



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Heterogenní varianty balančních částicových systémů

Heterogeneous variants of balanced particle systems

Diplomová práce

Autor: **Bc. Jiří Nábělek**
Vedoucí práce: **Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/2024

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Nábělek** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **486471**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra matematiky**
Studijní program: **Aplikované matematicko-stochastické metody**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Heterogenní varianty balančních částicových systémů

Název diplomové práce anglicky:

Heterogeneous variants of balanced particle systems

Pokyny pro vypracování:

- 1) Korektně matematicky definujte heterogenní alternativu klasického balančního částicového systému.
- 2) V tomto systému zaveďte základní náhodné proměnné a jejich významné deskriptivní charakteristiky.
- 3) Formulujte a dokažte klíčové teoretické teoremy teorie.
- 4) Výsledky porovnejte s homogenní variantou systému a validujte je na synteticky získaných datech.
- 5) Porovnejte výsledky analýzy statistické rigidity empirických dopravních dat nahlížené z perspektivy homogenního, resp. heterogenního částicového systému.

Seznam doporučené literatury:

1. L. Li., X.M. Chen, Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 76 (2017) 170–188
2. M. Krbálek, F. Šeba, M. Krbálková, Super-random states in vehicular traffic — Detection & explanation, Physica A 585 (2022) 126418
3. M. Krbálek, Matematické modelování dopravy, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2022
4. M. Krbálek and P. Šeba, Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach), J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 345001

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D. katedra matematiky FJFI

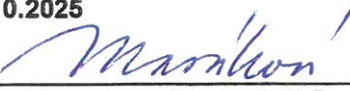
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **31.10.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **10.05.2024**

Platnost zadání diplomové práce: **31.10.2025**


doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

9.11.2023

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Poděkování:

Rád bych poděkoval především svému školiteli docentu Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D., a to nejen za velké množství cenných rad a za poskytnutí velmi kvalitního odborného zázemí, ale také za trpělivost, vstřícnost a pozitivní přístup po celou dobu naší spolupráce. Díky patří i celé mojí rodině, především rodičům za psychickou a materiální podporu během celého studia.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 10. května 2024

Jiří Nábělek

Název práce:

Heterogenní varianty balančních částicových systémů

Autor: Bc. Jiří Nábělek

Obor: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Abstrakt: V práci zavádíme homogenní balanční částicový systém a vyslovujeme známé vlastnosti systému. V hlavní části se zaměřujeme na zkoumání speciálních variant heterogenních balančních částicových systémů a jejich vlastností. Na základě získaných znalostí ukazujeme analyticky odvozené popisy a charakteristiky pro systémy popsané konkrétně zvolenými hustotami pravděpodobnosti, přičemž teoretické závěry podkládáme numerickým výpočtem na syntetických datech. Teorii heterogenních balančních částicových systémů aplikujeme i při zpracování dopravních dat z provozu. Klademe důraz na porovnání rozdílů výstupů analýzy pro homogenní a heterogenní balanční částicové systémy a diskutujeme výhody, resp. nevýhody obou přístupů.

Klíčová slova: Vehicle headway modeling, balanční částicové systémy, heterogenní balanční částicové systémy, statistická rigidita

Title:

Heterogeneous variants of balanced particle systems

Author: Bc. Jiří Nábělek

Abstract: In this thesis, we introduce a homogeneous particle balance system and state the known properties of the system. In the main part, we focus on the investigation of special variants of heterogeneous balance particle systems and their properties. Based on the knowledge gained, we will show analytically derived descriptions and characteristics for systems described by specifically chosen probability densities, while supporting the theoretical conclusions by numerical computation on synthetic data. We also apply the theory of heterogeneous particle balance systems to traffic data. We will emphasize the comparison of the differences in the analysis outputs for homogeneous and heterogeneous particle balance systems and discuss the advantages and disadvantages of the two approaches, respectively.

Key words: Vehicle headway modeling, balanced particle systems, heterogeneous balanced particle systems, statistical rigidity

Obsah

Úvod	8
1 Homogenní balanční částicový systém	9
1.1 Úvod do problematiky	9
1.2 Elementární známé poznatky a teorémy	11
1.3 Přejchod mezi spojitým a diskretním popisem	11
1.3.1 Přejchod od roztečí k intervalovým frekvencím	12
1.3.2 Přejchod od intervalových frekvencí k roztečím	12
1.4 Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti	13
1.4.1 Charakteristiky 1. řádu	13
1.5 Elementární verze balančních částicových systémů	14
1.5.1 Poissonův částicový systém	14
1.5.2 Diracův částicový systém	15
1.6 Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti	16
1.6.1 Charakteristiky 2. řádu	16
2 Numerické metody pro analýzu dat	18
2.1 Generování dat	18
2.2 Popis numerického modelu	18
2.2.1 Hustota pravděpodobnosti multiroztečí	19
2.2.2 Numerický model trendové funkce	19
2.2.3 Numerický model statistické rigidity	19
2.2.4 Použité parametry	19
3 Kvazihomogenní BČS	20
3.1 Zavedení systému	20
3.2 Statistické popisy a vztahy mezi nimi	21
3.2.1 Přejchod od roztečí k intervalovým frekvencím	21
3.2.2 Přejchod od intervalových frekvencí k roztečím	22
3.3 Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti	22
3.3.1 Laplaceova forma charakteristik 1. řádu kvazihomogenního BČS	25
3.4 Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti	28
3.4.1 Charakteristiky 2. řádu	28
3.5 Speciální případy kvazihomogenního BČS	29
3.5.1 Generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení	30
3.5.2 Generátory z Erlangova rozdělení	36
3.5.3 Generátory z gamma rozdělení	37

4	Heterogenní BČS s periodickými generátory	43
4.1	Zavedení systému	43
4.2	Statistické popisy a vztahy mezi nimi	44
4.2.1	Přechod od roztečí k intervalovým frekvencím	44
4.2.2	Přechod od intervalových frekvencí k roztečím	44
4.3	Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti	45
4.3.1	Laplaceova forma charakteristik 1. řádu heterogenního BČS s periodickými generátory	50
4.4	Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti	53
4.4.1	Charakteristiky 2. řádu	53
4.5	Speciální případy heterogenního BČS s periodickými generátory	54
4.5.1	Generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení	54
4.5.2	Generátory z Erlangova rozdělení	55
4.5.3	Generátory z gamma rozdělení	57
5	Aplikace na reálných datech	62
5.1	Předzpracování dat	62
5.1.1	3-s unifikační procedura	62
5.1.2	Selekce dat	64
5.1.3	Výběr datových vzorků podle hustoty dopravy	64
5.1.4	Odhad parametru gamma rozdělení	67
5.2	Kvazihomogenní BČS	68
5.2.1	Statistická rigidita	70
5.3	Heterogenní BČS s periodickými generátory	71
5.3.1	Statistická rigidita	73
5.4	Inženýrská aplikace	73
5.4.1	Statistická rigidita	75
	Závěr	77

Úvod

Vehicle headway modeling je statistická disciplína zaměřující se na popis a zkoumání mikroskopických vlastností dopravních systémů. Kromě pochopení chování řidičů v různých situacích, přináší tato disciplína užitek v mnoha oblastech související s dopravou. Využití nalézá především při projektování nových komunikací, křižovatek a hraje roli i při odhalování problematických úseků komunikace, čímž pomáhá zvyšovat bezpečnost dopravy. Práce navazuje na předchozí výzkumy v oblasti vehicle headway modeling, které představily matematický model dopravy založený na teorii balančních částicových systémů (zkráceně BČS), viz [1], [2], [3]. Dosavadní práce v této oblasti se opíraly o předpoklad, že jsou rozestupy vozidel stejně rozdělené, což v reálné dopravě není vždy splněno [4]. Cílem diplomové práce je představit teorii, která tento předpoklad opouští.

V první kapitole práce shrneme znalosti o homogenních BČS. Vyslovíme základní definice a tvrzení. Především se pak zaměříme na vlastnosti pro charakteristiky prvního a druhého řádu, resp. jejich Laplaceovy formy. V druhé kapitole si představíme metodiku numerických výpočtů charakteristik, kterou využijeme v následujících kapitolách.

Práce se dále zabývá speciálními variantami heterogenních BČS. Ve třetí a čtvrté kapitole představíme dvě speciální varianty heterogenních BČS, jež nazýváme kvazihomogenním BČS a heterogenním BČS s periodickými generátory. Pro oba systémy vyslovíme jejich definici a zavedeme pro ně statistický popis. Následně se zaměříme na charakteristiky prvního a druhého řádu včetně dokázání vlastností charakteristik a jejich Laplaceovy formy. Navíc ukážeme analyticky odvozené popisy a charakteristiky pro systémy popsané konkrétně zvolenými hustotami pravděpodobnosti, přičemž výsledky budeme validovat pomocí analýzy syntetických dat.

V poslední kapitole práce získané znalosti aplikujeme při zpracování dopravních dat z reálného provozu. Výstupy analýzy dopravních dat porovnáme s analyticky výpočty z teorie homogenních a heterogenních BČS. Budeme diskutovat, pro které úlohy může využití obecnější formy BČS přinést lepší výsledky.

Kapitola 1

Homogenní balanční částicový systém

Na úvod si připomeňme zavedení a vlastnosti homogenního balančního částicového systému (dále jen homogenní BČS). Uvedeme si základní definice a tvrzení spojené s tímto systémem. Definice a věty z této kapitoly byly převzaty z [5]. Všechny věty této kapitoly uvedeme bez důkazu. Důkazy jsou popřípadě k nahlédnutí v [6].

1.1 Úvod do problematiky

Nejprve definujme třídu balancovaných hustot pravděpodobnosti, která bude základním stavebním kamenem pro teorii balančních částicových systémů [7].

Definice 1.1.1. Třídu funkcí $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující axiomy:

1. Axiom kompletnosti: $Dom(g) = \mathbb{R}$,
2. Axiom nezápornosti: $Ran(g) \subset \mathbb{R}_0^+$,
3. Axiom omezenosti: $\exists K \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in \mathbb{R} : g(x) < K$
4. Axiom částečné spojitosti: $g(x) \in PC(\mathbb{R})$, tj. $g(x)$ je po částech spojitá na \mathbb{R} ,
5. Axiom integrability: $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,
6. Axiom pozitivnosti nosiče: $supp(g) \subset \mathbb{R}_0^+$,
7. Axiom balancovanosti: Existuje $\omega > 0$ tak, že platí:

$$\alpha > \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = +\infty,$$

$$\alpha < \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0,$$

nazveme třídou balancovaných hustot a označíme ji \mathcal{B} .

Před tím než formálně definujeme balanční částicové systémy, představme v poznámce neformální popis a zavedení BČS.

Poznámka. Balanční částicový systém představuje abstraktní matematickou formulaci úlohy matematického modelování dopravy.

Praktickou interpretaci balančních částicových systémů lze připodobnit zkoumání systému bezrozměrných částic ležících na polopřímce. Převedení úlohy do jedné dimenze nám umožní opustit popis systému pouze na základě polohy části $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$. Umožní nám to popisovat systém pomocí vzdálenosti sousedních částic $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$, jež nazýváme roztečemi. Ekvivalentně lze systém také popsat pomocí vzdálenosti zvolené částice od referenční částice $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$, přičemž ty to vzdálenosti nazýváme multiroztečemi. Matematicky nahlížeje na rozteče a multirozteče jako na náhodné veličiny, pro které intuitivně platí:

$$\mathcal{X}_k = \sum_{i=0}^k \mathcal{R}_i.$$

V definici balančních částicových systémů projdeme všechny potřebné předpoklady systému, ale zmiňme tu pár klíčových předpokladů. V první kapitole práce předpokládáme, že všechny rozteče jsou stejně rozdělené a jsou zadány hustotou pravděpodobnosti $h(x)$ ze třídy balancovaných hustot \mathcal{B} , kterou budeme nazývat generátorem systému. Dále budeme uvažovat, že všechny rozestupy mezi částicemi jsou nezávislé náhodné veličiny, což nám umožní pro výpočet hustoty pravděpodobnosti multiroztečí využívat operace konvoluce. Zmíněné předpoklady lze matematicky zapsat:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots &\sim h(x), \\ \mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m &\sim g_k(x) = \underset{m=0}{\ast}^k h(x), \end{aligned}$$

kde symbolem \sim značíme, že náhodné veličiny roztečí, resp. multiroztečí jsou dány hustotou pravděpodobnosti $h(x)$, resp. $g_k(x)$. Částicový systém lze charakterizovat ještě třetím statistickým popisem a to parametrizovanými náhodnými veličiny zvanými intervalové frekvence, jež značíme \mathcal{N}_L . Z praktického hlediska intervalová frekvence kvantifikuje počet částic vyskytující se ve vzdálenosti nižší než L od referenční částice. Pro úplnost stochastického popis balančního částicového systému budeme převážně pracovat s pravděpodobnostmi $\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k]$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Detailnější osvětlení předpokladů balančních částicových systémů, viz [6].

Následně vyslovme tři základní varianty homogenních částicových systémů. Varianty homogenních částicových systémů mírně liší v podmínkách, které budeme klást na generátor roztečí $h(x)$.

Definice 1.1.2. Obecným částicovým systémem rozumíme posloupnost $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedenou předpisem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných a absolutně spojitých náhodných veličin. Částicový systém nazveme škálovaným částicovým systémem, pokud navíc platí, že $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = 1$.

Definice 1.1.3. Nezávislým částicovým systémem rozumíme posloupnost $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedenou předpisem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Hustotu pravděpodobnosti všech náhodných veličin $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ označíme $h(x)$ a budeme ji nazývat generátorem částicového systému.

Definice 1.1.4. Balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedenou předpisem

$$X_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin, jejichž hustota pravděpodobnosti je vybrána ze třídy \mathcal{B} . Budeme ji nazývat generátorem částicového systému.

V definici 1.1.4 předpokládáme příslušnost hustoty pravděpodobnosti roztečí do třídy balancovaných hustot \mathcal{B} , což vyplývá z podstaty vzájemných interakcí v reálných dopravních systémech.

Na závěr úvodní sekce ještě upřesněme používané názvosloví pro statistické popisy balančních částicových systémů.

Definice 1.1.5. Mějme balanční částicový systém daný posloupností $(X_k)_{k=0}^{\infty}$. Pak prvky této posloupnosti nazýváme multiroztečemi. Dále prvky posloupnosti $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{\infty}$ nazýváme roztečemi. Nakonec zavádíme systém náhodných veličin s parametrem $L > 0$, který nazýváme intervalovou četností a značíme \mathcal{N}_L . Intervalové četnosti definujeme:

$$\mathcal{N}_L = \sum_k I(x_k < L),$$

kde x_k je posloupnost realizací náhodných veličin $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ a $I(\cdot)$ je funkce indikující, jestli je podmínka pravdivá, tzn.

$$I(\text{podmínka}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je podmínka pravdivá,} \\ 0 & \text{pokud není podmínka pravdivá.} \end{cases}$$

1.2 Elementární známé poznatky a teoremy

K balančním částicovým systému se pojí několik základních vlastností, které nyní vyslovíme.

Věta 1.2.1. Necht' $h(x) \in \mathcal{B}$ je generátorem BČS, pak pro zavedený popis platí:

$$X_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m \sim \underset{m=0}{\overset{k}{*}} h(x),$$

kde hustoty pravděpodobnosti multiroztečí jsou tvořeny konvolucí generátorů $h(x)$.

Věta 1.2.2. V balančním částicovém systému $h(x) \in \mathcal{B}$ platí:

1. $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \varkappa$,
2. $\mathbb{E}(X_k) = (k + 1)\varkappa$,

kde $\varkappa = \mu_1(h)$ je první centrální moment náhodných veličin $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$.

Zavedli jsme tři způsoby popisu modelu a bude pro nás klíčové umět mezi těmito popisy přecházet. V následujících sekcích zformulujeme věty, které tuhle problematiku osvětlují.

1.3 Přejít mezi spojitým a diskrétním popisem

Pro kompletně zavedený popis homogenního BČS je ještě potřeba odvodit přechody mezi popisy spojitými (rozteče, multirozteče) a popisem diskrétním (intervalové frekvence).

1.3.1 Přechod od roztečí k intervalovým frekvencím

Věta 1.3.1. Necht' $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{+\infty}$ je posloupnost multiroztečí s distribučními funkcemi $(G_k)_{k=0}^{+\infty}$. Pak pro pravděpodobnost intervalových frekvencí platí

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] &= 1 - G_0(L), \\ \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] &= G_{k-1}(L) - G_k(L).\end{aligned}$$

Důkaz. Odvod' me přechod od popisu pomocí roztečí k popisu pomocí intervalových frekvencí. Nejprve určíme pravděpodobnost, že na intervalu délky L za referenční částici se nenachází žádná částice. Držme se již zavedeného značení a dále označme distribuční funkci příslušnou generátoru roztečí $h(x)$ jako $H(x) = \int_{-\infty}^x h(y)dy$. Pak:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 \geq L] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 < L] = 1 - H(L).$$

Tímto bychom měli vyřešený elementární případ. Z teorie pravděpodobnosti se můžeme snadno přesvědčit, že platí série rovností:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] &= \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L \wedge \mathcal{X}_k \geq L] = \mathbb{P}[(\mathcal{X}_{k-1} < L) \cap (\mathcal{X}_k < L)^c] = |A \cap B^c = A \setminus B| = \\ &= \mathbb{P}[(\mathcal{X}_{k-1} < L) \setminus (\mathcal{X}_k < L)] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L] - \mathbb{P}[\mathcal{X}_k < L] = G_{k-1}(L) - G_k(L),\end{aligned}$$

kde $G_k(x)$ jsou distribuční funkce příslušné multiroztečím $\mathcal{X}_k \sim g_k(x)$. Závěrem přechodu od spojitého k diskrétnímu popisu je

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = 1 - G_0(L) = 1 - H(L) \quad \wedge \quad \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = G_{k-1}(L) - G_k(L). \quad (1.1)$$

□

1.3.2 Přechod od intervalových frekvencí k roztečím

Věta 1.3.2. Necht' $\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k]$ představuje pravděpodobnost intervalových frekvencí. Pak pro prvky posloupnosti hustot pravděpodobnosti $(g_k)_{k=0}^{+\infty}$ a distribučních funkcí $(G_k)_{k=0}^{+\infty}$ multiroztečí platí

$$\begin{aligned}G_k(x) &= 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m], \\ g_k(x) &= -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}.\end{aligned}$$

Důkaz. Známe-li intervalové frekvence homogenního BČS, pak generátor roztečí lze získat derivováním upraveného vztahu (1.1), tj.

$$h(x) = \frac{dH}{dx} = -\Theta(x) \frac{d}{dx} \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 0].$$

Dále jsme schopni přímočaře získat i vztah pro pravděpodobnostní popis multiroztečí:

$$G_k(x) = 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m], \quad g_k(x) = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}.$$

□

Tímto jsme ukázali ekvivalenci v popisech homogenního BČS.

1.4 Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti

Vlastnosti BČS se standardně popisují pomocí charakteristik 1. a 2. řádu. Definujme v tomto textu charakteristiky 1. řádu a vyslovme jejich vlastnosti.

1.4.1 Charakteristiky 1. řádu

Charakteristiky 1. řádu jsou odvozené od prvních momentů balancované hustoty a definujeme je následovně.

Definice 1.4.1. Mějme balanční částicový systém, pak zavádíme charakteristiky prvního řádu takto:

1. Střední hodnota roztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} xh(x)dx = \mathbb{E}(\mathcal{R}_0), \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Střední hodnota multiroztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} xg_k(x)dx$.
3. Trendová funkce: $\omega(L) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[\mathcal{N}_L = k]$.

Pokračujme analýzou vlastností charakteristik 1. řádu pro homogenní BČS.

Definice 1.4.2. Necht' $\mathcal{X}_k \sim g_k(x)$ jsou multirozteče balančního částicového systému. Pak funkci $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ nazveme shlukovou funkcí balančního částicového systému. Dále označme $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kg_k(x)$ shlukovou funkcí prvního druhu.

Věta 1.4.3. Mějme balanční částicový systém, pak platí

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = (k + 1) \cdot \mathbb{E}(\mathcal{R}_k).$$

Věta 1.4.4. Necht' $r(x)$ je shluková funkce a $s(x)$ je shluková funkce prvního druhu balančního částicového systému. Pak funkce $r(x)$ a $s(x)$ jsou omezené a funkcionální řady, které je definují, stejnoměrně konvergují na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Věta 1.4.5. Necht' $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce obecného balančního částicového systému. Pak platí

$$\omega(L) = \int_0^L r(x)dx.$$

Uvedené charakteristiky můžeme poměrně jednoduše transformovat pomocí Laplaceovy transformace. Získané Laplaceovy obrazy nám poslouží k určení dalších vlastností BČS.

1.4.1.1 Laplaceova forma charakteristik 1. řádu

Zaved' me označení pro Laplaceovy obrazy generátoru a shlukové funkce BČS a vyslovme jejich základní vlastnosti.

Značení 1.4.6. Necht' $h(x)$ je generátor a $r(x)$ je shluková funkce balančního částicového systému. Pak označíme Laplaceovy obrazy daných funkcí jako $\mathbb{H}(s) := \mathcal{L}[h(x)]$ a $\mathbb{R}(s) := \mathcal{L}[r(x)]$.

Věta 1.4.7. Necht' $h(x)$ je generátor a $r(x)$ je shluková funkce balančního částicového systému a $\mathbb{H}(s)$, resp. $\mathbb{R}(s)$ jsou jim příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. Řada $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ konverguje všude v \mathbb{R} a na každém $\langle 0, L \rangle$ navíc stejnoměrně.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : r(x) > 0$ a navíc $\forall x \in \mathbb{R} : r(x) = \Theta(x)r(x)$.

3. Výroky A: $\omega(L) = L$ na \mathbb{R}^+ , B: Funkce $r(x)$ a $\Theta(x)$ jsou rovné skoro všude.
4. $\forall s > 0 : 0 < \mathbb{H}(s) < 1$.
5. $\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}(s)}{1-\mathbb{H}(s)}$.
6. $r(x)$ je omezená na \mathbb{R} a navíc pro škálované BČS platí: $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = 1$.

Věta 1.4.8. Necht' $h(x)$ je generátor BČS a $g_k(x)$ je hustota pravděpodobnosti pro multirozteč $k \in \mathbb{N}$, tzn. $\mathcal{R}_k \sim h(x)$, a $\mathcal{X}_k \sim g_k(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pak platí:

1. $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = -\mathbb{H}'(0_+)$,
2. $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = -\mathbb{G}'_k(0_+) = (k+1)\mu_1(h)$.

1.5 Elementární verze balančních částicových systémů

Podívejme se detailněji na dvě základní verze BČS, a to na Poissonův a Diracův systém.

1.5.1 Poissonův částicový systém

Poissonův balanční částicový systém je popsán intervalovými frekvencemi s Poissonovským rozdělením, tj.

$$\mathbb{P}[N_L = k] = e^{-\lambda L} \frac{(\lambda L)^k}{k!},$$

kde $\lambda > 0$ je parametr Poissonova rozdělení. Z odvozeného vztahu (1.1) můžeme vyjádřit generátor BČS:

$$h(x) = -\Theta(x) \frac{d}{dx} \mathbb{P}[N_x = 0] = -\Theta(x) \frac{d}{dx} \left(e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^0}{0!} \right) = \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x}.$$

Dále můžeme snadno odvodit, že:

$$\begin{aligned} g_k(x) &= -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[N_x = m]}{dx} = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!} \frac{d}{dx} (x^m e^{-\lambda x}) = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!} (m x^{m-1} - \lambda x^m) e^{-\lambda x} = \\ &= -\Theta(x) \sum_{m=1}^k \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x} + \Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^{m+1}}{m!} x^m e^{-\lambda x} = \\ &= -\Theta(x) \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} x^\ell e^{-\lambda x} + \Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^{m+1}}{m!} x^m e^{-\lambda x} = \Theta(x) \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

čímž jsme našli hustotu pravděpodobnosti pro rozteče a multirozteče Poissonova systému.

Uveďme dále charakteristiky 1. řádu Poissonova systému:

$$\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} x h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \frac{k+1}{\lambda},$$

$$\omega(L) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[N_L = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda L)^k}{k!} e^{-\lambda L} = \lambda L,$$

$$r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(x) \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x} = \Theta(x) \lambda.$$

Na závěr zmiňme Laplaceovu formu generátoru systému a charakteristik 1. řádu:

$$\mathbb{H}(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \mathcal{L}[\Theta(x)\lambda e^{-\lambda x}] = \frac{\lambda}{\lambda + s},$$

$$\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}} = \frac{\lambda}{s}.$$

1.5.2 Diracův částicový systém

Diracův částicový systém představuje limitní případ částicových systémů, ve kterém jsou částice rozmístěné ekvidistantně se vzájemnými rozestupy rovnými parametru systému $\lambda > 0$. Jinými slovy se jedná o deterministický systém, jehož generátor není ze třídy balancovaných hustot. Odvoďme v této podsekcí základní vlastnosti pro Diracův částicový systém.

Pravděpodobnost, že je intervalová frekvence je rovna nule, lze pak vyjádřit jako:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = \begin{cases} 1 & L \leq \lambda, \\ 0 & L > \lambda. \end{cases}$$

Tento vztah lze ekvivalentně zapsat následovně:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = 1 - \Theta(L - \lambda).$$

Ze vztahu (1.1) pak plyne:

$$h(x) = \frac{dH}{dx} = -\Theta(x) \frac{d}{dx}(1 - \Theta(x - \lambda)) = \Theta(x)\delta(x - \lambda) = \delta(x - \lambda).$$

Z generátoru BČS $h(x)$ již lze přímočaře určit hustotu pravděpodobnosti multiroztečí:

$$g_k(x) = \underset{m=0}{*}^k h(x) = \delta(x - (k + 1)\lambda), \quad (1.2)$$

čímž jsme našli hustotu pravděpodobnosti pro rozteče a multirozteče Diracova systému. Pro úplnost ještě zobecníme pravděpodobnost, že v Diracově systému je intervalová frekvence rovna číslu $k \in \mathbb{N}$. Tuto skutečnost lze vyjádřit jako:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \begin{cases} 1 & L \in (k\lambda, (k + 1)\lambda), \\ 0 & L \notin (k\lambda, (k + 1)\lambda), \end{cases}$$

nebo ekvivalentně tu rovnost můžeme zapsat jako

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \Theta(L - k\lambda)(1 - \Theta(L - (k + 1)\lambda)).$$

U Diracova systému nejprve určíme Laplaceovu formu generátoru systému a Laplaceovu transformaci hustoty pravděpodobnosti multiroztečí, protože pak můžeme přímočaře určit střední hodnoty roztečí a multiroztečí z věty 1.4.8:

$$\mathbb{H}(s) = e^{-\lambda s}, \quad \mathbb{G}_k(s) = e^{-(k+1)\lambda s}, \quad \mathbb{R}(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda s}}.$$

Uved' me dále charakteristiky 1. řádu Diracova systému:

$$\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = -\mathbb{H}'(O_+) = \lambda,$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = -\mathbb{G}'_k(O_+) = (k+1)\lambda,$$

$$\omega(L) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[N_L = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \Theta(L - k\lambda) (1 - \Theta(L - (k+1)\lambda)) = \begin{cases} 0 & L \in (0, \lambda), \\ 1 & L \in (\lambda, 2\lambda), \\ \vdots & \vdots \\ m & L \in (m\lambda, (m+1)\lambda), \end{cases}$$

$$r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x - (k+1)\lambda).$$

1.6 Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti

V této sekci se podíváme detailněji na charakteristiky 2. řádu a vyslovme jejich vlastnosti.

1.6.1 Charakteristiky 2. řádu

Charakteristiky 2. řádu jsou odvozené od druhých momentů balancované hustoty a definujeme je následovně.

Definice 1.6.1. Mějme balanční částicový systém. Pak zavádíme charakteristiky druhého řádu jako:

1. Rozptyl roztečí: $\text{VAR}(\mathcal{R}_k) = \mu_2(h) - 1$.
2. Rozptyl multiroztečí: $\text{VAR}(\mathcal{X}_k) = \text{VAR}(\sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m) = (k+1) \text{VAR}(\mathcal{R}_0)$.
3. Frekvenční rozptyl: $\text{VAR}(N_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mathbb{E}(L))^2 \mathbb{P}[N_L = k] = \mathbb{E}(N_L^2) - \omega^2(L)$.
4. Statistická rigidita: $\Delta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L)^2 \mathbb{P}[N_L = k] = \mathbb{E}(N_L^2) - 2L\omega(L) + L^2$.

Věta 1.6.2. Nechť $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce obecného balančního částicového systému. Pak platí

$$\mathbb{E}(N_L^2) = 2r(L) * \omega(L) + \omega(L).$$

1.6.1.1 Laplaceova forma charakteristik 2. řádu

Pro naše budoucí zkoumání vlastností balančních částicových systémů bude klíčový Laplaceův obraz statistické rigidity o němž je známo (viz [15]), že

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Delta(L)] &= \mathcal{L}[\mathbb{E}(N_L^2)] - 2\mathcal{L}[L\omega(L)] + \mathcal{L}[L^2] = 2\frac{R^2(s)}{s} + \frac{R(s)}{s} + 2\frac{sR'(s) - R(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3}, \\ s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &= 2(1 - sR(s)) + s^2(2R^2(s) + R(s) + 2R'(s)). \end{aligned}$$

Dále dosad' me za $R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$ a upravme následovně:

$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s) \frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2 \frac{H'(s) + H^2(s)}{(1-H(s))^2}.$$

Pro obecný balanční částicový systém nemusí být nalezení stochastické rigidity přímočarou úlohou, proto se pokusíme o její aproximaci. Funkce $\Delta(L)$ má, jak je dobře známo, výraznou lineární asymptotu, kterou zapíšeme jako $\chi L + \delta$ a její tvar spočteme pomocí Laplaceovy transformace:

$$s^3 \mathcal{L}[\chi L + \delta] = \chi s + \delta s^2 \doteq s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s) \frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2 \frac{H'(s) + H^2(s)}{(1-H(s))^2}.$$

Zavedme si nyní funkci $B(s) := s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] \stackrel{!}{=} \chi s + \delta s^2$ a přepišme ji do Maclaurinova rozvoje druhého řádu, tzn. $B(s) \doteq B(0) + \frac{B'(0)}{1}s + \frac{B''(0)}{2}s^2 \stackrel{!}{=} \chi s + \delta s^2$. Z této úvahy dostáváme parametry lineární asymptoty funkce $\Delta(L)$ ve tvaru

$$\chi = B'(0), \quad \delta = \frac{1}{2}B''(0).$$

Lineární člen asymptoty funkce $\Delta(L)$ nazýváme stochastickou kompresibilitou a konstantní člen nazýváme deflekcí. Závěr úprav shrneme v definici stochastické kompresibility.

Definice 1.6.3. Kompresibilitou balančního částicového systému rozumíme koeficient lineárního členu asymptoty jeho statistické rigidity.

Při práci s krátkodosahovými potenciály (viz [8]) lze kompresibilitu vypočítat z jednoduššího vztahu, který vyslovíme v následující větě o kompresibilitě a deflekcí.

Věta 1.6.4. Ve škálovaném balančním částicovém systému zadaném generátorem $h(x)$ je stochastická kompresibilita rovna rozptylu sousedních roztečí, tj.

$$\chi = \mu_2(h) - 1.$$

Pro deflekcí navíc platí:

$$\delta = \frac{1}{6} \left(-4\mu_3(h) - 9\mu_2(h) + 9\mu_2^2(h) + 6 \right).$$

Důkaz: viz [9].

Kapitola 2

Numerické metody pro analýzu dat

Dřív než řádně definujeme heterogenní BČS, tak se zaměříme na numerické metody zpracování dat, které budeme v následujících kapitolách využívat [10].

2.1 Generování dat

Nejprve se zaměříme na metodiku generování a ukládání dat. V následujících kapitolách bude našim cílem za pomoci syntetických dat ověřit správnost některých analytických výpočtů, přičemž se budeme primárně zaměřovat na statistiky prvního a druhého řádu heterogenních BČS. Výpočet těchto statistik vychází ze znalosti intervalové frekvence daného BČS. Podívejme se tedy, jak intervalovou frekvenci spočítat.

Za tímto účelem bude nejvhodnější vygenerovat matici o rozměrech $N \times K$, kde $N \in \mathbb{N}$ značí počet řádků a $K \in \mathbb{N}$ počet sloupců matice. Prvky této matice budou reprezentovat délky rozestupů (roztečí) mezi jednotlivými částicemi. Jelikož se budeme zabývat studiem heterogenních BČS, tak připouštíme, že hustota pravděpodobnosti délek rozestupů se mohou mezi sloupci lišit, ale budeme požadovat, aby všechny tyto hustoty byly škálované na střední hodnotu rovnou jedné.

Následně pro všechny řádky spočítáme kumulativní sumu, čímž získáme matici jejíž prvky v každém řádku budou reprezentovat vzdálenosti částice od počátku (tj. multirozteče). S takto připravenými daty už můžeme začít počítat intervalové frekvence. Pro každý řádek matice otestujeme podmínku, kolik prvků (částic) má menší hodnotu (multirozteč) nižší než $L \in \mathbb{R}$, což koresponduje s hodnotou intervalové frekvence \mathcal{N}_L .

V návaznosti na tuto metodiku vystává otázka, jak rozhodnout o počtu sloupců K v matici. Ten je nutné určit podle délky intervalu L , pro kterou budeme chtít intervalovou frekvenci počítat, abychom zaručili, že alespoň jeden prvek matice bude mít větší hodnotu vyšší než L . V opačném případě se může stát, že zaneseme do výpočtu chyby. Při práci se syntetickými daty hodnotu K nadhodnotíme a přidáme kontrolní mechanismus, který bude hlídat, že nenastává zmíněná situace a popřípadě hodnotu K zvýší.

Tento přístup může být nevýhodný při zpracování měření z reálné dopravy, jelikož dostupná data využijeme poměrně neefektivně. Ovšem metodikou zpracovávání reálných dat se budeme zabývat později.

2.2 Popis numerického modelu

Po vygenerování dat a vyčíslení intervalových frekvencí se budeme zabývat výpočtem trendové, shlukové funkce a statistické rigidity. V dalších podkapitolách shrneme společný přístup, jenž byl použit.

Zmíněné statistiky pro heterogenní BČS řádně definujeme později, ale už teď prozradíme, že definice budou analogické s definicemi statistik pro homogenní BČS, viz 1.4.1 a 1.6.1.

2.2.1 Hustota pravděpodobnosti multiroztečí

Mějme připravenou matici vygenerovaných dat, jak bylo zmíněno. Při práci se syntetickými daty hustotu pravděpodobnosti multiroztečí reprezentují hodnoty v příslušných sloupcích matice. Pro vykreslení grafu multiroztečí v kapitole 3 vygenerujeme hodnoty v prvním sloupci z jednoho rozdělení pravděpodobnosti a pro všechny ostatní sloupce využíváme odlišné rozdělení pravděpodobnosti. Obdobně v kapitole 4 používáme odlišná rozdělení pravděpodobnosti pro liché a sudé sloupce. Volbu rozdělení pravděpodobnosti zmíníme v příslušných kapitolách.

2.2.2 Numerický model trendové funkce

Trendovou funkci odhadneme standardně průměrem intervalových frekvencí. Tudíž pro každé L a pro všech N řádků matice syntetických dat spočítáme počet prvků v daném řádku, jejichž hodnota je menší než zvolené L , čímž získáme intervalové frekvence pro jednotlivé řádky. Následně pouze spočteme průměrnou hodnotou intervalových frekvencí.

2.2.3 Numerický model statistické rigidity

Statistickou rigidity počítáme jako výběrový rozptyl intervalových frekvencí. Stejně jako při výpočtu trendové funkce spočítáme pro každé L a N intervalové frekvence, jež zmenšíme o L . Následně tyto rozdíly umocníme a z nich spočteme průměrnou hodnotu.

2.2.4 Použité parametry

Pokud u konkrétního příkladu není řečeno jinak, tak byly použity následující parametry:

1. Množství dat: pro pokus bylo vygenerováno 100000×30 měření.
2. Parametr L : tento parametr byl brán z množiny $L \in \{0.01, 0.02, 0.03, \dots, 5\}$

Kapitola 3

Kvazihomogenní BČS

V této kapitole představíme kvazihomogenní balanční částicový systém a detailně nahlédneme na jeho popis a základní vlastnosti. Před tím než se do studia kvazihomogenního BČS naplno pustíme, tak ještě zaved' me potřebné značení, kterého se budeme následně držet v celé práci:

1. Znakem: \sum' budeme rozumět operátor, pro který platí, že pokud je dolní index větší než horní index nebo jsou si indexy rovny, tak je operátor neaktivní, tzn. chová se jako identita vzhledem k okolní operaci.
2. Znakem: \otimes budeme rozumět operátor, pro který znovu platí, že pokud je dolní index větší než horní index nebo jsou si rovny, tak je operátor neaktivní.
3. Znakem: \prod' budeme rozumět operátor, pro který platí, že pokud je dolní index větší nebo roven hornímu indexu, tak je operátor znovu neaktivní.

3.1 Zavedení systému

Na úvod definujme kvazihomogenní BČS a jeho základní popisy, od kterých budeme nadále odvozovat vlastnosti BČS.

Definice 3.1.1. Kvazihomogenním balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{\infty}$, kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých a nezávislých náhodných veličin, přičemž $\mathcal{R}_N, \mathcal{R}_{N+1}, \mathcal{R}_{N+2}, \dots$, kde $N \in \mathbb{N}_0$, jsou stejně rozdělené náhodně veličiny s hustotou pravděpodobnosti ze třídy \mathcal{B} , kterou budeme značit $h(x) \in \mathcal{B}$. Hustotu pravděpodobnosti náhodných veličin $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N-1}$ postupně označme $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x) \in \mathcal{B}$ a hustoty pravděpodobnosti $h(x)$ a $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ budeme nazývat generátory kvazihomogenního balančního částicového systému. Systém nazveme škálovaným kvazihomogenním balančním částicovým systémem, pokud navíc platí, že $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = 1$.

Pro definovaný kvazihomogenní BČS dále zaved' me jeho základní popisy.

Definice 3.1.2. Mějme kvazihomogenní BČS. Pak prvky posloupnosti $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{\infty}$, kterou je kvazihomogenní BČS definován, nazýváme rozteče.

Definice 3.1.3. Mějme kvazihomogenní BČS. Pak multirozteče $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ definujeme předpisem:

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m.$$

Definice 3.1.4. Nakonec zavádíme systém náhodných veličin s parametrem $L > 0$, který nazýváme intervalovou četností a značíme \mathcal{N}_L . Intervalové četnosti definujeme:

$$\mathcal{N}_L = \sum_k I(x_k < L),$$

kde x_k je posloupnost realizací náhodných veličin $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^\infty$ a $I(\cdot)$ je funkce indikující, jestli je podmínka pravdivá, tzn.

$$I(\text{podmínka}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je podmínka pravdivá,} \\ 0 & \text{pokud není podmínka pravdivá.} \end{cases}$$

3.2 Statistické popisy a vztahy mezi nimi

Zavedli jsme tři základní popisy kvazihomogenního BČS. Cílem této sekce bude ukázat, jak lze mezi jednotlivými popisy kvazihomogenního BČS přecházet a že tyto popisy jsou ekvivalentní.

3.2.1 Přejchod od roztečí k intervalovým frekvencím

Jako první odvodíme přechod od popisu pomocí roztečí k popisu pomocí intervalových frekvencí. Budeme potřebovat vyjádřit hustotu pravděpodobnosti multiroztečí kvazihomogenního BČS.

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m \sim \left(\underset{i=0}{*}^{\min\{k, N-1\}} h_i(x) \right) * \left(\underset{j=N}{*}^k h(x) \right),$$

Hodnotu intervalové frekvence určujeme jako počet částic ve vzdálenosti L za referenční částicí jako v homogenním BČS. Dále určíme pravděpodobnost, že se na intervalu délky L za referenční částicí nenachází žádná částice, tj.

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 \geq L] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 < L] = 1 - H_0(L),$$

kde $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\} : H_i(x) = \int_{-\infty}^x h_i(y) dy$ je distribuční funkce příslušná generátoru h_i a $H(x)$ je distribuční funkcí generátoru $h(x)$. Podobně odvodíme pravděpodobnost, že intervalová frekvence bude rovna libovolnému $k \in \mathbb{N}$, tj. že se na intervalu délky L za referenční částicí bude nacházet právě k částic.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] &= \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L \wedge \mathcal{X}_k \geq L] = \mathbb{P}\left[\mathcal{X}_{k-1} < L \cap [\mathcal{X}_k < L]^c\right] = |A \cap B^c| = |A \setminus B| = \\ &= \mathbb{P}\left[\mathcal{X}_{k-1} < L \setminus [\mathcal{X}_k < L]\right] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L] - \mathbb{P}[\mathcal{X}_k < L] = G_{k-1}(L) - G_k(L), \end{aligned}$$

kde $\forall i \in \mathbb{N}$ jsou $G_i(x)$ distribučními funkcemi příslušné hustotám pravděpodobnosti multiroztečí g_i a platí:

$$G_k(x) = \int_{-\infty}^x g_k(y) dy, \quad g_k(x) = \left(\underset{i=0}{*}^{\min\{k, N-1\}} h_i(x) \right) * \left(\underset{j=N}{*}^k h(x) \right).$$

Když nyní tyto závěry shrneme, dostáváme rovnice:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = 1 - G_0(L) = 1 - H_0(L) \quad \wedge \quad \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = G_{k-1}(L) - G_k(L). \quad (3.1)$$

3.2.2 Přechod od intervalových frekvencí k roztečím

Ze vztahů (3.1) lze odvodit i přechod od popisu pomocí intervalových frekvencí k popisu pomocí roztečí. Tvar generátoru $h_0(x)$ získáme zderivováním vztahu $H_0(L) = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0]$, a sice

$$h_0(x) = -\frac{dH_0(x)}{dx} = -\Theta(x) \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 0]}{dx}. \quad (3.2)$$

Rozdělení multiroztečí získáme úpravou a sečtením rovnic (3.1):

$$\begin{aligned} G_0(L) &= 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0], \\ G_1(L) &= G_0(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 1] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 1] = 1 - \sum_{m=0}^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m], \\ G_2(L) &= G_1(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 2] = 1 - \sum_{m=0}^3 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m], \\ &\vdots \\ G_k(L) &= G_{k-1}(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m]. \end{aligned}$$

Zderivováním určíme rozdělení multiroztečí:

$$g_k(x) = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}. \quad (3.3)$$

Nalezli jsme přechody mezi popisy kvazihomogenního BČS.

3.3 Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti

Vyslovme definice charakteristik 1. řádu a jejich základní vlastnosti pro kvazihomogenní BČS.

Definice 3.3.1. Mějme kvazihomogenní balanční částicový systém, pak zavádíme charakteristiky prvního řádu jako:

1. Střední hodnota roztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} xh(x)dx.$
2. Střední hodnota multiroztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} xg_k(x)dx.$
3. Trendová funkce: $\omega(L) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k].$
4. Shluková funkce: $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x).$

Ze znalosti prvních momentů generátorů kvazihomogenního BČS můžeme přímočaře určit střední hodnotu multiroztečí, což shrnuje následující věta.

Věta 3.3.2. Mějme kvazihomogenní balanční částicový systém. Pak platí:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \max\{0, k - N + 1\}\mathbb{E}(\mathcal{R}) + \sum_{l=0}^{\min\{k, N-1\}} \mathbb{E}(\mathcal{R}_l).$$

Důkaz. Toto tvrzení je analogií věty z teorie pravděpodobnosti, která říká, že střední hodnota je lineární funkcionál, tj. střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot náhodných veličin. \square

Věta 3.3.3. Necht' $r(x)$ je shluková funkce kvazihomogenního BČS s generátory $h(x) \in \mathcal{B}$ a $h_i(x) \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Dále zaved' me pojmy:

1. Shluková funkce prvního druhu kvazihomogenního BČS: $\hat{s}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k g_k(x)$,
2. Shluková funkce druhého druhu kvazihomogenního BČS: $\hat{t}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 g_k(x)$,

pak funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ stejnoměrně konvergují na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Důkaz. Víme, že pro generátory kvazihomogenního BČS $h_i(x) \in \mathcal{B}$ a $h(x) \in \mathcal{B}$ platí:

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\} : h_i(x) < K_i \in \mathbb{R}^+, \\ h(x) < K \in \mathbb{R}^+.$$

Hustoty multiroztečí pak můžeme odhadnout následovně:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \Theta(x) \int_0^x h_0(y) h_1(x-y) dy \leq \Theta(x) K_0 K_1 x, \\ g_2(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_1(y) h_2(x-y) dy \leq \Theta(x) K_0 K_1 K_2 \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 K_2}{2} x^2, \\ &\vdots \\ g_{N-1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{N-2}(y) h_{N-1}(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{(N-1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{(N-1)!} x^{N-1}, \\ g_N(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{N-1}(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} K}{N!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} K}{N!} x^N, \\ g_{N+1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_N(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} K^2}{(N+1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} K^2}{(N+1)!} x^{N+1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak pro funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ platí:

$$\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \leq \\
&\leq K_0 + K_0 K_1 L + K_0 K_1 K_2 \frac{L^2}{2} + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \sum_{n=N}^{+\infty} K^n \frac{L^n}{n!} = \\
&= K_0 + K_0 K_1 L + K_0 K_1 K_2 \frac{L^2}{2} + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \left(e^{LK} - \sum_{n=0}^{N-1} K^n \frac{L^n}{n!} \right), \\
\hat{s}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n g_n(x) \leq \\
&\leq K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-2)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \sum_{n=N}^{+\infty} K^n \frac{L^n}{(n-1)!} = \\
&= K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-2)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \sum_{n=N-1}^{+\infty} K^{n+1} \frac{L^{n+1}}{n!} = \\
&= K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-2)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} L}{K^{N-2}} \left(e^{LK} - \sum_{n=0}^{N-2} K^n \frac{L^n}{n!} \right), \\
\hat{t}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 g_n(x) \leq \\
&\leq K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{(N-1)L^{N-1}}{(N-2)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \sum_{n=N}^{+\infty} K^n n \frac{L^n}{(n-1)!} = \\
&\leq K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{(N-1)L^{N-1}}{(N-2)!} + \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \sum_{n=N-1}^{+\infty} K^{n+1} (n+1) \frac{L^{n+1}}{n!} = \\
&\leq K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{(N-1)L^{N-1}}{(N-2)!} + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{K^{N-1}} \left(KL \sum_{n=N-1}^{+\infty} K^n \frac{L^n}{(n-1)!} + \sum_{n=N-1}^{+\infty} K^{n+1} \frac{L^{n+1}}{n!} \right) = \\
&= K_0 K_1 L + \cdots + K_0 K_1 \cdots K_{N-1} \frac{(N-1)L^{N-1}}{(N-2)!} + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1} L}{K^{N-2}} \left((KL+1)e^{LK} - \sum_{n=0}^{N-2} K^n \frac{L^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-3} K^n \frac{L^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

V úpravách funkcí $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ bylo použito posunutí spodní meze sum a následně jejich přeindexování. Navíc v posledním kroku úpravy funkce $\hat{t}(x)$ jsme se odvolali na mezikroky úprav funkce $\hat{s}(x)$. Závěrem plyne, že funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ jsou omezené na každém kompaktu $\langle 0, L \rangle$. Dále z Weierstrassova kritéria funkce stejnoměrně konvergují na intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Poznámka. Pokud speciálně zvolíme $N = 1$, tak si můžeme v důkazu povšimnout, že v posledních úpravách shlukové funkce prvního a druhého druhu vychází horní index sum záporný. Pro tyto případy ovšem není potřeba poslední úpravu provádět, jelikož již v předposlední úpravě budou dolní indexy sum nulové, což umožní vyjádřit jejich součet. Podobné tvrzení platí také pro volbu $N = 2$.

□

Věta 3.3.4. Necht' $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce kvazihomogenního balančního částicového systému s generátory $h(x) \in \mathcal{B}$ a $h_i(x) \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Pak platí

$$\omega(L) = \int_0^L r(x) dx.$$

Důkaz. Vyděme přímo z definice trendové funkce a proved' me následující úpravy:

$$\begin{aligned} \omega(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\int_0^L g_{k-1}(x) dx - \int_0^L g_k(x) dx \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \\ &= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \\ &= \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} [g_0(x) - g_1(x) + 2g_1(x) - 2g_2(x) + \dots + ng_{n-1}(x) - ng_n(x)] dx = \\ &= \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^n g_k(x) - ng_n(x) \right] dx = \int_0^L \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} ng_n(x) \right) dx = \int_0^L \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) dx. \end{aligned}$$

V posledním kroku úpravy jsme využili rovnost $\lim_{n \rightarrow +\infty} ng_n(x) = 0$, která plyne z nutné podmínky konvergence shlukové funkce prvního druhu, tj. řady $\sum_{k=0}^{\infty} kg_k(x)$, viz věta 3.3.3. □

3.3.1 Laplaceova forma charakteristik 1. řádu kvazihomogenního BČS

Definice 3.3.5. Necht' $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ a $h(x)$ jsou generátory roztečí a $r(x)$ je shluková funkce kvazihomogenního balančního částicového systému, pak označme Laplaceovy transformace daných funkcí jako $\mathbb{R}(s) := \mathcal{L}[r(x)]$, $\mathbb{H}(s) := \mathcal{L}[h(x)]$ a $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\} : \mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$.

Věta 3.3.6. Necht' $r(x)$ je shluková funkce a $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ a $h(x)$ jsou generátory roztečí škálovaného kvazihomogenního BČS a $\mathbb{R}(s)$, $\mathbb{H}(s)$ a $\mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, jsou jim příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : r(x) > 0$ a navíc $r(x) = \Theta(x)r(x)$.
2. $\forall s > 0 : 0 < \mathbb{H}(s) < 1$.
3. $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall s > 0 : 0 < \mathbb{H}_i(s) < 1$.
4. Platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}, \\ \mathcal{L}[\omega(x)](s) &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \frac{1}{s} \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

5. $r(x)$ je omezená na \mathbb{R} a $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = 1$.

Důkaz. Dokažme jednotlivá tvrzení věty ve stejném pořadí v jakém jsme je vyslovili.

1. Funkce $r(x)$ je definována jako $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ a dále platí:

$$g_k(x) = \Theta(x)g_k(x) \implies r(x) = \Theta(x)r(x).$$

2. Víme, že Laplaceův obraz generátoru $h(x)$ je klesající funkcí, protože:

$$\mathbb{H}'(s) = - \int_{\mathbb{R}} xh(x)e^{-sx} dx < 0,$$

První derivace funkce \mathbb{H} je záporná, proto bude tato funkce klesající a bude mít nejvyšší hodnotu pro $s = 0$. V tomto bodě bude pro škálovaný systém platit:

$$\mathbb{H}(0_+) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \mu_0(h) = 1.$$

Z těchto důvodů lze říct, že:

$$\forall s > 0 : \mathbb{H}(s) < 1.$$

Dále si můžeme snadno z definice povšimnout, že $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{H}(s) = 0$ a zároveň, jak už bylo zmíněno, je funkce klesající a z vlastností Laplaceovy transformace i spojitá. Na základě čehož platí:

$$\forall s > 0 : \mathbb{H}(s) > 0.$$

3. Pro $\mathbb{H}_i(s)$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, lze nerovnosti ukázat analogicky jako v předchozím bodě.

4. Rozepišme funkci $\mathbb{R}(s)$ podle definice:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(s) &= \mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\underset{i=0}{\overset{\min\{k, N-1\}}{\ast}} h_i(x)\right) \ast \left(\underset{j=N}{\overset{k}{\circledast}} h(x)\right)\right)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\left[\left(\underset{i=0}{\overset{\min\{k, N-1\}}{\ast}} h_i(x)\right) \ast \left(\underset{j=N}{\overset{k}{\circledast}} h(x)\right)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{\min\{k, N-1\}} \mathcal{L}[h_i(x)] \prod_{j=N}^k \mathcal{L}[h(x)] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{\min\{k, N-1\}} \mathbb{H}_i(s) \mathbb{H}^{\max\{0, k-N+1\}}(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{H}^k(s) = \\ &= \left| \mathbb{H}(s) < 1 \text{ na } (0, +\infty) \right| = \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}, \end{aligned}$$

kde jsme na posledním řádku sumu spočítali jako součet geometrické řady. Z tohoto závěru dále plyne:

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \frac{1}{s} \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}.$$

5. Z vlastnosti Laplaceovy transformace nazývané "Final Value Theorem" víme [11], že:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s).$$

Tento výraz rozepíšme pomocí tvrzení v pátém bodě této věty a následně použijme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0_+} s \left(\sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{s\mathbb{H}(s) \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\
&\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{H}(s) \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) + s\mathbb{H}'(s) \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) + s\mathbb{H}(s) \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{H}'_j(s) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{H}_i(s)}{-\mathbb{H}'(s)} = \\
&= \frac{\mu_0(h) \prod_{i=0}^{N-1} \mu_0(h_i) - 0 \cdot \mu_1(h) \prod_{i=0}^{N-1} \mu_0(h_i) - 0 \cdot \mu_0(h) \sum_{j=0}^{N-1} \mu_1(h_j) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mu_0(h_i)}{\mu_1(h)} = \\
&= \frac{\mu_0(h) \prod_{i=0}^{N-1} \mu_0(h_i)}{\mu_1(h)}
\end{aligned}$$

Dále pokud uvažujeme škálovaný systém, pak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s) = \frac{\mu_0(h) \prod_{i=0}^{N-1} \mu_0(h_i)}{\mu_1(h)} = \frac{1}{1} = 1,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Poznámka. Pokud budeme předpokládat $N = 1$, pak se rovnice 4.4 zjednoduší do tvaru:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}(s) &= \mathbb{H}_0(s) + \mathbb{H}_0(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 - \mathbb{H}(s)) + \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}, \\
\mathcal{L}[\omega(x)](s) &= \frac{1}{s} \mathbb{H}_0(s) + \frac{1}{s} \mathbb{H}_0(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{s(1 - \mathbb{H}(s))}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Věta 3.3.7. Necht' $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ a $h(x)$ jsou generátory roztečí kvazihomogenního BČS a $\mathbb{H}(s) := \mathcal{L}[h(x)]$ a $\mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, jsou jim příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. $\mathbb{E}(\mathcal{R}_0) = -\mathbb{H}'_0(O_+)$,
2. $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = -\mathbb{G}'_k(O_+) = \max\{0, k - N + 1\} \mu_1(h) + \sum_{l=0}^{\min\{k, N-1\}} \mu_1(h_l)$.

Důkaz. Dokažme rovnosti v pořadí v jakém jsme je vyslovili.

1. První rovnost dostaneme přepisem derivace definičního vztahu $\mathbb{H}_0(s)$ pro $s = 0$:

$$\mathbb{H}'_0(O_+) = - \int_{\mathbb{R}} x h_0(x) dx = -\mu_1(h_0) \iff \mathbb{E}(\mathcal{R}_0) = -\mathbb{H}'_0(O_+).$$

2. Část druhé rovnosti jsme již dokázali ve větě 3.3.2, proto zde zdůvodníme pouze část rovnosti. Upravme střední hodnotu multiroztečí kvazihomogenního BČS:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} x g_k(x) dx = \lim_{s \rightarrow 0_+} \mathcal{L}[g_k(x)](s) = - \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{d\mathcal{L}[g_k(x)](s)}{ds} = - \lim_{s \rightarrow 0_+} \mathbb{G}'_k(s) = -\mathbb{G}'_k(O_+).$$

Tímto jsme dokázali první rovná se rovnosti a zbytek rovnosti máme již dokázán ve větě 3.3.2. □

3.4 Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti

V této sekci se podíváme detailněji na charakteristiky 2. řádu kvazihomogenního BČS a vyslovme jejich vlastnosti.

3.4.1 Charakteristiky 2. řádu

Charakteristiky 2. řádu jsou odvozené od druhých momentů balancované hustoty a definujeme je následovně.

Definice 3.4.1. Mějme kvazihomogenní balanční částicový systém. Pak zavádíme charakteristiky druhého řádu jako:

1. Rozptyl roztečí: $\text{VAR}(\mathcal{R}_k) = \mu_2(h) - 1$.
2. Rozptyl multiroztečí: $\text{VAR}(\mathcal{X}_k) = \text{VAR}(\sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m) = (k+1) \text{VAR}(\mathcal{R}_0)$.
3. Frekvenční rozptyl: $\text{VAR}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mathbb{E}(L))^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - \omega^2(L)$.
4. Statistická rigidita: $\Delta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L)^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - 2L\omega(L) + L^2$.

3.4.1.1 Laplaceova forma charakteristik 2. řádu

Pro naše zkoumání vlastností kvazihomogenního balančních částicových systémů bude klíčový Laplaceův obraz statistické rigidity:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Delta(L)] &= \mathcal{L}[\mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2)] - 2\mathcal{L}[L\omega(L)] + \mathcal{L}[L^2] = 2\frac{\mathbb{R}^2(s)}{s} + \frac{\mathbb{R}(s)}{s} + 2\frac{s\mathbb{R}'(s) - \mathbb{R}(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3}, \\ s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &= 2(1 - s\mathbb{R}(s)) + s^2(2\mathbb{R}^2(s) + \mathbb{R}(s) + 2\mathbb{R}'(s)). \end{aligned}$$

Vyjádřeme obecně $\mathbb{R}'(s)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}'(s) &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(s) + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} \right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k \mathbb{H}'_l(s) \prod_{i=0, i \neq l}^k \mathbb{H}_i(s) + \sum_{l=0}^{N-1} \mathbb{H}'_l(s) \prod_{i=0, i \neq l}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(s) \frac{\mathbb{H}'(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2} \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu dále pokračujeme v odvozování pro případ $N = 1$. Pro tuto volbu N platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(s) &= \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)}, \\ \mathbb{R}^2(s) &= \frac{\mathbb{H}_0^2(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2}, \\ \mathbb{R}'(s) &= \mathbb{H}'_0(s) + \mathbb{H}'_0(s) \frac{\mathbb{H}(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + \mathbb{H}_0(s) \frac{\mathbb{H}'(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2} = \frac{\mathbb{H}'_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + \mathbb{H}_0(s) \frac{\mathbb{H}'(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2}. \end{aligned}$$

Dosaď me za $\mathbb{R}(s)$ a upravme následovně:

$$\begin{aligned} s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &= 2 \left(1 - \frac{s\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} \right) + s^2 \left(2 \frac{\mathbb{H}_0^2(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2} + \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + 2 \frac{\mathbb{H}'_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + 2\mathbb{H}_0(s) \frac{\mathbb{H}'(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2} \right) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{s\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} \right) + s^2 \left(\frac{\mathbb{H}_0(s) + 2\mathbb{H}'_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} + \frac{2\mathbb{H}_0^2(s) + 2\mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}'(s)}{(1 - \mathbb{H}(s))^2} \right) \equiv B(s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zkoumejme lineární asymptotu statistické rigidity, tj.:

$$\Delta(L) = \chi L + \delta + O\left(\frac{1}{L}\right) \iff \Delta(L) \doteq \chi L + \delta,$$

pak ze znalosti Laplaceovy transformace statistické rigidity můžeme určit lineární a absolutní člen lineární asymptoty:

$$\begin{aligned} s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] \doteq s^3 \mathcal{L}[\chi L + \delta] &= s^3 \left(\frac{\chi}{s^2} + \frac{\delta}{s} \right) = \chi s + \delta s^2 \stackrel{!}{=} B(s) \doteq B(0) + \frac{B'(0)}{1} s + \frac{B''(0)}{2} s^2 \\ \implies \chi &= B'(0) \wedge \delta = \frac{1}{2} B''(0). \end{aligned}$$

3.5 Speciální případy kvazihomogenního BČS

V této sekci položme $N = 1$ a dále odvozujme vlastnosti pro tento speciální případ. V tabulce 3.1 vidíme již známé hustoty pravděpodobnosti roztečí a multiroztečí homogenních BČS, jež následně využijeme při odvozování hustot pravděpodobnosti multiroztečí kvazihomogenního BČS.

Název rozdělení	Hustota pravděpodobnosti roztečí	Hustota pravděpodobnosti multiroztečí
Poissonovo	$h(x) = \Theta(x)e^{-x}$	$g_k(x) = \Theta(x) \frac{x^k}{k!} e^{-x}$
Semi-poissonovo	$h(x) = \Theta(x) 4xe^{-2x}$	$g_k(x) = \frac{4^{k+1}}{(2k+1)!} \Theta(x) x^{2k+1} e^{-2x}$
Erlangovo	$h(x) = \Theta(x) \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(n+1)x}$	$g_k(x) = \frac{(n+1)^{(n+1)(k+1)}}{(k+n+kn)!} \Theta(x) x^{k+n+kn} e^{-(n+1)x}$
Gamma	$h(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-(\alpha+1)x}$	$g_k(x) = \frac{(\alpha+1)^{(\alpha+1)(k+1)}}{\Gamma(k+\alpha+k\alpha+1)} \Theta(x) x^{k+\alpha+k\alpha} e^{-(\alpha+1)x}$

Tabulka 3.1: Hustoty pravděpodobnosti roztečí a multiroztečí homogenních BČS.

Díky vlastnosti asociativity konvoluce můžeme spočítat nejprve konvoluci stejně rozdělených roztečí s generátorem $h(x)$, přičemž výsledek této konvoluce již známe ze studia homogenních BČS. Pak lze hustotu multiroztečí kvazihomogenního BČS zapsat jako konvoluci generátoru odlišné nulté rozteče a již známé hustoty pravděpodobnosti multiroztečí homogenního BČS, tzn.

$$g_k(x) = h_0(x) * \left(\bigstar_{j=1}^k h(x) \right) = h_0(x) * g_{k-1}(x).$$

V následujících podsekcích si ukážeme aplikaci vět z této kapitoly na úlohách s vybranými generátory. Začneme od přímočařejších úloh, od kterých postupně přejdeme k úlohám složitějším. Budeme dále pracovat se škálovanými variantami kvazihomogenních BČS.

3.5.1 Generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení

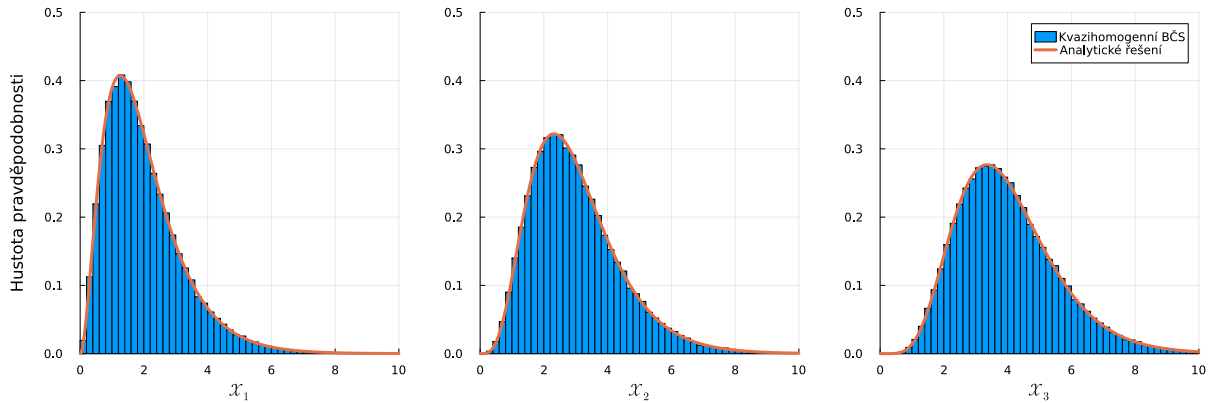
Tuto sekci rozdělíme na dvě části podle toho, jestli za generátor $h_0(x)$ budeme považovat Poissonovo rozdělení a za generátor $h(x)$ Erlangovo rozdělení nebo přesně naopak.

3.5.1.1 Generátor $h(x)$ z Erlangova rozdělení

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x)e^{-x}$ a $h(x) = \Theta(x)\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}x^n e^{-(n+1)x}$, pak:

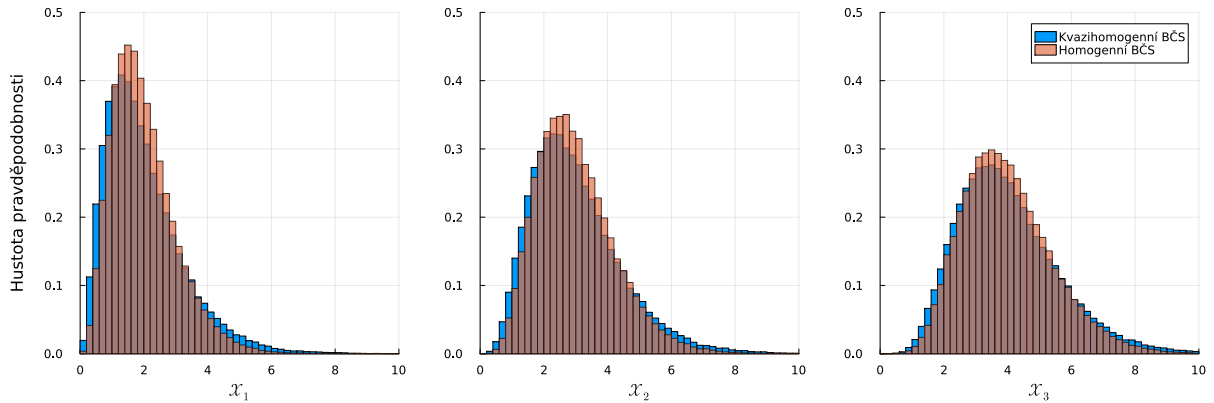
$$\begin{aligned}
 g_k(x) &= h_0(x) * g_{k-1}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_0(x-y) \cdot g_{k-1}(y) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Theta(x-y)e^{-(x-y)} \cdot \frac{(n+1)^{k(n+1)}}{(k-1+kn)!} \Theta(y)y^{k-1+kn} e^{-(n+1)y} dy = \frac{(n+1)^{k(n+1)}}{(k-1+kn)!} e^{-x} \int_0^x y^{k-1+kn} e^{-ny} dy = \\
 &= \frac{(n+1)^{k(n+1)}}{(k-1+kn)!} e^{-x} n^{-k(n+1)} (\Gamma(nk+k) - \Gamma(nk+k, nx)) = \\
 &= \frac{(n+1)^{k(n+1)}}{(k-1+kn)!} e^{-x} n^{-k(n+1)} (nk+k-1)! \left(1 - e^{-nx} \sum_{j=0}^{nk+k-1} \frac{(nx)^j}{j!} \right) = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{k(n+1)} e^{-x} \left(1 - e^{-nx} \sum_{j=0}^{nk+k-1} \frac{(nx)^j}{j!} \right) = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{k(n+1)} e^{-x} \left(e^{-nx} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(nx)^j}{j!} - e^{-nx} \sum_{j=0}^{nk+k-1} \frac{(nx)^j}{j!} \right) = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{k(n+1)} e^{-(n+1)x} \sum_{j=k(n+1)}^{+\infty} \frac{(nx)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

Nalezené řešení platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Pro ověření správnosti analytického zápisu ho dále dořešme numericky a porovnejme toto řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Pro ukázkou uvažujme, že parametr škálovaného Erlangova rozdělení je $n = 1$.



Obrázek 3.1: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení ve srovnání s analytickým zápisem.

Pro upřesnění představy o rozdílnosti hustoty pravděpodobnosti kvazihomenního a homogenního BČS dále porovnejme hustoty pravděpodobnosti multiroztečí. Porovnávat budeme takto zavedený kvazihomenní BČS a homogenní BČS s generátorem ze škálovaného Erlangova rozdělení. Generátory ze škálovaného Erlangova rozdělení mají parametr $n = 1$.



Obrázek 3.2: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení.

Dále vyjádříme shlukovou a trendovou funkci za pomoci Laplaceových transformací generátorů a 3.5.

$$\mathbb{H}_0(s) = \mathcal{L}[h_0(x)] = \frac{1}{s+1},$$

$$\mathbb{H}(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \left(\frac{1+n}{1+n+s} \right)^{n+1},$$

pak pro shlukovou a trendovou funkci studovaného BČS platí:

$$\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 - \left(\frac{1+n}{1+n+s} \right)^{n+1}},$$

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{s(1 - \mathbb{H}(s))} = \frac{\frac{1}{s+1}}{s \left(1 - \left(\frac{1+n}{1+n+s} \right)^{n+1} \right)}.$$

Pro zmíněné tvary Laplaceovy transformace shlukové a trendové funkce nelze obecně spočítat inverzní Laplaceovu transformaci a proto uved' me výslednou podobu shlukové a trendové funkce pouze pro konkrétní volby parametru n , viz tabulky 3.2 a 3.3.

Parametr n	Shluková funkce
$n = 0$	$r(x) = 1$
$n = 1$	$r(x) = \frac{e^{-4x}}{3} - \frac{e^{-x}}{3} + 1$
$n = 2$	$r(x) = -\frac{8e^{-x}}{19} + \frac{2e^{-\frac{9}{2}x} \left(3 \sin\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) + 4\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) \right)}{19\sqrt{3}} + 1$

Tabulka 3.2: Shluková funkce ho BČS.

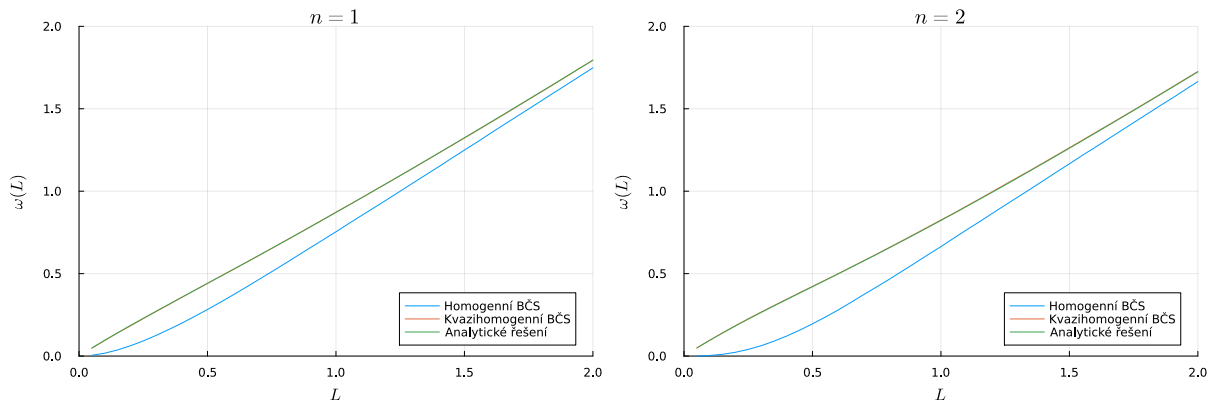
Poznámka. Pověšimněme si, že funkční hodnoty shlukové funkce pro zmíněné hodnoty parametrů kvazi-homogenního BČS v krajním případě $x = 0$ jsou $r(0) = 1$, což je v kontrastu s homogenními BČS. Pro homogenní BČS je $r(0) = 0$ pro všechny varianty BČS vyjma Poissonového.

Parametr n	Trendová funkce
$n = 0$	$\omega(x) = x$
$n = 1$	$\omega(x) = x - \frac{e^{-4x}}{12} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{4}$
$n = 2$	$\omega(x) = x + \frac{8e^{-x}}{19} - \frac{e^{-\frac{9x}{2}} \left(5\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) \right)}{57\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$

Tabulka 3.3: Trendová funkce ho BČS.

Poznámka. Hodnoty trendová funkce pro zmíněné parametry v krajním případě $x = 0$ jsou $\omega(0) = 0$, což vychází stejně jako pro homogenní BČS.

Vykresleme porovnání analytického a numerického výpočtu trendové funkce.



Obrázek 3.3: Trendová funkce ho BČS s generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení.

Nakonec se ještě zaměříme na statistiky druhého řádu a to konkrétně na statistickou rigiditu. Pro výpočet statistické rigidity nejprve vyjádříme derivace Laplaceových obrazů pro oba generátory:

$$\mathbb{H}'_0(s) = -\frac{1}{(s+1)^2},$$

$$\mathbb{H}'(s) = -\frac{\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1} (n+1)}{1+n+s}.$$

Pak z rovnice 3.6 platí:

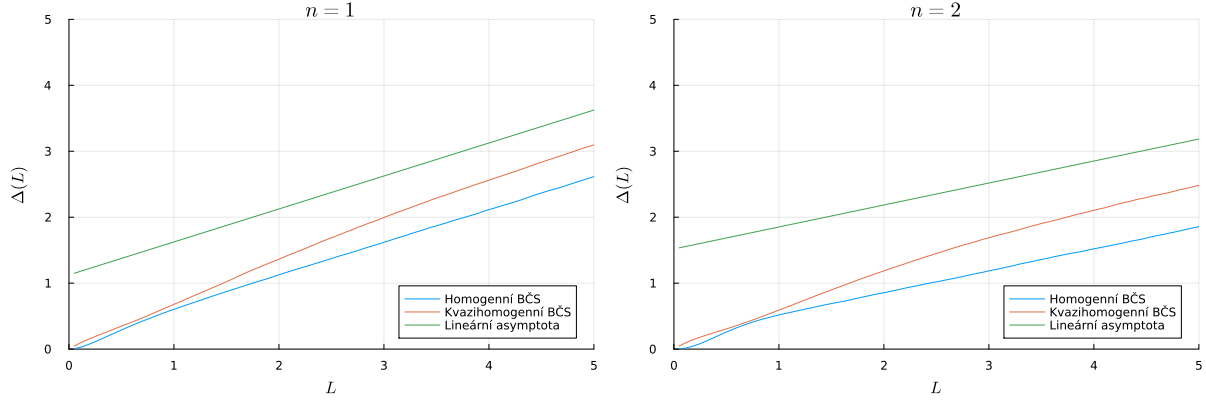
$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 \left(1 - \frac{s}{(s+1) \left(1 - \left(\frac{n+1}{1+n+s} \right)^{n+1} \right)} \right) + s^2 \left(\frac{\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}}{1 - \left(\frac{n+1}{1+n+s} \right)^{n+1}} + \frac{\frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2 \left(\frac{n+1}{1+n+s} \right)^{n+1} (n+1)}{(s+1)(1+n+s)}}{\left(1 - \left(\frac{n+1}{1+n+s} \right)^{n+1} \right)^2} \right) \equiv B(s).$$

Spočítejme Maclaurinův rozvoj této funkce v okolí nuly:

$$\chi = B'(0) = \frac{1}{n+1},$$

$$\delta = \frac{1}{2} B''(0) = \frac{1}{6} \frac{n(14n+13)}{(n+1)^2}.$$

Vykresleme porovnání numericky spočítané statistické rigidity z syntetických dat a analyticky spočítané lineární asymptoty pro kvazihomogenní BČS. Pro porovnání do grafu přidejme vykreslení numericky spočítané statistické rigidity ze syntetických dat i pro homogenní BČS, viz 3.4.



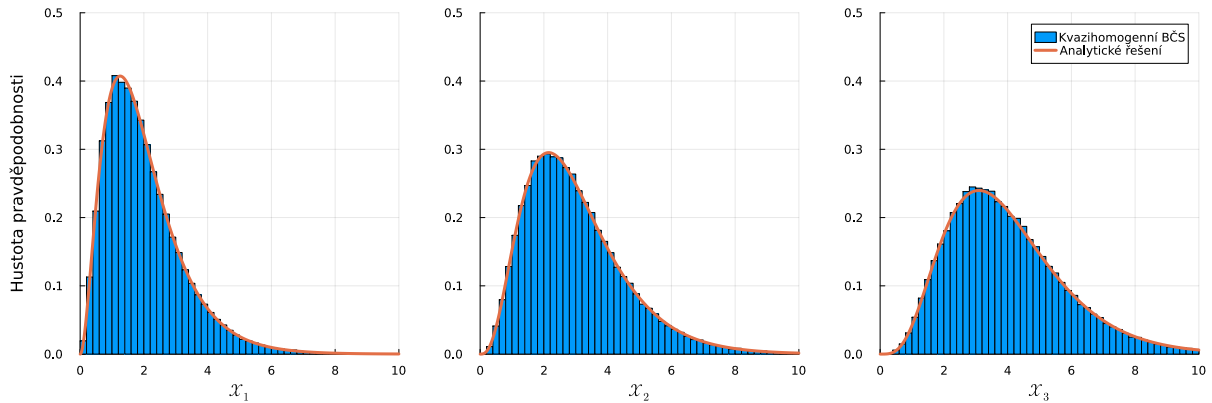
Obrázek 3.4: Stochastická rigidita ho BČS s generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení a její lineární asymptota.

3.5.1.2 Generátor $h(x)$ z Poissonova rozdělení

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x) \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(n+1)x}$ a $h(x) = \Theta(x) e^{-x}$, pak:

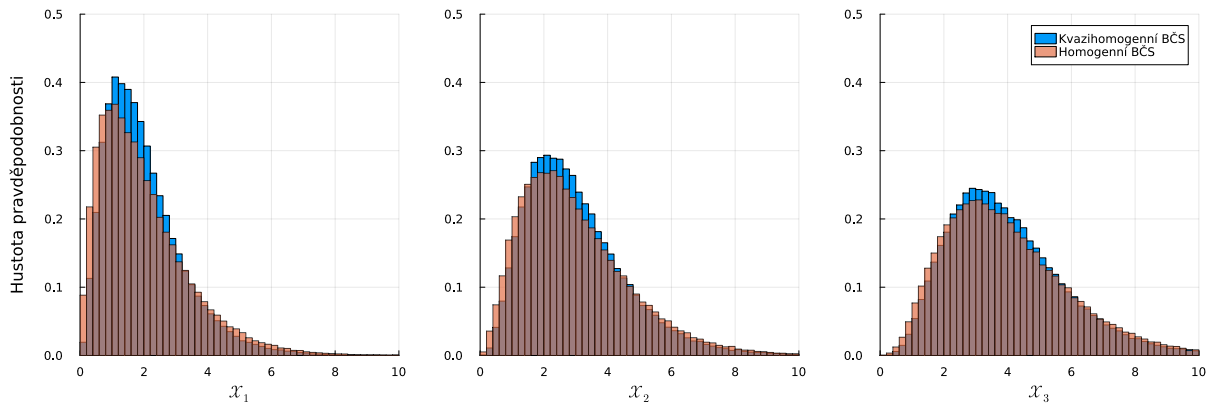
$$\begin{aligned}
 g_k(x) &= h_0(x) * g_{k-1}(x) = g_{k-1}(x) * h_0(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k-1}(x-y) \cdot h_0(y) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Theta(y) \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} y^n e^{-(n+1)y} \Theta(x-y) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(x-y)} dy = \\
 &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(k-1)!} e^{-x} \int_0^x y^n e^{-ny} (x-y)^{k-1} dy = \\
 &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(k-1)!} e^{-x} \int_0^x e^{-ny} y^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} (-y)^i dy = \\
 &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(k-1)!} e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} (-1)^i \int_0^x y^{n+i} e^{-ny} dy = \\
 &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(k-1)!} e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} (-1)^i n^{-n-(i+1)} (\Gamma(n+(i+1)) - \Gamma(n+(i+1), nx)) = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{e^{-x}}{n!(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} \left(-\frac{1}{n}\right)^i (\Gamma(n+(i+1)) - \Gamma(n+(i+1), nx)) = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{e^{-x}}{n!(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} \left(-\frac{1}{n}\right)^i (n+i)! \left(1 - e^{-nx} \sum_{j=0}^{n+i} \frac{(nx)^j}{j!}\right) = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{e^{-x}}{n!(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-i-1} \left(-\frac{1}{n}\right)^i (n+i)! e^{-nx} \sum_{j=n+i+1}^{+\infty} \frac{(nx)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

Řešení je platné pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro ověření znovu analytický zápis dořešme numericky a porovnejme toto řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Pro ukázkou opět uvažujme, že parametr škálovaného Erlangova rozdělení je $n = 1$.



Obrázek 3.5: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení ve srovnání s analytickým zápisem.

Následně porovnejme hustotu pravděpodobnosti multiroztečí kvazihomogenního BČS, který byl využit v obrázku 3.5 s homogenním BČS, jehož generátorem je také škálované Erlangovo rozdělení s parametrem $n = 1$.



Obrázek 3.6: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení.

Dále vyjádříme shlukovou a trendovou funkci za pomoci Laplaceových transformací generátorů a 3.5.

$$\mathbb{H}_0(s) = \mathcal{L}[h_0(x)] = \left(\frac{1+n}{1+n+s} \right)^{n+1},$$

$$\mathbb{H}(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \frac{1}{s+1},$$

pak pro shlukovou a trendovou funkci studovaného BČS platí:

$$\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\left(\frac{1+n}{1+n+s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{s+1}},$$

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{s(1 - \mathbb{H}(s))} = \frac{\left(\frac{1+n}{1+n+s}\right)^{n+1}}{s\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)}.$$

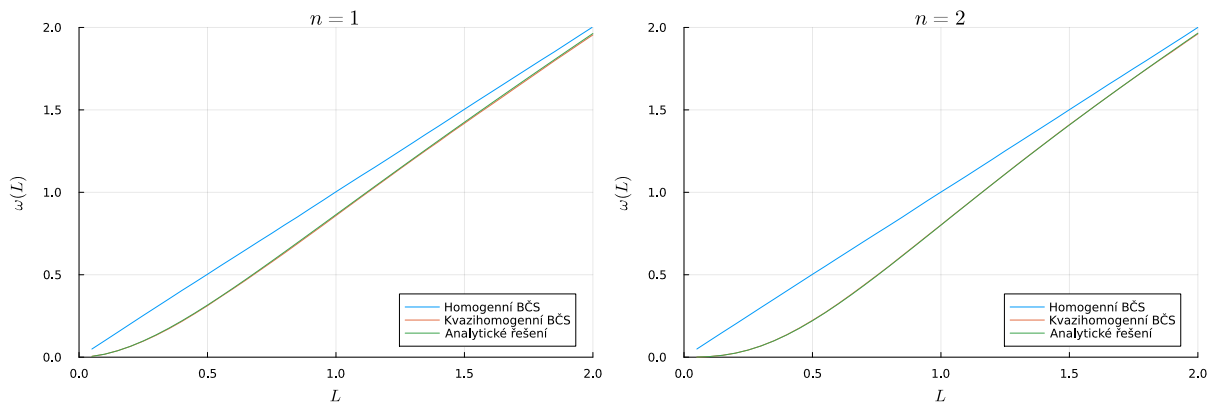
Pro zmíněné tvary Laplaceovy transformace shlukové a trendové funkce nelze obecně spočítat inverzní Laplaceovu transformaci a proto uved' me výslednou podobu shlukové a trendové funkce pouze pro konkrétní volby parametru n , viz tabulka 3.4.

Parametr n	Shluková funkce	Trendová funkce
$n = 0$	$r(x) = 1$	$\omega(x) = x$
$n = 1$	$r(x) = e^{-2x}(e^{2x} + 2x - 1)$	$\omega(x) = 4\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x}x\right)$
$n = 2$	$r(x) = e^{-3x}(9x^2 - 3x + e^{3x} - 1)$	$\omega(x) = e^{-3x}(-3x + e^{3x} - 1)x$

Tabulka 3.4: Hustoty pravděpodobnosti roztečí a multiroztečí homogenních BČS.

Poznámka. V krajním případě $x = 0$ je stejně jako v předchozí sekci $\omega(0) = 0$. Oproti předchozí je potřeba si povšimnout, že shluková $r(0) = 0$ pro všechny zmíněné hodnoty parametrů vyjma $n = 0$.

Vykresleme porovnání analytického a numerického výpočtu trendové funkce.



Obrázek 3.7: Trendová funkce ho BČS s generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení.

Nakonec se ještě zaměříme na statistiky druhého řádu a to konkrétně na statistickou rigiditu. Pro výpočet statistické rigidity nejprve vyjádříme derivace Laplaceových obrazů pro oba generátory:

$$\mathbb{H}'_0(s) = -\frac{\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1} (n+1)}{1+n+s},$$

$$\mathbb{H}'(s) = -\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Pak z rovnice 3.6 platí:

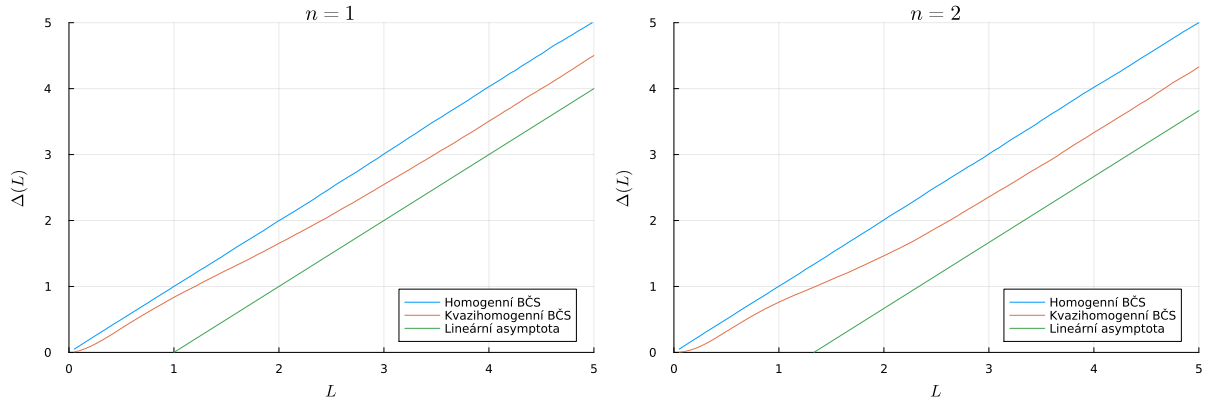
$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 - \frac{2s \left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{s+1}} + s^2 \left(\frac{\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1} - \frac{2\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1}(n+1)}{1+n+s}}{1 - \frac{1}{s+1}} + \frac{2\left(\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1}\right)^2 - \frac{2\left(\frac{n+1}{1+n+s}\right)^{n+1}}{(s+1)^2}}{\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^2} \right) \equiv B(s).$$

Spočítejme Maclaurinův rozvoj této funkce v okolí nuly:

$$\chi = B'(0) = 1,$$

$$\delta = \frac{1}{2} B''(0) = -2 \frac{n}{n+1}.$$

Následně vykresleme srovnání statistické rigidity ze syntetických dat a analyticky spočítané lineární asymptoty pro kvazihomogenní BČS. Pro porovnání do grafu navíc přidejme vykreslení statistické rigidity pro homogenní BČS, viz 3.8.



Obrázek 3.8: Stochastická rigidity ho BČS s generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení a její lineární asymptota.

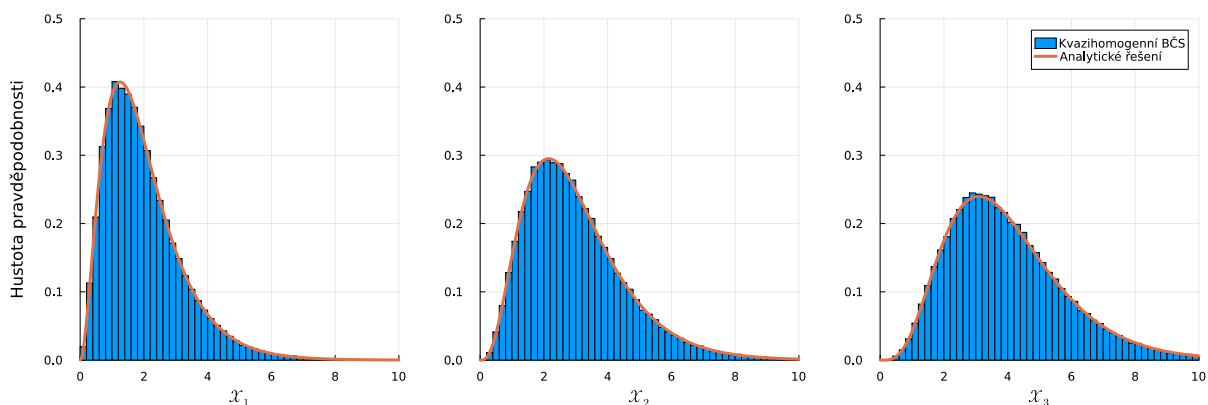
3.5.2 Generátory z Erlangova rozdělení

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x) \frac{(n_0+1)^{n_0+1}}{n_0!} x^{n_0} e^{-(n_0+1)x}$ a $h(x) = \Theta(x) \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(n+1)x}$, pak:

$$\begin{aligned} g_k(x) &= h_0(x) * g_{k-1}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_0(x-y) \cdot g_{k-1}(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Theta(x-y) \frac{(n_0+1)^{n_0+1}}{n_0!} (x-y)^{n_0} e^{-(n_0+1)(x-y)} \cdot \frac{(n+1)^{k(n+1)}}{(k-1+kn)!} \Theta(y) y^{k-1+kn} e^{-(n+1)y} dy = \\ &= \frac{(n_0+1)^{n_0+1} (n+1)^{k(n+1)}}{n_0! (k-1+kn)!} e^{-(n_0+1)x} \int_0^x (x-y)^{n_0} \cdot y^{k-1+kn} e^{-(n-n_0)y} dy = \\ &= \frac{(n_0+1)^{n_0+1} (n+1)^{k(n+1)}}{n_0! (k-1+kn)!} e^{-(n_0+1)x} \int_0^x y^{k-1+kn} e^{-(n-n_0)y} \sum_{i=0}^{n_0} \binom{n_0}{i} x^{n_0-i} (-y)^i dy = \\ &= \frac{(n_0+1)^{n_0+1} (n+1)^{k(n+1)}}{n_0! (k-1+kn)!} e^{-(n_0+1)x} \sum_{i=0}^{n_0} \binom{n_0}{i} x^{n_0-i} (-1)^i \int_0^x y^{k-1+kn+i} e^{-(n-n_0)y} dy = \\ &= \frac{(n_0+1)^{n_0+1} (n+1)^{k(n+1)}}{n_0! (k-1+kn)!} e^{-(n_0+1)x} \sum_{i=0}^{n_0} \binom{n_0}{i} \frac{x^{n_0-i} (-1)^i}{(n-n_0)^{kn+k+i}} (\Gamma(nk+k+i) - \Gamma(nk+k+i, (n-n_0)x)) \end{aligned}$$

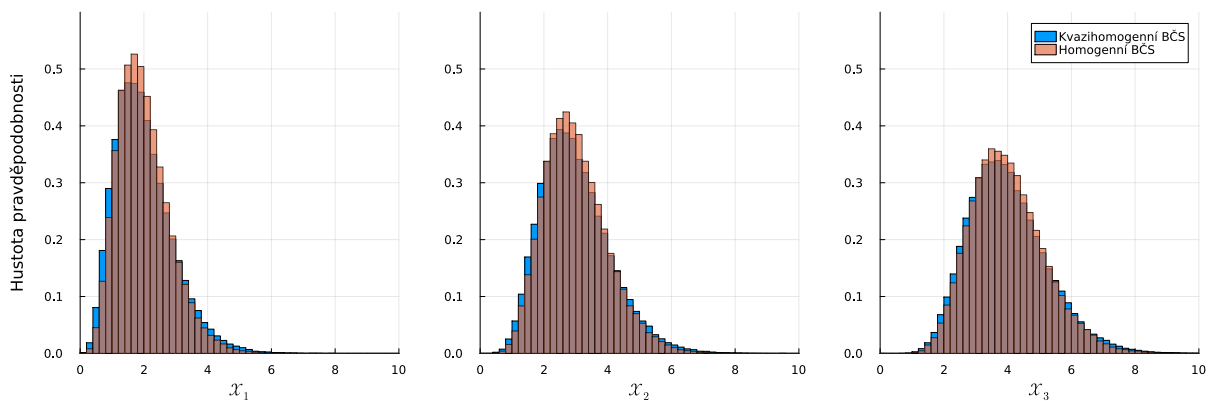
Úlohu jsme vyřešili pro všechny volby $n, n_0 \in \mathbb{N}$, kdy $n > n_0$. Řešení pro $n_0 < n$ zmíníme v rámci následující podsekcce, kde budeme řešit analogickou úlohu s generátory z gamma rozdělení, které je zobecněním Erlangova rozdělení.

V rámci ověření správnosti analytického zápisu ho znovu dořešíme numericky a porovnejme toto řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí ze syntetických dat. Pro ukázkou uvažujme, že parametr škálovaného Erlangova rozdělení $h_0(x)$ je $n_0 = 1$ a rozdělení $h(x)$ je $n = 2$.



Obrázek 3.9: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova rozdělení s různými parametry ve srovnání s analytickým zápisem.

Znovu porovnejme hustotu pravděpodobnosti multiroztečí kvazihomenního BČS a homogenního BČS, přičemž generátorem homogenního BČS je škálované Erlangovo rozdělení s parametrem $n = 1$.



Obrázek 3.10: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova rozdělení.

Statistiky prvního a druhého řádu odvodíme až v rámci následující podsekcce.

3.5.3 Generátory z gamma rozdělení

Pro práci s kvazihomenním BČS, jehož oba generátory jsou z gamma rozdělení, pak již nelze použít binomická věta pro rozklad mnohočlenu, ale lze použít Taylorův rozvoj. Až na tento rozdíl bude postup analogický.

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0+1)} x^{\alpha_0} e^{-(\alpha_0+1)x}$ a $h(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-(\alpha+1)x}$, pak:

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= h_0(x) * g_{k-1}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_0(x-y) \cdot g_{k-1}(y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Theta(x-y) \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0+1)} (x-y)^{\alpha_0} e^{-(\alpha_0+1)(x-y)} \cdot \frac{(\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(k+k\alpha)} \Theta(y) y^{k-1+k\alpha} e^{-(\alpha+1)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha_0+1)x} \int_0^x (x-y)^{\alpha_0} \cdot y^{k-1+k\alpha} e^{-(\alpha-\alpha_0)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha_0+1)x} \int_0^x y^{k-1+k\alpha} e^{-(\alpha-\alpha_0)y} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha_0}{i} x^{\alpha_0-i} (-y)^i dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha_0+1)x} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha_0}{i} x^{\alpha_0-i} (-1)^i \int_0^x y^{k-1+k\alpha+i} e^{-(\alpha-\alpha_0)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha_0+1)x} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha_0}{i} \frac{x^{\alpha_0-i} (-1)^i}{(\alpha-\alpha_0)^{k+k\alpha+i}} (\Gamma(k+k\alpha+i) - \Gamma(k+k\alpha+i, (\alpha-\alpha_0)x))
\end{aligned}$$

V odvození hustoty pravděpodobnosti multiroztečí nám ještě chybí obhájit záměnu integrálu a sumy. Za tímto účelem rozvoj detailněji rozepišme:

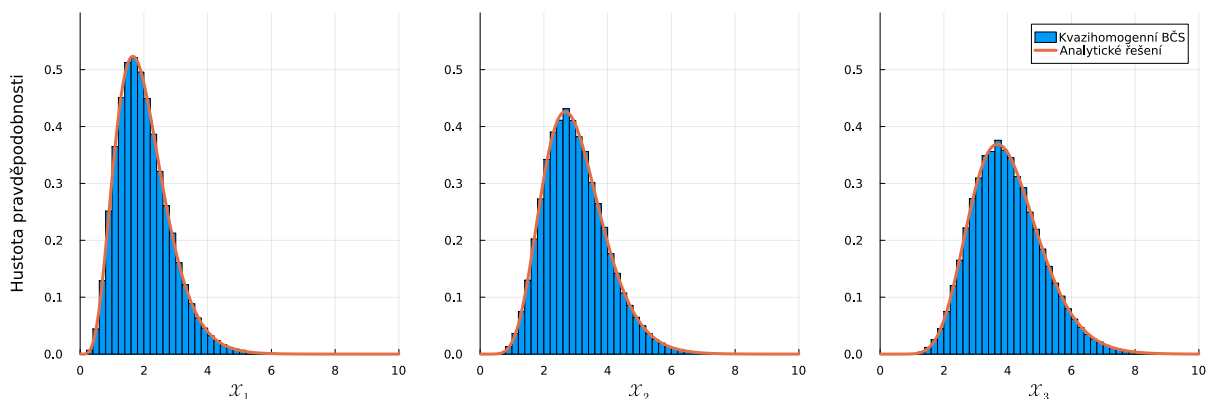
$$(x-y)^{\alpha_0} = x^{\alpha_0} \left(1 + \left(-\frac{y}{x}\right)\right)^{\alpha_0} = x^{\alpha_0} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha_0}{i} \left(-\frac{y}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha_0}{i} x^{\alpha_0-i} (-y)^i$$

Víme, že Taylorův rozvoj konverguje pro všechna $y : \left|-\frac{y}{x}\right| < 1$. Přes proměnnou y integrujeme na intervalu $\langle 0, x \rangle$, takže všechny možné hodnoty proměnné y spadají do oboru konvergence kromě $y = x$, což je ovšem množina míry nula, takže na výsledek integrace nebude mít vliv.

Nalezené řešení je pro $\forall \alpha, \alpha_0 \in \mathbb{R} : \alpha > \alpha_0$. Dořešme úlohu i parametry splňující opačnou nerovnost.

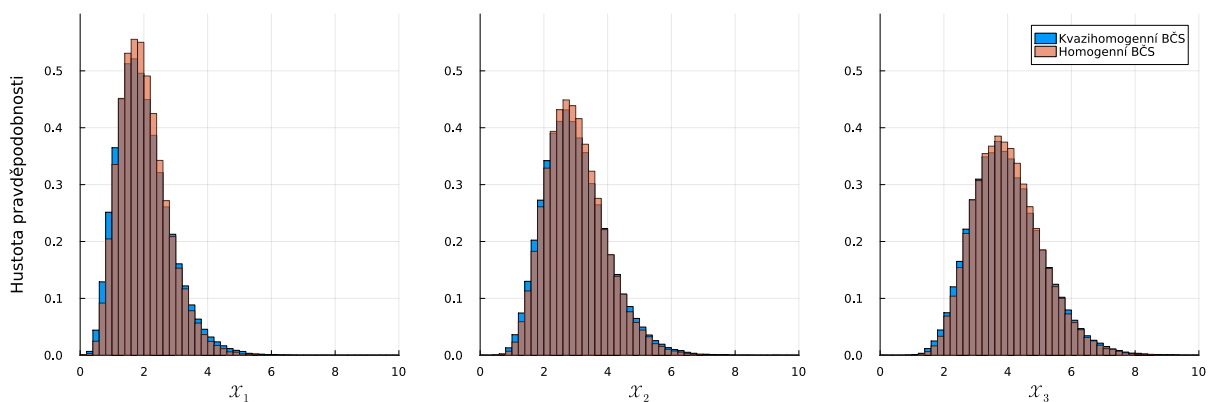
$$\begin{aligned}
g_k(x) &= g_{k-1}(x) * h_0(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k-1}(x-y) \cdot h_0(y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{(\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(k+k\alpha)} \Theta(x-y) y^{k-1+k\alpha} e^{-(\alpha+1)(x-y)} \cdot \Theta(y) \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0+1)} y^{\alpha_0} e^{-(\alpha_0+1)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha+1)x} \int_0^x y^{\alpha_0} \cdot (x-y)^{k-1+k\alpha} e^{-(\alpha_0-\alpha)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha+1)x} \int_0^x y^{\alpha_0} e^{-(\alpha_0-\alpha)y} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k-1+k\alpha}{i} x^{k-1+k\alpha-i} (-y)^i dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha+1)x} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k-1+k\alpha}{i} x^{k-1+k\alpha-i} (-1)^i \int_0^x y^{\alpha_0+i} e^{-(\alpha_0-\alpha)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1} (\alpha+1)^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha_0+1) \Gamma(k+k\alpha)} e^{-(\alpha+1)x} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k-1+k\alpha}{i} \frac{x^{k-1+k\alpha-i} (-1)^i}{(\alpha_0-\alpha)^{\alpha_0+i+1}} (\Gamma(\alpha_0+i+1) - \Gamma(\alpha_0+i+1, (\alpha_0-\alpha)x))
\end{aligned}$$

Pro ověření správnosti analytického zápisu ho opět spočítáme numericky a porovnejme toto řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Pro ukázkou uvažujme, že parametr škálovaného gamma rozdělení $h_0(x)$ je $\alpha_0 = 1.5$ a $h(x)$ je $\alpha = 2.5$.



Obrázek 3.11: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z gamma rozdělení s různými parametry ve srovnání s analytickým zápisem.

Dále porovnejme hustotu pravděpodobnosti multiroztečí s takto zavedeným kvazihomogenním BČS a homogenním BČS, jehož generátorem je škálované gamma rozdělení s parametrem $\alpha = 1.5$.



Obrázek 3.12: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z gamma rozdělení.

Zaměříme se na výpočet shlukové a trendové funkce. V této úloze budeme postupovat analogicky jako u příkladu v sekci 3.5.2.

$$\mathbb{H}_0(s) = \mathcal{L} [h_0(x)] = \left(\frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0 + s} \right)^{\alpha_0+1},$$

$$\mathbb{H}(s) = \mathcal{L} [h(x)] = \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + s} \right)^{\alpha+1},$$

pak platí:

$$\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{1 - \mathbb{H}(s)} = \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1}}{1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1}},$$

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)}{s(1 - \mathbb{H}(s))} = \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1}}{s\left(1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1}\right)}.$$

Stejně jako v sekci 3.5.2 nelze zmíněné tvary Laplaceovy transformace shlukové a trendové funkce obecně spočítat inverzní Laplaceovu transformaci. Uvedeme tedy výslednou shlukovou a trendovou funkci pouze pro základní celočíselné volby parametru α_0 a α , viz tabulky 3.5 a 3.6. Parametry volíme celočíselné, protože pro celočíselné parametry je pak možné výslednou shlukovou a trendovou funkci lépe zapsat v analytickém tvaru a celočíselné volby parametrů se budeme držet po zbytek této podsekcce.

Parametr α_0	Parametr α	Shluková funkce
$\alpha_0 = 1$	$\alpha = 2$	$r(x) = 4 \left(-\frac{1}{26}xe^{-2x} - \frac{81e^{-2x}}{676} - \frac{2e^{-\frac{9x}{2}} \left(11\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) - 12 \sin\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) \right)}{169\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \right)$
$\alpha_0 = 2$	$\alpha = 1$	$r(x) = 1/2e^{-4x} (-9x^2e^x + 48xe^x - 56e^x + 2e^{4x} + 54)$

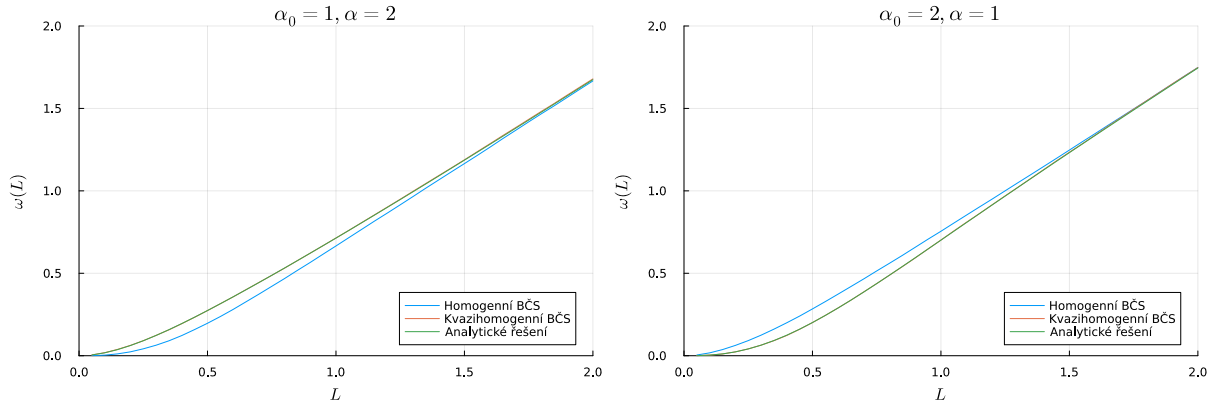
Tabulka 3.5: Hustoty pravděpodobnosti roztečí a multiroztečí homogenních BČS.

Parametr α_0	Parametr α	Trendová funkce
$\alpha_0 = 1$	$\alpha = 2$	$\omega(x) = 4 \left(\frac{1}{52}xe^{-2x} + \frac{x}{4} + \frac{47e^{-2x}}{676} + \frac{e^{-\frac{9x}{2}} \left(7\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) - 23 \sin\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) \right)}{507\sqrt{3}} - \frac{1}{12} \right)$
$\alpha_0 = 2$	$\alpha = 1$	$\omega(x) = \frac{1}{4}e^{-4x} (6x^2e^x - 28xe^x + 4xe^{4x} + 28e^x - e^{4x} - 27)$

Tabulka 3.6: Hustoty pravděpodobnosti roztečí a multiroztečí homogenních BČS.

Poznámka. Pro krajní případ $x = 0$ je podobně jako v předchozích sekcích $\omega(0) = 0$ a $r(0) = 0$ pro všechny zmíněné hodnoty parametrů.

Vykresleme porovnání analytického a numerického výpočtu trendové funkce.



Obrázek 3.13: Trendová funkce kvazihomogenního BČS s generátory z gamma rozdělení.

Nakonec se ještě zaměříme na statistiky druhého řádu a to konkrétně na statistickou rigiditu. Pro výpočet statistické rigidity nejprve vyjádříme derivace Laplaceových obrazů pro oba generátory:

$$\mathbb{H}'_0(s) = -\frac{\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} (\alpha_0 + 1)}{1 + \alpha_0 + s},$$

$$\mathbb{H}'(s) = -\frac{\left(\frac{\alpha+1}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1} (\alpha + 1)}{1 + \alpha + s}.$$

Pak z rovnice 3.6 platí:

$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 - \frac{2s \left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1}}{1 - \left(\frac{\alpha+1}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1}} +$$

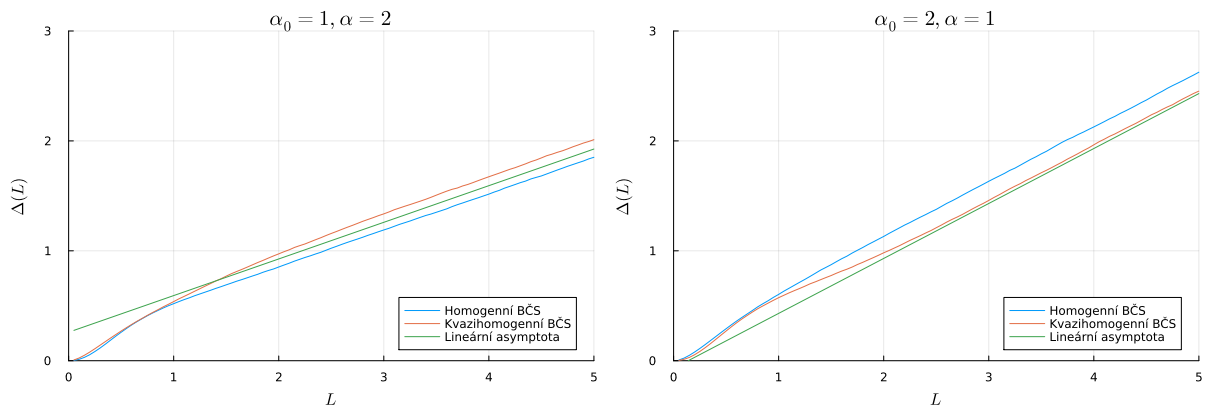
$$+ s^2 \left(\frac{\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} - \frac{2\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} (\alpha_0+1)}{1+\alpha_0+s}}{1 - \left(\frac{\alpha+1}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1}} + \frac{2\left(\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1}\right)^2 - \frac{2\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{\alpha+1}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1} (\alpha+1)}{1+\alpha+s}}{\left(1 - \left(\frac{\alpha+1}{1+\alpha+s}\right)^{\alpha+1}\right)^2} \right) \equiv B(s).$$

Spočítejme Maclaurinův rozvoj této funkce v okolí nuly:

$$\chi = B'(0) = \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\delta = \frac{1}{2} B''(0) = \frac{1}{6} \frac{2(\alpha_0 + 7)\alpha^2 + (-11\alpha_0 + 13)\alpha - 12\alpha_0}{(\alpha_0 + 1)(\alpha + 1)^2}.$$

Znovu v grafu 3.14 porovnejme statistickou rigiditu ze simulovaných dat a analyticky spočítanou lineární asymptoty pro kvazihomogenní BČS s generátory z gamma rozdělení. Dále do grafu přidejme vykreslení numericky spočítané statistické rigidity pro homogenní BČS.



Obrázek 3.14: Stochastická rigidita kvazihomogenního BČS s generátory z gamma rozdělení a její lineární asymptota.

Odvodili jsem statistiky prvního a druhého řádu pro konkrétní případy kvazihomogenního BČS. Dále se zaměříme na další variantu heterogenního BČS.

Kapitola 4

Heterogenní BČS s periodickými generátory

V této kapitole shrneme popis a základní vlastnosti heterogenního balančního částicového systému s periodickými generátory.

4.1 Zavedení systému

Zavedme heterogenní BČS s periodickými generátory.

Definice 4.1.1. Heterogenním balančním částicovým systémem s periodickými generátory rozumíme posloupnost roztečí $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{\infty}$, kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých a nezávislých náhodných veličin, přičemž:

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\} : \mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{N+i}, \mathcal{R}_{2N+i}, \dots \sim h_i(x),$$

kde $N \in \mathbb{N}_0$ a $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ jsou $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{N+i}, \mathcal{R}_{2N+i}, \dots$ stejně rozdělené náhodně veličiny s hustotou pravděpodobnosti ze třídy \mathcal{B} , kterou budeme značit $h_i(x) \in \mathcal{B}$. Hustoty pravděpodobnosti

$$h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$$

budeme nazývat generátory heterogenního balančního částicového systému s periodickými generátory. Škálovaným heterogenním balančním částicovým systémem s periodickými generátory nazveme systém, pro který navíc platí, že $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = 1$.

Definice 4.1.2. Mějme heterogenní BČS s periodickými generátory. Pak prvky posloupnosti $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{\infty}$, kterou je heterogenní BČS s periodickými generátory definován, nazýváme rozteče.

Definice 4.1.3. Mějme heterogenní BČS s periodickými generátory. Pak popis BČS pomocí posloupností multiroztečí $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ definujeme:

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

Definice 4.1.4. Nakonec zavádíme systém náhodných veličin s parametrem $L > 0$, který nazýváme intervalovou četností a značíme \mathcal{N}_L . Intervalové četnosti definujeme:

$$\mathcal{N}_L = \sum_k I(x_k < L),$$

kde x_k je posloupnost realizací náhodných veličin $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ a $I(\cdot)$ je funkce indikující, jestli je podmínka pravdivá, tzn.

$$I(\text{podmínka}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je podmínka pravdivá,} \\ 0 & \text{pokud není podmínka pravdivá.} \end{cases}$$

4.2 Statistické popisy a vztahy mezi nimi

V kapitole 3 jsme zavedli základní popisy heterogenního BČS s periodickými generátory. V této sekci ukážeme přechody mezi popisy systému.

4.2.1 Přejchod od roztečí k intervalovým frekvencím

V prvním kroku odvodíme přechod od charakterizace pomocí intervalových frekvencí k charakterizaci pomocí roztečí. V tomto procesu bude nezbytné zavést hustotu pravděpodobnosti pro multirozteče daného BČS:

$$X_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m \sim \left(\bigstar_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} \bigstar_{i=0}^{N-1} h_i(x) \right) \bigstar_{l=0}^{k \bmod N} h_l(x).$$

Dále určíme pravděpodobnost, že na úseku o délce L se za referenční částicí nenachází žádná další částice, tedy

$$\mathbb{P}[N_L = 0] = \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 \geq L] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 < L] = 1 - H_0(L),$$

kde pro každé $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$: $H_i(x) = \int_{-\infty}^x h_i(y) dy$ je distribuční funkce příslušného generátoru h_i . Obdobně stanovíme pravděpodobnost, že intervalová frekvence dosáhne libovolné hodnoty $k \in \mathbb{N}$, tzn. že se na úseku o délce L referenční částicí vyskytne přesně k částic.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_L = k] &= \mathbb{P}[X_{k-1} < L \wedge X_k \geq L] = \mathbb{P}\left[X_{k-1} < L \cap [X_k < L]^c \right] = |A \cap B^c = A \setminus B| = \\ &= \mathbb{P}\left[X_{k-1} < L \setminus [X_k < L] \right] = \mathbb{P}[X_{k-1} < L] - \mathbb{P}[X_k < L] = G_{k-1}(L) - G_k(L), \end{aligned}$$

kde $\forall i \in \mathbb{N}$ jsou $G_i(x)$ distribučními funkcemi odpovídající pravděpodobnostním hustotám multiroztečí g_i , a to tak, že:

$$G_k(x) = \int_{-\infty}^x g_k(y) dy, \quad g_k(x) = \left(\bigstar_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} \bigstar_{i=0}^{N-1} h_i(x) \right) \bigstar_{l=0}^{k \bmod N} h_l(x).$$

Shrnutí těchto zjištění lze vyjádřit v podobě následujících rovnic:

$$\mathbb{P}[N_L = 0] = 1 - G_0(L) = 1 - H(L) \quad \wedge \quad \mathbb{P}[N_L = k] = G_{k-1}(L) - G_k(L). \quad (4.1)$$

4.2.2 Přejchod od intervalových frekvencí k roztečím

Pomocí vztahů (4.1) lze také vyjádřit přechod od charakterizace pomocí intervalových frekvencí k charakterizaci pomocí roztečí.

Zderivováním vztahu $H(L) = 1 - \mathbb{P}[N_L = 0]$ získáme tvar odpovídajícího generátoru, konkrétně:

$$h(x) = -\frac{dH(x)}{dx} = -\Theta(x) \frac{d\mathbb{P}[N_x = 0]}{dx}. \quad (4.2)$$

Distribuci multiroztečí odvodíme úpravou a sečtením rovnic (4.1):

$$\begin{aligned}
G_0(L) &= 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0], \\
G_1(L) &= G_0(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 1] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 1] = 1 - \sum_{m=0}^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m], \\
G_2(L) &= G_1(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 2] = 1 - \sum_{m=0}^3 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m], \\
&\vdots \\
G_k(L) &= G_{k-1}(L) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = m].
\end{aligned}$$

Zderivováním těchto distribucí získáme hustotu pravděpodobnosti pro multirozteče:

$$g_k(x) = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}. \quad (4.3)$$

Odvodili jsme přechody mezi formami popisu heterogenního BČS s periodickými generátory.

4.3 Charakteristiky 1. řádu a jejich vlastnosti

Definujme charakteristiky prvního řádu heterogenního BČS s periodickými generátory a ukažme jejich vlastnosti.

Definice 4.3.1. Mějme heterogenní BČS s periodickými generátory. Pak zavádíme charakteristiky prvního řádu jako:

1. Střední hodnota roztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} xh(x)dx.$
2. Střední hodnota multiroztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} xg_k(x)dx.$
3. Trendová funkce: $\omega(L) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k].$
4. Shluková funkce: $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x).$

Střední hodnota multiroztečí v heterogenním BČS s periodickými generátory lze zapsat pomocí středních hodnot roztečí a tuto vlastnost ukazuje následující věta.

Věta 4.3.2. Mějme heterogenní BČS s periodickými generátory. Pak platí

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}(\mathcal{R}_i) + \sum_{l=0}^{k \bmod N} \mathbb{E}(\mathcal{R}_l).$$

Důkaz. Toto tvrzení je znovu analogií věty z teorie pravděpodobnosti, tj. střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot náhodných veličin. \square

Pro vyslovení další vlastnosti bude potřeba ukázat, že shluková funkce a shluková funkce prvního druhu heterogenního BČS s periodickými generátory stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle 0, L \rangle$, což dokazuje další věta.

Věta 4.3.3. Necht' $r(x)$ je shluková funkce heterogenního BČS s periodickými generátory $h_i(x) \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Dále zaved' me pojmy:

1. Shluková funkce prvního druhu heterogenního BČS s periodickými generátory:

$$\hat{s}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k g_k(x),$$

2. Shluková funkce druhého druhu heterogenního BČS s periodickými generátory:

$$\hat{t}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 g_k(x),$$

pak funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ stejnoměrně konvergují na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Důkaz. Víme, že pro generátory $h_i(x) \in \mathcal{B}$ heterogenního BČS, platí:

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\} : h_i(x) < K_i \in \mathbb{R}^+,$$

Hustoty multiroztečí pak můžeme odhadnout následovně:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \Theta(x) \int_0^x h_0(y) h_1(x-y) dy \leq \Theta(x) K_0 K_1 x, \\ &\vdots \\ g_{N-1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{N-2}(y) h_{N-1}(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{(N-1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{(N-1)!} x^{N-1}, \\ g_N(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{N-1}(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0^2 K_1 \cdots K_{N-1}}{N!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0^2 K_1 \cdots K_{N-1}}{N!} x^N, \\ g_{N+1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_N(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0^2 K_1^2 \cdots K_{N-1}}{(N+1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0^2 K_1^2 \cdots K_{N-1}}{(N+1)!} x^{N+1}, \\ &\vdots \\ g_{2N-1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{2N-2}(y) h_{N-1}(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0^2 K_1^2 \cdots K_{N-1}^2}{(2N-1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0 K_1 \cdots K_{N-1}}{(2N-1)!} x^{2N-1}, \\ g_{2N}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{2N-1}(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0^3 K_1^2 \cdots K_{N-1}^2}{(2N)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0^3 K_1^2 \cdots K_{N-1}^2}{(2N)!} x^{2N}, \\ g_{2N+1}(x) &= \Theta(x) \int_0^x g_{2N}(y) h(x-y) dy \leq \Theta(x) \frac{K_0^3 K_1^3 \cdots K_{N-1}^2}{(2N+1)!} \int_0^x y dy = \Theta(x) \frac{K_0^3 K_1^3 \cdots K_{N-1}^2}{(2N+1)!} x^{2N+1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak pro funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ platí:

$$\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \leq \\
&\leq K_0 + K_0 K_1 L + \dots + K_0 K_1 \dots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-1)!} + K_0^2 K_1 \dots K_{N-1} \frac{L^N}{N!} + \dots \leq \\
&\leq K_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+N-1}}{(n+N-1)!} = K_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \\
&+ \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}}} \sum_{n=N-1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} = K_0 e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \\
&+ \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \left(e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} - \sum_{n=0}^0 \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} \right) + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \left(e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}} L} - \sum_{n=0}^{N-2} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} \right).
\end{aligned}$$

V druhé nerovnosti jsme uměle přidali chybějící členy, aby bylo možné součet napsat do tvaru konvergentní sumy. Přičetli jsme konečné nezáporné hodnoty, takže jsme získali horní odhad. V poslední kroku jsme obdrželi součet konečných výrazů a sum, takže i součet $r(x)$ je konečný.

$$\begin{aligned}
\hat{s}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} ng_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ng_n(x) \leq \\
&\leq K_0 K_1 L + \dots + K_0 K_1 \dots K_{N-1} \frac{L^{N-1}}{(N-2)!} + K_0^2 K_1 \dots K_{N-1} \frac{L^N}{(N-1)!} + \dots \leq \\
&\leq K_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{(n-1)!} + \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+1}}{n!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+N-1}}{(n+N-2)!} = K_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{(n-1)!} + \\
&+ \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{(n-1)!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}}} \sum_{n=N-1}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{(n-1)!} = \\
&= (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + K_0 K_1 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-2}{N}}} \sum_{n=N-2}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} = (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 L e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \\
&+ K_0 K_1 L e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \dots + \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-2}{N}}} \left(e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} - \sum_{n=0}^{N-3} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{t}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 g_n(x) \leq \\
&\leq K_0 K_1 L + \dots + K_0 K_1 \dots K_{N-1} \frac{(N-1)L^{N-1}}{(N-2)!} + K_0^2 K_1 \dots K_{N-1} \frac{NL^N}{(N-1)!} + \dots \leq \\
&\leq K_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{(n-1)!} + \frac{K_0 K_1}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+1}}{n!} + \\
&+ \dots + \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1}}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-1}{N}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+N-1) \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^{n+N-1}}{(n+N-2)!} = \\
&= (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \\
&+ K_0 K_1 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-2}{N}}} \sum_{n=N-2}^{+\infty} \frac{(n+1) \left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} = \\
&= (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{2}{N}} K_0 L^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \\
&+ (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \\
&+ (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 K_1 L^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + K_0 K_1 L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L^2}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-3}{N}}} \sum_{n=N-3}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-2}{N}}} \sum_{n=N-2}^{+\infty} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} = (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{2}{N}} K_0 L^2 e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \\
&+ (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 L e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + (K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} K_0 K_1 L^2 e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \\
&+ K_0 K_1 L e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} + \dots + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L^2}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-3}{N}}} \left(e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} - \sum_{n=0}^{N-4} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} \right) + \\
&+ \frac{K_0 K_1 \dots K_{N-1} L}{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{N-2}{N}}} \left(e^{(K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L} - \sum_{n=0}^{N-3} \frac{\left((K_0 K_1 \dots K_{N-1})^{\frac{1}{N}} L \right)^n}{n!} \right).
\end{aligned}$$

V úpravách funkcí $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ bylo použito posunutí spodní meze sum a následně jejich přeindexování. Navíc v posledním kroku úpravy funkce $\hat{t}(x)$ jsme se odvolali na mezikroky úprav funkce $\hat{s}(x)$. Závěrem

plyne, že funkce $r(x)$, $\hat{s}(x)$ a $\hat{t}(x)$ jsou omezené na každém kompaktu $\langle 0, L \rangle$. Dále z Weierstrassova kritéria funkce stejnoměrně konvergují na intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Poznámka. Pokud speciálně zvolíme $N \in \{2, 3\}$, tak si můžeme v důkazu povšimnout, že v posledních úpravách shlukové funkce prvního a druhého druhu vychází horní index sum záporný. Pro tyto případy stejně jako v důkazu v předchozí kapitole není potřeba provádět poslední úpravu, jelikož již předešlých úpravách budou dolní indexy sum nulové, což umožňuje přímočaře vyjádřit jejich součet. □

Na základě předchozí věty již můžeme vyslovit další vlastnost pro charakteristiky prvního řádu heterogenního BČS s periodickými generátory.

Věta 4.3.4. Necht' $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce heterogenního BČS s periodickými generátory $h_i(x) \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Pak platí

$$\omega(L) = \int_0^L r(x) dx.$$

Důkaz. Vyjděme přímo z definice trendové funkce a proved' me následující úpravy:

$$\begin{aligned} \omega(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[N_L = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\int_0^L g_{k-1}(x) dx - \int_0^L g_k(x) dx \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \\ &= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k [g_{k-1}(x) - g_k(x)] dx = \\ &= \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} [g_0(x) - g_1(x) + 2g_1(x) - 2g_2(x) + \dots + ng_{n-1}(x) - ng_n(x)] dx = \\ &= \int_0^L \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^n g_k(x) - ng_n(x) \right] dx = \int_0^L \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} ng_n(x) \right) dx = \int_0^L \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) dx. \end{aligned}$$

V posledním kroku úpravy jsme využili rovnost $\lim_{n \rightarrow +\infty} ng_n(x) = 0$, která plyne z nutné podmínky konvergence shlukové funkce prvního druhu, tj. řady $\sum_{k=0}^{\infty} kg_k(x)$, viz věta 4.3.3. □

4.3.1 Laplaceova forma charakteristik 1. řádu heterogenního BČS s periodickými generátory

V této podsekti se zabýváme Laplaceovou formou charakteristik prvního řádu heterogenního BČS s periodickými generátory. Nejprve zaved' me potřebné značení a následně tvrzení, které bude klíčové pro výpočty charakteristik prvního řádu.

Definice 4.3.5. Necht' $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ jsou generátory roztečí a $r(x)$ je shluková funkce heterogenního BČS s periodickými generátory. Pak označme Laplaceovy transformace daných funkcí jako $\mathbb{R}(s) := \mathcal{L}[r(x)]$ a $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\} : \mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$.

Věta 4.3.6. Necht' $r(x)$ je shluková funkce a $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ jsou generátory roztečí škálovaného heterogenního BČS s periodickými generátory a $\mathbb{R}(s), \mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, jsou příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : r(x) > 0$ a navíc $r(x) = \Theta(x)r(x)$.
2. $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall s > 0 : 0 < \mathbb{H}_i(s) < 1$.

3. Platí:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(s) &= \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x)}{1 - \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)}, \\ \mathcal{L}[\omega(x)](s) &= \frac{1}{s} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x)}{1 - \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

4. $r(x)$ je omezená na \mathbb{R} a $\lim_{r \rightarrow +\infty} r(x) = 1$.

Důkaz. Dokažme jednotlivá tvrzení věty ve stejném pořadí v jakém jsme je vyslovili.

1. Funkce $r(x)$ je definována jako $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ a dále platí:

$$g_k(x) = \Theta(x)g_k(x) \implies r(x) = \Theta(x)r(x).$$

2. Víme, že Laplaceův obraz generátoru $h_i(x)$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, je klesající funkcí, protože:

$$\mathbb{H}'_i(s) = - \int_{\mathbb{R}} x h_i(x) e^{-sx} dx < 0,$$

První derivace funkce \mathbb{H}_i je záporná, proto bude tato funkce klesající a bude mít nejvyšší hodnotu pro $s = 0$. V tomto bodě bude pro škálovaný systém platit:

$$\mathbb{H}_i(0_+) = \int_{\mathbb{R}} h_i(x) dx = \mu_0(h_i) = 1.$$

Z těchto důvodů lze říct, že:

$$\forall s > 0 : \mathbb{H}_i(s) < 1.$$

Dále si můžeme snadno z definice povšimnout, že $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{H}_i(s) = 0$ a zároveň, jak už bylo zmíněno, je funkce klesající a z vlastností Laplaceovy transformace i spojitá. Na základě čehož platí:

$$\forall s > 0 : \mathbb{H}_i(s) > 0.$$

3. Rozepišme funkci $\mathbb{R}(s)$ podle definice:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(s) &= \mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor - 1} \mathbb{H}_j(x)\right) * \prod_{l=0}^{k \bmod N} \mathbb{H}_l(x)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\left[\left(\prod_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor - 1} \mathbb{H}_j(x)\right) * \prod_{l=0}^{k \bmod N} \mathbb{H}_l(x)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\prod_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor - 1} \mathcal{L}[\mathbb{H}_j(x)] \prod_{l=0}^{k \bmod N} \mathcal{L}[\mathbb{H}_l(x)]\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(\prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)\right)^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} \prod_{l=0}^{k \bmod N} \mathbb{H}_l(x)\right] = \sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)\right)^k \\ &= \left| \prod_{i=0}^k \mathbb{H}_i(x) < 1 \text{ na } (0, +\infty) \right| = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x)}{1 - \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)},\end{aligned}$$

kde jsme na posledním řádku sumu spočítali jako součet geometrické řady. Z tohoto závěru dále plyne:

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{1}{s} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x)}{1 - \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)}.$$

4. Z vlastnosti Laplaceovy transformace nazývané "Final Value Theorem" víme, že:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s).$$

Tento výraz rozepíšme pomocí tvrzení v pátém bodě této věty a následně použijme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{s \sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x)}{1 - \prod_{i=0}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mathbb{H}_i(x) + s \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^m \mathbb{H}'_j(s) \prod_{i=0, i \neq j}^m \mathbb{H}_i(x)}{- \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{H}'_j(s) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{H}_i(x)} = \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mu_0(h_i) - 0 \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^m \mu_1(h_j) \prod_{i=0, i \neq j}^m \mu_0(h_i)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu_1(h_j) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mu_0(h_i)} = \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mu_0(h_i)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu_1(h_j) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mu_0(h_i)}. \end{aligned}$$

Dále pokud uvažujeme škálovaný systém, pak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s\mathbb{R}(s) = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=0}^m \mu_0(h_i)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu_1(h_j) \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \mu_0(h_i)} = \frac{N}{N} = 1,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Poznámka. V případě, že budeme pro jednoduchost předpokládat, že $N = 2$, pak se výraz 4.4 zjednoduší do tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(s) &= \frac{\mathbb{H}_0(s) + \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)} = \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)}, \\ \mathcal{L}[\omega(x)](s) &= \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{s(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))}. \end{aligned}$$

Věta 4.3.7. Necht' $h_0(x), h_1(x), \dots, h_{N-1}(x)$ jsou generátory heterogenního BČS s periodickými generátory a $\mathbb{H}_i(s) := \mathcal{L}[h_i(x)]$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, jsou jim příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. $\mathbb{E}(\mathcal{R}_0) = -\mathbb{H}'_0(O_+)$,
2. $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = -\mathbb{G}'_k(O_+) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} \sum_{i=0}^{N-1} \mu(h_i) + \sum_{l=0}^{k \bmod N} \mu(h_l)$.

Důkaz. Dokažme rovnosti v pořadí v jakém jsme je vyslovili.

1. První rovnost dostaneme přepisem derivace definičního vztahu $\mathbb{H}_0(s)$ pro $s = 0$:

$$\mathbb{H}'_0(O_+) = - \int_{\mathbb{R}} x h_0(x) dx = -\mu_1(h_0) \iff \mathbb{E}(\mathcal{R}_0) = -\mathbb{H}'_0(O_+).$$

2. Část druhé rovnosti jsme již dokázali ve větě 4.3.2, proto zde zdůvodníme pouze část rovnosti. Upravme střední hodnotu multiroztečí:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} x g_k(x) dx = \lim_{s \rightarrow 0_+} \mathcal{L}[g_k(x)](s) = - \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{d\mathcal{L}[g_k(x)](s)}{ds} = - \lim_{s \rightarrow 0_+} \mathbb{G}'_k(s) = -\mathbb{G}'_k(O_+).$$

Tímto jsme dokázali první rovnítko rovnosti a zbytek rovnosti máme již dokázán ve větě 4.3.2. □

4.4 Charakteristiky 2. řádu a jejich vlastnosti

V této části se zaměříme podrobněji na charakteristiky druhého řádu heterogenního BČS s periodickými generátory a prozkoumáme jejich specifické vlastnosti.

4.4.1 Charakteristiky 2. řádu

Charakteristiky druhého řádu jsou odvozeny z druhých momentů balancované hustoty a definujeme je následujícím způsobem.

Definice 4.4.1. Mějme heterogenní BČS s periodickými generátory. Pak zavádíme charakteristiky druhého řádu jako:

1. Rozptyl roztečí: $\text{VAR}(\mathcal{R}_k) = \mu_2(h) - 1$.
2. Rozptyl multiroztečí: $\text{VAR}(\mathcal{X}_k) = \text{VAR}(\sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m) = (k+1) \text{VAR}(\mathcal{R}_0)$.
3. Frekvenční rozptyl: $\text{VAR}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mathbb{E}(L))^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - \omega^2(L)$.
4. Statistická rigidita: $\Delta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L)^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - 2L\omega(L) + L^2$.

4.4.1.1 Laplaceova forma charakteristik 2. řádu

Pro naše zkoumání vlastností heterogenních BČS s periodickými generátory bude zásadní Laplaceův obraz statistické rigidity:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Delta(L)] &= \mathcal{L}[\mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2)] - 2\mathcal{L}[L\omega(L)] + \mathcal{L}[L^2] = 2\frac{\mathbb{R}^2(s)}{s} + \frac{\mathbb{R}(s)}{s} + 2\frac{s\mathbb{R}'(s) - \mathbb{R}(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3}, \\ s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &= 2(1 - s\mathbb{R}(s)) + s^2(2\mathbb{R}^2(s) + \mathbb{R}(s) + 2\mathbb{R}'(s)). \end{aligned}$$

Pro jednoduchost odvodíme tvar $\mathbb{R}(s)$, $\mathbb{R}'(s)$ a $\mathbb{R}^2(s)$ pro případ $N = 2$, pak platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(s) &= \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)}, \\ \mathbb{R}^2(s) &= \frac{\mathbb{H}_0^2(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))^2}{(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))^2}, \\ \mathbb{R}'(s) &= \frac{\mathbb{H}_0'(s)(\mathbb{H}_1(s) + 1) + \mathbb{H}_1'(s)\mathbb{H}_0(s)(\mathbb{H}_0(s) + 1)}{(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))^2}. \end{aligned}$$

Dosaďme za $\mathbb{R}(s)$ a upravme následovně:

$$\begin{aligned} s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &= 2\left(1 - s\frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)}\right) + 2s^2\frac{\mathbb{H}_0^2(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))^2}{(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))^2} + \\ &+ s^2\frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)} + 2s^2\frac{\mathbb{H}_0'(s)(\mathbb{H}_1(s) + 1) + \mathbb{H}_1'(s)\mathbb{H}_0(s)(\mathbb{H}_0(s) + 1)}{(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))^2} \equiv B(s). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zkoumejme lineární asymptotu statistické rigidity, tj.:

$$\Delta(L) = \chi L + \delta + O\left(\frac{1}{L}\right) \iff \Delta(L) \doteq \chi L + \delta,$$

pak ze znalosti Laplaceovy transformace statistické rigidity můžeme určit lineární a absolutní člen lineární asymptoty:

$$\begin{aligned} s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] &\doteq s^3 \mathcal{L}[\chi L + \delta] = s^3 \left(\frac{\chi}{s^2} + \frac{\delta}{s} \right) = \chi s + \delta s^2 \stackrel{!}{=} B(s) \doteq B(0) + \frac{B'(0)}{1} s + \frac{B''(0)}{2} s^2 \\ &\implies \chi = B'(0) \wedge \delta = \frac{1}{2} B''(0). \end{aligned}$$

4.5 Speciální případy heterogenního BČS s periodickými generátory

V této sekci položíme $N = 2$ a dále pracujeme s tímto speciálním případem.

Díky vlastnosti asociativity konvoluce můžeme nejprve spočítat konvoluci stejně rozdělených roztečí s generátorem $h(x)$, přičemž výsledek této konvoluce již známe ze studia homogenních BČS. Pak lze hustotu multiroztečí heterogenního BČS s periodickými generátory zapsat jako konvoluci generátoru odlišné nulté rozteče a již známé hustoty pravděpodobnosti multiroztečí homogenního BČS, tzn.

$$g_{k-1}(x) = \left(\underset{j=1}{\ast} h_0(x) \right) \ast \left(\underset{j=1}{\ast} h_1(x) \right) = g_{0, \lceil \frac{k}{2} \rceil}(x) \ast g_{1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(x)$$

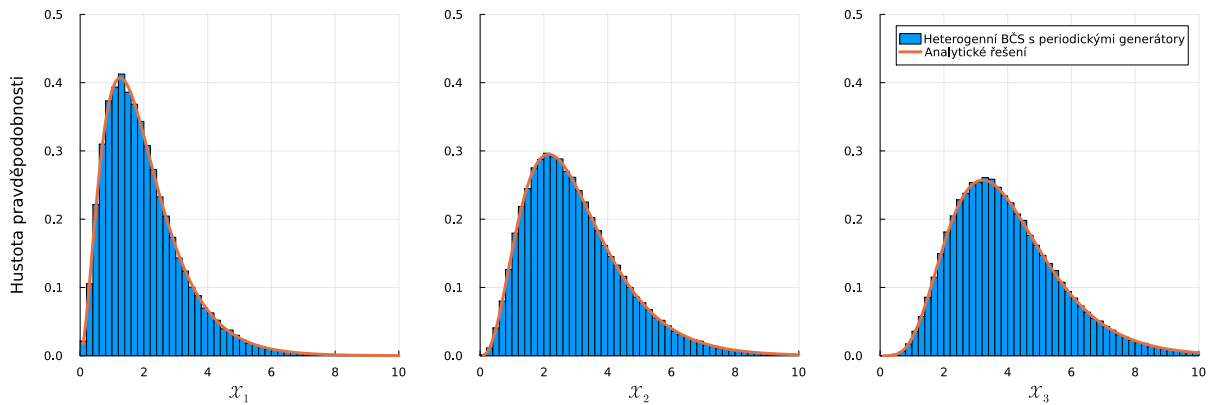
4.5.1 Generátory z Erlangova a Poissonova rozdělení

Na rozdíl od kvazihomogenního BČS už nebude pro heterogenní BČS s periodickými generátory potřeba řešit separátně dvě úlohy podle toho, jestli za generátor $h_0(x)$ budeme považovat Poissonovo rozdělení a za generátor $h_1(x)$ Erlangovo rozdělení nebo přesně naopak, což si ukážeme později. V následujícím textu pro zjednodušení zápisu označme $k_0 = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ a $k_1 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Příklad. Uvažujeme, že $h_0(x) = \Theta(x)e^{-x}$ a $h_1(x) = \Theta(x) \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(n+1)x}$, pak:

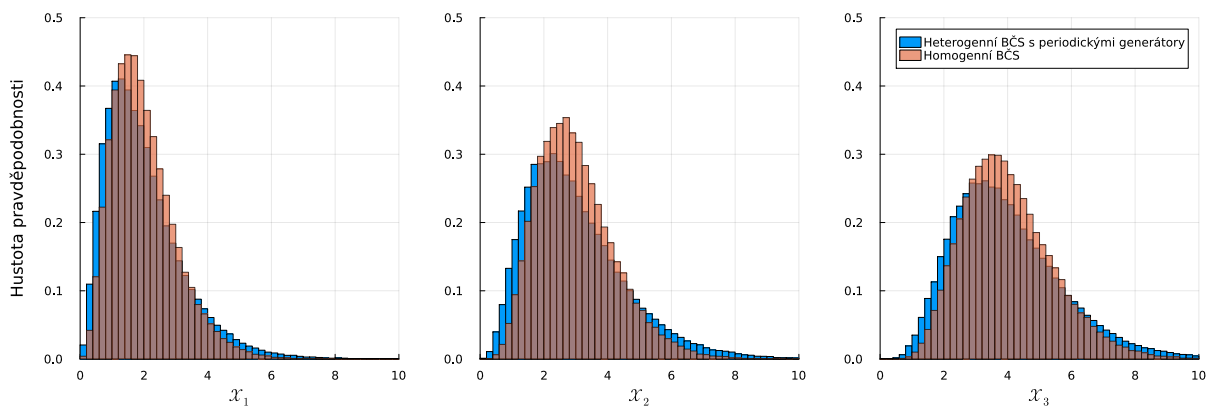
$$\begin{aligned} g_{k-1}(x) &= g_{k_0}(x) \ast g_{k_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k_0}(x-y) \cdot g_{k_1}(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Theta(x-y) \frac{(x-y)^{k_0}}{k_0!} e^{-(x-y)} \cdot \frac{(n+1)^{(k_1+1)(n+1)}}{(k_1+n+k_1n)!} \Theta(y) y^{k_1+n+k_1n} e^{-(n+1)y} dy = \\ &= \frac{(n+1)^{(k_1+1)(n+1)}}{(k_1+n+k_1n)! k_0!} e^{-x} \int_0^x (x-y)^{k_0} y^{k_1+n+k_1n} e^{-ny} dy = \\ &= \frac{(n+1)^{(k_1+1)(n+1)}}{(k_1+n+k_1n)! k_0!} e^{-x} \int_0^x y^{k_1+n+k_1n} e^{-ny} \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} x^{k_0-i} (-y)^i dy = \\ &= \frac{(n+1)^{(k_1+1)(n+1)}}{(k_1+n+k_1n)! k_0!} e^{-x} \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} x^{k_0-i} (-1)^i \int_0^x y^{k_1+n+k_1n+i} e^{-ny} dy = \\ &= \frac{(n+1)^{(k_1+1)(n+1)}}{(k_1+n+k_1n)! k_0!} e^{-x} \cdot \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} \frac{x^{k_0-i} (-1)^i}{n^{(k_1+1)(n+1)+i}} (\Gamma(nk_1+n+k_1+i+1) - \Gamma(nk_1+n+k_1+i+1, nx)). \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozí kapitole pro ověření analytického zápisu ho dále dořešíme numericky a porovnáme toto řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Uvažujeme, že parametr škálovaného Erlangova rozdělení je $n = 1$.



Obrázek 4.1: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení ve srovnání s analytickým zápisem.

Následně porovnejme hustotu pravděpodobnosti multiroztečí s takto zavedeným heterogenním BČS s periodickými generátory a homogenním BČS, jehož generátorem je škálované Erlangovo rozdělení s parametrem $n = 1$.



Obrázek 4.2: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Poissonova a Erlangova rozdělení.

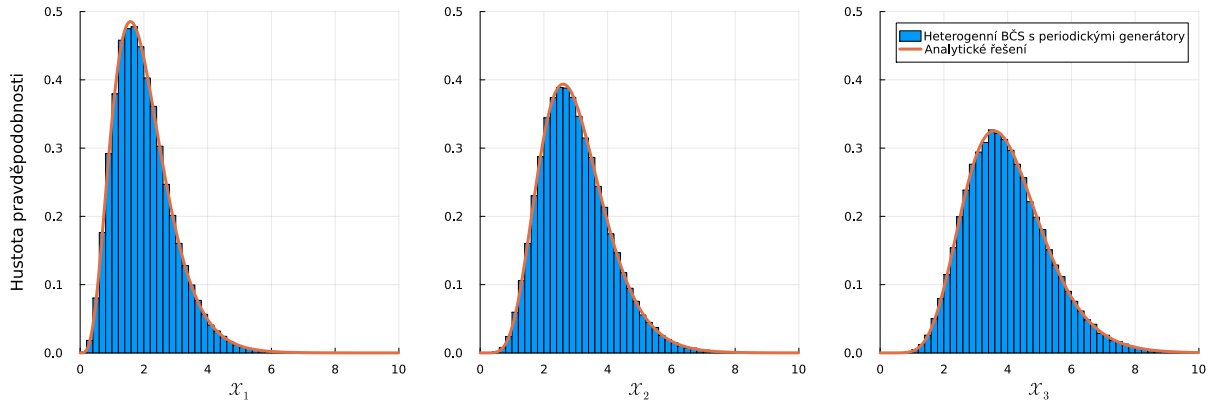
Podobně jako v předchozí kapitole odvodíme statistiky prvního a druhého řádu až pro heterogenní BČS s periodickými generátory z gamma rozdělení.

4.5.2 Generátory z Erlangova rozdělení

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x) \frac{(n_0+1)^{n_0+1}}{n_0!} x^{n_0} e^{-(n_0+1)x}$ a $h(x) = \Theta(x) \frac{(n_1+1)^{n_1+1}}{n_1!} x^{n_1} e^{-(n_1+1)x}$, pak:

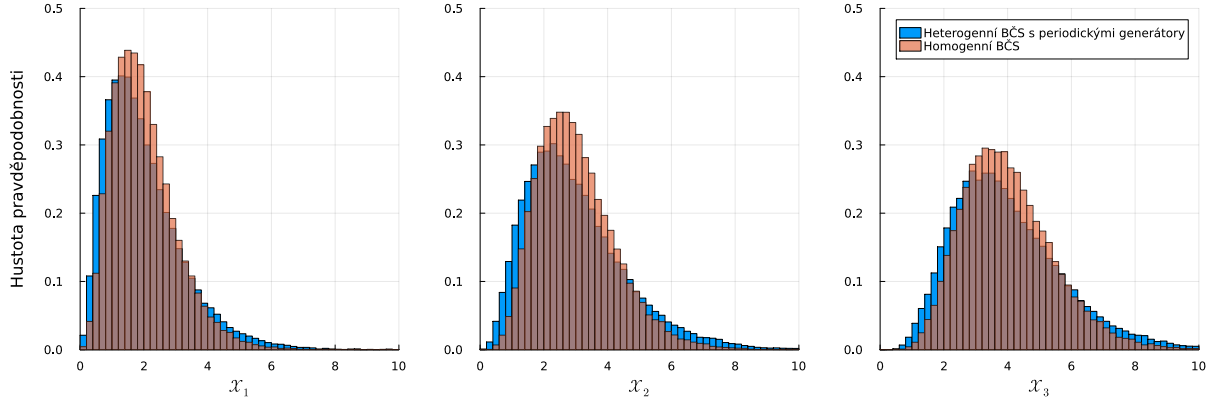
$$\begin{aligned}
g_{k-1}(x) &= g_{k_0}(x) * g_{k_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k_0}(x-y) \cdot g_{k_1}(y) dy = \\
&= \int_0^x \frac{(n_0+1)^{(k_0+1)(n_0+1)}}{(k_0+n_0+k_0n_0)!} (x-y)^{k_0+n_0+k_0n_0} e^{-(n_0+1)(x-y)} \cdot \frac{(n_1+1)^{(k_1+1)(n_1+1)}}{(k_1+n_1+k_1n_1)!} y^{k_1+n_1+k_1n_1} e^{-(n_1+1)y} dy = \\
&= \frac{(n_0+1)^{(k_0+1)(n_0+1)}(n_1+1)^{(k_1+1)(n_1+1)}}{(k_0+n_0+k_0n_0)!(k_1+n_1+k_1n_1)!} e^{-(n_0+1)x} \int_0^x (x-y)^{k_0+n_0+k_0n_0} y^{k_1+n_1+k_1n_1} e^{-(n_1-n_0)y} dy = \\
&= \frac{(n_0+1)^{(k_0+1)(n_0+1)}(n_1+1)^{(k_1+1)(n_1+1)}}{(k_0+n_0+k_0n_0)!(k_1+n_1+k_1n_1)!} e^{-(n_0+1)x} \int_0^x y^{k_1+n_1+k_1n_1} e^{-(n_1-n_0)y} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^{k_0+n_0+k_0n_0} \binom{k_0+n_0+k_0n_0}{i} x^{k_0+n_0+k_0n_0-i} (-y)^i dy = \\
&= \frac{(n_0+1)^{(k_0+1)(n_0+1)}(n_1+1)^{(k_1+1)(n_1+1)}}{(k_0+n_0+k_0n_0)!(k_1+n_1+k_1n_1)!} e^{-(n_0+1)x} \sum_{i=0}^{k_0+n_0+k_0n_0} \binom{k_0+n_0+k_0n_0}{i} x^{k_0+n_0+k_0n_0-i} (-1)^i \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^x y^{k_1+n_1+k_1n_1+i} e^{-(n_1-n_0)y} dy = \\
&= \frac{(n_0+1)^{(k_0+1)(n_0+1)}(n_1+1)^{(k_1+1)(n_1+1)}}{(k_0+n_0+k_0n_0)!(k_1+n_1+k_1n_1)!} e^{-(n_0+1)x} \sum_{i=0}^{k_0+n_0+k_0n_0} \binom{k_0+n_0+k_0n_0}{i} \frac{x^{k_0+n_0+k_0n_0-i} (-1)^i}{(n_1-n_0)^{(k_1+1)(n_1+1)+i}} \cdot \\
&\quad \cdot (\Gamma(n_1k_1+n_1+k_1+i+1) - \Gamma(n_1k_1+n_1+k_1+i+1, (n_1-n_0)x)).
\end{aligned}$$

Řešení je platné pro všechny parametry $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, jenž splňují $n_1 > n_0$. Řešení pro volbu parametrů vyhovující nerovnosti $n_0 > n_1$ nalezneme v navazující sekci. Opět analytický zápis řešení dořešme numericky a porovnejme řešení s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Pro ukázkou uvažujme, že parametry škálovaných Erlangových rozdělení jsou $n_0 = 2$ a $n_1 = 1$.



Obrázek 4.3: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova rozdělení ve srovnání s analytickým zápisem.

Pro srovnání s homogenním BČS vykresleme hustoty pravděpodobnosti multiroztečí heterogenního BČS s periodickými generátory jako v předchozím obrázku a homogenního BČS. Budeme pracovat se syntetickými daty a za generátor homogenního BČS považujeme škálované Erlangovo rozdělení s parametrem $n = 1$.



Obrázek 4.4: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z Erlangova rozdělení.

V následující sekci se zaměříme na heterogenní BČS s periodickými generátory z gamma rozdělení, přičemž gamma rozdělení je zobecněním Erlangova rozdělení a proto další statistiky Erlangova rozdělení ukážeme v rámci nadcházející sekce.

4.5.3 Generátory z gamma rozdělení

Příklad. Uvažujme, že $h_0(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha_0+1)^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0+1)} x^{\alpha_0} e^{-(\alpha_0+1)x}$ a $h_1(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha_1+1)^{\alpha_1+1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} x^{\alpha_1} e^{-(\alpha_1+1)x}$, pak:

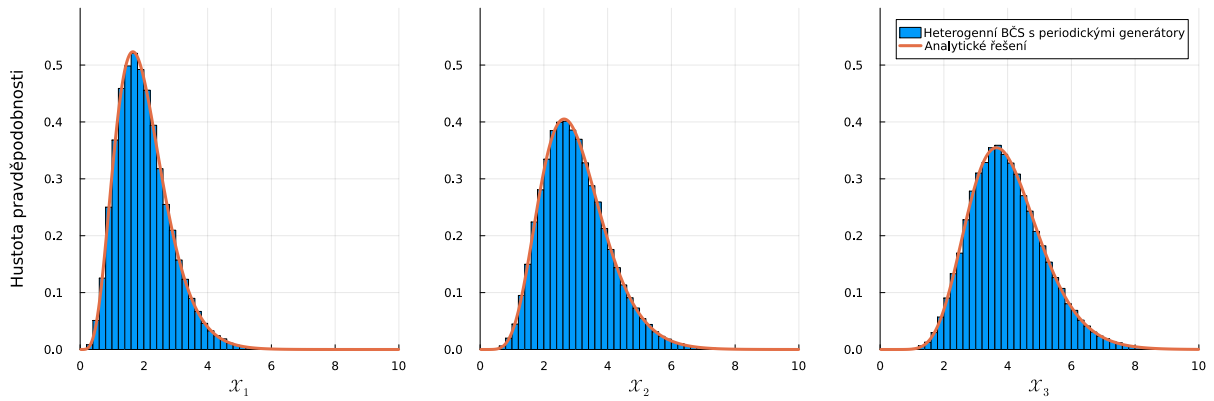
$$\begin{aligned}
g_{k-1}(x) &= g_{k_0}(x) * g_{k_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k_0}(x-y) \cdot g_{k_1}(y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{(\alpha_0+1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)}}{\Gamma(k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0+1)} \Theta(x-y) (x-y)^{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0} e^{-(\alpha_0+1)(x-y)} \cdot \\
&\cdot \frac{(\alpha_1+1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)}}{\Gamma(k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+1)} \Theta(y) y^{k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1} e^{-(\alpha_1+1)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)} (\alpha_1+1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)}}{\Gamma(k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0+1) \Gamma(k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+1)} e^{-(\alpha_0+1)x} \cdot \\
&\cdot \int_0^x (x-y)^{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0} y^{k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1} e^{-(\alpha_1-\alpha_0)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)} (\alpha_1+1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)}}{\Gamma(k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0+1) \Gamma(k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+1)} e^{-(\alpha_0+1)x} \int_0^x y^{k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1} e^{-(\alpha_1-\alpha_0)y} dy = \\
&\cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0}{i} x^{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0-i} (-y)^i dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)} (\alpha_1+1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)}}{\Gamma(k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0+1) \Gamma(k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+1)} e^{-(\alpha_0+1)x} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0}{i} x^{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0-i} (-1)^i \cdot \\
&\cdot \int_0^x y^{k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+i} e^{-(\alpha_1-\alpha_0)y} dy = \\
&= \frac{(\alpha_0+1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)} (\alpha_1+1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)}}{\Gamma(k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0+1) \Gamma(k_1+\alpha_1+k_1\alpha_1+1)} e^{-(\alpha_0+1)x} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0}{i} \frac{x^{k_0+\alpha_0+k_0\alpha_0-i} (-1)^i}{(\alpha_1-\alpha_0)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)+i}} \cdot \\
&\cdot (\Gamma(\alpha_1 k_1 + \alpha_1 + k_1 + i + 1) - \Gamma(\alpha_1 k_1 + \alpha_1 + k_1 + i + 1, (\alpha_1 - \alpha_0)x)).
\end{aligned}$$

Záměnu integrálu a sumy v odvození můžeme obhájit stejně jako v úloze ze sekce 3.5.3. Nalezené řešení platí pro $\forall \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R} : \alpha_1 > \alpha_0$. Z jisté symetrie úlohy můžeme snadno najít i výsledek pro parametry splňující opačnou nerovnost a to současnou záměnou hodnot α_0, α_1 a k_0, k_1 . Pro $\alpha_0 > \alpha_1$ je řešení:

$$g_{k-1}(x) = g_{k_1}(x) * g_{k_0}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{k_1}(x-y) \cdot g_{k_0}(y) dy =$$

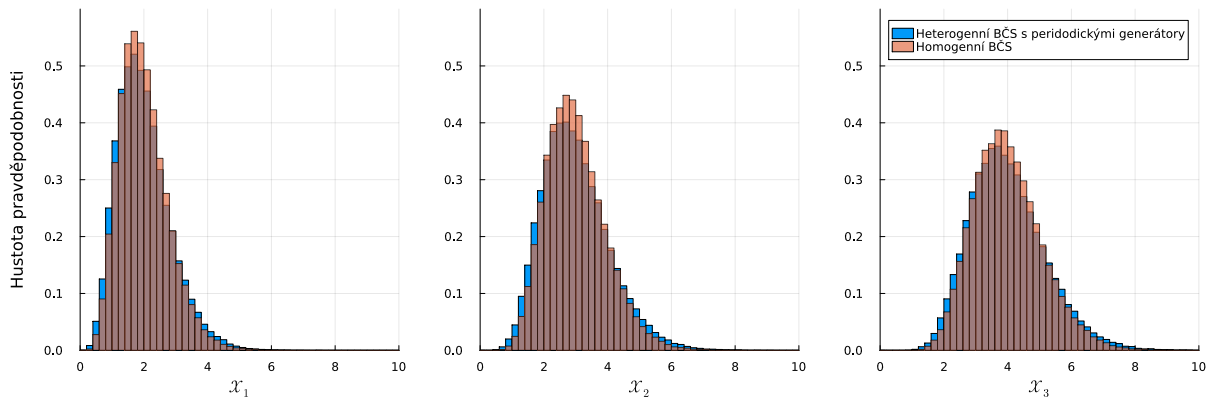
$$= \frac{(\alpha_1 + 1)^{(k_1+1)(\alpha_1+1)} (\alpha_0 + 1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)}}{\Gamma(k_1 + \alpha_1 + k_1\alpha_1 + 1) \Gamma(k_0 + \alpha_0 + k_0\alpha_0 + 1)} e^{-(\alpha_1+1)x} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k_1 + \alpha_1 + k_0\alpha_1}{i} \frac{x^{k_1+\alpha_1+k_0\alpha_1-i} (-1)^i}{(\alpha_0 - \alpha_1)^{(k_0+1)(\alpha_0+1)+i}} \cdot (\Gamma(\alpha_0 k_0 + \alpha_0 + k_0 + i + 1) - \Gamma(\alpha_0 k_0 + \alpha_0 + k_0 + i + 1, (\alpha_0 - \alpha_1)x)).$$

Znovu ukážeme, že se numericky dořešený analytický zápis shoduje s hustotou pravděpodobnosti multiroztečí syntetických dat. Předpokládejme, že parametry škálovaných gamma rozdělení jsou $\alpha_0 = 1.5$ a $\alpha_1 = 2.5$.



Obrázek 4.5: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z gamma rozdělení ve srovnání s analytickým zápisem.

Stejně jako v předchozích podsekcích můžeme vidět rozdílnost mezi hustotou pravděpodobnosti multiroztečí škálovaného homogenního a heterogenního BČS s periodickými generátory. Pro heterogenní BČS s periodickými generátory použijme stejné parametry jako v předešlém obrázku a pro homogenní BČS položme parametr $\alpha = 1.5$.



Obrázek 4.6: Hustota pravděpodobnosti multiroztečí pro generátory z gamma rozdělení.

Podívejme se na výpočet statistik prvního řádu, přičemž v této úloze budeme postupovat analogicky jako u příkladu v sekci 3.5.2.

$$\mathbb{H}_0(s) = \mathcal{L}[h_0(x)] = \left(\frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0 + s} \right)^{\alpha_0+1},$$

$$\mathbb{H}_1(s) = \mathcal{L}[h_1(x)] = \left(\frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + s} \right)^{\alpha_1+1},$$

pak platí:

$$\mathbb{R}(s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s)} = \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s} \right)^{\alpha_0+1} \left(1 + \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s} \right)^{\alpha_1+1} \right)}{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s} \right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s} \right)^{\alpha_1+1}},$$

$$\mathcal{L}[\omega(x)](s) = \frac{\mathbb{H}_0(s)(1 + \mathbb{H}_1(s))}{s(1 - \mathbb{H}_0(s)\mathbb{H}_1(s))} = \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s} \right)^{\alpha_0+1} \left(1 + \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s} \right)^{\alpha_1+1} \right)}{s \left(1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s} \right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s} \right)^{\alpha_1+1} \right)}.$$

Stejně jako v sekci 3.5.2 nelze obecně spočítat inverzní Laplaceovu transformaci. Uvedeme tedy výslednou shlukovou a trendovou funkci pouze pro základní volby parametru α_0 a α_1 , viz tabulky 4.1 a 4.2.

Parametr α_0	Parametr α_1	Shluková funkce
$\alpha_0 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$r(x) = 1 - \frac{2e^{-\frac{5x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)}{\sqrt{7}}$
$\alpha_0 = 1$	$\alpha_1 = 0$	$r(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{5x}{2}} \left(\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) \right)}{\sqrt{7}}$

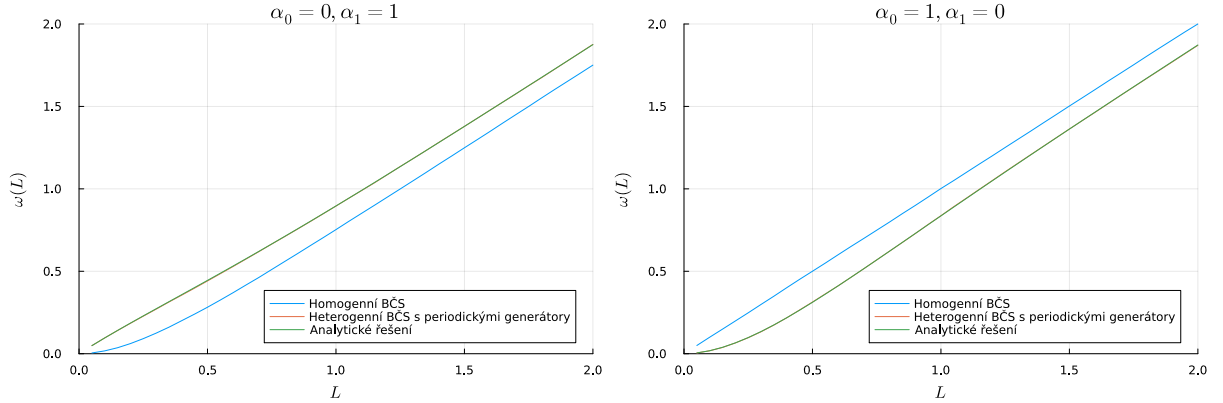
Tabulka 4.1: Shluková funkce heterogenního BČS s periodickými generátory z gamma rozdělení.

Parametr α_0	Parametr α_1	Trendová funkce
$\alpha_0 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\omega(x) = x + \frac{e^{-\frac{5x}{2}} \left(5 \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + \sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) \right)}{8\sqrt{7}} - \frac{1}{8}$
$\alpha_0 = 1$	$\alpha_1 = 0$	$\omega(x) = x + \frac{e^{-\frac{5x}{2}} \left(\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) - 11 \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) \right)}{8\sqrt{7}} - \frac{1}{8}$

Tabulka 4.2: Trendová funkce heterogenního BČS s periodickými generátory z gamma rozdělení.

Poznámka. Všimněme si, že pro kombinaci parametrů $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ je $r(0) = 1$ a $\omega(0) = 0$, kdežto pro druhou kombinaci parametrů $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ je hodnota shlukové funkce $r(0) = 0$.

Vykresleme porovnání analytického a numerického výpočtu trendové funkce.



Obrázek 4.7: Trendová funkce heterogenního BCS s periodickými generátory z gamma rozdělení.

Na závěr spočítejme lineární asymptotu statistické rigidity. Nejprve vyjádřeme derivace Laplaceových obrazů pro oba generátory:

$$\mathbb{H}'_0(s) = -\frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} (\alpha_0 + 1)}{1 + \alpha_0 + s},$$

$$\mathbb{H}'_1(s) = -\frac{\left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1} (\alpha_1 + 1)}{1 + \alpha_1 + s}.$$

Pak z rovnice 4.5 platí:

$$s^3 \mathcal{L}[\Delta(L)] = 2 \left(1 - s \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(1 + \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}\right)}{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}} \right) + 2s^2 \frac{\left(\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}\right)^2} +$$

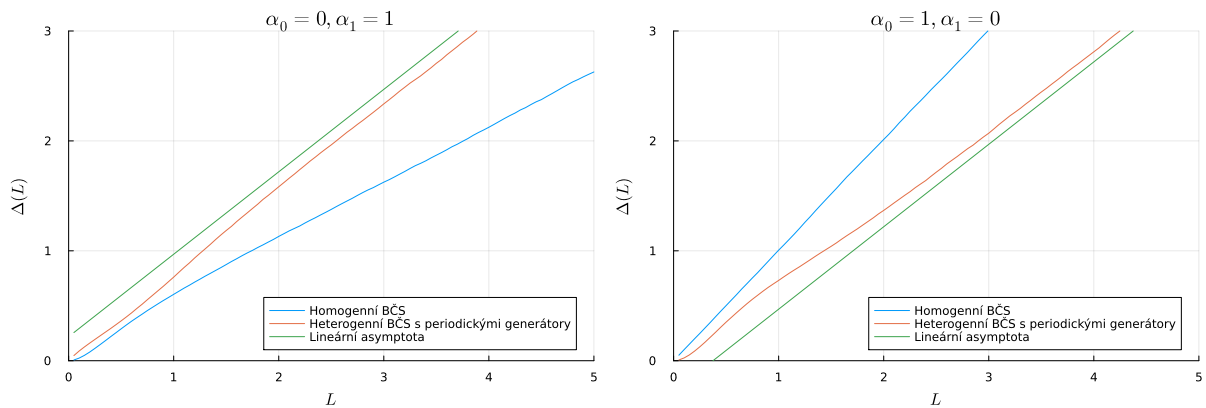
$$+ s^2 \frac{\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(1 + \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}\right)}{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}} -$$

$$- 2s^2 \frac{\left(\frac{\alpha_0+1}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+2} \left(\left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1} + 1\right) + \left(\frac{\alpha_1+1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+2} \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} + 1\right)}{\left(1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_0+s}\right)^{\alpha_0+1} \left(\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1+s}\right)^{\alpha_1+1}\right)^2} \equiv B(s).$$

Spočítejme Maclaurinův rozvoj této funkce v okolí nuly:

$$\chi = B'(0) = \frac{2 + \alpha_0 + \alpha_1}{2(1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0\alpha_1)},$$

$$\delta = \frac{1}{2} B''(0) = \frac{1}{24} \left(\frac{7 + 22\alpha_0 + 8\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0)^2} - \frac{7}{(1 + \alpha_1)^2} - \frac{18\alpha_0}{1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0\alpha_1} \right).$$



Obrázek 4.8: Stochastická rigidita heterogenního BČS s periodickými generátory z gamma rozdělení a její lineární asymptota.

Poznámka. V poznámce na závěr zmiňme jedno důležité pozorování a to, že při výpočtu multiroztečí a statistik prvního a druhého řádu přímo nezáleží na pořadí generátorů roztečí. Všechny příklady pro heterogenní BČS s periodickými generátory jsme řešili tak, že místo reálného počtu roztečí s generátory $h_1(x)$ a $h_2(x)$ jsme používali proměnné k_0 a k_1 . Za tyto proměnné máme možnost dosadit jiné hodnoty než jsme avizovali v úvodu sekce. Pro výpočet hustoty pravděpodobnosti multiroztečí je tedy pouze nutné mít pro každou k -tou multirozteč přesně dané pravidlo, které udává kolik roztečí před k -tou částicí je dáno jednotlivými hustotami pravděpodobnosti, ale není vyloženě nutné, aby se generátory opakovaly.

Kapitola 5

Aplikace na reálných datech

V této kapitole aplikujeme poznatky ze studia speciálních variant heterogenního BČS při analýze dat z provozu. Pro demonstraci využití teorie heterogenních BČS a porovnání výsledků s teorií homogenních BČS se zaměříme na porovnání analytického výpočtu hustoty pravděpodobnosti multiroztečí a statistické rigidity s hodnotami spočtenými z dat. Porovnání výsledků pro statistiky prvního řádu zde realizovat nebudeme, protože analytické výpočty těchto statistik pro heterogenní BČS známe pouze pro jisté konkrétní volby parametrů. V případě statistické rigidity máme k dispozici znalost o lineární asymptotě, proto budeme zkoumat, jestli se v nekonečnu statistická rigidita k této asymptotě blíží.

Aplikaci teorie heterogenních BČS budeme demonstrovat na zpracování dat, při kterém budeme uvažovat, že chování řidičů nákladních a osobních vozidel je odlišné. Jinak řečeno, že si řidiči kamiónů ponechávají jiné rozestupy než řidiči osobních vozidel. Prozatím založme tento předpoklad pouze na empirickém odhadu na základě odlišných fyzikálních a technických vlastností vozidla. O správnosti tohoto předpokladu se přesvědčíme později. Formulujeme tedy úlohu, ve které vystupují rozteče pocházející ze dvou odlišných hustot pravděpodobnosti, což perfektně pasuje na teoretické poznatky ze studia heterogenních BČS popsané v předchozích kapitolách. Napřed ovšem zmiňme metodiku předzpracování naměřených dat.

5.1 Předzpracování dat

V rámci předzpracování dat nás čeká několik kroků, které budeme muset podniknout než se budeme moc pustit do samotné analýzy. Nejprve použijeme třístupňovou unifikační proceduru, abychom data rozdělili do datových vzorků, jenž budou charakterizovány intenzitou a hustotou dopravy. Z těchto vzorků následně vybereme pouze vzorky, které se pro naši úlohu hodí. Kritéria, na jejichž základě budeme data selektovat, si rozebereme později a nadále pak budeme pracovat pouze s vybranými vzorky. V poslední fázi předzpracování proložíme hustotu pravděpodobnosti roztečí z vybraných vzorků škálovaným gamma rozdělením, čímž získáme parametr γ rozdělení, který budeme následně využívat pro porovnávání výsledků analytických výpočtů s výsledky získaných z dat.

5.1.1 3-s unifikační procedura

Jak již bylo zmíněno, tak v prvním kroku předzpracování dat použijeme běžně využívanou třístupňovou unifikační proceduru (dále jen 3-s unifikační procedura) [12], která nám umožní data roztřídit podle hustot, abychom zabránili porovnávání vzorků s rozdílnými statistickými vlastnostmi. V následujících podsekcích pořadě shrneme stupně unifikační procedury.

5.1.1.1 Vzorkovací fáze

Celý datový soubor s L datovými záznamy, rozdělíme na menší podmnožiny o M záznamech, abychom zaručili homogenitu v těchto podmnožinách. Volíme M vzorků zaznamenaných chronologicky a zavádíme množiny:

$$S_i = \{(r_k, t_k, v_k, l_k) \in \mathbb{R}^4 : k = i \cdot M + 1, i \cdot M + 2, \dots, i \cdot M + M\},$$

pro $i \in \{j \in \mathbb{N}_0 : j < \frac{L}{M}\}$, kde proměnné r_k, t_k, v_k, l_k představují informace o k -tém vozidle, a to pořadí jeho délku, čas průjezdu detektorem, průměrnou rychlost a jízdní pruh. Pro analýzu dat v této práci položíme $M = 30$.

5.1.1.2 Škálovací fáze

Rozteče, popřípadě světlosti vzorků v jednotlivých podmnožinách S_i přeškálujeme, abychom zaručili, že jejich střední hodnota bude rovna jedné. Škálovanou veličinu získáme jako

$$y_k = \frac{z_k \cdot M}{\sum_{z_k \in S_i} z_k}.$$

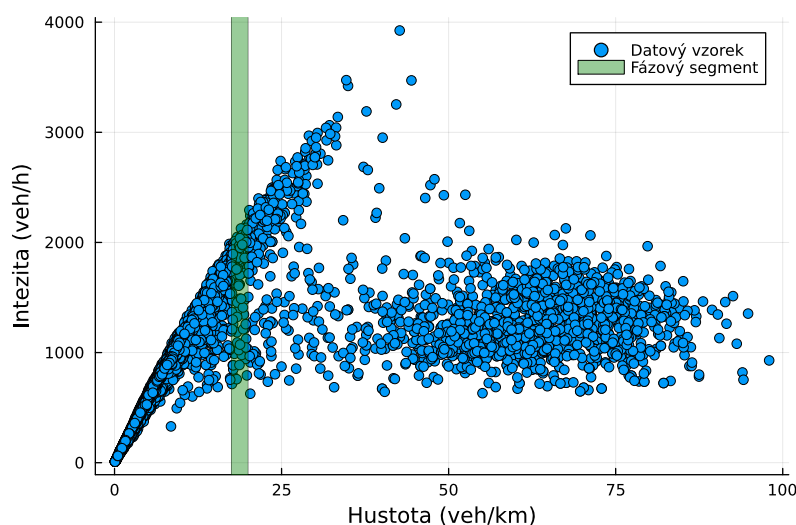
kde $z_k \in S_i$ je prvek podmnožiny a zavedeme nový systém podmnožin celého souboru $\tilde{S}_i = \{y_k : z_k \in S_i\}$. Navíc si bokem ponechejme i původní nepřeskálované vzorky, jenž využijeme v poslední fázi předzpracování, tj. při odhadu parametrů gamma rozdělení.

5.1.1.3 Segmentační fáze

Pro každou škálovanou podmnožinu \tilde{S}_i vypočteme hledané fázové proměnné intenzitu a hustotu provozu.

5.1.1.4 Výstup 3-s unifikační procedury

Cílem 3-s unifikační procedury bylo rozdělit vzorky podle hustoty a intenzity dopravy. Pro lepší představu si závislosti hustoty a intenzity dopravy pro pomalý jízdní pruh znázorníme graficky a přidejme příklade fázového segmentu, viz 5.1.



Obrázek 5.1: Graf závislosti intenzity na hustotě vzorků se znázorněním vybraných prvků.

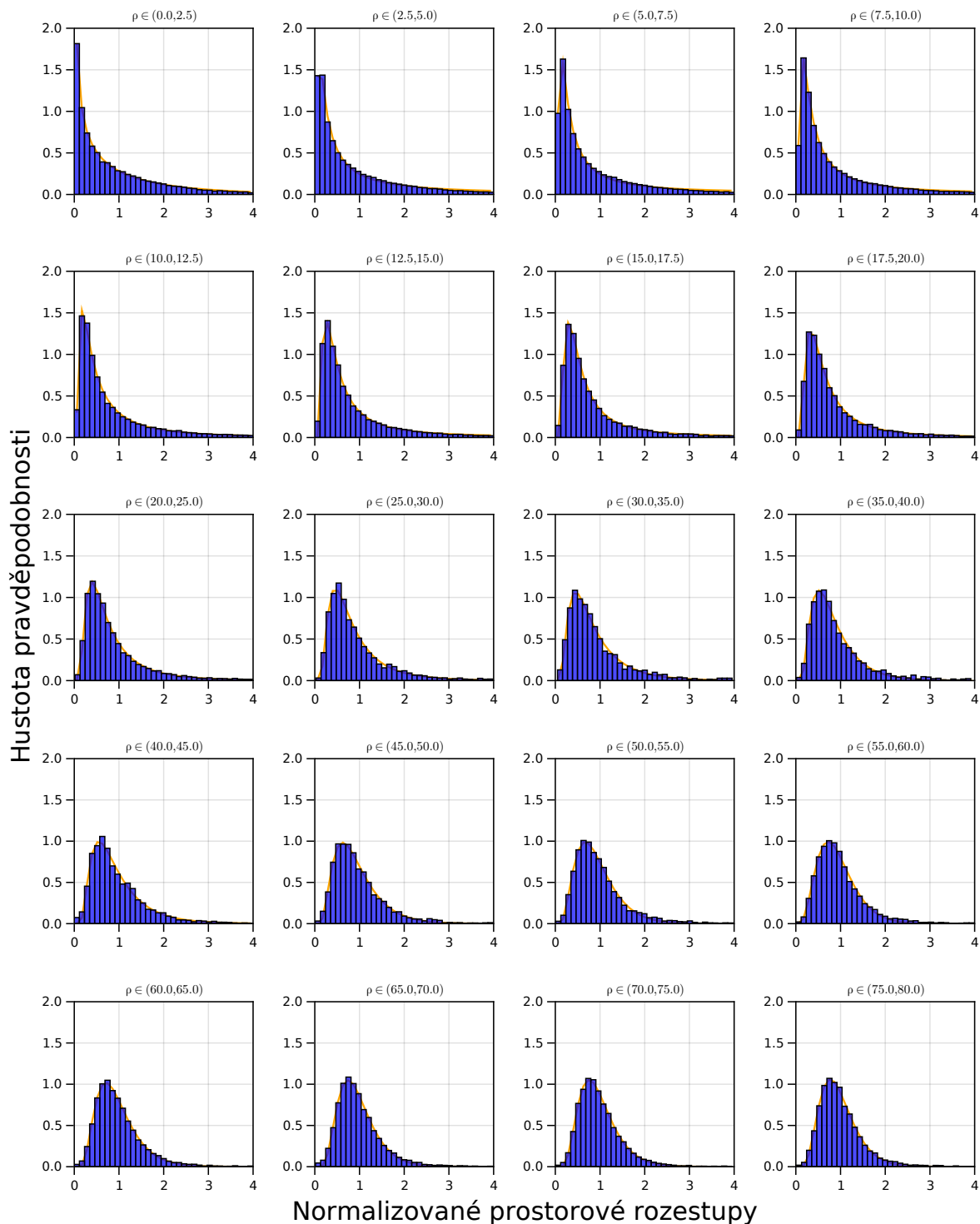
S takto připravenými datovými vzorky se již můžeme zaměřit na selekci dat. V rámci výběru dat si zodpovíme i otázku, se kterými datovými vzorky budeme pracovat, resp. z jakého rozsahu hustoty dopravy.

5.1.2 Selekce dat

Při analýze se budeme soustředit na měření z pomalého pruhu, jelikož v tomto pruhu lze očekávat frekventovanější výskyt nákladních vozidel. Data rozdělíme podle hustoty dopravy a délky jednotlivých vozidel, což si detailněji rozebereme v následujících podsekcích.

5.1.3 Výběr datových vzorků podle hustoty dopravy

Vykresleme si hustotu pravděpodobnosti roztečí pro všechny typy vozidel pro intervaly hustoty dopravy, viz 5.2.



Obrázek 5.2: Histogram reprezentující závislost hustoty pravděpodobnosti výskytu škálovaných roztečí (osa y) na hodnotách škálovaných roztečí (osa x) v pomalém jízdním pruhu z dopravních dat o různé hustotě. Jednotlivé histogramy jsou proloženy GIG rozdělením. Pro nalezení vhodných parametrů jsme využili funkci knihovny LsgFit.jl jazyku Julia, která hledá nejlepší možné proložení jako minimum součtu středních kvadratických odchylek.

Z teorie máme k dispozici pouze poznatky o heterogenních BČS s generátory z gamma rozdělení a budeme odkázáni na odhad hustot pravděpodobnosti roztečí pomocí gamma rozdělení. Ze studií dopravních dat víme, že vhodnější rozdělení pro aproximaci hustot pravděpodobnosti roztečí je GIG rozdělení a to díky tomu, že má toto rozdělení pravděpodobnosti v počátku, tzv. plató [2].

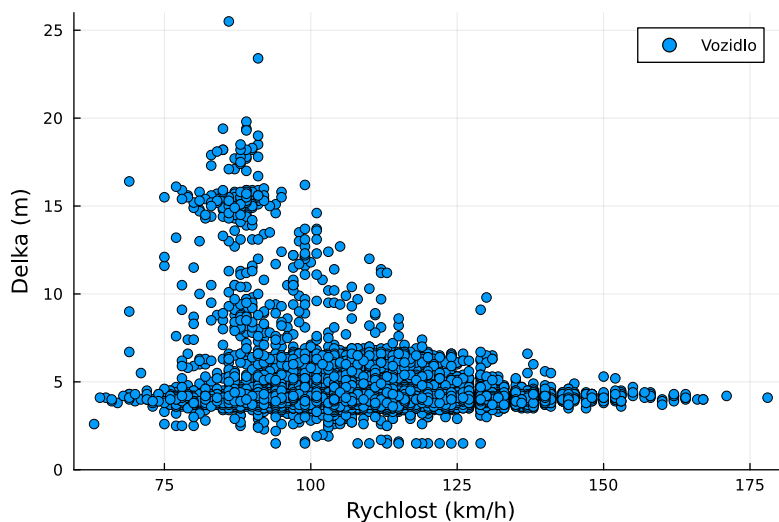
Poznámka. Plató je vlastností empirického rozdělení dat, které říká, že hustota pravděpodobnosti v počátku prudce klesá k nule, přičemž tato vlastnost má i své empirické zdůvodnění. V dopravě jsou pravděpodobnosti krátkých rozestupů velice nízké, což je dáno snahou řidičů udržovat bezpečnou vzdálenost od předešlého vozidla, aby bylo případně možné zamezit kolizi.

U homogenních BČS umíme pracovat s GIG rozdělení, ale pro férovější porovnání heterogenních a homogenních BČS využijme gamma rozdělení i pro analýzu pomocí homogenního BČS.

Již delší dobu je známo [13], že gamma rozdělení není vhodné pro popis rozdělení roztečí, ale pro nízké hustoty dopravy není plató v histogramu roztečí tak výrazné, což lze vidět z histogramů 5.2. Tudíž při odhadování hustoty pravděpodobnosti gamma rozdělením pro vzorky z nízké hustoty dopravy se nedopustíme tak závažných nepřesností jako v případě, kdybychom pracovali se vzorky z vyšších hustot dopravy. Používejme tedy vzorky z hustotního pásma $5 - 15 \frac{\text{veh}}{\text{km}}$. Dále už pracujme pouze se vzorky naměřenými v pomalém pruhu a ze zmíněného hustotního pásma.

5.1.3.1 Rozdělení vzorků podle délky vozidla

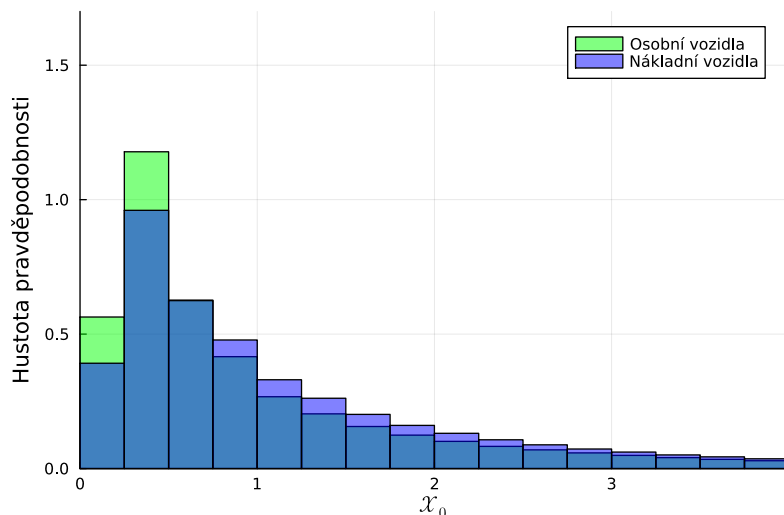
Dále na základě délky vozidla rozhodněme, která vozidla budeme považovat za nákladní, resp. osobní vozidla. Podívejme se na porovnání délky a průměrné rychlosti vozidla v úseku měření. Délku vozidla vykresleme v porovnání s rychlostí, protože v těchto dvou proměnných by vzorky měly být nejlépe klasifikovatelné do skupin osobních a nákladních vozidel. Z empirického pozorování z běžného života můžeme předpokládat, že nákladní vozidla většinou drží spíše nižší rychlost než osobní vozidla. Zmíněné porovnání pro náhodně vybranou část měření lze vidět na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Graf porovnávající délku a rychlost vozidla (pro přehlednost bylo do obrázku vykresleno pouze náhodně vybraných 25000 vozidel).

Z obrázku nejsou patrné jasně oddělitelné skupiny. Prohlásme tedy všechna vozidla s délkou vyšší než 5 metrů za nákladní vozidla. Po rozdělení měření do dvou skupin vykresleme histogram hustoty prav-

děpodobnosti rozestupů, které řidiči těchto vozidel udržují, abychom se přesvědčili, že rozteče vozidel v obou skupinách se řídí jinou hustotou pravděpodobnosti.



Obrázek 5.4: Histogram hustoty pravděpodobnosti rozestupů pro osobní a nákladní auta.

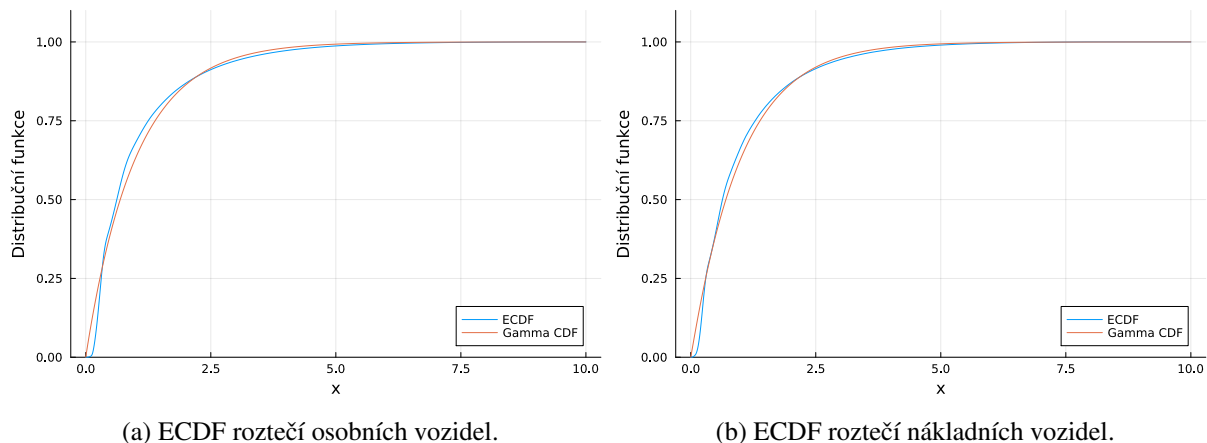
Z grafu 5.4 si můžeme povšimnout, že hustota pravděpodobnosti rozestupů vozidel je pro obě skupiny odlišná, čímž jsme ověřili, že takto formulovaná úloha má potenciál pro využití teorie heterogenních BČS.

Na závěr jenom pro upřesnění zmiňme, že tento obrázek neslouží jako ukázka, že běžně využívaný předpoklad homogenity v BČS je chybný. Měření s nákladními vozidly je v běžném datasetu násobně méně než měření s osobními vozidly, takže pro analýzu dopravních dat lze stejně dobře použít i teorii homogenního BČS. Použití heterogenních variant BČS představuje pouze snahu o vylepšení metod pro matematické modelování dopravy.

5.1.4 Odhad parametru gamma rozdělení

Abychom mohli spočítat hustotu pravděpodobnosti multiroztečí nebo lineární asymptotu statistické rigidity analyticky, tak je nutné nalézt parametr gamma rozdělení, který nejlépe aproximuje rozteče osobních a nákladních vozidel. V této podsekcí popíšeme metodiku odhadu těchto parametrů.

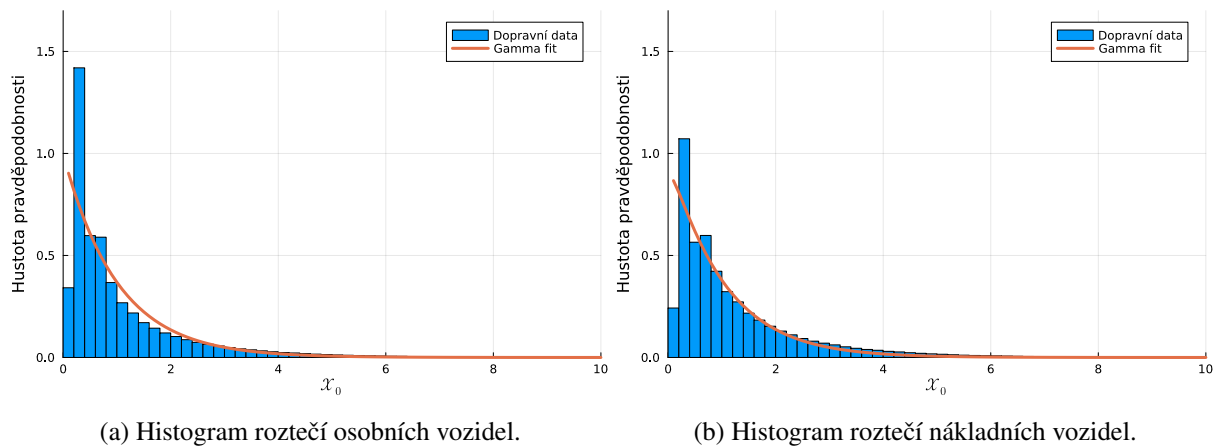
Z dat jsme již vybrali vzorky podle hustoty dopravy a pruhu, ve kterém vzorky byly naměřeny. Dále v předchozí podsekcí jsme vozidla z měření rozdělili na nákladní a osobní auta. Držme se zmíněného rozdělení dat, ale pracujme prozatím s neškálovanou variantou roztečí. Za účelem odhadu parametru gamma rozdělení vytvoříme dva separátní vektory neškálovaných roztečí pro nákladní a osobní vozidla. Až po vytvoření vektoru všechny prvky vektoru přeškálujeme, aby průměr vektorů byl roven jedné. Přeškálování vektoru je klíčové, protože měření následně budeme prokládat již škálovanou variantou gamma rozdělení, tzn. budeme pro každý vektor odhadovat jeden parametr α . Odhad budeme provádět přes distribuční funkce, abychom se vyhnuli tomu, že hodnota parametru bude závislá na námi zvolené šířce binování v histogramu. Nalezneme tedy parametr α tak, aby se distribuční funkce gamma rozdělení maximálně blížila empirické kumulativní distribuční funkci dat. Distribuční funkce pro použitý dataset jsou vyobrazeny na obrázku 5.5, přičemž parametry obou gamma rozdělení dále využijeme jako vstupní parametry pro varianty heterogenních BČS.



Obrázek 5.5: Fit ECDF roztečí gamma rozdělením pro jednotlivé typy vozidel.

Navíc nalezneme také parametr gamma rozdělení pro případ, že nebudeme rozlišovat mezi osobními a nákladními vozidly a použijeme všechny měření dohromady. Parametr spočteme stejným způsobem a dále ho využijeme jako vstupní parametr homogenního BČS. Pro nalezení všech zmíněných parametrů jsme použili funkci knihovny LsgFit.jl jazyku Julia, která hledá vhodný parametr α minimalizací součtu středních kvadratických odchylek.

Vyjma distribuční funkce vykresleme pro lepší představu o přesnosti odhadů také hustotu pravděpodobnosti rozestupů z dat a gamma rozdělení, viz. 5.6.



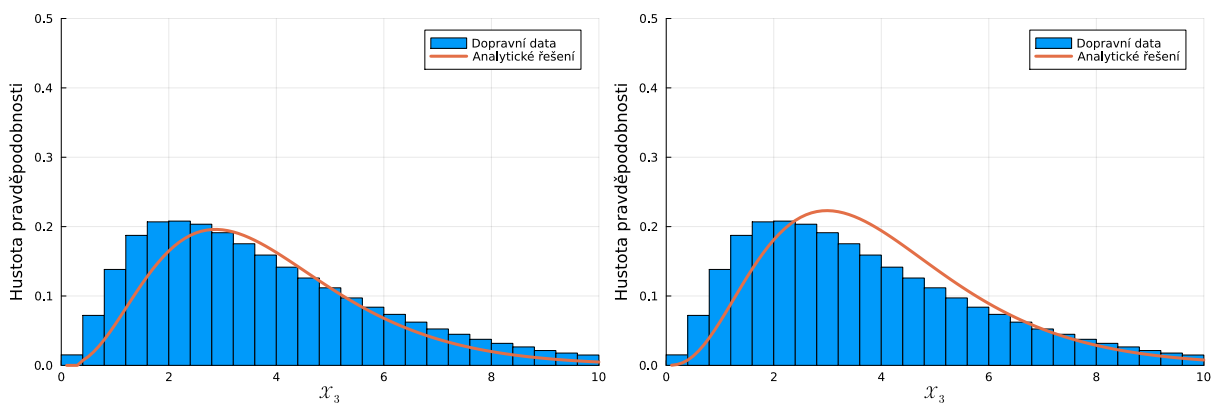
Obrázek 5.6: Histogram hustoty pravděpodobnosti roztečí pro jednotlivé typy vozidel s proložením gamma rozdělení.

V tuto chvíli máme vše připraveno pro samotnou analýzu dat. V dalších sekcích ukážeme použití teorie jednotlivých speciálních variant heterogenního BČS ve srovnání s homogenním BČS.

5.2 Kvazihomenní BČS

Z teorie kvazihomenního BČS máme nejvíce prozkoumaný systém, který má první rozteč odlišnou od ostatních. Za vozidlo s odlišnou roztečí zvolme nákladní vozidlo, jelikož nákladních vozidel se v datech nachází méně než osobních. Abychom pracovali se vzorky, které splňují předpoklady, budeme nuceni

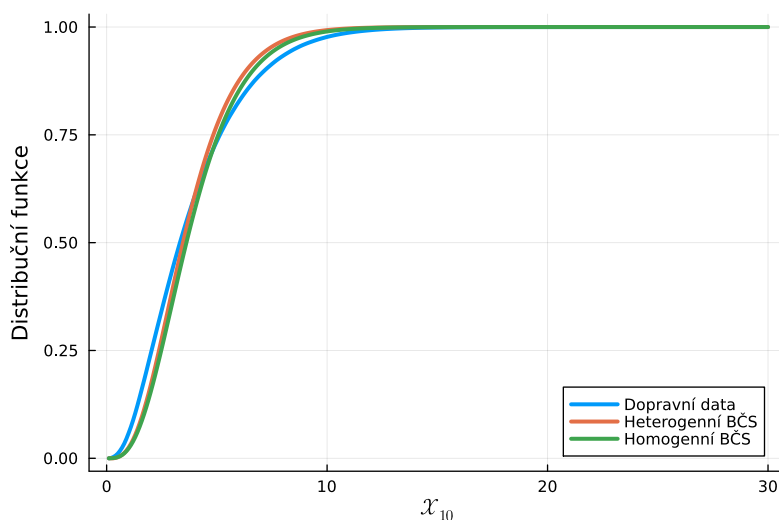
z datových vzorků používaného hustotního pásma vybrat pouze podskupiny. Vyberme tedy podskupiny 4 vozidel tak, že druhé vozidlo je nákladní automobil a ostatní vozidla jsou osobními automobily. Pro takovou podskupinu budeme za referenčního vozidlo pokládat vozidlo jedoucí před nákladním vozidlem, pak generátor první rozteče v takové podskupině je jinou hustotou pravděpodobnosti než pro ostatní rozteče. Využijme výsledné hustoty pravděpodobnosti multiroztečí z příkladu v podsekcí 3.5.3, dosadíme do nich parametry gamma rozdělení a vyčíslíme. Výslednou hustotu pravděpodobnosti získanou za využití teorie porovnejme s hustotou pravděpodobnosti multirozteče \mathcal{X}_3 spočtenou z dat. Dále pro porovnání přidejme i hustotu pravděpodobnosti získanou za pomocí teorie homogenního BČS.



(a) Analytický výpočet z teorie kvazihomenných BČS. (b) Analytický výpočet z teorie homogenných BČS.

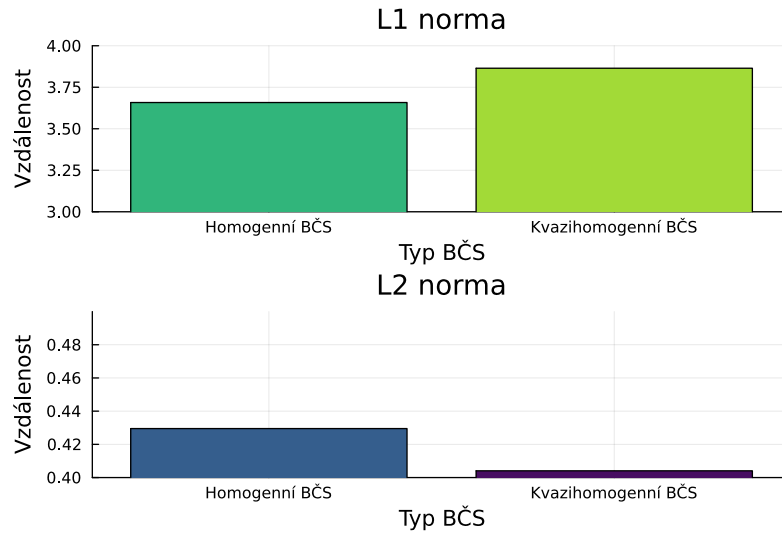
Obrázek 5.7: Histogram hustoty pravděpodobnosti multiroztečí pro skupiny tří vozidel s analytickým řešením z teorie kvazihomenných BČS.

Z grafu 5.7 lze při letmém porovnání od oka usoudit, že analytický výpočet získaný z teorie kvazihomenního BČS aproximuje skutečnou hustotu pravděpodobnosti o něco lépe. Tento závěr si ověříme porovnáním vzdáleností distribučních funkcí od empirické distribuční funkce, viz 5.8.



Obrázek 5.8: Porovnání distribučních funkcí pro homogenní a kvazihomenní BČS.

Pro měření vzdálenosti křivek využijeme L1 a L2 normu. Hodnoty těchto vzdáleností jsou pro kvazihomogenní a homogenní BČS schématicky znázorněné v grafu 5.9.

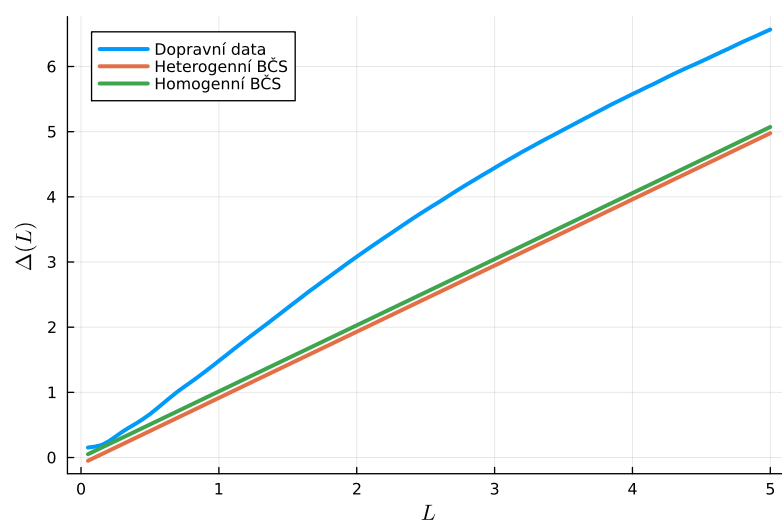


Obrázek 5.9: Měření kvality odhadu pomocí L1 a L2 normy.

Z výsledků srovnání lze vidět, že v případě použití L2 normy vychází lépe odhad pomocí kvazihomogenního BČS a u L1 normy je tomu obráceně. Rozdíl může být způsoben tím, že L2 norma snižuje váhu malých rozdílů.

5.2.1 Statistická rigidita

Druhým cílem analýzy je z dat spočítat statistickou rigiditu a porovnat ji s lineárními asymptotami statistické rigidity podle teorie kvazihomogenních a homogenních BČS, což přesně vyobrazuje graf 5.10.



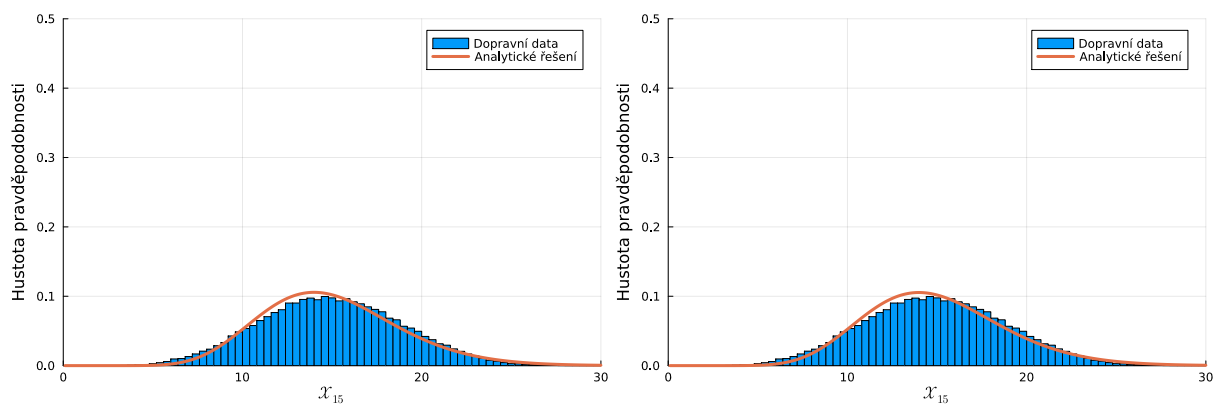
Obrázek 5.10: Statistická rigidita a lineární asymptoty pro homogenní a kvazihomogenní BČS.

Vidíme, že se statistická rigidita spočítaná z dopravních dat limitně neblíží k asymptotě, což je způsobeno využitím nevhodného rozdělení pro popis BČS. Pro popis hustoty pravděpodobnosti roztečí se více hodí, jak již bylo zmíněno, GIG rozdělení. Gamma rozdělení, které jsme použili pro aproximaci rozdělení roztečí mělo parametr α blízky nule, čímž se blížilo Poissonovu rozdělení, které v případě homogenních BČS má kompresibilitu rovnou jedné a statistickou rigiditu rovnou L . Pokud ze statistické rigidity z dopravních dat odhadneme kompresibilitu, tak můžeme říct, že tato kompresibilita je větší než jedna, což jsou tzv. superpoissonovské stavy, které nemůžeme popsat gamma rozdělením. V obrázku tedy pozorujeme podobný jev, který lze vidět při používání gamma rozdělení v homogenních BČS, viz [14].

5.3 Heterogenní BČS s periodickými generátory

Proveďme analogickou analýzu jako u kvazimogenních BČS. V prvním kroku porovnejme analyticky spočtenou hustotu pravděpodobnosti multiroztečí z příkladu v podsekcí 4.5.3. V rámci studie heterogenních BČS s periodickým generátorem jsme došli k závěru, že pro výpočet hustoty pravděpodobnosti multiroztečí nezáleží na pořadí generátorů před k -tým vozidlem, ale pouze na celkovém zastoupení obou generátorů. V praxi tohle znamená, že pro výpočet hustoty pravděpodobnosti k -té multirozteče potřebujeme mít před k -tým vozidlem pevně daný počet nákladních vozidel, ale již nezáleží na tom v jakém pořadí osobní a nákladní vozidla budou.

V tomhle případě využijme přímo datové vzorky, ale vyfiltrujme z nich pouze ty, u kterých se před 15. vozidlem nachází právě dvě nákladní vozidla. Dále již můžeme spočítat hustotu pravděpodobnosti \mathcal{X}_{15} podle teorie a vykreslit ji s hustotou pravděpodobnosti získanou z dat, viz 5.11.

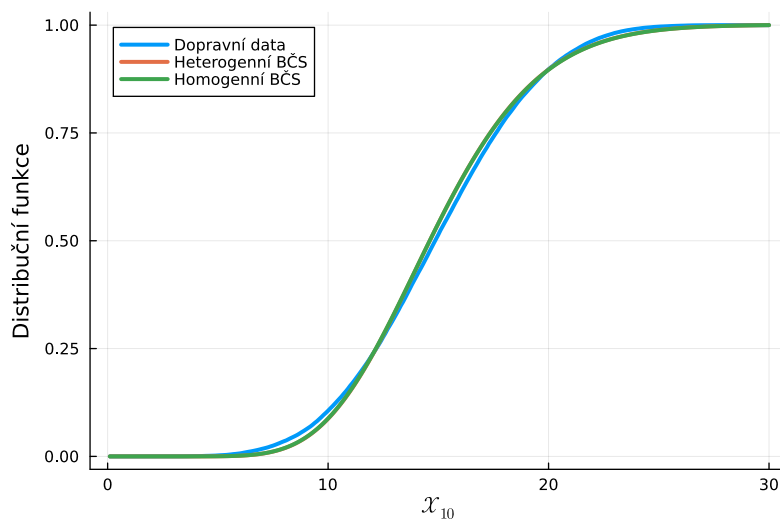


(a) Analytický výpočet z teorie heterogenních BČS.

(b) Analytický výpočet z teorie homogenních BČS.

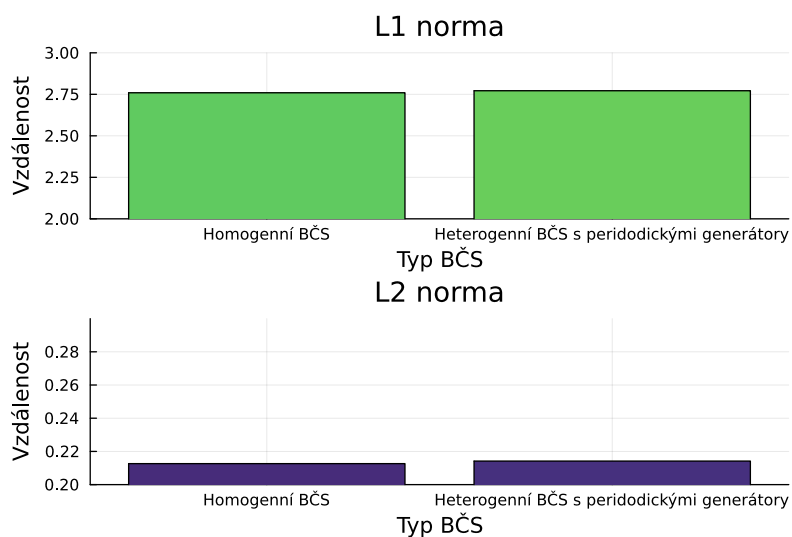
Obrázek 5.11: Histogram hustoty pravděpodobnosti multirozteče pro skupiny čtyř vozidel s analytickým řešením z teorie heterogenních BČS s periodickými generátory.

V obrázku nejsou pouhým okem patrné jakékoliv rozdíly v analytických řešeních. Stejně tak nelze rozdíl rozeznat ani v distribučních funkcích v grafu 5.12.



Obrázek 5.12: Porovnání distribučních funkcí pro homogenní a heterogenní BČS s periodickými generátory.

Nezbývá nám než se v tomhle případě v porovnání spolehnout vypočtené vzdálenosti, které taktéž vycházejí velmi podobně, jak lze vidět v grafu 5.13.

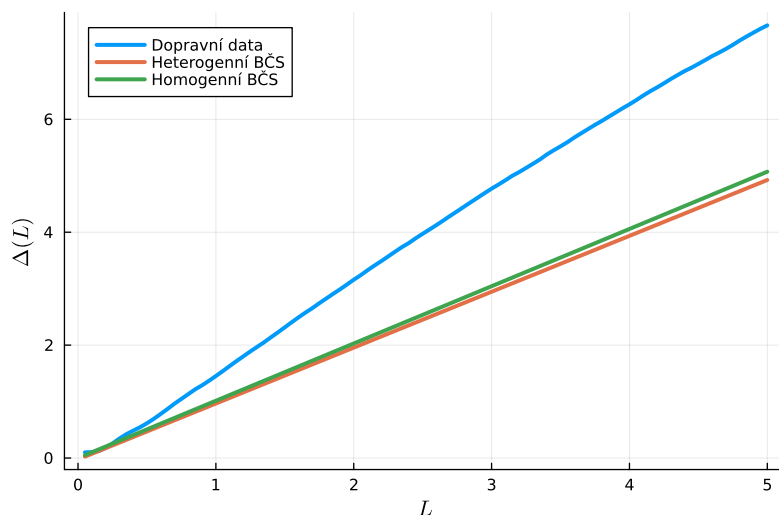


Obrázek 5.13: Měření kvality odhadu pomocí L1 a L2 normy.

Při porovnání vzdáleností pomocí L1 a L2 normy najdeme rozdíl ve vzdálenostech v řádu tisícín, přičemž vzdálenost pro heterogenní BČS o trochu hůř. Analýza ukazuje, že při použití teorie heterogenního BČS s periodickými generátory, nelze při nízkém procentuálním zastoupení nehomogenit v roztečích prakticky rozeznat rozdíl od výsledné hustoty podle homogenního BČS.

5.3.1 Statistická rigidita

Stejně jako v předchozí sekci spočítáme statistickou rigiditu a porovnejme ji s lineárními asymptotami statistické rigidity z teorie heterogenních BČS s periodickými generátory a homogenních BČS, viz graf 5.14.



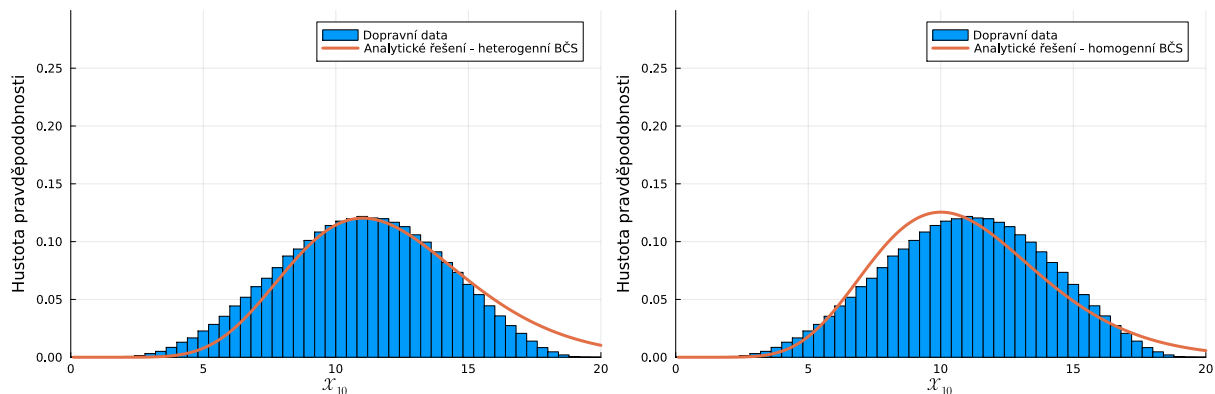
Obrázek 5.14: Statistická rigidita a lineární asymptoty pro homogenní a heterogenní BČS s periodickými generátory.

Můžeme vidět, že v případě využití heterogenního BČS s periodickými generátory se statistická rigidita spočítaná z dopravních dat limitně neblíží k asymptotě, což je znovu způsobeno využitím nevhodného rozdělení pro popis BČS. V tomto případě ovšem můžeme pozorovat menší odchylku mezi lineárními asymptotami homogenního a heterogenního BČS než u kvazihomogenního BČS.

5.4 Inženýrská aplikace

V předchozích sekcích jsme zkoumali využití teorie heterogenních BČS, přičemž pro splnění předpokladu, že pro každé k -té vozidlo známe přesný počet předešlých nákladních vozidel, jsme poněkud uměle vybrali pouze vzorky, které těmto předpokladům vyhovovaly. V této kapitole se pokusíme ověřit aplikovatelnost teorie heterogenních BČS i za situace, že tento předpoklad porušíme. Z pohledu teorie je takový přístup samozřejmě špatně, ale tento pokus nám poskytne představu, jestli je možné teorii aplikovat i pro čistě praktickou úlohu.

Pro analýzu znovu použijme vzorky z hustotního pásma $5 - 15 \frac{\text{veh}}{\text{km}}$, přičemž každý vzorek obsahuje $M = 30$ měření. Spočítáme průměrný počet nákladních vozidel ve vzorcích. V použitých datech z vybraného hustotního pásma vychází průměrný počet kamiónů ve vzorcích o M měření po zaokrouhlení roven dvěma. Pro ukázkou zkoumejme hustotu pravděpodobnosti multirozteče X_{10} . To znamená, že budeme do výsledku z kapitoly 4.5.3 dosazovat za $k_0 = 1$ a $k_1 = 7$ a to kvůli indexování multiroztečí od nuly. Na obrázku 5.15 vidíme výstup, pokud takhle analyticky vypočteme hustotu pravděpodobnosti a porovnáme ji s histogramem.

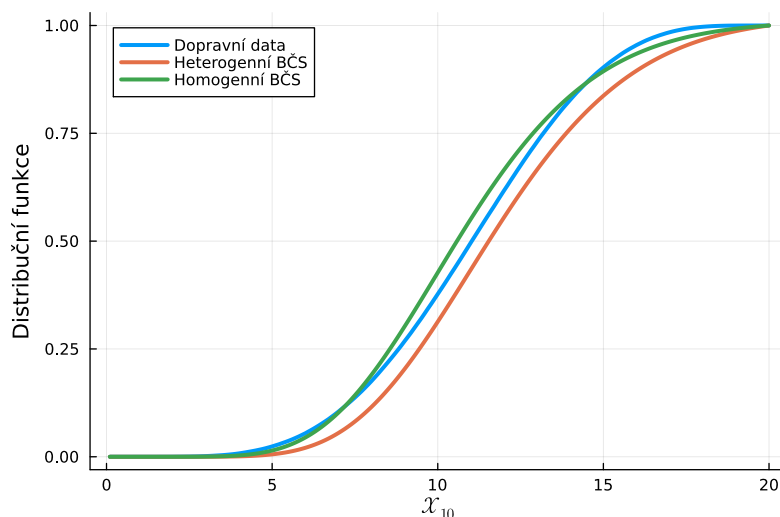


(a) Analytický výpočet z teorie heterogenních BČS.

(b) Analytický výpočet z teorie homogenních BČS.

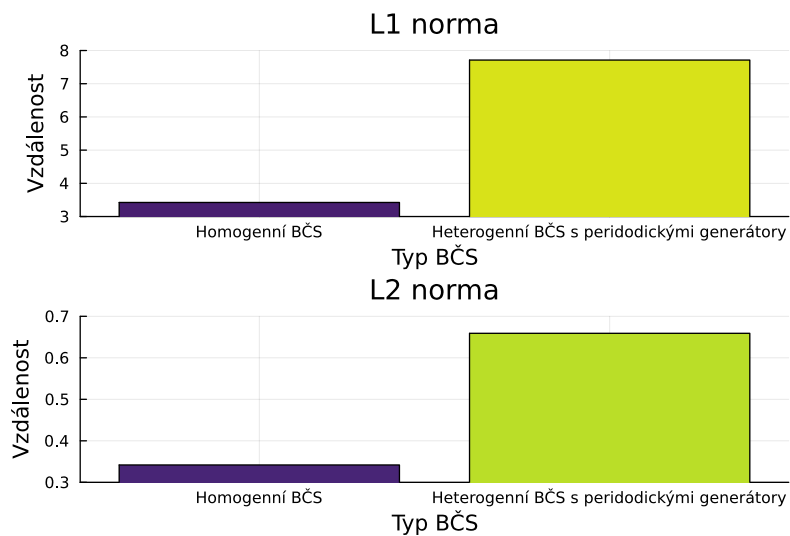
Obrázek 5.15: Histogram hustoty pravděpodobnosti multirozteče s analytickým řešením z teorie heterogenních BČS s periodickými generátory.

Všimněme si, že analyticky vypočtená hustota pravděpodobnosti z teorie heterogenních BČS s periodickými generátory (navzdory nedodržení předpokladů) poměrně přesně odhadne hustotu pravděpodobnosti v okolí maximální pravděpodobnosti, viz 5.15a. Pro porovnání jsme provedli podobný výpočet za využití teorie homogenních BČS, což shrnuje graf 5.15b. Při použití teorie homogenních BČS získáme horší odhad hustoty pravděpodobnosti v okolí maxima, ale o něco lépe můžeme hustotu odhadnout na krajích. Pro srovnání bez závislosti na šířce binování přidejme ještě graf znázorňující distribuční funkce obou systémů a empirickou distribuční funkci spočtenou z dat, viz 5.16.



Obrázek 5.16: Porovnání distribučních funkcí pro homogenní a heterogenní BČS.

Na závěr výstupy porovnejme spočtením vzdálenosti distribučních funkcí pro oba BČS od empirické distribuční funkce za použití L1 a L2 normy. Srovnání vzdáleností distribučních funkcí znázorňuje graf 5.17.

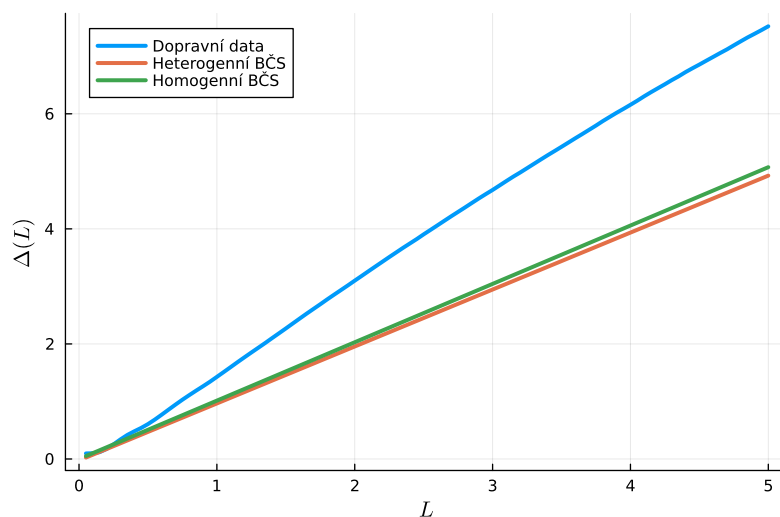


Obrázek 5.17: Měření kvality odhadu pomocí L1 a L2 normy.

Lze vidět, že odhad hustoty pravděpodobnosti heterogenního BČS s periodickými generátory vychází v tomhle srovnání hůř. Tato skutečnost může být způsobena nedodržením předpokladů z teorie, použitím nevhodné hustoty pravděpodobnosti pro odhad parametrů (lepší by bylo použít GIG rozdělení) a nutností odhadovat dva parametry, čímž se může do odhadu zanést větší chyba.

5.4.1 Statistická rigidita

Vykreslení spočtené statistické rigidity můžeme vidět na grafu 5.18.



Obrázek 5.18: Statistická rigidita a lineární asymptoty pro homogenní a heterogenní BČS s periodickými generátory.

Při pečlivějším pozorování si můžeme všimnout, že oproti předchozí sekci se statistická rigidita spočtená z dopravních dat mírně liší, což je očekávaný rozdíl způsobený zahrnutím datových vzorků, které nespl-

ňují předpoklady teorie heterogenních BČS s periodickými generátory. Ovšem znovu kvůli využívání nevhodné rozdělení pro popis hustoty pravděpodobnosti roztečí se statistická rigidita neblíží ani k jedné z lineárních asymptot.

Závěr

V kapitole 1 jsme shrnuli zavedení homogenního balančního částicového systému (dále BČS) a ukázali základní tvrzení pro statistiky prvního a druhého řádu. Na závěr kapitoly jsme diskutovali analytická řešení pro speciální varianty BČS.

V kapitole 2 bylo našim cílem diskutovat celou metodiku numerických výpočtů statistického popisu a statistik heterogenních BČS. Metodiku popsanou v této kapitole jsme následně použili v kapitole 3 pro ověření výsledků na syntetických datech.

Kapitola 3 pojednává o první zkoumané speciální variantě heterogenních BČS o tzv. kvazihomogenním BČS. V rámci kapitoly jsme vyslovili definici systému a jeho statistických popisů. Následně kapitola pojednává o charakteristikách prvního a druhého řádu a jejich vlastnostem. V rámci zkoumání vlastností charakteristik jsme vyslovili i tvrzení, vztahující se k Laplaceovým formám statistik. Na závěr kapitoly jsme získané znalosti demonstrovali na úlohách s již se specifickou volbou generátorů. Výsledky úloh jsme ověřili numericky na syntetických datech.

Druhou zkoumanou speciální variantou heterogenních BČS, označovanou jako heterogenní BČS s periodickými generátory, se zabývá kapitola 4. Obdobně jako v kapitole 3 jsme zkoumaný systém zavedli i s jeho statistickými popisy. Posléze jsme se zaměřili na charakteristiky prvního a druhého řádu. Dokázali jsme teoremy spojené s charakteristikami a s jejich Laplaceovou formou. V poslední části kapitoly jsme znovu dosažené poznatky použili při řešení úloh s konkrétními generátory. Kapitola nám, kromě výsledků pro speciální variantu heterogenního BČS s periodickými generátory, navíc poskytla nástroje pro práci s obecnější formou heterogenních BČS, u kterých není nezbytné mít rozteče dané jednotlivými generátory zastoupenými v systému procentuálně stejně.

V poslední kapitole práce jsme všechny získané znalosti aplikovali při analýze dopravních dat. Obdržené výsledky za pomoci teorie heterogenních BČS jsme napříč kapitolou porovnávali s výsledky z teorie homogenních BČS. Pro demonstraci využití jsme uvažovali, že rozestupy nákladních a osobních vozidel jsou dány odlišnou hustotou pravděpodobnosti, což jsme také v rámci kapitoly ověřili. Pro aproximaci hustot pravděpodobnosti roztečí pro jednotlivé typy se využilo gamma rozdělení. Úvod kapitoly rozebírá metodiku předzpracování dat včetně 3-s unifikační procedury a metodu použitou pro odhad parametrů gamma rozdělení. V hlavní části kapitoly se zaměřujeme na porovnání analytického výpočtu hustoty pravděpodobnosti multiroztečí a lineární asymptoty statistické rigidity s hodnotami spočtenými z dopravních dat. Porovnání jsme ukázali jak pro kvazihomogenní BČS, tak i pro heterogenní BČS s periodickými generátory. Ukázali jsme, že v případě aplikace teorie kvazihomogenních BČS, analyticky vypočtená hustota pravděpodobnosti multirozteče lépe popisuje dopravní data, než homogenní BČS při porovnání L2 normou. V případě heterogenního BČS s periodickými generátory jsme obdrželi analytické řešení velmi blízké řešení z teorie homogenního BČS. V závěru kapitoly jsme se pokusili využít

teorii heterogenních BČS v situaci, kdy neumíme s jistotou zaručit procentuální zastoupení jednotlivých generátorů v úsecích vozovky. V této úloze si heterogenní BČS vedl hůř než homogenní BČS, což je přímým následkem porušení předpokladů teorie heterogenních BČS.

Analýza vede k závěru, že předpoklad homogenity v BČS není špatný a vede k dobrým výsledkům. Ovšem v případě práce s daty s výraznými nehomogenitami, může opuštění tohoto předpokladu výsledky vylepšit. Avšak pro plné využití potenciálu teorie heterogenních BČS je potřeba navazujícího výzkumu a to především pro odvození výpočtu hustot pravděpodobnosti multiroztečí a charakteristik pro GIG rozdělení, jenž je v oboru modelování dopravy standardně využíváné. Výsledky dosažené v diplomové práci poslouží v nejbližší době k vytvoření impaktované publikace v oblasti vehicle headway modeling.

Literatura

- [1] L. Li., X.M. Chen, *Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies 76, 2017, 170–188.
- [2] M. Krbálek, M. Krbálková, *Elucidating Super-Compressible States in Inner Structure of Vehicular Flow*, Applied Sciences 14/2 600, 2024.
- [3] Tolle JE., *Vehicular headway distributions: testing and results*, Transportation Research Record, 1976.
- [4] S. Ossen, S.P. Hoogendoorn, *Heterogeneity in car-following behavior: theory and empirics*, Transport. Res. Part C: Emerg. Technol., 2011, 182-195.
- [5] J. Nábělek, *Superpoissonovské stavy balančního částicového systému*, Bakalářská práce, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2022.
- [6] M. Krbálek, J. Vacková, *Matematické modelování dopravy*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2022, 2022, 1-248.
- [7] Krbálek, M.; Hrabák, P.; Bukáček, M., *Pedestrian headways—Reflection of territorial social forces*, Physica A 2018, 490, 38.
- [8] M. Krbálek, P. Šeba, and P. Wagner, *Headways in the traffic flow - remarks from a physical perspective*, Phys. Rev. E 64, 2001, 066119 - 066125
- [9] V. Pánek, *Statistické vlastnosti termodynamického částicového plynu s kombinovaným potenciálem*, Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2022.
- [10] J. Nábělek, *Balanční částicový systém s volným koncem*, Výzkumný úkol, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2023.
- [11] M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [12] Krbálek, M., Krbálková, M., *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*, Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice, 2018.
- [13] O, Kollert, M. Krbálek, T. Hobza. M. Krbálková, *Statistical rigidity of vehicular streams—theory versus reality*, Journal of Physics Communications 3, 2019.
- [14] M. Krbálek, F. Šeba, M. Krbálková, *Super-random states in vehicular traffic - detection & explanation*. Physica A 585, 2022, 126418.
- [15] M. Krbálek, P. Šeba, *Spectral rigidity of vehicular streams (random matrix theory approach)*. J. Phys. A: Math. Theor. 42 345001, 2009, 1-10.