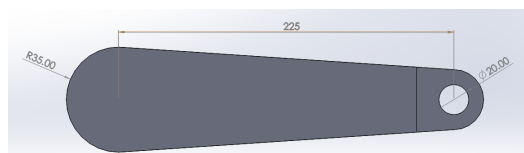
(b) Boční pohled ramena 1



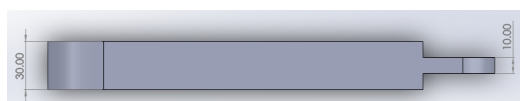
(c) Rameno 2



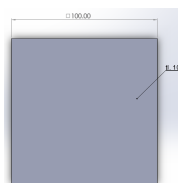
(d) Boční pohled ramena 2



(e) Rameno 4



(f) Boční pohled ramena 4



(g) Podstava pro motor ramena 1



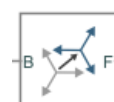
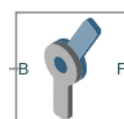
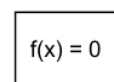
(h) Model motoru ramena 1

Obrázek 7.2: Použité CAD modely v simulační části

### 7.3 Tvorba simulačního modelu

V této části bude popsáno sestavení simulačního modelu v programu Matlab Simulink. Tento sestavený model bude sloužit pro virtuální testování řízení celého experimentu a bude použitý pro linearizaci našeho robotického systému. Linearizací dostaneme soustavu nelineárních rovnic popisující dynamiku našeho vytvořeného modelu. Tento simulační model lze modifikovat jak na dvouramenný tak na čtyřramenný mechanismus. V základní verzi je simulační model, viz obrázek 7.3, připraven na čtyřramenný mechanismus a zakomentováním modrého bloku **dvouramenný mechanismus 2** nám vznikne pouze jeden dvouramenný mechanismus.

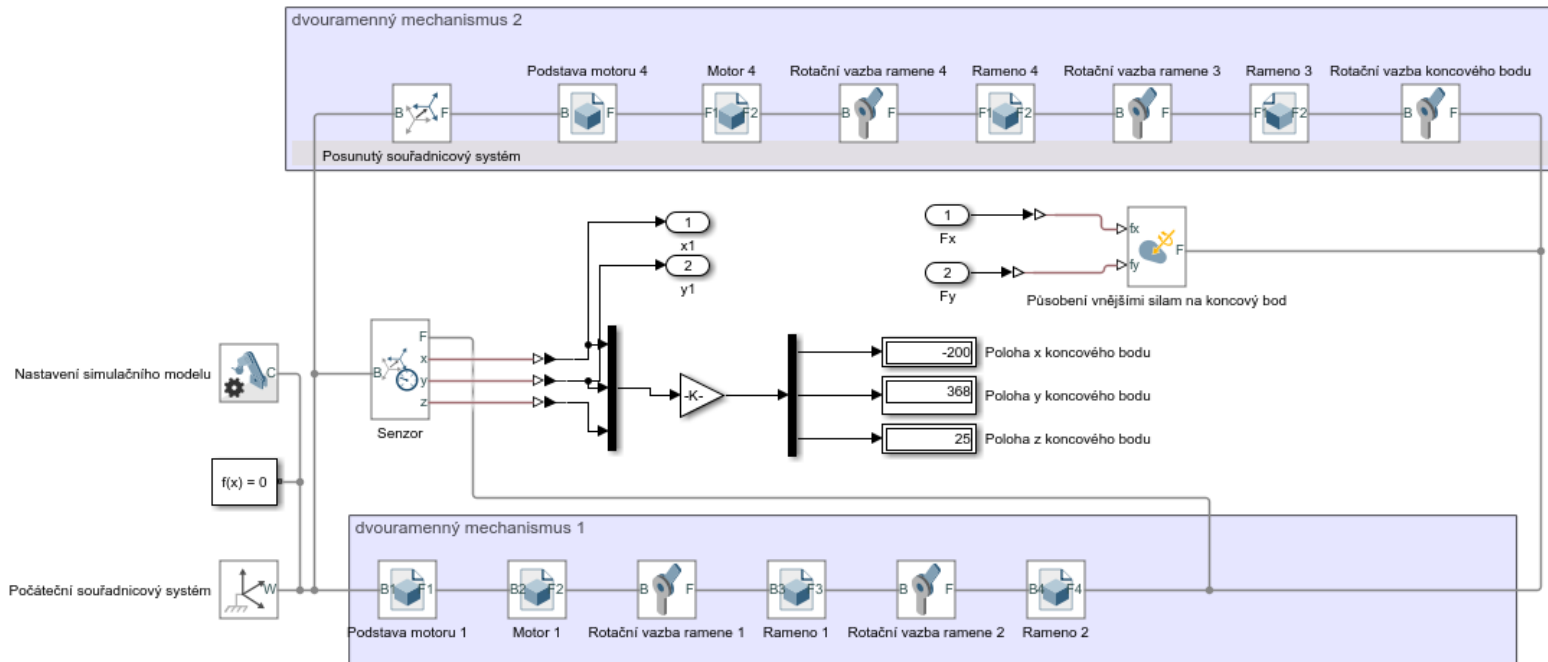
- Mechanism Configuration je blok, který je nutnou součástí simulace a nastavuje se v něm především směr a velikost působení gravitačního zrychlení, v našem případě se díky horizontálnímu uspořádání mechanismu neprojeví gravitační síly.
- Solver Configuration je blok, který řeší kompletní simulaci, lze v něm nastavit parametry výpočtu, ale není třeba ho detailně upravovat.
- World Frame je nezbytný pro simulaci a slouží jako základní souřadnicový systém. V našem případě se počáteční souřadnicový systém nachází v bodě O viz obrázek 7.4.
- File Solid je blok sloužící pro vložení CAD těles z Matlabem podporovaných softwarů, v našem případě je to SOLIDWORKS 3D CAD. V tomto bloku jsou naimportovány naše modely viz 7.2. V bloku jsou upraveny fyzikální vlastnosti modelů - hustota, poloha těžiště a moment setrvačnosti. Dále se na tělesa umístí lokální souřadnicové systémy<sup>a</sup> a upraví barevné rozložení těles.
- Revolut Joint byl použit na rotační spojení všech součástí. V bloku byly nastaveny parametry jako požadovaný úhel natočení ramena, torzní tuhost pružiny, její tlumení a její volnou délku. Dále lze v bloku nastavit snímání polohy, natočení, momentu v kloubu, atd.
- Rigid Transform je lokální souřadnicový systém, který se může vůči jinému lokálnímu systému tělesa posunout a otočit. V našem systému byl použit pro počáteční systém druhého dvouramenného mechanismu a je označen bodem K viz obrázek 7.4.
- Transform Sensor je blok, který měří mezi dvěma body vzájemnou rotaci, polohu, rychlost a zrychlení. V našem simulačním modelu ověřuje zda se koncový bod TCP nachází ve správném místě.
- External Force and Torque je blok, který generuje sílu nebo moment na libovolně zvolený bod mechanismu. V našem případě působí na bod TCP mechanismu.



<sup>a</sup>Lokální souřadnicové systémy jsou na tělesech označovány jako base B a follower F, hlavní funkcí těchto systémů je správné vzájemné propojení těles mechanismu. Na base se připojí předchozí těleso a na follower F pak následující.



Výše jsou vypsány hlavní použité bloky a změny, které v nich byly provedeny. V modelu jsou použity i jiné bloky, které převádějí fyzikální hodnotu na hodnotu simulinkovou, kterou Matlab rozpozná nebo slučují výstupy do jednoho kanálu. Na obrázku 7.3 je ukázán sestavený simulační model použitý pro virtualizaci robotických systémů. Bloky v jednotlivých dvouramenných mechanismech jsou poskládány chronologicky za sebou. Blok Rotační vazba koncového bodu představuje koncový bod TCP. Bloky  $x1$  a  $y1$  jsou výstupy pro provedení linearizace a  $F_x$  a  $F_y$  jsou jednotkové síly působící na mechanismus. Hodnoty na displejích představují polohu koncového bodu TCP vzhledem k počátku souřadnicového systému. Všechny bloky a jejich funkce jsou uvedeny na odkazu: bloky a jejich funkce.



Obrázek 7.3: Simulační model pro zkoumané robotické systémy mechanismus

## 7.4 Inverzní kinematika mechanismu

V podkapitole 7.1 byl stanoven pracovní prostor mechanismu na tzv. "oko". Jelikož náš cíl je zjistit tuhostní rozložení robota v různých bodech jeho pracovního prostoru, tak je potřeba vyjádřit úhly natočení jednotlivých ramen v závislosti na souřadnicích koncového bodu TCP robota. K tomu použijeme inverzní kinematiku zmíněnou v podkapitole 4.3. Mechanismus má dva stupně volnosti, to vyplývá z Grublerovy formulace viz 3.1. Máme **čtyři** tělesa, **čtyři** rotační vazby a ještě jednu rotační vazbu mezi druhým a čtvrtým ramenem **jednu**, z toho nám plyne počet stupňů volnosti  $n = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 2$ . To znamená že, pro přesné určení polohy ramen je potřeba dvou nezávislých parametrů. Za nezávislé parametry jsou použity právě souřadnice koncového bodu TCP  $[x,y]$ . Díky těmto souřadnicím mohou určit úhly natočení  $\varphi_1, \varphi_2$  při použití pouze jednoho dvouramenného mechanismu a úhly natočení  $\varphi_3, \varphi_4$  pro celkový čtyřramenný mechanismus. Zároveň podle kapitoly 4.3 platí, že pokud se koncový bod nachází uvnitř pracovní plochy, tak existují alespoň dvě řešení konfigurace systému, kterými lze této polohy dosáhnout. V našem případě budou vyjádřeny úhly natočení ramen pouze pro jednu konfiguraci a druhá konfigurace se nepoužije. Výsledné úhly natočení získané z inverzní kinematiky budou považovat za relativní, což znamená, že je vyjádřím vůči předchozímu lokálnímu souřadnicovému systému. Zároveň je nutné si stanovit kladný směr otáčení ramen pro náš případ byl stanoven kladný směr natočení ramen jako směr pohybu hodinových ručiček. Pokud by se rameno pohybovalo opačným směrem, tak by musel být úhel záporný.

### 7.4.1 Analytický výpočet relativních úhlů natočení jednotlivých ramen

Výpočet relativního úhlu natočení  $\varphi_1$  podle obrázku 7.4

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \tan(\beta) &= \frac{x}{y} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\
 l_2^2 &= l_1^2 + r_1^2 - 2 \cdot l_1 \cdot r_1 \cdot \cos(\gamma) \\
 \gamma &= \arccos\left(\frac{l_1^2 + r_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot r_1}\right) \\
 \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - (\gamma + \beta) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_1^2 + r_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot r_1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Výpočet relativního úhlu natočení  $\varphi_2$  podle obrázku 7.4

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= l_1^2 + l_2^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\alpha) \\
 \alpha &= \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right)
 \end{aligned}$$

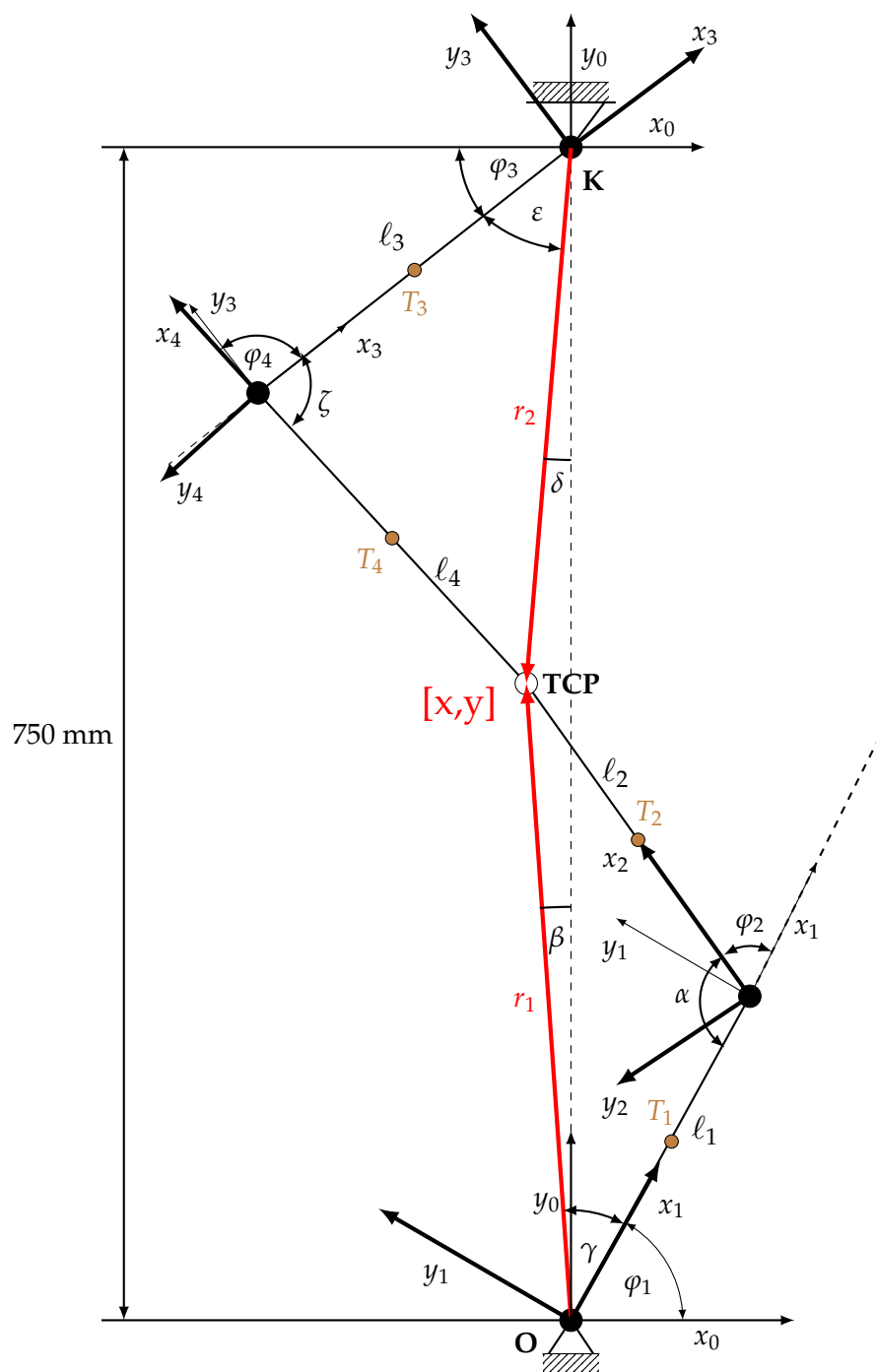
$$\varphi_2 = \pi - \alpha = \pi - \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right) \quad (7.2)$$

Výpočet úhlu natočení  $\varphi_3$  podle obrázku 7.4

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{x^2 + (750 - y)^2} \\ \tan(\delta) &= \frac{x}{-(750 - y)} \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{x}{-(750 - y)}\right) \\ l_4^2 &= l_3^2 + r_2^2 - 2 \cdot l_3 \cdot r_2 \cdot \cos(\varepsilon) \\ \varepsilon &= \arccos\left(\frac{l_3^2 + r_2^2 - l_4^2}{2 \cdot l_3 \cdot r_2}\right) \\ \varphi_3 &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon - \delta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_3^2 + r_2^2 - l_4^2}{2 \cdot l_3 \cdot r_2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{-(750 - y)}\right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Výpočet úhlu natočení  $\varphi_4$  podle obrázku 7.4

$$\begin{aligned} r_2^2 &= l_4^2 + l_3^2 - 2 \cdot l_4 \cdot l_3 \cdot \cos(\zeta) \\ \zeta &= \arccos\left(\frac{l_4^2 + l_3^2 - r_2^2}{2 \cdot l_3 \cdot l_4}\right) \\ \varphi_4 &= \pi - \zeta \end{aligned} \quad (7.4)$$



Obrázek 7.4: Řešení inverzní kinematiky mechanismu

## 7.5 Linearizace a SVD rozklad

Abychom získali statickou tuhost systému, tak musíme vyřešit dvě nelineární rovnice, viz 7.5 popisující dynamický model robotického systému. K tomu se použije funkce *linearize*, jejímž použitím dostaneme koeficienty nelineárních rovnic A,B,C,D. Díky těmto koeficientům dokážeme určit závislost změny polohy na vnější síly působící na mechanismus. Linearizace byla provedena 1s od začátku simulace, aby došlo k rovnováze systému a koncový bod TCP se nacházel v přesně určených souřadnicích.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A \cdot \Delta z + B \cdot \Delta u \\ \Delta w &= C \cdot \Delta z + D \cdot \Delta u \end{aligned} \quad (7.5)$$

Kde  $z$  jsou stavy systému,  $u$  je vstup systémů (síly působící na koncový bod TCP) a  $w$  je systém výstupů (poloha koncového bodu TCP). Pro další výpočty se uváží, že naše úloha je statická, a proto první derivace  $\dot{z} = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot \Delta z + B \cdot \Delta u \rightarrow -A \cdot \Delta z = B \cdot \Delta u \rightarrow \Delta z = -A^{-1} \cdot B \cdot \Delta u \\ \Delta w &= C \cdot (-A^{-1} \cdot B \cdot \Delta u) + D \cdot \Delta u \\ \Delta w &= (-C \cdot A^{-1} \cdot B + D) \cdot \Delta u \\ G &= \frac{\Delta w}{\Delta u} = -C \cdot A^{-1} \cdot B + D \end{aligned}$$

Kde výsledkem je matice poddajnosti  $G$ , která představuje závislost změny polohy  $\Delta w$  na síle působící na koncový bod TCP. Matice A,B,C,D a  $G$  platí pouze pro konkrétní polohu koncového bodu mechanismu TCP, pro další polohy je potřeba provést linearizaci znovu.

V předchozím kroku byla získána poddajnost celého mechanismu. Nyní je potřeba vědět v jakém směru je poddajnost mechanismu největší a v jakém nejmenší. K tomu se použije tzv. SVD rozklad (*singular value decomposition*), ten vytvoří tři matice. První z nich matice  $U$  je unitární matice, která obsahuje levé jednotkové vektory  $u_i$  jako své sloupce, které nám říkají o směru působení největší/nejmenší poddajnosti. Druhá matice  $\Sigma$  je diagonální matice, která obsahuje singulární hodnoty v sestupném pořadí. V našem případě prvek matice  $\sigma_{1,1}$  představuje největší dosaženou poddajnost mechanismu a prvek  $\sigma_{2,2}$  představuje nejmenší poddajnost mechanismu. Třetí matice  $V^T$  je transponovaná matice, která obsahuje jednotkové vektory jako u matice  $U$ , ale nyní jsou vektory uspořádané do řádků matice.

V následujícím kroku se přetransformují výsledky z matic  $U, \Sigma, V$  do elipsy, která bude vypovídat o rozložení tuhosti mechanismu v námi stanovené poloze koncového bodu TCP. Prvek  $\sigma_{1,1}$  značí největší dosaženou poddajnost mechanismu a tím pádem nejmenší tuhost v rovině. Jeho hodnotu můžeme chápat jako vzdálenost mezi středem elipsy  $S$  a jeho vedlejším vrcholem  $A$ . Příslušná hod-

nota tuhosti se získá jako převrácená hodnota poddajnosti prvku matice  $\sigma_{1,1}$ .

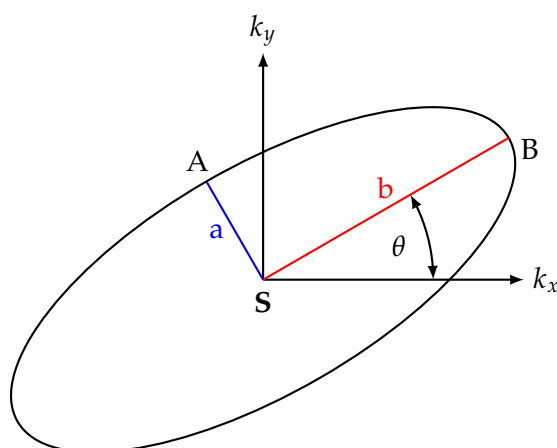
$$a = \frac{1}{\sigma_{1,1}} \quad (7.6)$$

Pro získání největší dosažené tuhosti mechanismu v rovině se použije prvek  $\sigma_{m,m}$ , v našem případě je matice  $\Sigma$  diagonální o rozměrech  $2 \times 2$ . Tato hodnota bude znázorňovat vzdálenost mezi středem elipsy S a hlavním vrcholem B.

$$b = \frac{1}{\sigma_{2,2}} \quad (7.7)$$

V posledním kroku je potřeba si vypočítat úhel natočení elipsy  $\theta$  do směru působení největší tuhosti. K tomu se použijí prvky matice U, ve které je tento vektor obsažen.

$$\theta = \text{atan2} \left( \frac{U_{2,2}}{U_{2,1}} \right) \quad (7.8)$$



Obrázek 7.5: Schematicky znázorněná výsledná elipsa tuhostí

Na obrázku 7.5 je schematicky sestavena elipsa tuhosti popisující velikost a směr působení největší tuhosti robotického systému v konkrétní poloze koncového bodu TCP, bod S by se nacházel v bodě TCP.

## 7.6 Směrové rozložení tuhosti soustavy v rovině

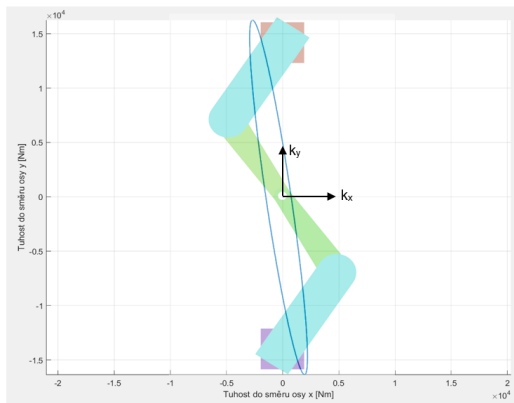
V této kapitole bude ukázáno rozložení směrové tuhosti v různých bodech pracovního prostoru robotického systému. Zároveň se porovná velikosti a rozložení dosažené tuhosti pro dvouramenný a čtyřramenný mechanismu. Hodnoty tuhostí závisí na námi zvolené tuhosti torzních pružin, kterou bude potřeba pro reálný pokus ověřit na použitých motorech. Pro simulační model byla zvolena hodnota tuhosti torzních pružin 100 Nm/rad s tlumením o hodnotě 10 Nm/(rad/s). Důležitějším faktorem bude rozložení směrové statické tuhosti v rovině a poměr mezi největší a nejmenší tuhostí mechanismů. Ideální tuhost v pracovních bodech by měla mít kruhový charakter, kde dostáváme poměr mezi největší a nejmenší tuhostí roven jedné.

Poloha TCP [mm]	jeden robot			spojené roboty		
	max. tuhost [N/m]	min. tuhost [N/m]	poměr [1]	max. tuhost [N/m]	min. tuhost [N/m]	poměr [1]
Poloha [0;375]	8233.6	558.3	14.7	16467.1	1116.7	14.7
Poloha [-100;350]	7307.4	590.2	12.4	21263.6	2606.9	8.1
Poloha [-100;420]	31164.7	427.7	72.9	36605.6	1808.8	20.2
Poloha [-200;390]	48181.9	415.5	115.9	54984.8	9399.9	5.8
Poloha [-240;375]	117060.2	403.2	290.3	166324.5	68602.6	2.4

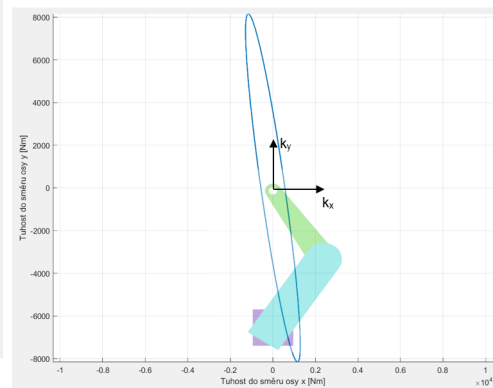
Tabulka 7.1: Souhrn výsledků získaných tuhostí

V tabulce 7.1 jsou vypsány maximální a minimální tuhosti v konkrétních bodech TCP v pracovním prostoru robota. Zároveň jsou v tabulce uvedeny poměry mezi největší a nejmenší tuhostí, cílem tohoto poměru je získat hodnotu 1, tím by došlo k homogennímu rozložení tuhosti robota v daném bodě. Z tabulky je patrné, že při spojení dvou robotů došlo k výraznému zlepšení tuhosti. Zatímco se maximální tuhost ve většině pracovních bodech zvětšovala v rozmezí (1,5x:3x), tak minimální tuhost se zvětšila až desetinásobně, čímž se poměr mezi maximální a minimální tuhostí v bodě TCP [-240;375] výrazně snížil až na hodnotu 2,4. Obecně lze říci, že pokud ramena 2 a 4 svírají úhel cca 90°, tak se dostane lepších tuhostních poměrů.

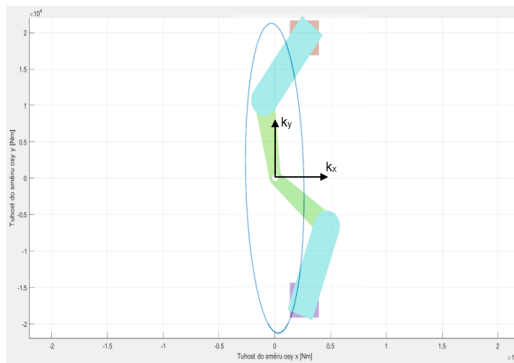




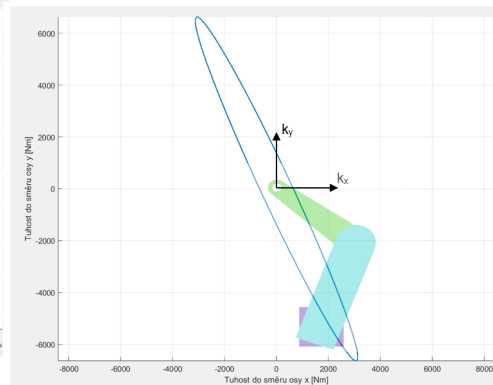
(a) Směrová tuhost čtyřramenného mechanismu v bodě [0;375] mm



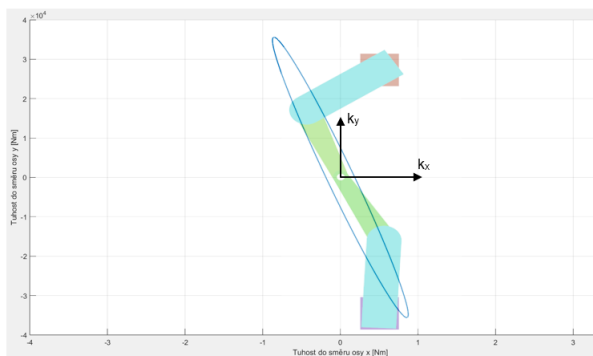
(b) Směrová tuhost dvouramenného mechanismu v bodě [0;375] mm



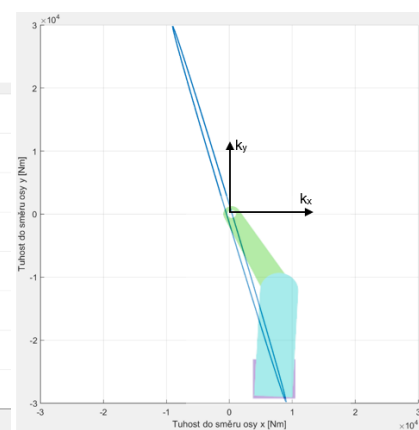
(c) Směrová tuhost čtyřramenného mechanismu v bodě [-100;350] mm



(d) Směrová tuhost dvouramenného mechanismu v bodě [-100;350] mm

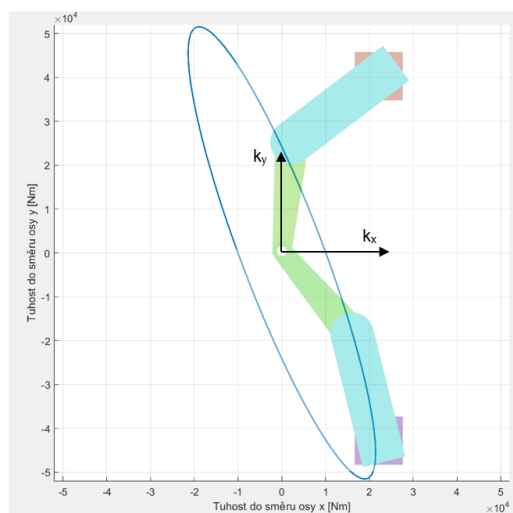


(e) Směrová tuhost čtyřramenného mechanismu v bodě [-100;420] mm

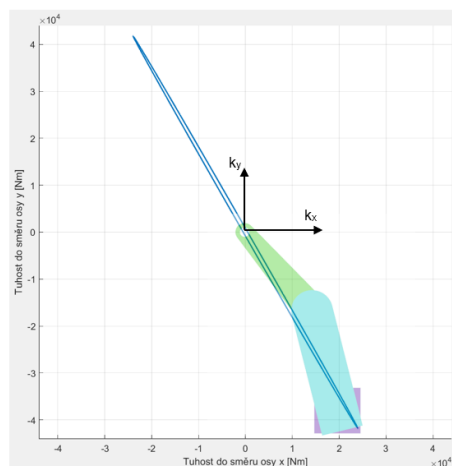


(f) Směrová tuhost dvouramenného mechanismu v bodě [-100;420] mm

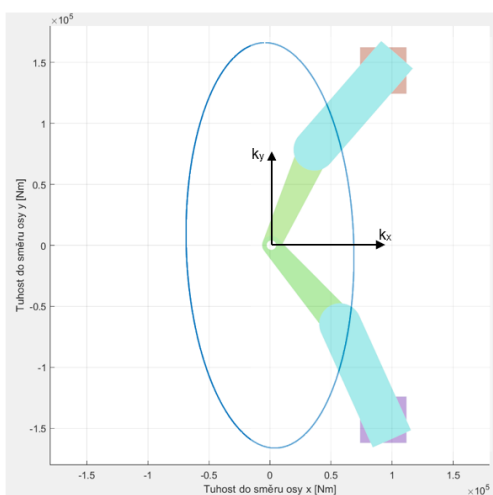
Obrázek 7.6: Směrová tuhost pro čtyřramenný mechanismus a dvouramenný v různých polohách koncového bodu v rovině, první část



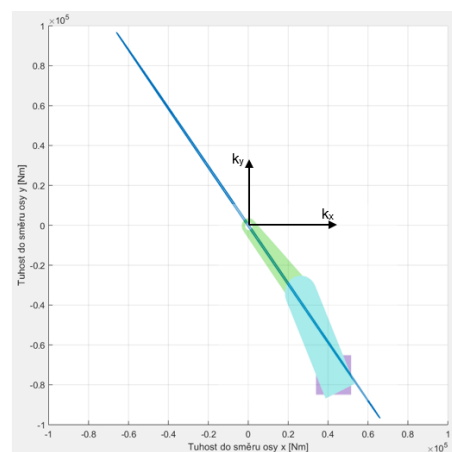
(a) Směrová tuhost čtyř-ramenného mechanismu v bodě [-200;390] mm



(b) Směrová tuhost dvouramenného mechanismu v bodě [-200;390] mm



(c) Směrová tuhost čtyř-ramenného mechanismu v bodě [-240;375] mm



(d) Směrová tuhost dvouramenného mechanismu v bodě [-200;375] mm

Obrázek 7.7: Směrová tuhost pro čtyřramenný mechanismus a dvouramenný v různých polohách koncového bodu v rovině, druhá část

# Analytické ověření simulační části

V této kapitole je ukázán analytický výpočet tuhosti robotického systému. K tomu se použijí Lagrangeovy rovnice II.druhu zmíněné v kapitole 5.1. Pro výpočet se neuvažuje vliv tíhové síly jednotlivých ramen, jelikož robotický systém pracuje v horizontálně. Z rozboru mechanismu ze simulační části víme, že mechanismus má dva stupně volnosti. Pro nás to budou souřadnice koncového [x,y] bodu TCP viz obrázek 7.1. Tyto souřadnice se stanou našimi nezávislými parametry  $\mathbf{q}$ .

Pro analytický výpočet bude potřeba znalosti fyzikálních veličin, které popisují náš model.

Název veličiny	Použitý symbol	Jednotky
Hmotnost ramen	$m_{1,2,3,4}$	[kg]
Momenty setrvačnosti ramen	$I_{T_{1,2,3,4}}$	[kg · m <sup>2</sup> ]
Tuhosti torzních pružin	$k_{1,2,3,4}$	[N · m / rad]
Tlumení torzních pružin	$b_{1,2,3,4}$	[N · m / (rad/s)]
Délky ramen	$l_{1,2,3,4}$	[m]
Vnější síly působící na koncový bod TCP	$F_x, F_y$	[N]
Volné délky torzních pružin	$\varphi_{10,20,30,40}$	[N · m / rad]
Polohy těžišť	$\ell_{1T,2T,3T,4T}$	[m]

Tabulka 8.1: Tabulka použitých proměnných

## 8.1 Výpočet kinetických energií ramen

Nejprve je potřeba si vyjádřit Lagrangeovy rovnice II.druhu z podkapitoly 5.1, k tomu se použije kinetická energie ramen. V rámci kinetické energie budeme

rozeznávat energii translačního pohybu od těžiště ramen  $T_{1,2,3,4}$  a rotační energii od rotace ramen. Pro translační pohyb je potřeba mít znalost o poloze těžiště ramene, k tomu se použije vzdálenost těžiště k počátku ramene a absolutní úhel k těžišti. Absolutní úhel natočení ramene znamená úhel natočení vůči kladné ose  $x$  počátečního souřadnicového systému  $O - x_0y_0$ , viz obrázek 7.4. Výhodou použití absolutního úhlu je znaménková konvekce, která se tvoří automaticky z vlastnosti goniometrických funkcí ( $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$ ). Relativní úhel natočení použijeme pro vyjádření rotační kinetické energie, kdy se nám jedná o změnu úhlu natočení ramena vůči úhlu předchozímu.

Následující výpočty vychází z inverzní kinematiky mechanismu z kapitoly 7.4, konkrétně z obrázku 7.4. V dalších částech zavedeme pojem absolutní úhel, což je úhel mezi ramenem a kladnou osou  $x$ , v našem případě  $x_0$ , viz obrázek 7.4.

### 8.1.1 Kinetická energie ramena 1

Jelikož je relativní úhel a absolutní úhel u ramena 1 totožný, tak je není nutné rozlišovat

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - (\gamma - \beta) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_1^2 + r_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot r_1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Dále je potřeba si vyjádřit úhlovou rychlost prvního ramena, což je rovno první časové derivaci úhlu natočení.

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{d}{dt}(\varphi_1)$$

*Poznámka: U některých výrazů nebudou vypsány jejich výsledné tvary, jelikož jejich zápis je příliš složitý a znepřehledňoval by tak strukturu práce. Tyto tvary jsou vypočteny v Matlabu a jejich hodnoty lze najít v příložených programech.*

Dále se vyjádří poloha těžiště ramena 1 do směrů osy  $x_0$  a  $y_0$ .

Veličiny  $l_{1T}$ ,  $l_{2T}$ ,  $l_{3T}$ ,  $l_{4T}$  představují polohu těžiště jednotlivých ramen od jejich lokálních systémů. Jejich hodnoty jsou konstanty a lze je najít v příložených programech.

$$x_{T_1} = l_{1T} \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$y_{T_1} = l_{1T} \cdot \sin(\varphi_1)$$

Nyní je potřeba si vyjádřit rychlost těžiště  $T_1$  do směru os  $x_0$ ,  $y_0$ . To se provede časovou derivací polohy těžiště z předchozí rovnice

$$\begin{aligned}\dot{x}_{T_1} &= -\ell_{1T} \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_{T_1} &= \ell_{1T} \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \dot{\varphi}_1\end{aligned}$$

Celkový tvar kinetické energie pro rameno 1 bude ve tvaru

$$\mathcal{K}_1(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{x}_{T_1}^2 + \dot{y}_{T_1}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{T_1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 \quad (8.1)$$

Kde  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  představuje matici nezávislých parametrů  $x$  a  $y$ .

### 8.1.2 Kinetická energie ramena 2

Relativní úhel natočení ramena 2 byl již vyjádřen v kapitole 7.4 a jeho tvar lze nalézt v rovnici 7.2. Absolutní úhel natočení bude ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi_{2_{abs}} &= \varphi_{2_{rel}} + \varphi_{1_{rel}} \\ &= \pi - \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_1^2 + r_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot r_1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

Dále se vypočte úhlová rychlost otáčení ramena 2 jako časovou derivaci úhlu natočení  $\varphi_{2_{rel}}$ .

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{d}{dt}(\varphi_{2_{rel}})$$

Vyjádření polohy těžiště  $T_2$  od počátku souřadnicového systému  $O - x_0y_0$

$$\begin{aligned}x_{T_2} &= l_1 \cdot \cos(\varphi_{1_{abs}}) + \ell_{2T} \cdot \cos \varphi_{2_{abs}} \\ y_{T_2} &= l_1 \cdot \sin(\varphi_{1_{abs}}) + \ell_{2T} \cdot \sin \varphi_{2_{abs}}\end{aligned}$$

Časová derivace polohy těžiště pro získání rychlosti pohybu těžiště ramena 2

$$\begin{aligned}\dot{x}_{T_2} &= -l_1 \cdot \sin(\varphi_{1_{abs}}) \cdot \dot{\varphi}_{1_{abs}} - \ell_{2T} \cdot \sin(\varphi_{2_{abs}}) \cdot \dot{\varphi}_{2_{abs}} \\ \dot{y}_{T_2} &= l_1 \cdot \cos(\varphi_{1_{abs}}) \cdot \dot{\varphi}_{1_{abs}} + \ell_{2T} \cdot \cos(\varphi_{2_{abs}}) \cdot \dot{\varphi}_{2_{abs}}\end{aligned}$$

Výsledný tvar kinetické energie ramena 2

$$\mathcal{K}_2(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_{T_2}^2 + \dot{y}_{T_2}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{T_2} \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1)^2 \quad (8.2)$$

### 8.1.3 Kinetická energie ramena 3

Jelikož dvouramenný mechanismus o ramenech 3,4 může pracovat samostatně i spojeně, tak se musí vyjádřit úhly natočení, poloha těžiště a kinetická energie nezávisle na prvním mechanismu vůči souřadnicovému systému  $O - x_0y_0$ . Relativní úhel natočení ramena 3 je již vyřešen v rovnici 7.3. Absolutní úhel natočení se vypočte následovně

$$\varphi_{3_{abs}} = \pi + \varphi_{3_{rel}}$$

Opět se provede časová derivace úhlu natočení, kde  $\dot{\varphi}_3 = \frac{d}{dt}(\varphi_{3rel})$  a vyjádří se poloha těžiště  $T_3$

$$\begin{aligned}x_{T_3} &= \ell_{3T} \cdot \cos \varphi_{3abs} \\y_{T_3} &= \ell_{3T} \cdot \sin \varphi_{3abs}\end{aligned}$$

Rychlost pohybu těžiště  $T_3$  bude

$$\begin{aligned}\dot{x}_{T_3} &= -\ell_{3T} \cdot \sin(\varphi_{3abs}) \cdot \dot{\varphi}_{3abs} \\ \dot{y}_{T_3} &= \ell_{3T} \cdot \cos(\varphi_{3abs}) \cdot \dot{\varphi}_{3abs}\end{aligned}$$

Kinetická energie ramena 3 bude

$$\mathcal{K}_3(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}_{T_3}^2 + \dot{y}_{T_3}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{T_3} \cdot \dot{\varphi}_3^2 \quad (8.3)$$

### 8.1.4 Kinetická energie ramena 4

U ramena 4 je relativní úhel natočení vyjádřen v rovnici 7.4. Absolutní úhel natočení ramena 4 bude ve tvaru

$$\varphi_{4abs} = \pi + \varphi_{3rel} + \pi - \varphi_{4rel} = 2\pi + \varphi_{3rel} - \varphi_{4rel}$$

Časová derivace  $\dot{\varphi}_4 = \frac{d}{dt}(\varphi_{4rel})$ . Dále se určí poloha těžiště  $T_4$  vzhledem k systému  $O - x_0y_0$

$$\begin{aligned}x_{T_4} &= \ell_3 \cdot \cos \varphi_{3abs} + \ell_{4T} \cdot \cos \varphi_{4abs} \\ y_{T_4} &= \ell_3 \cdot \sin \varphi_{3abs} + \ell_{4T} \cdot \sin \varphi_{4abs}\end{aligned}$$

Rychlost pohybu těžiště bude

$$\begin{aligned}\dot{x}_{T_4} &= -\ell_3 \cdot \sin \varphi_{3abs} \cdot \dot{\varphi}_{3abs} - \ell_{4T} \cdot \sin(\varphi_{4abs}) \cdot \dot{\varphi}_{4abs} \\ \dot{y}_{T_4} &= \ell_3 \cdot \cos \varphi_{3abs} \cdot \dot{\varphi}_{3abs} + \ell_{4T} \cdot \cos(\varphi_{4abs}) \cdot \dot{\varphi}_{4abs}\end{aligned}$$

Kinetická energie pro rameno 4 bude

$$\mathcal{K}_4(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_{T_4}^2 + \dot{y}_{T_4}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{T_4} \cdot (\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_3)^2 \quad (8.4)$$

## 8.2 Sestavení Lagrangeových rovnic II.druhu

Dle kapitoly 5.1 se nejprve vyjádří Lagrangeova funkce ( $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ ), v kapitole 5.1 bylo řečeno, že Lagrangeova funkce zahrnuje součet kinetické a potenciální energie. Celková kinetická energie mechanismu se vyjádří jako součet všech jednotlivých kinetických energií od čtyřech ramen viz kinetické energie (8.1,8.2,8.3,8.4). Příspěvek od potenciální energie je nulový, jelikož se ramena pohybují v rovině  $x-y$ , a tudíž vliv tíhového zrychlení je nulový. Do zobecněné síly  $\mathbf{Q}$  se zahrnou

síly pružin a vnější síly  $F_x, F_y$ . Analytický model bude sestaven pro čtyřramenný mechanismus a vynecháním prvků související s rameny 3,4 bychom dostali analytický model pro dvouramennou verzi.

Celková kinetická energie čtyřramenného mechanismu

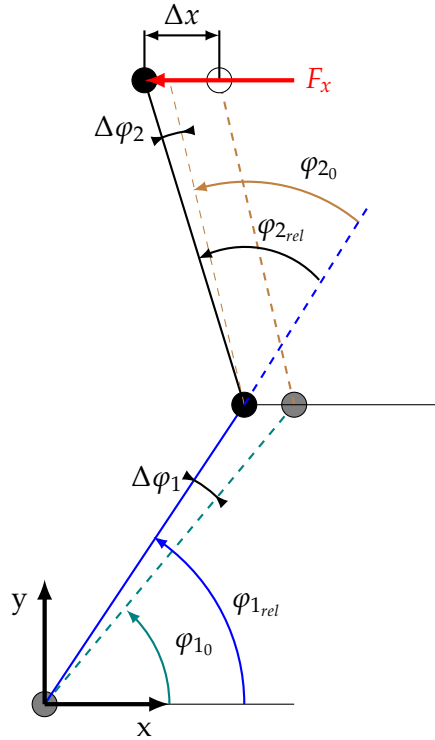
$$\begin{aligned} \mathcal{K}_c = \sum_i^4 \mathcal{K}_i &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{x}_{T_1}^2 + \dot{y}_{T_1}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{s_1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_{T_2}^2 + \dot{y}_{T_2}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{s_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}_{T_3}^2 + \dot{y}_{T_3}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{s_3} \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_{T_4}^2 + \dot{y}_{T_4}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{s_4} \cdot \dot{\varphi}_4^2 \end{aligned}$$

Dále je potřeba si určit tvar zobecněné síly  $\mathbf{Q}$ . Pro určení sil v torzních pružinách budeme vycházet z velikosti jejich úhlové deformace. Každá pružina má svojí volnou délku (dána z výroby a ovlivněna montáží), pro tuto délku je charakteristické, že vnitřní síly v pružině jsou nulové a tudíž se pružina nachází ve své rovnovážné poloze. Pokud, ale působí vnější síla na pružinu, nastává její deformace a pružina vyvolá sílu, která má tendenci vrátit pružinu do místa s nejmenší energetickou hladinou, což odpovídá právě rovnovážné poloze pružiny. Tato síla je dána součinem tuhosti pružiny  $k$  a velikosti její deformace. Pro určení této síly je potřeba zjistit velikost její deformace, to se odvodí ze změny polohy koncového bodu TCP robotického systému viz obrázek 8.1. Na obrázku je znázorněna vnější síla  $F_x$  působící proti směru osy  $x$ . Ta způsobí vychýlení koncového bodu TCP a dle níže uvedených vztahů dojde k deformaci torzních pružin.

Pro určení virtuálního posuvu  $d\varphi_i$  pružin se vyjde ze znalosti rovnovážné polohy koncového bodu a polohy při působení vnějších sil. Jelikož přes inverzní kinematiku byla vypočtena závislost relativních úhlů natočení  $\varphi_{i_{rel}}$  pomocí souřadnic koncového bodu  $[x,y]$ , tak přes souřadnice aktuální polohy bodu TCP se vypočtou aktuální úhly natočení ramen.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \varphi_{1_{rel}} - \varphi_{10} \\ \Delta\varphi_2 &= \varphi_{2_{rel}} - \varphi_{20} \end{aligned} \tag{8.5}$$

$\varphi_{10}$  a  $\varphi_{20}$  uvažujeme jako volné délky pružin, které se nacházejí v rovnovážné poloze a nevytvářejí žádnou sílu. V našem případě se jedná o počáteční úhly natočení ramen, v této poloze je celý robotický systém v rovnováze. Teprve působením vnějších sil  $\mathbf{F}$  dochází k silové nerovnováze systému a ke změně polohy koncového bodu TCP.



Obrázek 8.1: Deformace torzních pružin vlivem vnější síly

Na obrázku 8.1 je nakreslen robotický systém ve dvouramenném provedení. Cílem je ukázat deformace torzních pružin. Aktuální natočení ramen je popsáno úhly  $\varphi_{1_{rel}}$  a  $\varphi_{2_{rel}}$ . Vnitřní odporová síla torzní pružiny se obecně vypočte  $F_p = k \cdot \Delta\varphi$ , kde  $k$  je tuhost pružiny a  $\Delta\varphi$  je velikost úhlové deformace. Práce vykonaná touto pružinou bude ve tvaru  $W_p = \int_0^{\Delta\varphi} F_p \cdot d\varphi = \int_0^{\Delta\varphi} k \cdot \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\varphi^2$ . Pro zobecněnou sílu  $Q_j$  bude potřeba vyjádřit virtuální práci vykonanou pružinou na virtuálním posuvu  $dq_j$ , toho se dosáhne derivací práce  $W_p$  podle nezávislé proměnné  $q_j$ . Virtuální práce od vnější síly  $\mathbf{F}$  se vyjádří jako součin síly  $\mathbf{F}$  a virtuálního posuvu ve směru síly  $\mathbf{F}$ , vyjádřeného ve virtuálních nezávislých parametrech  $dq_j$ .

Nyní se vyjádří zobecněná síla  $\mathbf{Q}$ , jak již bylo zmíněno tak máme dva nezávislé parametry  $x$  a  $y$ , tudíž i zobecněná síla bude mít dvě složky  $Q_x$  a  $Q_y$ . Výpočet se provede podle podkapitoly 5.1.3 a dostaneme tvar

$$\mathbf{Q} dq = \mathbf{F} dq - \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial q} W_p dq \right) \quad (8.6)$$

Virtuální posuvy  $dq_j$  jsou posuvy ve směru nezávislých parametrů  $x, y$ . Znaménka u sil pružin jsou záporná, jelikož působí proti kladnému smyslu příslušné souřadnice pohybu robotického systému. Jelikož se v každém členu rovnice objevuje virtuální posuv  $dq_j$ , tak se celá rovnice vydělí tímto členem a do-



staneme obecně zobecněnou sílu  $Q_j$

$$\begin{aligned} Q_j &= F_j - \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial q_j} W_{p_i} \right) \\ Q_j &= F_j - \sum_{i=1}^4 \left( k_i \cdot \Delta \varphi_i \cdot \frac{\partial d\varphi_i}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Při rozepsání zobecněné síly  $Q_j$  do složek nezávislých parametrů  $x$  a  $y$  dostaneme

$$\begin{aligned} Q_x &= F_x - k_1 \cdot \Delta \varphi_1 \cdot \frac{\partial d\varphi_1}{\partial x} - k_2 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot \frac{\partial d\varphi_2}{\partial x} \\ &\quad - k_3 \cdot \Delta \varphi_3 \cdot \frac{\partial d\varphi_3}{\partial x} - k_4 \cdot \Delta \varphi_4 \cdot \frac{\partial d\varphi_4}{\partial x} \\ Q_y &= F_y - k_1 \cdot \Delta \varphi_1 \cdot \frac{\partial d\varphi_1}{\partial y} - k_2 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot \frac{\partial d\varphi_2}{\partial y} \\ &\quad - k_3 \cdot \Delta \varphi_3 \cdot \frac{\partial d\varphi_3}{\partial y} - k_4 \cdot \Delta \varphi_4 \cdot \frac{\partial d\varphi_4}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Tvary členů  $\Delta \varphi_i$  jsou uvedeny v rovnici 8.5. Analogicky by se vypočetly deformace torzních pružin  $\Delta \varphi_3$  a  $\Delta \varphi_4$ . V dalším kroku bude sestavena Lagrangeova funkce  $\mathcal{L}$ , jelikož je potenciální energie robotického systému nulová, tak její tvar bude odpovídat celkové kinetické energii robotického systému  $\mathcal{K}_c$

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X) = \mathcal{K}_c((\dot{X}, X)) \quad (8.9)$$

Vektor  $X$  je vektor polohy koncového bodu TCP o složkách  $[x, y]$  a  $\dot{X} = [\dot{x}, \dot{y}]$  je vektor rychlostí koncového bodu do směrů os  $x, y$ . Lagrangeovy rovnice II.druhu se sestaví podle rovnice viz 5.2. Pro dvě nezávislé proměnné  $x, y$  budou dvě Lagrangeovy rovnice II.druhu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_j, q_j)}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial x} = \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial y} = \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_j, q_j)}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{x}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{y}} \end{aligned} \quad (8.11)$$

První časovou derivací rovnice 8.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{x}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}, X)}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{y}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Do Lagrangeovy rovnice II.druhu se ještě přidá energie od tlumení pružiny a její tvar se vyjádří jako Rayleighiho disipativní funkce. [20]

$$\begin{aligned} R_{di} &= -\frac{1}{2} \cdot b_i \cdot v_i^2 \\ \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{q}_j} &= -\frac{1}{2} \cdot b_i \cdot 2 \cdot v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{q}_j} &= -b_i \cdot v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = -b_i \cdot \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Výsledný tvar má zápornou hodnotu, jelikož je energie z pružiny odebrána. Člen  $b_i$  představuje koeficient tlumení pružiny a  $v_i$  je vektor rychlosti kmitání pružiny. Výsledná Lagrangeova rovnice II.druhu popisující pohyb robotického systému bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$$

Po dosazení a vyjádření vlastní pohybové rovnice systému do směru  $x$  a  $y$  dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial x} - \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{x}} = Q_x \quad (8.14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial y} - \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{y}} = Q_y \quad (8.15)$$

První rovnice popisuje pohyb koncového bodu (TCP) ve směru osy  $x$  a druhá rovnice popisuje pohyb koncového bodu (TCP) ve směru osy  $y$  v systému  $O - x_0y_0$ . Celý tvar i s dosazenými hodnotami lze nalézt v příložených programech. Pro určení tuhosti systému je potřeba si soustavu diferenciálních rovnic upravit do tvaru, kdy výsledkem bude vektor změny polohy koncového bodu  $\Delta \mathbf{X} = [\Delta x; \Delta y]$  vhodný pro výpočet poddajnosti mechanismu.

Jelikož se v soustavě diferenciálních rovnic vyskytují druhé, první a nulté časové derivace polohy  $x, y$ , zrychlení jsou v lineární kombinaci, lze soustavu převést do následujícího maticového tvaru  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}_z = 0$ , který bude popisovat silovou rovnováhu v mechanismu.  $\mathbf{M}$  je matice hmotností robotického systému,  $\ddot{\mathbf{X}}$  je vektor druhých časových derivací polohy (zrychlení) a matice  $\mathbf{F}_z$  je vektor zbylých sil. Vlastní pohybové rovnice 8.14 a 8.15 se upraví do jednoho maticového tvaru

$$\mathbf{VPR} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial x} - \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{x}} - Q_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial (\mathcal{K}_c(\dot{X}, X))}{\partial y} - \frac{\partial R_{di}}{\partial \dot{y}} - Q_y \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Matice hmotností  $\mathbf{M}$  se získá pomocí funkce *jacobian*, která odseparuje z  $\mathbf{VPR}$  členy druhých derivací.

$$\mathbf{M} = \text{jacobian}(\mathbf{M}, [\text{diff}(x(t), t, t); \text{diff}(y(t), t, t)]);$$

Matici  $\mathbf{F}_z$  lze získat tím, že se za druhé časové derivace polohy dosadí nulové hodnoty a tím se "odstraní" matice  $\mathbf{M}$  z vlastní pohybové rovnice  $\mathbf{VPR}$  a výsledný zbytek je právě vektor  $\mathbf{F}_z$ .

$$F_z = \text{subs}(VPR, [\text{diff}(x(t), t, t); \text{diff}(y(t), t, t)], [0; 0]);$$

*Poznámka: V přiloženém skriptu zabývající se analytickým výpočtem bylo použito více funkcí, které měly pouze za cíl upravit daný výsledek do určitého tvaru, např. funkce formula přetransformuje výsledek do matice.*

Nyní jsme dostali kompletní analytické řešení našeho čtyřramenného mechanismu, který je popsán maticově ve tvaru  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}_z = 0$ . Pro výpočet výchylky koncového bodu (TCP) od své počáteční polohy vyjádříme vektor  $\dot{\mathbf{X}}$  a dvakrát se zintegruje. První integrací dostaneme rychlosti změny polohy bodu TCP.

$$\dot{\mathbf{X}} = \int -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}_z dt$$

Počáteční podmínka této integrace bude, že rychlost pohybu mechanismu je nulová, jelikož zkoumáme pouze tuhost mechanismu ve statické poloze. Další integrací dostaneme polohu koncového bodu mechanismu.

$$\mathbf{X} = \int \dot{\mathbf{X}} dt = \iint -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}_z dt \quad (8.17)$$

Počáteční podmínka této integrace je rovnovážná poloha koncového bodu  $[x, y]$  v čase  $t=0$ . Velikost výchylky  $\Delta\mathbf{X}$  dostaneme jako rozdíl polohy po a před zatížením ( $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{X}_0 = [x, y]$ ) v čase 0s. Následně se výchylka polohy vydělí velikostí zatěžovací síly  $\mathbf{F}$ , abychom dostali poddajnost robotického systému ve směru působení vnější síly  $\mathbf{F}$ . Pokud bychom chtěli analyticky vyjádřit poddajnost v okolí konkrétního bodu, tak bychom měnili směr působení vektoru síly  $\mathbf{F}$  po kružnici od 0 do  $2\pi$ . Opět převrácenou hodnotou poddajnosti dostáváme tuhost.

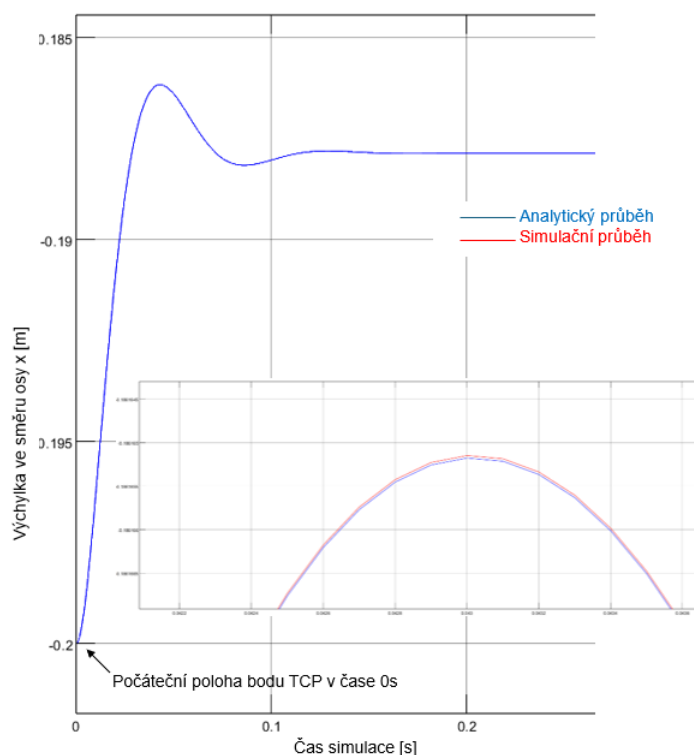
### 8.3 Porovnání analytického a simulačního modelu

Cílem tohoto analytického modelu bylo ukázat, jak lze analyticky získat představu o poddajnosti/tuhosti našeho robotického systému v konkrétním bodě (TCP). Jelikož se jedná o rovinný případ tak analytický výpočet nebyl zvlášť složitý jak na sestavení rovnic, tak i na samotnou rychlost výpočtu. V případě složitějších systémů např. prostorových robotů je již analytický model příliš složitý, a proto je vhodné vytvořit simulační model, kde výpočet provede samotný počítač viz linearizace. Jak již bylo zmíněno výše, tak pro kompletní představu o tuhosti v konkrétním bodě je potřeba vytvořit cyklus, kde se bude měnit směr působení vnější síly  $\mathbf{F}$  kolem bodu TCP. Čím větší dělení, tím přesnější pak výsledek bude.

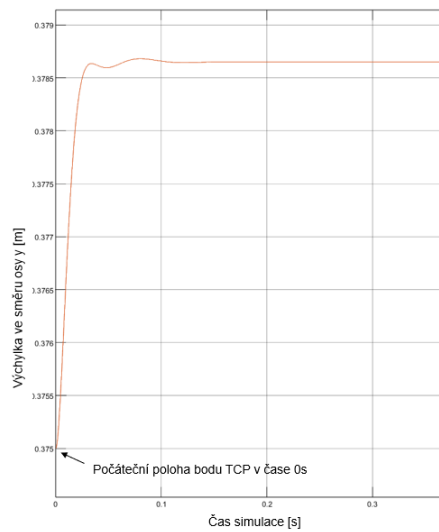
Pro ověření zda byl analytický model správně vytvořen, byl sestaven nový simulační model, který za působení vnější síly  $\mathbf{F}$  bude kmitat s určitým tlumením. Cílem je zjistit průběh kmitání a porovnat tento průběh s analyticky vyřešeným průběhem. Aby byl výsledek co nepřesnější, tak fyzikální vlastnosti jako

hmotnost, momenty setrvačnosti a polohy těžišť jednotlivých ramen byly odečteny přímo ze simulačního modelu a vloženy do analytického. Velikost tuhosti pružin byly  $100 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ , tlumení mělo hodnotu  $1 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Velikost zatěžující síly do směru osy x byla  $F_x = 100 \text{ N}$  a do kladné osy y  $F_y = 80 \text{ N}$ .

Výsledkem bylo porovnání průběhů polohy koncového bodu mechanismu (TCP) do os x,y ze simulačního a analytického modelu. Při porovnání obou výsledků se největší odchylka pohybuje cca  $3\text{e-}8 \text{ m}$ . Tato odchylka může být způsobena numerickou chybou, která vznikla při integracích.

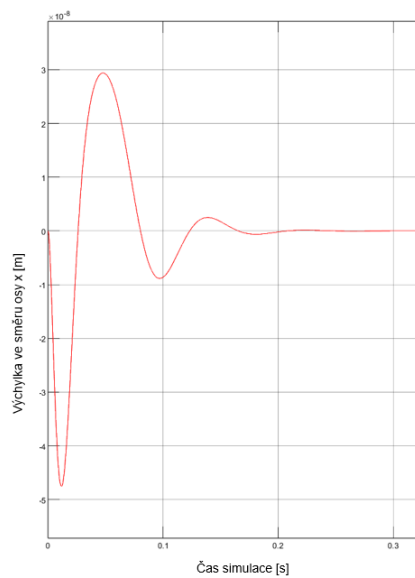


Obrázek 8.2: Průběh polohy koncového bodu TCP v čase do směru osy x



Obrázek 8.3: Průběh polohy koncového bodu TCP v čase do směru osy  $y$ , hodnota, při které se koncový bod ustálí v ose  $y$  je 0.3787

Na obou grafech je patrné, že průběhy polohy koncového bodu TCP se chovají téměř totožně a na první pohled je těžké najít odchylku. V grafu 8.2 je vytvořen detail popisující rozdíl mezi analytickým a simulačním průběhem v průběhu kmitání do směru osy  $x$  viz obrázek 8.4.



Obrázek 8.4: Odchylka v poloze bodu TCP mezi analytickým a simulačním modelem, hodnoty na svislé ose jsou v řádu  $10^{-8}$



## Závěr

Tato bakalářská práce se zabývá statickou tuhostí námi vytvořených robotických ramen v rovině. Pro tento účel byly vytvořeny dvě verze robotické struktury. Jedna robotická struktura je tvořena dvěma sériově spojenými rameny, které jsou poháněny rotačními motory v kloubech jejich spojení. Druhá verze představuje paralelní spojení dvou dvouramenných robotických sériových struktur. Cílem je získání představy o tom, jak se změní statická tuhost při paralelním spojení dvou sériových robotických struktur. K tomu byl vytvořen simulační program v prostředí Matlab Simulink, jehož výstupem byly hodnoty jako maximální/minimální tuhost robotické struktury v konkrétním bodě jeho pracovního prostoru a směrové rozložení tuhosti ve stejném bodě.

Statickou tuhost jsme zjišťovali v několika bodech jeho pracovního prostoru, její výsledky jsou obsaženy v kapitole 7.6. Z dosažených výsledků rozložení tuhosti bylo zjištěno, že pokud je úhel mezi propojenými rameny dvou robotů blízký pravému úhlu, tak dojde k výraznému zlepšení hodnoty minimální tuhosti. V tomto spojení ramen se dosáhlo poměru mezi maximální a minimální tuhostí hodnoty 2,4, což znamená, že do všech směrů je statická tuhost téměř srovnatelná. Ideálním poměrem by byla hodnota 1, kdy je tuhost v konkrétním bodě konstantní. V jiných konfiguracích je tento poměr výrazně větší.

Další částí práce je návrh experimentálního zařízení, které by mělo ověřit tuhost na reálné robotické struktuře v porovnání s daty ze simulační části. Princip reálného experimentu vychází ze silového namáhání robotické struktury a sledování výchyly jejího koncového bodu. K tomu jsou použity již existující pojezdové osy s lineárními motory. Tyto pojezdové osy tvoří dohromady zatěžovací zařízení, které pracují horizontálně. Silové namáhání se zajistí propojením koncového bodu robota a pojezdu zařízení pomocí pružiny. Detailnější popis návrhu a reálná podoba experimentu je obsažena v kapitole 6.

Poslední částí práce bylo vytvoření analytického dynamického modelu pomocí Lagrangeových rovnic II.druhu. Cílem bylo ukázat další možnou variantu k dosažení požadovaných výsledků. Platnost tohoto modelu byla ověřena

právě simulačním modelem. Závěrem lze konstatovat, že všechny cíle bakalářské práce byly splněny.



# Literatura

- [1] Sun, L.; Fang, L. An approximation method for stiffness calculation of robotic arms with hybrid open- and closed-loop kinematic chains. *Advances in Mechanical Engineering*, volume 10, no. 2, 2018: p. 1687814018761297, doi: 10.1177/1687814018761297.
- [2] Wu, K.; Li, J.; Zhao, H.; et al. Review of Industrial Robot Stiffness Identification and Modelling. *Applied Sciences*, volume 12, no. 17, 2022, doi: 10.3390/app12178719.
- [3] Michalec, J. *Pružnost a pevnost I*. České vysoké učení technické, 2010.
- [4] Mekaouche, A.; Chapelle, F.; Balandraud, X. FEM-Based Generation of Stiffness Maps. *IEEE Transactions on Robotics*, volume 31, no. 1, 2015: pp. 217–222, doi:10.1109/TRO.2015.2392351.
- [5] Griffin, M. WHOLE-BODY VIBRATION. 2001: pp. 1570–1578, doi:https://doi.org/10.1006/rwvb.2001.0082.
- [6] Wolf, S.; Grioli, G.; Eiberger, O.; et al. Variable Stiffness Actuators: Review on Design and Components. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, volume 21, no. 5, 2016: pp. 2418–2430, doi:10.1109/TMECH.2015.2501019.
- [7] Jafari, A.; Tsagarakis, N. G.; Vanderborght, B.; et al. A novel actuator with adjustable stiffness (AwAS). In *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010, pp. 4201–4206, doi:10.1109/IROS.2010.5648902.
- [8] Tsagarakis, N.; Sardellitti, I.; Caldwell, D. A new variable stiffness actuator (CompAct-VSA): Design and modelling. *Proceedings of the ... IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 09 2011: pp. 378–383, doi: 10.1109/IROS.2011.6095006.
- [9] Zuzana Budinská, Z. K. a. M. J., Petr Ducháček. *FYZIKA I*. nakladatelství ČVUT, 2020, ISBN 978-80-01-06673-7.
- [10] Lynch, K. M.; Park, F. C. *Modern robotics*. Cambridge University Press, 2017.

- [11] Vybíral, B. Statika tuhého tělesa. *Knihovnička FO č*, volume 26.
- [12] Gregersen, E. Britannica. 2024. Available from: <https://www.britannica.com/science/moment-of-inertia>
- [13] Valášek, M.; Bauma, V. *Mechanika B (skripta)*. nakladatelství ČVUT, 2004.
- [14] Siciliano, B.; Sciavicco, L.; Villani, L.; et al. *Robotics. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*, London, England: Springer, first edition, Nov. 2008.
- [15] Jazar, R. N. *Theory of Applied Robotics*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010, ISBN 978-1-4419-1749-2.
- [16] de la Barrière, O.; Hlioui, S.; Ben Ahmed, H.; et al. Three-Dimensional Analytical Modeling of a Permanent-Magnet Linear Actuator With Circular Magnets. *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 46, no. 9, 2010: pp. 3608–3616, doi:10.1109/TMAG.2010.2045507.
- [17] Casillo, D. BELT-DRIVEN VERSUS BALL SCREW ACTUATOR: WHICH IS THE BEST CHOICE FOR YOUR APPLICATION? 2023. Available from: <https://www.isotechinc.com/belt-driven-versus-ball-screw-actuators/>
- [18] Magnetic Linear Actuators. 2024. Available from: <https://www.electricity-magnetism.org/magnetic-linear-actuators/>
- [19] Šenkeřík, A. Simulační model rovinného paralelního robota se dvěma stupni volnosti. 2023: p. 42.
- [20] Stejskal, V.; Brousil, J.; Stejskal, S. *Mechanika III*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001.