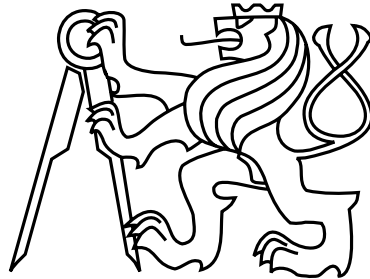


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra řídicí techniky



Bakalářská práce

Kyvadlo s reakčním kolem

Vojtěch Bauer

Vedoucí práce: Ing. Křištof Pučejdl

Studijní program: Kybernetika a robotika

24. května 2024

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bauer** Jméno: **Vojtěch** Osobní číslo: **507684**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra řídicí techniky**
Studijní program: **Kybernetika a robotika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Kyvadlo s reakčním kolem

Název bakalářské práce anglicky:

Reaction Wheel Pendulum

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je návrh, stavba a zprovoznění laboratorní elektromechanické platformy kyvadla s reakčním kolem. Požadavkem na systém jsou měření úhlu kyvadla, možnost zpětnovazebního řízení otáčení reakčního kola a implementace regulátoru pro stabilizaci kyvadla ve svislé horní poloze.

- 1) Navrhněte vhodné elektromechanické řešení umožňující jednoduchou přenositelnost zařízení.
- 2) Navrženou platformu zkonstruujte a zprovozněte včetně dokumentace výrobních dat a schémat zapojení pro potřeby případné replikace.
- 3) Otestujte a zdokumentujte funkčnost platformy v provozním módu vybuzení a kmitů, potlačení vnějšího rušení a stabilizace v poloze inverzního kyvadla.

Seznam doporučené literatury:

- [1] D. Block, K.J. Åström, a M.W. Spong, The Reaction Wheel Pendulum, Synthesis Lectures on Controls and Mechatronics, 2007
- [2] F. T. Brown, Engineering System Dynamics. A Unified Graph-Centered Approach, 2. vydání, CRC Press, 2006
- [3] G. Belascuen a N. Aguilar, Design, Modeling and Control of a Reaction Wheel Balanced Inverted Pendulum, AEGENCON, 2018
- [4] M.W. Spong, P.Corke a R. Lozano, Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum, Automatica, 2001

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Křištof Pučejdl katedra řídicí techniky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **16.02.2024**

Termín odevzdání bakalářské práce: **24.05.2024**

Platnost zadání bakalářské práce:

do konce letního semestru 2024/2025

Ing. Křištof Pučejdl
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu Ing. Křištofu Pučejdlovi za rady, velikou ochotu a pomoc při psaní této práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu během celého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 24. 5. 2024

.....

Abstrakt

V této práci se zabývám netradiční konfigurací systému kyvadla s reakčním kolem využívající statický motor a řemenový převod. Cílem práce je sestavení funkčního fyzického modelu této konfigurace a návrh řízení pro stabilizaci kyvadla ve vzpřímené poloze a pro vyšvihnutí kyvadla do vzpřímené polohy.

Práce obsahuje odvození diferenciálních rovnic systému, rozbor vhodných hodnot parametrů systému, stavbu fyzického modelu, navržení PD regulátoru pro stabilizaci kyvadla ve vzpřímené poloze, návrh Energy shaping regulátoru pro vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy, přepínání mezi těmito regulátory a ověření regulátorů na fyzickém modelu.

Klíčová slova: kyvadlo s reakčním kolem, podaktuované systémy, PD regulátor, Energy shaping regulátor, ODrive

Abstract

In this thesis, I investigate an unconventional configuration of a reaction wheel pendulum system with static motor and belt drive. The aim of this work is to construct a working physical model of this configuration and to design the control system to stabilize the pendulum in the upright position and to swing the pendulum up to the upright position.

The work includes derivation of differential equations of the system, analysis of suitable values of parameters of the system, construction of the physical model, implementation of the PD controller for stabilization, the design of the Energy shaping controller for swing up, switching between these controllers and verification of the controllers on the physical model.

Key words: reaction wheel pendulum, underactuated systems, PD controller, Energy shaping controller, ODrive

Obsah

1	Úvod	1
2	Systém kyvadla s reakčním kolem	3
2.1	Klasická konfigurace	3
2.2	Nová konfigurace	4
2.3	Matematický model	5
2.3.1	Lagrangeova funkce	6
2.3.2	Nekonzervativní síly	7
2.3.3	Diferenciální rovnice	7
2.4	Parametry systému	8
3	Fyzický model	11
3.1	Mechanická konstrukce	11
3.2	Elektronika	12
3.3	Identifikace	14
3.3.1	Ověření identifikace	16
4	Návrh řízení	19
4.1	Stabilizace kyvadla ve vzpřímené poloze	19
4.1.1	Stavový popis	19
4.1.2	PD regulátor	20
4.2	Vyšvihnutí do okolí vzpřímené polohy	20
4.2.1	Zpětnovazební linearizace	20
4.2.2	Energy shaping regulátor	21
4.2.3	Kompenzace tření	23
4.2.4	Řízení polohy a otáček motoru	23
4.3	Přepínání regulátorů	24
5	Ověření na fyzickém modelu	27
5.1	Stabilizace ve vzpřímené poloze	27
5.2	Vyšvihnutí do okolí vzpřímené polohy	28
5.3	Přepínání regulátorů	29
6	Závěr	31

1 Úvod

Kyvadlo s reakčním kolem patří mezi jednoduché nelineární dynamické systémy. Kombinace jednoduchosti modelu a silné nelinearity ho činí vhodným systémem jak pro testování nových regulátorů, tak pro výuku a demonstraci základních principů řízení.

U kyvadla s reakčním kolem i systémů z něho vycházejících je motor typicky umístěn na volném konci kyvadla přímo v ose reakčního kola, což přináší jisté nároky na konstrukci. Veškerá elektronika musí být umístěna buďto přímo v pohyblivé části modelu, nebo je její část umístěna na podložce a s motorem je propojena kabely, které omezují pohyb kyvadla. Omezení pohybu se ještě dá částečně eliminovat použitím prokluzných kroužků pro vedení signálových a napájecích vodivých cest skrze rotační kloub kyvadla. I to má ale své konstrukční nevýhody.

U této konfigurace je při volbě motoru navíc nutné brát v potaz i jeho rozměry a zejména hmotnost, jelikož se motor pohybuje spolu s kyvadlem.

Ve své práci se proto zabývám atypickou variantou původní úlohy, kdy je motor přesunut z konce kyvadla na podložku a k roztáčení reakčního kola je použit převod řemenem. Oba výše zmíněné problémy jsou tímto přesunem eliminovány, ale změna přináší i nové konstrukční výzvy.

V rámci této práce jsem navrhl a sestrojil funkční model nové konfigurace kyvadla s reakčním kolem, určil jsem jeho matematický popis a zabýval jsem se vlivem volby jednotlivých parametrů na jeho dynamiku, zejména volbou převodového poměru řemene. Následně jsem pro tento systém navrhl lineární regulátor pro stabilizaci kyvadla ve vzpřímené poloze, nelineární regulátor pro vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy a přepínání mezi oběma regulátory.

2 Systém kyvadla s reakčním kolem

2.1 Klasická konfigurace

O úloze kyvadla s reakčním kolem vyšlo v posledním čtvrtstoletí mnoho publikací. Hezká zpracování úlohy jsou např. článek od Sponga, Corkeho a Lozana [1] a kniha od Blocka, Åströma a Sponga [2]. Článek [1] je stručnějším představením úlohy, kniha [2] pak nabízí detailní popis systému a z něj odvozených úloh.

Systém se skládá z kyvadla s jedním stupněm volnosti na jehož konci je umístěn motor a středově symetrický disk nazývaný reakční kolo. Stator motoru je pevně spojen s koncem kyvadla a k rotoru je připevněno reakční kolo tak, že osa otáčení reakčního kola je rovnoběžná s osou otáčení kyvadla. Schematický náčrt systému je na obrázku 2.1.

Vstupem do systému je moment síly motoru τ , popř. napětí v motoru u , na kterém moment síly motoru závisí. Přenos sil z pohybu motoru a reakčního kola na kyvadlo funguje na principu 3. Newtonova zákona. Na reakční kolo motor působí momentem síly

$$\tau_W = \tau \quad (2.1)$$

a na kyvadlo motor působí momentem síly stejné velikosti a opačné orientace

$$\tau_P = -\tau. \quad (2.2)$$

Stavový popis tohoto systému má čtyři stavové proměnné. Typicky jsou to úhel natočení kyvadla θ_P , úhlová rychlost kyvadla $\dot{\theta}_P$, úhel natočení motoru θ_M a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$. Úhel natočení motoru se někdy vynechává, protože při uvažování rovnoměrně rozložené hmoty po obvodu reakčního kola na něm dynamika systému nezávisí.

Místo úhlu natočení a rychlosti motoru lze použít i absolutní úhel natočení reakčního kola θ_W a absolutní úhlovou rychlost reakčního kola $\dot{\theta}_W$. Velikost úhlu natočení motoru je však možné měřit pomocí enkodéru připevněného ke kyvadlu. Měření velikosti absolutního úhlu reakčního kola by bylo podstatně náročnější. Proto je snazší absolutní úhel reakčního kola určit ze vztahu

$$\theta_W = \theta_P + \theta_M. \quad (2.3)$$

Pro zanedbané tření lze systém popsat diferenciálními rovnicemi

$$\ddot{\theta}_P = \frac{(m_P l_P + (m_W + m_M) l_W) g}{J'} \sin \theta_P - \frac{1}{J'} \tau, \quad (2.4)$$

$$\ddot{\theta}_M = -\frac{(m_P l_P + (m_W + m_M) l_W) g}{J'} \sin \theta_P + \frac{J' + J_W}{J' J_W} \tau, \quad (2.5)$$

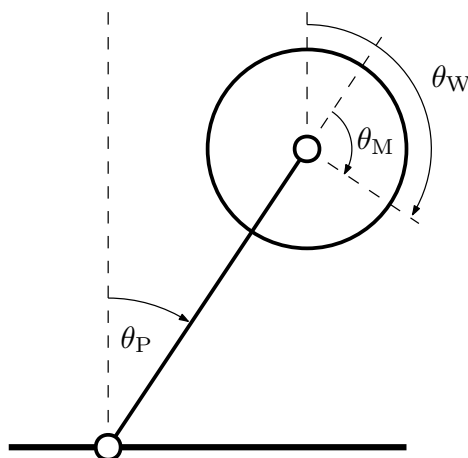
kde

$$J' = J_P + (m_W + m_M)l_W^2. \quad (2.6)$$

Rovnice jsou převzaté z [1]. Používám značení uvedené v sekci 2.3. Od hmotnosti reakčního kola m_W jsem oddělil hmotnost motoru m_M . Z diferenciálních rovnic lze vyjádřit i absolutní zrychlení reakčního kola

$$\ddot{\theta}_W = \ddot{\theta}_P + \ddot{\theta}_M = \frac{1}{J_W}\tau. \quad (2.7)$$

Cílem typické úlohy je řídit úhel natočení kyvadla θ_P . Řízení se skládá ze třech částí: stabilizace kyvadla ve vzpřímené poloze, vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy a přepínání mezi regulátory.



Obrázek 2.1: Kyvadlo s reakčním kolem - klasická konfigurace

2.2 Nová konfigurace

Jak jsem již zmínil v úvodu, zabývám se pozměněnou variantou úlohy, kdy je motor přesunut z konce kyvadla na podložku a převod momentu síly mezi osou otáčení motoru a osou otáčení reakčního kola je realizován pomocí řemene. Schématický náčrt systému je na obrázku 2.2.

Hlavní výhodou nové konfigurace je odlehčení kyvadla a menší omezení parametrů motoru, jelikož motor na konci kyvadla výrazně zvyšuje moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose otáčení. Díky tomu lze k řízení použít větší, a tím pádem i silnější motor. Spolu s motorem je na podložku přesunuta i veškerá elektronika, což umožňuje volný kontinuální pohyb kyvadla kolem celé své osy.

Nevýhodou nového uspořádání je složitější mechanická konstrukce modelu. Hlavní osa, kolem které se kyvadlo otáčí, se skládá ze dvou soustředných os. K vnější z nich je připevněno kyvadlo, k vnitřní je na jednom konci připojen motor a na druhém konci je umístěna řemenice, která je řemenem propojena s osou reakčního kola. Řemen a hlavní osa navíc do systému přináší další tření, která se v původním modelu nevyskytovala. Konstrukce hlavní osy je znázorněna na obrázku 3.1.

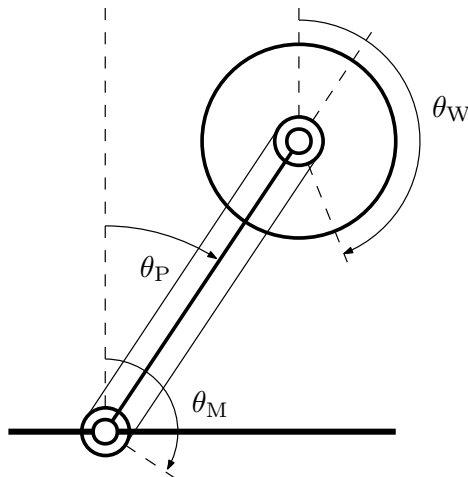
Vstup i stavové veličiny systému zůstávají stejné. Závislost absolutního úhlu natočení reakčního kola na úhlu motoru a úhlu kyvadla je

$$\theta_W = (1 - i)\dot{\theta}_P + i\dot{\theta}_M, \quad (2.8)$$

kde i je převodový poměr řemene

$$i = \frac{r_M}{r_W}, \quad (2.9)$$

kde r_M je poloměr řemenice v ose motoru a r_W je poloměr řemenice v ose reakčního kola. Volbou vhodného převodového poměru, který významně ovlivňuje dynamiku systému, se zabýváme v kapitole 2.4.



Obrázek 2.2: Kyvadlo s reakčním kolem - nová konfigurace

2.3 Matematický model

Model se skládá ze tří pohyblivých těles: kyvadla, reakčního kola a osy motoru. Veškerý pohyb v systému je rotační, a to kolem osy otáčení motoru M a osy otáčení reakčního kola W .

V systému se nachází čtyři disipativní síly. Jsou to tření ve vnějších ložiscích hlavní osy, tření ve vnitřních ložiscích hlavní osy, tření v ložiscích v ose reakčního kola a tření řemene. Všechny třecí síly považujeme za lineární. K největšímu zanedbání způsobenému předpokladem linearit pravděpodobně dochází u tření řemene. Vzhledem k poměru disipativních sil vůči zbytku dynamiky systému by se ale toto zanedbání nemělo výrazněji projevit.

Pro parametry modelu používám následující značení:

- J_P ... moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose M
- J_W ... moment setrvačnosti reakčního kola vzhledem k ose W
- J_M ... moment setrvačnosti osy motoru vzhledem k ose M
- m_P ... hmotnost kyvadla
- m_W ... hmotnost reakčního kola
- l_P ... vzdálenost těžiště kyvadla od osy M
- l_W ... vzdálenost těžiště reakčního kola od osy M
- b_P ... koeficient tření ve vnějších ložiscích hlavní osy
- b_M ... koeficient tření ve vnitřních ložiscích hlavní osy
- b_W ... koeficient tření v ložiscích ose reakčního kola
- b_B ... koeficient tření řemene
- i ... převodový poměr řemene
- g ... gravitační zrychlení

K nalezení diferenciálních rovnic popisujících daný systém jsem použil Euler-Lagrangeovy rovnice. Zobecněnými souřadnicemi jsou úhel kyvadla a úhel motoru

$$q_1 = \theta_P, \quad (2.10)$$

$$q_2 = \theta_M. \quad (2.11)$$

2.3.1 Lagrangeova funkce

Kyvadlo se pohybuje rychlostí $\dot{\theta}_P$ kolem osy otáčení motoru a působí na něj gravitační síla. Výška těžiště kyvadla je

$$h_P = l_P \cos \theta_P. \quad (2.12)$$

Kinetická koenergie kyvadla T_P^* a potenciální energie kyvadla ν_P jsou tedy

$$T_P^* = \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}_P^2, \quad (2.13)$$

$$\nu_P = m_P g l_P \cos \theta_P. \quad (2.14)$$

Reakční kolo se pohybuje rychlostí

$$\dot{\theta}_W = (1 - i)\dot{\theta}_P + i\dot{\theta}_M \quad (2.15)$$

kolem své osy otáčení, rychlostí

$$v = l_W \dot{\theta}_P \quad (2.16)$$

kolem osy otáčení motoru a působí na něj gravitace. Výška těžiště reakčního kola je

$$h = l_W \cos \theta_P. \quad (2.17)$$

Kinetická koenergie reakčního kola T_W^* a potenciální energie reakčního kola ν_W jsou tedy

$$T_W^* = \frac{1}{2} J_W \left((1-i)\dot{\theta}_P + i\dot{\theta}_M \right)^2 + \frac{1}{2} m_W l_W^2 \dot{\theta}_P^2, \quad (2.18)$$

$$\nu_W = m_W g l_W \cos \theta_P. \quad (2.19)$$

Osa motoru se pohybuje rychlostí $\dot{\theta}_M$ kolem své osy otáčení. Její kinetická koenergie T_M^* je tedy

$$T_M^* = \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}_M^2. \quad (2.20)$$

Lagrangeova funkce L má tvar

$$L = T_P^* + T_W^* + T_M^* - \nu_P - \nu_W. \quad (2.21)$$

2.3.2 Nekonzervativní síly

V systému se vyskytují čtyři třecí síly. Jejich disipativní funkce jsou

$$D_P = \frac{1}{2} b_P \dot{\theta}_P^2, \quad (2.22)$$

$$D_M = \frac{1}{2} b_M (-\dot{\theta}_P + \dot{\theta}_M)^2, \quad (2.23)$$

$$D_W = \frac{1}{2} b_W (-i\dot{\theta}_P + i\dot{\theta}_M)^2, \quad (2.24)$$

$$D_B = \frac{1}{2} b_B (-\dot{\theta}_P + \dot{\theta}_M)^2. \quad (2.25)$$

Výsledná disipativní funkce má tvar

$$D = D_P + D_M + D_W + D_B. \quad (2.26)$$

Jediným vstupem do systému je moment síly motoru τ , který je svázaný s rychlostí $\dot{\theta}_M$. Platí tedy

$$Q_P = 0, \quad (2.27)$$

$$Q_M = \tau. \quad (2.28)$$

2.3.3 Diferenciální rovnice

Zderivováním Lagrangeovy funkce a disipativní funkce a přidáním vstupů dostávám diferenciální rovnice systému

$$\theta_P : (J + J_W(1-i)^2) \ddot{\theta}_P + J_W i(1-i) \ddot{\theta}_M - m l g \sin \theta_P = -(b_P + b) \dot{\theta}_P + b \dot{\theta}_M, \quad (2.29)$$

$$\theta_M : J_W i(1-i) \ddot{\theta}_P + (J_M + J_W i^2) \ddot{\theta}_M = b \dot{\theta}_P - b \dot{\theta}_M + \tau, \quad (2.30)$$

kde

$$J = J_P + m_W l_W^2, \quad (2.31)$$

$$m l = m_P l_P + m_W l_W, \quad (2.32)$$

$$b = b_M + b_W i^2 + b_B. \quad (2.33)$$

Z rovnic 2.29 a 2.30 lze ještě vyjádřit úhlová zrychlení kyvadla a motoru

$$J_{\omega}^2 \ddot{\theta}_P = (J_M + J_W i^2) m l g \sin \theta_P - ((J_M + J_W i) b + (J_M + J_W i^2) b_P) \dot{\theta}_P + (J_M + J_W i) b \dot{\theta}_M + J_W i (i - 1) \tau, \quad (2.34)$$

$$J_{\omega}^2 \ddot{\theta}_M = J_W i (i - 1) m l g \sin \theta_P + (J b + J_W (b + b_P i) (1 - i)) \dot{\theta}_P - (J + J_W (1 - i)) b \dot{\theta}_M + (J + J_W (i - 1)^2) \tau, \quad (2.35)$$

kde

$$J_{\omega}^2 = J(J_M + J_W i^2) + J_M J_W (1 - i)^2. \quad (2.36)$$

Zanedbáním třecích sil a momentu setrvačnosti vnitřní osy dostávám diferenciální rovnice podobné rovnicím pro klasickou konfiguraci 2.4 a 2.5.

$$\ddot{\theta}_P = \frac{(m_P l_P + m_W l_W) g}{J} \sin \theta_P + \frac{i - 1}{J i} \tau, \quad (2.37)$$

$$\ddot{\theta}_M = \frac{(i - 1)(m_P l_P + m_W l_W) g}{J i} \sin \theta_P + \frac{J + J_W (i - 1)^2}{J J_W i^2} \tau. \quad (2.38)$$

Diferenciální rovnice pro zrychlení absolutního úhlu reakčního kola je pak

$$\ddot{\theta}_W = (1 - i) \ddot{\theta}_P + i \ddot{\theta}_M = \frac{1}{J_W i} \tau. \quad (2.39)$$

Od klasické úlohy se diferenciální rovnice pro $\ddot{\theta}_P$ a $\ddot{\theta}_W$ liší snížením působení gravitace o tíhu motoru a dělením momentu síly motoru mezi kyvadlo a reakční kolo v závislosti na volbě převodového poměru řemene i .

2.4 Parametry systému

V této kapitole řeším vhodné nastavení hodnot parametrů systému. Nezabývám se momentem setrvačnosti vnitřní osy J_M , jelikož osa motoru slouží pouze k přenosu jeho kroutícího momentu. Dle rovnice 2.34 motor působí na kyvadlo přes tření ve vnitřních ložiscích osy motoru, přes tření v ložiscích v ose reakčního kola a přes tření řemene. Cílem úlohy ale není toto tření použít k řízení, a proto považuji všechny třecí síly za parazitní a snažím se je minimalizovat. Všechny tyto parametry tedy v této kapitole zanedbám a použiji rovnice 2.37, 2.38 a 2.39.

Z rovnice 2.37 je zřejmé, že zrychlení kyvadla je nepřímě úměrné parametru J . Dle vztahu 2.31 je proto nutné minimalizovat moment setrvačnosti kyvadla J_P , délku kyvadla l_W a hmotnost reakčního kola m_W . Moment setrvačnosti reakčního kola J_W pohyb kyvadla přímo neovlivňuje, ale podle rovnice 2.39 je žádoucí ho maximalizovat pro nižší otáčky reakčního kola.

Požadavku na minimální hmotnost a maximální moment setrvačnosti reakčního kola odpovídá prstencový tvar reakčního kola, kdy je většina hmotnosti rozložena co nejdále od osy otáčení.

Belascuen a Aguilar se v článku [3] zabývají vlivem jednotlivých parametrů na velikost úhlu, ze kterého se kyvadlo dokáže dostat do vzpřímené polohy. Tyto úvahy se dají použít i v mém případě. Předpokládám, že se kyvadlo nachází nad vodorovnou polohou a nepohybuje se, čili platí

$$\theta_P \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.40)$$

$$\dot{\theta}_P = 0. \quad (2.41)$$

Dosažením do rovnice 2.37 získávám nerovnost pro maximální úhel

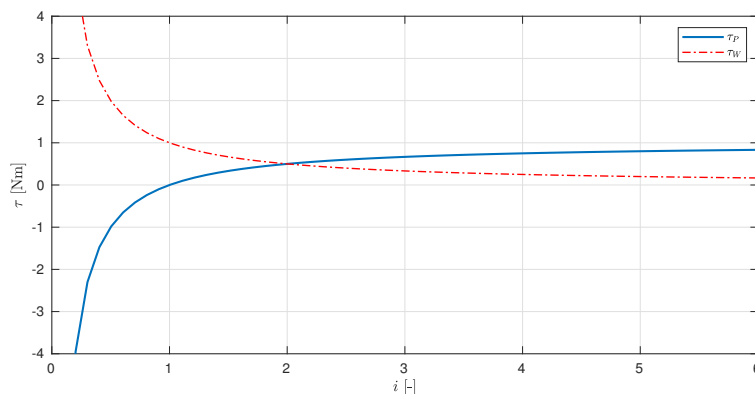
$$\theta_{P\max} \leq \arcsin\left(\frac{1-i}{img} \tau_{\max}\right), \quad (2.42)$$

kde τ_{\max} je maximální moment síly motoru. Pro zvětšení úhlu $\theta_{P\max}$ je tedy žádoucí snížit hodnotu ml , což odpovídá snížení hmotností kyvadla a reakčního kola a vzdáleností jejich těžišť od osy motoru.

Vliv převodového poměru je vhodnější uvažovat v kontextu celého systému. Z rovnic 2.37 a 2.39 je zřejmé, že se moment síly motoru dělí mezi kyvadlo a reakční kolo právě v závislosti na volbě převodového poměru

$$\tau_P = \frac{i-1}{i} \tau, \quad (2.43)$$

$$\tau_W = \frac{1}{i} \tau. \quad (2.44)$$



Obrázek 2.3: Dělení momentu síly motoru mezi kyvadlo a reakční kolo

Průběhy obou závislostí jsou zobrazeny na obrázku 2.3. Významným převodovým poměrem je $i = 1$, při kterém se celý moment síly motoru přenáší do reakčního kola. Pohyb kyvadla je v tomto případě způsoben pouze třením a pro malé třecí síly se systém nedá řídit.

Pro $i > 1$ je převod tzv. do rychla, kdy je pro zafixované kyvadlo rychlost reakčního kola vyšší než rychlost motoru. Pro kladný moment síly motoru na kyvadlo i reakční kolo působí kladné momenty síly. Se zvyšujícím se převodovým poměrem se zvyšuje i moment

síly působící na kyvadlo a moment síly působící na reakční kolo postupně zaniká

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_P = \tau, \quad (2.45)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_W = 0. \quad (2.46)$$

Pro $i < 1$ je převod tzv. do pomala, kdy je pro zafixované kyvadlo rychlost reakčního kola nižší než rychlost motoru. Pro kladný moment síly motoru na reakční kolo působí kladný moment síly, ale na kyvadlo působí moment síly záporný. Velikost momentu síly působícího na kyvadlo se zvyšuje se snižujícím se převodovým poměrem a může zde nabývat neomezených hodnot. Nevýhodou je, že s rostoucím momentem síly působícího na kyvadlo roste i velikost momentu síly působícího na reakční kolo, což pro běžné hodnoty ostatních parametrů systému způsobí vysoké otáčky motoru.

3 Fyzický model

Nemalou součástí mé práce bylo i vyrobení funkčního fyzického modelu. Při jeho návrhu a stavbě jsem upřednostňoval prostředky a součástky dostupné přímo na katedře řídicí techniky. Motivací bylo snížení nákladů a využití komponent, jejichž funkčnost byla již ověřena na jiných projektech.

Model jsem se snažil vyrobit v relativně snadno přenosné podobě, jednak pro mé pohodlí během psaní této práce, ale i do budoucna pro snazší práci s ním. Kyvadlo se proto dá z modelu snadno odmontovat a rozložený model se vejde do menšího kufru.

Potřebné soubory a dokumentace k modelu jsou k nalezení v GitLab repozitáři.¹

3.1 Mechanická konstrukce

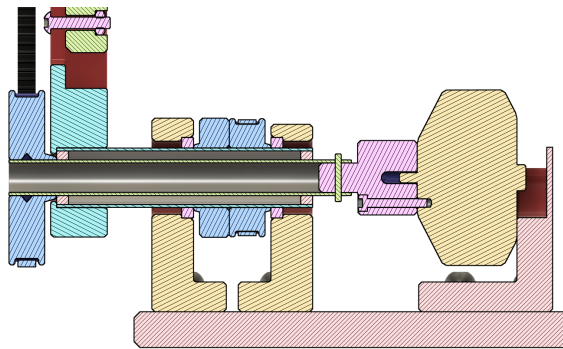
Přesunutí motoru na podložku vyžaduje složitější konstrukci hlavní osy, kolem které se otáčí kyvadlo. Ta vznikla složením dvou soustředných os. K vnější z nich je připevněné kyvadlo, k vnitřní je na jednom konci připojen motor a na druhém řemenice, která je řemenem spojená s řemenicí v ose reakčního kola. Průřez hlavní osy je uveden na obrázku 3.1.

Na převod jsem použil ozubený řemen GT3 s roztečí 3 mm. Během konstrukce modelu jsem postupně vystřídal vícero sad řemenic, pro které se mírně lišila výsledná délka kyvadla, proto bylo žádoucí sestavit kyvadlo ze dvou částí, které umožňují napínání řemene. Převodový poměr mezi motorem a osou reakčního kola jsem nakonec zvolil 2:1, pro který dochází k dělení kroutícího momentu mezi kyvadlo a reakční kolo v poměru 1:1. Rozměry řemenic jsem převzal ze stránky [4].

Enkodér pro měření úhlu natočení motoru θ_M je umístěn přímo v ose motoru. Měření úhlu natočení kyvadla θ_P jsem realizoval pomocí boční osy. Ta je s osou kyvadla spojena řemenem GT2 s roztečí 2 mm. Z prostovových důvodů je i mezi hlavní a vedlejší osou převodový poměr 2:1. Díky tomu mohou být osy blíž u sebe, ale převod je třeba zohlednit při zpracování dat z enkodéru.

Většina mechanických dílů je vytištěna na 3D tiskárně a k jejich navržení jsem použil program Autodesk Fusion 360. Hlavní osu jsem převzal z již zrušeného studentského projektu Doggo, na osu reakčního kola a vedlejší osu jsem použil ocelové kolíky. Reakční kolo tvarem připomíná prstenec, který má při stejné hmotnosti vyšší moment setrvačnosti. Pro zvýšení jeho momentu setrvačnosti je po jeho obvodu ještě navíc rozmístěno 9 šroubů. Pro jejich snazší připojení má reakční kolo tvar polygonu. Podložka modelu je vyrobena z překližky.

¹<https://gitlab.fel.cvut.cz/aa4cc/reaction-wheel-pendulum>



Obrázek 3.1: Průřez hlavní osy

K zafixování modelu ke stolu zatím používám ztužidlo. 3D model mechanické konstrukce je na obrázku 3.2.

Po mechanické stránce je model pro účely experimentů v mé práci plně dostačující. Pro dlouhodobější využití např. jako platformy pro výuku automatického řízení by bylo vhodné ještě provést několik úprav. Motor nyní při otáčení vykazuje mírné vyosení, proto bude ještě třeba navrhnout jeho přesnější připojení k ose. Dále plánuji zvýšit symetrii reakčního kola, podepřít boční osu enkodéru z obou stran a celkově navrhnout robustnější konstrukci modelu.

3.2 Elektronika

ODrive V3.6

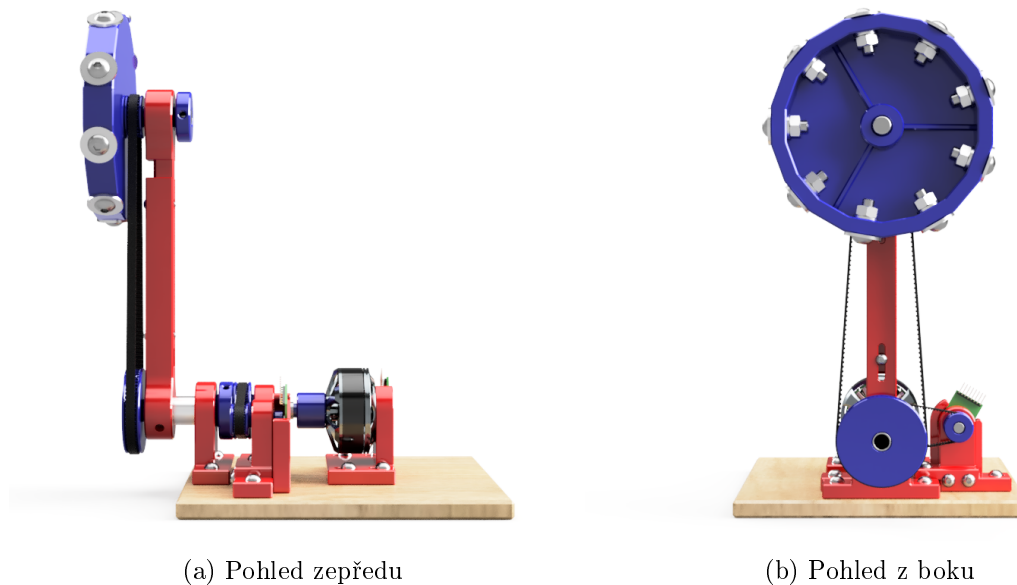
K řízení celého modelu jsem použil desku ODrive V3.6. Jedná se o dvoukanálový 3-F kontrolér umožňující řízení bezkartáčových DC motorů na moment síly. Díky tomu jsem mohl jako vstup do systému použít přímo moment síly motoru τ a nemusel jsem zahrnout do matematického modelu dynamiku elektrické části motoru.

Další výhodou je možnost připojení dvou motorů s enkodéry. Na druhý port je tedy připojen samotný enkodér pro měření úhlu natočení kyvadla θ_P , který by jinak vyžadoval vlastní elektroniku pro komunikaci s počítačem.

K desce je připojen 2Ω brzdový rezistor a deska je napájena zdrojem 24 V. K nastavení desky jsem použil aplikaci ODrivetool. Dokumentace k ODrive a potřebné návody jsou k nalezení v dokumentaci ODrivrobotics [5].

Motor MN5212

K řízení kyvadla jsem použil bezkartáčový DC motor MN5212, který už by mohl být svým rozměrem a hmotností 205 g v klasické konfiguraci úlohy problematickým. Pro srovnání použité kyvadlo váží 135 g a použité reakční kolo váží 365 g. Konstanta motoru KV je 340, jeho maximální výkon je 840 W a maximální povolený proud motorem je 35 A. Údaje o motoru jsem převzal ze stránky výrobce T-MOTOR [6].



Obrázek 3.2: 3D model konstrukce systému

Enkodér AS5047D

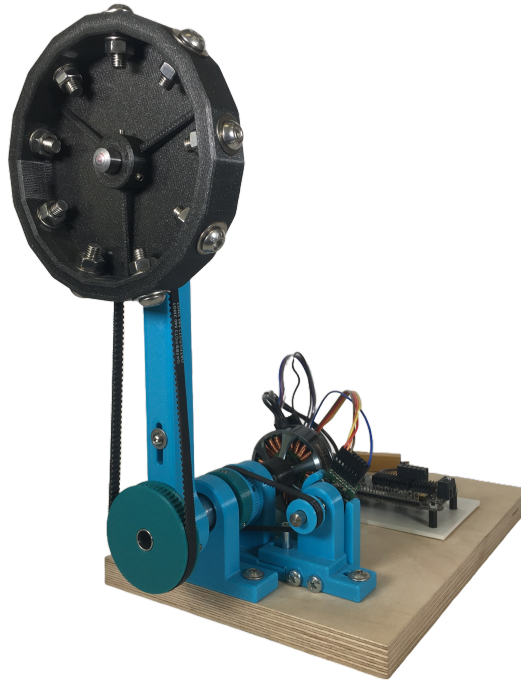
K měření obou úhlů vychýlení jsem použil enkodér AS5047D. Jedná se o magnetický senzor polohy využívající Hallova jevu. Pracuje s rozlišením 2000 kroků na otočku a podporuje tzv. index signál. V obou případech používám senzor v inkrementálním módu, kdy senzor komunikuje s ODrive pomocí ABI rozhraní. Data ze senzoru jsou v celých otáčkách, proto je nutné je předzpracovat. Datasheet k enkodéru je k nalezení např. zde [7].

Enkodér v ose motoru je automaticky zkalibrován spolu s motorem. U enkodéru ve vedlejší ose není připojen motor, proto se při jeho kalibraci musí ručně otočit kyvadlem o jednu otáčku. Z tohoto důvodu bude pravděpodobně do budoucna lepší tento enkodér používat v absolutním módu, který s ODrive komunikuje přes rozhraní SPI a který nevyžaduje opakovanou kalibraci.

Komunikace

Komunikace mezi ODrive a počítačem je možná více způsoby. K nastavení ODrive jsem použil sériovou komunikaci po USB, k další komunikaci již používám prostředí Simulink a sběrnici CAN.

Komunikace pomocí CAN protokolu je realizována přes Kvaser Leaf Light v2. Baudrate je nastaven na 1000 kbps. K propojení jsem použil předpřipravenou knihovnu a DBC File z diplomové práce Marka Bečky [8], která využívá Vehicle Network Toolbox.



Obrázek 3.3: Fyzický model kyvadla s reakčním kolem

3.3 Identifikace

Jelikož je většina komponent vytištěna na 3D tiskárně, mám k dispozici i předkreslený model v aplikaci Autodesk Fusion 360, který umožňuje numerický výpočet momentů setrvačnosti J_P , J_W a J_M a vzdáleností těžišť od osy motoru l_P a l_W . Hmotnost kyvadla m_P a reakčního kola m_W jsem změřil. Velikost tíhového zrychlení g je obecně známá hodnota a převodový poměr i jsem si zvolil při konstrukci fyzického modelu. Určené hodnoty parametrů jsem ještě ručně doladil při určování jednotlivých koeficientů tření.

K určení koeficientů tření jsem použil odezvy jednotlivých podsystémů na nulový vstup a nenulové počáteční podmínky. Začal jsem u samotného kyvadla a postupně přidával další komponenty, které do systému zanáší nové zdroje tření. U všech podsystémů musel být motor úplně odpojený, jelikož by při nulovém vstupu v systému figurovalo i tření uvnitř motoru, které vzhledem k přímému řízení vstupního momentu není zahrnuto v matematickém modelu. Všechna uvedená porovnání simulace se změřenými daty jsou vůči datasetům, které nebyly použity k identifikaci. Výsledné hodnoty parametrů jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Odpojením řemene, reakčního kola a osy motoru se systém zjednoduší na jednoduché kyvadlo s osou kyvadla, které je tlumené pouze třením ve vnějších ložiscích hlavní osy a které

lze popsat diferenciální rovnicí

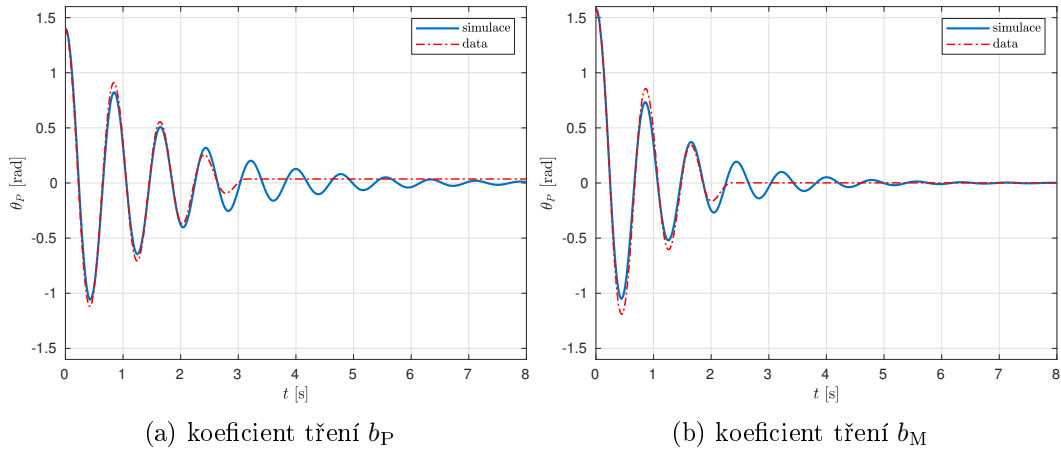
$$J_P \ddot{\theta}_P - mlg \sin \theta_P = -b_P \dot{\theta}_P. \quad (3.1)$$

Odtud lze určit koeficient tření b_P . Ověření identifikace je uvedeno na obrázku 3.4a.

Přidáním vnitřní osy a jejím zafixováním vůči podložce se pohyb kyvadla pouze více ztlumí působením třecí síly ve vnitřních ložiscích hlavní osy. V diferenciální rovnici pouze přibude nový člen

$$J_P \ddot{\theta}_P - mlg \sin \theta_P = -b_P \dot{\theta}_P - b_M \dot{\theta}_P. \quad (3.2)$$

Porovnáním odezvy určím velikost koeficientu tření b_M . Ověření identifikace je uvedeno na obrázku 3.4b.



Obrázek 3.4: Identifikace koeficientů tření b_P a b_M

Identifikace koeficientů tření v ložiscích v ose reakčního kola b_W a řemene b_B je těžko realizovatelná, protože s odpojeným motorem nelze měřit úhel motoru a v závislosti pouze na úhlu kyvadla nelze obě tření rozlišit. Systém s reakčním kolem bez připojeného řemene sice obsahuje jen tření v ose reakčního kola, ale v praxi je pohyb kyvadla příliš odlišný a úhel kola nelze změřit. Proto se mi koeficient b_W nepodařilo identifikovat dostatečně přesně.

Z tohoto důvodu jsem se rozhodl koeficienty tření b_W a b_B sloučit do jednoho. Jelikož jsou obě třecí síly závislé na stejném rozdílu rychlostí

$$F_W = b_W i^2 (-\dot{\theta}_P + \dot{\theta}_M), \quad (3.3)$$

$$F_B = b_B (-\dot{\theta}_P + \dot{\theta}_M), \quad (3.4)$$

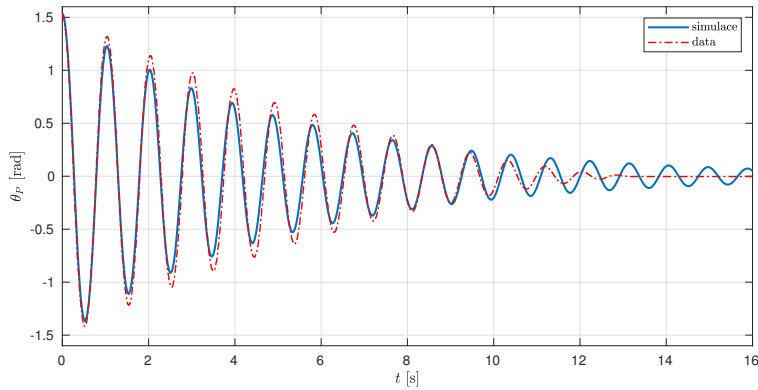
můžu koeficienty nahradit koeficientem tření

$$b_{WB} = b_W i^2 + b_B \quad (3.5)$$

a k identifikaci použít odezvu celého systému na nenulové počáteční podmínky. Mírnou nevýhodou je závislost daného koeficientu na převodovém poměru. Zafixování osy motoru popis zjednoduší na

$$(J + J_W (1 - i)^2) \ddot{\theta}_P - mlg \sin \theta_P = -(b_P + b_M + b_{WB}) \dot{\theta}_P. \quad (3.6)$$

Určím velikost koeficientu tření řemene b_{WB} . Ověření identifikace je uvedeno na obrázku 3.5.


 Obrázek 3.5: Identifikace koeficientu tření b_B

J_P	0,0015 kg m ²
J_W	0,0009 kg m ²
J_M	0.000025 kg m ²
m_P	0,135 kg
m_W	0,365 kg
l_P	0,074 m
l_W	0,2025 m
b_P	0,00175 kg m ² rad s ⁻¹
b_M	0,00075 kg m ² rad s ⁻¹
b_{WB}	0,004 kg m ² rad s ⁻¹
g	9,81 m s ⁻²
i	2

Tabulka 3.1: Hodnoty parametrů modelu

3.3.1 Ověření identifikace

Správnost identifikace jsem ještě ověřil porovnáním simulace a odezev systému na dva různé periodické vstupy

$$\tau_1 = 0,1 \sin(2\pi t), \quad (3.7)$$

$$\tau_2 = 0,2 \sin(3\pi t). \quad (3.8)$$

Jako metriku pro ověření správnosti modelu jsem použil normovaný RMSE

$$e = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\theta_{a,i} - \theta_{f,i}|^2}}{\max \theta_a - \min \theta_a}, \quad (3.9)$$

kde n je délka datasetu, θ_a je vektor změřených hodnot a θ_f je vektor odsimulovaných hodnot. Odezvy jsou uvedeny na obrázku 3.6.

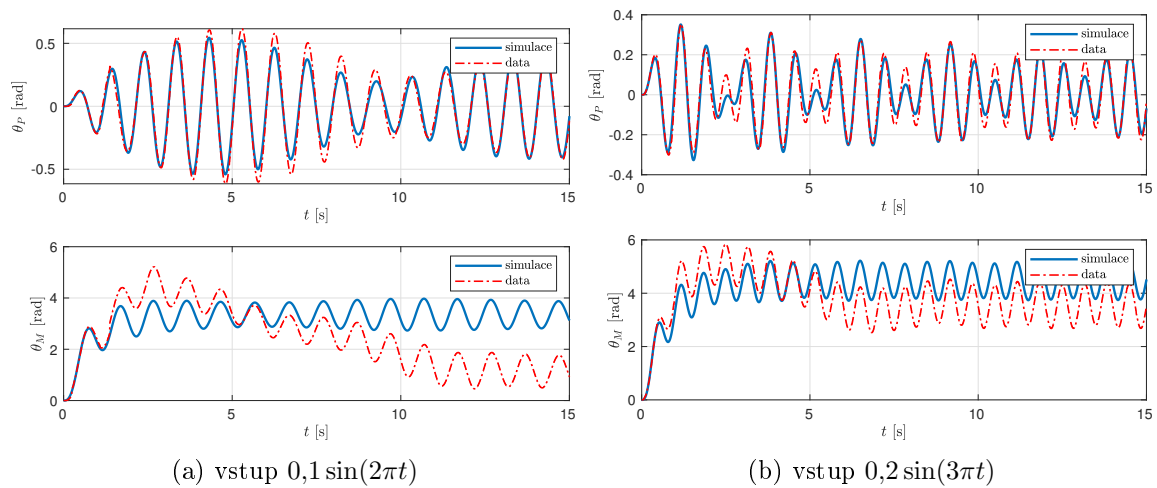
Normovaný RMSE jednotlivých průběhů je

$$e_{1P} = 4,41\%, \quad (3.10)$$

$$e_{1M} = 30,67\%, \quad (3.11)$$

$$e_{2P} = 6,48\%, \quad (3.12)$$

$$e_{2M} = 15,99\%. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.6: Odezvy na periodický vstup

Z hodnot normovaného RMSE i zobrazených grafů je zřejmé, že simulace velmi dobře odpovídá v případě úhlu kyvadla θ_P , ale v případě úhlu motoru θ_M se mírně liší. Možnou příčinou může být nenulové statické tření v modelu, díky kterému při roztáčení kyvadla dochází k nemodelovanému přechodovému jevu. Z grafů je zřejmé, že po určité době začne simulace odpovídat oscilacím reálného modelu, jen jsou posunuté o konstantní offset. Tímto nesouladem se již dále nezabývám, jelikož je cílem práce řídit úhel kyvadla θ_P , pro který je matematický popis dostačující a dynamika pohybu kyvadla je invariantní na absolutní úhel natočení reakčního kola.

4 Návrh řízení

Návrh řízení se skládá ze třech částí. Stabilizace kyvadla ve vzpřímené poloze, vyšvihnutí kyvadla do vzpřímené polohy a přepínání mezi regulátory.

4.1 Stabilizace kyvadla ve vzpřímené poloze

4.1.1 Stavový popis

Ke stabilizaci kyvadla ve vzpřímené poloze lze použít lineární regulátor. K jeho návržení je nutné použít linearizovaný matematický model. Pracovní bod OP volím ve vzpřímené poloze kyvadla, což odpovídá nulovým výchylkám obou úhlů, nulovým úhlovým rychlostem a nulovému vstupu

$$OP = [\theta_{P0}, \theta_{M0}, \dot{\theta}_{P0}, \dot{\theta}_{M0}, \tau_0] = [0, 0, 0, 0, 0]. \quad (4.1)$$

Jedinou nelinearitou v diferenciálních rovnicích 2.34 a 2.35 je funkce $\sin \theta_P$ v gravitačním členu. V okolí pracovního bodu OP lze funkci \sin aproximovat jako

$$\sin \theta_P \approx \theta_P. \quad (4.2)$$

Stavové rovnice pak mají tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\tau, \quad (4.3)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\tau, \quad (4.4)$$

kde \mathbf{x} je vektor stavů

$$\mathbf{x} = [\theta_P, \theta_M, \dot{\theta}_P, \dot{\theta}_M]^T, \quad (4.5)$$

y je výstup systému a matice systému jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(J_M + J_W i^2)mlg}{J_\omega^2} & 0 & \frac{-(J_M + J_W i^2)b - (J_M + J_W i^2)b_P}{J_\omega^2} & \frac{(J_M + J_W i)b}{J_\omega^2} \\ \frac{J_W i(i-1)mlg}{J_\omega^2} & 0 & \frac{Jb + J_W(b + b_P i)(1-i)}{J_\omega^2} & \frac{-(J + J_W(1-i))b}{J_\omega^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_W i(i-1)}{J_\omega^2} \\ \frac{J + J_W(i-1)^2}{J_\omega^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \text{a} \quad \mathbf{D} = 0, \quad (4.6)$$

kde

$$J_\omega^2 = J(J_M + J_W i^2) + J_M J_W (1 - i)^2. \quad (4.7)$$

Všechny stavy systému jsou říditelné, jelikož je matice říditelnosti

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B}] \quad (4.8)$$

regulární. Vzhledem k jejímu rozměru ji zde neuvádím.

4.1.2 PD regulátor

Ke stabilizaci kyvadla jsem použil PD regulátor s filtrovanou derivační složkou

$$C(s) = k_P + k_D \frac{Ns}{s + N}, \quad (4.9)$$

kde k_P , k_D a N jsou parametry regulátoru. Výsledné konstanty regulátoru jsou

$$k_P = 6, \quad (4.10)$$

$$k_D = 1, \quad (4.11)$$

$$N = 100. \quad (4.12)$$

4.2 Vyšvihnutí do okolí vzpřímené polohy

K vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy je nutné použít regulátor nelineární. Já jsem zvolil tzv. Energy shaping, který se k dosažení nestabilních ekvilibrií běžně používá. Tento regulátor dokáže kyvadlo dostat na orbitu odpovídající zvolené energii, která může pro správně zvolenou energii procházet vzpřímenou polohou. Tento regulátor tedy dokáže kyvadlo vyšvihnout do okolí vzpřímené polohy, ale nedokáže jej ve vzpřímené poloze stabilizovat. Proto musí být ve vzpřímené poloze nahrazen stabilizačním regulátorem. Návrhem Energy shaping regulátoru pro jednoduché podaktuované systémy se zabývá Block, Åström a Spong v knize [2] a Tedrake ve výukových materiálech předmětu Underactuated [9].

4.2.1 Zpětnovazební linearizace

Postup zpětnovazební linearizace jsem převzal z [9]. Diferenciální rovnice lze získat dosažením do obecného vztahu, ale vzhledem k jednoduchosti systému to není nutné. Systém má dvě zobecněné souřadnice

$$q_1 = \theta_P, \quad (4.13)$$

$$q_2 = \theta_M, \quad (4.14)$$

kdy úhel motoru je aktuovaný a úhel kyvadla aktuovaný není. Je nutné vstup do systému nastavit tak, aby na něm zrychlení $\ddot{\theta}_M$ záviselo lineárně. Hledaný vstup lze vyjádřit z diferenciální rovnice 2.35

$$\tau = \frac{J_W i (1-i) m l g}{J + J_W (i-1)^2} \sin \theta_P - \frac{J b + J_W (b + b_P i) (1-i)}{J + J_W (i-1)^2} \dot{\theta}_P + \frac{(J + J_W (1-i)) b}{J + J_W (i-1)^2} \dot{\theta}_M + \frac{J_\omega^2}{J + J_W (i-1)^2} u, \quad (4.15)$$

kde u je výstup regulátoru. Díky tomu se diferenciální rovnice systému zjednoduší na

$$(J + J_W (i-1)^2) \ddot{\theta}_P = m l g \sin \theta_P - (b + b_P) \dot{\theta}_P + b \dot{\theta}_M + J_W i (i-1) u, \quad (4.16)$$

$$\ddot{\theta}_M = u. \quad (4.17)$$

4.2.2 Energy shaping regulátor

Definice Lyapunovské stability podle [9] je následující. Systém $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, kde f je spojitá funkce, je Lyapunovsky stabilní v počátku $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pokud pro něj můžeme nalézt skalární spojitě diferencovatelnou funkci $V(\mathbf{x})$, která na okolí počátku D splňuje

$$V(x) > 0, \forall x \in D \setminus \{x_0\} \text{ a } V(x_0) = 0, \quad (4.18)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D \setminus \{x_0\} \text{ a } \dot{V}(x_0) = 0. \quad (4.19)$$

Kyvadlo chci stabilizovat ve vzpřímené poloze s nulovou úhlovou rychlostí

$$\theta_P^d = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.20)$$

$$\dot{\theta}_P^d = 0. \quad (4.21)$$

Hledám tedy regulátor, pro který bude vhodně zvolená Lyapunovská funkce V splňovat podmínky 4.18 a 4.19. Dle [2] volím Lyapunovskou funkci

$$V = \frac{1}{2} \tilde{E}^2 = \frac{1}{2} (E - E^d)^2, \quad (4.22)$$

kde E je energie kyvadla

$$E = \frac{1}{2} (J + J_W (i-1)^2) \dot{\theta}_P^2 + m l g \cos \theta_P \quad (4.23)$$

a E^d je energie kyvadla ve vzpřímené poloze

$$E^d = m l g. \quad (4.24)$$

Je zjevné, že pro vzpřímenou polohu kyvadla zvolená funkce V splňuje podmínku 4.18. Časová derivace energie kyvadla je

$$\dot{E} = \dot{\theta}_P (J + J_W (i-1)^2) \ddot{\theta}_P - \dot{\theta}_P m l g \sin \theta_P = J_W i (i-1) u \dot{\theta}_P, \quad (4.25)$$

kde jsem za $(J + J_W(i - 1)^2)\ddot{\theta}_P$ dosadil z rovnice 4.16 a zanedbal tření v systému. Časová derivace funkce V je pak

$$\dot{V} = \tilde{E}\dot{\tilde{E}} = \tilde{E}\dot{E} = J_W i(i - 1)u\dot{\theta}_P \tilde{E}. \quad (4.26)$$

Aby Lyapunovská funkce V splňovala podmínku 4.19, musí platit

$$\dot{V} = J_W i(i - 1)u\dot{\theta}_P \tilde{E} \leq 0. \quad (4.27)$$

Vhodným regulátorem podle [9] je

$$u = -k_e(i - 1)\dot{\theta}_P \tilde{E}, \quad (4.28)$$

kde k_e je konstanta regulátoru.

Regulátor funguje pro libovolný počáteční stav systému kromě dolní rovnovážné polohy s nulovou okamžitou úhlovou rychlostí kyvadla

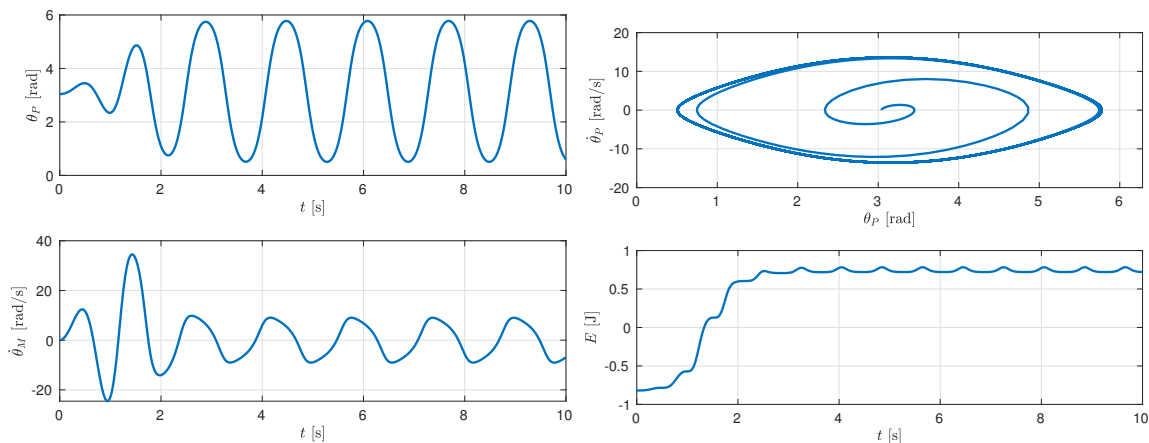
$$\theta_P = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.29)$$

$$\dot{\theta}_P = 0. \quad (4.30)$$

V těchto stavech jsou výstup regulátoru i působení gravitace na kyvadlo nulové a systém nemá důvod se rozpohybovat. Z tohoto důvodu je nutné po spuštění řízení kyvadlo mírně vychýlit vnějším zásahem.

V simulaci 4.1 pro počáteční vychýlení 0,1 rad kyvadlo dosáhne orbity, která je vidět na fázovém portrétu kyvadla 4.1b, v čase 3 s. Nejmenší vzdálenost od vzpřímené polohy je

$$|\theta_P - \theta_P^d| = 0,50 \text{ rad}. \quad (4.31)$$



(a) Úhel kyvadla θ_P a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$

(b) Fázový portrét a energie kyvadla E

Obrázek 4.1: Simulace vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy pro $k_e = 0,085$

4.2.3 Kompenzace tření

Dle simulace kyvadlo nedosahuje vzpřímené polohy. Příčinou je tření v systému, které jsem zanedbal při návrhu regulátoru. Pro kompenzaci tohoto tření, tedy při výpočtu časové derivace energie kyvadla, nezanedbám tření spojené s pohybem kyvadla $(b + b_P)\dot{\theta}_P$, čili

$$\dot{E} = \left(J_W i(i-1)u - (b + b_P)\dot{\theta}_P \right) \dot{\theta}_P \quad (4.32)$$

a

$$\dot{V} = \left(\left(J_W i(i-1)u - (b + b_P)\dot{\theta}_P \right) \dot{\theta}_P \right) \tilde{E}. \quad (4.33)$$

Regulátor kompenzující tření v systému má tedy tvar

$$u = -k_e(i-1)\dot{\theta}_P \tilde{E} + k_b \frac{b + b_P}{J_W i(i-1)} \dot{\theta}_P, \quad (4.34)$$

kde k_b je konstanta regulátoru. [9]

Ze simulace 4.2 je zřejmé, že orbita kyvadla se již blíží orbitě

$$E = E^d \quad (4.35)$$

a nejmenší vzdálenost od vzpřímené polohy je

$$|\theta_P - \theta_P^d| = 0,015 \text{ rad.} \quad (4.36)$$

Není nutné, aby se kyvadlo dostalo přímo do vzpřímené polohy, protože již před jejím dosažením bude regulátor nahrazen stabilizačním PD regulátorem. Čas dosažení orbity kompenzace tření neovlivňuje. Výsledné konstanty regulátoru jsou

$$k_e = 0,085, \quad (4.37)$$

$$k_b = 0,0021. \quad (4.38)$$

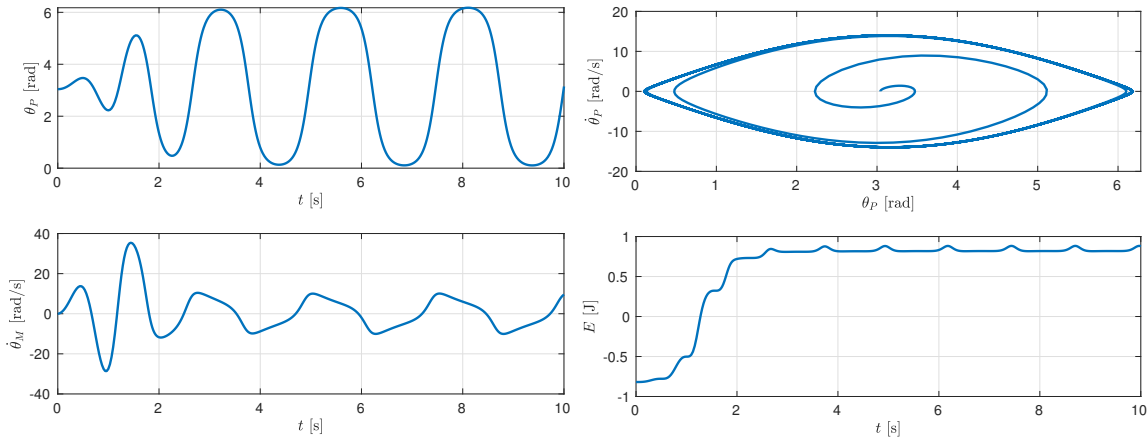
4.2.4 Řízení polohy a otáček motoru

V literatuře [2] a [9] jsou do regulátoru přidávány i členy pro řízení aktuovaných částí systému, v mém případě úhlu motoru a úhlové rychlosti motoru. Regulátor má pak tvar

$$u = -k_e(i-1)\dot{\theta}_P \tilde{E} + k_B \frac{b + b_P}{J_W i(i-1)} \dot{\theta}_P - k_p \theta_M - k_d \dot{\theta}_M. \quad (4.39)$$

Proporcionální člen, který zamezí vzdálení aktuované zobecněné polohy od pracovního bodu, může být užitečný např. u vozíku s inverzním kyvadlem, který je typicky prostorově omezený. V mém případě na velikosti natočení motoru nezáleží. Proto jsem proporcionální člen v regulátoru nepoužil.

Přidání derivačního členu pomáhá omezit otáčky motoru. Dle simulace ale nedochází k příliš vysokým otáčkám, které by namáhaly konstrukci modelu. Derivační člen by navíc omezoval i moment síly působící na kyvadlo, což by opět zvýšilo minimální odchylku kyvadla od vzpřímené polohy. Proto jsem do regulátoru nepřidal ani derivační člen.



(a) Úhel kyvadla θ_P a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$ (b) Fázový portrét a energie kyvadla E

Obrázek 4.2: Simulace vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy pro $k_e = 0,085$, $k_b = 0,0021$

4.3 Přepínání regulátorů

K přepínání dochází v závislosti na úhlu vychýlení kyvadla. Pokud se kyvadlo nachází na zvoleném okolí vzpřímené polohy

$$|\theta_P| < \epsilon, \quad (4.40)$$

je kyvadlo stabilizované pomocí PD regulátoru. Pokud se kyvadlo nachází mimo zvolené okolí, řídí pohyb kyvadla Energy shaping. Podmínkami pro volbu ϵ je schopnost PD regulátoru na celém okolí vzpřímené polohy kyvadlo stabilizovat a schopnost Energy shaping regulátoru kyvadlo do zvoleného okolí vzpřímené polohy vyšvihnout.

Maximální limit proudu motoru je

$$I_{\max} = 35 \text{ A}. \quad (4.41)$$

To odpovídá momentu síly motoru

$$\tau_{\max} = \frac{8,27}{KV} I_{\max} \doteq 0,85 \text{ N m}, \quad (4.42)$$

kde KV je konstanta motoru. [5] Z nerovnice 2.42 určíme maximální úhel kyvadla, při kterém motor ještě dokáže kompenzovat působení gravitace

$$\theta_{P\max} = \arcsin\left(\frac{1-i}{imlg}\tau_{\max}\right) \doteq 0,54 \text{ rad}. \quad (4.43)$$

Velikost tohoto úhlu se vztahuje k nulové okamžité rychlosti kyvadla. Při nenulové rychlosti kyvadla se jeho hodnota bude lišit. Při vyšvihnutí kyvadla bude jeho hodnota vyšší, protože se kyvadlo bude již pohybovat ve směru do vzpřímené polohy, naopak při vychýlení kyvadla bude jeho hodnota nižší, protože se kyvadlo bude pohybovat v opačném směru. Proto je tato hodnota pouze orientační. Motor tedy teoreticky dokáže stabilizovat kyvadlo na okolí vzpřímené polohy

$$|\theta_P| < 0,54 \text{ rad}. \quad (4.44)$$

Navržený energy shaping regulátor dokáže dle simulace kyvadlo řídit mimo okolí vzpřímené polohy

$$|\theta_P| < 0,015 \text{ rad.} \quad (4.45)$$

Parametr ϵ tedy může nabývat hodnot

$$\epsilon \in (0,015; 0,54) \text{ rad.} \quad (4.46)$$

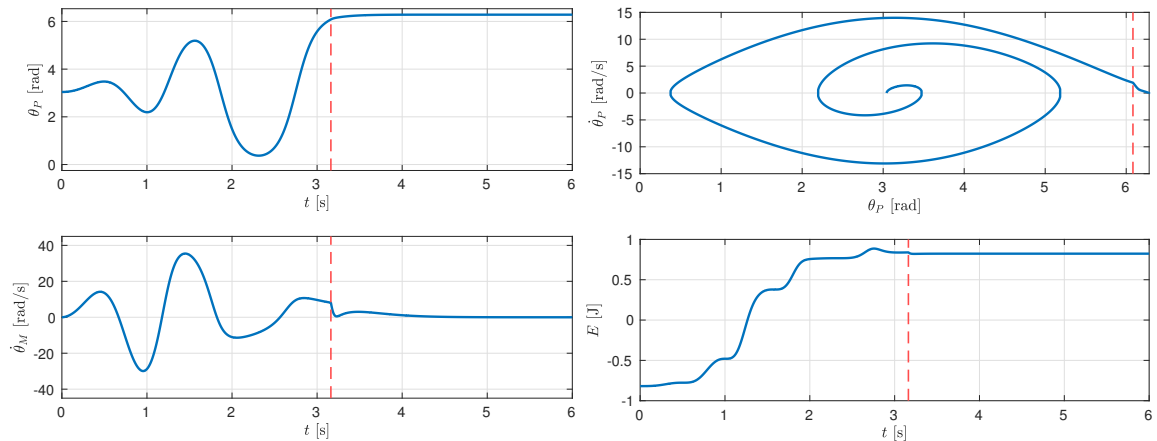
Pro větší hodnoty ϵ motorem poteče zbytečně velký proud. Pro menší hodnoty naopak hrozí přepnutí regulátorů i pro malé výchylky ze vzpřímené polohy. Proto volím velikost okolí

$$\epsilon = 0,2 \text{ rad,} \quad (4.47)$$

kteřá je dostatečně velká pro stabilizaci menších zásahů a při které by měl téct motorem proud

$$I < 13,5 \text{ A.} \quad (4.48)$$

Podle simulace 4.3 se systém daří stabilizovat. K přepnutí regulátorů dojde v čase 3,16 s a kyvadlo dosáhne vzpřímené polohy.



(a) Úhel kyvadla θ_P a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$ (b) Fázový portrét a energie kyvadla E

Obrázek 4.3: Simulace přepínání regulátorů, okamžik přepnutí regulátoru je vyznačen červenou čarou

5 Ověření na fyzickém modelu

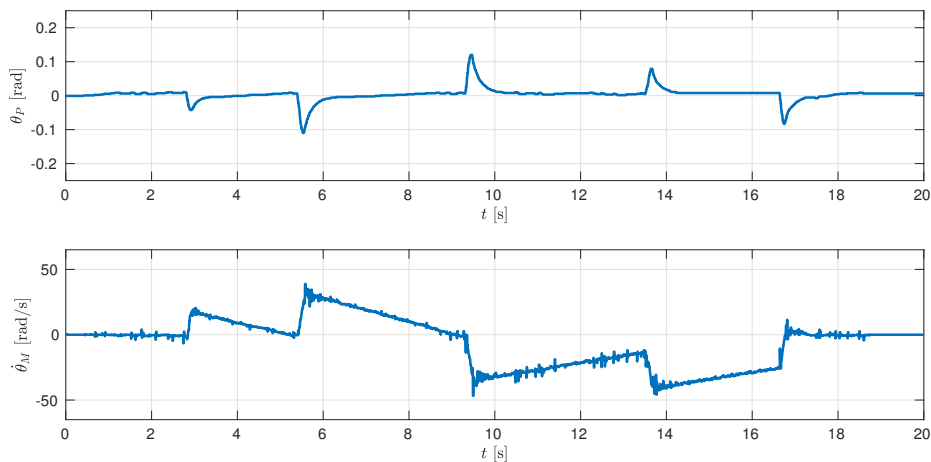
Po úspěšném návrhu a otestování regulátorů v simulinku v této kapitole uvádím výsledky experimentů z fyzického modelu. Konstanty regulátorů jsou stejné jako v případě simulací, pokud není uvedeno jinak. Výsledky odpovídají očekávání, všechny navržené regulátory jsou funkční i na fyzickém modelu.

5.1 Stabilizace ve vzpřímené poloze

Je zřejmé, že PD regulátor je k stabilizaci kyvadla dostatečný. Okolo vzpřímené polohy ještě docházelo k častým oscilacím, proto jsem za regulátor přidal pásmo necitlivosti

$$d = (-0,035; 0,035) \text{ N m}, \quad (5.1)$$

které oscilace omezilo.



Obrázek 5.1: Stabilizace kyvadla ve vzpřímené poloze pomocí PD regulátoru

5.2 Vyšvihnutí do okolí vzpřímené polohy

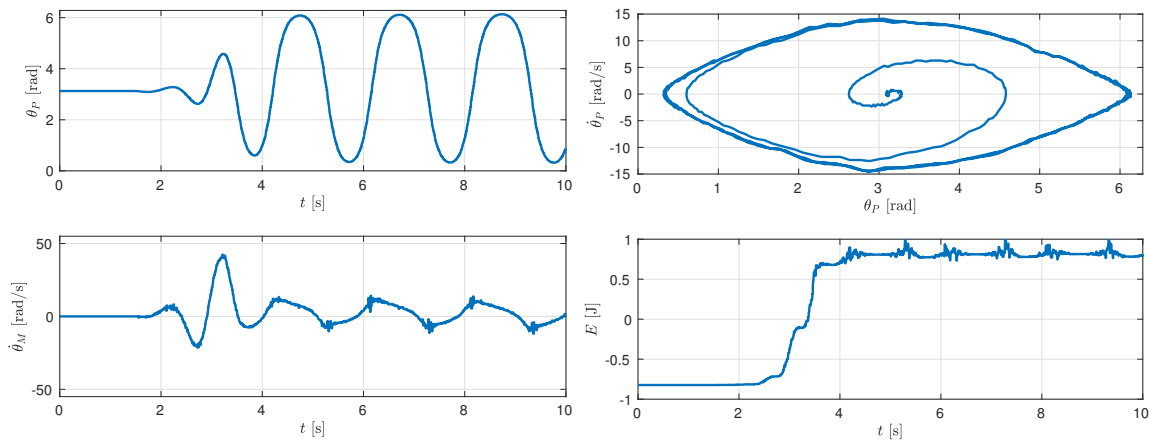
Vyšvihnutí kyvadla začalo v čase 1,5 s po jeho mírném vychýlení z dolní svislé polohy vnějším zásahem. Systém dosáhl orbity po 2,65 s, čas ale závisí na počátečním vychýlení kyvadla. Nejmenší vzdálenost od vzpřímené polohy je

$$|\theta_P - \theta_P^d| = 0,15 \text{ rad}, \quad (5.2)$$

což je více než v případě simulace. Tření v systému bude nejspíš oproti simulaci mírně vyšší. Proto jsem se rozhodl pro přepínání regulátorů zvýšit kompenzaci tření. Konstanty Energy shaping regulátoru jsou pak

$$k_e = 0,085, \quad (5.3)$$

$$k_b = 0,0027. \quad (5.4)$$



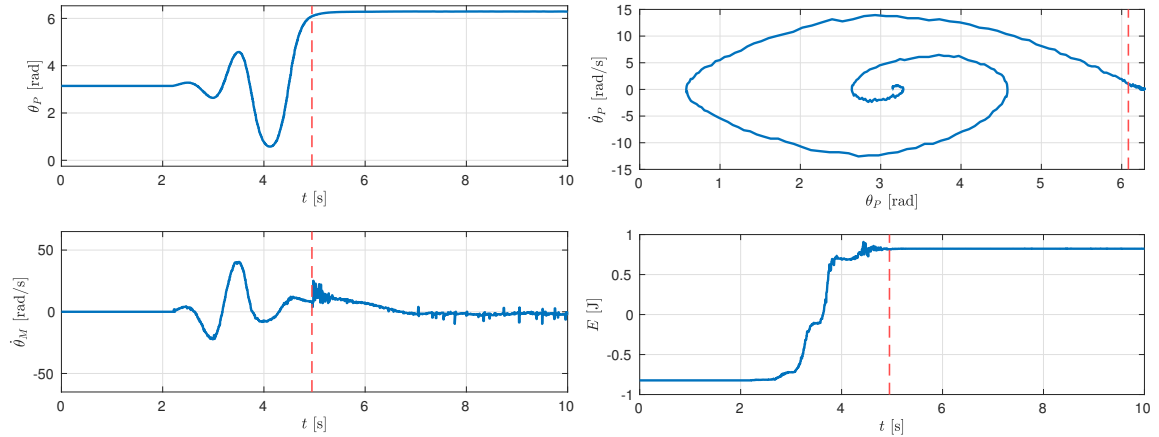
(a) Úhel kyvadla θ_P a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$

(b) Fázový portrét a energie kyvadla E

Obrázek 5.2: Vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy

5.3 Přepínání regulátorů

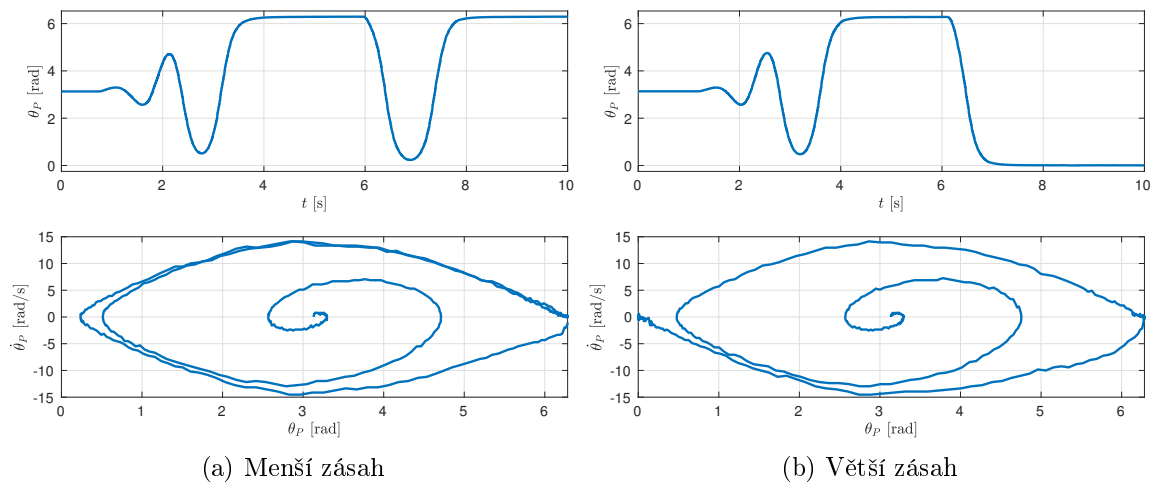
Při nově zvolené kompenzaci tření již kyvadlo mírně překmitává vzpřímenou polohu. Díky tomu nemusí motor po přepnutí do PD regulátoru působit zbytečně velkým kroutícím momentem.



(a) Úhel kyvadla θ_P a úhlová rychlost motoru $\dot{\theta}_M$ (b) Fázový portrét a energie kyvadla E

Obrázek 5.3: Přepínání regulátorů při vyšvihnutí kyvadla do vzpřímené polohy

Při příliš velkém vnějším zásahu kyvadlo opouští okolí vzpřímené polohy a je vyšvihnuto přes dolní polohu zpět pomocí Energy shaping regulátoru. Pokud je vnější zásah dostatečně velký, provede kyvadlo pouze jeden kyv a vrátí se do vzpřímené polohy z druhé strany. Pokud není, dokončí kyvadlo celý kmit a do vzpřímené polohy se vrátí ze stejného směru, ze kterého ji opustilo.



(a) Menší zásah

(b) Větší zásah

Obrázek 5.4: Návrat kyvadla do vzpřímené polohy po překlopení vnějším zásahem

6 Závěr

V rámci bakalářské práce jsem se zabýval atypickou konfigurací systému kyvadla s reakčním kolem využívající statický motor a řemenový převod. Nalezl jsem jeho matematický popis, porovnal ho s klasickou konfigurací systému a diskutoval vliv jednotlivých parametrů systému na jeho dynamiku. Ukazuje se, že volbou převodového poměru můžeme docílit různého chování systému. Pro převody do rychla má moment síly působící na kyvadlo stejnou orientaci jako moment síly působící na reakční kolo. Pro převody do pomala je směr působení kroutících momentů rozdílný. Při převodovém poměru 1:1 se kyvadlo nedá motorem přímo rozpohybovat, veškerá energie motoru se přenese pouze do reakčního kola.

S využitím simulací matematického modelu jsem navrhl a otestoval PD regulátor s filtrovanou derivační složkou ke stabilizaci kyvadla ve vzpřímené poloze, Energy shaping regulátor k vyšvihnutí kyvadla do okolí vzpřímené polohy a přepínání mezi těmito regulátory pomocí vhodně zvolené podmínky úhlu natočení kyvadla.

Dále jsem postavil funkční fyzický model této konfigurace a demonstroval na něm všechna navržená řízení. Stabilizace pomocí PD regulátoru fungovala dle očekávání. U Energy shaping regulátoru bylo nutné mírně zvýšit kompenzaci tření, protože dosažená odchylka od vzpřímené polohy byla vyšší než v simulaci.

Model je schopen se vyšvihnout z dolní svislé polohy do vzpřímené, pro malé zásahy se ve vzpřímené poloze udržet a pro větší zásahy se do vzpřímené polohy vyšvihnout zpět.

K řízení systému tedy lze použít stejné techniky jako v případě tradiční konfigurace. Přesunutí motoru z volného konce kyvadla na podložku zjevně přináší oproti klasické úloze jisté výhody pro řízení, zejména možnost dosažení vyšších momentů sil skrze volbu motoru a převodový poměr. Nevýhodou je pak vyšší složitost konstrukce systému.

Pro účely experimentů v mé práci je konstrukce modelu plně dostačující. Pro dlouhodobější používání bude vhodné ještě provést jisté úpravy. V mechanické části je třeba zvýšit symetrii reakčního kola, omezit mírné vyosení motoru vhodnějším připojením k jeho ose, podepřít boční osu enkodéru z obou stran a navrhnout robustnější konstrukci. V elektronické části bude žádoucí přepnout enkodér měřící úhel natočení kyvadla do absolutního módu, který nevyžaduje opakovanou kalibraci, která je bez připojení druhého motoru zbytečně komplikovaná. To bude vyžadovat použití SPI rozhraní mezi enkodérem a ODrive. Za zvážení stojí i přidání ochranných prvků např. světelné indikace zapnutí motoru či možnost vypnutí modelu i mimo počítač.

Literatura

- [1] Mark W. Spong, Peter Corke, and Rogelio Lozano. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 2001.
- [2] Daniel Jerome Block, Karl Johan Åström, and Mark W. Spong. *The Reaction Wheel Pendulum*. Synthesis Lectures on Control and Mechatronics, Princeton, NJ. Morgan & Claypool, 2007.
- [3] Gonzalo Belascuen and Nahuel Aguilar. Design, modeling and control of a reaction wheel balanced inverted pendulum. *Argencon*, 2018.
- [4] Timing belt pulley - pitch diameter and outside diameter charts. URL <https://www.pfeiferindustries.com/timing-belt-pulley-pitch-diameter-outside-diameter-charts>.
- [5] Odrive dokumentace. URL <https://docs.odriverobotics.com/v/0.5.6/index.html>.
- [6] Technické specifikace MN5212 navigator type uav multi-motor kv340. URL <https://store.tmotor.com/product/mn5212-kv340-motor-navigator-type.html>.
- [7] Datasheet AS5047D 14-bit on-axis magnetic rotary position sensor with 11-bit decimal and binary incremental pulse count. URL <https://docs.rs-online.com/7b30/A700000006921285.pdf>.
- [8] Marek Bečka. Design and implementation of an iterative learning control system for a dynamic plotter. Master's thesis, Czech technical university in Prague, 2022.
- [9] Russ Tedrake. *Underactuated Robotics: Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*. Course Notes for MIT 6.832, 2023. URL <https://underactuated.csail.mit.edu>.