

I. IDENTIFIKAČNÍ ÚDAJE

Název práce:	Kritický exponent a asymptotický kritický exponent
Jméno autora:	Bc. Daniela Opočenská
Typ práce:	diplomová práce
Fakulta:	Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská (FJFI)
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D.
Pracoviště vedoucího práce:	Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

II. HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ

Zadání a motivace k jeho vypsání	náročnější
<i>Hodnocení náročnosti zadání závěrečné práce a krátké průvodní slovo k motivaci pro zadání práce.</i>	
Jedním z nejstudovanějších témat kombinatoriky na slovech je zkoumání mocnin faktorů obsažených v daném nekonečném slově, a to nejen celočíselných, ale i racionálních.	
S tím souvisí kritický exponent nekonečného slova, který vyjadřuje, jaké maximální mocniny faktorů nekonečné slovo obsahuje, a dále pak asymptotický kritický exponent, který vyjadřuje, jaké maximální mocniny pro faktory rostoucí délky nekonečné slovo obsahuje.	
Právě tomuto tématu se věnuje diplomová práce Daniely Opočenské.	
Výzkum plynule navazuje na bakalářskou práci a opět přináší nové výsledky, které jsou součástí jednoho již publikovaného článku a dvou článků přijatých k publikaci v mezinárodních recenzovaných časopisech.	

Splnění zadání	splněno
<i>Posuďte, zda předložená závěrečná práce splňuje zadání. V komentáři případně uveďte body zadání, které nebyly zcela splněny, nebo zda je práce oproti zadání rozšířena. Nebylo-li zadání zcela splněno, pokuste se posoudit závažnost, dopady a případně i příčiny jednotlivých nedostatků.</i>	
Zadání bylo beze zbytku splněno. Bylo navrženo kromě balancovaných slov zkoumat i kritický exponent dalších tříd slov. Z navržených tříd se podařilo prozkoumat dvě, a to pevné body morfismů a slova vyhýbající se dlouhým komplementárním faktorům. Navíc byla studována i slova substitutivní (což je třída obsahující pevné body morfismů) a dále třída slov obsahujících palindromy omezené délky. Minimální asymptotický kritický exponent balancovaných slov byl určen pro abecedy do 10 písmen. Po odevzdání diplomové práce ještě došel výpočet pro 11 písmen (kde byla původně chyba z přehlédnutí, Daniela zadala omylem program chybné parametry), v tuto chvíli má tedy autorka vyřešenu i abecedu o 11 písmenech.	

Aktivita a samostatnost při zpracování práce	výborná
<i>Posuďte, zda byl student během řešení aktivní, zda dodržoval dohodnuté termíny, jestli své řešení průběžně konzultoval a zda byl na konzultace dostatečně připraven. Posuďte schopnost studenta samostatné tvůrčí práce.</i>	
Daniela se o kombinatoriku na slovech zajímá již od prvního ročníku. Právě tento náskok, talent a zároveň nesmírně pečlivý přístup jsou v její nadprůměrné práci zúročeny. Zúročily se i jinde. S vynikajícími výsledky absolvovala semestrální pobyt na Univerzitě ve Waterloo v Kanadě v prvním roce magisterského studia. V roce 2023 získala Daniela 1. místo v Rektorysově soutěži a dále Cenu Stanislava Hanzla.	

Odborná úroveň	výborná
<i>Posuďte úroveň odbornosti závěrečné práce, využití znalostí získaných studiem a z odborné literatury, využití podkladů a dat získaných z praxe.</i>	
Není obvyklé, aby bakalářská a diplomová práce obsahovaly původní výsledky, které by již byly dokonce publikovány či přijaty k publikaci ve čtyřech článcích v mezinárodních recenzovaných časopisech. Práce	

s literaturou je naprosto v pořádku a dále autorka šikovně využívá výsledků programů, které sama implementovala.

Formální a jazyková úroveň

výborná

Posuďte správnost používání formálních zápisů obsažených v práci. Posuďte typografickou a jazykovou stránku.

Autorka má nadání psát srozumitelně, jasně, čtivě a velmi dobrou angličtinou. Formální úroveň je vysoká, o čemž svědčí i fakt, že autorka své výsledky zpracovala jako součást odborných publikací v mezinárodních recenzovaných časopisech.

Výběr zdrojů, korektnost citací

výborné

Vyjádřete se k aktivitě studenta při získávání a využívání studijních materiálů k řešení závěrečné práce. Charakterizujte výběr pramenů. Posuďte, zda student využil všechny relevantní zdroje. Ověřte, zda jsou všechny převzaté prvky řádně odlišeny od vlastních výsledků a úvah, zda nedošlo k porušení citační etiky a zda jsou bibliografické citace úplné a v souladu s citačními zvyklostmi a normami.

Výběr zdrojů a korektnost citací autorce nedělá problém, jak výsledky DP, tak i výsledky BP jsou součástí článků přijatých k publikaci. Proto se Daniela již ve třetím ročníku s prací s citacemi a vhodným výběrem literatury seznámila.

Další komentáře a hodnocení

Vyjádřete se k úrovni dosažených hlavních výsledků závěrečné práce, např. k úrovni teoretických výsledků, nebo k úrovni a funkčnosti technického nebo programového vytvořeného řešení, publikačním výstupům, experimentální zručnosti apod.

Diplomová práce obsahuje dvě části.

1. V první se autorka věnuje studiu asymptotického kritického exponentu balancovaných slov. Balancovaná aperiodická slova nad binární abecedou jsou dobře známá slova sturmovská. I nad vícepísmennými abecedami se dají balancovaná slova konstruovat pomocí sturmovských, konkrétně jejich barvením slovy s konstantními mezerami.

Pro úplnost připomeňme i výsledky dosažené v bakalářské práci autorky pro kritických exponent balancovaných slov.

Rampersad, Shallit a Vandomme našli v roce 2019 balancovaná slova s minimálním kritickým exponentem nad abecedou o 3 a 4 písmenech. A dále vyslovili domněnku, že minimální kritický exponent balancovaných slov nad abecedou o $d > 4$ písmenech je roven $(d-2)/(d-3)$. Navíc pro $d < 11$ předložili seznam balancovaných slov, o kterých se domnívali, že jejich kritický exponent je roven $(d-2)/(d-3)$. Pro $d < 9$ potvrdili Baranwal a Shallit, že jde o správné kandidáty.

Zatímco výše zmínění autoři řešili otázku minimálního kritického exponentu hrubou silou -- prohledávali prefixy všech balancovaných slov nad danou abecedou -- v bakalářské práci je popsán algoritmus, který využívá kombinatorických vlastností balancovaných slov (konkrétně znalosti bispeciálů a návratových slov) k výpočtu kritického exponentu a je mnohonásobně rychlejší.

Díky implementaci programu jsme byly schopné dokázat, že domněnka platí i pro 9 a 10 písmen a že nalezení kandidátů jsou správná.

Ovšem poté se šikovnou prací s programem podařilo Daniele v bakalářské práci domněnku vyvrátit -- najít balancovaná slova, která nad 11 a 12 písmeny nabývala nižší kritický exponent $(d-1)/(d-2)$. A nejen to, program nám byl nápomocen také v nalezení nekonečně mnoha abeced (všech se sudým počtem písmen $d > 10$), pro která nabývá minimální kritický exponent balancovaných slov nové nižší meze $(d-1)/(d-2)$. Poté se k nám přidal A. Shur, který byl schopen ukázat, že mez nemůže být nižší. Zformulovali jsme tedy domněnku novou, že pro $d > 10$ je minimální kritický exponent balancovaných slov roven $(d-1)/(d-2)$, a dokázali ji pro

sudé počty písmen. Tento výsledek je již publikovaný v článku Dvořáková, Opočenská, Pelantová, Shur: On minimal critical exponent of balanced sequences, Theoretical Computer Science, 922 (2022), 158--169.

Zatímco kritický exponent nekonečných slov je oblast, které se již před námi věnovala řada expertů, při studiu asymptotického kritického exponentu nebylo na koho navazovat.

V případě minimálního kritického exponentu balancovaných slov jsme byly schopné odhadnout chování nad většími abecedami na základě znalosti chování balancovaných slov nad abecedou do velikosti 10. V případě asymptotického kritického exponentu balancovaných slov jsme musely objevit zbrusu nový aparát (graphs of admissible tails), abychom byly schopné určit hodnoty pro abecedy do 10 písmen.

Daniela se podílela jak na tvorbě algoritmu, tak na jeho implementaci (to je čistě její práce) a na nalezení balancovaných slov s minimálním asymptotickým kritickým exponentem nad abecedami do 10 písmen pomocí programu. Výsledky jsou publikované v článku Dvořáková, Opočenská, Pelantová: Asymptotic repetitive threshold of balanced sequences, Math. Comp. 92 (2023), 1403-1429.

Pomocí paralelizace a dalších úprav programu rozšířila Daniela výsledek i na 11 písmen.

2. V druhé části diplomové práce se autorka věnuje studiu kritického exponentu morfických obrazů pevných bodů morfismů. Je to vlastně „práce na zakázku“, protože jsme byly přímo oslovené zahraničními kolegy, zda bychom uměly spočítat kritické exponenty slov, která zkoumali v souvislosti se dvěma problémy:

1) minimální kritický exponent pro nekonečná binární slova obsahující jen konečný počet komplementárních faktorů, tj. slov z písmen 0 a 1, z nichž jedno vznikne z druhého záměnou nul a jedniček, např. 00101 a 11010, 2) minimální kritický exponent pro nekonečná binární slova obsahující jen konečný počet palindromů, tj. slov, která zůstanou stejná, když se čtou pozpátku, např. 0010100.

Využily jsme naší znalosti, jak počítat kritický exponent při znalosti bispeciálů a návratových slov. Odvodily jsme tvar bispeciálů a návratových slov v pevném bodu morfismu a jejich pomocí jsme získaly tvar bispeciálů a návratových slov v morfických obrazech. Dále jsme dokázaly dokonce obecně vztah mezi asymptotickým kritickým exponentem v původním slově a v morfickém obrazu. Při výpočtech nebylo tentokrát potřeba vyvíjet žádný speciální program, ale i tak šlo o náročné výpočty, kde Daniela dokazovala celou řadu netriviálních nerovností.

Výsledky jsou součástí dvou článků přijatých k publikaci Dvořáková, Ochem, Opočenská: Critical exponent of binary words with few distinct palindromes, 2023, arXiv:2311.13003 a

Currie, Dvořáková, Ochem, Opočenská, Rampersad, Shallit: Complement avoidance in binary words, 2023, arXiv:2209.09598.

III. CELKOVÉ HODNOCENÍ A NÁVRH KLASIFIKACE

Shrňte aspekty závěrečné práce, které nejvíce ovlivnily Vaše celkové hodnocení. Případně uveďte otázky, které by měl student zodpovědět při obhajobě závěrečné práce před komisí.

Jsem přesvědčená (a výše jsem důvody vysvětlila), že diplomová práce Daniely Opočenské je vynikající, a hodnotím ji známkou A (výborně).

Předloženou závěrečnou práci hodnotím klasifikačním stupněm **A - výborně**.

Datum: 14.5.2024

Podpis:



