ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

FAKULTA
STROJNÍ

TEZE
DISERTAČNÍ
PRÁCE

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY

TEZE DISERTAČNÍ PRÁCE

Analýza obecných tvarových ploch realizovaných polygonální sítí

Mgr. Nikola Pajerová

Doktorský studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Matematické a fyzikální inženýrství

Školitel: *doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.*

Teze disertace k získání akademického titulu "doktor", ve zkratce "Ph.D."

Praha leden 2024

Název anglicky: Analysis of freeform surfaces realised by polygonal mesh

Disertační práce byla vypracována v kombinované formě doktorského studia na Ústavu technické matematiky Fakulty strojní ČVUT v Praze.

Disertant: Mgr. Nikola Pajerová
Ústav technické matematiky, Fakulta strojní ČVUT v Praze
Karlovo nám. 13
121 35 Praha 2

Školitel: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.
Ústav technické matematiky, Fakulta strojní ČVUT v Praze
Karlovo nám. 13
121 35 Praha 2

Oponenti:

Teze byly rozeslány dne: ....

Obhajoba disertace se koná dne .... v ……… hod.

v zasedací místnosti č. 17 (v přízemí) Fakulty strojní ČVUT v Praze, Technická 4, Praha 6

před komisí pro obhajobu disertační práce ve studijním oboru <*název*>.

S disertací je možno se seznámit na oddělení vědy a výzkumu Fakulty strojní ČVUT v Praze, Technická 4, Praha 6.

<jméno>

předseda oborové rady oboru <*název*>

Fakulta strojní ČVUT v Praze

1. ÚVOD

Tato disertační práce se zabývá analýzou geometrie a podobnosti polygonálních sítí (tedy diskrétní plochy, speciálním případem pak jsou trojúhelníkové sítě, které mohou být reprezentovány například ve formátu STL), následným nalezením metody pro ověření použitelnosti zvolené metody a závěrem také jejich využití na vybraných objekt (resp. jejich sítích).

Pro analýzu trojúhelníkových sítí získaných optickým skenováním různých objektů byly využity tvarové funkce, které se v současnosti používají pro hladké plochy, na nichž se generují náhodně zvolené body a ty se poté využijí ke zpracování těmito funkcemi. Tvarová funkce je založena na základních geometrických prvcích, jako je vzdálenost, obsah, objem a další. Nově jsou v této práci mezi tyto funkce zavedeny i diskrétní Gaussova a střední křivost a jejich kombinace do hlavních křivostí. Tyto křivosti zatím nebyly v literatuře použity k porovnání trojúhelníkových sítí.

Výsledky po aplikování tvarové funkce jsou standardně prezentovány tvarovým rozdělením, což je četnostní histogram tvořený lomenou čarou namísto sloupci. K charakterizaci tvaru objektu je často využívané tvarové rozdělení, protože převádí problém podobnosti dvou polygonálních ploch v prostoru na případ rozdílu lomených čar v rovině. K určení míry podobnosti mezi dvěma polygonálními plochami se užívají pro tvarové rozdělení Minkowského normy. V [Osada2001] je využita Minkowského L_1 norma, kterou autoři označují za nejlepší pro porovnání rozdělení. Všechny podobné algoritmy jsou ale založeny na vygenerování bodů (nikoliv však soboru STL, který je reprezentantem trojúhelníkové sítě v této práci).

Pro ověření, že tvarové funkce lze použít k porovnání trojúhelníkových sítí mezi sebou byla využita modifikovaná analýza systému měření (MSA), což je experimentální a statistická metoda k určení zdroje odchylek v procesu měření a stanovení hodnoty těchto odchylek. Je několik možností, jak metod vyhodnocovat, přičemž v této práci byl využit postup opakovatelnost a reprodukovatelnosti a metoda průměrů a rozpětí, kde se využívá opakovaných měření objektu, operátorů měřících daný objekt a částí skenovaného objektu. Podle vhodné volby těchto charakteristik postupu lze stanovit, zda je například postup vhodný k porovnání skenů opakovaného skenování, nebo zda jsou kompetentní operátoři.

Nově zavedená metoda, využívající tvarové funkce včetně křivosti, však neslouží jen k porovnání podobnosti trojúhelníkových sítí nebo k odlišení různých tvarů objektů. Lze ji také využít k porovnání skenerů, stejně jako při porovnání naskenovaných plošek pánevní kosti (ze kterých se přibližně stanovuje věk jedince), nebo také například pro rozvinutí trojúhelníkové sítě do roviny.

2. SOUČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

V dnešní době se často setkáváme s počítačovým zpracováním dat, ať už se jedná o rozpoznávání obličejů, převod psaného textu do digitální verze nebo autonomní řízení. Také digitalizace povrchů či objektů vyžaduje zpracování naskenovaných dat. Metod k takovému zpracování je mnoho a závisí na požadovaných parametrech a zpracovávaných datech. Zpracovávat se mohou jak rovinné objekty, tak i prostorová data, jejichž nejčastější formát je mračno bodů (tedy pouze množina bodů). Taková data mohou být často nekompletní, na což existují různé metody dokončení nebo klasifikace. Mračno bodů získané skenováním objektu je také možné použít k vytvoření CAD modelu daného objektu (například v reverzním inženýrství, kdy skutečný model nemusí být k dispozici), například získáním základních tvarů a následnou analýzou odchylek bodů od proloženého základního tvaru pomocí histogramu.

Naskenované body mohou být také upravovány například pomocí triangulace, tedy vytváření trojúhelníkové sítě. Co se týče tvorby trojúhelníkové sítě, je několik metod. Asi nejsnadnějším typem triangulace je Delaunayova triangulace, což je tvorba trojúhelníků z množiny bodů, kdy se požadují co nejvíce rovnostranné trojúhelníky a platí, že pro tři vrcholy stěny rovinné sítě kružnice jí opsaná neobsahuje další vrchol sítě (analogicky lze převést na prostorovou síť a kulové plochy opsané čtyřstěnům).

Trojúhelníkovou síť lze potom považovat za speciální případ polygonální plochy (kterou lze definovat zase jako diskrétní plochu). Speciální pojem mezi sítěmi je potom ještě polygonální manifold. Jedná se o polygonální síť, která nemá hrany sdílené více než dvěma stěnami, a stěny sdílející vrchol tvoří jednoduchý řetězec.

Dále může být síť upravena například pomocí decimace, což je odstranění vrcholu či hrany či jiného prvku sítě s následnou retriangulací takto vzniklé díry. Takto lze vytvořit hrubší síť, například pokud počet vrcholů časově prodlužuje zpracování. Polygonové sítě (resp. mraky bodů) shodného objektu v různých polohách lze zarovnat pomocí transformace best-fit (kde jedna síť se volí jako referenční a k ní se přiřadí ostatní sítě pomocí otočení okolo 3 os a posunutí ve 3 směrech s využitím metody nejmenších čtverců na odchylky ve směru normál mezi vybranou sítí a referenční sítí).

Co se týče reprezentací trojúhelníkové sítě, může být například ve formát STL nebo PLY. STL formát je seznam, který se skládá ze souřadnic vrcholů sítě a jednotkových normálových vektorů příslušných stěn. Vrcholy trojúhelníků pro danou stěnu spolu s její normálou tvoří pravotočivou soustavu. Pro každou stěnu jde tedy o trojici vrcholů a vektor vnější normály. STL soubor může být reprezentován v ASCII nebo v binárním formátu. STL je formát pro popis 3D geometrie povrchu modelu. Používá se také pro export dat do 3D tiskáren z CAD (Computer-Aided Design) softwaru a v reverzním inženýrství. Formát PLY (Polygon File Format nebo také Stanford Triangle Format) je seznam vrcholů, stěn a dalších prvků spolu s jejich vlastnostmi, jako je barva, které lze k těmto prvkům připojit. Na rozdíl od formátu STL je tedy obecnější a šířeji využitelný. Opět je možné ho reprezentovat i v binárním formátu.

Jelikož je třeba získané trojúhelníkové sítě porovnat co se týče jejich povrchu, byla využita diskrétní diferenciální geometrie, která vychází ze spojité diferenciální geometrie. Z této diskrétní diferenciální geometrie bylo využito několik pojmů, jako Gaussova či střední křivost a hlavní křivosti. Diskrétní Gaussova křivost vrcholu V_i diskrétní plochy je určena vztahem $G = 2\pi - \sum_{\tilde{p}} \alpha_{\tilde{p}}$, kde α_p je úhel ve vrcholu V_i v trojúhelníku, který obsahuje vrchol V_i, $\tilde{p}$ je počet trojúhelníků obsahujících vrchol V_i.

Podle diskrétní Gaussovy křivosti G lze dělit body diskrétní plochy (tedy vrcholy sítě) stejně jako ve spojité verzi: eliptické body (resp. vrcholy sítě) s $G > 0$, parabolické body s $G = 0$ a hyperbolické body s $G < 0$. Diskrétní střední křivost ve vrcholu V_i je ve tvaru $H = \frac{1}{4}\sum |e_{\tilde{m}}| \cdot \beta_{\tilde{m}}$, kde $\beta_{\tilde{m}}$ jsou úhly mezi normálami sousedních stran a $|e_{\tilde{m}}|$ je velikost jejich společné hrany, $\tilde{m}$ je počet hran při vrcholu V_i.

Jelikož funkce Gaussovy a střední křivosti lze na hladké ploše spojit a určit jimi hlavní křivosti, je možné je zkombinovat do hlavních křivostí i na diskrétní ploše, a to pomocí rovnice $\kappa_{1,2} = H(B) \pm \sqrt{H(B)^2 - G(B)}$.

Dalším pojmem využitým v této práci je tvarová funkce. Tvarová funkce měří základní geometrické vlastnosti, jako je vzdálenost dvou bodů, obsah polygonu a podobně. V této práci jsou uvedeny jen některé, z již zavedených funkcí, které se dále využívají a modifikují. Obecně jsou tyto funkce používané pro body vygenerované na hladké ploše, a nikoliv pro diskrétní plochu (tedy například trojúhelníkovou síť). Konkrétně byly využity tvarové funkce z [Osada2002], které byly modifikovány například orientací. Jelikož je trojúhelníková síť diskrétní plochou, kterou tvoří body (tj. vrcholy sítě), nemusí se již pro tvarové funkce generovat body, lze brát přímo vrcholy sítě.

Speciálně mezi tvarové funkce lze řadit také křivosti. Křivost, zatím není zcela běžně zavedená funkce pro porovnávání tvarů. Z křivostí definovaných v diskrétní diferenciální geometrii byla použita diskrétní Gaussova křivost. Diskrétní Gaussovu křivost byla dále využita k zavedení nové tvarové funkce

h, která aproximuje odchylku (z metrologického hlediska) vrcholu sítě za pomocí výšky kuželu proloženého 1-okolím daného vrcholu. Rovnice pro tuto funkci tedy je $h = r \cdot \sqrt{1 - \frac{(2\pi - G)^2}{(2\pi)^2}}, i = 0,1, \dots, n.$

Pro porovnání výsledků jednotlivých tvarových funkcí se využívá tvarové rozdělení (viz např. [Osada2002]), což je četnostní histogram reprezentovaný lomenou čarou, která vznikne spojením vrcholků jednotlivých sloupců histogramu. Tvarová rozdělení graficky reprezentují danou plochu, ale není z nich přímo vidět míra podobnosti mezi jednotlivými sítěmi. Aby se dalo číselně znázornit, jak moc si daná dvojice sítí odpovídá (resp. podobá), využívá se Minkowského L_1 norma. Ve spojité verzi vychází z obsahu mezi dvěma grafy, ale jelikož se využívá pro tvarovou funkci, která pracuje s množinou bodů, byla využita diskrétní verze, která počítá součet rozdílů v jednotlivých sloupcích histogramu.

Dalším využitým postupem v této práci z oboru metrologie byla Analýza systému měření (MSA), což je experimentální statistická metoda, založená na různých typech statistických charakteristik a využívá se například k hodnocení opakovatelnost či reprodukovatelnost. Opakovatelnost je podobnost výsledků za stejných podmínek (tj. při měření stejného objektu stejným operátorem i přístrojem). Reprodukovatelnost naproti tomu je podobnost výsledků při měření stejného objektu jedním měřidlem za stejných podmínek, ale více operátory. MSA se používá pro hodnocení měřidla, ale i celého systému měření, kde analyzuje zdroje nejistot (tedy jaké faktory mají v procesu měření vliv na proměnlivost výsledků) s cílem zlepšit přesnost celého systému měření. Jeden možný výstup z této metody je regulační diagram, který ukazuje například, zda jsou operátoři kompetentní k porovnávání trojúhelníkových sítí získaných skenováním daného objektu.

3. REŠERŠE PROBLEMATIKY

Data získaná skenováním objektu je možné porovnávat, k čemuž se využívají například již zmíněné tvarové funkce (někde nazývané též tvarový popisovač (*shape descriptor*)) a tvarová rozdělení. Tvarová rozdělení pak mohou být porovnávána různými metodami, jako například Minkowského L_N normou, která pro případ $N = 1$ a pro dvě spojité funkce určí obsah plochy mezi jejich grafy. Porovnáním různých tvarových funkcí i tvarových rozdělení se zabývají autoři v [Osada2002]. Také zde porovnávají jednotlivé funkce – funkce $D1$ popisují jako citlivou na hrbolky na ploše, stejně tak i na posuny těžiště objektu, dále popisují, že rozmanitost uvnitř tříd funkcí $D3$ a

$D4$ je menší než u jiných funkcí. Funkci $D2$ pak autoři definují jako stabilní a s dobrou rozlišovací schopností, tedy dobrý klasifikátor objektů. Tuto funkci $D2$, která měří vzdálenost mezi dvěma body plochy, využívají také autoři v [Yu2002], stejně tak jako tvarové rozdělení a Minkowského L_N normu (resp. pravděpodobnostní hustotní funkci L_1 normy, kterou považují za nejpřesnější). Z tvarových funkcí a tvarového rozdělení z [Osada2002] také vychází [Yu2011], kde přidávají ještě tvarový popisovač založený na rotaci. Funkce $D2$ dokáže reprezentovat tvar objektu a následným porovnáním grafů jejího tvarového rozdělení lze pak vidět i rozdílnost v objektech, [Osada2001]. Na tento článek navazují v [Monteverde2007], kde vychází z funkce $D2$ a místo dvojic vrcholů berou dvojice stěn a počítají podíl obsahu menší stěny ku větší stěně z každé dvojice. Z funkce $D2$ vychází také [Ohbuchi2005], kde ji upravují pomocí úhlu, metody pak nazývají histogram vzájemné úhlové vzdálenosti (*mutual Angle-Distance histogram*) a histogram vzájemné absolutní úhlové vzdálenosti (*mutual Absolute-Angle Distance histogram*). K určení podobnosti ještě výsledky porovnávají pomocí L_1 a L_2 norem. Také [Vandeborre2002] navazuje na [Osada2001] a využívá ještě například hodnotu křivosti, která se tu počítá pomocí funkce tangens a hlavních křivostí, a histogram těchto křivostí, který nazývají spektrum křivosti. V [Monteverde2007] používají pro tvarovou funkci $D2$ k porovnání histogramů L_1 Manhattanskou vzdálenost. V [Yu2002] autoři používají funkci $D2$ a histogramy pro porovnání ploch spolu s modifikovanou L_1 normou. Jinou tvarovou funkci, která měří úhel dvou úseček spojujících bod plochy s těžištěm, a geodetickou vzdálenost používají autoři v [Laga2019].

Mračno bodů (které je například výstupem ze skenerů a může se dále zpracovávat různými softwary na příklad do trojúhelníkové sítě) může být také využito k rekonstrukci geometrie, nicméně z pouhých souřadnic bodů není patrný povrch objektu. Proto je lépe využitelný formát STL (analýzou tohoto formátu se zabývají například v [Szilvsi2003], kde také uvádějí tři různé aproximace Gaussovy křivosti pro vrchol), ze které samozřejmě lze extrahovat pouze samotné mračno bodů. Tento formát je výhodný, protože definuje okolí daného vrcholu sítě, a tedy je možné použít například diskrétní křivosti k lokální definici tvaru. Diskrétní Gaussovu i střední křivost definují například v [Laga2019] s pomocí úhlů, délek a obsahů. Tyto křivosti lze využít k výpočtu hlavních křivostí, ty jsou zde také definovány. Další varianty pro výpočet diskrétní Gaussovy a střední křivosti ve vrcholu uvádějí v [Gatzke2006], kde opět používají obsahy, délky a úhly, a také popisují 1-, 2- a 3-okolí vrcholu. Stejně tak i v [Song2003] je pro výpočet diskrétní

Gaussovy a střední křivosti ve vrcholu použit úhel ve vrcholu a obsah trojúhelníku a délka hrany a úhel mezi normálovými vektory ve vrcholu. Míru diskrétní Gaussovy a střední křivosti definují v [Steiner2003] jako součet jednotlivých křivostí ve vrcholech či hranách. Diskrétní Gaussovu křivost vycházející z úhlového deficitu definují v [Mesmoudi2010] a normují ji obsahem okolí daného vrcholu. Dále pak zavádí koncentrovanou Gaussovu křivost ve vrcholu, podle toho, zda je vrchol vnitřní nebo na hranici trojúhelníkové sítě. Střední křivost pak zavádí pomocí válcových aproximací každé hrany, přičemž se opět využívá obsahu oblasti, délky hrany a úhlu mezi normálami při dané hraně. Pomocí koncentrované křivosti polygonální křivky pak určují hlavní křivosti. Další možný přístup k diskrétní Gaussově a střední křivosti může být přes podíl obsahů stěn, [Jimenez2020]. Naopak v [Xu2022] je diskrétní Gaussova křivost v běžném užívaném tvaru, který je využit i v této práci. Porovnáním některých zmíněných rovnic s dalšími typy se potom zabývají v [Xu2009]. Pomocí křivosti se ale také dá určit rozvinutelnost diskrétní plochy, která závisí na defektu úhlu, [Stein2018].

Metrologické specifikace profilu povrchu a další charakteristiky chyb je možné najít v [ISO], kde je chyba tvaru (*form error*) definována jako maximální mínus minimální odchylka bodů od proloženého profilu. Dalšími vlivy a popisem chyb se zabývají autoři v [Mendricky2018].

Porovnání přesností skenerů se řeší různými způsoby, avšak tvarové funkce se pro porovnání skenerů nepoužívají nikde. Například v [Tsuchida2023] je porovnáno pět ručních skenerů na třech různých sádrových sochách hlav, které jsou skenovány šestkrát. Rozebírá se tu jak čas pro skenování a zpracování, tak i přesnost. V [Kustrzycka2020] je porovnána zase přesnost 3D obrazů mezi různými skenery, či skenovacími technikami, ale přesné porovnání skenerů se tu neuvádí. V [Barbero2011] se porovnávají různé typy skenerů – tři laserové, pruhová projekce a počítačová tomografie. Ke stanovení přesnosti skenerů používají oskenovanou kalibrační kouli, válec a koncovou měrku, dále potom skenují kost a součástku z automobilu pro stanovení kvality digitalizace. Optický a laserový skener potom porovnávají autoři v [Tóth2014], kde navrhli speciální objekt, který skenují a pomocí něj porovnávají skenovací systémy.

Co se týče verzí jednotlivých rovnic diskrétní Gaussovy i střední křivosti, je několik verzí. Diskrétní střední křivost ve vrcholu, velice podobnou rovnici použité v této práci, uvádějí také v [Gatzke2006], kde ji nazývají absolutní střední křivost. Jde o rovnici v tomto tvaru: $H = \frac{1}{4} \sum \frac{|e_j| \cdot \gamma_j}{\tilde{O}_i}$, kde γ_j je úhel mezi sousedícími stěnami a $|e_j|$ je délka jejich společné hrany, $\tilde{O}_j$ obsah oblasti příslušející k danému vrcholu.

Naopak ve [Vidličková2014] je střední křivost hrany diskrétní plochy definována rovnicí $H(e) = \frac{1}{2}\gamma_e$, kde γ_e je úhel mezi normálami sousedících stěn se společnou hranou e. Gaussova křivost je tu zavedena s dělením obsahu Voronoiovy buňky ve formě: $G = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i}{A(Vor)_e}$, kde α_i je úhel ve vrcholu V_i jako výše v rovnici (10), $\tilde{n}$ značí počet stěn obsahujících daný vrchol a $A(Vor)_e$ je obsah Voronoiovy buňky vrcholu V_i. Voronoiova buňka je oblast při vrcholu V_i, která je vzniklá Voronoiovou teselací, tedy rozdělením každé stěny trojúhelníkové sítě pomocí středu kružnice opsané dané stěně a z něj vycházejících kolmic ke všem třem hranám stěny.

Podobnou rovnici zmiňují také autoři v [Meek2000], kde je ve tvaru $G = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\tilde{n}} O_i}$, kde O_i označuje obsah stěny přilehlé k vrcholu V_i.

V [Bobenko2020] je vyjádření diskrétní střední křivosti uzavřené mnohostěnné plochy na hraně e ve tvaru $H(e) = \frac{1}{2}\beta_e|e_j|$, kde $|e_j|$ je délka hrany e a β_e je orientovaný úhel mezi normálami přilehlých stěn k hraně e (úhel je kladný pro konvexní případ a jinak záporný).

V [Sullivan2008] je jiný tvar diskrétní střední křivosti ve vrcholu V a to $H = \frac{1}{2}\sum_i(\operatorname{cotg}\alpha_i + \operatorname{cotg}\beta_i)(V - V_i)$, kde α_i a β_i jsou úhly proti straně VV_i ve dvou přilehlých trojúhelníkových stěnách a V_i je sousední vrchol k vrcholu V.

V [Jahn2009] definují Gaussovu a střední křivost pro vrchol jako $G = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \alpha_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\tilde{m}} O_i}$ a $H = \frac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\tilde{m}} \|e_i\|\beta_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\tilde{m}} O_i}$, kde okolní stěny vrcholu označují f_i, obsah plošek O_i, okolní hrany e_i a úhel mezi stěnami pro tuto hranu jako β_i, úhly svírané normálovými vektory plošek f_i *a* f_{i+1} jako β_i. Zde také popisují výpočet hlavních křivostí $\kappa_{1,2}$, který odpovídá rovnici využité v této práci.

Také v [Mátyási2003] jsou tři možné aproximace Gaussovy křivosti ve vrcholu. První má tvar $G = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \alpha_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\hat{n}} O_i}$ (kde O_i je obsah stěny při tomto vrcholu), druhá je ve tvaru rovnice využité v této práci a třetí je ve tvaru $G = \frac{(2\pi - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \alpha_i)\sum_{i=1}^{\hat{n}} O_i}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\hat{n}} A_i - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{\hat{n}} \mathrm{cotg}\alpha_i l_i}$ (kde l_i je délka hrany i-té stěny proti danému vrcholu).

2. CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE

Cílem této práce je nalezení metody pro analýzu geometrických vlastností polygonálních sítí (tedy diskrétních ploch) a metody pro analýzu vzájemné podobnosti těchto sítí. Jelikož byla data získána optickým skenování různých typů objektů, jde o metrologický proces. Pro porovnání polygonálních sítí či definici tvaru skenovaného objektu z těchto sítí není zatím z metrologického hlediska zavedený žádný postup.

S nalezením metody také souvisí další cíl, kterým je výběr vhodné verifikační metody, která by potvrdila funkčnost dané metody pro analýzu geometrie sítí. Ta byla proto vybírána právě z metrologických postupů.

Závěrečný cíl je potom aplikace vybraných metod na vhodně zvolených plochách a ověření platnosti metody pro tyto plochy. Zvolené plochy byly vybrány z kalibračních objektů jako zástupci základních tvarů, obecné tvarové plochy jsou potom reprezentovány nově zavedeným freeform standardem a volně dostupným modelem.

3. NAVRŽENÉ METODY

Jak bylo již zmíněno, bylo řešení problému hledáno v oblasti diskrétní diferenciální geometrie. Dále, jelikož lze spojité plochy brát jako limitní případy diskrétních ploch, u nichž se počet vrcholů blíží nekonečnu (resp. velikost stěn polygonální sítě jde k nule), byly využity také některé postupy již zavedené na spojitých plochách, zejména pokud se na nich generují body, se kterými se poté při analýze pracuje.

Jelikož každá trojúhelníková síť získaná optickým skenováním různých daného objektu obsahuje jiný počet bodů, výsledky je třeba normalizovat počtem vstupních hodnot. Dále v závislosti na volbě využité tvarové funkce potom lze ve využitých tvarových rozděleních vidět například velikost zpracovávaného objektu apod.

Nově mezi tvarové funkce byly v této práci zařazeny i diskrétní křivosti, konkrétně diskrétní Gaussova křivost a diskrétní střední křivost. Jedná se o ekvivalenty křivostí na spojité ploše, které jsou aplikovatelné pro diskrétní plochy. Jelikož v různé literatuře lze najít různé verze těchto rovnic (jak bylo popsáno výše), byly vybrány rovnice, jejichž výsledky pro vrchol sítě typu rovina jsou nulové. Obecné křivosti dokáží popsat povrch plochy detailněji než stávající tvarové funkce měřící například vzdálenosti, ale ještě lépe vystihuje tvar sítě v okolí daného vrcholu jejich kombinace. Proto v této práci byla využita jejich kombinace do hlavních křivostí k porovnání trojúhelníkových sítí, což je nový přístup. Opět platí, že hlavní křivosti dokáží lépe popsat povrch objektu než základní tvarové funkce, navíc jde o dvě hodnoty přiřazené jednomu vrcholu sítě. Aby bylo možné porovnat výsledky pro každou síť, byla nově pro hodnoty této funkce využita metoda porovnání pomocí tvarové funkce $D1_O$. Dále byla vytvořena nová tvarová funkce, počítající výšku aproximační kuželové plochy proložené 1-okolím vrcholu sítě.

Co se týče porovnání podobnosti mezi sítěmi, byla vybrána metoda založená na Minkowského L_1 normě. Tato norma v diskrétní verzi (jak již bylo zmíněno) počítá rozdíl mezi hodnotami v dané třídě například tvarového rozdělení a dané tvarové funkce. Je tedy takto možné určit, jak moc se celkově odlišují dva výsledky, tedy například dvě trojúhelníkové sítě zpracované pomocí vybrané tvarové funkce. Tedy čím větší hodnota normy vyjde, tím odlišnější dané dvě sítě jsou.

Pro ověření funkčnosti a správnosti postupu analýzy a porovnání polygonálních sítí byla využita modifikace metody MSA, která se nyní používá v metrologii pro nalezení chyby v systému měření (tedy zjištění toho. zda byla například špatně zvolená metoda měření, nebo zda byla chyba v operátorovi apod.). Tato metoda má mnoho částí, viz [MSA], ale vzhledem k tomu, že je zapotřebí ověřit správnost postupu porovnání podobností sítí získaných skenováním stejného objektu, byla využita část o opakovatelnosti a reprodukovatelnosti. Jak již bylo zmíněno, má několik možností vyhodnocení, přičemž v této práci byla vybrána metoda průměru a rozpětí. Mimo jiné může být výhodou metody rozpětí a průměru regulační diagram, který je výstupem a shrnuje přehledně vhodnost či nevhodnost daného postupu či operátora, jinými slovy zvládnutost procesu měření.

Postup této metody hodnocení výsledků byl popsán výše a je založen na opakování skenování, částech skenovaného objektu a operátorech, kteří daný objekt měří či skenují. Metoda se modifikovala na případ porovnání trojúhelníkových sítí zpracovaných tvarovými funkcemi. Tedy vhodným zvolením operátora, opakování či části (například tvarová funkce jako operátor), dále také zvolením vstupních hodnot jako výsledků Minkowského

L_1 norem daných tvarových funkcí (neboť ty právě určují podobnost mezi dvojicemi trojúhelníkových sítí). Výstupem je potom již zmíněný regulační diagram, ze kterého lze odečíst, zda například daná tvarová funkce jako operátor je vhodná k porovnání zvolených trojúhelníkových sítí.

4. PRAKTICKÉ APLIKACE METODY

Jako základní geometrické objekty pro porovnání tvarů a podobnosti sítí byly vybrány kalibrační artefakty: ball-bar, kalibrační koule, kroužek a koncová měrka. Jako obecné tvarové plochy byly zvoleny ČVUT etalon obecného tvaru Faraon a Stanfordský zajíček. Veškeré výpočty byly zpracovány v programu Matlab, přičemž byla také využita struktura vstupního formátu STL při výpočtech křivostí.

V první fázi byly zpracovány skeny kalibračního artefaktu zvaného ball-bar, na kterém se standardně zjišťuje průměr obou koulí a vzdálenost tečných rovin mezi nimi. Pro zpracování těchto dat bylo nutné odstranění nevhodných částí. Pro zpracování byla využita modifikovaná tvarová funkce $D1$ ve tvaru $D1_{ori} = \operatorname{sign}(x_i)\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2 + {z_i}^2}, i = 0,1,\dots,n$, kde vrcholem sítě je $V_i = [x_i, y_i, z_i]$ a n je počet vrcholů dané sítě. Aby se daly sítě porovnávat, ačkoliv mají různý počet vrcholů, byly výsledky tvarové funkce normovány na počet vrcholů dané sítě. Následně bylo využito tvarové rozdělení pro reprezentaci hodnot a odstranění 5 % extrémních hodnot. Dále byla využita Minkowského L_1 norma pro porovnání těchto relativních četností. Dále byla využita modifikovaná tvarová funkce $D2$, tedy ve tvaru $D2_{ori} = \operatorname{sign}(x_S)\|\boldsymbol{b}_i\|, i = 1,\dots,q$, kde q je počet všech dvojic vrcholů sítě (bez opakování) a $\|\boldsymbol{b}_i\|$ je velikost vektoru určeného vrcholy V_i a W_i z množiny dvojic a $S = [x_S, y_S, z_S]$ je střed úsečky V_iW_i. Opět bylo využito tvarového rozdělení a Minkowského L_1 normy pro porovnání dvojic tvarových rozdělení. Následně byly získány další dvě sady skenů ball-baru, na které byly aplikovány již zmíněné tvarové funkce a samozřejmě také Minkowského L_1 norma. Následně byla využita metoda MSA pro posouzení kompetentnosti zvolených tvarových funkcí k porovnávání skenů (protože pouze pro pět sítí by nebyly výsledky dostačující). Vstupní data do MSA byly výsledky zmíněných L_1 norem. Z výsledného diagramu vyplynulo, že obě funkce jsou kompetentní k porovnávání sítí, neboť obě funkce leží mezi vypočtenými mezemi.

Aby bylo vidět, že tvarové funkce fungují i na jiných artefaktech, byla porovnána část ball-baru, kroužku a koncové měrky, ze kterých byly využity jen části. Tyto tři objekty jsou standardní etalony užívané ke kalibraci skeneru. Opět zde byla využita tvarová funkce $D2$, nyní již počítající vzdálenost mezi dvojicemi vrcholů bez orientace, funkce $D3$ měřící odmocninu z obsahu trojúhelníku, kde jeden vrchol byl volen v těžišti sítě a jako poslední potom nová funkce G měřící diskrétní Gaussovu křivost (již byla zmíněna). Také zde byla spočtena tvarová rozdělení a výsledky byly porovnány metodou MSA. Při porovnání všech grafů všech tří objektů pro tvarové rozdělení funkce $D2$ byla patrná odlišnost tvar jednotlivých objektů, tedy i schopnost funkce rozlišit mezi tvary. Z tvarové funkce G byla odlišnost méně patrná, ale vrcholky grafů naznačovali charakteristiku křivosti plochy. Následně pro ověření faktu, že je možné užít tyto tvarové funkce pro porovnání podobnosti mezi sítěmi byla využita metoda MSA, z jehož regulačního diagramu bylo patrné, že všechny funkce jsou vhodné k porovnávání podobnosti sítí. Navíc funkce G měla hodnoty celkově nejblíže centrální přímce, což znamená, že tato funkce je nejlepší pro zpracování těchto dat.

Jako další byly využity nové skeny kalibrační koule získané optickým skenováním pomocí tří různých typů skenerů (CMM, měřicí rameno a ruční skener). Byla využita opět funkce $D1$, ale tak, aby definovala odchylku tvaru plochy. Vzhledem k tomu, že sítě byly zarovnány středem proložené koule (metodou nejmenších čtverců) do počátku, byla tato funkce modifikována ve tvaru $d = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2 + {z_i}^2} - r, i = 0,1, \dots, n$, kde r je kalibrovaný poloměr koule. Následně byla pro porovnání využita také přímo tvarová funkce $D1_C$ ve tvaru $D1_C = \sqrt{(x_i - C_x)^2 + (y_i - C_y)^2 + (z_i - C_z)^2}, i = 0,1, \dots, n$, kde těžiště sítě je $C_i = [C_x, C_y, C_z]$. Dále byla použita diskrétní Gaussova křivost pro tvorbu nové funkce h, počítající výšku proloženého kuželu 1-okolím daného vrcholu. Druhý typ křivosti, který byl využit byla diskrétní střední křivost vrcholu H. Opět bylo odstraněno 5 % extrémních hodnot a tyto výsledky byly zpracovány do tvarových rozdělení. Metodou MSA bylo opět ověřeno, zda funkce h, H a $D1_C$ jsou kompetentní. Nyní byly vybrány pro porovnání pomocí tvarových funkcí skenery, a ne jednotlivé skeny. Výsledek tedy vypovídá o možnosti porovnávat těmito funkcemi skenery.

Aby bylo možné ukázat, že vybrané tvarové funkce fungují (resp. dokáží rozlišit tvar) i na trojúhelníkových sítích z obecných tvarových ploch, byl využit již zmíněný model Stanfordského zajíčka a model obecné tvarové plochy ČVUT etalon obecného tvaru Faraon (vzhledem k objemu dat a symetrii této plochy byla využita pro zpracování jen část sítě). Bylo provedeno porovnání pomocí diskrétní Gaussovy křivosti z rovnice na všech typech využitých objektů (tj. část koncové měrky, kroužku a koule, dále Stanfordského zajíčka a Faraona). Z porovnání bylo patrné, že tato funkce dokáže odlišit základní geometrická tělesa mezi sebou i mezi obecnými tvarovými tělesy. Dále bylo vypracováno tvarové rozdělení diskrétní střední křivosti pro tyto objekty. Závěrem bylo, že tyto nové tvarové funkce umí dobře rozeznávat mezi tvary, lze s nimi také porovnávat skeny mezi sebou a dokáží popsat povrch sítě, což dosud zavedené tvarové funkce neumějí.

Jako další byly využity trojúhelníkové sítě kalibrační koule a Faraona získané z již zmíněných tří skenerů, na něž byly aplikovány tvarové funkce H, $D1_C$ a h (navíc ještě pro porovnání i funkce d na sítích koule). Dále byla využita Minkowského L_1 norma při porovnání skenerů pro tvarovou funkci H, protože tato funkce popisuje tvar povrchu. Naopak pro odchylku d, funkci $D1_C$ a h byla použita metoda rozpětí. Z výsledků vyplynulo, že funkce dokáží stanovit stejné pořadí skenerů, jako funkce d, respektive jako je pořadí stanovené specifikacemi.

Kalibrované koule skenované třemi různými skenery byly využity i pro novou metodu porovnání podobností sítí pomocí hlavních křivostí. Kombinací již ověřených funkcí G a H lze získat hlavní křivosti, které tvoří pro každý vrchol sítě dvojici hodnot. Pro zpracování výsledků byla využita nová metoda porovnání. Aby bylo možné zobrazit a porovnat tyto hodnoty mezi sítěmi a skenery, byly hodnoty hlavních křivostí transformovány do souřadnic bodů v rovině (menší hlavní křivost daného vrcholu sítě představuje *x*-ovou souřadnici bodu v novém grafu a větší hlavní křivost jeho *y*-ovou souřadnici). Aby bylo možné tyto množiny bodů porovnávat, byla využita tvarová funkce $D1$ měřící vzdálenosti těchto bodů od počátku. Následně bylo ještě odstraněno 5 % extrémních hodnot a spočteny Minkowského L_1 normy, jejichž suma byla využita k porovnání skenerů. Aby bylo možné provést tyto kroky i pro libovolnou obecnou plochu, byla využita již zmíněná část sítě Faraona z předchozí kapitoly jako reprezentant obecné tvarové plochy. Výsledky pro obě plochy daly odpovídající pořadí skenerů dle jejich specifikací. Závěrem tedy bylo možné říci, že skenery lze touto metodou dobře porovnat i na obecné ploše, ale pro přesnější poměr mezi jejich pořadími (které by odpovídalo poměrům podle specifikací) se v tomto zpracování nehodí.

Dále byla metoda využita na analýzu trojúhelníkové sítě ze skenování plošky pánevní kosti zvané pubická symfýza. Pro zpracování byly využity trojúhelníkové sítě z optického skenování věky jedinců o věcích 25, 30, 40, 52, 62, 74 a 80. Aplikovaly se na trojúhelníkových sítích symfýz hlavní křivosti, následně se zpracovaly pomocí funkce $D1$ a odstranilo se 5 % extrémních hodnot. Bylo patrné, že nejvýraznější hodnoty jsou pro sítě symfýz 25leté a 80leté ženy, tedy fakt, že jsou sítě nejvíce členité. Naopak nejmenší rozpětí je pro věky 40, 52 a 74 let, což zase ukazuje na „vyhlazenost" sítě (tedy fakt, že na těchto symfýzách není tolik důlků či vrcholků).

Co se týče diskrétních křivostí, existuje mnoho možností, kde je využít. Jednou z nich může být rozvinutí diskrétní plochy. Jako další výzkum související s touto prací by bylo možné posoudit vliv jednotlivých kombinací předpisů diskrétní Gaussovy a střední křivosti pro hodnocení typů vrcholů. Další možnou aplikací křivostí může být kompletace střepů z archeologických nálezů. Každý střep má totiž okraje, ve kterých se zlomil, specificky křivé, ale stejně tak má podél této hranice lomu určitou křivost povrchu. Také by bylo možné využít křivosti pro vypracování nové metody zarovnání ploch (tedy postupu podobného best-fitu).

5. ZÁVĚR

Tato práce byla zaměřena na posouzení vlastností a podobností trojúhelníkových sítí z analýzy jejich geometrických vlastností. Byly využity modifikace již zavedených tvarových funkcí počítajících například vzdálenosti bodů či obsahy trojúhelníků pro body generované na hladké ploše. Tyto modifikace tvarových funkcí na diskrétní plochy byly porovnány s novými tvarovými funkcemi založenými na diskrétních křivostech nebo výšce aproximační kuželové plochy proložené 1-okolím vrcholu sítě. Výsledky těchto funkcí byly zpracovány pomocí tvarových rozdělení a Minkowského L_1 normy. Tyto modifikované metody byly aplikovány na trojúhelníkové sítě získané optickým skenováním základních geometrických objektů (vybrána byla koule, válec a rovina) i obecných tvarových ploch (jako reprezentanti byly zvoleni Stanfordský zajíček a ČVUT etalon obecného tvaru Faraon). Na výsledcích byl patrný rozdíl mezi tvary různých objektů stejně jako podobnost sítí, které byly získány skenováním shodného objektu.

Aby bylo dokázáno, že nové tvarové funkce lze použít k porovnávání trojúhelníkových sítí, byla aplikována modifikovaná metoda MSA. Ukázalo se, že funkce lze využít, jak k porovnávání sítí mezi sebou (tedy jejich podobnosti či odlišnosti), tak i k porovnání skenerů.

Nově vytvořené funkce také dokázaly určit stejné pořadí skenerů, jako běžná metrologická metoda využívající odchylky od kalibrované hodnoty. Aby bylo dokázáno, že metoda funguje také pro obecné tvary, byl využit model Faraona. Na tomto modelu funkce ukázaly naprosto stejné pořadí skenerů, jako na modelu koule.

Tato nová metoda se však nemusí omezovat pouze na určování podobnosti skenerů či trojúhelníkových sítí, ale lze ji také využít k analýze povrchu plošky na pánevní kosti, pomocí které se stanovuje přibližný věk zemřelého jedince. Stejně tak ji lze využít i při rozvinutí sítě do roviny či analýze archeologických střepů. Tyto problémy jsou ale ponechány na budoucí výzkum.

Publikace související s tématem disertace

[Pajerová2018] Pajerová, N.; Linkeová, I.: Applications of shape distributions to compare triangular meshes, In: Proceedings of 17th Conference on Applied Mathematics - Aplimat 2018. Bratislava: Slovak University of Technology, 2018. p. 795-803. ISBN 978-80-227-4765-3

[PajerováG2018] Pajerová, N.; Linkeová, I.: Shape distribution approach to measure similarity of triangular meshes, G - Slovenský časopis pre geometriu a grafiku. 2018, 15(30), 43-50. ISSN 1336-524X

[Pajerová2019] Pajerová, N.; Linkeová, I.: Similarity of Triangular Meshes Measurment, In: 18th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2019 PROCEEDINGS. Bratislava: Slovak University of Technology, 2019. p. 888-895. ISBN 978-80-227-4884-1

[Pajerová2021] Pajerová, N.; Linkeová, I.: Triangular mesh analysis with application on hip bone, In: PANM 20 Programs and Algorithms of Numerical Mathematics. Praha: Matematický ústav AV ČR, v. v. i., 2021. p. 79-88. ISBN 978-80-85823-71-4

[Pajerová2022] Pajerová, N.: Comparison of Triangular Meshes Using Shape Functions and MSA, In: Proceedings of the 13th International Conference on Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR 2021). Basel: Springer Nature Switzerland AG, 2022. p. 237-248. ISSN 2367-3370. ISBN 978-3-030-96301-9

[Macek2023] Macek, K.; Pajerová, N.; Čapek, N.: Probability Distribution as an Input to Machine Learning Tasks, In: Proceedings of the 25th International Conference on Enterprise Information

Systems. Setùbal: SciTePress, 2023. p. 123-129. ISSN 2184-4992. ISBN 978-989-758-648-4

(Pajerová, N., Koptiš, M.: Shape functions to scanners comparison, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology)

Seznam použité literatury

[Barbero2011] Barbero, B.R., Ureta, E.S.: Comparative study of different digitization techniques and their accuracy, Computer-Aided Design, 2011

[Bobenko2020] A. I. Bobenko: Geometry II - Discrete Differential Geometry, Preliminary version for the summer semester 2020, Technische Universität Berlin - Institut für Mathematik

[Gatzke2006] Gatzke, Timothy D. and Grimm, Cindy M.: Estimating curvature on triangular meshes, International journal of shape modeling, vol. 12, no. 1, 2006, str. 1-28

[ISO] ISO 10360-8, Geometrical product specifications (GPS) — Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) — Part 8: CMMs with optical distance sensors, section 6.2.4.1 Probing form error

[Jahn2009] Z. Jahn: Převod trojúhelníkových polygonálních 3D sítí na 3D spline plochy, Praha, 2009, FIT VUT v Brně

[Jimenez2020] Jimenez, M.R., Müller, Ch., Pottmann, H.: Discretizations of surfaces with constant ratio of principal curvatures, Discrete & Computational Geometry, vol. 63, no. 3, str. 670-704, 2020, Springer

[Kustrzycka2020] Kustrzycka, D. et al.: Comparison of the accuracy of 3D images obtained fromdifferent types of scanners: a systematic review, Journal of healthcare engineering, 2020

[Laga2019] Laga H., Guo Y., Tabia H., Fisher R. B., Bennamoun M.: 3D shape analysis fundamentals, theory, and applications. John Wiley & Sons Inc. , Hoboken, USA, 2019, ISBN: 978-1-119-40510-8

[Mátyási2003] Mátyási Gy., Szilvśi-Nagy M.: Analysis of STL files. In: Mathematical and Computer Modelling, vol. 38, no. 7-9, 2003, str. 945–960

[Meek2000] Meek D.S., Walton D.J.: On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface, Computer Aided Geometric Design, vol. 17, no. 6, 2000, str. 521-543, ISSN 0167-8396, https://doi.org/10.1016/S0167-8396(00)00006-6

[Mendricky2018] Mendricky, R.: Aspects affecting accuracy of optical 3d digitization, MM Science Journal, 2018

[Mesmoudi2010] Mesmoudi, M.M., De Floriani, L., Magillo, P.: Discrete curvature estimation methods for triangulated surfaces, International workshop on applications of discrete geometry and mathematical morphology, str. 28-42, 2010, Springer

[Monteverde2007] Monteverde L.C., Ruiz C.R., Huang Z.: A Shape Distribution for Comparing 3D Models. In: Advances in Multimedia Modeling. MMM 2007. Lecture Notes in Computer Science, vol 4351, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007

[Ohbuchi2005] Ohbuchi, R., Minamitani, T., Takei, T.: Shape-similarity search of 3D models by using enhanced shape functions, International Journal of Computer Applications in Technology, vol. 23, no. 2-4, str. 70--85, 2005, Inderscience Publishers

[Osada2001] Osada, R., Fankhouser, T., Chazelle, B., Dobkin, D.: Matching 3D Models with Shape Distributions. In: Proceedings International Conference on Shape Modelling and Applications, Genova, 2001, ISBN 0-7695-0853-7

[Osada2002] Osada, R., Fankhouser, T., Chazelle, B., Dobkin, D.: Shape distributions, ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 21, no. 4, Acm New York, NY, USA, 2002, str. 807-832

[Song2003] Song, J.-J., Golshani, F.: Shape-based 3D model retrieval, Proceedings. 15th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, str.636-640, 2003, IEEE

[Stein2018] Stein, O., Grinspun, E., Crane, K.: Developable Surface Flow, ACM Trans. Graph., vol. 37, no. 4, 2018, ACM, New York, NY, USA

[Steiner2003] Cohen-Steiner, D., Morvan, J.-M.: Restricted delaunay triangulations and normal cycle, Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry, str. 312-321, 2003

[Sullivan2008] Sullivan, J.M.: Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces, Springer, In: Bobenko, A.I., Sullivan, J.M., Schröder, P., Ziegler, G.M. (eds): Discrete Differential Geometry, Oberwolfach Seminars, vol 38, Birkhäuser Basel, 2008, str. 175-188, https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8621-4_9

[Szilvsi2003] Szilvsi-Nagy, M., Matyasi, G.Y.: Analysis of STL files, Mathematical and computer modelling, vol. 38, no. 7-9, str. 945-960, 2003, Elsevier

[Tóth2014] Tóth, T., Živčák, J.: A comparison of the outputs of 3D scanners, Procedia Engineering, 2014

[Tsuchida2023] Tsuchida, Y. et al.: Comparison of the accuracy of different handheld-type scanners in three-dimensional facial image recognition, Journal of Prosthodontic Research, 2023

[Vandeborre2002] Vandeborre, J.-P., Couillet, V., Daoudi, M.: A practical approach for 3D model indexing by combining local and global invariants, Proceedings. First International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission, str. 644--647, 2002, IEEE

[Vidličková2014] E. Vidličková: Discrete differential geometry and its applications, Mathematical Institute of Charles University, Prague, 2014

[Xu2022] Xu, X., Zheng, C.: Prescribing discrete Gaussian curvature on polyhedral surfaces, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2022

[Xu2009] Xu, Z., Xu, G.: Discrete schemes for Gaussian curvature and their convergence, Computers & Mathematics with Applications, 2009

[Yu2002] Yu I.C., Lapadat, D., Sieger, L., Regli, W.C.: Using shape distributions to compare solid models. In: Proceedings of the seventh ACM symposium on Solid modelling and applications (SMA '02). ACM, New York, USA, 2002, str. 273-280

[Yu2011] Yu, F., Lu, Z., Luo, H., Wang, P.: Three-dimensional model analysis and processing, 2011, Springer Science & Business Media

Anotace

V této disertační práci je vyvinuta metoda analýzy geometrických vlastností trojúhelníkových sítí a jejich porovnání. Pro analýzu byl zvolen přístup založený na tvarovém rozdělení a tvarových funkcích. Tvarové rozdělení je četnostní histogram ve tvaru lomené čáry. Tvarové funkce měří základní geometrické charakteristiky (jako je vzdálenost, úhel či obsah) a v současnosti se používají pouze na spojitých plochách, kde se generují body a ty se poté zpracovávají pomocí tvarových funkcí. Dále byly v této práci mezi tvarové funkce nově zařazeny diskrétní Gaussova a střední křivost. Pro porovnání podobnosti mezi jednotlivými trojúhelníkovými sítěmi byla pro výstupy z tvarových funkcí využita Minkowského L_1 norma. Následně bylo pomocí modifikované metody MSA (analýza systému měření) ověřeno, že lze všechny zvolené tvarové funkce využít i k porovnání trojúhelníkových sítí mezi sebou. Pro analýzu byly využity trojúhelníkové sítě ve formátu STL (stereolitografie) získané optickým skenováním základních geometrických tvarů (koule, válce a roviny) a jako reprezentanti obecných tvarových ploch potom Stanfordský zajíček a ČVUT etalon obecného tvaru Faraon. Vyvinuté metody byly tedy aplikovány na základních i obecných tvarech a ověřena jejich platnost. Dále byla metoda využita k analýze trojúhelníkových sítí získaných optickým skenováním plošek pánevních kostí pro odlišení věku zemřelých jedinců, stejně jako k nastínění dalších možností využití.