Bakalářská práce

České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

Kopule s maximální entropií

Milan Bubák

Vedoucí: prof. Ing. Mirko Navara, DrSc.
Obor: Kybernetika a robotika
Květen 2024

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu práce prof. Ing. Mirku Navarovi, DrSc. za jeho odborné vedení, trpělivost, čas strávený nad konzultacemi a kontrolou této práce. Dále děkuji ČVUT, že mi je tak dobrou *alma mater*.

Prohlášení

Prohlášení autora práce Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 24. května 2024

Abstrakt

Práce se zabývá kopulemi z pohledu jejich entropie. Nejprve jsou definovány klíčové pojmy. Následně je definována optimalizační úloha, která je řešena, nejprve pro n-dimenzionální interval, kde vyjde ,že maximální entropie se nabývá při konstantní hustotě pravděpodobnosti. To umožní zjednodušení optimalizace spojité účelové funkce, entropie, na optimalizaci diskrétních přírůstků entropie, konstantních na jednotlivých obdélnících (určených body, ve kterých známe hodnotu kopule). Dále je tato úloha řešena pouze pro dvourozměrné kopule, a to pro obecný prázdný obdélník, na kterém známe jen hodnoty kopule na jeho stranách, a na několika dalších příkladech, u kterých známe některé hodnoty uvnitř stanoveného obdélníku.

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

Klíčová slova: kopule, entropie, optimalizace,analytické řešení

Vedoucí: prof. Ing. Mirko Navara, DrSc.

Abstract

The work deals with copulas from the perspective of their entropy. First, key notions are defined. Subsequently, an optimization problem is defined and solved, initially for an n-dimensional interval, where it is found that maximum entropy is achieved with a constant probability density. This allows for the simplification of optimizing the continuous objective function, entropy, to optimizing discrete entropy increments, that are constant on individual rectangles (determined by the points where the value of the copula is known). Furthermore, this problem is solved only for two-dimensional copulas, specifically for a general empty rectangle where the values of the copula are known only at its boundaries, and for several other examples where some values within the specified rectangle are known.

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

Keywords: copula, entropy, optimization,analytical solution

Title translation: Copulas with Maximal Entropy

Obsah

Obrázky

Tabulky

Kapitola 1

Úvod

V této práci se budeme zabývat kopulemi, jakožto nástrojem k vyjádření závislosti dvou a více náhodných proměnných, konkrétně konstrukcí kopulí s maximální entropií, pokud již známe nějaké body, kterými kopule prochází. Tento postup vede k nejlepšímu odhadu pro kopuli procházející danými body, z pohledu, že entropie udává míru informace a maximální entropie znamená nejnižší množství informace, tedy nepřidali jsme si žádnou informaci a pouze splnili omezující podmínky.

Tento přístup nebyl zatím hlouběji zkoumán, ale myšlenka jako taková je zmíněna v [DN17] a kopule v souvislosti s entropií jsou studovány i v jiných článcích, například [PMD10], [PHB12]. Tyto články se ovšem zabývají tématem úplně z jiného pohledu než tato práce. Nejedná se o hlavní vývojovou větev ve výzkumu kopulí, ovšem jistě stojí za zkoumání, neboť stejný přístup dal při studiu jedné náhodně proměnné vzniknout rovnoměrnému rozdělení pro omezený interval $\langle a; b\rangle$, exponenciálnímu rozdělení pro interval $\langle 0; \infty)$ a normálnímu rozdělení pro interval $(-\infty; \infty)$, bez kterých si dnes pravděpodobnost, jako obor matematiky, nedovedeme představit.

Cílem práce je tedy prozkoumat, jak řešit optimalizační úlohu, kde účelovou funkcí je entropie a omezujícími podmínkami jsou body, kterými kopule prochází.

Kapitola 2

Teorie, zavedení pojmů, definice

Jako první zavedeme pár obecných termínů.

Definice 2.1. **Jednotkový interval** budeme značit **I**. Jedná se o uzavřený interval mezi nulou a jedničkou, tedy $\langle 0; 1\rangle$.

2.1 Pravděpodobnost

Zde zavedeme několik termínů z pravděpodobnosti, protože kopule s ní úzce souvisí a tyto termíny a definice se budou dále hodit při definování kopulí a popisu jejich vlastností. Tato kapitola používá definice z [Was04]. Mějme množinu náhodných elementárních jevů Ω, σ-algebru $\mathcal{A}$ definovanou na Ω, jevy $A, B, \ldots \in \mathcal{A}$.

Definice 2.2. **Pravděpodobnost** (pravděpodobnostní míru) $P\colon \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ definujeme jako funkci, která splňuje

1. $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pokud jsou $A_1, A_2, \ldots$ disjunktní, pak $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$.

Z toho je dále možné odvodit například

$$\begin{aligned} P[\emptyset] &= 0\,, \\ P[A^c] &= 1 - P[A]\,, \\ 0 \leq P[A] &\leq 1\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Následující odvození nejsou komplikovaná a je možné je najít v textech o míře nebo pravděpodobnosti.

Definice 2.3. O jevech A a B řekneme, že jsou **nezávislé**, pokud platí

$$P[A \cap B] = P[A]\, P[B]\,. \tag{2.2}$$

Dále definujeme, že množina náhodných jevů $\{A_i : i \in N\}$ je **nezávislá**, pokud platí

$$P\Big[\bigcap_{i \in J} A_i\Big] = \prod_{i \in J} P[A_i] \tag{2.3}$$

pro všechny konečné podmnožiny $J \subseteq N$.

Definice 2.4. **Náhodná proměnná** je měřitelné zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$. Dvojrozměrný **náhodný vektor** je měřitelné zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}^2$.

Definice 2.5. Mějme náhodnou proměnnou X. Její **distribuční funkci** F_X definujeme jako

$$F_X(x) = P[X \leq x]\,. \tag{2.4}$$

Definice 2.6. Řekneme, že náhodná proměnná X je **spojitá**, pokud existuje nezáporná funkce f_X taková, že pro každé a a b reálné platí

$$\int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = P[a < X < b]\,. \tag{2.5}$$

Funkci f_X říkáme **hustota pravděpodobnosti**.

Definice 2.7. Nechť (X, Y) je náhodný vektor. Jeho **sdruženou hustotu pravděpodobnosti** definujeme jako nezápornou funkci f takovou, že pro jakoukoliv borelovskou množinu $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\int \int_A f(x, y)\mathrm{d}A = P[(X, Y) \in A]\,. \tag{2.6}$$

Dále definujeme jeho **marginální hustoty pravděpodobnosti** f_X, f_Y jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\,, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\,. \tag{2.7}$$

Definice 2.8. K náhodnému vektoru (X, Y) z minulé definice je možné najít korespondující **marginální rozdělení** F_X a F_Y jako

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,, \tag{2.8}$$

a podobně

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{2.9}$$

Definice 2.9. Řekneme, že náhodné proměnné X, Y jsou **nezávislé**, pokud platí pro každé borelovské množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$P[X \in A; Y \in B] = P[X \in A]\, P[Y \in B]\,. \tag{2.10}$$

S těmito definicemi máme dostatečnou sadu nástrojů k definici kopulí a jejich základních vlastností.

2.2 Kopule

Protože se celá práce zabývá kopulemi, je nezbytné si kopule definovat. Definice a věty v této kapitole jsou převzaty z [Nel06] a jsou provedeny pouze pro kopule dvou proměnných.

Mějme intervaly $S_x = \langle a_x; b_x \rangle$ a $S_y = \langle a_y; b_y \rangle$. Dále dvě náhodné proměnné X a Y, jejich distribuční funkce $F(x) = P[X \leq x]$ s definičním oborem S_x a $G(y) = P[Y \leq y]$ s definičním oborem S_y. Jejich sdružená distribuční funkce je $H(x, y) = P[X \leq x; Y \leq y]$ s definičním oborem $S_x \times S_y$. Tyto předpoklady platí pro celou kapitolu.

Definice 2.10. O funkci $H(x, y)$ řekneme, že je **2-rostoucí** na obdélníku $S_x \times S_y$, pokud platí

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a_1; b_1 \rangle, \forall y_1, y_2 \in \langle a_2; b_2 \rangle : H(x_1, y_1) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_2, y_2) \geq 0 \tag{2.11}$$

Dvě poznámky k této definici jsou, že levou stranu je možné napsat jako druhou diferenci $\Delta_{x_1}^{x_2} \Delta_{y_1}^{y_2} H$ funkce H. Dále, že to, že je funkce 2-rostoucí, nezaručuje, že je rostoucí v jednotlivých parametrech, viz [Nel06].

Definice 2.11. **2-kopule** C je funkce, která má tyto vlastnosti

- její definiční obor je $\mathbf{I}^2$,
- je 2-rostoucí
- $\forall x, y \in \mathbf{I}: \quad C(0; y) = 0 = C(x, 0)$
- $\forall x, y \in \mathbf{I}: \quad C(x, 1) = x \qquad C(1; y) = y$

Namísto 2-kopule budeme říkat kopule, protože v tomto textu nejsou vícedimenzionální kopule použity.

Věta 2.12. ***(Sklarova věta)*** *Mějme sdruženou distribuční funkci H a její marginální rozdělení F a G. Pak existuje kopule C taková, že pro všechna x, y z definičního oboru H platí*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \,. \tag{2.12}$$

Důkaz je možné najít v [Nel06]. Pro nás je ale mnohem důležitější fakt, že Sklarova věta dává do souvislosti distribuční funkce a kopule, to je z pohledu této práce důležité z toho důvodu, že entropie jako taková je implicitně závislá na velikosti množiny, přes kterou integrujeme, a kopule tento problém odstraňují tím, že normalizují rozsahy náhodných proměnných do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Tím dáme smysl optimalizaci entropie.

Definice 2.13. Nechť F je distribuční funkce, pak **kvaziinverze** funkce F je jakákoli funkce $F^{(-1)}$ s definičním oborem $\mathbf{I}$, pro kterou platí:

1. Pokud je t v oboru hodnot funkce F, pak $x = F^{(-1)}(t)$ splňuje $F(x) = t$; celkově tedy platí
$$F(F^{(-1)}(t)) = t\,. \tag{2.13}$$

2. Pokud t není v oboru hodnot funkce F, pak
$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}\,. \tag{2.14}$$

Pokud je funkce F spojitá a ostře rostoucí, vystačíme s normální definicí inverze. Tato definice umožňuje dosadit kvaziinverze do Sklarovy věty a dostaneme
$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))\,. \tag{2.15}$$
Z toho plyne, že mezi kopulí a sdruženou distribuční funkcí je možné libovolně převádět. To ukazuje na využití kopulí a důvod, proč je dobré umět je odhadovat.

Poslední zmínkou ke kopulím je, že pokud máme kopuli C danou jako $C(u, v) = uv$, pak ta vyjadřuje, že jsou proměnné u a v nezávislé. To je podobné jako u pravděpodobnosti, kde nezávislost dvou jevů znamenala, že se pravděpodobnost toho, že se stanou oba, počítala jako součin pravděpodobností. Dále v textu dokážeme, že násobení pravděpodobností vede i u kopulí k maximální entropii.

2.3 Entropie

Entropie je obecný způsob, jak kvantitativně měřit množství informace v systému. Bylo zavedeno několik definic entropie funkce f na n-dimenzionálním intervalu I. Základem je Shannonova entropie, která byla poprvé publikována v [Sha48],
$$\mathrm{Ent}(f(z)) = \int S(f(z))\mathrm{d}z\,, \tag{2.16}$$
kde $S(t)$ je definovaná jako
$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{když} \quad t = 0, \\ -t\ln t & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.17}$$
Dále pak Rényiova entropie, poprvé v [Ré61],
$$\forall q \geq 0, q \neq 1: \quad \mathrm{Ent}(f) = \frac{1}{1-q}\log_2 \int_I f^q(z)\mathrm{d}z\,. \tag{2.18}$$
Dále Tsallisova-Havrdova-Charvátova entropie, poprvé v [HC67],
$$\forall q \geq 0, q \neq 1: \quad \mathrm{Ent}(f) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \int_I f^q(z)\mathrm{d}z\right)\,. \tag{2.19}$$

Dvě poslední, (2.18) a (2.19), vycházejí ze snahy zobecnit Shannonovu entropii, ta ale plní svůj úkol dobře a s jejím využitím jde vyřešit řadu optimalizačních úloh. Mohou existovat i další způsoby jak definovat entropii, ale ty už nebudeme ani zmiňovat, protože v tomto textu budeme používat jen první zmíněnou, a to Shannonovu. Proto si pro Shannonovu entropii odvodíme derivaci aktuálního přírůstku entropie (2.17), která je pro obecnou nenulovou funkci f

$$\frac{\partial S\left(f(z)\right)}{\partial z} = \left(-1 - \ln f(z)\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\,. \tag{2.20}$$

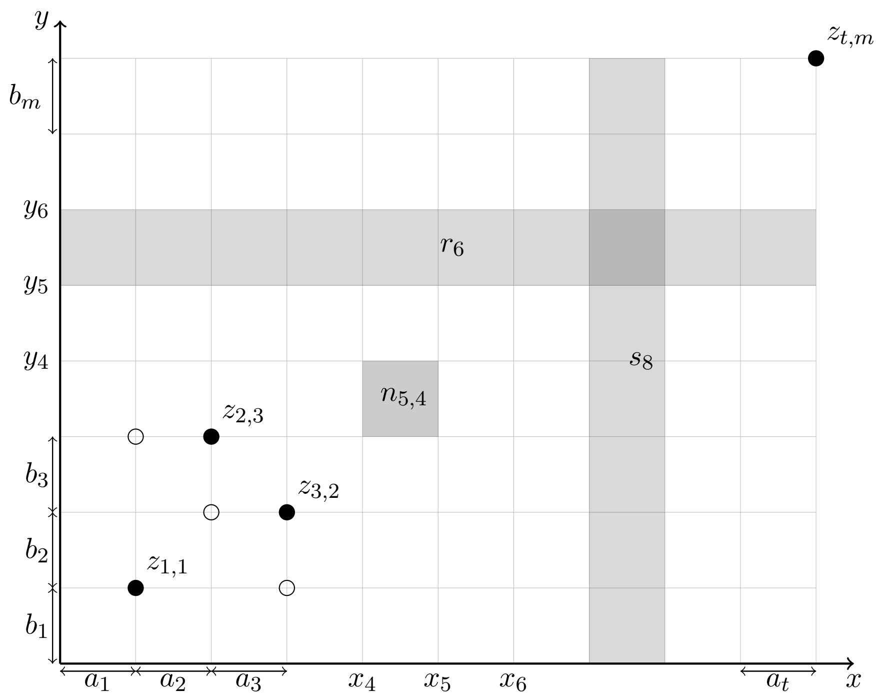
Kapitola 3

Úvod do hledání kopulí s maximální entropií a značení

V této části práce zavedeme značení, které budeme používat pro popis příkladu, pokud nebude uvedeno jinak. To je na obrázku 3.1. Významy jednotlivých značek jsou popsány v tabulce 3.1. Jako první ukážeme, že na intervalu je entropie maximální, pokud je hustota pravděpodobnosti konstantní. Uvedeme, jak tento fakt umožní zjednodušit optimalizační úlohu. Dále se budeme zabývat analytickým řešením optimalizačních úloh, kde účelovou funkcí bude entropie kopule (2.16) a omezujícími podmínkami zadané hodnoty, kterými kopule prochází. Také se zmíníme o obecné struktuře úlohy a nastíníme algoritmus, který byl použit při řešení problémů.

značka	**význam**
a_i	délka i-tého intervalu na ose x
b_j	délka j-tého intervalu na ose y
$n_{i,j}$	pravděpodobnost $P[x_{i-1} < X \leq x_i,\ y_{j-1} < Y \leq y_j]$
$z_{i,j}$	hodnota kopule v bodě (x_i, y_j)
x_i	vzdálenost konce i-tého intervalu od počátku
y_j	vzdálenost konce j-tého intervalu od počátku
r_j	součet všech $n_{i,j}$ v j-tém řádku zkoumaného obdélníku
s_i	součet všech $n_{i,j}$ v i-tém sloupci zkoumaného obdélníku
●	uzel, ve kterém známe hodnotu kopule
○	uzel, ve kterém neznáme hodnotu kopule

Tabulka 3.1: Významy značek



Obrázek 3.1: Ukázka značení používaného při popisu většiny úloh

Kapitola 4

Rozdělení hustoty pravděpodobnosti pro spojitý n-dimenzionální interval

V této kapitole dokážeme, že je v jakémkoliv n-dimenzionálním intervalu, který má definovaný integrál hustoty funkce f, je největší entropie pro konstantní funkci. Tím obhájíme to, že při řešení dalších problému dělíme zkoumané intervaly na síť, u které je možné počítat entropii diskrétně.
Mějme n-dimenzionální interval $I \in \mathbb{R}$, Lebesgueovu míru μ na intervalu I, konstantu $d > 0$ a množinu $\mathcal{F}$ všech měřitelných funkcí $f > 0$, takových, že platí

$$\int_I f(z)dz = d \tag{4.1}$$

Pro tyto funkce máme definovanou Shannonovu entropii vztahem (2.16).

Věta 4.1. *Funkce $f \in \mathcal{F}$ má maximální entropii ze všech funkcí v množině $\mathcal{F}$ právě tehdy, když je konstantní skoro všude.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje $f \in \mathcal{F}$, která má maximální entropii ze všech funkcí v množině $\mathcal{F}$ a není konstantní na intervalu s nenulovou mírou. Pak můžeme najít množiny $A, B \subset I$ se stejnou nenulovou mírou ($\mu(A) = \mu(B) > 0$) tak, že budou existovat konstanty $\epsilon > 0$ a c, splňující

$$\forall z \in A: \quad f(z) \leq c - \epsilon, \tag{4.2}$$

$$\forall z \in B: \quad f(z) \geq c + \epsilon. \tag{4.3}$$

Všimněme si, že množiny A, B budou jistě disjunktní. Pro $\delta \in \langle 0; \epsilon \rangle$ zavedeme třídu funkcí g_δ, $\delta > 0$, pomocí které půjde ukázat, že f není optimální:

$$g_\delta(z) = \begin{cases} f(z) + \delta & z \in A, \\ f(z) - \delta & z \in B, \\ f(z) & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Funkce g_δ je v množině $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}\int_I g_\delta(z)dz = \int_A g_\delta(z)dz + \int_B g_\delta(z)dz + \int_{I\setminus(A\cup B)} g_\delta(z)dz = \\ = \int_I f(z)dz + \delta(\mu(A) - \mu(B)) = d. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Poslední zásadní vlastností je

$$g_0(z) = f(z). \tag{4.6}$$

Jako poslední je teď potřeba ukázat, pomocí změny parametru δ, že je možné zvětšit entropii f. To ukážeme derivací entropie funkce g_δ následovně.

$$\frac{\partial \mathrm{Ent}\,(g_\delta(z))}{\partial\delta} = \frac{\partial}{\partial\delta}\int_I S\,(g_\delta(z))\,\mathrm{d}z = \tag{4.7}$$

$$= \int_I \frac{\partial}{\partial\delta} S\,(g_\delta(z))\,\mathrm{d}z = \tag{4.8}$$

$$= \int_A (-1 - \ln g_\delta(z))\mathrm{d}z + \int_B (1 + \ln g_\delta(z))\mathrm{d}z = \tag{4.9}$$

$$= -\mu(A) - \int_A \ln g_\delta(z)\mathrm{d}z + \mu(B) + \int_B \ln g_\delta(z)\mathrm{d}z = \tag{4.10}$$

$$= -\int_A \ln g_\delta(z)\mathrm{d}z + \int_B \ln g_\delta(z)\mathrm{d}z. \tag{4.11}$$

Po dosazení hodnoty $\delta = 0$, protože budeme vyšetřovat, jestli není v okolí funkce f jiná s vyšší entropií,

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Ent}\,(g_\delta(z))}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} = -\int_A \ln f(z)\mathrm{d}z + \int_B \ln f(z)\mathrm{d}z. \tag{4.12}$$

Z předpokladů (4.2), (4.3) navíc vychází

$$-\int_A \ln f(z)\mathrm{d}z \geq -\mu(A)\,\ln(c-\epsilon), \tag{4.13}$$

$$\int_B \ln f(z)\mathrm{d}z \geq \mu(B)\,\ln(c+\epsilon) = \mu(A)\,\ln(c+\epsilon). \tag{4.14}$$

Po dosazení do (4.12) dostaneme

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Ent}\,(g_\delta(z))}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} \geq \mu(A)\,(\ln(c+\epsilon) - \ln(c-\epsilon)) > 0, \tag{4.15}$$

což ukazuje, že s parametrem δ entropie roste, a proto je možné najít funkci s vyšší entropií, než má funkce f. To je spor s předpokladem, a tím je důkaz hotov. □

4.1 Přeformulování optimalizační úlohy

Tento výsledek umožňuje přeformulovat optimalizační úlohu, konkrétně účelovou funkci, tedy entropii (2.16). Protože víme, že na jednotlivých dvojrozměrných intervalech, kde nejsou další omezení kromě hodnot kopule v jejich vrcholech, bude hustota pravděpodobnosti konstantní, je možné zavést $n_{i,j}$ tak, jak je to v tabulce (3.1), a bude platit

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} C(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = a_i b_j \rho = n_{i,j} \tag{4.16}$$

kde

$$\rho = \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \tag{4.17}$$

je hustota pravděpodobnosti na obdélníku $a_i \times b_j$. Z toho a znalosti

$$f(x,y) = \rho = \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \tag{4.18}$$

pro entropii jednoho políčka můžeme psát.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(f) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} S\big(f(x,y)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} -f(x,y)\ln f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \rho \ln \rho\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= -a_i b_j \rho \ln \rho = -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j}, . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Proto je možné napsat pro obecnou síť $t \times m$:

$$\max_{n_{i,j}} \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{t} -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j}\,. \tag{4.20}$$

To významně zjednodušuje úlohu, protože původní úloha vyžadovala projít množinu všech funkcí, jejichž integrál přes dvojrozměrný interval se rovná hodnotě dané omezujícími podmínkami. Tato upravená verze účelové funkce je jednodušší, protože optimalizuje funkci konečného počtu proměnných, která se navíc po derivaci změní v hledání kořene polynomiální rovnice (ve více proměnných soustavy polynomiálních rovnic), jak vyplývá z derivace entropie (2.20). Polynomiální rovnici dostaneme při hledání extrému po položení rovno nule,

$$\begin{aligned} -1 - \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} &= 0\,, \\ n_{i,j} &= a_i b_j (-\mathrm{e})\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ve skutečnosti bude celá situace trochu jiná, protože místo jedné proměnné $n_{i,j}$ bude výraz vycházející z (4.20), ve kterém budou jednotlivá $n_{i,j}$ vyjádřena tak, aby byly proměnné nezávislé a dostali jsme jen optimalizaci funkce bez jakýchkoliv omezujících podmínek, ale tento problém budeme hlouběji řešit až v kapitole 6.

Kapitola 5

Řešení pro obecnou prázdnou obdélníkovou síť $t \times m$

Nejprve vyřešíme problém, který se na první pohled může zdát jednoduchý. Tím je situace, kdy známe pouze hodnoty na okrajích obdélníku rozděleného na t sloupců a m řádků. Jako první si definujeme optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \max_{n_{i,j}} \quad & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{t} -n_{i,j}\ln\frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \\ \text{za podmínek} \quad & n_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1,2\dots,t\}: \quad & \sum_{j=1}^{m} n_{i,j} = s_i \\ \forall j \in \{1,2\dots,m\}: \quad & \sum_{i=1}^{t} n_{i,j} = r_j \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $\sum_{i=1}^{t} s_i = \sum_{j=1}^{m} r_j$.

K jejímu řešení využijeme Lagrangeovy multiplikátory. Lagrangeova funkce je

$$L(n_{i,j},\lambda_i,\mu_j) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m} -n_{i,j}\ln\frac{n_{i,j}}{a_i b_j} + \sum_{i=1}^{t}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m} n_{i,j} - s_i\right) + \sum_{j=1}^{m}\mu_j\left(\sum_{i=1}^{t} n_{i,j} - r_j\right) \tag{5.2}$$

Tu dále derivujeme podle všech proměnných, derivace pokládáme rovny nule a dostáváme

$$\forall k \in \{1,2\dots,t\}, \quad \forall l \in \{1,2\dots,m\}: \quad \frac{\partial L}{\partial n_{k,l}} = -1 - \ln\frac{n_{k,l}}{a_k b_l} + \lambda_k + \mu_l = 0 \tag{5.3}$$

To je možné upravit jako

$$\ln\frac{n_{k,l}}{a_k b_l} = -1 + \lambda_k + \mu_l \tag{5.4}$$

Derivace následně odečteme tak, že dostaneme

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}: \quad & \ln \frac{n_{k,l}}{a_k b_l} - \ln \frac{n_{i,l}}{a_i b_l} = \lambda_k - \lambda_i \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}: \quad & \ln \frac{n_{k,l}}{a_k b_l} - \ln \frac{n_{k,j}}{a_k b_j} = \mu_k - \mu_j \end{aligned} \tag{5.5}$$

Z toho následně vyjádříme $n_{i,l}$ a $n_{k,j}$ jako

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}: \quad & n_{i,l} = n_{k,l} \frac{a_i}{a_k} \exp(\lambda_i - \lambda_k) \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}: \quad & n_{k,j} = n_{k,l} \frac{b_j}{b_l} \exp(\mu_j - \mu_l) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Z toho je jasně vidět, že jednotlivé hodnoty v sloupci resp. řádku jsou lineárně závislé, protože z rovnosti vyšlo, že jsou konstantní vůči iterování l, resp. k, a protože musí dát dohromady řádkové a sloupcové součty, musí být pravda, že zachovávají v řádcích/sloupcích stejné poměry jako řádkové/sloupcové součty. To přímo znamená, že pokud je napíšeme do matice, bude tuto matici možné napsat jako součin dvou vektorů, a to konkrétně jako

$$M = \begin{bmatrix} n_{1,1} & \dots & n_{1,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m,1} & \dots & n_{m,t} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_t \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Posledním úkonem je dopočítat konstantu c. To už není složité, protože víme, že součet všech členů v matici se musí rovnat součtu řádkových součtů (5.8), z toho dostaneme

$$c \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{t} s_i r_j = \sum_{i=1}^{t} s_i \,, \tag{5.8}$$

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} s_i} \,. \tag{5.9}$$

To znamená, že hodnotu kopule s největší entropií v nevyplněné obdélníkové síti je možné počítat jako součin řádkových a sloupcových součtů (a normalizaci na hodnotu kopule v daném regionu), které je možné spočítat z hraničních hodnot kopule. To je ovšem jen formalizace intuitivního faktu, že pokud o dvou náhodných veličinách nic nevíme, je správné předpokládat, že jsou nezávislé, a tedy pravděpodobnost výskytu obou jevů je dána součinem pravděpodobnosti jednotlivých jevů.

Kapitola 6

Řešení pro specifické případy

Při řešení úloh, kdy máme zadanou nějakou část obdélníkové sítě, se ukazuje, že velmi efektivní způsob řešení je vyjádřit si závislosti mezi proměnnými, následně dosadit do účelové funkce, a pak už optimalizovat jen účelovou funkci. Obecné zadání je tedy takové, že dostaneme hodnoty kopule a první zjednodušení, které je možné udělat, je, že pokud bude na síti možné ohraničit nějakou skupinu neznámých bodů kopule známými, pak se můžeme zabývat těmito částmi při optimalizaci odděleně. To vychází z toho, že z okolních bodů máme přesně dáno, jak velká je pravděpodobnost, že náhodné veličiny padnout do tohoto regionu.

Nyní nastíníme obecný postup řešení optimalizační úlohy na obdélníku (na obecném regionu by šlo postupovat stejně, jen by se změnila účelová funkce). Jako první si formulujeme zadání pro obdélník $t \times m$ políček s o známými vnitřními hodnotami $z_{i,j}$, kde dvojice indexů známých hodnot kopule jsou v množině N. Indexy jsou posunuty tak, aby bylo $z_{0,0}$ v levém dolním rohu sítě. Optimalizační úlohu budeme řešit v přeformulované verzi podle kapitoly 4.1, tedy úloha bude (6.1), pravá strana omezujících podmínek by šla psát jako druhá diference kopule, ale budeme ji značit jen konstantami C_*.

$$
\begin{aligned}
\max_{n_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=t}^{m} -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \\
\text{za podmínek} \quad & n_{i,j} \geq 0 \\
\forall (p,q) \in N^2, \quad p,q \neq 0: \quad & \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j} = z_{p,q} - z_{p,0} - z_{0,q} + z_{0,0} = C_v
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Další krok je napsat rovnice do matice tak, že postupně jednotlivým $n_{i,j}$ přiřadíme sloupce a přepíšeme jen jedničky za omezení, ve kterých se vyskytují. Následně matici upravíme Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou, tím dostaneme matici M v trojúhelníkovém tvaru, která může vypadat např.

takto:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & K_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & K_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & K_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & K_{o-t-m+1} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Konstanty K_* jsou součty konstant C_*, které jsme dostali při aplikaci Gaussovy-Jordanovy eliminace. Důležité je, že sloupce, které nemají pivoty, budou naše nezávislé proměnné, v závislosti na nich vyjádříme proměnné z ostatních sloupců, a ty následně dosadíme do účelové funkce.

Účelovou funkci následně derivujeme podle všech nezávislých proměnných a dostaneme

$$tm - m - t + 1 - o \tag{6.3}$$

rovnic (pokud nebyly nějaké podmínky závislé, což obecně nejsou), protože máme tm neznámých a o omezení, ale všechny dole a vlevo nepřidávají informaci.

Věta 6.1. *Optimální hodnota optimalizační úlohy* (6.1) *nezávisí na parametrech a_i, b_j pro $\forall i \in \{1, 2 \dots t\}$ a $\forall j \in \{1, 2 \dots m\}$.*

Důkaz. To je možné ukázat tak, že si v účelové funkci dosadíme

$$n_{i,j} = z_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} + z_{i-1,j-1}\,, \tag{6.4}$$

tím dostaneme optimalizaci v proměnných $z_{i,j}$, kde $z_{i,j}$ jsou neznáme hodnoty kopule. Omezující podmínky se změní tak, že budeme požadovat, aby

$$\forall p \in \{1, 2 \dots t\}, \quad \forall q \in \{1, 2 \dots m\}: \quad z_{p,q} - z_{p,0} - z_{0,q} + z_{0,0} \geq 0 \tag{6.5}$$

Pokud budeme řešit tuto úlohu, budeme derivovat podle neznámých hodnot $z_{i,j}$ a každá tato neznámá se v účelové funkci vyskytuje právě čtyřikrát, to je vidět na obrázku 6.3a; neznámá hodnota $z_{1,1}$ se vyskytuje v vzorci pro $n_{1,1}$ a $n_{2,2}$ se znaménkem plus a ve vzorci pro $n_{1,2}$ a $n_{2,1}$ se znaménkem minus. Toto platí bez újmy na obecnosti, protože na hodnotě $z_{i,j}$ jsou vždy závislé stejným způsobem jen hodnoty $n_{i,j}$,$n_{i+1,j}$,$n_{i,j+1}$ a $n_{i+1,j+1}$. To znamená, že po derivaci účelové funkce podle proměnné $z_{i,j}$ a položení rovno nule, kvůli hledání extrému, dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} &\ln \frac{z_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} + z_{i-1,j-1}}{a_i b_j} + 1 - \ln \frac{z_{i,j+1} - z_{i-1,j+1} - z_{i,j} + z_{i-1,j}}{a_i b_{j+1}} - 1 \\ &- \ln \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j} - z_{i+1,j-1} + z_{i,j-1}}{a_{i+1} b_j} - 1 + \ln \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j} - z_{i,j+1} + z_{i,j}}{a_{i+1} b_{j+1}} + 1 \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

tu je možné upravit jako

$$\begin{aligned}\frac{z_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} + z_{i-1,j-1}}{a_i b_j} \cdot \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j} - z_{i,j+1} + z_{i,j}}{a_{i+1} b_{j+1}} &= \\ \frac{z_{i,j+1} - z_{i-1,j+1} - z_{i,j} + z_{i-1,j}}{a_i b_{j+1}} \cdot \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j} - z_{i+1,j-1} + z_{i,j-1}}{a_{i+1} b_j} &.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Tuto rovnici dále vynásobíme výrazem $a_i b_j a_{i+1} b_{j+1}$ a dostaneme rovnici nezávislou na parametrech a_i, b_j,a_{i+1} a b_{j+1}, a protože to platí pro každé $z_{i,j}$ a $n_{i,j}$ je možné vyjádřit jako (6.4), nebude ani $n_{i,j}$ závislé na parametrech a_i ani b_j, pro každé i a j. Tím je důkaz hotov. $\square$

Tento výsledek říká dvě důležité věci: výsledek není závislý na škálování obdélníků a rovnice při odvozování mohou být závislé jen do určité míry. Proto je možné psát, že každá z rovnic pro optimalizaci entropie bude mít po derivaci podle $n_{k,l}$ následující tvar:

$$\prod_{\kappa_1 \in Z_+} (n_{k,l} + B_{\kappa_1}) = \prod_{\kappa_2 \in Z_-} (-n_{k,l} + B_{\kappa_2}) \tag{6.8}$$

Kde Z_+ je množina indexů konstant K, u kterých se vyskytuje neznámá $n_{k,l}$ s kladným znaménkem, a Z_- je množina indexů konstant K, u kterých se vyskytuje neznámá $n_{k,l}$ s záporným znaménkem. Takový výraz je možné očekávat, protože $n_{k,l}$ může mít ve vyjádření obecného obdélníku $n_{i,j}$ znaménko plus nebo minus, to bude určovat, na jaké straně rovnice se objeví. Kladných a záporných znamének bude ale jistě stejně, proto se jedničky odečtou. Jediný problém je, že $n_{i,j}$ může být závislé i na jiné proměnné než $n_{k,l}$. Tudíž v B_* budou figurovat jak konstanty K_* tak i jiné nezávislé proměnné n_*.

Dalším úkolem je vyřešit soustavu rovnic. To se budeme pokoušet dělat analytickým vyjádřením jednotlivých proměnných, pro které neznáme obecný postup, ale existují určité postupy, které mohou řešení pomoci. Například při vyjadřování proměnných bývá užitečné nejprve vyjádřit jednu proměnnou jako výraz, který je závislý na součinech, kde se vyskytují obě proměnné, a následně tento výraz dosadit do druhé rovnice. Tento postup je možný, jen pokud mají obě proměnné v závorkách vždy stejná, nebo vždy jiná znaménka. Postup je ukázaný v sekci 6.2, konkrétně je takto vyjádřena proměnná $n_{2,2}$ v (6.18).

Pokud se povede vyjádřit proměnné a dopočítat je ze zadaných hodnot, došlo by k ověření, které hodnoty dávají smysl ($n_{i,j} \geq 0$, $n_{i,j}$ není komplexní číslo), a následně pro jednotlivé kombinace dosazení do entropie, a tím bychom nalezli globální extrém.

6.1 Příklad 1

Toto je první řešený problém. Postup řešení je využití algoritmu popsaného na začátku této kapitoly. Jako první dostaneme formulaci optimalizační úlohy:

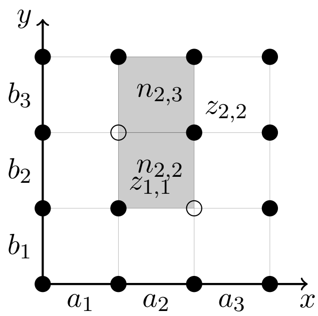
$$\begin{aligned}
\max_{n_{i,j}} \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \quad & i,j \in \{1;2;3\} \\
\text{za podmínek} \quad n_{i,j} &\geq 0 \\
n_{1,1} &= C_1 \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} &= C_2 \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{1,2} + n_{2,2} &= C_3 \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{3,2} &= C_4 \\
n_{1,1} + n_{1,2} + n_{1,3} &= C_5 \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{1,3} + n_{2,3} &= C_6 \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{3,2} + n_{1,3} + n_{2,3} + n_{3,3} &= C_7
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Ze sady rovností vyjádříme jednotlivé proměnné a dostaneme

$$\begin{aligned}
&n_{1,1} = C_1 = K_1 \\
&n_{2,1} = -n_{2,2} - n_{2,3} - C_5 + C_6 = -n_{2,2} - n_{2,3} + K_2 \\
&n_{3,1} = n_{2,2} + n_{2,3} - C_1 + C_2 + C_5 - C_6 = n_{2,2} + n_{2,3} + K_3 \\
&n_{1,2} = n_{2,3} - C_1 + C_3 + C_5 - C_6 = n_{2,3} + K_4 \\
&n_{2,2} = n_{2,2} \\
&n_{3,2} = -n_{2,2} - n_{2,3} + C_1 - C_2 - C_3 + C_4 - C_5 + C_6 = -n_{2,2} - n_{2,3} + K_5 \\
&n_{1,3} = -n_{2,3} - C_3 + C_6 = -n_{2,3} + K_6 \\
&n_{2,3} = n_{2,3} \\
&n_{3,3} = C_3 - C_4 - C_6 + C_7 = K_8
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Tam, kde se vyskytovaly konstanty C_v, substituujeme za součet novou konstantu K_u, dále dosadíme do účelové funkce, kterou parciálně derivujeme a chceme, aby se parciální derivace rovnaly nule, k vyšetření přítomnosti extrému. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{K_2 - n_{2,2} - n_{2,3}}{a_2 b_1} + 1 - \ln \frac{K_3 + n_{2,2} + n_{2,3}}{a_3 b_1} - 1 - \ln \frac{n_{2,2}}{a_2 b_2} - 1+ \\
&+ \ln \frac{K_5 - n_{2,2} - n_{2,3}}{a_3 b_2} + 1 = 0 \\[1em]
&\ln \frac{K_2 - n_{2,2} - n_{2,3}}{a_2 b_1} + 1 - \ln \frac{K_3 + n_{2,2} + n_{2,3}}{a_3 b_1} - 1 - \ln \frac{K_4 + n_{2,3}}{a_1 b_2} - 1+ \\
&+ \ln \frac{K_5 - n_{2,2} - n_{2,3}}{a_3 b_2} + 1 + \ln \frac{K_6 - n_{2,3}}{a_1 b_3} + 1 - \ln \frac{n_{2,3}}{a_2 b_3} - 1 = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$



Obrázek 6.1: Příklad 1

To je možné upravit pomocí sečtení a zbavení se logaritmů na

$$
\begin{aligned}
(K_2 - n_{2,2} - n_{2,3})(K_5 - n_{2,2} - n_{2,3}) &= (K_3 + n_{2,2} + n_{2,3})n_{2,2} \\
(K_2 - n_{2,2} - n_{2,3})(K_5 - n_{2,2} - n_{2,3})(K_6 - n_{2,3}) &= (K_3 + n_{2,2} + n_{2,3})(K_4 + n_{2,3})n_{2,3}
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Druhou rovnici můžeme vydělit první, zbyde

$$K_6 - n_{2,3} = \frac{(K_4 + n_{2,3})n_{2,3}}{n_{2,2}}$$

odtud

$$n_{2,2} = \frac{(K_4 + n_{2,3})n_{2,3}}{(K_6 - n_{2,3})} \tag{6.13}$$

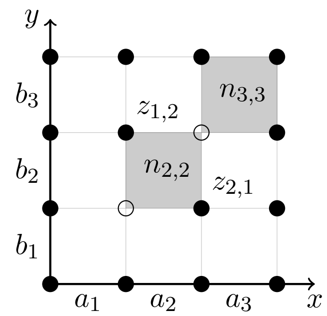
To dosadíme do první rovnice v (6.12) a po roznásobení dostaneme rovnici třetího řádu

$$
\begin{aligned}
(K_3 - K_4 - K_6)n_{2,3}^3 + (K_2K_6 + K_2K_4 + \\
+K_2K_5 + K_6^2 + K_4K_6 + K_5K_6 - K_3K_6 + K_4K_5 + K_3K_4)n_{2,3}^2 + \\
+(-K_2K_6^2 - K_2K_4K_6 - K_2K_5K_6 -_5 K_6^2 - K_4K_5K_6 - K_3K_4K_6)n_{2,3} + \\
+K_2K_5K_6^2 = 0
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Ta je řešitelná analyticky pomocí Cardanových vzorců [Sta10]. Můžeme dostat až tři kořeny, ty pak dosadíme do (6.13), dostaneme $n_{2,2}$, a tím i dvojice $(n_{2,2}, n_{3,3})$, které tvoří množinu řešení. Tuto množinu pak následně můžeme testovat dosazením a tím odhalit globální extrém. Pokud $K_3 - K_4 - K_6 \neq 0$, existuje aspoň jeden reálný kořen. Tato podmínka znamená, že $C_2 \neq C_6$. Kromě toho je potřeba splnit nerovnosti, aby výsledky mohly mít požadovanou interpretaci (všechna $n_{i,j}$ musí vyjít nezáporná).

6.2 Příklad 2

Druhý řešený příklad je podobný jako první, má jen prohozené známé a neznámé vnitřní body viz (6.2). Jako první napíšeme optimalizační úlohu:



Obrázek 6.2: Příklad 2

$$
\begin{aligned}
\max_{n_{i,j}} \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \quad & i,j \in \{1;2;3\} \\
\text{za podmínek} \quad n_{i,j} \geq 0 & \\
n_{1,1} + n_{2,1} = C_1 & \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} = C_2 & \\
n_{1,1} + n_{1,2} = C_3 & \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{3,2} = C_4 & \\
n_{1,1} + n_{1,2} + n_{1,3} = C_5 & \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{1,3} + n_{2,3} = C_6 & \\
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} + n_{1,2} + n_{2,2} + n_{3,2} + n_{1,3} + n_{2,3} + n_{3,3} = C_7 &
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

Po vyjádření proměnných a substituci K_u za výrazy s C_v

$$
\begin{aligned}
n_{1,1} &= n_{2,2} - n_{3,3} + C_1 + C_3 - C_4 - C_6 + C_7 = n_{2,2} - n_{3,3} + K_1 \\
n_{2,1} &= -n_{2,2} + n_{3,3} - C_3 + C_4 + C_6 - C_7 = -n_{2,2} + n_{3,3} + K_2 \\
n_{3,1} &= -C_1 + C_2 = K_3 \\
n_{1,2} &= -n_{2,2} + n_{3,3} - C_1 + C_4 + C_6 - C_7 = -n_{2,2} + n_{3,3} + K_4 \\
n_{2,2} &= n_{2,2} \\
n_{3,2} &= -n_{3,3} + C_1 - C_2 - C_6 + C_7 = -n_{3,3} + K_6 \\
n_{1,3} &= -C_3 + C_5 = K_7 \\
n_{2,3} &= -n_{3,3} + C_3 - C_4 - C_5 + C_7 = -n_{3,3} + K_8 \\
n_{3,3} &= n_{3,3}
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

Po dosazení do entropie, derivaci, porovnání s nulou, zbavení se logaritmů a následném vynásobení jmenovatelem dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_{2,2}}: &\quad (n_{2,2}-n_{3,3}+K_1)n_{2,2}=(-n_{2,2}+n_{3,3}+K_2)(-n_{2,2}+n_{3,3}+K_4)\\ \frac{\partial}{\partial n_{3,3}}: &\quad (-n_{2,2}+n_{3,3}+K_2)(-n_{2,2}+n_{3,3}+K_4)n_{3,3}=\\ &\quad =(n_{2,2}-n_{3,3}+K_1)(-n_{3,3}+K_6)(-n_{3,3}+K_8)\end{aligned} \tag{6.17}$$

Ve druhé rovnici zaměníme pravou a levou stranu a vydělíme první rovnicí. Dostaneme

$$n_{2,2}=\frac{(-n_{3,3}+K_6)(-n_{3,3}+K_8)}{n_{3,3}} \tag{6.18}$$

Tento výraz následně dosadím do první rovnice z (6.17) a po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}&((K_1-K_6-K_8)n_{3,3}+K_6K_8)(n_{3,3}^2-(K_6+K_8)n_{3,3}+K_6K_8)=\\ &=((K_6+K_8)n_{3,3}-K_6K_8)((K_4+K_6+K_8)n_{3,3}-K_6K_8)\end{aligned} \tag{6.19}$$

Tuto rovnici třetího stupně je možné řešit analyticky pomocí Cardanových vzorců [Sta10]. Koeficient u třetí mocniny je $K_1-K_6-K_8=C_2+C_5-C_7$. Pokud je nenulový, existuje aspoň jeden reálný kořen. Můžeme dostat až tři kořeny, ty pak dosadíme do (6.18), dostaneme $n_{2,2}$, a tím i dvojice $(n_{2,2},n_{3,3})$, které tvoří množinu řešení. Tuto množinu pak následně můžeme testovat dosazením do entropie a tím najít globální extrém.

6.3 Příklad 3

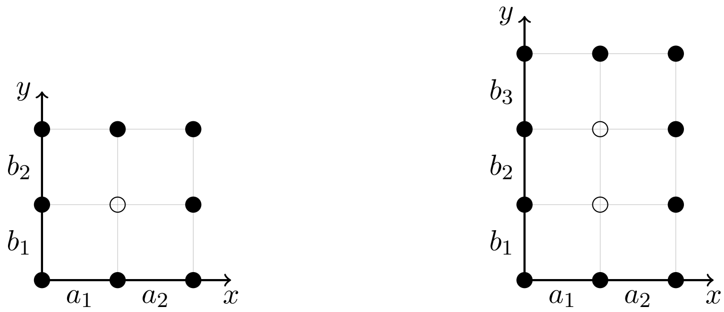
Také jsme tímto přístupem řešili problém prázdné sítě, než se ho podařilo zobecnit. Uvedeme zde tedy, jak taková řešení vypadají, s tím, že už před vyřešením příkladu předpokládáme (6.20) pro síť 2×2

$$\frac{n_{1,1}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}}=\frac{n_{1,1}+n_{2,1}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}}\cdot\frac{n_{1,1}+n_{1,2}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}} \tag{6.20}$$

a (6.21) pro síť 2×3

$$\begin{aligned}\frac{n_{1,1}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}+n_{1,3}+n_{2,3}}&=\frac{n_{1,1}+n_{2,1}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}+n_{1,3}+n_{2,3}}\cdot\\ \frac{n_{1,1}+n_{1,2}+n_{1,3}}{n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2}+n_{1,3}+n_{2,3}}&\end{aligned} \tag{6.21}$$

Předpokládáme tedy, že jakákoliv hodnota $n_{i,j}$ je možná spočítat jako násobek s_i a r_j podělený součtem všech n.



(a) : Příklad 3a) **(b) :** Příklad 3b)

Obrázek 6.3: Příklad 3

6.3.1 Příklad 3a)

Máme úlohu z obrázku 6.3a. Vyjádříme ji jako optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \max_{n_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -n_{i,j} \ln \frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \quad i,j \in \{1;2\} \\ \text{za podmínek} \quad & n_{i,j} \geq 0 \\ n_{1,1} + n_{2,1} &= C_1 \\ n_{1,1} + n_{1,2} &= C_2 \\ n_{1,1} + n_{2,1} + n_{1,2} + n_{2,2} &= C_3 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Vyjádříme jednotlivé proměnné.

$$\begin{aligned} n_{2,1} &= C_1 - n_{1,1} = -n_{1,1} + K_1 \\ n_{1,2} &= C_2 - n_{1,1} = -n_{1,1} + K_2 \\ n_{2,2} &= -C_1 - C_2 + C_3 + n_{1,1} = n_{1,1} + K_3 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Dosadíme do entropie a derivujeme, položíme rovno nule a zbavíme se logaritmů.

$$n_{1,1}(n_{1,1} + K_3) = (K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1}) \tag{6.24}$$

Tuto rovnici vyřešíme a dostaneme.

$$n_{1,1} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2 + K_3} = \frac{C_1 C_2}{C_3} = \frac{(z_{2,1} - z_{0,1} - z_{2,0} + z_{0,0})(z_{1,2} - z_{1,0} - z_{0,2} + z_{0,0})}{z_{2,2} - z_{2,0} - z_{0,2} + z_{0,0}} \tag{6.25}$$

Řešení (6.25) odpovídá předpokladu (6.20).

6.3.2 Příklad 3b)

Máme úlohu z obrázku 6.3b. Vyjádříme jako optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \max_{n_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} -n_{i,j}\ln\frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \quad i\in\{1;2\} \quad j\in\{1;2;3\} \\ \text{za podmínek} \quad & n_{i,j}\geq 0 \\ n_{1,1}+n_{2,1} &= C_1 \\ n_{1,1}+n_{2,1}+n_{1,2}+n_{2,2} &= C_2 \\ n_{1,1}+n_{1,2}+n_{1,3} &= C_3 \\ n_{1,1}+n_{1,2}+n_{1,3}+n_{2,1}+n_{2,2}+n_{2,3} &= C_4 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Vyjádříme jednotlivé proměnné v závislosti na $n_{1,1}$ a $n_{2,2}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} n_{2,1} &= C_1 - n_{1,1} = -n_{1,1} + K_1 \\ n_{1,2} &= C_2 - C_1 - n_{2,2} = -n_{2,2} + K_2 \\ n_{1,3} &= C_1 - C_2 + C_3 - n_{1,1} + n_{2,2} = -n_{1,1} + n_{2,2} + K_3 \\ n_{2,3} &= -C_1 - C_3 + C_4 + n_{1,1} - n_{2,2} = n_{1,1} - n_{2,2} + K_4 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Dále dosadíme do entropie, zderivujeme podle $n_{1,1}$ a $n_{2,2}$, položíme rovno nule, upravíme, a tím dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_{1,1}}: \quad & n_{1,1}(n_{1,1} - n_{2,2} + K_4) = (-n_{1,1} + K_1)(-n_{1,1} + n_{2,2} + K_3) \\ \frac{\partial}{\partial n_{2,2}}: \quad & n_{2,2}(-n_{1,1} + n_{2,2} + K_3) = (-n_{2,2} + K_2)(n_{1,1} - n_{2,2} + K_4) \end{aligned} \tag{6.28}$$

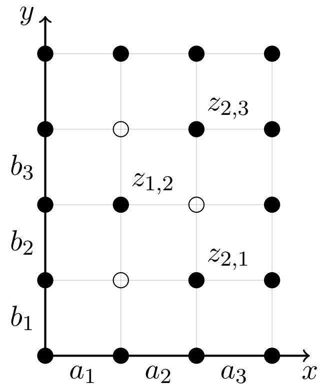
Z první rovnice v (6.28) vyjádříme $n_{1,1}$, z druhé $n_{2,2}$

$$n_{1,1} = \frac{K_1(n_{2,2} + K_3)}{K_1 + K_3 + K_4} \tag{6.29}$$

$$n_{2,2} = \frac{K_2(K_4 + n_{1,1})}{K_2 + K_3 + K_4} \tag{6.30}$$

Pak už jednoduše vyřešíme dosazením (6.30) do (6.29)

$$\begin{aligned} n_{1,1} &= \frac{K_1\left(\frac{K_2(K_4+n_{1,1})}{K_2+K_3+K_4} + K_3\right)}{K_1 + K_3 + K_4} \\ n_{1,1}(K_1 + K_3 + K_4) &= \frac{K_1K_2n_{1,1} + K_1K_2K_4 + K_1K_3(K_2 + K_3 + K_4)}{K_2 + K_3 + K_4} \\ n_{1,1}((K_1 + K_3 + K_4)(K_2 + K_3 + K_4) - K_1K_2) &= K_1(K_2K_4 + K_3(K_2 + K_3 + K_4)) \\ n_{1,1} &= \frac{K_1\Big(K_2K_4 + K_3(K_2 + K_3 + K_4)\Big)}{(K_1 + K_3 + K_4)(K_2 + K_3 + K_4) - K_1K_2} \\ n_{1,1} &= \frac{K_1(K_2K_4 + K_2K_3 + K_3^2 + K_3K_4))}{K_1K_3 + K_1K_4 + K_2K_3 + K_3^2 + 2K_3K_4 + K_2K_4 + K_4^2} \\ n_{1,1} &= \frac{K_1(K_2 + K_3)(K_3 + K_4)}{(K_1 + K_2)(K_3 + K_4) + (K_3 + K_4)^2} \end{aligned} \tag{6.31}$$



Obrázek 6.4: Příklad 4

Po pokrácení dostaneme

$$n_{1,1} = \frac{K_1(K_2 + K_3)}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} = \frac{C_1 C_3}{C_4} \tag{6.32}$$

Po dosazení za C_1, C_3 a C_4 ze zadání dostaneme (6.21), což je výsledek, který jsme předpokládali. Dále dopočteme $n_{2,2}$ dosazením výsledku (6.32) do (6.30)

$$\begin{aligned} n_{2,2} = \frac{K_2(K_4 + \frac{K_1(K_2+K_3)}{K_1+K_2+K_3+K_4})}{K_2 + K_3 + K_4} = (C_2 - C_1)\frac{-C_1 - C_3 + C_4 + \frac{C_1C_3}{C_4}}{-C_1 + C_4} = \\ = (C_2 - C_1)\frac{-C_1C_4 + C_1C_3 - C_3C_4 + C_4^2}{(-C_1 + C_4)C_4} = (C_2 - C_1)\frac{(-C_1 + C_4)(-C_3 + C_4)}{(-C_1 + C_4)C_4} = \\ = \frac{(C_2 - C_1)(-C_3 + C_4)}{C_4} = \frac{(n_{1,2} + n_{2,2})(n_{2,1} + n_{2,2} + n_{2,3})}{n_{1,1} + n_{1,2} + n_{1,3} + n_{2,1} + n_{2,2} + n_{2,3}} \end{aligned} \tag{6.33}$$

To také odpovídá předpokladu zmíněnému v zadání, tedy $n_{2,2}$ je možno počítat jako součin druhého řádku s druhým sloupcem děleno součtem celku.

6.4 Příklad 4

Další příklad je popsán na obrázku 6.4, z něj vychází optimalizační úloha

$$\begin{aligned}
\max_{n_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} -n_{i,j}\ln\frac{n_{i,j}}{a_i b_j} \quad i\in\{1;2;3\} \quad j\in\{1;2;3;4\} \\
\text{za podmínek} \quad & n_{i,j} \geq 0 \\
& n_{2,1} = K_1 - n_{1,1} \\
& n_{1,2} = K_2 - n_{1,1} \\
& n_{3,2} = K_3 + n_{1,1} - n_{2,2} \\
& n_{2,3} = K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3} \\
& n_{3,3} = K_5 - n_{1,1} + n_{2,2} \\
& n_{1,4} = K_6 \qquad\qquad\qquad - n_{1,3} \\
& n_{2,4} = K_7 \qquad\qquad\qquad + n_{1,3}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Zbytek:

$$\begin{aligned}
& n_{1,1} \quad \text{nezávisle proměnná} \\
& n_{2,2} \quad \text{nezávisle proměnná} \\
& n_{1,3} \quad \text{nezávisle proměnná} \\
& n_{3,1} \quad \text{konstanta} \\
& n_{3,4} \quad \text{konstanta}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Tato úloha má jiný tvar než obvykle, byla totiž řešena jinak. Závislosti jsme hledali přímo z obrázku odčítáním známých obdélníků. Známý je takový obdélník, kde ve vzorci $z_{p,q}-z_{p,0}-z_{0,q}+z_{0,0}$ známe všechny hodnoty $z_{p,q}$. Volba neznámých umožnila dostat se k potřebným $n_{i,j}$. Tento postup znamenal, že místo obdélníků, které byly v předchozích příkladech značeny jako C_*, jsme teď rovnou použili K_*, což značí jejich součty, které by vedly k vyjádření daného K. Tento postup je možný, protože pro strukturu úlohy jsou důležitá pouze vzájemná znaménka mezi jednotlivými nezávisle proměnnými.

Dalším krokem je derivace účelové funkce, porovnání s nulou a zbavení se logaritmů. Na první pohled se to může zdát jako velké množství úprav, ale ze znalosti struktury úlohy víme, že dostaneme na jedné straně rovnosti násobek vyjádřených $n_{i,j}$, kde je $n_{1,1}$ s kladným znaménkem, a na druhé straně rovnosti násobek vyjádřených $n_{i,j}$, kde je se záporným. Dále víme, z věty na začátku kapitoly, že se konstanty, určující délky stran obdélníku, ve jmenovateli se pokrátí, protože výsledný výraz na nich nesmí být závislý. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_{1,1}} &: (K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})(K_5 - n_{1,1} + n_{2,2}) = \\
&= n_{1,1}(K_3 + n_{1,1} - n_{2,2})(K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3}) \\
\frac{\partial}{\partial n_{2,2}} &: (K_3 + n_{1,1} - n_{2,2})(K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3}) = (K_5 - n_{1,1} + n_{2,2})n_{2,2} \\
\frac{\partial}{\partial n_{1,3}} &: (K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3})(K_6 - n_{1,3}) = n_{1,3}(K_7 + n_{1,3})
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Z první rovnice v (6.36) vyjádříme členy, které obsahují izolovaně $n_{1,1}$, jako

$$\frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}} = \frac{(K_3 - n_{2,2} + n_{1,1})(K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3})}{K_5 - n_{1,1} + n_{2,2}} \tag{6.37}$$

Druhou rovnici v (6.36) je možné napsat jako

$$\frac{(K_3 - n_{2,2} + n_{1,1})(K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3})}{K_5 - n_{1,1} + n_{2,2}} = n_{2,2} \tag{6.38}$$

Za výraz na levé straně dosadíme z (6.37), tím můžeme vyjádřit $n_{2,2}$ jako

$$n_{2,2} = \frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}} \tag{6.39}$$

Dále třetí rovnici v (6.36) přepíšeme jako

$$\begin{aligned}
K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} - n_{1,3} &= \frac{n_{1,3}(K_7 + n_{1,3})}{K_6 - n_{1,3}} \\
K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} &= \frac{n_{1,3}(K_7 + n_{1,3}) + n_{1,3}(K_6 - n_{1,3})}{K_6 - n_{1,3}} \\
K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} &= \frac{n_{1,3}(K_7 + K_6)}{K_6 - n_{1,3}} \\
K_4 + n_{1,1} - n_{2,2} &= -(K_7 + K_6) + \frac{(K_7 + K_6)K_6}{K_6 - n_{1,3}}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Pak dosadíme $n_{2,2}$, vyjádřené v (6.39), do poslední rovnice v (6.40). Z toho úpravě dostaneme $n_{1,3}$,

$$\begin{aligned}
K_4 + n_{1,1} - \frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}} &= -(K_7 + K_6) + \frac{(K_7 + K_6)K_6}{K_6 - n_{1,3}} \\
\frac{(K_4 + n_{1,1})n_{1,1} - (K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1}) + (K_7 + K_6)n_{1,1}}{n_{1,1}} &= \frac{(K_7 + K_6)K_6}{K_6 - n_{1,3}} \\
\frac{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2}{n_{1,1}} &= \frac{(K_7 + K_6)K_6}{K_6 - n_{1,3}} \\
\frac{n_{1,1}}{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2} &= \frac{K_6 - n_{1,3}}{(K_7 + K_6)K_6} \\
\frac{n_{1,1}(K_7 + K_6)K_6}{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2} &= K_6 - n_{1,3} \\
\frac{K_6(n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2) - n_{1,1}(K_7 + K_6)K_6}{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2} &= n_{1,3} \\
\frac{K_6(n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4) - K_1K_2)}{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2} &= n_{1,3}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Tím máme vyjádřeno jak $n_{2,2}$ v (6.39), tak $n_{1,3}$ v (6.41) v závislosti na $n_{1,1}$. To dává možnost obě vyjádření dosadit do první rovnice v (6.36), a tím dostaneme

$$L: \ (K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})\Big(K_5 - n_{1,1} + \frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}}\Big)$$
$$P: \ n_{1,1}\Big(K_3 - \frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}} + n_{1,1}\Big)\Big(K_4 + n_{1,1} - \frac{(K_1 - n_{1,1})(K_2 - n_{1,1})}{n_{1,1}}$$
$$- \frac{K_6(n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4) - K_1K_2)}{n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2}\Big), \tag{6.42}$$

kde L značí levou a P pravou stranu rovnice. Tento výraz ještě upravíme tak, aby bylo možné posoudit jeho analytickou řešitelnost, a po částečném roznásobení dostaneme

$$\begin{aligned} L: \ & \frac{(n_{1,1}^2 - (K_1 + K_2)n_{1,1} + K_1K_2)((-K_1 - K_2 + K_5)n_{1,1} - K_1K_2)}{n_{1,1}} \\ P: \ & ((K_1 + K_2 + K_3)n_{1,1} - K_1K_2)\cdot \\ & \frac{\Big(n_{1,1}^2(K_1 + K_2 + K_4)(K_1 + K_2 + K_4 + K_7)}{n_{1,1}(n_{1,1}(K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7) - K_1K_2)} \\ & \frac{-n_{1,1}K_1K_2(2K_1 + 2K_2 + 2K_4 + 2K_6 + K_7) + K_1^2K_2^2\Big)}{} \end{aligned} \tag{6.43}$$

Roznásobíme společným jmenovatelem pravé a levé strany a dostaneme

$$L: \ (n_{1,1}^2 - (K_1 + K_2)n_{1,1} + K_1K_2)((-K_1 - K_2 + K_5)n_{1,1} - K_1K_2)$$
$$((K_1 + K_2 + K_4 + K_6 + K_7)n_{1,1} - K_1K_2)$$
$$P: \ ((K_1 + K_2 + K_3)n_{1,1} - K_1K_2)\Big(n_{1,1}^2(K_1 + K_2 + K_4)(K_1 + K_2 + K_4 + K_7) -$$
$$n_{1,1}K_1K_2(2K_1 + 2K_2 + 2K_4 + 2K_6 + K_7) + K_1^2K_2^2\Big) \tag{6.44}$$

Levá strana bude po roznásobení polynom čtvrtého stupně a pravá strana bude po roznásobení polynom třetího stupně. Po odečtení dostaneme polynom čtvrtého stupně, a ten je analyticky řešitelný viz [Sta10].

Zbylé proměnné bychom dostali dosazením do (6.39) a (6.41). To by vygenerovalo množinu řešení, kterou by šlo následně dosadit do entropie a tím zjistit, pro jaké hodnoty nabývá extrému.

Kapitola 7

Závěr

V práci se nám podařilo provést základní kroky v odhadování kopulí pomocí principu maximální entropie. Definovali jsme optimalizační úlohu, transformovali ji z původně spojitého problému na diskrétní optimalizaci, následně ji upravili a ukázali několik triků, kterými se zjednoduší díky struktuře úlohy. Ukázali jsme jeden způsob, jak postupovat při jejím řešení. Úlohu jsme vyřešili analyticky pro obdélníkovou síť libovolných rozměrů, v níž nejsou žádná omezení ve vnitřních bodech, a dále pro několik typických příkladů. Vede na soustavu algebraických rovnic vyššího řádu.

Dalšímu zkoumání by bylo potřeba podrobit výsledky, které jsme dostali, a diskutovat jejich smysluplnost. Mělo by se kontrolovat, jestli nedošlo někde během úprav k dělení nulou, a jestli výsledky budou vždy splňovat omezující podmínky (všechny pravděpodobnosti musí být nezáporné). Přitom by bylo možno využít to, že smysluplné zadání nesmí být v rozporu s tím, že kopule je 2-rostoucí; konkrétní vyjádření a použití těchto podmínek však není snadné. Ve složitějších případech by úloha vedla na algebraické rovnice vyšších řádů, analyticky neřešitelné, a bylo by žádoucí navrhnout vhodné numerické metody pro jejich přibližné řešení. Vzhledem ke specifické povaze úlohy je naděje na nalezení vždy konvergentní metody. Původní zadání předpokládalo porovnání výsledků s jinými metodami prokládání kopulí. Navržený přístup je však natolik originální, že jsme nenašli srovnatelné práce. Většina literárních zdrojů navrhuje postupy, které nelze přímo aplikovat na data námi studované úlohy. Pokud to dovolují, nezaměřují se na entropii, ale používají jiná kritéria optimality. I bez této části se zadání ukázalo velmi náročné; je úspěch, že se podařil aspoň nějaký pokrok v tomto novém směru. Byly aspoň položeny základy a zjednodušeny postupy získání odpovídajících algebraických rovnic.

Další zajímavou cestou, kterou by šlo při výzkumu kopulí z pohledu entropie jít, by bylo optimalizovat přímo v neznámých hodnotách kopule. Tedy postupovat stejně, jak to děláme, ale před zderivováním si vyjádřit pravděpodobnosti $n_{i,j} = P[x_{i-1} < X \leq x_i,\ y_{j-1} < Y \leq y_j]$ pomocí hodnot kopule ve vrcholech tohoto dvojrozměrného intervalu (zde $z_{i,j} = P[X \leq x_i,\ Y \leq y_j]$).

To je možné, jak ukazujeme v tomto textu. Tento postup by mohl vést k obecnějším výsledkům, protože je jasněji daná struktura optimalizační úlohy.

Literatura

[DN17] Michal Dibala and Mirko Navara, *Discrete copulas and maximal entropy principle*, Copulas and Their Applications (Almeria, Spain), 2017, p. 24.

[HC67] Jan Havrda and František Charvát, *Quantification method of classification Processes*, Kybernetika **3** (1967), no. 1, 30–35.

[Nel06] Roger B. Nelsen, *An Introduction to Copulas, 2nd edition, volume 139 of Lecture Notes in Statistics*, Springer, New York, NY, 2006.

[PHB12] Julia Piantadosi, Phil Howlett, and Jonathan Borwein, *Copulas with maximum entropy*, Optimization Letters **6** (2012), no. 1, 99–125.

[PMD10] Doriano-Boris Pougaza and Ali Mohammad-Djafari, *Maximum entropies copulas*, 30th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (France), 2010, pp. 329–336.

[Ré61] Alfréd Rényi, *On measures of entropy and information*, Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1961), 547–561.

[Sha48] Claude E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal **27** (1948), no. 3, 379–423.

[Sta10] David Stanovský, *Základy algebry*, MatfyzPress, Praha, 2010.

[Was04] Larry A. Wasserman, *All of Statistics. A Concise Course in Statistical Inference*, Springer, 2004.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bubák** Jméno: **Milan** Osobní číslo: **507612**

Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**

Zadávající katedra/ústav: **Katedra kybernetiky**

Studijní program: **Kybernetika a robotika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Kopule s maximální entropií

Název bakalářské práce anglicky:

Copulas with Maximal Entropy

Pokyny pro vypracování:

Seznamte se s principy modelování závislosti náhodných veličin pomocí kopulí. Cílem je návrh metody, která (alespoň v nejjednodušších případech) najde kopule s maximální entropií jako odhad založený na konečném souboru daných hodnot kopule v uzlových bodech. Porovnejte výsledky s alespoň jednou dnes používanou metodou aproximace dat kopulí a zhodnoťte výsledky.

Seznam doporučené literatury:

R. B. Nelsen: An Introduction to Copulas, 2nd edition, volume 139 of Lecture Notes in Statistics. Springer, New York, 2006.

L. Wasserman: All of Statistics. A Concise Course in Statistical Inference. Springer, 2004.

M. Dibala, M. Navara: Discrete copulas and maximal entropy principle. In: Enrique de Amo Artero, Juan Fernández Sánchez, Manuel Úbeda Flores (eds.), Copulas and Their Applications, Almería, Spain, 24, 2017.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

prof. Ing. Mirko Navara, DrSc. Strojové učení FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **02.02.2024** Termín odevzdání bakalářské práce: _______________

Platnost zadání bakalářské práce: **21.09.2025**

prof. Ing. Mirko Navara, DrSc.	prof. Dr. Ing. Jan Kybic	prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

.

Datum převzetí zadání Podpis studenta