

Bakalářská práce



České  
vysoké  
učení technické  
v Praze

**F3**

Fakulta elektrotechnická  
Katedra radioelektroniky

## Numerický výpočet funkcí matic

Vasyl Martynovský

Vedoucí: Mgr. Martin Křepela, Ph.D.  
Studijní program: Otevřené elektronické systémy  
Květen 2024



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Martynovský** Jméno: **Vasyl** Osobní číslo: **498935**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**  
Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Numerický výpočet funkcí matic**

Název bakalářské práce anglicky:

**Numerical Evaluation of Matrix Functions**

Pokyny pro vypracování:

Řešitel zpracuje přehled matematické teorie maticových funkcí a na jeho základě posoudí vhodné metody praktického výpočtu. Zvolenou metodu pak implementuje v softwaru MATLAB. Výstupem praktické části bude program, který k zadané matici  $A$  a funkci  $f$  stanoví matici  $f(A)$ , má-li úloha smysl. Program bude dále umožňovat výpočet maticové exponenciály s časovým parametrem tak, aby výsledek bylo možné přímo použít ke stanovení řešení systému ODR se zadanou konstantní maticí a počáteční podmínkou. Řešitel se také pokusí o nalezení vhodného odhadu chyby výsledku v závislosti na zadané matici.

Seznam doporučené literatury:

- [1] C. D. Meyer: Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM 2000
- [2] D. S. Watkins: Understanding the QR Algorithm, SIAM Review 24:4 (1982), 427-440
- [3] C. Moler, C. Van Loan: Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later, SIAM Review 45:1, 3-49

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Mgr. Martin Křepela, Ph.D. katedra matematiky FEL**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **02.10.2023**

Termín odevzdání bakalářské práce: **24.05.2024**

Platnost zadání bakalářské práce: **16.02.2025**

\_\_\_\_\_  
Mgr. Martin Křepela, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Stanislav Vítek, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Poděkování

V první řadě bych rád poděkoval vedoucímu práce Mgr. Martinu Křepelovi, Ph.D. za konzultace a trpělivost. Svým pěti spolužákům za dobrou společnost. A v neposlední řadě rodičům za morální podporu.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 20. května 2024

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá funkcemi matic a možnými metodami jejich numerického výpočtu.

Úvodní část obsahuje shrnutí potřebné základní teorie a pokročilejších výsledků využívaných pro konstrukci maticových funkcí.

Poté jsou představeny tři numerické metody výpočtu funkce matice, které jsou implementovány v softwaru MATLAB. Konkrétně se jedná o výpočet pomocí Taylorova a Lagrangeova polynomu a pomocí spektrálního rozkladu. Přesnost těchto metod je následně porovnávána pomocí numerických experimentů.

Vytvořené programy, které jsou součástí práce, umožňují také výpočet funkcí matic závislých na časovém parametru, jaké se vyskytují například při řešení systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Uvedeny jsou příklady řešení takovýchto problémů získaných pomocí implementovaných metod.

**Klíčová slova:** Matice, Jordanův tvar matice, funkce matic, spektrální rozklad matice, Taylorův polynom, Lagrangeův polynom, MATLAB, exponenciála matice, obyčejné diferenciální rovnice

**Vedoucí:** Mgr. Martin Křepela, Ph.D.  
Katedra matematiky FEL ČVUT  
Jugoslávských partyzánů 3  
166 27 Praha 6

## Abstract

This bachelor thesis deals with matrix functions and possible methods of their numerical calculation.

The introductory part contains a summary of the necessary basic theory and more advanced results used for the construction of matrix functions.

We continue by presenting three numerical methods of calculating a matrix function, which are implemented in MATLAB. Specifically, these are based on using Taylor and Lagrange polynomials, and spectral resolution. The accuracy of these methods is then compared by means of numerical experiments.

The programs developed as part of this work also allow for computation of time-dependent matrix functions, such as those appearing, for example, in problems concerning systems of linear ordinary differential equations. Examples of solutions to such problems obtained using the implemented methods are also given.

**Keywords:** Matrix, Jordan form of a matrix, matrix function, spectral resolution, Taylor polynomial, Lagrange polynomial, MATLAB, matrix exponential, ordinary differential equations

**Title translation:** Numerical Evaluation of Matrix Functions

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Základní teorie</b>	<b>3</b>
2.1 Prostor matic .....	3
2.2 Maticové rozklady .....	11
<b>3 Teorie funkcí matic</b>	<b>15</b>
3.1 Základní definice .....	16
<b>4 Implementace teorie funkcí matic</b>	<b>25</b>
4.1 Taylorův polynom .....	26
4.2 Výpočet vlastních čísel .....	28
4.3 Lagrangeův polynom .....	30
4.4 Spektrální rozklad .....	32
<b>5 Numerické experimenty</b>	<b>35</b>
5.1 Porovnání metod výpočtu $f(\mathbf{A})$	35
5.2 Zvolení metody určení indexů ..	36
5.3 Ryze diagonální matice .....	40
5.4 Diagonalizovatelné matice.....	44
5.5 Nediagonalizovatelné matice....	48
5.6 Tabulka porovnání metrik .....	52
<b>6 Funkce matice <math>\mathbf{A}t</math></b>	<b>53</b>
6.1 Taylorův polynom .....	54
6.2 Lagrangeův polynom .....	54
6.3 Spektrální projekce .....	54
6.4 Exponenciála matice $e^{\mathbf{A}t}$ .....	55
<b>7 Obyčejné diferenciální rovnice</b>	<b>57</b>
7.1 Příklady řešení ODR .....	58
<b>8 Závěr</b>	<b>63</b>
<b>Příloha a návod k použití programů</b>	<b>65</b>
<b>Literatura</b>	<b>67</b>





# Kapitola 1

## Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou funkce matic. Matice jsou důležitým matematickým objektem, který se používá v mnoha oblastech, jako je algebra, lineární algebra, statistika, fyzika, informatika a další.

Funkce matic je zobrazení, které funkci  $f$  a matici  $\mathbf{A}$  přiřadí matici  $\mathbf{B}$  v jistém smyslu. Mají širokou škálu aplikací, například v řešení diferenciálních rovnic či zpracování signálů.

V práci se zaměříme na následující témata:

1. teoretický úvod do funkcí matic,
2. představení numerického výpočtu funkcí matic,
3. porovnání tří metod výpočtu.

V následujícím textu je shrnutí obsahu všech kapitol, které se v práci vyskytují, za účelem jednoduššího orientování v práci.

Druhá kapitola obsahuje všechny dále použité definice a věty z lineární algebry. Třetí kapitola se zabývá úvodem do teorie funkcí matic. Začíná se s polynomy matice a na základě získaných poznatků se zavádí pojem funkcí matic pro obecnější funkce. Ve zbytku kapitoly jsou teoreticky představené tři metody výpočtu, jmenovitě: pomocí spektrálního rozkladu, Lagrangeova polynomu a Taylorova polynomu.

Čtvrtá kapitola numericky uplatňuje teorii z předchozí kapitoly. Na úvod kapitoly jsou shrnuty příkazy v softwaru MATLAB, které jsou zapotřebí k porozumění kódů. Navazuje se první metodou výpočtu funkcí matic využívající Taylorova polynomu. Popis obsahuje metodiku samotného výpočtu i způsob analytického odhadu chyby při použití  $k$ -tého stupně Taylorova polynomu. Před implementací zbylých metod kapitola nastiňuje problematiku numerického stanovení vlastních čísel a jejich indexů.

Další metoda výpočtu, které se věnujeme, využívá Lagrangeova polynomu. Poslední metodou je použití spektrálního rozkladu.

U obou posledně uvedených metod se složitě analyticky vyjadřuje předpis pro horní odhad chyby použité metody, a proto se v další části pomocí numerických experimentů snažíme přibližně odhadnout přesnost všech metod.

Za tímto účelem definujeme tři „metriky“, pomocí kterých budeme testovat přesnost, a to při práci s třemi typy matic: diagonálními, diagonalizovatelnými a nediagonalizovatelnými. Předmětem našeho porovnání bude i doba výpočtu funkce matice pomocí každé metody. Výstupem je grafické znázornění získaných hodnot.

Šestá kapitola zkoumá matice závislé na časovém parametru a funkce na nich. V práci se omezíme na specifickou časovou závislost matic, konkrétně  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}t$ . Kapitola dále zavádí rozšíření tří metod, kterých jsme doposud využívali, pro možnost spočtení funkcí na těchto maticích. Konec kapitoly je věnován exponenciále matice  $\exp(\mathbf{A}t)$ .

Poslední kapitola se věnuje systému obyčejných diferenciálních rovnic společně s jeho řešením. Po uvedení řešení je ukázka použití programu pro výpočet řešení dvou takových systémů pomocí tří uvažovaných metod.

V přílohové části se, mimo jiné, nachází šestice programů, které byly využity při numerických experimentech. V přílohové sekci je podrobný popis obsahu archivu této bakalářské práce společně s návodem k použití programů.

# Kapitola 2

## Základní teorie

Obsahem této kapitoly je zavedení notace a vyslovení potřebných definic pro práci s maticemi.

### 2.1 Prostor matic

**Definice 2.1.1** (prostor matic). Necht  $m, n \in \mathbb{N}$ . Značíme

$$\mathbb{C}^{m \times n} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{C} \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Je-li  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , označíme dále:

- (i)  $[\mathbf{A}]_{ij} := a_{ij}$ ;
- (ii)  $[a_{ij}] := \mathbf{A}$ ;
- (iii)  $\mathbf{A}_{i*} := (a_{i1}, \dots, a_{in})$  ...  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{A}$ ;
- (iv)  $\mathbf{A}_{*j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$  ...  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ .

Poznamenejme, že matice s rozměrem  $n = 1$  budeme nazývat *sloupcovým vektorem*, matice s rozměrem  $m = 1$  pak *řádkovým vektorem*.

**Definice 2.1.2** (sčítání a skalární násobení matic). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Definujeme:

- (i)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} := [a_{ij} + b_{ij}]$ ;
- (ii)  $\alpha \mathbf{A} := [\alpha a_{ij}]$ .

**Definice 2.1.3** (součin matic). Necht  $m, n, r \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ . Pak definujeme matici  $\mathbf{AB} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  po složkách takto:

$$[\mathbf{AB}]_{ij} := \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Definice 2.1.4** (jednotková matice). Pro  $n \in \mathbb{N}$ , pak definujeme *jednotkovou* matici  $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jako:

$$[\mathbf{I}]_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

**Definice 2.1.5** (mocnina matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definujeme:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k\text{-krát}}; \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Definice 2.1.6** (transponovaná matice). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Pak definujeme:

$$\mathbf{A}^T := [a_{ji}] \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

Matici  $\mathbf{A}^T$  nazveme maticí *transponovanou* k  $\mathbf{A}$ .

**Definice 2.1.7** (adjunkce matice). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Pak pro  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$  definujeme:

$$\mathbf{A}^* := [\bar{a}_{ji}] \in \mathbb{C}^{n \times m},$$

matici  $\mathbf{A}^*$  nazveme maticí *adjungovanou* k  $\mathbf{A}$ .

**Definice 2.1.8** (skalární součin). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Mějme lineární prostor  $\mathbb{C}^n$ . Pak funkci  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , která splňuje následující podmínky

- (i)  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle;$
- (ii)  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle;$
- (iii)  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, : \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle};$
- (iv)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$  a rovnost  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$  nastává právě tehdy, když  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;

říkáme *skalární součin* v  $\mathbb{C}^n$ .

**Definice 2.1.9** (norma). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Zobrazení  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, \infty)$  se nazývá *normou*, pokud platí:

- (i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|;$
- (ii)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$
- (iii)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$

**Věta 2.1.10** (euklidovská norma). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ . Pak zobrazení  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, \infty)$  definované pro  $x \in \mathbb{C}^n$  předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2},$$

je normou, kterou nazýváme *euklidovskou*.

**Věta 2.1.11** (skalární součin indukuje normu). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Mějme lineární prostor  $\mathbb{C}^n$ . Potom*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$$

*určuje normu na  $\mathbb{C}^n$ .*

*Důkaz.* Podle definice 2.1.8 je  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , odmocnina má tedy smysl. Nyní ukážeme tři vlastnosti z definice 2.1.9:

(i)

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x}\| &= \sqrt{\langle \alpha \mathbf{x} | \alpha \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\alpha \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = |\alpha| \|\mathbf{x}\|; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} \\ &\leq \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + 2\sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\left(\sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle}\right)^2} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|; \end{aligned}$$

(iii) Třetí vlastnost je splněná z definice 2.1.8. □

Máme již definovanou normu pro vektory v  $\mathbb{C}^n$ . Nyní chceme tuto definici rozšířit i na matice.

**Definice 2.1.12** (maticová norma). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Následující zobrazení  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty)$  se nazývá *maticovou normou*, pokud platí:*

(i)  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|;$

(ii)  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|;$

(iii)  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|\mathbf{A}\| = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0};$

(iv)  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$

**Definice 2.1.13** (symetrická, hermitovská matice). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Řekneme, že  $\mathbf{A}$  je*

(i) *symetrická*, pokud  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ,

(ii) *antisymetrická*, pokud  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ ,

(iii) *hermitovská*, pokud  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ,

(iv) *antihermitovská*, pokud  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$ .

**Definice 2.1.14** (lineární obal). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Mějme množinu vektorů  $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , kde  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Množině  $\text{span}(M)$ , která je definovaná následovně

$$\text{span}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \right\},$$

říkáme *lineární obal* množiny  $M$ .

**Definice 2.1.15** (lineární závislost). Množinu vektorů  $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  nazveme *lineárně závislou*, pokud existují hodnoty  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  takové, že alespoň jedno  $\alpha_i$  je nenulové a platí

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Pokud takovéto hodnoty neexistují, řekneme, že  $M$  je *lineárně nezávislá*.

**Definice 2.1.16** (podprostor). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , pak  $\mathbb{U}$  nazveme *podprostorem*, pokud splňuje:

- (i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{U}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{U} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ ;
- (ii)  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{U} : \alpha \mathbf{x} \in \mathbb{U}$ .

**Definice 2.1.17** (generátory a báze). Necht  $n, k \in \mathbb{N}$  a  $\mathbb{U}$  je podprostor  $\mathbb{C}^n$ . Řekneme, že množina vektorů  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \subset \mathbb{C}^n$  *generuje* podprostor  $\mathbb{U}$ , pokud platí:

$$\text{span}(B) = \mathbb{U}.$$

Je-li navíc množina  $B$  lineárně nezávislá, nazveme ji *bází* podprostoru  $\mathbb{U}$ .

**Věta 2.1.18** (počet prvků báze). Necht  $n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbb{U}$  je podprostor  $\mathbb{C}^n$ . Potom každé dvě báze  $\mathbb{U}$  mají stejný počet prvků.

**Definice 2.1.19** (dimenze). Necht  $n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbb{U}$  je podprostor  $\mathbb{C}^n$ . Počet prvků jeho libovolné báze nazveme *dimenzí* podprostoru  $\mathbb{U}$  a značíme  $\dim \mathbb{U}$ .

**Definice 2.1.20** (hodnost). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Potom její *hodnost* je definována jako dimenze prostoru generovaného sloupci této matice. Značíme:  $\text{rank } \mathbf{A}$ .

**Věta 2.1.21** (vlastnost hodnosti). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Pak platí:

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T = \text{rank } \mathbf{A}^*.$$

**Definice 2.1.22** (regulární matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se nazve *regulární*, platí-li

$$\text{rank } \mathbf{A} = n.$$

Není-li matice regulární, nazveme jí maticí *singulární*.

**Definice 2.1.23** (inverze matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Matice  $\mathbf{B}$  se nazve *inverze* k matici  $\mathbf{A}$ , platí-li

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Matici  $\mathbf{B}$  pak značíme  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Definice 2.1.24** (unitární matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Řekneme, že  $\mathbf{A}$  je *unitární*, platí-li

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*.$$

**Definice 2.1.25** (jádro matice). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Definujeme *jádro* matice  $\mathbf{A}$  jako

$$N(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

**Definice 2.1.26** (obraz matice). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Definujeme *obraz* matice  $\mathbf{A}$  jako

$$R(\mathbf{A}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}.$$

**Definice 2.1.27** (permutace). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Každé prosté zobrazení

$$\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

nazveme (*n*-prvkovou) *permutací*. Značíme

$$S_n := \{\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ je permutace}\}.$$

Permutaci  $\pi \in S_n$  nazveme *transpozicí*, pokud existují  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  takové, že

$$\pi(i) = j, \pi(j) = i, \pi(k) = k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

**Věta 2.1.28** (složení transpozic). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Každou *n*-prvkovou permutaci lze vyjádřit jako složení konečného počtu transpozic. Je-li tatáž permutace takto vyjádřena dvěma způsoby, je počet transpozic v obou složeních buď sudý, nebo lichý.

**Definice 2.1.29** (znaménko permutací). Necht  $n \in \mathbb{N}$  a  $\pi \in S_n$ . Pak definujeme *znaménko permutace*  $\pi$  jako

$$\text{sgn}(\pi) := \begin{cases} 1, & \pi \text{ je složením sudého počtu transpozic,} \\ -1, & \pi \text{ je složením lichého počtu transpozic.} \end{cases}$$

**Definice 2.1.30** (determinant). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak *determinant* matice  $\mathbf{A}$  definujeme jako

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n [\mathbf{A}]_{i\pi(i)}.$$

**Věta 2.1.31** (vlastnosti determinantu). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak platí

- (i)  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$ ,
- (ii)  $\det(\mathbf{A}^*) = \overline{\det(\mathbf{A})}$ ,
- (iii)  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ .
- (iv)  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$ .

**Definice 2.1.32** (charakteristický polynom). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak funkci  $p_{\mathbf{A}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definovanou pro  $\lambda \in \mathbb{C}$  jako

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}),$$

nazveme *charakteristickým* polynomem matice  $\mathbf{A}$ .

**Definice 2.1.33** (vlastní číslo a vlastní vektor). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Číslo  $\lambda \in \mathbb{C}$  nazveme *vlastním číslem* matice  $\mathbf{A}$ , pokud existuje vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  takový, že platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vektor  $\mathbf{x}$  pak nazveme *vlastním vektorem* matice  $\mathbf{A}$  příslušným vlastnímu číslu  $\lambda$  a podprostor  $N(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  *vlastním podprostorem* příslušným vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Množinu všech různých vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  nazveme *spektr*em matice  $\mathbf{A}$  a značíme  $\sigma(\mathbf{A})$ .

**Věta 2.1.34** (vlastnosti vlastních čísel). Pro  $\lambda \in \mathbb{C}$  jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i)  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ,
- (ii)  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  je *singulární*,
- (iii)  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ .

**Definice 2.1.35** (algebraická násobnost vlastních čísel). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ . Pak definujeme *algebraickou násobnost* vlastního čísla  $\lambda$  jako násobnost kořene polynomu  $p_{\mathbf{A}}$  a značíme

$$\text{am}_{\mathbf{A}}(\lambda).$$

**Definice 2.1.36** (geometrická násobnost vlastních čísel). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ . Pak definujeme *geometrickou násobnost* vlastního čísla  $\lambda$  jako

$$\text{gm}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \dim N(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

**Definice 2.1.37** (diagonální matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Řekneme, že  $\mathbf{D}$  je *diagonální*, pokud pro všechna  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  splňující  $i \neq j$  platí

$$[\mathbf{D}]_{ij} = 0.$$



**Definice 2.1.38** (podobnost matic). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  nazveme *podobné*, existuje-li regulární matice  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  taková, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

v takovém případě píšeme  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ .

**Věta 2.1.39** (podobnost a vlastní čísla). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jsou podobné. Pak  $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})$ .

*Důkaz.* Necht  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , pak

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{X}^{-1}) \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \det(\mathbf{X}) \\ &= \det(\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}) = p_{\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}}(\lambda) \\ &= p_{\mathbf{B}}(\lambda). \end{aligned} \quad \square$$

**Definice 2.1.40** (diagonalizovatelná matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , matici  $\mathbf{A}$  nazveme *diagonalizovatelnou*, existuje-li diagonální matice  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  taková, že platí

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{D}.$$

Potom matici  $\mathbf{D}$  nazveme *diagonalizací matice  $\mathbf{A}$* .

Zde je nutné poznamenat, že existují matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , které takto diagonalizovat nelze.

**Definice 2.1.41** (nilpotentní matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , pak řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je *nilpotentní*, existuje-li  $k \in \mathbb{N}$  takové, že

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{0}.$$

**Definice 2.1.42** (součet podmnožin  $\mathbb{C}^n$ ). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $U, V \subset \mathbb{C}^n$ . Definujeme

$$U + V = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x = u + v, u \in U, v \in V\}.$$

**Definice 2.1.43** (komplementární podprostory). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbb{W}$  je podprostor  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{U}, \mathbb{V}$  jsou podprostory  $\mathbb{W}$ . Řekneme, že  $\mathbb{U}$  a  $\mathbb{V}$  jsou *komplementární podprostory  $\mathbb{W}$* , pokud platí

$$\mathbb{W} = \mathbb{U} + \mathbb{V} \text{ a } \mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \mathbf{0}.$$

V takovém případě píšeme

$$\mathbb{W} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}.$$

**Věta 2.1.44.** Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je *singulární*, pak existuje  $k \in \mathbb{N}$  takové, že

$$\mathbb{C}^n = R(\mathbf{A}^k) \oplus N(\mathbf{A}^k). \quad (2.1)$$

Pro důkaz této věty viz [1, s. 394].

**Definice 2.1.45** (index matice). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je singulární, pak nejmenší  $k \in \mathbb{N}$  takové, že platí rovnice (2.1), nazveme *indexem matice  $\mathbf{A}$* , značíme  $\text{index}(\mathbf{A})$ . Je-li  $\mathbf{A}$  regulární matice, definujeme  $\text{index}(\mathbf{A}) := 0$ .

**Definice 2.1.46** (index vlastního čísla). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ . Pak definujeme *index vlastního čísla  $\lambda$*  jako

$$\text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda) := \text{index}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

**Definice 2.1.47** (zobecněný vlastní vektor). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ,  $p = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ . Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  nazveme *zobecněným vlastním vektorem matice  $\mathbf{A}$  příslušným vlastnímu číslu  $\lambda$* , splňuje-li

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{x} = 0.$$

Množinu  $N((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{x} = 0\}$  nazveme *zobecněným vlastním podprostorem matice  $\mathbf{A}$  příslušným vlastnímu číslu  $\lambda$* .

**Definice 2.1.48** (projekce). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbb{U}, \mathbb{V}$  jsou podprostory  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{C}^n = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ . Pak každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  lze jednoznačně vyjádřit jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_x,$$

kde  $\mathbf{v}_x \in \mathbb{V}$ ,  $\mathbf{u}_x \in \mathbb{U}$ . Lineární zobrazení z  $\mathbb{C}^n$  do  $\mathbb{C}^n$ , které vektoru  $\mathbf{x}$  přiřadí  $\mathbf{v}_x$ , nazýváme *projekcí na  $\mathbb{V}$  podle  $\mathbb{U}$* .

**Věta 2.1.49** (charakterizace projekce). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak je ekvivalentní:

- (i)  $R(\mathbf{P}) \oplus N(\mathbf{P}) = \mathbb{C}^{n \times n}$  a  $\mathbf{P}$  je matice projekce na  $R(\mathbf{P})$  dle  $N(\mathbf{P})$ ;
- (ii)  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ .

Důkaz této věty lze najít na [1, s. 386].

**Definice 2.1.50** (indukovaná maticová norma). Necht  $n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak *indukovanou maticovou normu* definujeme jako

$$\|\mathbf{A}\|_{(2)} = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2,$$

kde  $\|\cdot\|_2$  je euklidovská norma, viz větu 2.1.10.

Pro důkaz, že takto definované zobrazení splňuje axiomy maticové normy, viz [1, s. 280].

**Definice 2.1.51** (číslo podmíněnosti). Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Definujeme *číslo podmíněnosti* jako:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

## 2.2 Maticové rozklady

Za účelem zjednodušení budeme používat následující blokový zápis matic:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Matice  $\mathbf{A}_{ij}$  musí splňovat následující podmínky:

- (i) Počet řádků matic  $\mathbf{A}_{ki}$  se musí shodovat pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- (ii) Počet sloupců matic  $\mathbf{A}_{jl}$  se musí shodovat pro všechna  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Výsledná matice  $\mathbf{M}$  je pak rozměru

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \times \sum_{j=1}^m \beta_{ij},$$

kde  $\alpha_{ij}$  je počet sloupců matice  $\mathbf{A}_{ij}$  a  $\beta_{ij}$  je počet řádků matice  $\mathbf{A}_{ij}$ .

Jako příklad uvažujme následující matice:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pak složená matice  $\mathbf{M}$  po vzoru (2.2) má následující tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

První rozklad, který si představíme, se nazývá *Jordanův kanonický tvar*. Motivací pro jeho zavedení daného rozkladu je následné využití pro zjednodušení výpočtu funkcí matic.

**Věta 2.2.1** (Jordanův kanonický tvar matice). *Nechť  $n, m \in \mathbb{N}$ . Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Nechť  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Potom existuje regulární matice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  taková, že platí*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1},$$

kde  $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je matice tvaru

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{J}_m \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$  je zde  $\mathbf{J}_r \in \mathbb{C}^{\text{am}_{\mathbf{A}}(\lambda_r) \times \text{am}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)}$  matice tvaru

$$\mathbf{J}_r := \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{r,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{r,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{r,\text{gm}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Dále pro každé  $k \in \{1, \dots, \text{gm}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)\}$  je  $\mathbf{J}_{r,k}$  čtvercová matice tvaru

$$\mathbf{J}_{r,k} := \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

a rozměrů  $\alpha_{r,k} \times \alpha_{r,k}$ , kde  $\alpha_{r,k} \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{r,k} \leq \text{am}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$ . Rozměr největší buňky  $\mathbf{J}_{r,k}$  v segmentu  $\mathbf{J}_r$  je roven indexu vlastního čísla  $\lambda_r$ .

Důkaz této věty a tohoto tvrzení není lze nalézt lze na [1, s. 587–590].

**Definice 2.2.2** (Jordanův kanonický tvar matice). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Necht  $\mathbf{Q}, \mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1},$$

potom nazveme matici  $\mathbf{J}$  *Jordanovým kanonickým tvarem* (zkráceně JKT) matice  $\mathbf{A}$ . Matice  $\mathbf{J}_r$  se dále nazve *Jordanovým segmentem* příslušným vlastnímu číslu  $\lambda_r \in \sigma(\mathbf{A})$  a matice  $\mathbf{J}_{r,k}$  *Jordanovými buňkami* příslušnými číslu  $\lambda_r$ .

Z předešlého tvrzení vyplývá, že pokud pro všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  platí, že

$$\text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r) = 1,$$

pak všechny matice  $\mathbf{J}_{r,k}$  mají rozměr  $1 \times 1$ . Tudíž JKT matice matice  $\mathbf{A}$  je diagonální a odtud plyne, že matice  $\mathbf{A}$  je diagonalizovatelná.

Výše uvedená notace pro Jordanovy buňky a segmenty bude používána ve zbytku práce. Jako příklad uvažujme matici

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Ze struktury matice je patrné, že  $\sigma(\mathbf{J}) = \{-1, 2\}$ ,  $\text{am}_{\mathbf{A}}(-1) = 5$ ,  $\text{am}_{\mathbf{A}}(2) = 3$ ,  $\text{gm}_{\mathbf{A}}(-1) = 2$ ,  $\text{gm}_{\mathbf{A}}(2) = 1$ . Tato matice se skládá ze dvou segmentů

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Segment  $\mathbf{J}_1$  se skládá z jediné buňky, označené zde  $\mathbf{J}_{1,1}$ . (Tedy platí  $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_{1,1}$ .) Druhý segment  $\mathbf{J}_2$  se skládá ze dvou buněk  $\mathbf{J}_{2,1}$  a  $\mathbf{J}_{2,2}$  tvaru

$$\mathbf{J}_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{2,2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Dalším užitečným rozkladem je QR-rozklad. Tento rozklad využijeme při numerickém výpočtu inverze matic.

**Věta 2.2.3** (QR-rozklad). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak existují unitární matice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a matice  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  splňující  $[\mathbf{R}]_{ij} = 0$ , pokud  $i > j$ , a  $[\mathbf{R}]_{ii} > 0$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  takové, že platí*

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Důkaz této věty je možné získat například pomocí Gram–Schmidtova procesu, viz [1, s. 307–311].

Posledním rozkladem, který budeme využívat při numerickém výpočtu, je singulární rozklad.

**Věta 2.2.4** (Singulární rozklad). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak existují unitární matice  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a diagonální matice  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  takové, že pro všechna  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  je  $[\mathbf{\Sigma}]_{ij} \geq 0$  a platí*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}.$$

Hodnoty  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  nazýváme singulárními čísly matice  $\mathbf{A}$ .

Pro důkaz existence viz [1, s. 412].



## Kapitola 3

### Teorie funkcí matic

Předmětem této kapitoly bude představení samotných funkcí matic, jejich smyslu a interpretace.

Ve zbytku práce budeme předpokládat, že matice  $\mathbf{A}$  je *čtvercová*, neboli že má rozměry  $n \times n$ . Pro konkrétní matici  $\mathbf{A}$  a komplexní funkci  $f$ , definovanou na vhodné množině a s vhodnými vlastnostmi, chceme definovat matici  $f(\mathbf{A})$ , opět s rozměry  $n \times n$ .

Pomocí operací maticového násobení a sčítání jsou již zřejmým způsobem definovány polynomy matic. Například pro polynom

$$p(x) = 3x^2 - 7x + 4$$

a matici  $\mathbf{A}$  je  $p(\mathbf{A})$  je matice tvaru:

$$p(\mathbf{A}) = 3\mathbf{A}^2 - 7\mathbf{A} + 4\mathbf{I}. \quad (3.1)$$

Cílem je nyní definovat  $f(\mathbf{A})$  pro funkci  $f$ , která je obecnější než pouze polynom. Zároveň ale chceme, aby v případě, že  $f = p$ , kde  $p$  je polynom, matice  $f(\mathbf{A})$  získaná pomocí této nové definice byla shodná s maticí  $p(\mathbf{A})$  získanou prostým mocněním a sčítáním jako ve (3.1).

V obecnějším smyslu bude platit následující: je-li  $q$  polynom dvou (komplexních) proměnných,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $f, g$  jsou komplexní funkce definované na vhodné množině  $E \subset \mathbb{C}$ , kde  $\sigma(\mathbf{A}) \subset E$ , a platí-li

$$q(f(\lambda), g(\lambda)) = 0$$

pro všechna  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , potom také

$$q(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A})) = 0,$$

kde 0 na pravé straně představuje nulovou matici rozměrů  $n \times n$ .

Typickým příkladem je rovnost

$$\sin(\lambda)^2 + \cos(\lambda)^2 - 1 = 0$$

platná pro všechna  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Od matic  $\sin(\mathbf{A}), \cos(\mathbf{A})$  očekáváme, že bude platit

$$\sin(\mathbf{A})^2 + \cos(\mathbf{A})^2 - \mathbf{I} = 0.$$

### 3.1 Základní definice

Odvodíme nejprve alternativní vyjádření  $p(\mathbf{A})$ , kde  $p$  je polynom, které následně poslouží jako základ pro definici obecné  $f(\mathbf{A})$ .

Uvažujme tedy obecný polynom. Nechť  $d \in \mathbb{N}$ ;  $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{C}$  a pro všechna  $\lambda \in \mathbb{C}$  platí

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^d c_i \lambda^i.$$

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Nechť  $\mathbf{J}$  je JKT matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{Q}$  je regulární matice taková, že platí  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ . Pak platí

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{A}^i = \sum_{i=0}^d c_i (\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1})^i.$$

Výraz napravo lze upravit takto:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1})^i &= \underbrace{(\mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1}) \dots (\mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1})}_{i\text{-krát}} \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1} \dots \mathbf{Q}\mathbf{J}^1\mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \underbrace{\mathbf{J}^1 \dots \mathbf{J}^1}_{i\text{-krát}} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{J}^i\mathbf{Q}^{-1}. \end{aligned}$$

Využitím této úpravy dostáváme

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^d c_i (\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1})^i = \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{Q}\mathbf{J}^i\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{J}^i \mathbf{Q}^{-1}.$$

Vzhledem ke tvaru  $\mathbf{J}$  pro všechna  $i \in \{0, \dots, d\}$  platí

$$\mathbf{J}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_m^i \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{J}_r$  jsou Jordanovy segmenty matice  $\mathbf{J}$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda_r$ . Celý polynom matice můžeme tedy přepsat do následující podoby:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{Q} p(\mathbf{J}) \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{J}^i \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{J}_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{J}_m^i \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} p(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$



Nyní vyjádříme explicitně tvar jednotlivých segmentů  $p(\mathbf{J}_r(\lambda_r))$ . Nechť  $\mathbf{J}_{r,k}$  je nějaká Jordanova buňka segmentu  $\mathbf{J}_r$ . Pak má tvar

$$\mathbf{J}_{r,k} := \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & \\ & \lambda_r & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix} = \lambda_r \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: \lambda_r \mathbf{I} + \mathbf{N}_{r,k}.$$

Odtud dostáváme

$$\mathbf{J}_{r,k}^i = (\lambda_r \mathbf{I} + \mathbf{N}_{r,k})^i = \sum_{\mu=0}^i \binom{i}{\mu} \lambda_r^{i-\mu} \mathbf{N}_{r,k}^\mu,$$

a tudíž

$$\begin{aligned} p(\mathbf{J}_{r,k}) &= \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{J}_{r,k}^i = \sum_{i=0}^d c_i \sum_{\mu=0}^i \binom{i}{\mu} \lambda_r^{i-\mu} \mathbf{N}_{r,k}^\mu \\ &= \sum_{\mu=0}^d \mathbf{N}_{r,k}^\mu \sum_{i=\mu}^d c_i \binom{i}{\mu} \lambda_r^{i-\mu}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Za účelem úpravy posledního výrazu vyjádříme derivace polynomu  $p$  (podle proměnné  $\lambda$ ). Dostáváme:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \sum_{i=0}^d c_i \lambda^i \\ p'(\lambda) &= \sum_{i=1}^d c_i i \lambda^{i-1} \\ &\vdots \\ p^{(\mu)}(\lambda) &= \sum_{i=\mu}^d c_i i(i-1) \dots (i-\mu+1) \lambda^{i-\mu} = \sum_{i=\mu}^d c_i \mu! \binom{i}{\mu} \lambda^{i-\mu}, \quad \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Toto použijeme pro přepsání výrazu (3.3) do následující podoby:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{J}_{r,k}) &= \sum_{\mu=0}^d \mathbf{N}_{r,k}^\mu \sum_{i=\mu}^d c_i \binom{i}{\mu} \lambda_r^{i-\mu} = \sum_{\mu=0}^d \mathbf{N}_{r,k}^\mu \sum_{i=\mu}^d \frac{1}{\mu!} \mu! c_i \binom{i}{\mu} \lambda_r^{i-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^d \mathbf{N}_{r,k}^\mu \sum_{i=\mu}^d \frac{p^{(\mu)}(\lambda_r)}{\mu!}. \end{aligned}$$

Připomeňme si, jak vypadají mocniny matice  $\mathbf{N}_{r,k} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ , kde  $l$  je velikost buňky  $\mathbf{J}_{r,k}$ :

$$\mathbf{N}_{r,k}^\mu = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{\mu \text{ pozic}} & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že pro všechna  $\mu \in \mathbb{N}$  taková, že  $\mu \geq l$ , platí  $\mathbf{N}_{r,k}^\mu = \mathbf{0}$ .

Z toho dostáváme finální tvar matice  $p(\mathbf{J}_{r,k})$ :

$$p(\mathbf{J}_{r,k}) = \begin{pmatrix} p(\lambda_r) & p'(\lambda_r) & \cdots & \frac{p^{(k-1)}(\lambda_r)}{(k-1)!} \\ 0 & p(\lambda_r) & p'(\lambda_r) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & p'(\lambda_r) \\ & & 0 & p(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Toto tedy dává explicitní tvar matic vystupujících v rovnici (3.2). Nyní využijeme již dosažené znalosti o obecném polynomu  $p(\mathbf{A})$  pro rozšíření definice na  $f(\mathbf{A})$ , která není nutně polynomem.

**Definice 3.1.1** (funkce Jordanovy buňky a Jordanova segmentu). Nechť  $\lambda_r \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nechť  $f$  je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí  $\lambda_r$ . Je-li  $k > 1$ , nechť existují vlastní derivace  $f'(\lambda_r), f''(\lambda_r), \dots, f^{(k-1)}(\lambda_r)$ . Nechť  $\mathbf{J}_{r,k}$  je čtvercová matice tvaru

$$\mathbf{J}_{r,k} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & \\ & \lambda_r & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Pak definujeme

$$f(\mathbf{J}_{r,k}) = \begin{pmatrix} f(\lambda_r) & f'(\lambda_r) & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda_r)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_r) & f'(\lambda_r) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & f'(\lambda_r) \\ & & 0 & f(\lambda_r) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dále nechť  $\beta \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{J}_r$  je čtvercová matice tvaru

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{r,1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{r,\beta} \end{pmatrix}$$

a jednotlivé v ní obsažené matice  $\mathbf{J}_{r,\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, \beta\}$ , mají tvar (3.4). Potom definujeme

$$f(\mathbf{J}_r) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{J}_{r,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_{r,\beta}) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Nyní můžeme definovat  $f(\mathbf{A})$  pro obecnější funkce  $f$  a pro zcela obecnou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$ .

**Definice 3.1.2** (funkce matice pomocí JKT). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Necht  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$  pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Necht  $f$  je komplexní funkce, která je pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$  definovaná na okolí  $\lambda_r$  a pokud  $l_r > 1$ , existují vlastní derivace  $f'(\lambda_r), f''(\lambda_r), \dots, f^{(l_r-1)}(\lambda_r)$ . Pak řekneme, že funkce  $f$  je *definovaná na matici  $\mathbf{A}$* . Dále necht

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_m \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1},$$

kde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je regulární a  $\mathbf{J}_r$  jsou Jordanovy segmenty příslušného  $\lambda_r \in \sigma(\mathbf{A})$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Potom definujeme

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} f(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}.$$

Tvar jednotlivých segmentů  $f(\mathbf{J}_r), \dots, f(\mathbf{J}_r)$  je dán pomocí (3.6).

Lze ukázat, že  $f(\mathbf{A})$  definovaná výše uvedeným způsobem nezávisí na volbě matice  $\mathbf{Q}$ . K tomu je využita následující věta:

**Věta 3.1.3** (spektrální projekce). Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Necht platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_m \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1},$$

kde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je regulární a  $\mathbf{J}_r$  jsou Jordanovy segmenty příslušné po řadě vlastním číslům  $\lambda_r$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}^{-1}$  formálně rozdělme do bloků

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_m), \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_m \end{pmatrix},$$

kde počet sloupců v každém bloku  $\mathbf{Q}_r$  (respektive řádků ve  $\mathbf{S}_r$ ) je roven  $\text{am}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$ . Necht  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$  pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Potom matice

$$\mathbf{G}_r = \mathbf{Q}_r \mathbf{S}_r,$$

je maticí projekce na  $N((\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^{l_r})$  podle  $R((\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^{l_r})$ . Této říkáme spektrální projekce příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_r$ .

Dále platí:

$$(i) \sum_{j=1}^m \mathbf{G}_j = \mathbf{I};$$

$$(ii) \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mathbf{G}_i, & i = j. \end{cases}$$

(iii) matice  $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}) \mathbf{G}_r$  jsou nilpotentní s indexem  $l_r$  a platí

$$(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}) \mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})$$

Důkaz této věty není podstatný pro tuto práci. Čtenář ho však může najít v [1, s. 517].

Další věta stanovuje jiné vyjádření  $f(\mathbf{A})$ , které již neobsahuje matice  $\mathbf{Q}$ .

**Věta 3.1.4** (spektrální rozklad  $f(\mathbf{A})$ ). *Nechť  $n, m \in \mathbb{N}$ . Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Nechť  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Nechť  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$  pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Nechť  $f$  je komplexní funkce, která je pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$  definovaná na okolí  $\lambda_r$  a pro  $l_r > 1$ , existují všechny vlastní derivace  $f'(\lambda_r), \dots, f^{(l_r-1)}(\lambda_r)$ . Pak  $f(\mathbf{A})$  zavedená pomocí definice 3.1.2 splňuje*

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} \frac{f^{(i)}(\lambda_r)}{i!} (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^i \mathbf{G}_r, \quad (3.7)$$

kde  $\mathbf{G}_r$  je matice spektrální projekce příslušné vlastnímu číslu  $\lambda_r$ .

Pro důkaz, že věta 3.1.4 není v rozporu s větou 3.1.2, viz [1, s. 601].

V případě, že všechna vlastní čísla  $\lambda_r$  mají index  $l_r$  roven jedné, a tedy  $\mathbf{A}$  je diagonalizovatelná, dostáváme ve (3.7) zjednodušený tvar:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m f(\lambda_r) \mathbf{G}_r. \quad (3.8)$$

V daném kontextu nazýváme tento tvar *Lagrangeovým polynomem* matice  $\mathbf{A}$ . Více se jím budeme zabývat v podkapitole 4.3.

Uvažujme nyní značení z věty 3.1.4. Volme polynom  $p$  tak, aby se hodnoty jeho a případně všech jeho potřebných derivací v každém bodě  $\lambda_r$  shodovaly s odpovídajícími hodnotami funkce  $f$ , resp. jejích derivací. Nechť  $\mathbf{J}_r$  je libovolný Jordanův segment. Pak:

$$f(\mathbf{J}_r) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{J}_{r,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_{r,\beta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\mathbf{J}_{r,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\mathbf{J}_{r,\beta}) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Rovnost daných výrazů vyplývá ze zvoleného polynomu a definice funkce Jordanova segmentu, viz (3.6). Této vlastnosti využijeme následovně:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} f(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} p(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = p(\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

V další části odvodíme, že matice spektrálních projekcí nezávisí na volbě matice  $\mathbf{Q}$  v Jordanově rozkladu, a ukážeme, jak je možné je explicitně určit. V následujícím stále uvažujeme značení z věty 3.1.4.

Pro  $i \in \{0, \dots, l_r - 1\}$  označme:

$$\mathbf{Z}_{r,i} = \frac{1}{i!} (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^i \mathbf{G}_r. \quad (3.11)$$

Potom (3.7) má tvar:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} f^{(i)}(\lambda_r) \mathbf{Z}_{r,i}. \quad (3.12)$$

Nyní vytvoříme algoritmus pro určení matic  $\mathbf{Z}_{r,i}$ . Připomeňme nyní tato fakta (viz větu 3.1.3):

- (i) matice  $\mathbf{G}_r$  je maticí projekce, tudíž pro všechna  $i \in \mathbb{N}$  platí  $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r^i$ ,
- (ii) matice  $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}) \mathbf{G}_r$  jsou nilpotentní matice s indexem  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$ .

S využitím těchto fakt můžeme učinit následující pozorování. Pro všechna  $i \in \mathbb{N}$  platí

$$(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^i \mathbf{G}_r \stackrel{(i)}{=} (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^i \mathbf{G}_r^i =: \mathbf{P}_r^i. \quad (3.13)$$

Zde  $\mathbf{P}_r$  je nilpotentní matice řádu  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$ , neboli pro všechna  $i \geq l_r$  platí  $\mathbf{Z}_{r,i} = 0$ .

Všimněme si ještě těchto vlastností:

- (iii) Matice  $\mathbf{Z}_{r,i}$  nezávisí na volbě funkce  $f$ .
- (iv) Celkový počet nenulových matic  $\mathbf{Z}_{r,i}$  je  $\sum_{r=1}^m l_r$ .

Nyní je potřeba vytvořit systém rovnic, který určí matice  $\mathbf{Z}_{r,i}$ .

Označme  $L = (\sum_{r=1}^m l_r) - 1$ . Pro všechna  $j \in \{0, \dots, L\}$  volme postupně  $f_j(z) = 1, z, z^2, \dots, z^L$ . Tyto funkce splňují

$$f_j^{(i)}(\lambda_r) = 0$$

pro  $i \geq j$  a  $\forall r \in \{1, \dots, m\}$ . Tohoto využijeme následovně:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^j &= \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} f^{(i)}(\lambda_r) \mathbf{Z}_{r,i} = \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} \frac{\partial^i \lambda_r^j}{\partial \lambda_r^i} \mathbf{Z}_{r,i} \\ &= \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^L \frac{\partial^i \lambda_r^j}{\partial \lambda_r^i} \mathbf{Z}_{r,i} = \sum_{i=0}^L \sum_{\substack{r=1 \\ l_r > i}}^m \frac{\partial^i \lambda_r^j}{\partial \lambda_r^i} \mathbf{Z}_{r,i}. \end{aligned}$$

Postupně tak dostáváme následující systém:

$$\begin{aligned} f_0(z) = 1 &\quad \Rightarrow \quad f_0(\mathbf{A}) = \mathbf{I} = \sum_{r=1}^m \mathbf{Z}_{r0} \\ f_1(z) = z &\quad \Rightarrow \quad f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} = \sum_{r=1}^m \lambda_r \mathbf{Z}_{r0} + \sum_{\substack{r=1 \\ l_r > 1}}^m \mathbf{Z}_{r1} \\ f_2(z) = z^2 &\quad \Rightarrow \quad f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 = \sum_{r=1}^m \lambda_r^2 \mathbf{Z}_{r0} + \sum_{\substack{r=1 \\ l_r > 1}}^m 2\lambda_r \mathbf{Z}_{r1} + \sum_{\substack{r=1 \\ l_r > 2}}^m 2\mathbf{Z}_{r2} \\ &\quad \vdots \\ f_L(z) = z^L &\quad \Rightarrow \quad f_L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^L = \sum_{i=0}^L \sum_{\substack{r=1 \\ l_r > i}}^m \frac{\partial^i \lambda_r^L}{\partial \lambda_r^i} \mathbf{Z}_{ri} \end{aligned}$$

Tento systém lze zapsat maticově:

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{m0} \\ \mathbf{Z}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^L \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

Matice  $\mathbf{\Lambda}$  zde má tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 & \cdots 0 \cdots & \cdots 0 \cdots & \cdots 0 \cdots \\ \lambda_1 \cdots \lambda_m & \cdots 1 \cdots & \cdots 0 \cdots & \cdots 0 \cdots \\ \lambda_1^2 \cdots \lambda_m^2 & \cdots 2\lambda_r \cdots & \cdots 2 \cdots & \cdots 0 \cdots \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^L \cdots \lambda_m^L & \cdots L\lambda_r^{L-1} \cdots & \cdots L(L-1)\lambda_r^{L-2} \cdots & \cdots L! \cdots \end{pmatrix}.$$

Strukturu této matice popíšeme přesněji. Rozdělíme matici na sloupcové vektory  $\mathbf{\Lambda}_{l,r} \in \mathbb{C}^{(L+1)}$ , kde  $r \in \{1, \dots, m\}$ ,  $l \in \{1, \dots, l_r\}$  a  $l_r$  je index vlastního čísla  $\lambda_r$ .

Každému vlastnímu číslu  $\lambda_r$  vytvoříme skupinu vektorů  $\mathbf{\Lambda}_{l,r}$ , takových, že  $l \in \{1, \dots, l_r\}$ . První vektor  $\mathbf{\Lambda}_{1,r}$  má následující tvar:

$$\mathbf{\Lambda}_{1,r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_r \\ \lambda_r^2 \\ \vdots \\ \lambda_r^L \end{pmatrix}.$$

Zbylé vektory  $\mathbf{\Lambda}_{2,r}, \dots, \mathbf{\Lambda}_{l_r,r}$  vytvoříme takto:

$$\mathbf{\Lambda}_{l+1,r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda_r} (\mathbf{\Lambda}_{l,r})_1 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_r} (\mathbf{\Lambda}_{l,r})_2 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_r} (\mathbf{\Lambda}_{l,r})_3 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_r} (\mathbf{\Lambda}_{l,r})_{L+1} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \mathbf{\Lambda}_{l,r}.$$

Jako příklad uvažujme matici  $\mathbf{A}$  s vlastním číslem  $\lambda_r = 4$  a  $\text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r) = 3$ . Pak skupina vektorů pro dané vlastní číslo je:

$$\mathbf{\Lambda}_{1,r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4^2 \\ \vdots \\ 4^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_{2,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot 4 \\ \vdots \\ L \cdot 4^{L-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_{3,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \vdots \\ L \cdot (L-1) \cdot 4^{L-2} \end{pmatrix}.$$

Dalším krokem je vytvoření matic  $\mathbf{\Lambda}_l$  následovně:

$$\mathbf{\Lambda}_l = \left( \mathbf{\Lambda}_{l,\alpha_1} \cdots \mathbf{\Lambda}_{l,\alpha_p} \right).$$

Zde  $\alpha_i$  je pořadí vlastního čísla  $\lambda_r$  v množině vlastních čísel s indexem větším nebo rovným  $l$ . Motivace daného kroku je sdružit matice  $\mathbf{\Lambda}_{l,r}$ , které se shodují v hodnotě  $l$ . Počet řádků každé  $\mathbf{\Lambda}_l$  je  $l$ , ale počet sloupců v dané matici  $\mathbf{\Lambda}_l$  odpovídá počtu vlastních čísel  $\lambda_r$ , jejichž index je větší nebo roven  $l$ .

Výslednou matici  $\mathbf{\Lambda}$  získáme složením matic  $\mathbf{\Lambda}_l$  (ve smyslu blokového zápisu) takto:

$$\mathbf{\Lambda} = \left( \mathbf{\Lambda}_1 \cdots \mathbf{\Lambda}_{l_{max}} \right),$$

kde  $l_{max}$  je největší z indexů vlastních čísel  $\lambda_r$ .

Lze dokázat (viz [1, s. 607]), že matice  $\mathbf{\Lambda}$  je regulární, a systém (3.14) má tedy jednoznačné řešení (uspořádanou  $(L-1)$ -tici matic  $\mathbf{Z}_{ri}$ ).

Další interpretací funkcí matic, kterou budeme uvažovat, je pomocí mocninné řady. Necht funkci  $f$  lze na prstencovém okolí  $U(a, \varepsilon)$  rozvinout do Taylorovy řady:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - a)^i$$

a tato řada konverguje absolutně pro  $|z - a| < \varepsilon$ .

Definujme funkci matice mocninnou řadou

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^i. \quad (3.15)$$

Tato řada konverguje v (libovolně zvolené) maticové normě  $\|\cdot\|$  pro jakoukoli matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  splňující  $\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\| < \varepsilon$ . Lze ukázat, že funkce matice  $f(\mathbf{A})$  pomocí této definice není v rozporu s větou 3.1.4:

Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Necht  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$  pro každé  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Necht  $\mathbf{J}$  je JKT matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{Q}$  je regulární matice taková, že platí  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ . Necht  $\mathbf{J}_r$  je  $r$ -tý Jordanův segment matice  $\mathbf{J}$ . Pak

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} - a\mathbf{I})^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{Q}(\mathbf{J} - a\mathbf{I})\mathbf{Q}^{-1})^i = \mathbf{Q} \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{J} - a\mathbf{I})^i \right) \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{J}_1 - a\mathbf{I})^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{J}_m - a\mathbf{I})^i \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (\mathbf{J}_1 - \lambda_1 \mathbf{I})^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i (\mathbf{J}_m - \lambda_m \mathbf{I})^i \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} f(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} f(\mathbf{J}) \mathbf{Q}^{-1}. \end{aligned}$$



## Kapitola 4

### Implementace teorie funkcí matic

V této části popíšeme algoritmy, které prakticky využívají dosažených znalostí z minulých kapitol. Budeme uvažovat tři programy, které si postupně představíme.

Avšak nejdříve si zavedeme značení pro numericky získaný odhad libovolné hodnoty. Necht  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{C}$  je libovolný parametr. Necht  $\hat{\mathbf{x}}_r, \mathbf{e}_r \in \mathbb{C}$ . Pak značíme

$$\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{x}_r + \mathbf{e}_r,$$

kde parametr  $\mathbf{x}_r$  je skutečná hodnota, hodnota  $\hat{\mathbf{x}}_r$  je numericky získaný odhad parametru  $\mathbf{x}_r$ ,  $\mathbf{e}_r$  je chyba. Tato chyba je nejčastěji způsobená numerickou nepřesností nebo metodou výpočtu. Jako příklad skutečné hodnoty  $\mathbf{x}_r$ , necht máme čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  a funkci  $f$ . Pak nejčastěji parametr  $\mathbf{x}_r$  bude vlastní číslo  $\lambda_r$  matice  $\mathbf{A}$  nebo spektrum  $\sigma(\mathbf{A})$ . Pro tento příklad bychom danou relaci zapsali následovně:

$$\hat{\lambda}_r = \lambda_r + e_r.$$

Pro matice pak necht  $\mathbf{X}_r \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\hat{\mathbf{X}}_r, \mathbf{E}_r \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak značíme

$$\hat{\mathbf{X}}_r = \mathbf{X}_r + \mathbf{E}_r,$$

kde význam matic  $\hat{\mathbf{X}}_r, \mathbf{X}_r, \mathbf{E}_r$  vychází z předchozího odstavce. Příkladem matice  $\mathbf{X}_r$  může být  $f(\mathbf{A})$ .

Před samotnou implementací v programu MATLAB si představíme funkce, které budeme používat. Konkrétné příkazy

(i)  $\mathbf{A} = \text{zeros}(n)$

vygeneruje  $n \times n$  nulovou matici;

(ii)  $\mathbf{A} = \text{rand}(n)$

vygeneruje  $n \times n$  matici, s hodnotami v intervalu  $(0, 1)$  s rovnoměrným pravděpodobnostním rozdělením;

(iii)  $\mathbf{x} = \text{norm}(\mathbf{A})$

uloží největší absolutní hodnotu vlastního čísla  $\lambda_r$  matice  $\mathbf{A}$  do  $\mathbf{x}$ ;

$$(iv) \quad \mathbf{A} = \text{eye}(n)$$

vygeneruje  $n \times n$  jednotkovou matici;

$$(v) \quad [\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \text{qr}(\mathbf{A})$$

spočte QR-rozklad matice  $\mathbf{A}$  a uloží matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  jako matice  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$ ;

$$(vi) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}'$$

spočte transpozici matice  $\mathbf{A}$  a uloží jí jako matici  $\mathbf{B}$ ;

$$(vii) \quad \mathbf{y} = \text{round}(\mathbf{x})$$

zaokrouhlí hodnotu  $\mathbf{x}$  k nejbližšímu celému číslu;

$$(viii) \quad \mathbf{x} = \text{eig}(\mathbf{A})$$

odhadne vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  a uloží je jako vektor  $\mathbf{x}$ ;

$$(ix) \quad \mathbf{x} = \text{sort}(\mathbf{y})$$

seřadí prvky ve vektoru  $\mathbf{y}$  podle reálné části od nejmenšího po největší a uloží je jako vektor  $\mathbf{x}$ ;

$$(x) \quad \mathbf{x} = \text{diff}(\mathbf{y})$$

spočte rozdíl dvou po sobě jdoucích prvků ve vektoru  $\mathbf{y}$  a rozdíly uloží do vektoru  $\mathbf{x}$ ;

$$(xi) \quad \mathbf{x} = \text{unique}(\mathbf{y})$$

odstraní duplicitní prvky ve vektoru  $\mathbf{y}$  a zbytek uloží do vektoru  $\mathbf{x}$ ;

## 4.1 Taylorův polynom

První metoda výpočtu funkce matice  $f(\mathbf{A})$  využívá Taylorův polynom. Necht  $f$  je  $k$ -krát diferencovatelná v bodě  $a \in \mathbb{C}$ , pak Taylorův polynom funkce  $f$  řádu  $k$  o středu  $a$  vypadá následovně:

$$T_k^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Nyní bychom chtěli být schopni říci, jaké chyby se maximálně dopouštíme použitím konečného Taylorova polynomu. K tomu použijeme *Lagrangeův tvar zbytku*.

**Věta 4.1.1** (Lagrangeův tvar zbytku). *Necht  $f$  je reálná funkce,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a, x \in \mathbb{R}$ ,  $a < x$ , a  $f$  má v každém bodě intervalu  $[a, x]$  vlastní derivaci řádu  $k+1$ . Potom existuje  $\xi \in (a, x)$  takové, že*

$$f(x) - T_k^{f,a}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \quad (4.1)$$

Nyní bychom chtěli tuto větu rozšířit i pro funkce matic. Ze závěru předchozí kapitoly víme, že můžeme funkci matic vyjádřit jako mocninnou řadu, toho nyní využijeme. Necht' funkci  $f$  lze na prstencovém okolí  $U(a, \varepsilon)$  rozvinout do Taylorovy řady:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - a)^i \quad (4.2)$$

a tato řada konverguje absolutně pro  $|z - a| < \varepsilon$ .

Použijeme vyjádření funkci matice mocninnou řadou, viz rovnici (3.15)

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^i.$$

Tato řada konverguje v (libovolně zvolené) maticové normě  $\|\cdot\|$ , pokud  $\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\| < \varepsilon$ .

Definujme nyní reálnou funkci  $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  pomocí rozvoje do řady

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| x^i, \quad (4.3)$$

která konverguje pro  $|x| < \varepsilon$ , což plyne z vlastností absolutní konvergence řady (4.2).

Pro  $k \in \mathbb{N}$  definujme novou matici  $R_k^{f,a}(\mathbf{A}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jako

$$R_k^{f,a}(\mathbf{A}) = T_k^{f,a}(\mathbf{A}) - f(\mathbf{A}),$$

kde  $T_k^{f,a}(\mathbf{A})$  má následující tvar:

$$T_k^{f,a}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^i.$$

Pak

$$\begin{aligned} \|R_k^{f,a}(\mathbf{A})\| &= \|T_k^{f,a}(\mathbf{A}) - f(\mathbf{A})\| = \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^i \right\| \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^i. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Poslední člen můžeme interpretovat jako chybu aproximace funkce  $g$  v bodě  $x = \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|$  Taylorovým polynomem řádu  $k$  o středu 0.

Použitím Lagrangeova tvaru zbytku, viz větu 4.1.1, dostáváme

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^i = \frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^{k+1},$$

kde  $\xi \in (0, \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|)$ .

Taylorova řada pro funkci  $g$  má všechny koeficienty nezáporné, viz (4.3). Odtud vyplývá, že funkce  $g^{(k+1)}$  je neklesající na intervalu  $[0, \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|]$ ,

tudíž na tomto intervalu nabývá maxima v bodě  $\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|$ . S využitím tohoto poznatku dostáváme

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^i \leq \frac{g^{(k+1)}(\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|)}{(k+1)!} \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^{k+1}. \quad (4.5)$$

S využitím výrazu (4.4) můžeme poslední nerovnici upravit do následujícího tvaru:

$$\|R_k^{f,a}(\mathbf{A})\| \leq \frac{g^{(k+1)}(\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|)}{(k+1)!} \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^{k+1}. \quad (4.6)$$

Jako příklad uvažujme funkci  $f(z) = \sin(z)$  a matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Nechtě  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ . Funkce  $f$  má následující Taylorův rozvoj o středu 0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Funkce  $g$ , jejíž pomocí budeme odhadovat chybu výpočtu  $\sin(\mathbf{A})$ , má pak následující Taylorovu řadu:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right| x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Tato Taylorova řada je rozvojem funkce  $\sinh$ , která se dá přepsat do následující podoby:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Prvním krokem ke spočtení odhadu chyby  $\|R_k^{f,0}(\mathbf{A})\|$  pomocí (4.5) je spočítání derivace funkce  $g$  řádu  $k+1$ :

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) &= \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \left( \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right) = \frac{1}{2}(e^x + (-1)^{k+1}e^{-x}) \\ &\leq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x). \end{aligned}$$

Na závěr stačí spočítat normu  $\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|$  a dosadit jí do vztahu (4.5):

$$\|R_k^{\sin,a}(\mathbf{A})\| \leq \frac{\cosh(\|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|)}{(k+1)!} \|\mathbf{A} - a\mathbf{I}\|^{k+1}.$$

## 4.2 Výpočet vlastních čísel

Před implementací Lagrangeova polynomu a spektrálního rozkladu se zaměříme na numerický výpočet vlastních čísel. Vlastní čísla se získávají jako kořeny charakteristického polynomu dané matice (viz definici 2.1.32). Pro matice vyšších rozměrů než  $4 \times 4$  nemůžeme kořeny získat pomocí analytického předpisu. Z tohoto důvodu software MATLAB má zabudované dva algoritmy, kterými numericky odhaduje vlastní čísla. První algoritmus využívá

Choleského rozkladu (viz [2, s. 35]), ten ovšem existuje pouze pro pozitivně definitní hermitovské matice. Pro zbylé matice se používá tzv. algoritmus QZ (viz [3, s. 376]). V této práci se danými algoritmy detailně nezabýváme, avšak čtenář může získat více informací v citované literatuře.

Přesnost tohoto numerického stanovení vlastních čísel ovlivňuje přesnost výpočtu  $f(\mathbf{A})$  pomocí Lagrangeova polynomu i spektrálního rozkladu. Přesnost výpočtu pomocí Taylorova polynomu na přesnosti odhadu vlastních čísel nezávisí.

U odhadu vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  se vyskytují zejména dva druhy chyby:

- (i) Vlastní číslo se spočetlo nepřesně.
- (ii) Vlastní číslo s vysokým indexem se rozdělí na více různých s menším indexem.

První chybu opravit zpětně nejspíše nelze a pokoušet se o to nebudeme. Vliv druhé můžeme zmenšit zvolením  $\varepsilon > 0$  takového, že pokud  $\|\hat{\lambda}_r - \hat{\lambda}_l\| \leq \varepsilon$ , prohlásíme tyto dva odhady za shodné a tím zbavíme nadbytečného členu v sumě pro výpočet  $f(\mathbf{A})$ .

Tohoto přímo v programu docílíme pomocí následujícího kódu:

```
eigen(1:n,1)=sort(eigen);
eigenexit = eigen ;
uspor=diff(sort(eigen(1:n,1)));
minrozdil=min(abs(uspor));

eps=0.01;
k=0;

if minrozdil<eps

    for i=1:n-1
        if i<k
            continue
        end
        if abs(uspor(i))<eps
            for j=(i+1):(n-1)
                if abs(uspor(j))<eps
                    k=j;
                end
            end
            eigenexit(i:k)=mean(eigen(i:k,1));
        end
    end
end
eigenexit = unique(eigenexit);
```

Toto slučování provádíme při výpočtu pomocí spektrálního rozkladu i Lagrangeova polynomu.

Po získání odhadu vlastních čísel musíme určit jejich index. Ten můžeme stanovit takto:

- (i) index postavíme roven výskytu vlastního čísla v původní množině,
- (ii) odhadneme jej pomocí *numerické hodnoti*,
- (iii) všechny indexy položíme rovné 1.

Pro připomenutí: index vlastních čísel ovlivňuje skutečně pouze výpočet pomocí spektrálního rozkladu, viz sekci 4.4. Konkrétně zvětšuje rozměr matice  $\mathbf{A}$  z rovnice (3.14) a z toho vychází, že bude více nenulových matic  $\mathbf{Z}_{r,i}$ . V kapitole 4.5 budeme porovnávat výpočet  $f(\mathbf{A})$  pomocí spektrálních rozkladů, který každý bude využívat jiného algoritmu určení indexů.

Pojmem numerické hodnoti rozumíme počet singulárních čísel v singulárním rozkladu matice  $\mathbf{A}$  větších než  $\|\mathbf{A}\| \cdot 10^{-16}$ . Konstanta  $10^{-16}$  pochází ze *strojové přesnosti* softwaru MATLAB, jíž rozumíme minimální možný relativní rozdíl dvou čísel reprezentovaných v daném datovém typu. Pak za index vlastního čísla  $\lambda_r$  prohlásíme nejmenší  $i$  takové, že numerická hodnota matice  $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^i$  je shodná s numerickou hodnotou matice  $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})^{i+1}$ .

### 4.3 Lagrangeův polynom

V této sekci se omezíme na matice  $\mathbf{A}$ , jejichž všechna vlastní čísla  $\lambda_r$  mají index roven jedné. Právě takové matice jsou diagonalizovatelné, viz poznámku pod definicí 2.2.2.

K výpočtu funkce matice nyní využijeme Lagrangeův interpolační polynom. Opět začneme se skalárními funkcemi a pak tyto poznatky rozšíříme pro funkce matic.

**Věta 4.3.1** (Lagrangeův polynom). *Nechť  $m \in \mathbb{N}$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ . Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  jsou navzájem různá komplexní čísla. Potom existuje právě jeden polynom  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  takový, že stupeň polynomu  $L$  je menší nebo roven  $m - 1$  a pro každé  $j \in \{1, \dots, m\}$  platí*

$$L(\lambda_j) = \alpha_j.$$

*Tento polynom se nazývá Lagrangeovým interpolačním polynomem pro systém bodů  $\{(\lambda_i, \alpha_i)\}_{i=1}^m$ . Pro každé  $z \in \mathbb{C}$  navíc platí*

$$L(z) = \sum_{r=1}^m \alpha_r \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (z - \lambda_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)}. \quad (4.7)$$

*Důkaz.* (i) Existence: Ověříme, že (4.7) splňuje požadavky. Dosazením  $\lambda_r$  za  $z$  ze sumy zbude pouze jeden nenulový člen.

$$L(\lambda_j) = \sum_{r=1}^m \alpha_r \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)} = \alpha_j \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq j \\ i \neq j}} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq j \\ i \neq j}} (\lambda_j - \lambda_i)} = \alpha_j.$$

(ii) Jednoznačnost: Necht  $L, K$  splňují požadavky. Potom  $p := L - K$  je polynom stupně menšího nebo rovného  $k - 1$  a má  $k$  různých kořenů. Tudíž  $p = 0$ . □

Když umíme vytvořit polynom pro jednodimenzionální proměnné, rozšíříme definici (4.7) pro funkce matic. Následující věta definuje matici  $f(\mathbf{A})$  jako polynom matice  $\mathbf{A}$ . Onen polynom je Lagrangeův polynom.

**Věta 4.3.2** (funkce matice jako Lagrangeův polynom). *Necht  $n, m \in \mathbb{N}$ . Necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Necht  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Necht  $\mathbf{A}$  je diagonalizovatelná matice a  $f : \sigma(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Necht  $L$  je Lagrangeův polynom pro systém bodů  $\{(\lambda_i, f(\lambda_i))\}_{i=1}^k$ . Potom platí*

$$f(\mathbf{A}) = L(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m f(\lambda_r) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)} = \sum_{r=1}^m f(\lambda_r) \mathbf{G}_r. \quad (4.8)$$

*Tento výsledek vyplývá z věty 3.1.4 o spektrálním rozkladu. Matice  $\mathbf{G}_r$  jsou matice spektrálních projekcí (viz větu 3.1.3).*

Nyní bychom chtěli z této rovnosti dostat algebraický předpis pro matice  $\mathbf{G}_r$ . Pro  $r \in \{1, \dots, m\}$ , kde  $m$  je počet různých vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ , volme funkce  $f_r$  následovně:

$$f_r(z) = \begin{cases} 1, & z = \lambda_r; \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$$

Dosazením těchto funkcí  $f_r$  do rovnice (4.8) dostáváme:

$$L(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m f_r(\lambda_r) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)} = f_r(\lambda_r) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)} = f_r(\lambda_r) \mathbf{G}_r.$$

Výsledkem tohoto pozorování je nástroj k spočtení matic  $\mathbf{G}_r$ .

$$\mathbf{G}_r = \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)}. \quad (4.9)$$

Nyní již máme všechny potřebné prostředky k vytvoření programu, který počítá  $f(\mathbf{A})$  pro diagonalizovatelnou matici  $\mathbf{A}$  pomocí Lagrangeova polynomu. Výhodou této metody je nízký počet potřebných operací k určení  $f(\mathbf{A})$ .

## 4.4 Spektrální rozklad

Třetí metoda výpočtu  $f(\mathbf{A})$  využívá spektrální rozklad. Spektrální rozklad jsme si již definovali, viz větu 3.1.4.

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Nechť funkce  $f$  má v bodech  $\lambda_r$  všechny derivace až po řád  $l_r - 1$ , kde  $\lambda_r \in \sigma(\mathbf{A})$  a  $l_r = \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)$ . Pak spektrální rozklad funkce  $f(\mathbf{A})$  má následující tvar:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} f^{(i)}(\lambda_r) \mathbf{Z}_{r,i}.$$

Matice  $\mathbf{Z}_{r,i}$  dostaneme vyřešením systému

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{m0} \\ \mathbf{Z}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^L \end{pmatrix},$$

který pro jednoduchost označme jako

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{Z} = \mathbf{P}. \quad (4.10)$$

Teoretickým řešením takové soustavy by bylo obě strany vynásobit maticí  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$  zleva. Ovšem takový postup zanáší do výsledku numerickou chybu úměrnou číslu podmíněnosti matice  $\mathbf{\Lambda}$ . Proto daný systém program řeší pomocí QR-rozkladu matice  $\mathbf{\Lambda}$ , viz definici 2.2.3.

Tento rozklad využijeme takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Z} &= \mathbf{P} \\ (\mathbf{QR})\mathbf{Z} &= \mathbf{P} \\ \mathbf{RZ} &= \mathbf{Q}^* \mathbf{P} \\ \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} \overline{q_{11}} & \cdots & \overline{q_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{q_{n1}} & \cdots & \overline{q_{nn}} \end{pmatrix} \mathbf{P} \end{aligned}$$



Pro poslední matici  $\mathbf{Z}_{r,i}$  v blokové matici  $\mathbf{Z}$  dostáváme

$$\mathbf{Z}_{r,i} = \frac{1}{r_{nn}} \begin{pmatrix} \overline{q_{n1}} & \cdots & \overline{q_{nn}} \end{pmatrix} \mathbf{P}.$$

Zbylé matice  $\mathbf{Z}_{r,i}$  spočítáme postupně zpětnou substitucí.

Po určení matic  $\mathbf{Z}_{r,i}$  nám k výpočtu  $f(\mathbf{A})$  stačí spočítat funkční hodnoty  $f^{(i)}(\lambda_r)$ , kde  $r \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \in \{0, \dots, \text{index}_{\mathbf{A}}(\lambda_r)\}$ .

Ohledně nepřesností výpočtu pomocí těchto tří metod, největší vliv pochází z nepřesnosti výpočtu vlastních čísel a jejich indexů. Vliv této nepřesnosti na výsledném výpočtu  $f(\mathbf{A})$  je obtížné explicitně algebraicky vyjádřit. Této podstaty jsem si vědom a proto předmětem další kapitoly jsou numerické experimenty, kterými se snažím odhadnout přesnost těchto numerických metod výpočtu.



## Kapitola 5

### Numerické experimenty

Cílem této kapitoly je vytvoření metodiky porovnání doposud představených numerických metod výpočtu  $f(\mathbf{A})$ . Výsledkem této kapitoly je číselný ukazatel přesnosti těchto metod.

#### 5.1 Porovnání metod výpočtu $f(\mathbf{A})$

V úvodu do funkcí matic jsme si uvedli příklady polynomiálních identit. Od funkcí matic bychom chtěli, aby i ony je splňovaly. Právě tyto identity využijeme k vytvoření třech metrik. Pod pojmem metrik v této kapitole rozumíme číselný indikátor přesnosti výpočtu  $f(\mathbf{A})$  pomocí dané metody. Jmenovitě použijeme tyto identity:

- (i) Volme  $f(x) = (1 - x)^{-1}$ , pak

$$f(\mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{I} = 0. \quad (5.1)$$

- (ii) Volme  $f(x) = \sin(x)^2$ ,  $g(x) = \cos(x)^2$ , pak

$$f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}) - \mathbf{I} = 0. \quad (5.2)$$

- (iii)  $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ , pak

$$f(\mathbf{A}) - (5\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 7\mathbf{I}) = 0. \quad (5.3)$$

Poté samotné metriky  $M_1, M_2, M_3$ , definujeme následovně:

(i)  $M_1 = \|\widehat{f(\mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{I}}\|;$

(ii)  $M_2 = \|\widehat{f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}) - \mathbf{I}}\|;$

(iii)  $M_3 = \|\widehat{f(\mathbf{A}) - (5\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 7\mathbf{I})}\|;$

Pro význam zápisu  $\widehat{f(\mathbf{A})}$  viz úvod 4. kapitoly.

V ideálním případě by se tyto metriky pro libovolnou matici rovnaly nule. Ve skutečnosti tomu tak nebude. Pak takto získaná hodnota nám slouží jako

určitý indikátor přesnosti. Zde je důležité připomenout, že strojová přesnost pro *double precision*, který zde využíváme, je  $10^{-16}$ , ideálně by se chyba pohybovala v tomto rozsahu.

Zaměříme se na tři typy matic  $\mathbf{A}$ . Konkrétně na

- (i) ryze diagonální matice,
- (ii) diagonalizovatelné matice,
- (iii) nediagonalizovatelné matice.

Zvolíme jeden typ matic  $\mathbf{A}$ , vygenerujeme sto různých matic onoho typu. Pomocí Taylorova polynomu, Lagrangeova polynomu a spektrálního rozkladu spočteme výše uvedené metriky. Toto zkoumání zopakujeme pro zbylé dva typy matic  $\mathbf{A}$ . Všechny matice  $\mathbf{A}$  jsou rozměru  $10 \times 10$ . Výsledkem budou tři bodové grafy.

Ve všech grafech jsou požívány následující popisky pro použité metody výpočtu:

TP10 = Taylorův polynom stupně 10,  
 TP30 = Taylorův polynom stupně 30,  
 LP = Lagrangeův polynom,  
 SR = spektrální rozklad.

Pro každý druh matic a metriku budeme vynášet dva grafy. První bude mít na ose  $x$  hodnoty  $\log_{10}(\min_{r \neq l} |(\lambda_r - \lambda_l)|)$ . Motivací pro volbu tohoto parametru je úvaha, že snižující se minimální vzdálenost mezi dvěma různými vlastními čísly zvyšuje číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{A}$  v rovnici (3.14) je a tím i výpočet matic  $\mathbf{G}_r$  pro Lagrangeův polynom se stává nestabilnějším.

Druhý graf bude mít na ose  $x$  čas v sekundách, neboť i ten může být faktorem při rozhodování, jaké metody se při výpočtu využije.

## 5.2 Zvolení metody určení indexů

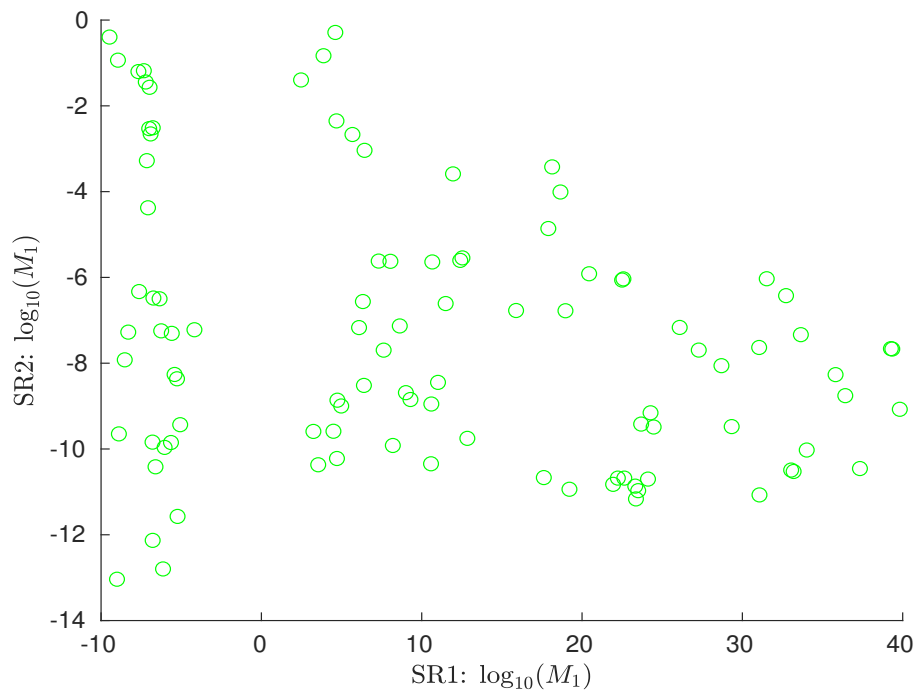
Připomeňme, že algoritmus využívající spektrální rozklad nejprve provede sloučení vzájemně blízkých numericky získaných vlastních čísel a počet takto sloučených čísel považuje za algebraickou násobnost výsledku.

Porovnáme nyní tři metody odhadu indexů vlastních čísel, které jsou uvedeny v podkapitole 4.2. Jmenovitě to jsou tyto:

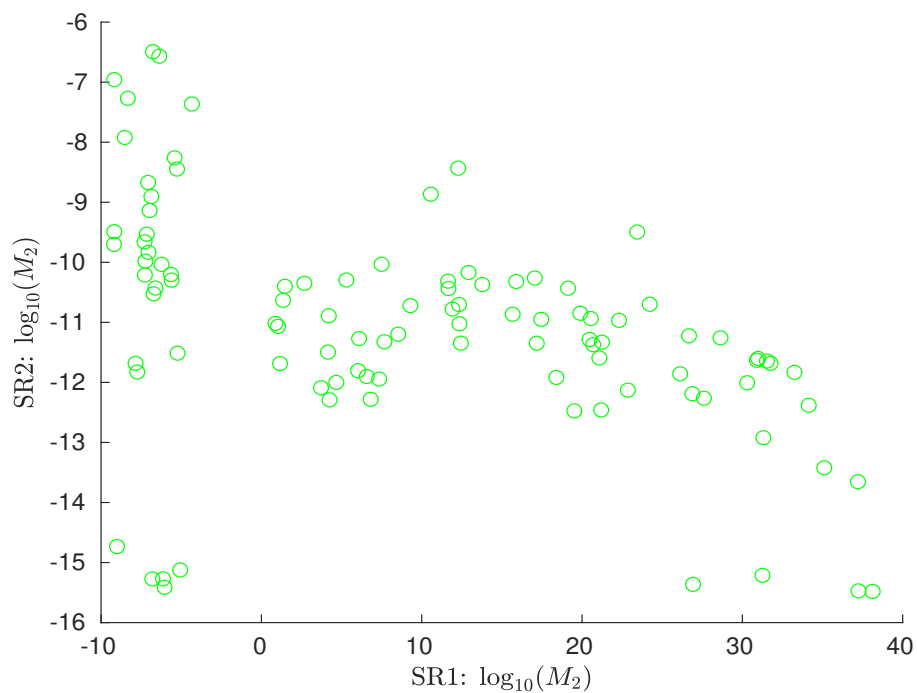
- 1) index položíme roven odhadované algebraické násobnosti vlastního čísla získaného po sloučení (viz výše),
- 2) všechny indexy položíme rovné 1,
- 3) pomocí *numerické hodnoti* odhadneme index.

Jelikož index vlastních čísel ovlivňuje výpočet  $f(\mathbf{A})$  pouze pomocí spektrálního rozkladu, srovnáme tři různé programy, které jsou založené na spektrálním rozkladu a liší se pouze v metodě určení indexů vlastních čísel. Značit je budeme SR1, SR2, SR3 podle pořadí ve výše uvedeném seznamu.

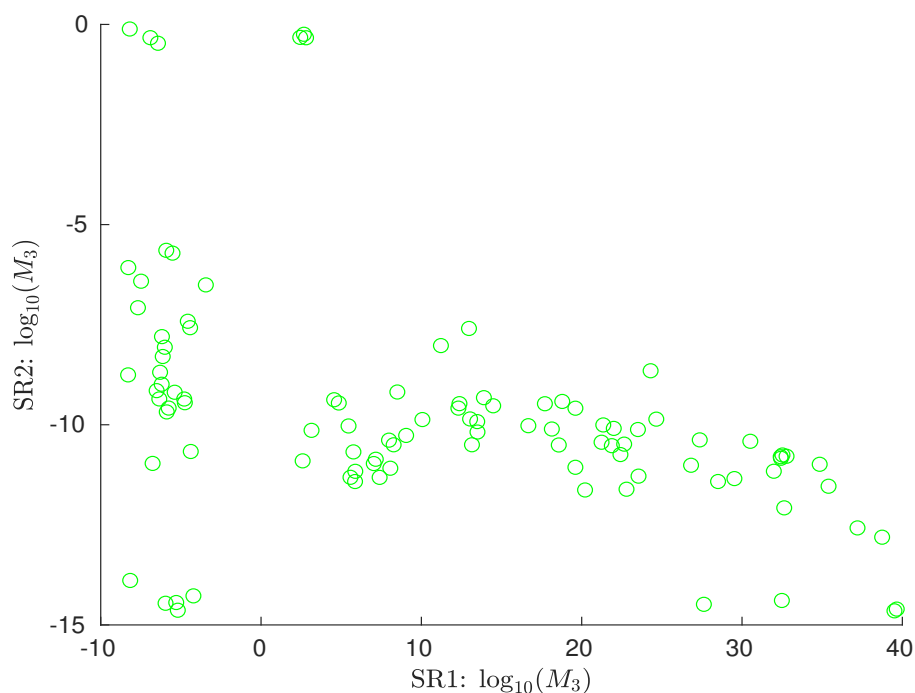
Samotné grafy porovnání budou mít na ose  $x$  hodnoty metrik získané pomocí jedné metody a na ose  $y$  hodnoty získané pomocí druhé. Budeme uvažovat doposud používané metriky  $M_1, M_2, M_3$ .



**Obrázek 5.1:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 1.



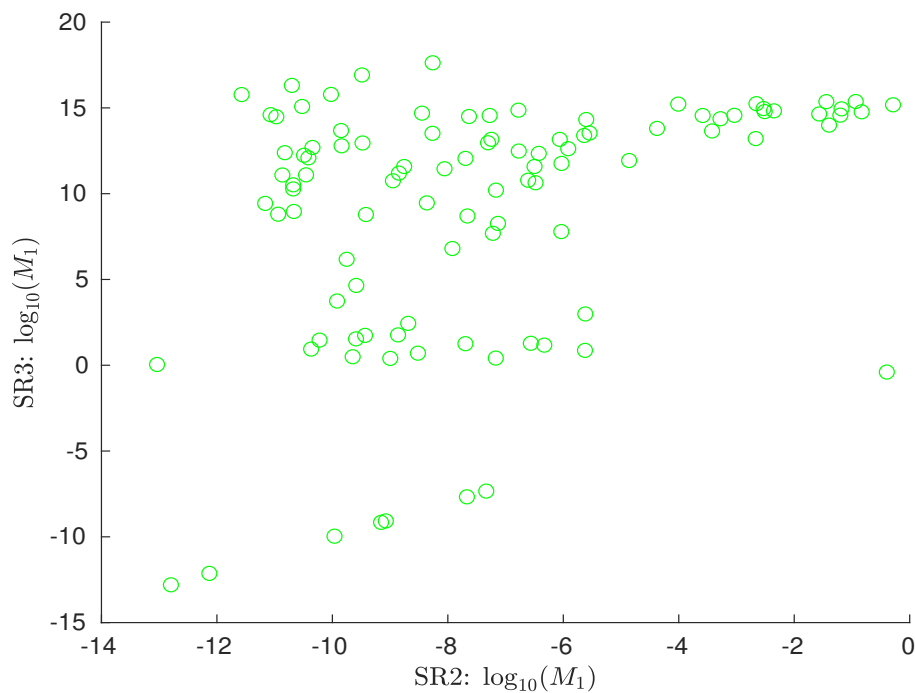
**Obrázek 5.2:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 2.



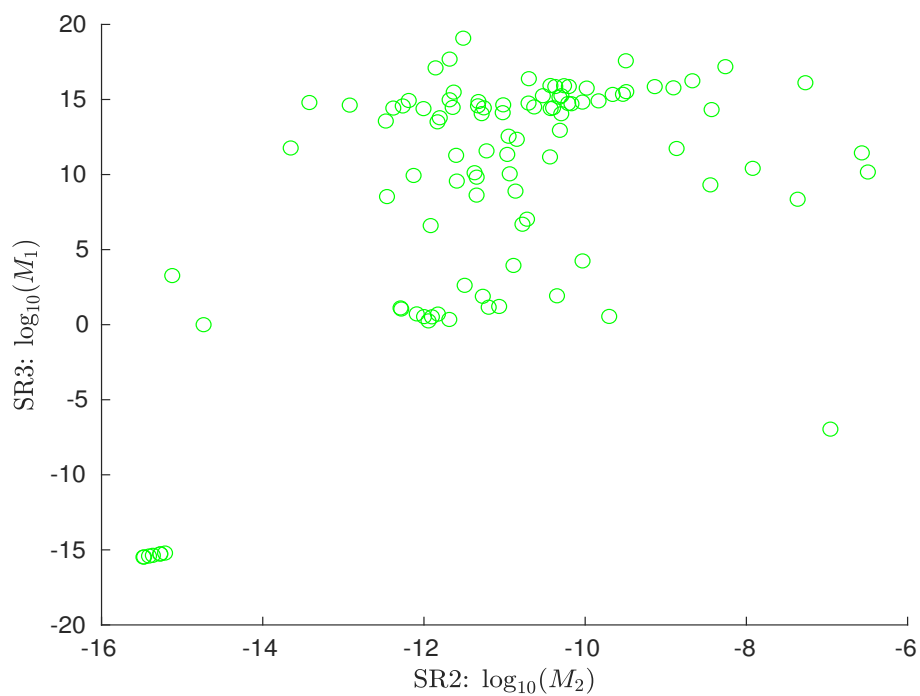
**Obrázek 5.3:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 3.

Z prvního porovnání je patrné, že zpravidla přesnější metodou výpočtu je 2. metoda určení indexů vlastních čísel, zatímco 1. metoda může dávat extrémně nepřesné výsledky.

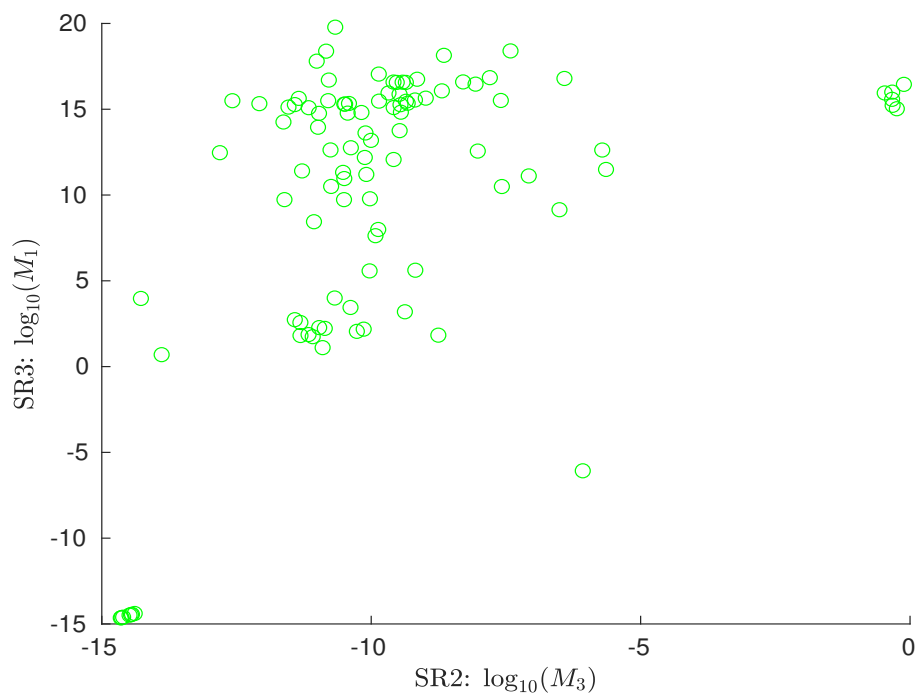
Nyní budeme porovnávat metodu 2. a 3. Dostáváme tak následující grafy:



**Obrázek 5.4:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 1.



Obrázek 5.5: Nediagonalizovatelné matice, Metrika 2.



Obrázek 5.6: Nediagonalizovatelné matice, Metrika 3.

Z výsledků je patrné, že zpravidla nejpřesnější metodou je položit všechny indexy vlastních čísel rovny 1, tedy druhá metoda. Tuto metodu určení indexů zvolíme jako výchozí metodou a budeme jí uvažovat pro všechny typy matic.

### 5.3 Ryze diagonální matice

Tento druh matic uvažujeme kvůli možnosti přesného výpočtu vlastních čísel. Tedy nepřesnost výpočtu  $f(\mathbf{A})$  je způsobena pouze zaokrouhlovací chybou ve zvolené metodě výpočtu. U těchto matic není ve skutečnosti důvod počítat  $f(\mathbf{A})$  pomocí složitějších numerických metod, neboť diagonální matice  $\mathbf{A}$  je sama sobě svým Jordanovým tvarem a výsledek lze snadno získat následovně:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_r) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r f(\lambda_i) \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{C}^n$  je tvaru  $(0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ , s jedničkou na  $i$ -té pozici.

Matice  $\mathbf{A}$  budeme generovat pomocí:

```
J=zeros(n);
for i=1:n
J(i,i)=((20).*rand(1) - 10)*10^((4)*rand(1) - 2)
+1i*((20).*rand(1) - 10)*10^((4)*rand(1) - 2);
end
```

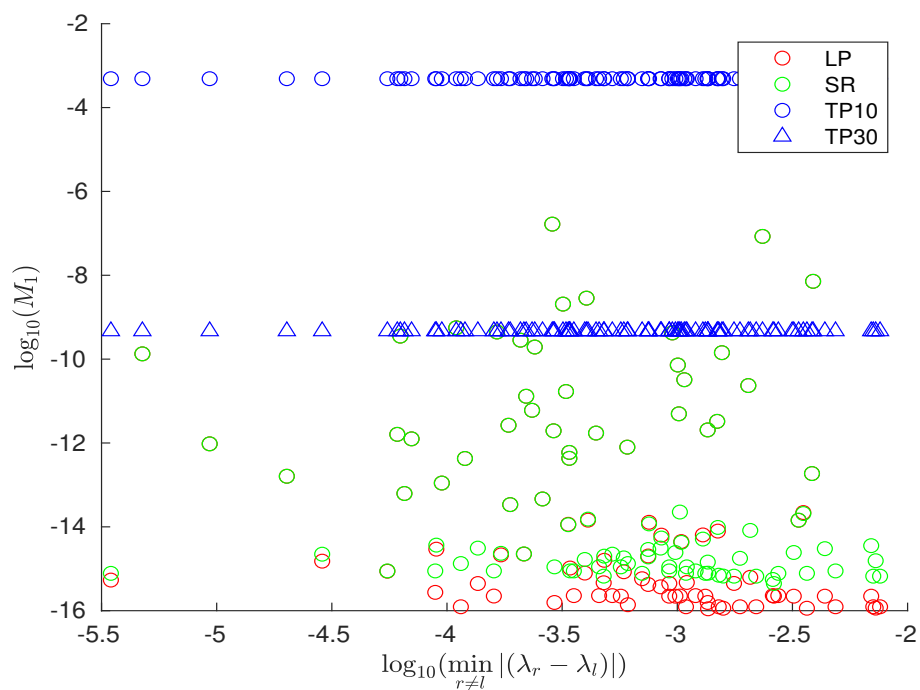
Takto generované prvky jsou komplexní a jejich reálná i imaginární část se pohybují od  $-10^{-3}$  do  $10^3$ . Takto budeme generovat prvky i ve zbylých typech matic  $\mathbf{A}$ .

Po vytvoření matice  $\mathbf{A}$  spočteme výše uvedenými metodami metriky. Pro případ první metriky v kóde hodnoty dostaneme následovně:

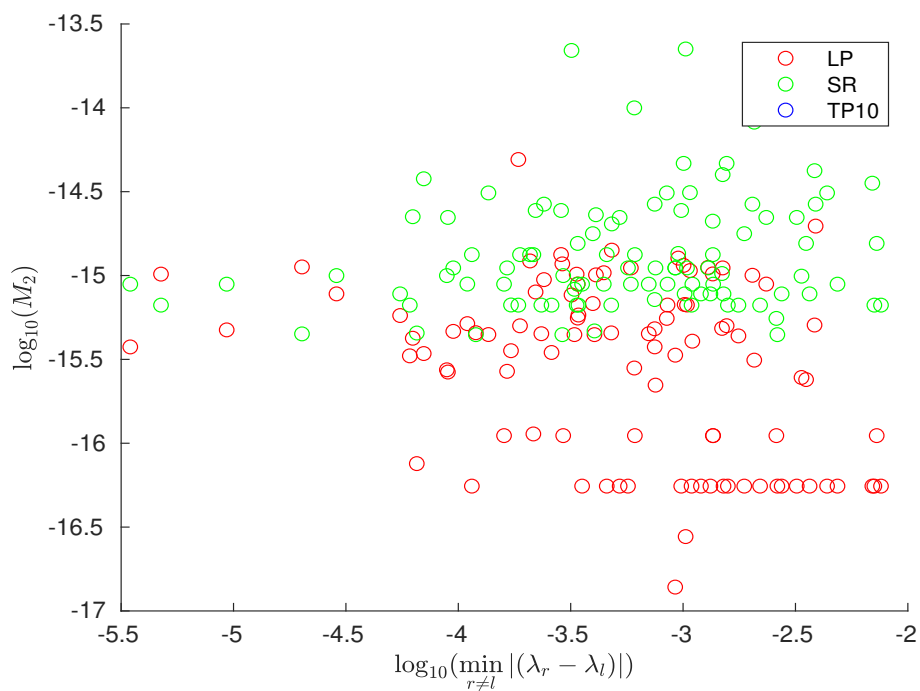
```
met_TP10_1 = norm(funTP(A, (1-x)^(-1), 0, 10) * (eye(n)
-A) - eye(n));
met_LP_1 = norm(funLP(A, (1-x)^(-1)) * (eye(n) - A) -
eye(n));
met_SR_1 = norm(funSR(A, (1-x)^(-1)) * (eye(n) - A) -
eye(n));
```



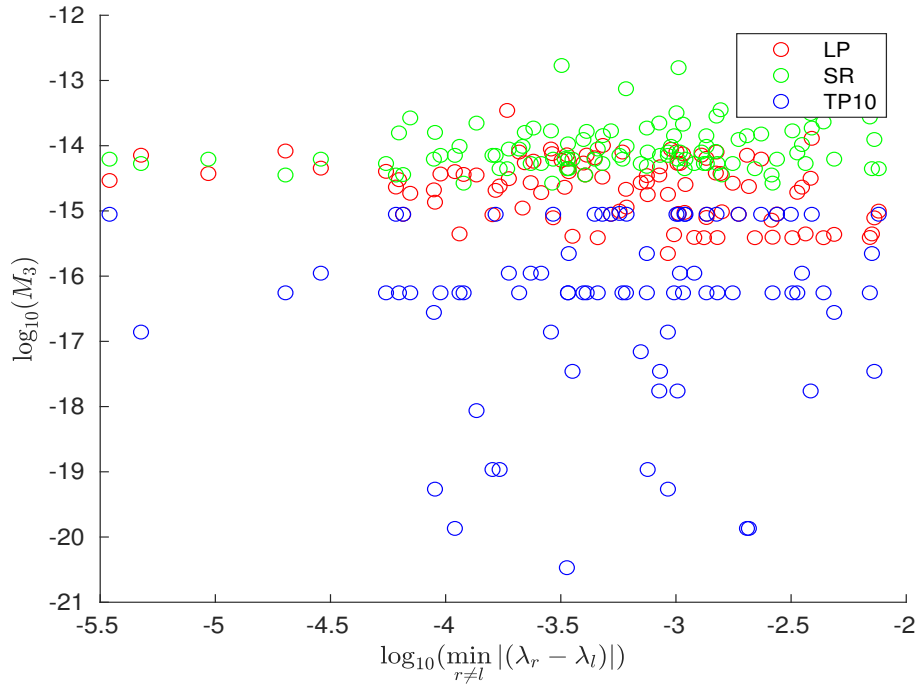
Výsledné grafy pak vypadají následovně:



**Obrázek 5.7:** Diagonální matice, Metrika 1., parametr podobnosti vlastních čísel



**Obrázek 5.8:** Diagonální matice, Metrika 2., parametr podobnosti vlastních čísel



**Obrázek 5.9:** Diagonální matice, Metrika 3., parametr podobnosti vlastních čísel

V grafech si můžeme povšimnout těchto tendencí:

- (i) Přesnost odhadu  $\widehat{f(\mathbf{A})}$  pomocí Taylorova polynomu závisí na rychlosti konvergence Taylorovy řady dané funkce.

Toto chování nás nepřekvapuje, ovšem může být zajímavé použít Taylorův polynom na funkce, jejichž Taylorova řada rychle konverguje (např. sinus), a srovnat s funkcemi, jejichž Taylorova řada konverguje pomaleji. Jelikož Taylorovu polynomu nezáleží na typu matice, tak je toto chování očekávatelné pro všechny typy matic  $\mathbf{A}$ .

- (ii) Výsledky získané pomocí Taylorova polynomu se nezobrazují při uplatnění druhé metriky.

Rychlá konvergence Taylorových řad funkcí sinu a kosinu způsobuje to, že již při použití Taylorova polynomu 10. stupně se pro program výsledné hodnoty chyby jeví jako nulové, tedy v logaritmickém měřítku nejsou zobrazeny.

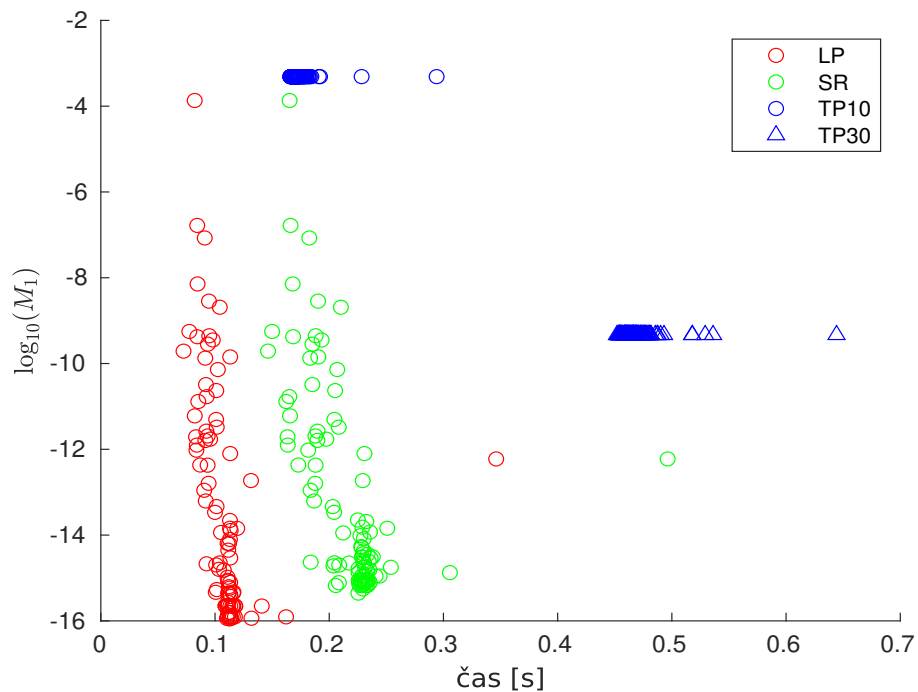
- (iii) Přesnost výpočtu pro diagonální matice se jeví jako nezávislá parametru  $\log_{10}(\min_{r \neq l} |(\lambda_r - \lambda_l)|)$ .

Snahou zkoumání bylo i nalezení korelace či antikorelace vůči vhodnému parametru, který můžeme získat z matice. To se ovšem plně nepodařilo. Testované parametry byly například číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{A}$ , nejmenší vlastní číslo, největší vlastní číslo nebo hodnota

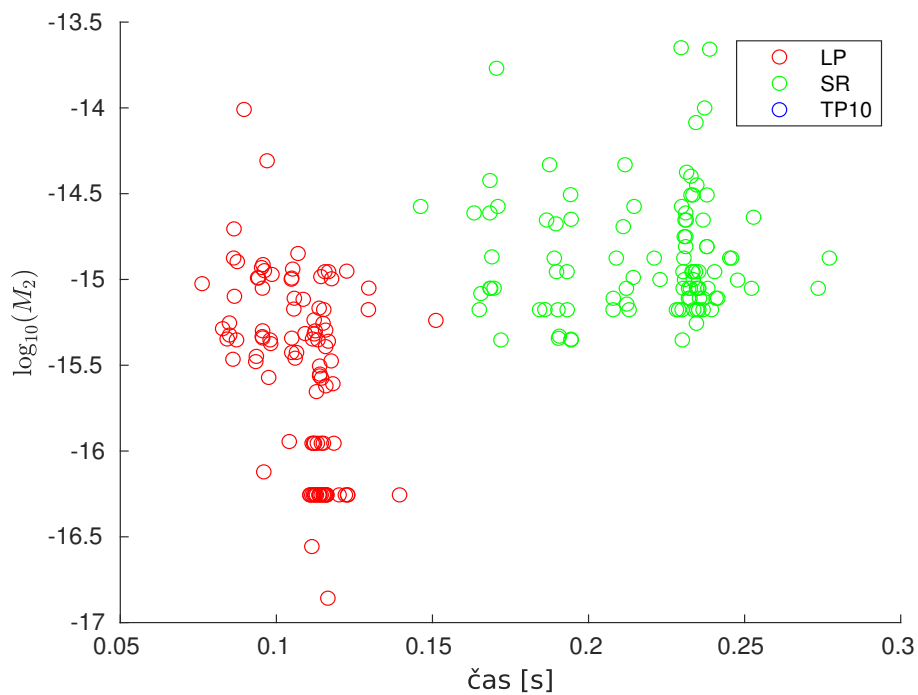
$$\|\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* - \mathbf{I}\|,$$

kde  $\mathbf{Q}$  je matice v rozkladu  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$ . Pro zbylá porovnání budeme tedy nadále používat parametr podobnosti vlastních čísel.

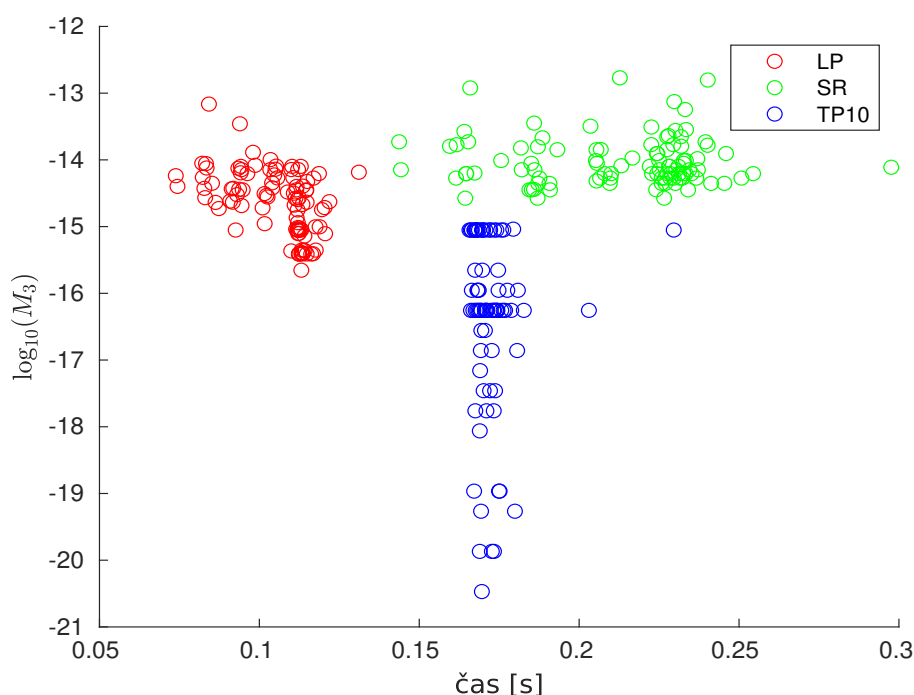
Pro parametr času dostáváme tyto grafy:



**Obrázek 5.10:** Diagonální matice, Metrika 1., parametr času



**Obrázek 5.11:** Diagonální matice, Metrika 2., parametr času



Obrázek 5.12: Diagonální matice, Metrika 3., parametr času

## 5.4 Diagonalizovatelné matice

Pro tento typ matic  $\mathbf{A}$  očekáváme, že se prokáže nepřesnost odhadů vlastních čísel  $\lambda_r$ . Stanovení  $f(\mathbf{A})$  pro takovéto matice již není možné provést tak jednoduše jako v případě diagonálních matic, má zde tedy už smysl využívat námi zkoumané numerické metody.

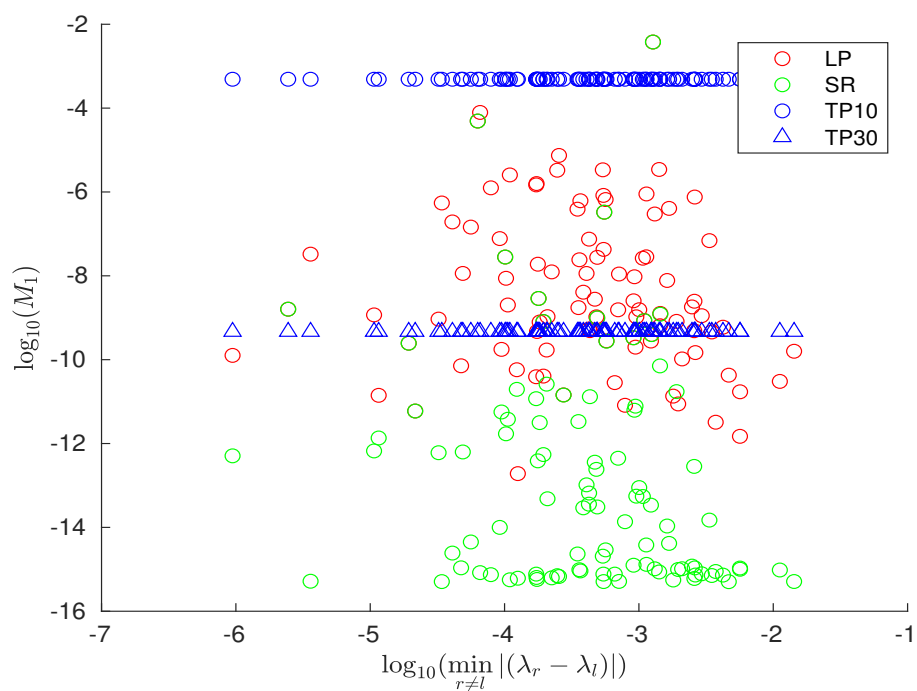
Matice  $\mathbf{A}$  budeme generovat takto:

```
J=zeros(n);
[Q,R]=qr(rand(n));
for i=1:n
J(i,i)=((20).*rand(1) - 10)*10^((4)*rand(1) - 2)
      +1i*((20).*rand(1) - 10)*10^((4)*rand(1) - 2);
end
A=Q*J*Q';
```

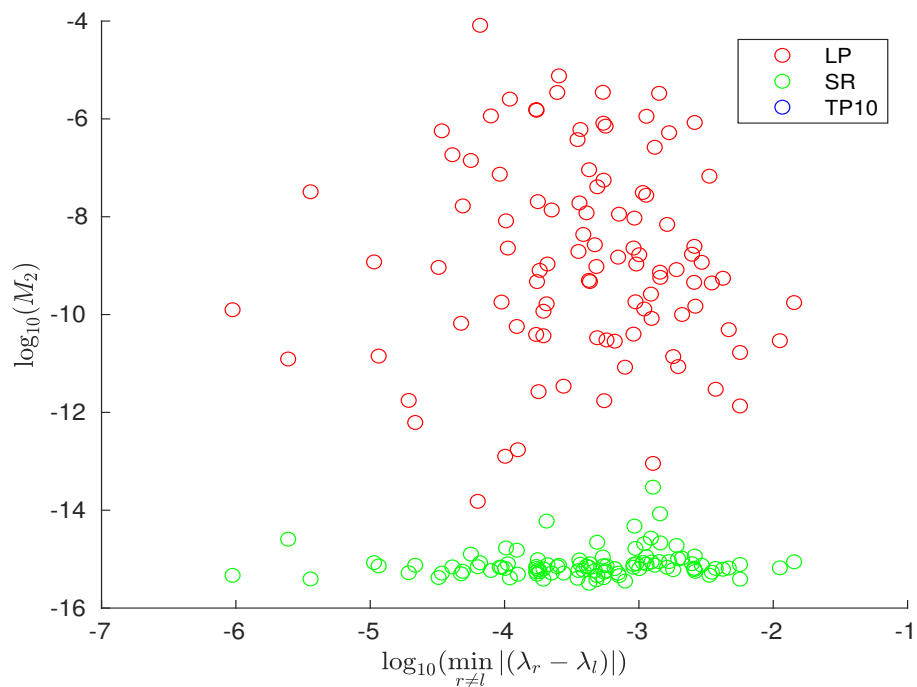
Po vytvoření matic  $\mathbf{A}$  opět spočteme všechny potřebné metriky. Pro případ druhé metriky kód vypadá následovně:

```
met_TP10_2 = norm(funTP(A,sin(x)^2,0,10)
                  +funTP(A,cos(x)^2,10)-eye(n));
met_LP_2 = norm(funLP(A,sin(x)^2)
                +funLP(A,cos(x)^2)-eye(n));
met_SR_2 = norm(funSR(A,sin(x)^2)
                +funSP(A,cos(x)^2)-eye(n));
```

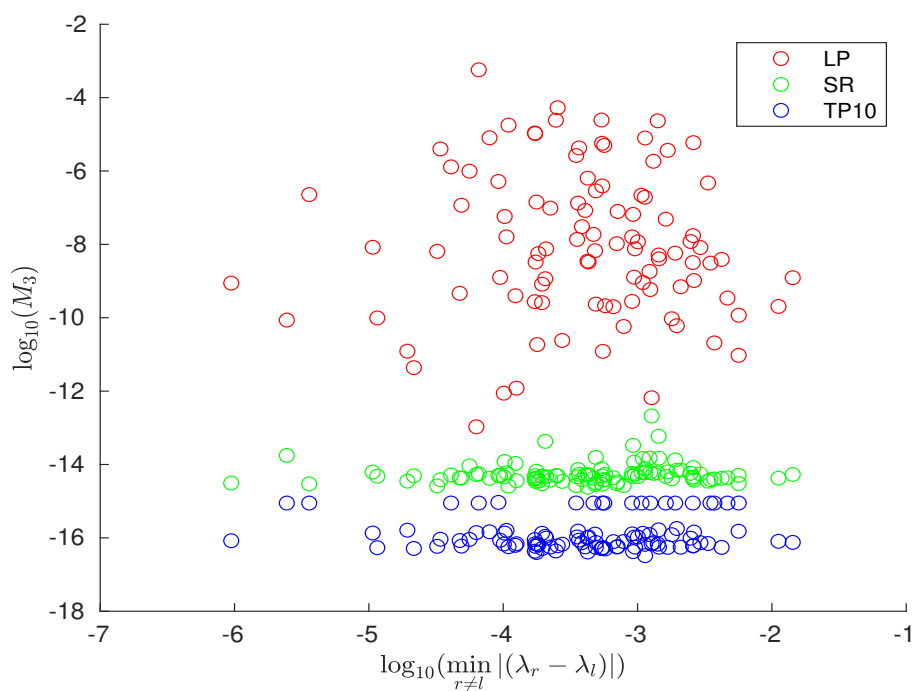
Výsledné grafy pak vypadají takto:



**Obrázek 5.13:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 1., parametr podobnosti vlastních čísel

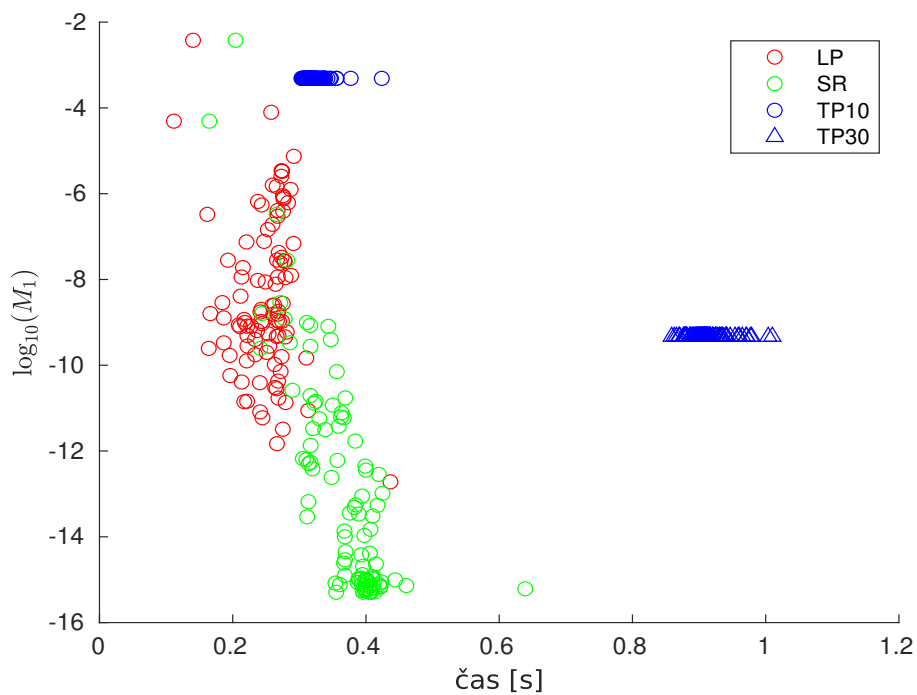


**Obrázek 5.14:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 2., parametr podobnosti vlastních čísel

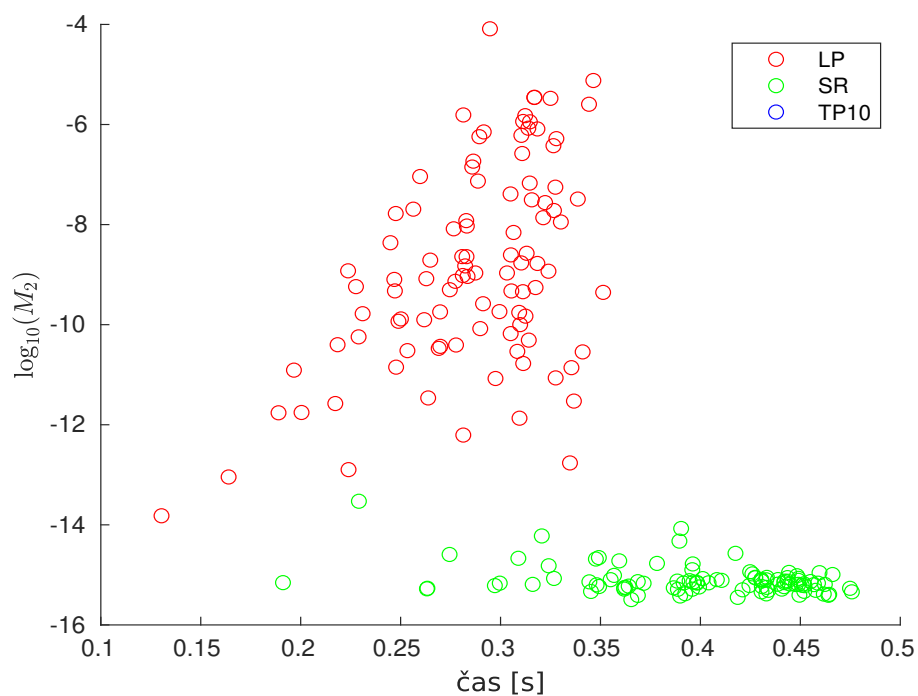


**Obrázek 5.15:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 3., parametr podobnosti vlastních čísel

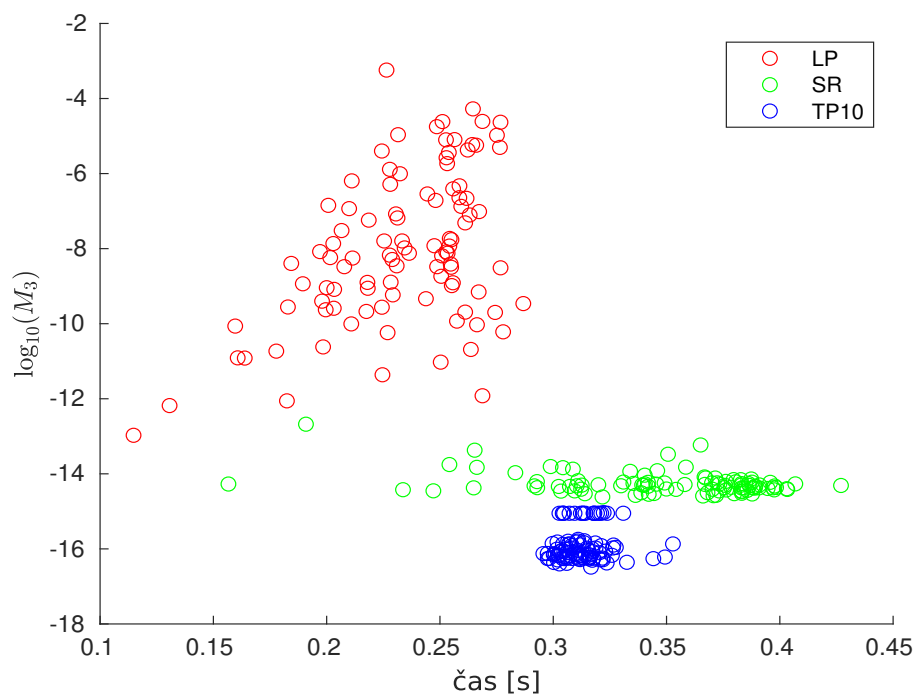
Uvedme dále grafy výsledků v závislosti na čase výpočtu:



**Obrázek 5.16:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 1., parametr času



**Obrázek 5.17:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 2., parametr času



**Obrázek 5.18:** Diagonalizovatelné matice, Metrika 3., parametr času

Hodnoty získané pomocí Taylorova polynomu se pro různé matice v zásadě neliší a závisí na rychlosti konvergence Taylorovy řady funkce použité pro výpočet dané metriky. Výsledky spočtené pomocí Lagrangeova polynomu se

oproti případu diagonálních matic řádově zlepšily, a to i pro funkce, které mají nízké derivace ve vlastních číslech. Spektrální rozklad dává konzistentně přesnější výsledky než metoda Lagrangeova polynomu.

## 5.5 Nediagonalizovatelné matice

Na počátek je důležité zmínit, že samotné generování nediagonalizovatelných matic je obtížné. To je způsobené zaokrouhlovací chybou. Pro nediagonalizovatelné  $\mathbf{A}$  očekáváme největší nepřesnost výpočtu  $f(\mathbf{A})$ . Důvody budou hlavně tyto:

- (i) I přes zvolený způsob generování matic  $\mathbf{A}$  se pro výpočetní program matice  $\mathbf{A}$  budou jevit jako diagonální.

Vytvoříme-li matici  $\mathbf{J}$  s indexem vlastního čísla  $\lambda_1$  rovným 6, při použití příkazu na výpočet vlastních čísel matice  $\mathbf{QJQ}^*$ , kde matice  $\mathbf{Q}$  budeme vytvářet jako doposud, dostaneme šest po dvojicích komplexně sdružených vlastních čísel, která se mohou lišit od původního už na druhém desetinném místě. Tedy místo generování nediagonálních matic ve skutečnosti vytvoříme matice diagonální s podobnými vlastními čísly.

- (ii) Kvůli nechtěnému generování podobných vlastních čísel se zvyšuje číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{A}$  (viz 3.14), které přímo ovlivňuje odhad  $\widehat{f(\mathbf{A})}$  pomocí spektrálního rozkladu.

Matice  $\mathbf{A}$  budeme generovat takto:

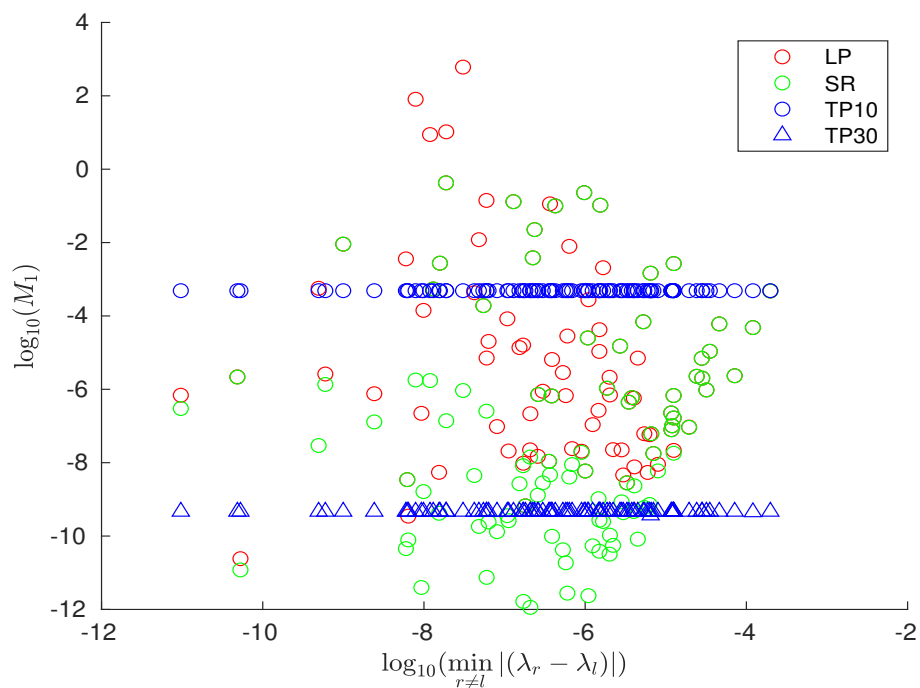
```
J=zeros(n);
[Q,R]=qr(rand(n));
index=round(rand(1)*(n-3)+2);
J(i,i)=((20).*rand(1)-10)*10^((4)*rand(1)-2)
      +1i*((20).*rand(1)-10)*10^((4)*rand(1)-2);
for i=2:k
J(i,i)=J(1,1);
J(i-1,i)=1;
end
for i=k+1:n
J(i,i)=((20).*rand(1)-10)*10^((4)*rand(1)-2)
      +1i*((20).*rand(1)-10)*10^((4)*rand(1)-2);
end
A=Q*J*Q';
```

S vytvořenými maticemi  $\mathbf{A}$  posledního typu podobně jako v předchozích sekcích spočteme si potřebné metriky. Výpočet třetí metriky v kóde probíhá následovně:

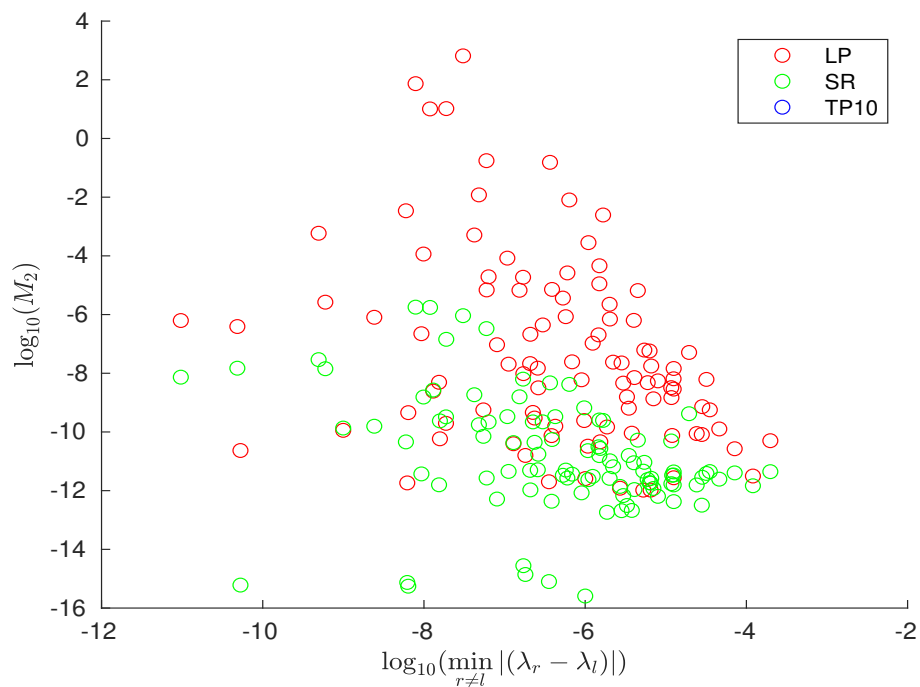
```
Pa=5*A^3-3*A^2+2*A+7*eye(n)
met_TP10_3= norm(funTP(A,5*x^3-3*x^2+2*x+7,0,10))-Pa;
met_LP_3= norm(funLP(A,5*x^3-3*x^2+2*x+7))-Pa;
met_SR_3= norm(funSR(A,5*x^3-3*x^2+2*x+7))-Pa;
```



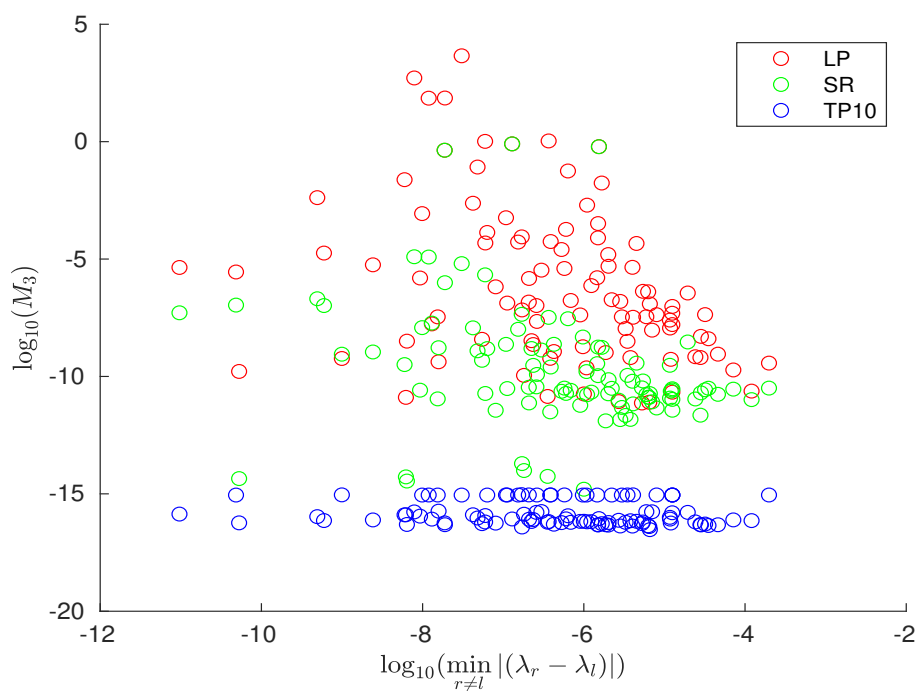
Výsledné grafy pak vypadají takto:



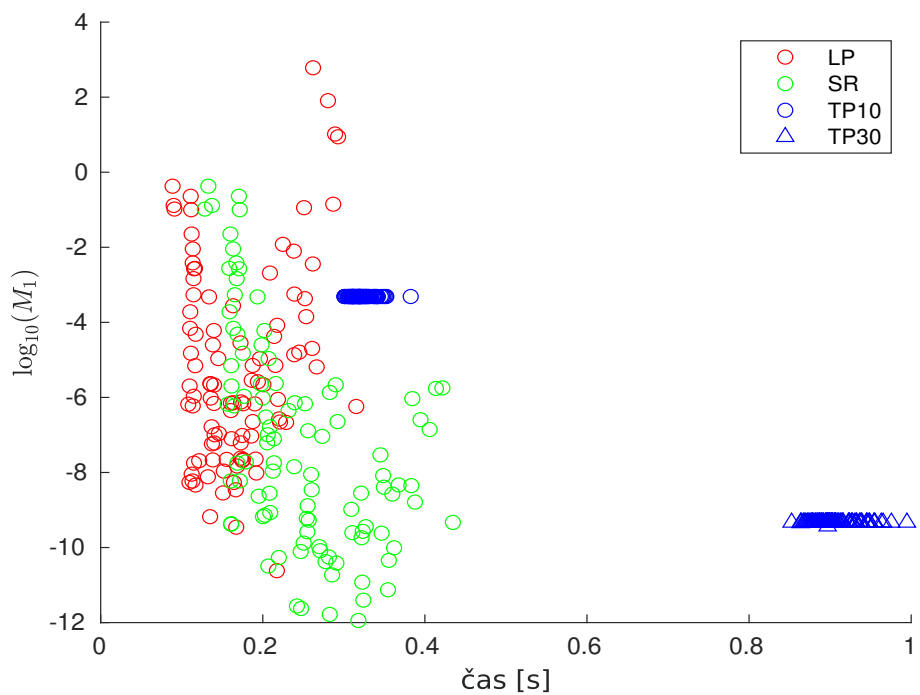
**Obrázek 5.19:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 1., parametr podobnosti vlastních čísel



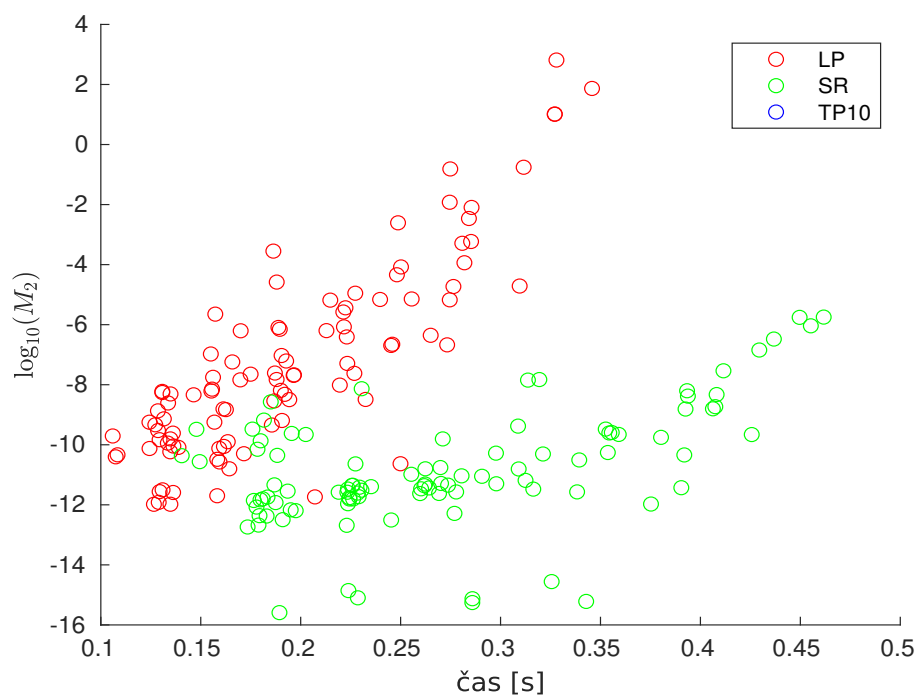
**Obrázek 5.20:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 2., parametr podobnosti vlastních čísel



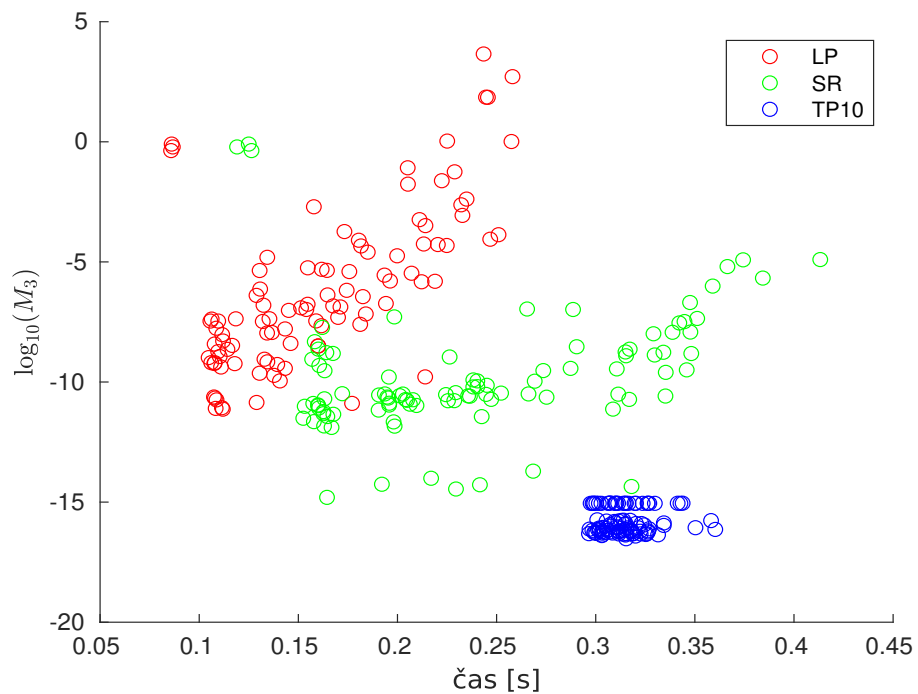
**Obrázek 5.21:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 3., parametr podobnosti vlastních čísel



**Obrázek 5.22:** Nediagonalizovatelné matice, Metrika 1., parametr času



Obrázek 5.23: Nediagonalizovatelné matice, Metrika 2., parametr času



Obrázek 5.24: Nediagonalizovatelné matice, Metrika 3., parametr času

Největší chyba odhadů  $f(\mathbf{A})$  pomocí spektrálního rozkladu a Lagrangeova polynomu vzniká při výpočtu první metriky. To je zapříčiněno vysokými derivacemi funkce použité v konstrukci metriky, které zvyšují vliv nepřesnosti stanovení vlastních čísel.

## 5.6 Tabulka porovnání metrik

V následujících třech tabulkách shrneme výsledky numerických experimentů. Pro všechny metriky budeme uvádět průměrnou hodnotu chybových metrik získanou každou metodou výpočtu.

Diagonální matice			
Metoda	Metrika 1.	Metrika 2.	Metrika 3.
TP10	4.8828e-04	0	2.2584e-16
LP	1.3597e-06	6.1058e-16	4.3194e-15
SR	1.3597e-06	2.1709e-15	1.5440e-14

Diagonalizovatelné matice			
Metoda	Metrika 1.	Metrika 2.	Metrika 3.
TP10	4.8828e-04	0	2.3760e-16
LP	3.9293e-05	1.1315e-06	7.9205e-06
SR	3.8198e-05	1.2561e-15	8.7859e-15

Nediagonalizovatelné matice			
Metoda	Metrika 1.	Metrika 2.	Metrika 3.
TP10	4.8821e-04	0	3.0910e-16
LP	7.0809	7.4686	51.9545
SR	0.0103	5.0268e-08	0.0185

## Kapitola 6

### Funkce matice $\mathbf{A}t$

V předchozích kapitolách jsme se zabývali konstantními maticemi  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . V této kapitole budeme uvažovat následující matice:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix},$$

kde  $t \in \mathbb{R}$ .

Jelikož nové matice  $\mathbf{A}(t)$  jsou závislé na parametru  $t$ , můžeme se zabývat derivací (integrací) podle parametru  $t$ . Derivaci matice  $\mathbf{A}(t)$  podle parametru  $t$  rozumíme ve smyslu derivace (integrace) po složkách, neboli takto:

$$\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}(t)}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(t)}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}(t)}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}(t)}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

V této práci se omezíme pouzera následující druh matic:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}t = \begin{pmatrix} a_{11}t & \cdots & a_{1n}t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}t & \cdots & a_{mn}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} t,$$

kde  $t \in \mathbb{R}$ .

Nejdříve se zaměříme na vlastní čísla nové matice  $\mathbf{A}t$ . Nechť  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  a  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{C}^n$  je vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu  $\lambda_r$ . Pak platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_r = \lambda_r\mathbf{x}_r.$$

Vynásobením této rovnice parametrem  $t$  dostáváme

$$(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_r = (\lambda_r t)\mathbf{x}_r.$$

Z tohoto plyne, vlastní čísla nové matice  $\mathbf{A}t$  jsou pouze původní vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  vynásobená parametrem  $t$ .

Tohoto pozorování využijeme při výpočtu funkce matice  $\mathbf{A}t$ . Kdekoliv ve výpočtu funkce  $f(\mathbf{A})$  jsme počítali funkční hodnotu ve vlastních číslech  $\lambda_r$ , nyní budeme počítat funkční hodnotu v bodech  $\lambda_r t$ .

Budeme uvažovat opět tři metody výpočtu, jmenovitě Taylorův polynom, Lagrangeův polynom a spektrální rozklad. V následujících podkapitolách shrňme implementaci tří doposud používaných metod.

## 6.1 Taylorův polynom

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Nechť  $f$  je komplexní funkce, která je  $k$ -krát diferencovatelná, v bodě  $a \in \mathbb{C}$ , pak Taylorův polynom funkce  $f(\mathbf{A}t)$  řádu  $k$  o středu  $a$  vypadá následovně:

$$T_k^{f,a}(\mathbf{A}t) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (\mathbf{A}t - a\mathbf{I})^i.$$

## 6.2 Lagrangeův polynom

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Nechť  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Nechť  $f$  je komplexní funkcí definovaná na  $\sigma(\mathbf{A})$ . Nechť  $L$  je Lagrangeův polynom pro systém bodů  $\{(\lambda_i, f(\lambda_i))\}_{i=1}^m$ . Potom platí

$$\begin{aligned} L(\mathbf{A}t) &= \sum_{r=1}^m f_r(\lambda_r t) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A}t - \lambda_i t \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r t - \lambda_i t)} = \sum_{r=1}^m f_r(\lambda_r t) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})t}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)t} \\ &= \sum_{r=1}^m f_r(\lambda_r t) \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq r}} (\lambda_r - \lambda_i)} = \sum_{r=1}^m f_r(\lambda_r t) \mathbf{G}_r. \end{aligned}$$

## 6.3 Spektrální projekce

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Nechť  $\sigma(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Nechť  $l_r$  je index vlastního čísla  $\lambda_r$ . Nechť  $f$  je  $l_r$ -krát diferencovatelná, komplexní funkce, v bodech  $\lambda_r$ . Pak

$$f(\mathbf{A}t) = \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{l_r-1} f^{(i)}(\lambda_r t) t^i \mathbf{Z}_{r,i},$$

kde matice  $\mathbf{Z}_{r,i}$  mají stejný význam jako pro konstantní matice  $\mathbf{A}$ , viz větu 3.1.4. Zde  $f^{(i)}$  jsou derivace podle  $\lambda_r$ .

Dále uvedeme matice  $e^{\mathbf{A}t}$ . Tyto se vyskytují v řešení obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou předmětem další kapitoly.

## 6.4 Exponenciála matice $e^{\mathbf{A}t}$

Pro obor reálných čísel máme vícero definic exponenciální funkce. Pro rozšíření na matice použijeme definici pomocí nekonečné řady:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 + \dots$$

Po vzoru této definice formálně nahradíme konstantu  $a$  maticí  $\mathbf{A}$  a dostaneme tak maticovou exponenciálu.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots$$

S přesně definovanou maticovou exponenciálou můžeme zkoumat derivaci (integraci) takové maticové funkce.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e^{\mathbf{A}t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots \right] \\ &= \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^3}{2!}t^2 + \dots \\ &= \mathbf{A} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots \right] \\ &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku zaměňujeme pořadí derivace podle  $t$  a nekonečné řady, což lze, protože řada konverguje lokálně stejnoměrně v libovolné maticové normě na  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Derivování tedy probíhá „člen po členu“.

Dostáváme obdobnou relaci jako pro obor reálných čísel. Pro přesnější důkaz viz [2, s. 233].

Pro integraci pak obdobně platí:

$$\int e^{\mathbf{A}t} dt = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{A}t},$$

za předpokladu, že  $\mathbf{A}^{-1}$  existuje.





## Kapitola 7

### Obyčejné diferenciální rovnice

Předmětem této kapitoly bude představení vzorových problémů, které funkce matic mohou řešit. Jedna z takových úloh je řešení soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic (dále jen ODR).

Nechť pro každá  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  jsou  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ . Nechť  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [t_0, \infty)$  a  $\mathbf{f} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Uvažujme následující systém lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}(t) + a_{11}\mathbf{x}_1(t) + a_{12}\mathbf{x}_2(t) + \dots + a_{1n}\mathbf{x}_n(t) &= f_1(t), \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial t}(t) + a_{21}\mathbf{x}_1(t) + a_{22}\mathbf{x}_2(t) + \dots + a_{2n}\mathbf{x}_n(t) &= f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial t}(t) + a_{n1}\mathbf{x}_1(t) + a_{n2}\mathbf{x}_2(t) + \dots + a_{nn}\mathbf{x}_n(t) &= f_n(t),\end{aligned}$$

doplněným o počáteční podmínku  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ .

Tento systém můžeme přepsat do podoby:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} + \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}, \quad (7.1)$$

kde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Pak řešením rovnice (7.1) je:

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{f}(s) ds + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0). \quad (7.2)$$

Chceme-li toto dokázat, je zapotřebí dokázat dvě vlastnosti. Za prvé, že takto definovaná funkce řeší rovnici (7.1). Za druhé jednoznačnost: existuje-li  $\mathbf{x}_2$  takové, že řeší rovnici (7.1), pak  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t)$ . Obojí je ale snadné, viz [1, s. 233].

## 7.1 Příklady řešení ODR

Dosavadní poznatky využijeme pro přibližný výpočet řešení dvou soustav ODR pomocí tří metod uvedených v kapitole 6.

**Příklad.** Uvažujme systém

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}x_1(t) + x_2(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}x_2(t) - x_1(t) &= 0\end{aligned}$$

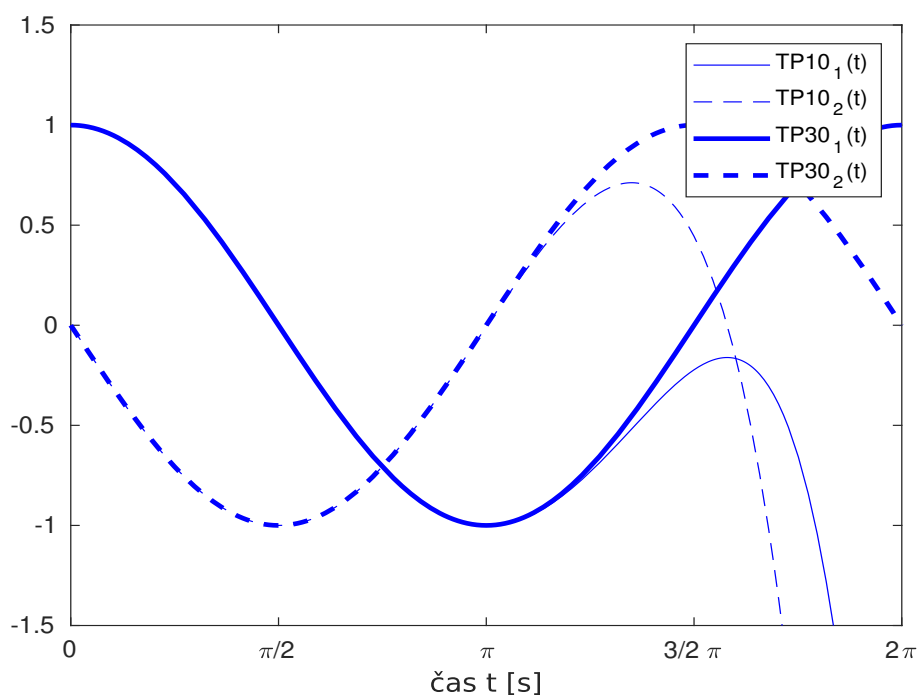
s počátečními podmínkami  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ . Ten můžeme přepsat do maticové podoby:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

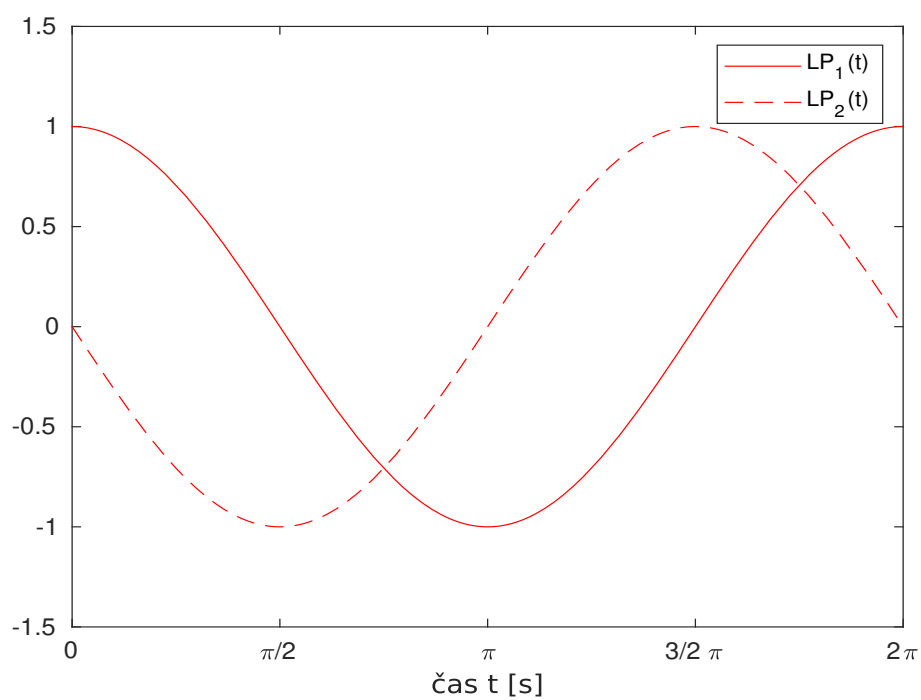
Nyní pomocí tří metod a vztahu (7.2) spočítáme odhad řešení  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ . Po vzoru (7.2) dostáváme

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

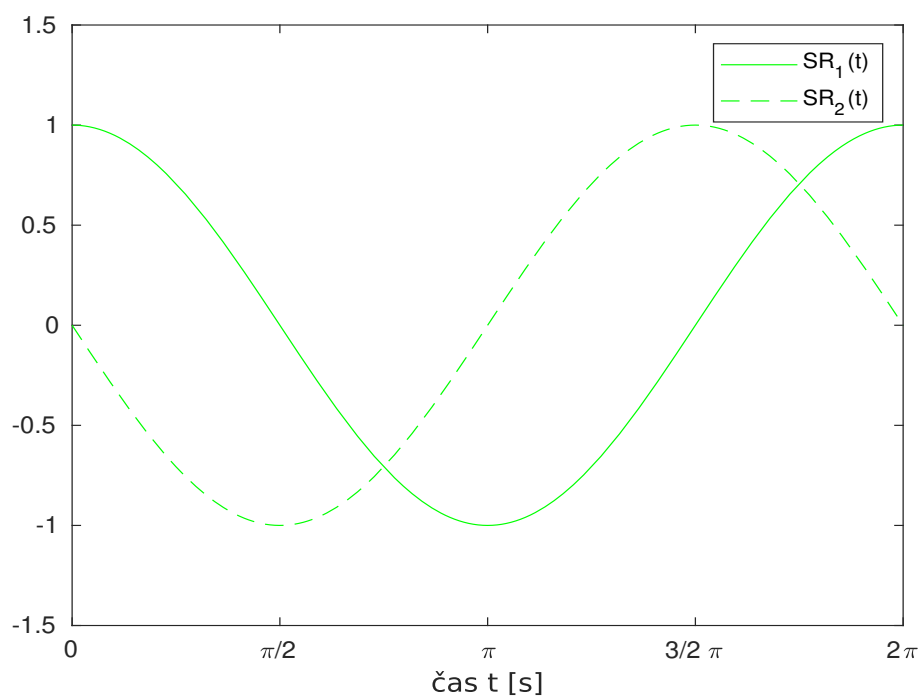
Následující grafy zobrazují odhad řešení  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  po složkách získaného pomocí tří námi uvažovaných metod. Značit je budeme jako  $Y_i$ , kde  $Y$  značí použitou metodu výpočtu (TP, LP nebo SR) a  $i$  značí pořadí složky  $x_i$  ve výsledném  $\widehat{\mathbf{x}}$ .



**Obrázek 7.1:** Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí Taylorova polynomu



Obrázek 7.2: Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí Lagrangeova polynomu



Obrázek 7.3: Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí spektrálního rozkladu

**Příklad.** Uvažujme následující systém:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}x_1(t) + 10^3x_2(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}x_2(t) - x_1(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}x_3(t) - 2 \cdot 10^3x_2(t) + 2 \cdot 10^3x_4(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}x_4(t) - x_3(t) &= 0,\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami  $x_1(0) = x_3(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1$ ,  $x_4(0) = 5$ .

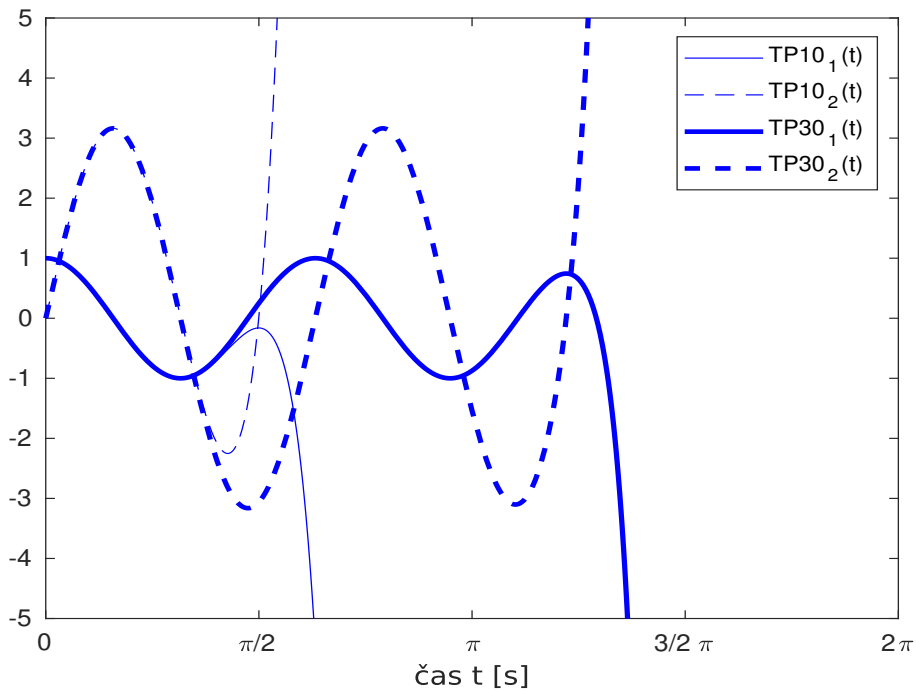
Tento systém můžeme přepsat do maticové podoby

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot 10^3 & 0 & 2 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

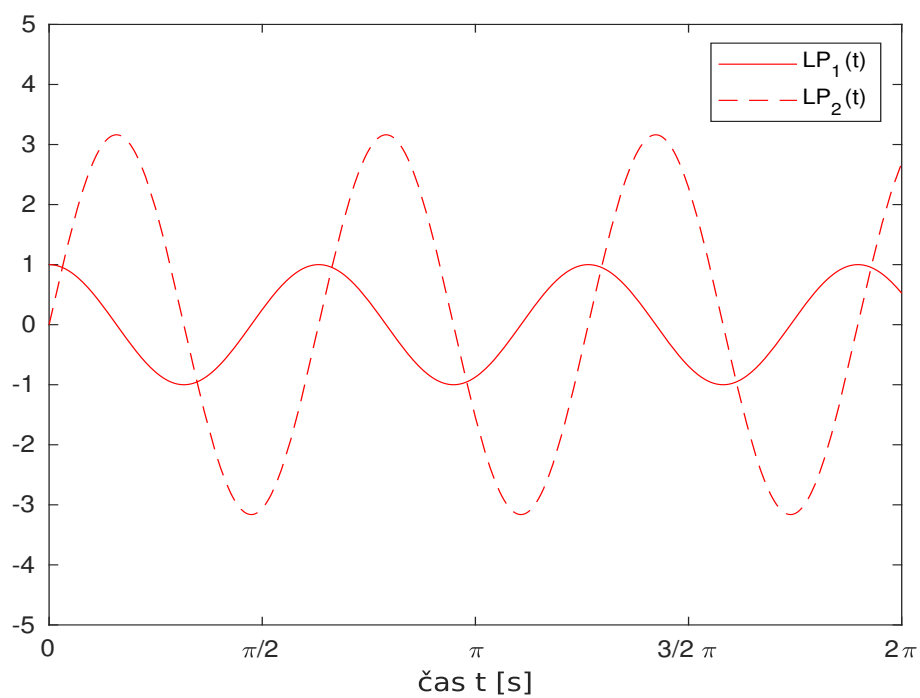
S použitím vztahu (7.2) dostáváme

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

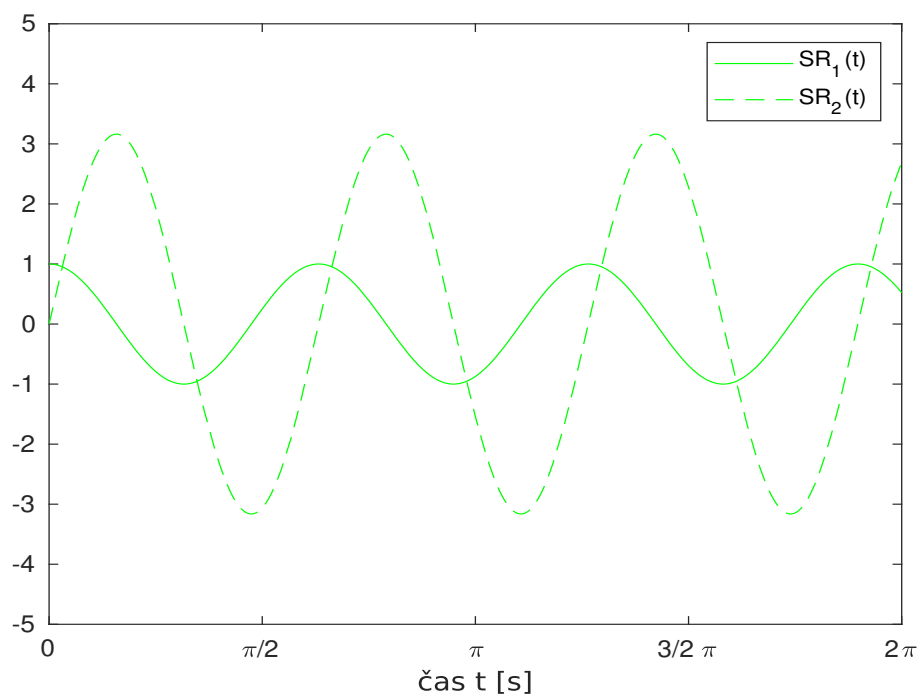
Pro tento příklad nebudeme v grafech vykreslovat všechny složky, vykreslíme si pouze  $\widehat{\mathbf{x}}(t)_1$  a  $\widehat{\mathbf{x}}(t)_2$ . Značit je budeme opět stejně jako v předchozím příkladě, tedy  $Y_i$ , kde  $Y$  značí metodu výpočtu a  $i$  pozici ve výsledném  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ .



**Obrázek 7.4:** Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí Taylorova polynomu



Obrázek 7.5: Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí Lagrangeova polynomu



Obrázek 7.6: Odhad  $\widehat{\mathbf{x}}(t)$  pomocí spektrálního rozkladu



## Kapitola 8

### Závěr

Práce obsahuje tři metody výpočtu funkcí matic, které byly implementovány programy v softwaru MATLAB. Tyto metody byly Taylorův polynom, Lagrangeův polynom a spektrální rozklad.

V práci se neuvádí analytický předpis pro spočtení chyby použité metody pro spektrální rozklad a Lagrangeův polynom. Tato problematika se prokázala velice obtížnou. Oba analytické předpisy by nejspíše závisely na přesnosti numerického výpočtu vlastních čísel a derivacích funkce v hodnotách vlastních čísel. Pro Taylorův polynom se analytický předpis podařil, viz rovnici (4.6).

V páté kapitole se věnujeme numerickým experimentům, které se snaží testovat přesnost empiricky.

Přesnost metody založené na spektrálním rozkladu se, pro diagonalizovatelné matice a metriku založenou na funkcích sinus a kosinus, pochybují kolem  $10^{-15}$ . Výsledky získané při práci s nediagonalizovatelnými maticemi jsou poněkud diskutabilní, neboť při generování testovacích matic vždy docházelo k tomu, že ve skutečnosti získané matice byly diagonalizovatelné s  $i$  blízkými vlastními čísly, kde  $i$  odpovídá indexu původního vlastního čísla v Jordanově bloku. Toto je ale pouze problém zaokrouhlovacích chyb při generování matic. Obě metody, které jsou na tento druh matic zamýšlené, tedy výpočet pomocí spektrálního rozkladu i Taylorova polynomu, jsou naprogramované tak, aby pro nediagonalizovatelné matice fungovaly.

Z výsledků je možné si povšimnout, že přesnost každé z metod je závislá na zvolené funkci  $f$ . Přesnost metody založené na Taylorově polynomu se patrně zlepšuje s rychlostí konvergence Taylorovy řady dané funkce. U Lagrangeova polynomu a spektrálního rozkladu spíše závisí na derivacích v okolí vlastních čísel. Pokud uživatel programu chce přesný výpočet bez znalosti žádného z uvedených parametrů, je patrně vhodné doporučit zvolit metodu výpočtu pomocí Taylorova polynomu a nastavit stupeň například 30.

Práce se věnuje i maticím závislejícím na časové proměnné a funkcím na nich. V práci se zaměřujeme pouze na matice, jejichž závislost na parametru  $t$  je vyjádřena předpisem  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}t$ .

Šestá kapitola interpretuje význam těchto matic a závěrem rozšiřuje tři metody, které jsme používali doposud, pro práci s takto časově závislými maticemi. Rozšířené metody jsme dále v následující kapitole využili při ukázce nalezení řešení dvou systémů lineárních obyčejných diferenciálních

rovníc s konstantními koeficienty pomocí numerického výpočtu maticové exponenciály závisující na čase.

Obsahem archívu přiloženého k této práci jsou všechny programy, které jsme použili při výpočtu testovacích metrik či příkladů. Dále jsou obsažené i pomocné funkce ke generování matic a uložené samotné matice, na kterých jsme numerické experimenty prováděli.



## Příloha a návod k použití programů

V archívu přiloženém k této bakalářské práci se nacházejí tři složky. Obsahem složky „Vypocet-funkce-matic.zip“ je následujících šest programů:

### 1. Výpočet $f(\mathbf{A})$ pro konstantní $\mathbf{A}$

(i) Výpočet pomocí Taylorova polynomu:

Funkce se nazývá funTP a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ , střed polynomu  $a$ , stupeň polynomu  $T_n$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funTP(exp(x),A,2,10);
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A})$  pomocí Taylorova polynomu stupně 10 o středu 2 a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

(ii) Výpočet pomocí Lagrangeova polynomu:

Funkce se nazývá funLP a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funLP(exp(x),A);
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A})$  pomocí Lagrangeova polynomu a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

(iii) Výpočet pomocí spektrálního rozkladu:

Funkce se nazývá funSR a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funSR(exp(x),A);
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A})$  pomocí spektrálního rozkladu a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

### 2. Výpočet $f(\mathbf{A}t)$

(i) Výpočet pomocí Taylorova polynomu:

Funkce se nazývá funTPt a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ , střed polynomu  $a$ , stupeň polynomu  $T_n$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funTPt ( exp ( x ) , A , 2 , 10 ) ;
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A}t)$  pomocí Taylorova polynomu stupně 10 o středu 2 a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

(ii) Výpočet pomocí Lagrangeova polynomu:

Funkce se nazývá `funLPt` a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funLPt ( exp ( x ) , A ) ;
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A}t)$  pomocí Lagrangeova polynomu a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

(iii) Výpočet pomocí spektrálního rozkladu:

Funkce se nazývá `funSRt` a argumenty jsou: funkce  $f$ , matice  $\mathbf{A}$ . Jako příklad použití uvažujme následující příkaz

```
B=funSRt ( exp ( x ) , A ) ;
```

Tento příkaz spočítá  $\exp(\mathbf{A}t)$  pomocí spektrálního rozkladu a uloží ho jako matici  $\mathbf{B}$ .

Obsahem druhé složky s názvem „Pomocne-programy.zip“ jsou pomocné programy, které lze využít pro generování tří typu matic, se kterými jsme pracovali v 5. kapitole. Samotné funkce se jmenují: „diagonalni.m“, „diagonalizovatelna.m“ a „nediagonalizovatelna.m“. V použití se neliší, například použití druhého programu by mohlo vypadat:

```
B=diagonalizovatelna ( n ) ;
```

Zde  $n$  udává rozměr výsledné matice  $\mathbf{B}$ .

Poslední soubor s názvem „Pouzite-hodnoty.zip“ obsahuje uložená všechna data, která byla použita ke konstrukci grafů v této práci.



## Literatura

- [1] CARL D. MEYER, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2010.
- [2] NICHOLAS J. HIGHAM, *Functions of Matrices, Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia, 2008.
- [3] GENE H. GOLUB, CHARLES F. VAN LOAN, *Matrix computations, 4<sup>th</sup> Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.