

## Posudek školitele na disertační práci

<b>Student:</b>	Ing. Adam Brus
<b>Název práce:</b>	Speciální funkce a polynomy afinních Weylových grup a příslušné Fourierovy metody
<b>Školitel:</b>	doc. Ing. Jiří Hrivnák, Ph.D.
<b>Školitel specialista:</b>	Bc. Lenka Motlochová, Ph.D.

Tématika speciálních funkcí a polynomů afinních Weylových grup je v posledních letech aktuální a stále se rozvíjí. Příslušné metody zobecněné vícerozměrné Fourierovy analýzy mají řadu potenciálních aplikací nejen v teorii ortogonálních funkcí a polynomů, ale i například ve vibracích krystalických mříží a šíření kvantových částic v krystalech – má tedy jistě smysl se touto problematikou zabývat.

Předložená disertační práce má formu souboru čtyř článků v impaktovaných časopisech [A1–A4] opatřeného integrujícím textem, který je přehledně strukturován do pěti kapitol. V prvních dvou kapitolách, které reprezentují v kontextu práce výsledky publikované v článku [A1], jsou shrnuty základní definice vícerozměrných symetrických a antisymetrických trigonometrických funkcí včetně tvarů fundamentálních domén a parametrů indexujících tyto funkce. Jsou uvedeny reprezentativní tvary vztahů vyjadřující jak diskrétní ortogonalitu, tak přímé a zpětné diskrétní transformace Fourierova typu a explicitní vzorce pro příslušné transformační matice. V souvislosti čtyř typů klasických Čebyševových polynomů je analogickými vztahy zavedeno osm typů polynomů více proměnných a zkoumána existence rekurentních algoritmů jejich výpočtu a vztahy pro ortogonalitu. Je popsána metoda kubaturních formulí, které nahrazují přesné integrace funkcí na specifických doménách jejich konečnými součty.

Třetí kapitola se soustředí na teoretický přehled a zavedení značení související s diskrétními transformacemi Fourierova typu, které obsahují transformační jádra tvořená exponenciálními funkcemi na orbitách Weylových grup. Jsou připomenuty pojmy krystalografických kořenových systémů příslušných prostým Lieovým algebrám, prosté kořeny, Weylova grupa, kořenové a váhové mříže spolu s jejich duálními verzemi. Dále je shrnut koncept přípustných posunutí zachovávající invarianci posunutých mříží vůči Weylovým grupám a až čtyři typy znaménkových homomorfismů Weylových grup. Homomorfismy afinních a rozšířených afinních Weylových grup, které vznikly zobecněním znaménkových homomorfismů, dále slouží k definici fundamentálních domén (rozšířených) afinních Weylových grup a jejich duálních verzí. Shrnutí těchto matematických struktur je použito k prezentaci symetrií exponenciálních funkcí na orbitách Weylových grup, příslušných diskrétních relací ortogonality a maticových forem diskrétních transformací Fourierova typu.

Souvislost mezi diskretními transformacemi vícerozměrných antisymetrických i symetrických funkcí a duálními kořenovými transformacemi série kořenových systémů  $C_n$ , publikovaná v článku [A2], je uvedena do kontextu práce ve čtvrté kapitole. Nezbytné pojmy ze třetí kapitoly jsou zkonkretizovány pro tuto sérii a jsou uvedeny provazující vztahy mezi (anti)symetrickými trigonometrickými funkcemi a exponenciálními funkcemi na orbitách Weylových grup typu  $C_n$ . Je zformulován přechod mezi bazickým vyjádřením konečných množin bodů a indexů funkcí, stejně jako souvislost mezi váhovými i normalizačními funkcemi a výsledné identity mezi maticemi diskretních transformací. V páté kapitole jsou v kontextu práce shrnuty modely šíření kvantových částic na přípustně posunutých duálních váhových a kořenových mřížích ve fundamentálních oblastech afinních Weylových grup [A3, A4]. Jsou uvedeny požadavky na vstupní funkce, které charakterizují šíření amplitudy kvantové částice, dále jsou shrnuty přechody mezi bázemi polohy a bázemi vlastních vektorů Hamiltoniánů, které jsou klíčově zadány maticemi diskretních duálních váhových a kořenových transformací ze třetí kapitoly, včetně výsledných vztahů pro hodnoty energií.

Rozsah teorie, kterou bylo nutno nastudovat a použít v rámci vlastní samostatné vědecké práce doktoranda, je značný. Výstup vědecké práce doktoranda zahrnuje jak výzkum prováděný v abstraktní rovině v článcích [A1–A4], tak konkrétní symbolické a numerické výpočty modelových příkladů včetně vizualizace [A1–A4]. Zejména v článku [A1], který vznikl s velmi významným přispěním doktoranda, se doktorand podílel na odvození (anti)symetrických sinových transformací, rekurentních relací pro polynomy druhého i čtvrtého druhu a tvarů příslušných kubaturních formulí. V dalším článku s velmi významným podílem práce doktoranda [A2] doktorand teoreticky odvozoval především vztahy mezi váhovými funkcemi trigonometrických a duálně váhových diskretních transformací. Kromě samostatné práce na modelových příkladech duálně váhových modelů šíření kvantových částic v článku [A3], doktorand také samostatně pracoval na formulaci těchto modelů ve formalismu (anti)symetrických trigonometrických transformací; tyto případy byly však po publikaci článku [A2] zahrnuty do obecnějšího formalismu duálně váhových transformací v článku [A3]. Nicméně tento výzkum přispěl k ověřování konzistentnosti obou vyjádření zkoumaných modelů i k prověření vztahů jejich vzájemného přechodu v nízkých dimenzích.

Závěrem lze říci, že cíle práce – zkoumání diskretních (anti)symetrických trigonometrických transformací a příslušných polynomů, odvození exaktní formulace těchto transformací ve formalismu duálních kořenových transformací afinních Weylových grup a aplikace souvisejících Fourierových i polynomiálních metod především v matematické fyzice – byly dobře splněny a doporučuji práci k obhajobě.

V Praze dne 9. 5. 2023

doc. Ing. Jiří Hrivnák, Ph.D.