

20.3.2024

Posudek oponenta

Disertační práce Ing. Adama Bruse

Speciální funkce a polynomy afinních Weylových grup a příslušné Fourierovy metody

Předložená disertační práce má obvyklou formu více mebo méně monotematického souboru čtyř již publikovaných odborných článků (viz stránky 59 až 167, kde jsou uveřejněny jejich kopie), které navazují na úvodní text na stránkách 13 až 50, který je navzájem propojuje a shrnuje výsledky v nich obsažené.

Po stránce odborné je práce kvalitní. Obsahuje totiž články dostatečně prověřené tím, že prošly před publikací náročným recenzním řízením. Jeden článek je publikován v zavedeném časopise s dlouhou tradicí Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical nakladatelství IOP Publishing s impakt faktorem 2,1, další tři články jsou publikovány v novějších časopisech Entropy (1 článek) s impakt faktorem 2,7 a Symmetry (2 články) se stejným impakt faktorem 2,7, oba dva časopisy MDPI fungují v moderním režimu otevřeného přístupu zdarma pro všechny zájemce. Výsledky publikované v člancích byly též prověřeny a akceptovány odborným publikem při přednáškách autora na mezinárodních konferencích (jako příklad lze uvést konferenci International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications, Rakousko a další) i domácích školách a seminářích (Zimní škola matematické fyziky, Doktorandské dny a další). I oponent měl možnost vidět několikrát autorovo profesionální vystoupení (jako příklad lze uvést přednášku Discrete Transforms and Orthogonal Polynomials of (Anti)symmetric Multivariate Sine Functions na mezinárodní konferenci Integrabilní systémy a kvantové symetrie konané v Praze), které dokládá schopnost autora o tématu i ústně referovat vyváženě, srozumitelně a reagovat na odborné dotazy.

V první řadě je třeba ocenit autorovu plnou koncentraci na poměrně úzké téma, které zpracovává postupně, pečlivě a s jistou elegancí, pohybuje se na cestě, na které se nevyskytují žádná neočekávaná šokbrtnutí nebo nepřijemná překvapení.



Aktuálnost tématu práce je beze všech pochyb prokázána už například tím, že oponent našel bez větší námahy v posledních dvaceti letech hrubým odhadem víc než sto odborných prací, které těsně souvisí s tématem doktoranda. Část z nich je pochopitelně dílem, dnes už lze jistě použít bez přehánění název „Pražské školy“, do které kromě doktoranda a jeho školitele patřilo nebo patří mnoho jeho místních spolupracovníků, část z nich je dílem, řekněme, širšího okruhu, do kterého lze zařadit množství zahraničních kolegů, ale co je nejcennější a nejdůležitější, nezanedbatelná část publikací je dílem vědeckých kolektivů, které nemají na zdejší výzkumnou skupinu přímou vědeckou vazbu. Důležitost zpracovávaného tématu dokládá i, alespoň v některých případech, dobrá citovanost těchto prací.

Téma samotné práce souvisí s rozsáhlým výzkumem, jehož, dá-li se to tak říci, moderní fáze byla zřejmě zahájena okolo začátku století Anatolím Klimykem a Jiřím Paterou a souvisí s takzvanými funkcemi na orbitech, jejich vlastnostmi a zobecněními. Co děravá paměť oponenta sahá, Klimyk s Paterou zavedli funkce na orbitech jako, zhruba řečeno, sumy exponenciálních funkcí přes orbity konečné grupy generované reflexemi v eukleidovském prostoru, přičemž za konečnou grupu dosazovali zejména Weylovu grupu poloprosté Lieovy algebry. Rozlišovali přitom C, S a E-funkce a v dimenzi jedna jim odpovídaly standardní funkce exponenciála, sinus a kosinus. Povšimli si, že tyto funkce mají mnoho zajímavých vlastností, jako kvadratickou integrovatelnost na fundamentálním regionu, že jejich rodiny formují ortogonální systém, jak spojitý, tak i diskrétní na mřížce, že jde o vlastní funkce Laplaceova operátoru a řešení Neumann/Dirichletovy úlohy na fundamentálním regionu. Posluchačem v disertaci zavedené a používané zobecnění goniometrických funkcí několika proměnných je však učiněno nezávisle na pojmu Weylova grupa. Diskuze po obhajobě by proto mohla být obohacena o doplnění a rozbor, v jakém smyslu jsou tyto speciální funkce nové a nezávislé a které z nich se dají nebo nedají obdržet jako staré C, S a E funkce; případně proč se jimi zabýváme jako speciálním případem. Doktorand ve své práci také zmiňuje čtyři možné znaménkové homomorfismy z Weylovy grupy do multiplikativní grupy  $U_2$ , mohl by okomentovat či objasnit, jak toto číslo čtyři (pokud vůbec) souvisí s uvedenými zmiňovanými třemi druhy speciálních funkcí.

Již od počátku uvedených výzkumů bylo dobře známo, že zmiňované speciální funkce těsně souvisí s ortogonálními polynomy a jejich zobecněními, přičemž konstrukce ortogonálních polynomů několika proměnných je možná jednotným způsobem pro všechny typy prostých Lieových algeber, neboť okruh generovaný charakterem příslušné grupy je polynomiálním okruhem a má bázi generovanou charakterem fundamentálních reprezentací. Mohl by posluchač v diskusi rozebrat, jak do tohoto schématu zapadá nebo nezapadá jeho konstrukce zobecnění ortogonálních polynomů, která je založena na jím používaných symetrických a antisymetrických zobecněných goniometrických funkcí, případně proč se vyplatí jimi zabývat speciálně?



Pro ortogonální polynomy jedné proměnné existuje známé Askeyovo schéma, které obsahuje i Čebyševovy polynomy a je v nějakém smyslu kompletní. Lze něco podobného říci v oblasti ortogonálních polynomů více proměnných?

V těchto případech samozřejmě bývá často více otevřených otázek než odpovědí, nicméně je autorovi známo, jak moc jeho ortogonální polynomy vyplňují či vyčerpávají množství dalších rodin ortogonálních polynomů více proměnných?

V otázkách týkajících se ortogonálních polynomů by se dalo dlouho pokračovat, jako bod do diskuse lze zmínit, že zajímavou možností zobecnění obyčejných ortogonálních polynomů jedné proměnné skýtají například  $q$ -ortogonální polynomy; přirozená otázka proto zní, jsou přístupné takovému zobecnění i ortogonální polynomy několika proměnných zkoumané autorem?

Závěrem by bylo vhodné podotknout, že specialisté pracující dnes v oboru matematické fyziky a jejích aplikací jsou samozřejmě nuceni se stát v první řadě úzce specializovanými odborníky alespoň v některých souvisejících matematických disciplínách. Předkládaná disertační práce dobrou ilustrací takové situace. Oponent proto přijímá jako prostý fakt značnou netrivialitu souvislostí mezi předloženým, ve své podstatě zcela rigorózním matematickým textem, a aplikacemi přírodních věd, méně vzletně řečeno potřebami moderní fyziky. Je proto velmi potěšující, že i na tuto vazbu autor myslel a jako poslední část práce zvolil autor popis modelu kvantové částice na mřížce pohybující se ve Weylově komoře respektive Weylově výklenku. S tím souvisí i prosba na posluchače, zda by při diskusi byl ochoten rozvést aplikace tohoto modelu na pohyb elektronu v krystalové mřížce, který zmiňuje v závěru práce.

Při podrobném, technickém hodnocení předložené disertační práce by bylo možno pokračovat krátkými rozbory jednotlivých článků daného souboru i jejich zařazením do širšího kontextu, ale tuto práci již autor v podstatě vykonal při psaní úvodního shrnujícího textu, který, dlužno podotknout, má sám výbornou úroveň a byl zpracován pečlivě a důkladně. Za zvláštní pochvalu snad přesto v této souvislosti stojí autorovo úsilí věnované zachování vysoké matematické úrovně textu i striktně rigorózní povahy jednotlivých tvrzení a jejich pečlivé zdůvodnění.

Shrnuji: předložená disertační práce splňuje, podle mého názoru, všechny formální, obsahové i jiné nároky kladené na tento typ práce, obsahuje původní, autorem obdržené vědecké výsledky, je aktuální, plní svůj cíl a jako taková splňuje všechny podmínky podle zákona pro uznání práce jako disertační. Komisi doporučuji práci přijmout.

V Praze, 20.3.2024

Severin Pošta