

Ing. František Štampach, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze:

Posudek školitele diplomové práce
Tomáše Hrdiny

Diskrétní polyharmonický operátor s komplexním potenciálem

Předmětem studia diplomové práce Tomáše Hrdiny je analýza spektrálních vlastností operátoru $(-\Delta)^\alpha + V$ na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$, kde Δ je diskrétní Laplaceův operátor na jednodimenzionální mřížce, $\alpha > 0$ a V je integrabilní potenciál, tj. diagonální trace-class operátor, jehož hodnoty mohou být komplexní. Cílem práce bylo zobecnit některé výsledky známé pro případ diskrétních Schrödingrových operátorů $\alpha = 1$ a doplnit taktéž známé výsledky pro případ spojitého polyharmonického operátoru na $L^2(\mathbb{R})$ o diskrétní variantu. Tento cíl se podařilo naplnit částečně.

Práce sestává ze tří kapitol. Všechny kapitoly obsahují vlastní výsledky autora. Ve třetí kapitole jsou vlastní výsledky doplněny rešerší známých výsledků týkající se nerovností Hardyho typu.

První kapitola studuje operátor $(-\Delta)^\alpha$ pro obecnou mocninu $\alpha > 0$ bez poruchy. Operátor $(-\Delta)^\alpha$ je zaveden diagonalizací Laurentova operátoru $-\Delta$ a aplikací funkcionálního počtu. Student napočítal maticové elementy operátoru $(-\Delta)^\alpha$ vyjádřené pomocí Gama funkce a našel integrální formule pro rezolventní operátor $((-\Delta)^\alpha - \lambda)^{-1}$, která je posléze zjednodušena vhodnou volbou transformace spektrálního parametru λ a reziduovou větou.

Druhá kapitola se omezuje na případ přirozené mocniny $\alpha \in \mathbb{N}$ a přidává poruchu V . Hlavním cílem je nalezení tzv. optimálních spektrálních obálek, tj. vymezení optimálních množin v komplexní rovině obsahujících diskrétní spektrum třídy polyharmonických operátorů s fixní trace-class normou poruchy V . Optimální spektrální obálka se podařilo najít pro případ biharmonického operátoru ($\alpha = 2$), což je nový výsledek a nejcennější přínos práce. Metoda důkazu se ale rychle komplikuje pro vyšší celočíselné mocniny, a proto se ji nepodařilo aplikovat pro $\alpha \geq 3$. V tomto případě dokázal student alespoň jistou neoptimální lokalizaci diskrétního spektra. Optimální spektrální obálka pro případ celočíselného $\alpha \geq 3$ je zformulována jako hypotéza, kterou student důkladně prověřil numericky.

Třetí kapitola je věnována tzv. analýze kritičnosti operátoru $(-\Delta)^\alpha$ v závislosti na parametru $\alpha > 0$. Student dokázal, že $(-\Delta)^\alpha$ je kritický, právě když $\alpha \geq 1/2$. To znamená, že operátor $(-\Delta)^\alpha$ vykazuje tzv. spektrální stabilitu jen pro $\alpha \in (0, 1/2)$. Podmínku spektrální stability kvalitativně vyjadřují nerovnosti Hardyho typu pro $(-\Delta)^\alpha$, které byly nalezeny v r. 2018 v článku [1] (dokonce v optimální podobě, jak dokazuje článek [11] z r. 2023). Ve zbytku třetí kapitoly je provedena rešerše článku [1].

Zadání práce bylo splněno s výjimkou posledního bodu 6, na jehož zpracování už nezbyl čas. Chtěl bych zdůraznit, že jsem při zadávání práce nevěděl do jaké hloubky se dílčí úkoly podaří vyšetřit, a proto nezpracování 6. bodu nepovažuji za zásadní. Ostatní body byly zpracovány zcela a daly vzniknout práci dostatečného rozsahu. Odborná úroveň práce je velmi dobrá. V textu lze najít drobné chyby a překlepy, ale jejich četnost nepřevyšuje běžně tolerovanou mez. Práce se zdrojů odpovídá potřebám textu. Přebírané výsledky jsou řádně citovány.

Ze struktury textu je stále patrná určitá nezkušenost studenta. Tu lze pozorovat např. v jisté nevyváženosti textu, kde na jednom místě velmi detailně popisuje relativně jednoduché algebraické úpravy, na jiném místě je ale zásadní argument důkazu pouze stručně naznačen. Formální podobu práce také mírně kazí občasná repetitivní argumentace. Práce je psána anglicky. Angličtina studenta sice není perfektní, ale text je srozumitelný.

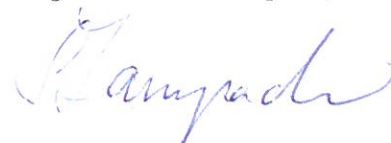
Aktivita studenta byla výborná. Pravidelně docházel na konzultace a dílčí úkoly zvládl zpracovávat samostatně bez větších potíží.

Chtěl bych vyzdvihnout, že zejména výsledek kapitoly 2 by po doplnění a mírné reformulaci byl publikovatelný (podobný výsledek byl publikován v *Integr. Equ. Oper. Theory*, článek [9]). Mnohem lepší publikace by ovšem vznikla, kdyby se podařilo dokázat formulovanou hypotézu zcela. Jelikož nalezení jejího důkazu stále nepovažuji za beznadějně, článek založený na výsledcích práce jsme zatím nenapsali. Student plánuje pokračovat ve své práci v rámci doktorského studia.

Uvedené výtky považuji za marginální a práci za výbornou. Proto doporučuji diplomovou práci Bc. Tomáše Hrdiny k obhajobě a navrhuji hodnotit známkou **A - výborně**.

V Praze 16. 5. 2024

Ing. František Štampach, Ph.D.

Handwritten signature of František Štampach in blue ink.