

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Odbor mechaniky a mechatroniky



Disertační práce

# Návrh výpočetních postupů pro redistribuci akustické energie v hlasovém projevu člověka

Ing. Jaroslav Štorkán

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Mechanika tuhých a poddajných těles a prostředí

Školitel

prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola



## Abstrakt

Porozumění vzniku a modelaci hlasového projevu člověku je nezbytným předpokladem pro nalezení odpovědí na otázky pokládané klinickou praxí. S ohledem na potřeby hlasových pedagogů a lékařů v klinické praxi je sestavení výpočetně efektivních matematických modelů, které umožňují počítačově simulovat lidskou fonaci a vyhodnocovat rozložení akustické energie ve sledovaném hlasovém signálu intenzivně zkoumaný problém.

V práci jsou prezentovány a odvozeny modely vokálního traktu člověka, sestavené na principu základních vztahů mechaniky kontinua. Byly odvozeny nejen metody využitelné v nižších budících frekvenčních rozsazích, kde lze předpokládat šíření rovinné zvukové vlny, ale i metody, které lze využít ve frekvenčním rozsahu, kde je již nezbytné uvažovat vybuzení příčných akustických vln.

Pro tvarově komplexní akustické domény (vokální trakt s paralelními kavitami a nosním traktem) byla zkoumána metoda použití superelementů pro snížení výpočtové náročnosti řešené soustavy. Byla analyzována využitelnost statické Guyanovy a dynamické IRS metody pro redukci matic (tuhosti, hmotnosti, tlumení) popisujících řešený dynamický systém.

Následně byl odvozen a verifikován speciální izoparametrický prvek vhodný pro popis tvarově komplexních akustických kavit vokálního traktu člověka metodou konečných prvků s ohledem na výrazné snížení výpočtové náročnosti. Tento nově odvozený prvek byl navržen s ohledem na možnost modelování paralelních kavit napojených na základní kavitu vokálního traktu člověka. Vokální trakt byl modelován jak samostatně, tak včetně paralelních kavit (piriformní siny a epiglotické valemuly). Takto sestavený komplexní model vokálního traktu člověka byl využit pro výpočtově náročné optimalizační úlohy s cílem nalezení vhodných geometrických parametrů pro dosažení definovaného rozložení akustické energie ve frekvenčním spektru hlasového projevu člověka. Byla vyhodnocena citlivost hlasových charakteristik na změny geometrických parametrů. Výpočtový model sestavený z odvozených prvků byl využit pro analýzu podmínek vzniku tzv. pěveckého formantu.

## Klíčová slova

metoda konečných prvků, izoparametrický prvek, vokální trakt, akustika, simulace fonace, pěvecký formant

## **Abstract**

Understanding the creation and modelling of human vocal expression is an essential prerequisite for finding answers to questions posed by clinical practice. With concerning the needs of voice teachers and doctors in the clinical environment, it is desirable that the constructed mathematical models should be computationally efficient. An intensively researched problem applies particularly to the especially mathematical models that allow computer simulation of human phonation and evaluation of the distribution of acoustic energy in the observed voice signal.

The thesis presents and derives mathematical models of the human vocal tract, built on the principle of the fundamental relationships of the continuum mechanics. Not only were methods applicable in lower excitation frequency ranges, where the propagation of a plane sound wave can be assumed, but also methods in the frequency range, where it is already necessary to consider the excitation of transverse acoustic waves, were derived.

For shape-complex acoustic domains (vocal tract with parallel cavities and nasal tract), has been done research concerning a method that explores the use of superelements to reduce computational complexity of the solved system. A part of this thesis is an analysis of the applicability of static Guyan and dynamic IRS methods for the reduction of matrices (stiffness, weight, damping) describing the solved dynamic system.

Subsequently, a special isoparametric element suitable for describing the shape-complex acoustic cavities of the human vocal tract was derived and verified using the finite element method relating to a significant reduction in computational complexity. This newly derived element designed to consider the possibility of modelling parallel cavities connected to the primary cavity of the human vocal tract. The vocal tract was modelled separately and included parallel cavities (piriform sinuses and epiglottic vallecula). This complex model of the vocal tract, constructed in this way, was used for computationally demanding optimization tasks to find suitable geometric parameters for achieving a defined distribution of acoustic energy in the frequency spectrum of human vocal expression. A significant goal of this work is to evaluate the sensitivity of voice characteristics depending on changes in the geometric parameters themselves. A computational model composed of derived elements was used to analyze the conditions for the creation so-called singer formant.

## **Key words**

finite element method, isoparametric element, vocal tract, acoustics, simulation of phonation, singer formant

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně za podpory školitele v souladu s autorskou etikou a že veškerá použitá literatura je v práci uvedena. Práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia.

V Praze dne:

.....

Ing. Jaroslav Štorkán

## **Poděkování**

Děkuji mému školiteli prof. Dr. Ing. Tomáši Vampolovi za čas a trpělivost během mého doktorského studia, dále za vytvoření podmínek pro vypracování této práce a za cenné rady, které nasměrovaly moji práci k uvedeným výsledkům.

Dále bych chtěl poděkovat prof. Ing. Michaelovi Valáškoví, DrSc. za vedení při tvorbě mé bakalářské a diplomové práce, kde jsem získal mnoho zkušeností, které jsem při psaní disertační práce využil.

Další poděkování patří mé rodině, která mi poskytla podmínky pro studium. A v neposlední řadě poděkování patří mé partnerce, která mi byla oporou a motivací při tvorbě této práce.

# Obsah

1. Úvod .....	9
2. Přehled současného poznání problematiky .....	11
2.1 Anatomie vokálního traktu člověka .....	11
2.2 Průtok vzduchu vokálním traktem .....	14
2.3 Sluch .....	17
2.4 Formanty .....	19
2.5 Vybrané výsledky výzkumu lidského hlasu .....	21
2.6 Základní rovnice akustiky .....	26
2.6.1 Vlnová rovnice .....	26
2.6.2 Akustická impedance .....	30
2.7 Modelování vokálního traktu jako 1D kontinuum .....	34
2.7.1 Vlnová rovnice 1D kontinua .....	34
2.7.2 Frekvenční analýza .....	39
2.7.3 Simulace ustálených kmitů .....	41
2.8 Metoda konečných prvků pro úlohy akustiky .....	42
2.8.1 Formulace úlohy pro metodu konečných prvků .....	42
2.8.2 Okrajové podmínky v MKP formulaci .....	45
2.8.3 Sestavení MKP modelu .....	47
2.8.4 Frekvenční analýza .....	49
2.8.5 Simulace ustálených kmitů .....	50
2.8.6 Redukce MKP modelu .....	50
2.8.6.1 Modální redukce .....	51
2.8.6.2 Guyanova redukce .....	53
2.8.6.3 IRS redukce .....	55
3. Cíle práce .....	58
4. Návrh úpravy výpočtu pomocí metody konečných prvků .....	60
4.1 Element založený na úpravě nelineárního šestistěnu .....	60
4.2 Nelineární trojúhelníkový element lineárně vysunutý do prostoru .....	66
4.3 Numerická integrace pohybových matic navrženého elementu .....	74

5.	Geometrie vokálního traktu .....	82
5.1	Zpracování měřené geometrie .....	83
6.	Základní akustické analýzy .....	89
6.1	Citlivost modelu na vstupní parametry .....	95
6.2	Simulace fonace .....	98
6.3	Tvarové optimalizace .....	106
7.	Geometrie vokálního traktu s paralelními kavitami.....	116
7.1	Vliv kavit na akustické vlastnosti vokálního traktu .....	121
7.2	Tvarové optimalizace .....	135
7.3	Geometrické modifikace vokálního traktu pro vznik pěveckého formantu .....	141
8.	Přínosy pro vědu a praxi.....	147
9.	Závěr .....	149
10.	Literatura .....	152
11.	Publikace autora související s tématem disertační práce .....	159
12.	Ostatní publikace autora .....	161
	Seznam obrázků .....	164
	Seznam tabulek .....	168
	Seznam použitých symbolů a zkratek .....	169



# 1. Úvod

Lidský hlas jako prostředek pro komunikaci mezi lidmi je nedílnou součástí lidské společnosti. Jen těžko si můžeme představit fungování naší společnosti bez možnosti komunikovat pomocí hlasu. Proto je biomechanika hlasu oblast, na kterou se v současné době zaměřuje mnoho výzkumníků po celém světě.

Biomechanika lidského hlasu je vědní obor, který je komplexní a zahrnuje nejen problémy určení materiálových parametrů hraničních a hlasivkových tkání, ale i sestavení vhodné matematické metody, která umožní efektivně generovat zvukové vlny v průběhu fonace. Na první pohled je lidský hlas samozřejmost. Většina neodborné veřejnosti si otázku, jak vzniká hlas, nikdy nepoloží, a pokud ano, tak si vystačí s pojmem hlasivky. Hlasivky však rozhodně nejsou dostatečným vysvětlením produkce hlasu, a dokonce i bez nich můžeme používat hlas.

Výzkum vzniku lidského hlasu může být zkoumán z mnoha úhlů pohledu. Proto je zkoumán paralelně v zdravotnických, technických, přírodovědeckých institucích, ale i dalších výzkumných ústavech. Zdravotní pohled studuje například anatomii hlasového ústrojí a jeho reálné poškození během života. Přírodovědecký pohled řeší především, proč hlas vzniká a co ho ovlivňuje.

Tato práce patří do skupiny prací, které se snaží matematicky modelovat fyzikální procesy vytvářející lidský hlas. Podrobný matematický model hlasového ústrojí obsahuje všechny podstatné části, a nevyužívá žádných zjednodušujících předpokladů. Takový model dokáže vysvětlit komplexní jev, jakým je lidský hlas. Dále dokáže dopředu určit následky chirurgického zásahu do hlasového ústrojí, nebo definovat potřebný zásah k dosažení potřebné změny hlasu. V současné době je takový model jen vysněný cíl, kterému se snažíme přiblížit.

Hlasové ústrojí člověka se skládá z několika částí. První části jsou plíce, průdušnice a svaly v okolí plic (bránice). Tato část z hlediska studování hlasu představuje zdroj stlačeného vzduchu. Navazující částí je hrtan, složený z několika chrupavek. V hrtanu se nachází hlasivky. V této části vzniká samobuzenými kmity akustický signál, který se dál šíří vokálním traktem. Ten se skládá ze vzduchového kanálu a okolní tkáně, kterými se akustický signál dál šíří ven z těla. Poslední částí, která ovlivňuje hlas, je i okolní prostředí. Je rozdíl mluvit ve volném prostoru nebo v kostele. Významnou a využívanou vlastností při modelování a výzkumu lidského hlasu je možnost modelovat různé části hlasového ústrojí samostatně. Kompletní model pochopitelně aproximuje realitu lépe. Ukázalo se, že modelování jednotlivých komponent samostatně, kdy je návaznost na ostatní komponenty definována pouze okrajovou podmínkou nebo jinou závislostí, funguje velmi dobře. Typickým příkladem je modelování hlasivek. Plíce se dají nahradit zdrojem tlaku a vokální trakt může být nahrazen výtokem do atmosféry. Tento princip zjednodušení modelování je možné uplatnit i v rámci samotných hlasivek, kde je možné modelovat pouze kmitající tkáň a proudění nahradit tlakovým polem. Nebo modelovat pouze proudění a definovat pohyb hlasivek. Jak bylo zmíněno výše, všechny tyto postupy pro zjednodušení modelů se používají a jejich výsledky nejsou v rozporu s experimenty.

Tato práce si neklade za cíl vytvořit kompletní model hlasového ústrojí, ale sestavení efektivního výpočtového modelu vokálního traktu pro analýzu vlivu tvaru a konfigurace na fonační charakteristiky. Vokální trakt je v práci modelován jako akustická doména. Nemodeluje se proudění uvnitř vokálního traktu, což je pro hodnoty rychlosti proudu vzduchu s ohledem na rychlost zvuku přijatelný kompromis mezi přesností popisu a výpočtovou náročností. Šíření zvuku se uvažuje pouze samotnou vzduchovou kavitou vokálního traktu, nebere se v potaz šíření zvuku lebečními kostmi a měkkými tkáněmi lidské hlavy.

Výpočtová složitost podrobných analýz MKP modelů vokálních traktů je taková, že není možné provádět inverzní výpočty přímo. Z tohoto důvodu se inverzní výpočty řeší například optimalizačními přístupy. Reálně se tedy jeden inverzní výpočet změní na velké množství analýz. To vyžaduje, aby jedna analýza netrvala příliš dlouho. Inverzní výpočet může být časově náročný, přestože je založený na relativně rychlé analýze, to závisí na konvergenci výpočtu. Z tohoto důvodu je kladen důraz na výpočtovou náročnost analýz.

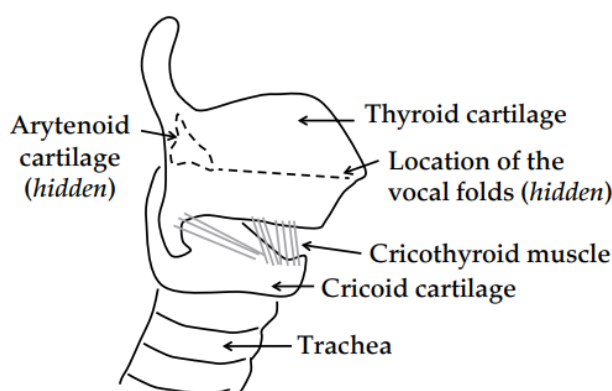
Modelování vokálního traktu je v této práci provedeno několika různými způsoby. Ve všech případech je kladen důraz na rychlost výpočtu, aby byl model použitelný pro náročné optimalizační výpočty. Tvarové optimalizace a citlivostní analýzy vokálních traktů jsou velice významnou částí výzkumu lidského hlasu, jelikož slouží pro odhady následků po plánovaných operačních zákrocích a pro určení potřebných modifikací k dosažení žádané úpravy hlasu. Taková změna může být například zvýraznění určitých frekvenčních spekter pro zvýšení srozumitelnosti nebo hlasitosti hlasu.

## 2. Přehled současného poznání problematiky

Výzkum lidského hlasu je předmětem zkoumání dlouhou dobu. Dodnes citované prameny jsou staré i stovky let. Jedním z nejstarších směrů výzkumu lidského hlasu je fonetika. Tato věda je stará tisíce let a zkoumá tvorbu zvuků a hlasu z ryze praktického hlediska, jako je artikulace. Dříve byla založena na empirii, dnes využívá moderních prostředků výpočetní techniky. Dalším směrem zkoumání hlasu je anatomie. Jelikož hlas vytváří lidské tělo, je přirozené zajímat se o podobu orgánů, které jej vytváří. V rámci anatomických studií bylo historicky hlavním úkolem pochopit, jak funguje lidské tělo. Při tom byl podrobně popsán i vokální trakt. Moderní výzkum lidského hlasu nejčastěji využívá výpočetní techniku nebo experimentální metody. Zabývá se numerickými nebo experimentálními simulacemi tvorby hlasu. Zjišťuje, jaké děje se ve vokálním traktu dějí, jaké mají důsledky, vyhodnocují vliv různých změn na výsledný hlas. Pomocí těchto metod se může odhadnout vliv anatomických nebo patologických změn na hlas. Další výzvou je snaha zkvalitnit hlas lidem s hlasovou poruchou, příkladem je výzkum umělých hlasivek. Tato kapitola obsahuje stručný popis anatomie vokálního traktu, zmíní se i o lidském sluchu a popisuje některé výsledky moderní vědy v tomto oboru. Další část kapitoly se věnuje matematickému popisu akustiky vokálního traktu a možnostmi řešení.

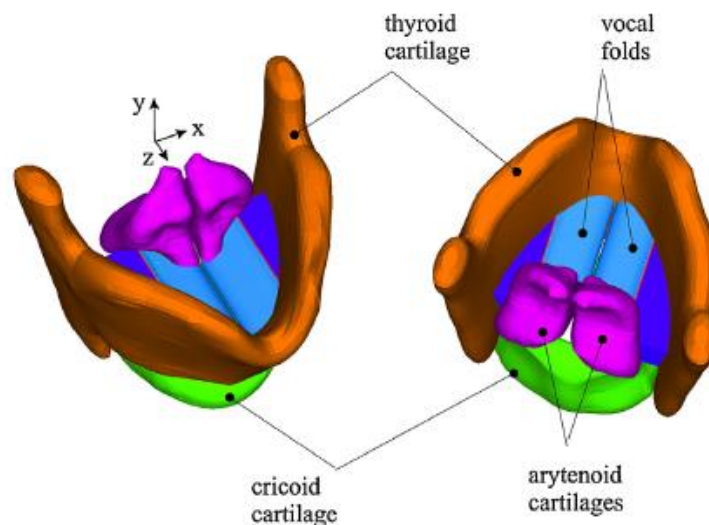
### 2.1 Anatomie vokálního traktu člověka

Vokální ústrojí člověka není samostatným celkem v lidském těle. Je to vedlejší součást dýchacího ústrojí. Veškerý život na zemi je závislý na kyslíku, který se účastní chemických reakcí v organismech. Hlavním účelem dýchacího ústrojí je zajištění oksyločování krve kyslíkem z vdechovaného vzduchu. Dýchací ústrojí zajišťuje střídavě přísun čerstvého vzduchu do plic (nádech) a odstranění vzduchu ochuzeného o kyslík ven z plic (výdech). Podstatou této práce je pouze problematika vokálního traktu. Proto zde nebude popsán celý dýchací trakt, ale jen části důležité pro vznik hlasu.

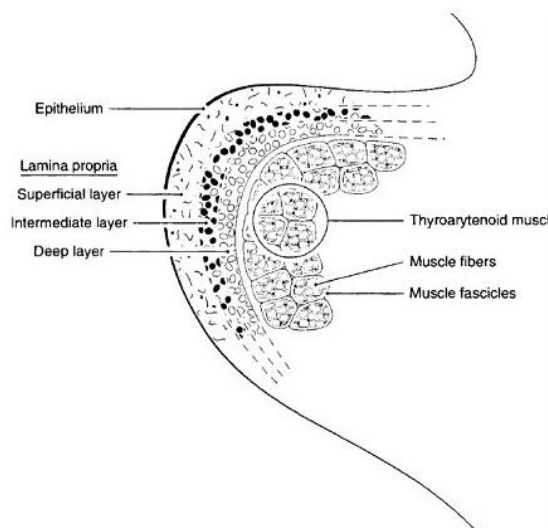


Obrázek 2.1 Boční pohled na horní konec průdušnice a část hrtanu [63]. Překlad anglických odborných slov: Thyroid cartilage – štítná chrupavka, Arytenoid cartilage – hlasivková chrupavka, Cricoid cartilage – prstencová chrupavka, Trachea – průdušnice, Cricothyroid muscle – prstencovoštítný sval, Vocal folds – hlasivky

Normální fonace nastává při výdechu, kdy bránice silově působí na plíce, které zmenšují objem. Vzduch, který byl v plicích, odchází průdušnicí, která končí v hrtanu. Hrtan – larynx (obrázek 2.1) je první částí vokálního ústrojí, skládá se z 5 větších chrupavek a dalších menších. V hrtanu jsou napnuté hlasivky mezi štítnou chrupavkou a hlasivkovými chrupavkami (obrázek 2.2). Hlasivky jsou první částí vokálního ústrojí a zároveň jednou z nejdůležitějších. Většina jejich objemu je tvořena svaelem a vazivem (obrázek 2.3), jedná se tedy o měkké tkáně. Při normálním dýchání jsou hlasivky otevřené a umožňují průtok vzduchu. Při fonaci svaly hrtanu upraví pozice hrtanových chrupavek a hlasivky se předeprnou a uzavřou. Štěrbina mezi hlasivkami se nazývá glottis a dělí hrtan na subglotickou a supraglotickou část. Proudící vzduch způsobuje samobuzené kmity hlasivek. Hlasivky se během těchto kmitů střídavě uzavírají a otevírají. Toto kmitání generuje pulzy vzduchu, které proudí dále vokálním traktem.



Obrázek 2.2 Příklad MKP modelu části hrtanu s hlasivkami [87]



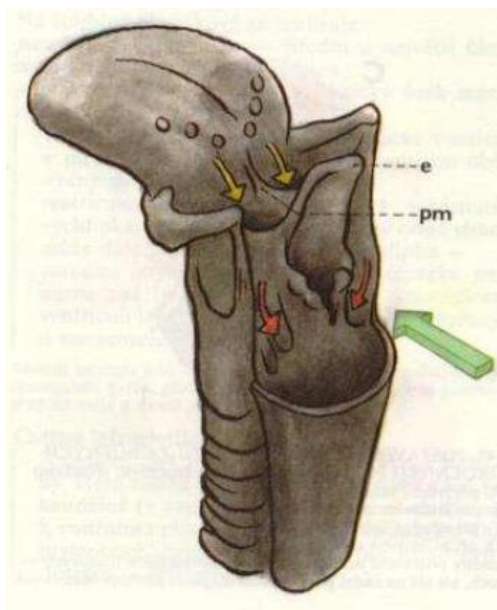
Obrázek 2.3 Vnitřní struktura hlasivky. Na povrchu tenká vrstva epitelu, pod ní vazivové vrstvy obklopující sval. [80]

Vokální trakt je vzduchová kavita začínající hlasivkami a končící místy výtoku proudícího vzduchu do volného prostoru. Konec vokálního traktu jsou ústa, případně i nosní dírky. Vokální trakt se tedy nachází v části hrtanu, dále prochází hltanem, ústní dutinou a ústy. Při normální fonaci horní měkké patro hltanu oddělí nosní dutinu od zbytku vokálního traktu. Díky tomu se nosní dutina prakticky neúčastní akustiky vokálního traktu. Pokud nedojde k dokonalému oddělení, jedná se o nedostatečnost patrohltanového uzávěru (velopharyngeal insufficiency), která je hlasovou poruchou. Obrázek 2.4 zobrazuje snímek z magnetické rezonance, červenou čarou je vyznačena hranice vokálního traktu v tomto řezu.



Obrázek 2.4 Zobrazení vokálního traktu na MRI snímku (upraveno z [64])

Je vidět, že vokální trakt je tvarově složitý. Jedná se o akustickou trubici, která není přímá a po délce se mění její tvar i velikost průřezu. Mimo složitý tvar této trubice obsahuje navíc v několika místech rozvětvení. Nejvýznamnější rozvětvení je připojení nosního traktu, který je připojen dvěma kanály (choanae). Dále jsou některé části vokálního traktu sdíleny s trávicím ústrojím, například s ústní dutinou. Proto musí být k vokálnímu traktu připojen i jícn, který zajišťuje dopravu potravy do žaludku. Jícn je při fonaci vždy uzavřen. Obrázek 2.5 ukazuje anatomické poměry vokálního traktu. K vokálnímu traktu jsou bezprostředně za hrtanem připojeny piriformní siny (recessus piriformes) a epiglotické valemuly (valleculae epiglotticae) – v dalším textu jen valemuly a piriformní siny. Valemuly a piriformní siny jsou párové kavity, které díky připojení k vokálnímu traktu mají vliv na akustiku vokálního traktu, a tím i na hlas. Valemuly se nacházejí mezi kořenem jazyka a epiglottis (hrtanová příklopka). Levou a pravou valemulu odděluje slizniční řasa plica glossoepiglottica mediana [14]. Piriformní siny se nacházejí v hrtanu a z vnější strany jsou ohraničeny štítnou chrupavkou.



Obrázek 2.5 Zobrazení hrtanu a jeho okolí [14]. V dolní části jsou konce průdušnice a jícnu, vlevo nahoře je jazyk a mezi nimi je hrtan. Symbolem „e“ je označena epiglottis, „pm“ označuje plica glossoepiglottica mediana. Žluté šipky směřují do valleculae epiglotticae, červené šipky směřují do recessus piriformes.

Člověk běžně neumí při fonaci měnit charakter kmitů hlasivek, v omezené míře to dovedou trénovaní řečníci či zpěváci. Naopak měnit tvar navazujícího vokálního traktu je přirozená schopnost mluvících lidí. Nejdominantnější funkci má v tomto jazyk. Geometrie vokálního traktu definuje fonovanou hlásku.

## 2.2 Průtok vzduchu vokálním traktem

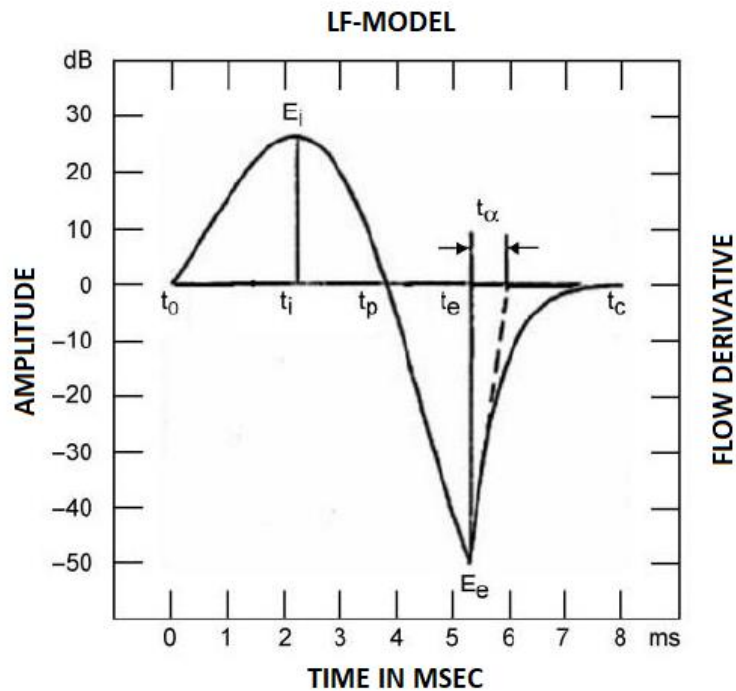
Nezbytným předpokladem pro simulace tlakových polí vokálních traktů je znalost jejich buzení. Buzení zajišťují hlasivky, které generují zdrojový hlas šířící se vokálním traktem. Zdrojový hlas je možné použít jako vstup pro modely vokálního traktu. Hlasivky generují nejen zdrojový hlas – tlakové pulzy, ale také pulzující průtok vzduchu. Ten lze stejně jako zdrojový hlas použít pro simulace lidské fonace.

V rámci výzkumu lidského hlasu vzniklo mnoho prací řešících tlakový [40] nebo rychlostní výstup z hlasivek. Velmi rozšířený je Liljencrantsův-Fantův model (takzvaný LF-model) [24] pulzů průtoku. Tento model spojuje Liljencrantsův a Fantův model. Výsledkem je parametrický model pulzu průtoku vzduchu v čase  $t$ . Vzduchový pulz není definován přímo průtokem, ale časovou derivací průtoku. Pro získání pulzu je tedy nutné výraz integrovat. Pulz je rozdělen na dvě části.

$$\dot{Q}_v(t) = E_0 e^{at} \sin\left(\pi \frac{t}{t_p}\right) \text{ pro } t \in \langle 0, t_e \rangle \quad (2.1)$$

$$\dot{Q}_v(t) = -\frac{E_e}{\varepsilon t_a} (e^{-\varepsilon(t-t_e)} - e^{-\varepsilon(t_c-t_e)}) \text{ pro } t \in \langle t_e, t_c \rangle \quad (2.2)$$

Výrazy obsahují mimo čas dalších osm parametrů. Těchto osm parametrů slouží k ladění přesného tvaru pulzu. Nejsou však nezávislé. Čtyři z parametrů jsou časové konstanty, jejichž význam zobrazuje obrázek 2.6. Parametr  $t_c$  definuje délku pulzu a tím i frekvenci pulzů,  $t_e$  je čas přechodu mezi rovicemi a zároveň poloha druhého inflexního bodu,  $t_p$  je poloha maxima průtoku a  $t_a$  je časová konstanta poklesu průtoku. Všechny tyto parametry jsou v sekundách. Dále obrázek 2.6 ukazuje význam parametru  $E_e$  [ $m^3/s$ ], který fyzikálně představuje rychlost poklesu průtoku v druhém inflexním bodě.



Obrázek 2.6 Průběh derivace průtoku objemového pulzu se zobrazením řídicích parametrů [24]

Výrazy definující pulz musí splňovat dodatečné podmínky, které nejsou obecně splněny. Zcela jasná podmínka je spojitost průběhu obou výrazů.

$$E_0 e^{\alpha t} \sin\left(\pi \frac{t_e}{t_p}\right) = -\frac{E_e}{\epsilon t_a} (1 - e^{-\epsilon(t_c - t_e)}) \quad (2.3)$$

Další podmínka zajistí pravdivost tvrzení, že  $t_a$  je časová konstanta poklesu průtoku.

$$\epsilon t_a = 1 - e^{-\epsilon(t_c - t_e)} \quad (2.4)$$

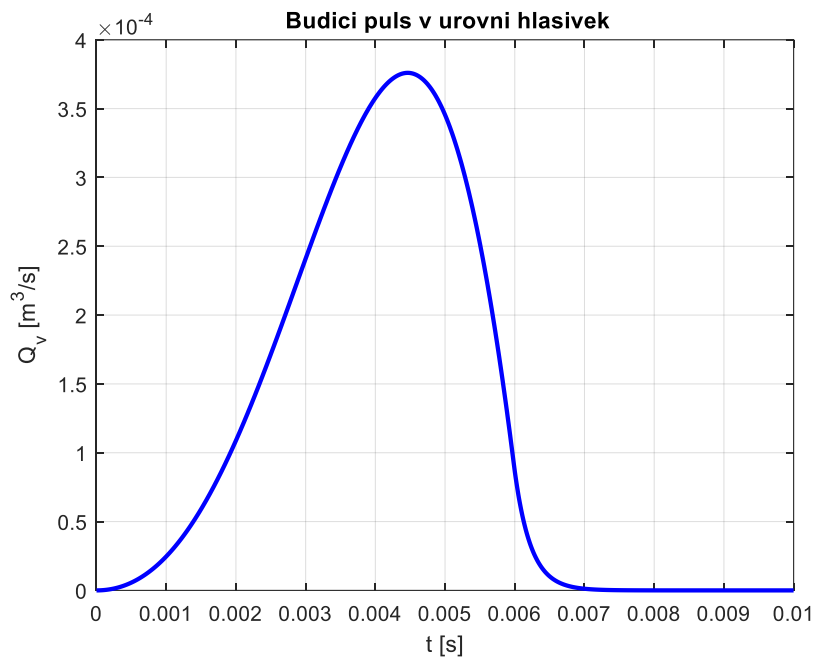
Díky poslední podmínce (2.5) je hodnota průtoku na začátku pulzu a na konci pulzu totožná. Pulz je možné periodicky prodloužit bez vzniku nespojitostí.

$$\int_0^{t_c} \dot{Q}_v dt = Q_v(t_c) - Q_v(0) = 0 \quad (2.5)$$

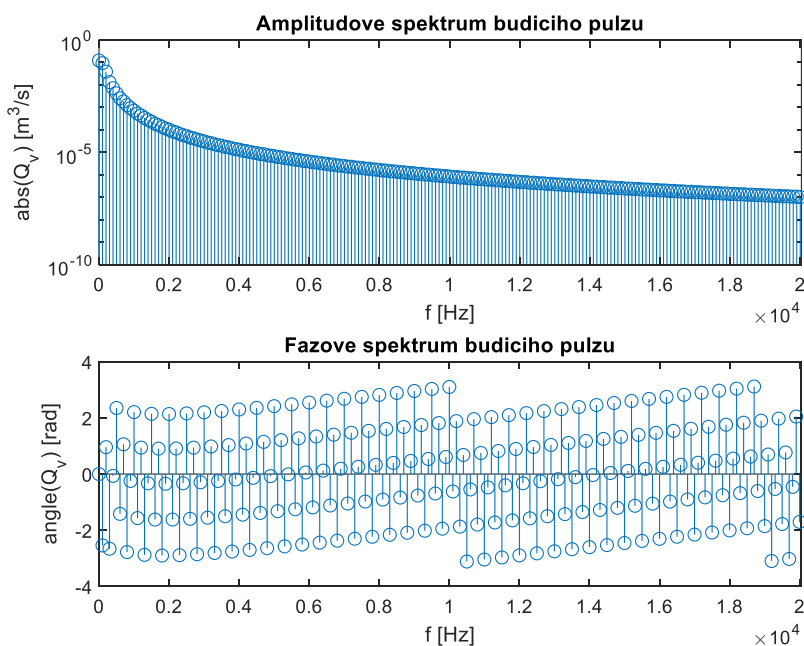
Tyto tři podmínky tvoří soustavu rovnic, ze které je možné určit tři parametry. Pokud se jako nezávislé řídicí parametry použijí čtyři časové konstanty a parametr  $E_e$ , pak se z rovnic

dopočítají zbylé parametry  $E_0$  [ $m^3/s$ ],  $\epsilon$  [ $1/s$ ] a  $\alpha$  [ $1/s$ ]. Model pulzu tedy obsahuje mimo základní frekvenci čtyři parametry ovlivňující jeho tvar. Proto se tento model nazývá také 4 parametrový.

Obrázek 2.7 zobrazuje příklad objemového pulzu procházejícího hlasivkami. Zobrazený pulz má základní frekvenci 100 Hz,  $t_e = 0.006$  s,  $t_a = 0.00023$  s,  $t_p = 0.0045$  s a  $E_e = 0.4$   $m^3 s^{-2}$ . Obrázek 2.8 zobrazuje amplitudové a fázové spektrum a obrázek 2.9 vykresluje prvních 30 amplitud sudých a lichých harmonických složek.

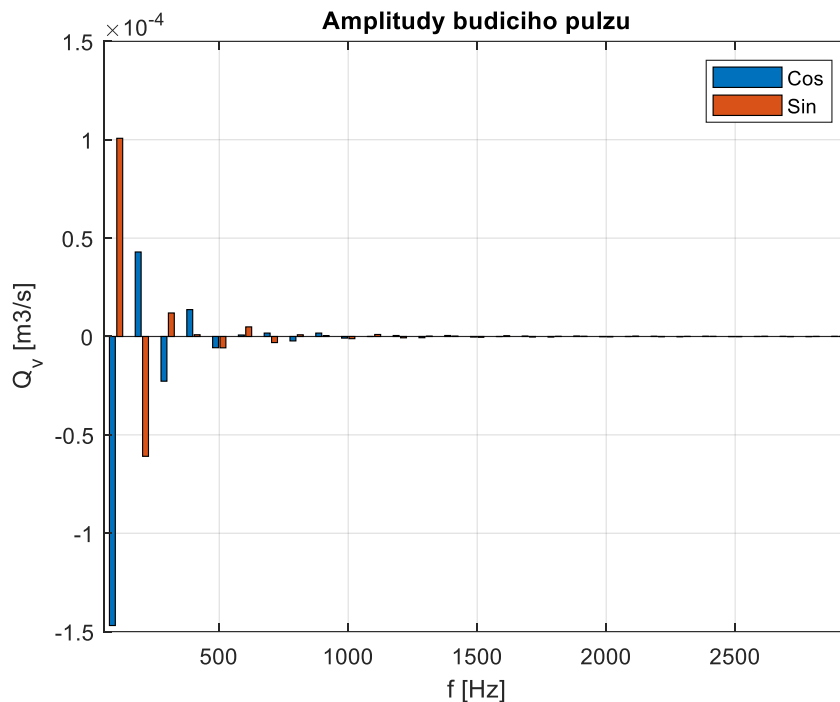


Obrázek 2.7 Tvar objemového pulzu pro buzení modelu



Obrázek 2.8 Spektrum objemového pulzu pro buzení modelu



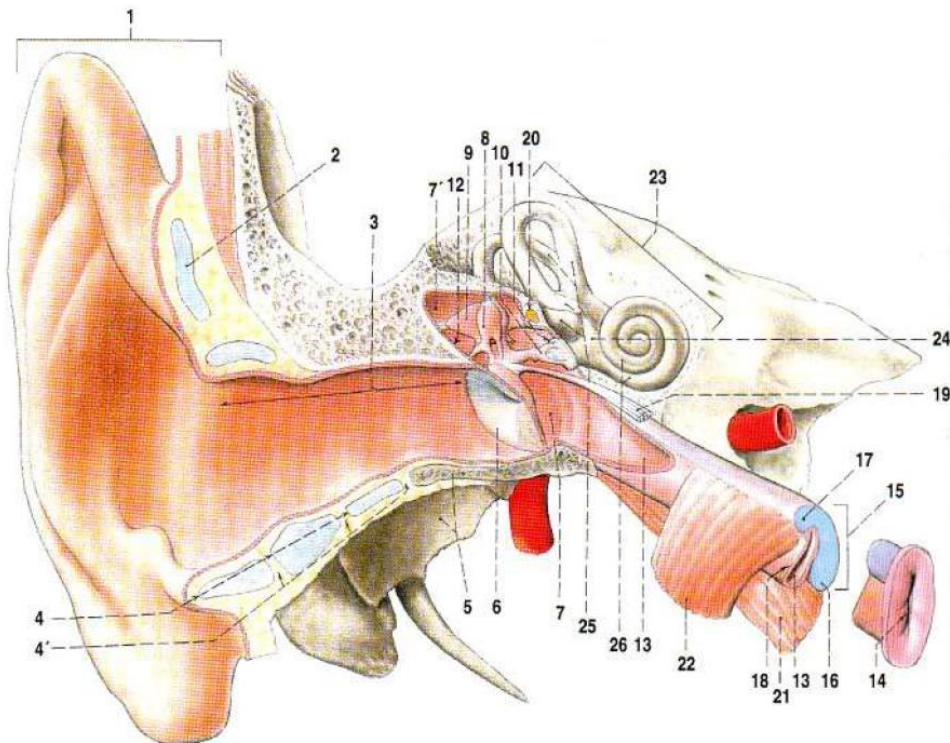


Obrázek 2.9 Sudé a liché složky budícího pulzu

## 2.3 Sluch

Sluch je jedním z 5 základních smyslů, které člověk využívá pro vnímání svého okolí. Předmětem této práce je modelování hlasu, se kterým nemá sluch přímou souvislost. Přesto je zde sluch stručně zmíněn, protože bez sluchu nemá řeč význam.

Sluch je schopnost zaznamenat zvuk šířící se prostorem (vzduchem) okolo člověka. Zvuk představuje chvění vzduchu, při kterém se ve vzduchu šíří tlakové vlny, které jsou detekovány sluchovým orgánem – uchem (obrázek 2.10). Ucho je párový orgán. Jeho vnější část tvoří ušní boltce, který navazuje na zvukovod. Zvukovod je tvarově jednoduchá trubice, na rozdíl od ušního boltce, který je geometricky komplikovaný. Tato sestava tvoří akustický systém, který může modifikovat akustický signál, který se jím šíří. Zároveň složitý tvar ušního boltce vytváří ochranu zvukovodu před zanášením nečistot. Na konci zvukovodu je bubínek, membrána, která je rozkmitávána tlakovými vlnami. K bubínku jsou připevněny sluchové kůstky. Tyto kůstky tvoří mechanismus, který přenáší mechanický pohyb s potřebným mechanickým převodem. V případě nadměrně silného zvuku dokážou svaly tlumit pohyb sluchových kůstek, a tím chránit další části ucha a zvýšit dynamický rozsah ucha. Sluchové kůstky přenášejí pohyb na kostěného hlemýždě, který obsahuje citlivé receptory pro převod mechanického pohybu na nervové signály.



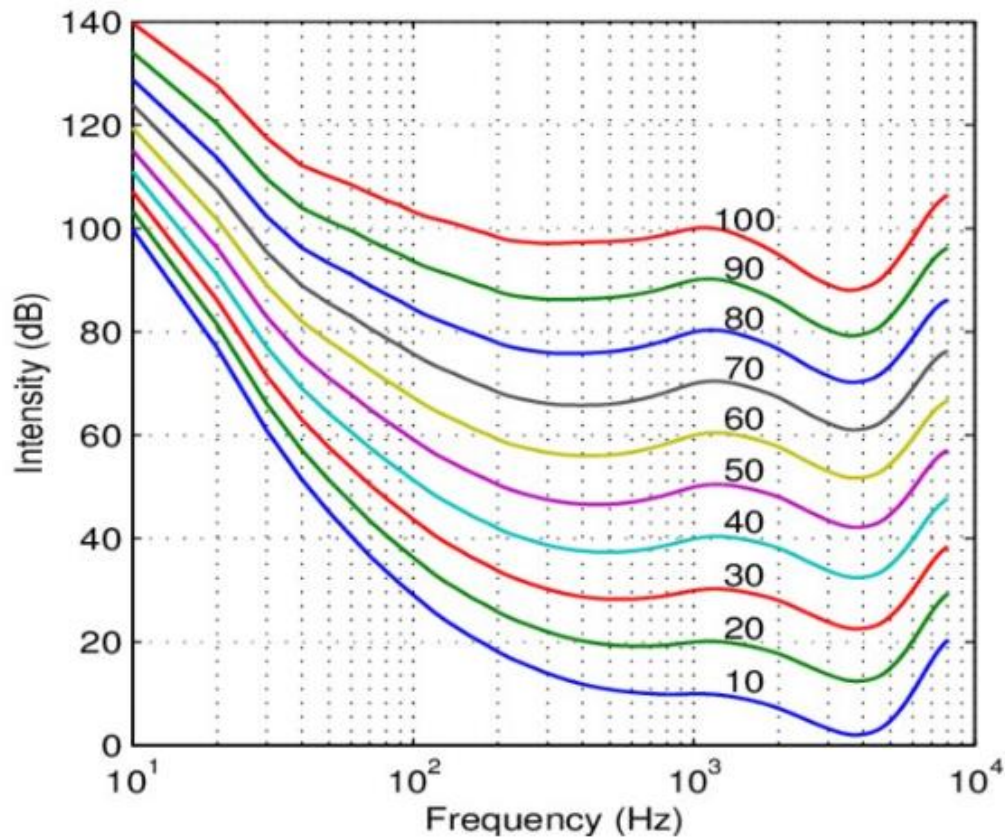
Obrázek 2.10 Schéma lidského ucha [14]. 1 – ušní boltec, 3 – zvukovod, 6 – bubínek, 8,9,10 – sluchové kůstky, 26 – kostěný hlemýžď.

Základním parametrem určujícím intenzitu zvuku je akustický tlak  $p'$  [Pa] nebo měrný akustický výkon na jednotku plochy. Pro praktické užití se častěji pracuje s akustickým tlakem, který je snadno měřitelný. Pocitové vnímání hlasitosti zvuku není lineární, při lineárním vnímání a větším dynamickém rozsahu by se méně intenzivní složky zvuku mohly ztratit mezi silnějšími. Dynamický rozsah lidského ucha je přibližně  $2 \cdot 10^{-5} - 10 \text{ Pa}$ . Proto se používá logaritmická veličina hladina akustického tlaku  $L_p$  [dB], která postihne velký dynamický rozsah akustického tlaku a aproximuje subjektivní vnímání hlasitosti (Weberův-Fechnerův zákon [19]). Hladina akustického tlaku je navržena tak, aby 0 dB odpovídalo prahu slyšitelnosti průměrného člověka při 1 kHz. Proto se akustický tlak v logaritmu dělí hodnotou  $p'_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ , která představuje smluvní hodnotu prahu slyšitelnosti. Aby hodnoty odpovídaly akustickému výkonu, jsou použity druhé mocniny, protože akustický výkon je úměrný kvadrátu akustického tlaku.

$$L_p = 10 \log_{10} \left( \frac{p'^2}{p'_0{}^2} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{p'}{p'_0} \right) \quad (2.6)$$

Ze zjednodušeného popisu ucha plyne, že se skládá z více částí, kde každá z nich představuje dynamický systém, který má své vlastnosti. Celková charakteristika ucha závisí především na akustickém přenosu ušním boltcem a zvukovodem, mechanickém přenosu bubínkem a sluchovými kůstkami a vlastnostmi receptorů v kostěném hlemýždi. Výsledkem je různá citlivost a subjektivní vnímání hlasitosti při různých frekvencích zvuku. Proto byla zavedena jednotka hlasitosti fón. Tato jednotka zohledňuje pouze vliv frekvence na subjektivní hlasitost. Definována je tak, že pro frekvenci 1 kHz je hladina akustického tlaku v decibelech

rovna hlasitosti ve fónách [1]. Pro rozdílné frekvence je převod mezi decibely a fóny empirický a zobrazuje ho obrázek 2.11. Z obrázku se dá vyčíst slyšitelné spektrum běžného člověka, které je zhruba 20 Hz až 20 kHz, nejcitlivější je sluch v okolí 3–4 kHz, pro nižší frekvence postupně citlivost klesá, pro vyšší frekvence citlivost klesá velice strmě.



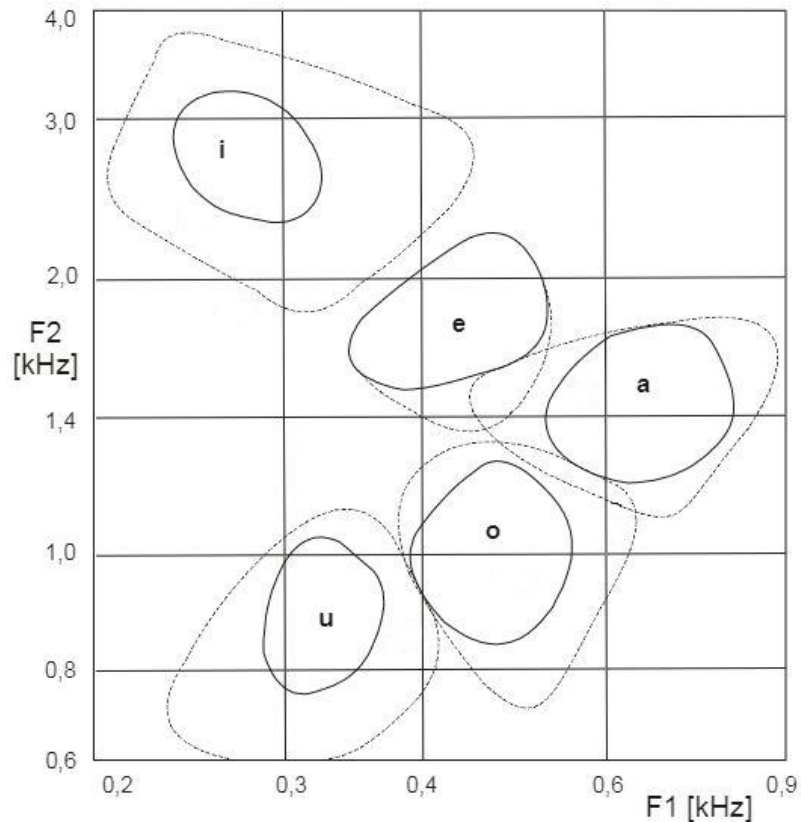
Obrázek 2.11 Závislost hladiny akustického tlaku na frekvenci a hlasitosti [66].

## 2.4 Formanty

Při fonaci vokální trakt zaujme určitou geometrii, která ovlivní jeho vlastnosti. Vokální trakt se chová jako dynamický systém s přenosovou charakteristikou. Přenosová charakteristika obsahuje maxima (rezonanční vrcholky), které zesilují buzení (zdrojový hlas). Frekvence rezonančních vrcholků odpovídá vlastním frekvencím vokálního traktu. Při fonaci jsou tedy v hlasu určitá úzká frekvenční spektra výrazně více zastoupená než ostatní frekvence. Těmto frekvencím se říká formanty. Při analýze hlasu je formant výrazně zastoupená frekvenční složka hlasu, naopak při analýze vokálního traktu to je vlastní frekvence vzduchu uvnitř vokálního traktu.

Základním prvkem řeči jsou hlásky, ze kterých se skládají slova. Hlásek existuje velké množství, různé jazyky mohou mít své různé hlásky. Základní dělení hlásek je na samohlásky a na souhlásky. Samohlásky se od sebe odlišují právě různou polohou formantů (obrázek 2.12) a člověk je rozezná podle jejich dominantních frekvencí. Pro spolehlivou identifikaci samohlásky postačuje znát první 2 nebo 3 formanty. Technicky není nutné, aby při fonaci

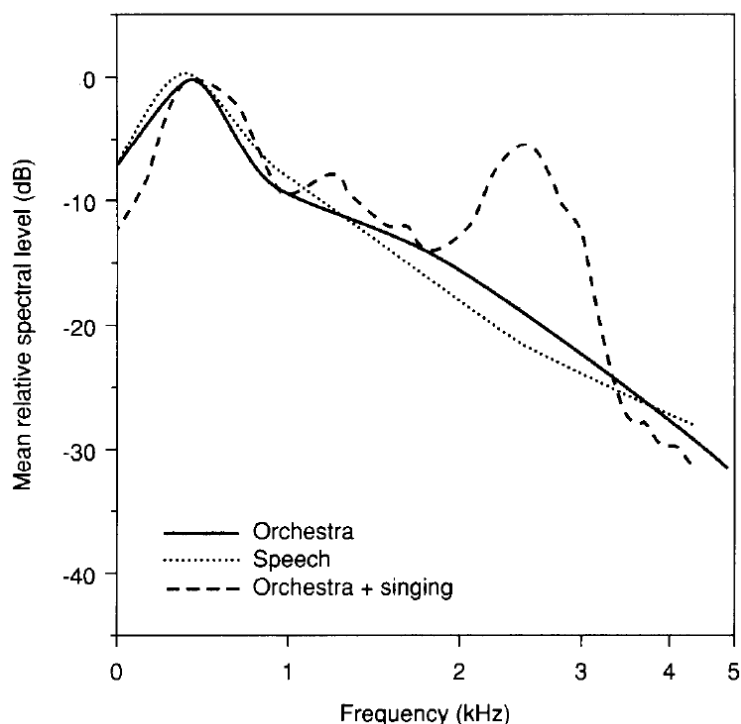
samohlásky proudil vokálním traktem vzduch, stačí jakékoliv akustické buzení. Pokud jsou generovány bez akustického buzení (bez kmitů hlasivek), například pomocí šumu při proudění vzduchu, pak se jedná o neznělou samohlásku (například šepot), v opačném případě jde o znělou samohlásku.



Obrázek 2.12 Umístění českých samohlásek v prostoru prvních dvou formantů. Upraveno z [18].

Souhlásky mají složitější princip vzniku. Pro jejich vznik je potřeba, aby vokálním traktem proudil vzduch. Fonace souhlásky je nestacionární jev, kdy je nejčastěji do proudu vzduchu vložena (nebo odstraněna) překážka [59]. Existuje mnoho souhlásek, dají se rozlišovat podle polohy překážky ve vokálním traktu. Souhlásky mimo formanty obsahují velký podíl šumu. Modelování fonace souhlásek je komplexnější a komplikovanější úlohou než u samohlásek. Nelze je modelovat pouze jako akustiku vzduchové kavity, je nutné je modelovat metodami nestacionárního proudění vzduchu.

Zkušený zpěváci dokáží vytvořit ve svém hlasu takzvaný pěvecký formant. Tento formant se nachází v okolí frekvence 3 kHz. Tento formant má velký význam především pro operní zpěv a lze díky němu snadno rozeznat školený operní zpěv [77]. Frekvenční pásmo, ve kterém se tento formant nachází, je zároveň oblast největší citlivosti ucha. Obrázek 2.13 porovnává spektrum orchestru, řeči a orchestru se zpěvem. Samotný orchestr a řeč mají největší intenzitu okolo 500 Hz a s frekvencí klesají. Zpěv vytváří nový druhý vrchol v oblasti 2–3 kHz, to je pěvecký formant. Tento formant zajišťuje, že zpěv bude dobře rozeznatelný. Kdyby tento formant chyběl, hrozilo by, že se zpěv ztratí v hudbě orchestru.



Obrázek 2.13 Porovnání spektra orchestru, řeči a orchestru se zpěvem. V oblasti 2–3 kHz vystupuje u zpěvu výrazný pěvecký formant. [73]

## 2.5 Vybrané výsledky výzkumu lidského hlasu

Mezi hlavní výsledky výzkumu lidského hlasu patří samotné teorie vzniku hlasu. Jedna z nejstarších dnes uznávaných vědeckých teorií vzniku hlasu je teorie zdroje a filtru [23]. Tato teorie považuje za zdroj akustické energie kmitající hlasivky. Hlasivky svými samobuzenými kmity generují zdrojový hlas, který se šíří vokálním traktem ven z těla. Jelikož je vokální trakt vzduchová kavita složité geometrie, má své akustické vlastnosti, které mění zdrojový hlas. Změna zdrojového hlasu je dána přenosovou funkcí vokálního traktu. Samotné formování hlásek v této teorii zajišťuje pouze přenosová funkce, která je závislá na geometrii vokálního traktu, kterou dokáže člověk měnit, zatímco kmity hlasivek jsou nezávislé na fonované hlásce. Název zdroj-filtr vychází ze dvou členů zdroje (hlasivky) a filtru (přenosová funkce vokálního traktu).

Tato teorie má velké uplatnění, umožňuje totiž oddělit výzkum hlasivek od výzkumu akustiky vokálního traktu. Hlasivky mohou být nahrazeny prostým modelem rychlostních [24] nebo tlakových pulzů. V návaznosti na tuto teorii vznikly práce, které se snaží vytvořit vazbu mezi zdroj a filtr. Například práce [55], kde je vytvořena zpětná vazba, která na základě tvaru vokálního traktu ovlivňuje kmity hlasivek a tím zdrojový hlas. Platnost tvrzení, že mezi zdrojem a filtrem není třeba uvažovat zpětnou vazbu, vyšetřovala práce [81]. Práce ukázala, že spodní část vokálního traktu mohou ovlivňovat kmity hlasivek. Toto tvrzení se zakládá na podobných hodnotách akustické impedance v glottis a ve spodní části vokálního traktu.

Další významnou teorií vzniku hlasu je myo-elasto aerodynamická teorie [82]. Tato teorie je modernější, kombinuje strukturní mechaniku a mechaniku tekutin. Modely tvořené podle této teorie řeší problematiku interakce mezi strukturou hlasivek a proudícím plynem hlasivkami a vokálním traktem. Jsou modelovány skutečné samobuzené kmity hlasivek a je zpravidla použit detailní model jejich struktury.

Z praktických důvodů je běžné modelování různých částí vokálního traktu samostatně. Samotné hlasivky mají velký výzkumný potenciál, proto prací, které se zabývají jejich vlastnostmi je nespočet. Mezi nejstarší výzkumné práce patří Ewaldova píšťala [22], která popisuje experimentální jedno-hmotový model hlasivek. Hlasivka je tvořena jedinou pružně uloženou hmotou v kanále, kde proudí vzduch. Tento model nebyl ve své době matematicky popsán. První matematické modely hlasivek byly také jedno-hmotové, jeden z nejstarších byl [27], kde je v kanále konstantního průřezu pružně umístěna hmota, na kterou působí tlakové síly. Dále následovaly více-hmotové modely hlasivek. Dvou-hmotový model [43] je složen ze dvou oddělených hmot, které jsou pružně uloženy a zároveň obsahují vazební tuhost mezi sebou. Vazební tuhost je možné chápat jako velice primitivní popis poddajnosti hlasivky. Takto postupně následovaly i více-hmotové modely. Alternativní cestou je jedno-hmotový model s geometrií lépe aproximující hlasivku s více stupni volnosti, například [40]. Tento model byl ještě zobecněn v [74] použitím propracovaného popisu proudění a modelování i nejbližšího okolí hlasivek. Na podobném principu pracuje jeden z prvních modelů slizniční vlny [83]. Dnes existují sofistikovanější modely hlasivek, které jsou nejčastěji modelovány metodou konečných prvků [79], [84]. Pro jejich výpočtovou náročnost se často modeluje pouze struktura hlasivek nebo pouze proudění vzduchu a druhá nemodelovaná část problému je nahrazena tlakovým polem působícím na hlasivku nebo definovaným pohybem hlasivky. Práce [87] použila tlakové pole z modelu [40] pro buzení poddajné hlasivky, v této práci nebyly modelovány pouze hlasivky, ale celý hrtan. Naopak práce [96] a [39] využívají předem definovaný pohyb hlasivek pro definici tvaru kanálu v čase a řeší pouze problematiku proudění. Oba tyto postupy výrazně snižují výpočtové nároky, protože strukturně fluidní interakce je komplikovaný problém.

Tato disertační práce se zabývá akustikou části vokálního traktu mezi hlasivkami a ústy. Podstatným předpokladem pro modelování tohoto problému je znalost geometrie samotné vzduchové kavity. Existuje mnoho prací, které se zabývají pouze geometrií vokálních traktů. Mnoho modelů vokálních traktů předpokládá 1D šíření akustických vln. Takové modely potřebují znalost geometrie pouze ve formě průřezu v závislosti na délce. Proti tomu složitější 3D modely vyžadují plnohodnotnou geometrii vokálního traktu. Možnosti získání potřebné geometrie jsou relativně omezené. Jednou metodou je laryngoskopie, která zavádí měřicí nástroj do těla a význam má především pro pozorování hrtanu. Tato metoda byla modifikována pro vysokorychlostní sledování kmitů hlasivek [76]. Pro získání geometrie vokálního traktu v potřebné kvalitě pro současné analýzy se dnes využívá výhradně CT (computed tomography) nebo MRI (magnetic resonance imaging). Jedna z nejstarších prací používajících MRI je [67], zde 24 letý muž fonoval japonskou hlásku a:, sagitální řezy byly od sebe vzdálené 5 mm. Studie [56] kombinuje použití CT a MRI. Tato kombinace má několik přínosů a využívá výhody každé z metod. Zobrazení některých detailů, jako jsou kosti a zuby, je přesnější a dávka ionizujícího záření je nižší. Práce [92] se zaměřila na MRI měření

profesionálních zpěváků. Měření probíhala na několika hláskách a práce porovnává rozdíly ve vokálním traktu různých lidí při fonaci stejné hlásky. Vztah mezi geometrií vokálního traktu a emocemi vyhodnocuje práce [49], na vzorku 10 lidí porovnává MRI snímky při smutku, štěstí a rozzlobení. Zároveň ukazuje, že emoce se do geometrie výrazně promítají. MRI měření při těchto emočních stavech porovnává i s měřením hlasu samotného. Práce [21] používá dynamické MRI snímkování pro porovnání různých pěveckých stylů. Autoři studie [64] vytvořili nástroj pro automatické generování geometrie vokálního traktu z MRI snímků, tento nástroj může významně urychlit zpracování MRI dat při analýzách vokálních traktů. Existují i vědecké práce, analyzující vokální trakt při fonaci českých hlásek. Práce [18] vyhodnocuje akustické vlastnosti vokálního traktu při fonaci českých hlásek, geometrická data pochází z MRI snímků. Naproti tomu [91] řeší podobné úlohy, ale geometrická data pochází z CT. Nosní trakt lze považovat za součást vokálního traktu a jeho geometrií se zabývala práce [8]. Pro sestavení 1D modelů vokálního traktu postačuje znát závislost průřezu na poloze ve vokálním traktu, data lze tabelovat a přímo uvést v publikaci. Taková data je možné nalézt v [71], zde byly změřeny vokální trakty (pomocí MRI) při fonaci hned 18 hláskami. Všechny změřené geometrie jsou k dispozici v jediné tabulce ve formě průřezů v závislosti na poloze, počet poloh je podle typu hlásky 40 až 46. Na tuto práci navazuje studie [72], která využívá stejná data pro 18 hlásek a tato data parametrizuje Karhunen-Loeve transformací, dále práce analyzuje vliv jednotlivých básových koeficientů na polohy formantů.

Největší souvislost s touto disertační prací má výzkum akustiky vzduchové kavity vokálního traktu mezi hlasivkami a ústy, takových prací vzniklo mnoho. Práce [18] vytvořila MKP model pro šest českých samohlásek s využitím MRI. Cílem bylo získat podrobnější informace o vlastních frekvencích a akustických tlacích ve vokálním traktu. Studie porovnává akustické vlastnosti MKP modelů s formantovými frekvencemi známými z české fonetické literatury a prezentované výsledky prvních tří vlastních frekvencí modální analýzy jsou v rozumné shodě. Dva 3D MKP modely vytvořené dle CT měření při fonaci hlásky a: před a po fonaci do rezonanční trubice vytvořila práce [90]. Pro oba modely byl vypočítán generovaný akustický tlak před ústy a uvnitř vokálního traktu. Současně se vyhodnocovala efektivita přenosu zvukové energie. Ukázalo se, že nejúčinnější je čtvrtý formant a cvičení fonace do rezonančních trubic pomáhá zvýšit účinnost fonace. Studie [20] zkoumá spektrální roli piriformních sínů pomocí numerických simulací za použití MKP a přímých experimentálních měření na 3D tištěných vokálních traktech založených na MRI datech. Experimentální výsledky jsou porovnávány s numerickými simulacemi. Tato studie zkoumá spektrální rozdíly ve vztahu k délkovým a objemovým měřením piriformních sínů tří profesionálních zpěváků, a nakonec je percepčně posouzen dopad piriformních sínů na zpěv. Práce potvrdila zesílení rezonancí v okolí 3 kHz a vznik antirezonancí v okolí 4–5 kHz. Studie [17] zkoumá geometrické a akustické charakteristiky piriformních sínů pomocí experimentů in vivo a numerických výpočtů. Výsledky získané z mechanických modelů ukázaly, že piriformní siny přispívají silnými antirezonancemi v oblasti 4 až 5 kHz. Frekvence antirezonancí rostly, když byla do piriformních sínů lidských subjektů v experimentech in vivo vstříkována voda. Akustická měření a simulace ukázaly, že vliv piriformních sínů se kromě lokálních antirezonancí rozšiřuje i na formanty nižších samohlásek. Práce [86] je další z prací, které vyhodnocují vliv piriformních sínů, tedy zesílení a zeslabení vybraných spekter. Úlohu řeší na 1D modelu, který vznikl redukcí 3D MKP modelu.

Studie [93] experimentálně vyhodnocuje zesílení vokálního traktu. Práce [48] používá metodu hraničních prvků. Přenosové charakteristiky byly hodnoceny pro japonské samohlásky. Byly zkoumány účinky těchto okrajových podmínek na stěně vokálního traktu na frekvence formantů. Bylo také provedeno srovnání s modelem konečných prvků. Se stejným modelem bylo odděleně vypočteno zvukové pole kolem hlavy a těla a byly demonstrovány difrakce a rozptyl způsobené hlavou a tělem. Studie [53] se zabývá pouze vyzařováním akustické energie z úst. Využitím MKP modeluje přímou trubici konstantního průřezu (vokální trakt) s připojenou polokulovou částí (vnější okolí). Práce vyhodnocuje vliv tvaru průřezu na formanty. Eliptický průřez (který se více podobá ústům) oproti kruhovému mírně zvýšil frekvence formantů a zúžil jejich šíři. Práce [52] porovnává 3D MKP modely s 1D modely a potvrzuje, že do frekvence 5 kHz jsou jejich výsledky velice podobné. Velice užitečnou studii citlivosti formantů na zjednodušení geometrie vokálního traktu prezentuje [3]. Tato práce vychází z MRI geometrie, kterou modifikuje jejím narovnáním (aby střednice byla přímkou) a změnou tvaru průřezu na kruhový a eliptický. Všechny kombinace těchto modifikací byly analyzovány. Práce ukázala, že pro frekvence do 5 kHz je vliv všech těchto modifikací malý (pod 3% na frekvencích formantů). Využití metod pro redukci MKP modelů použila práce [89]. Metodou IRS byl redukován MKP model vytvořený z MRI snímků. Práce vyhodnocovala vliv redukce a porovnávala 1D a 3D model. Byla zjištěna dobrá shoda 1D modelu a 3D modelu pro frekvence do 3 kHz. Zkoumání akustických charakteristik sykavky provádí práce [95]. Vokální trakt byl reprezentován zřetězením zvukovodů s pravouhlymi průřezy a konstantní šířkou. Zdroj zvuku byl umístěn buď na vstupu vokálního traktu, nebo do proudu v zúžení představujícím sykavou drážku. Modelované výsledky byly ověřeny experimentálně. Výsledky ukázaly, že predikované spektrum včetně módů vyššího řádu odpovídalo spektru naměřenému. Význam valemů na lidský hlas řeší [26]. Poskytuje důkaz, že valemky mají podobné akustické vlastnosti jako piriformní siny, ale s většími odchylkami a v některých případech mohou akusticky ovlivnit frekvenční oblast pod 4 kHz. Výsledky naznačují, že velká valemka má potenciál do určité míry bránit vzniku pěveckého formantu a malá valemka může dělat pravý opak. Studie [42] si klade za cíl rozšířit dosavadní znalosti o odlišnostech rozměrů vokálního traktu při různých hlasitých hlasových produkcích. Výsledky vytvářejí nadhled na velikost změn vokálního traktu nezbytných pro žánrově typickou vokální projekci. Práce [57] vyhodnocuje tlakové pole uvnitř vokálního traktu a jeho vysokou citlivost na změny geometrických parametrů. Studie [4] řeší vokální trakt s připojenými piriformními sinami. Hlavní zájem práce je snížit výpočetní nároky 3D modelu, toho docílí použitím optimalizovaného 2D modelu, který poskytne ideální poměr mezi kvalitou výsledků a náročností výpočtu. Pro optimalizaci 2D modelu byla vytvořena metodika, která spočívá v úpravě tvaru vokálního traktu a akustické admitance hlavního traktu a bočních větví a také vstupního glotálního toku 2D modelu. Celá skupina prací [30], [50], [38] vznikla s cílem studovat hrtanovou část hltanu a paralelní kavity vokálního traktu. Většina těchto prací probíhala experimentálně a potvrdila vlastnosti paralelních kavit. S použitím MRI zjistila, že tvar hrtanové části hltanu byl relativně stabilní, bez ohledu na typ fonované samohlásky, na rozdíl od relativně velkých variací mezi mluvčími. Tyto výsledky byly kvantitativně potvrzeny metodou podobnosti. Vliv základní frekvence kmitů hlasivek na geometrii vokálního traktu v okolí hrtanu řeší [78]. Pozorování ukázalo, že růst a pokles této frekvence v produkci samohlásek zahrnuje geometrické změny hypofaryngeálních dutin a mění jejich rezonanční



vzor. Při vysoké frekvenci se horní část laryngeální dutiny rozšiřuje a piriformní siny se prodlužují. Při nízké frekvenci se děje opak.

Většina prací předpokládá oddělení nosního traktu od vokálního a nosní trakt nemodeluje. Práce [36] a [35] experimentálně studují vliv nosního traktu na akustiku vokálního traktu. Potvrzují obecně známý fakt, že připojení nosního traktu způsobuje antirezonanci, jejíž hloubka závisí na průřezu propojení mezi trakty. Vyhodnocení přenosové funkce samotného nosního traktu řeší experimentálně [51]. Do nosního traktu zavádí nosní dírkou budící oscilátor a mikrofonem mimo tělo měří výstup. Práce [44] popisuje postup modelování vokálního traktu včetně nosního traktu metodou přenosových matic. Model neobsahuje piriformní siny ani valekuly a nosní trakt je tvořen jedinou kavitou. Model má jen jediné větvení v místě připojení nosního traktu. Studie [31] vyhodnocuje tvrzení, že nedostatečnost patrohltanového uzávěru je pro zpěv nežádoucí. Experimentálně ukazuje, že existuje optimální velikost průřezu spojující nosní dutinu s vokálním traktem, při níž jsou zesílené složky hlasu o frekvencích 2–4 kHz, což je pro zpěv výhodné. Tento závěr mohou využít učitelé zpěvu. Kompletní numerický (MKP) model vokálního traktu včetně nosního traktu prezentuje [54]. Jedním ze směrů výzkumu této práce bylo vyhodnotit vliv okrajových podmínek na hranicích akustického prostoru na přenosovou funkci. Na základě trojrozměrných simulací byly potvrzeny vzestupné posuny nižších formantových frekvencí. Dalším kompletním MKP modelem celého vokálního traktu včetně nosního traktu je [88]. V této studii je MKP model vokálního traktu ženy vytvořen pro samohlásky a: a i: bez nosních dutin a s detailním modelem nosních dutin na základě CT. Vypočtené výsledky byly porovnány s měřením modelu pro samohlásku a: získaného pomocí 3D tisku. Výsledky potvrzují hlavní účinek nosního traktu, tedy pokles akustického tlaku ve frekvenční oblasti formantů F1–F2 a zdůrazňuje frekvenční oblast formantů F3–F5.

Při skutečné řeči je geometrie vokálního traktu proměnná v čase. Výzkum akustiky vokálního traktu při proměnné geometrii/artikulaci řeší [69]. Popisovaný model má předem definované artikulační pohyby v závislosti na čase. Výstupem modelu jsou spektrogramy. Popsaný model by měl být schopný produkce řeči na úrovni syntetizovaných vět, které nebyly založeny na analýze zvukových záznamů lidské řeči, ale na analýze pohybů stěn vokálního traktu. Práce [15], [16] vytvořily metodu, která dokáže rekonstruovat složité 3D tvary dýchacích cest z biomechanických modelů. Biomechanickým modelem je myšlen kompletní model člověka (kosti, svaly a podobně), vokální trakt v takovém modelu není zastoupen, protože je to pouze dutina vyplněná vzduchem. Práce řeší identifikaci 2D hranic vokálního traktu v takovém modelu. Výsledné 3D geometrie jsou použity do 3D akustického modelu s konečnými prvky. Pravděpodobné vzorce aktivace svalů jsou určeny pro statické samohlásky. Dynamické hlásky jsou pak generovány lineární interpolací svalové aktivace statických samohlásek. Tyto práce mohou přispět k ambiciózním výpočtovým modelům, které mají za cíl simulovat celou lidskou fyziologii.

Poslední menší skupinou prací jsou práce řešící inverzní úlohu akustiky vokálního traktu. Tyto úlohy mají velký význam například pro navrhování akustických systémů. Příkladem takové práce může být [33], která řeší tento problém optimalizačními metodami. Práce pracuje s 3D geometrií, ale pro účely inverzního výpočtu ji převádí na 1D. Optimalizační strategie vyvolává malé sekvenční variace parametrů vokálního traktu podle funkcí citlivosti jednotlivých

parametrů. Studie [2] navrhuje sofistikovaný analytický postup inverzního výpočtu tvaru vokálního traktu. Práce [5] vytváří rozsáhlou sadu dat, tato data jsou geometrické tvary vokálních traktů a jejich akustické vlastnosti. V okolí každé takové dvojice (geometrie a akustické vlastnosti) se vztah mezi geometrií a akustickými vlastnostmi linearizuje. Z těchto linearizací je složena závislost vhodná pro efektivní řešení inverzního výpočtu geometrie vokálního tvaru. Studie [47] používá analytický popis celé hraniční plochy vokálního traktu. Tento popis umožňuje efektivní parametrizaci pro optimalizační výpočty a použití metody hraničních prvků. Práce demonstruje výpočet původního tvaru vokálního traktu po jeho modifikaci.

## 2.6 Základní rovnice akustiky

Akustika je americkou normou ANSI definována jako vědní obor zabývající se produkcí a šířením zvuku. Výzkum akustiky má mnoho směrů, kterými se zabývá. Hlavním je fyzikální akustika, která řeší samotnou podstatu zvuku, jeho vznik a šíření. Jedním z významných směrů je bioakustika, která studuje akustiku v organismech, především v lidském těle. Neřeší pouze hlasové ústrojí, které zvuk produkuje, ale také lidský sluch.

Zvuk je mechanické vlnění, které je schopno vyvolat sluchový vjem. Samotné vlnění je šíření kmitů prostorem. Z toho plyne, že mluvit o akustice má smysl pouze v kontinuu. Systém diskrétních tuhých těles může kmitat, ale akustiku v něm pozorovat nelze. Ta může existovat v libovolném kontinuu, kde se šíří mechanické vlnění. Typické prostředí je plynné, což je i nejčastější při využití akustiky pro mezilidskou komunikaci. Zvuk se šíří i kapalinami a pevnými látkami. Šíření akustických vln je vždy časově závislý děj. Statický stav v akustice neexistuje a ani nelze použít ideu kvazistatiky.

V případě bioakustiky hlasového ústrojí jde zejména o zkoumání hlasivek a vokálního traktu. Zkoumání hlasivek je především o samobuzených kmitech, které jsou zdrojem tlakových a rychlostních pulzů. V navazujícím vokálním traktu se šíří tlakové a rychlostní vlny vznikající v hlasívkách. Hlavní přenos zvuku probíhá ve vzduchem vyplněné části vokálního traktu, a proto je potřeba nalézt rovnice popisující akustiku v plynech.

### 2.6.1 Vlnová rovnice

Odvození vychází ze základních zákonů zachování [11]. To v případě akustiky v plynech znamená zákony zachování hmoty (rovnice kontinuity).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.7)$$

Zachování hybnosti (Eulerova rovnice).

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p \quad (2.8)$$

A zachování energie.

$$Tds = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.9)$$

Dále je potřebný konstitutivní zákon, který popisuje konkrétní plyn. Pro šíření tlakových vln ve vzduchu při běžných atmosférických podmínkách lze použít stavovou rovnici ideálního plynu.

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (2.10)$$

Parametry v rovnicích jsou: hustota  $\rho$  [ $kgm^{-3}$ ], čas  $t$  [s], vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  [m/s], operátor nabra  $\nabla$  [1/m], tlak  $p$  [Pa], termodynamická teplota  $T$  [K], měrná entropie  $s$  [J/kgK], měrná vnitřní energie  $u$  [J/kg] a měrná plynová konstanta  $r$  [J/kgK]. Rovnice zákonů zachování hybnosti a hmoty obsahují pouze rychlost, tlak a hustotu. Tyto rovnice neobsahují entropii a teplotu. Při šíření akustické vlny dochází ke stlačování a expanzi akustického prostředí. Tento děj lze uvažovat za izoentropický [60]. To odstraní levou stranu energetické rovnice. Dále lze za diferenciál vnitřní energie dosadit součin měrné tepelné kapacity při konstantním objemu a diferenciálu teploty. Měrná tepelná kapacita je funkcí měrné plynové konstanty a bezrozměrného adiabatického exponentu  $\kappa$ .

$$0 = \frac{r}{\kappa - 1} dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.11)$$

Vyjádří se totální diferenciál stavové rovnice:

$$d\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} dp + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = rdT \quad (2.12)$$

Ze vzniklých rovnic lze eliminovat teplotu.

$$0 = \frac{1}{\rho} dp + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + (\kappa - 1)pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.13)$$

Po úpravě se získá diferenciální rovnice, která se dá snadno řešit.

$$0 = \frac{1}{p} dp + \kappa pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.14)$$

Řešení obsahuje integrační konstantu  $C$ .

$$\ln p + \kappa \ln \frac{1}{\rho} = \ln C \quad (2.15)$$

Poslední úpravou se odstraní logaritmy pro získání důležitého vztahu:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = C \quad (2.16)$$

Eliminací teploty byl odvozen důležitý vztah mezi tlakem a hustotou pro izoentropickou změnu. Pro další odvození je nutné ještě tento vztah diferencovat. Tím se získá vztah pro derivaci tlaku podle hustoty při izoentropické změně. Velmi významná vlastnost tohoto vztahu je, že tato derivace je funkcí pouze teploty a je možné ji pro akustiku považovat za konstantní. Zároveň tento vztah pro další odvození nahrazuje zákon zachování energie a stavovou rovnici.

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa r T = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.17)$$

Akustické vlnění má malé amplitudy, které jsou superponovány na kontinuum, ve kterém se šíří (prostředí). Veličiny v rovnicích se rozdělí na akustickou složku ( $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}'$ ) a prostředí ( $p_0$ ,  $\rho_0$ ). Akustická složka je vlnění proměnné v čase i prostoru. Prostředí je časově stálé homogenní pole.

$$p(t, \mathbf{r}) = p_0 + p'(t, \mathbf{r}) \quad (2.18)$$

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \rho'(t, \mathbf{r}) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}'(t, \mathbf{r}) \quad (2.20)$$

Důležitým předpokladem je, že akustická složka má výrazně menší hodnoty než hodnota v prostředí. Tento předpoklad není obecně platný, ale v běžných akustických úlohách je splněný. Platí-li tento předpoklad, je možné podíl akustického tlaku a akustické hustoty považovat za derivaci tlaku podle hustoty (2.17).

$$\frac{p'}{\rho'} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.21)$$

Základní rovnice je možné dále zjednodušit dosazením rozkladu akustických veličin.

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\mathbf{v}') = 0 \quad (2.22)$$

$$(\rho_0 + \rho') \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' \right) = -\nabla(p_0 + p') \quad (2.23)$$

Protože je prostředí homogenní pole, rovnice se zjednoduší, protože konstantní složky v derivovaných členech zmizí.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}') = 0 \quad (2.24)$$

$$(\rho_0 + \rho') \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' \right) = -\nabla p' \quad (2.25)$$

Jelikož jsou akustické hodnoty malé v porovnání s prostředím, mohou být zanedbány v místech, kde se sčítají. Členy, kde se násobí akustické hodnoty mezi sebou, jsou výrazně menší než ostatní členy, proto mohou být také zanedbány.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (2.26)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' \quad (2.27)$$

Rovnice (2.26) se derivuje podle času:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

A rovnice (2.27) se podrobí divergenci:

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla p' \quad (2.29)$$

Rozdíllem těchto dvou rovnic je eliminována akustická rychlost. Vzniklý vztah bilancuje změnu akustické hustoty s rozložením tlaku. Důsledkem rovnice je, že je-li v bodě nižší akustický tlak než v jeho okolí, pak v tomto bodě bude růst akustická hustota. Divergenci gradientu vyjadřuje Laplaceův operátor  $\Delta$  [ $m^{-2}$ ].

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \Delta p' \quad (2.30)$$

Již bylo odvozeno, že mezi akustickým tlakem a hustotou existuje vztah. Jeho použitím přechází rovnice (2.30) do tvaru vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Delta p' \quad (2.31)$$

Vlnová rovnice je dobře popsána a řešitelná parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Je to rovnice hyperbolického typu. Z řešení této rovnice je zřejmé, že koeficient v ní obsažený je kvadrát rychlosti. Je to rychlost šíření vln, které rovnice popisuje. V tomto případě je to rychlost zvuku v plynu  $c_0$  [ $m/s$ ]. Rychlost zvuku je tedy derivace tlaku podle hustoty při zachování entropie (tedy bez sdílení tepla). Tento vztah byl objeven ještě před odvozením vlnové rovnice pro akustiku v plynech.

$$c_0 = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa r T} \quad (2.32)$$

Z výrazu pro rychlost zvuku je vidět, že závisí na teplotě. Teplota se během akustických dějů mění. U teploty je možné provést rozklad na teplotu prostředí a akustickou teplotu. Po vyřešení vlnové rovnice není problém z tlakového pole dopočítat pole teploty, protože se

jedná o izoentropickou změnu. Ukazuje se, že pro technické výpočty je změna teploty zanedbatelná, a proto je předpoklad konstantní rychlosti zvuku korektní. Při dosazení rychlosti zvuku a rozepsání do složek  $x, y, z$  má vlnová rovnice tvar:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta p' \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \quad (2.34)$$

Vlnová rovnice pro řešení akustiky je běžně používaná. Pro odvození bylo použito velké množství předpokladů, díky kterým bylo možné rovnice mechaniky tekutin transformovat na vlnovou rovnici. Tyto předpoklady musí uživatel vlnové rovnice znát, aby nedošlo k jejímu použití ve specifických výpočtech, kde předpoklady nemusí být splněny. Hlavní z těchto předpokladů jsou malé hodnoty akustického tlaku a hustoty v porovnání s tlakem a hustotou prostředí a malé hodnoty akustické i unášivé rychlosti ve srovnání s rychlostí zvuku a izoentropické šíření zvukové vlny. Všechny tyto předpoklady jsou, pro běžné podmínky šíření zvuku ve vokálním traktu i v okolí hlavy, platné. Standardní hodnoty atmosférického tlaku jsou v řádech  $10^5 \text{ Pa}$  a standardní hustota je přibližně  $1.2 \text{ kgm}^{-3}$ . Hodnoty akustického tlaku nepřevyšují jednotky pascalů a tomu odpovídají hodnoty akustické hustoty v řádech  $10^{-6} \text{ kgm}^{-3}$ . Machovo číslo ve vokálním traktu zpravidla není větší než 0.05.

Jelikož vztah mezi akustickým tlakem a hustotou je lineární, je možné vlnovou rovnici přepsat z tvaru pro tlak na tvar pro hustotu. Jednoduchou změnou v postupu odvození lze ukázat, že vlnová rovnice platí i pro akustickou rychlost.

Odvozená vlnová rovnice neobsahuje budící člen. Případný budící člen představuje druhou časovou derivaci hustoty – zrychlení hustoty v řešeném objemu. Použití takového buzení při modelování akustických dějů není běžné. Pro účely modelování vokálních traktů to není odůvodněné. Druhá možnost buzení modelu je okrajovými podmínkami. To je mnohem použitelnější v praktických simulacích, kde je buzení většinou realizováno kmitající stěnou (například reproduktor) nebo pulzujícím vstupem tekutiny do řešené oblasti (výstup z hlasivek).

V těchto případech je nutné pracovat s akustickou rychlostí. Odvozená vlnová rovnice obsahuje pouze akustický tlak. Vztah mezi tlakem a rychlostí určuje Eulerova pohybová rovnice. Integrací rovnice (2.27) je možné vyjádřit definiční vztah pro akustickou rychlost z akustického tlaku. Takto získaná akustická rychlost je důležitá pro okrajové podmínky.

$$\mathbf{v}' = -\nabla \frac{1}{\rho_0} \int p' dt \quad (2.35)$$

## 2.6.2 Akustická impedance

Akustická impedance je veličina popisující akustické pole na okraji akustického prostředí nebo na rozhraní dvou akustických prostředí s jinými vlastnostmi. Je to velice

významná veličina s využitím v okrajových podmínkách výpočtu. Bez akustické impedance lze jednoduše popsat tuhou stěnu, na které je nulová akustická rychlost. Od tuhé stěny se vlnění odráží beze ztrát. Další možnost je definovat okrajovou podmínku tlakovou, kterou lze použít například jako volný konec do atmosféry.

Pokud se chtějí zahrnout do výpočtu ztráty, například pružností hraniční stěny, je akustická impedance vhodný nástroj. Ukazuje se, že na hranicích existuje závislost mezi akustickým tlakem a akustickou rychlostí. Důležitá je pouze normálová složka akustické rychlosti ke stěně, která je zároveň úměrná akustickému objemovému toku.

Akustická impedance je definovaná ve frekvenční oblasti  $\omega$  [ $s^{-1}$ ]. Akustických impedancí je definováno mnoho typů. Podíl frekvenčního obrazu akustického tlaku  $\hat{p}'$  ku frekvenčnímu obrazu normálové akustické rychlosti na okraji řešené oblasti  $\hat{v}'_n$  je specifická akustická impedance  $Z_s$  [ $Pa \cdot s/m$ ].

$$Z_s(\omega) = \frac{\hat{p}'(\omega)}{\hat{v}'_n(\omega)} \quad (2.36)$$

Z definice je jasné, že specifická akustická impedance je obecně komplexní funkce úhlové frekvence. Pokud jsou originály akustického tlaku a normálové rychlosti reálné funkce času, potom je rezistance (reálná část specifické akustické impedance) sudou funkcí a reaktance (imaginární část) je lichou funkcí úhlové frekvence. Z definice je patrné, že specifická akustická impedance je přenosovou funkcí mezi akustickým tlakem a rychlostí na rozhraní.

Specifická akustická impedance vytváří velké množství možností v definování okrajových podmínek. Dokáže definovat nejen tuhou stěnu ( $Z_s = \infty$ ) nebo nulový akustický tlak ( $Z_s = 0$ ), ale i stavy mezi nimi. Je to základní nástroj popisující ztráty v akustice. Velká část ztrát vzniká při odrazech zvukových vln na stěnách, které nejsou dokonale tuhé a není tam nulová normálová rychlost. Pro použití ve výpočtech je nutné znát hodnotu specifické akustické impedance. Může se vyjadřovat jako součin charakteristické akustické impedance  $Z_c$  a bezrozměrné funkce  $\zeta$  [60].

$$Z_s(\omega) = Z_c \zeta(\omega) \quad (2.37)$$

Charakteristická akustická impedance (2.38) je podíl amplitud tlakových vln vůči rychlostním a odpovídá součinu hustoty s rychlostí zvuku.

$$Z_c = \rho_0 c_0 \quad (2.38)$$

Při modelování vokálního traktu bez hrtanu s hlasivkami a bez vnějšího okolí hlavy, je potřeba vstup a výstup vokálního traktu popsat okrajovou podmínkou. Výstup do okolního vzduchu lze modelovat použitím specifické akustické impedance, protože dokáže popsat ztráty vznikající při výstupu vlny z vokálního traktu. Jednodušší variantou je nastavení nulového akustického tlaku, kdy nevznikají ztráty a výpočet je snazší.

Hodnoty akustické impedance na výstupu z vokálního traktu do volného prostoru vycházejí z řešení akustiky vnějšího prostředí. Impedance je tedy závislá na tvaru vnějšího prostředí. Dá se předpokládat, že pokud je vnější prostředí výrazně větší než otvor spojující

vokální trakt s prostředím, nebude mít tvar prostředí zásadní vliv. Zmíněná podmínka je v reálných situacích splněná, proto je možné tvar prostředí volit. Nejjednodušší je si vnější prostředí představit jako polokulovou oblast velkých (až nekonečně velkých) rozměrů, nebo nekonečně velkou oblast ohraničenou jednou rovinou. Ve středu roviny je umístěn kmitající tuhý píst. Tento píst má tvar výstupu vokálního traktu a jeho rychlost odpovídá akustické rychlosti. Pro tuto úlohu s kruhovým pístem o poloměru  $R$  existuje analytické řešení (2.39). Toto řešení je uvedeno v publikacích [60] a [75].

$$Z_s(\omega) = c_0 \rho_0 \left( 1 - \frac{J_1(2\omega R/c_0)}{\omega R/c_0} + i \frac{H_1(2\omega R/c_0)}{1 + \omega R/c_0} \right) \quad (2.39)$$

Rezistance specifické akustické impedance pro popsanou úlohu obsahuje Besselovu funkci  $J_1$ :

$$J_1(\text{arg}) = \frac{\text{arg}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!^2 (j+1)} \left( \frac{\text{arg}}{2} \right)^{2j} \quad (2.40)$$

Reaktance obsahuje Struvovu funkci  $H_1$ , která je definována pomocí funkce gama.

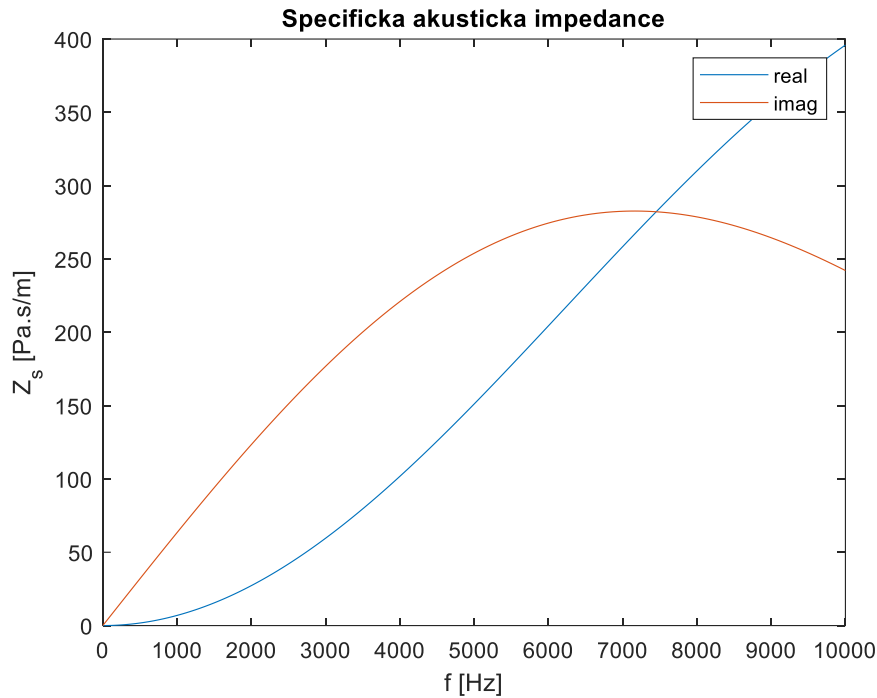
$$H_1(\text{arg}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(1 + 3/2) \Gamma(j + 5/2)} \left( \frac{\text{arg}}{2} \right)^{2j+2} \quad (2.41)$$

Gama funkce ( $\Gamma$ ) je definována následovně:

$$\Gamma(\text{arg}) = \int_0^{\infty} t^{\text{arg}-1} e^{-t} dt \quad (2.42)$$

Náhrada tvaru výstupního průřezu vokálního traktu za kruh není zásadní pro výsledky analýz. Takto spočítaná akustická impedance je kvalitní aproximací vnějšího prostředí. Akustická impedance je frekvenčně závislá (obrázek 2.14), a to komplikuje výpočty, jelikož představuje zdroj nelinearit.





Obrázek 2.14 Frekvenční závislost specifické akustické impedance na kruhovém pístu o poloměru 0.01 m, při hustotě vzduchu 1.2 kg/m<sup>3</sup> a rychlosti zvuku 340 m/s

Tento postup popisuje vyzařování akustické energie z vokálního traktu. Další oblast, kde je vhodné použít akustickou impedanci, jsou stěny vokálního traktu. Stěny (hranice) vokálního traktu tvoří z většiny měkké tkáně a z menší části relativně tuhé horní patro v ústní dutině a zuby. Tuhé části vokálního traktu lze popsat jako ideálně tuhé. Akustické vlnění se v tom případě odráží od stěny a nevznikají ztráty. Ideálně tuhá stěna odpovídá akustické impedanci divergující k nekonečnu.

Určit hodnotu akustické impedance na elastické stěně (bez ztrát) akustického prostředí je snadné. Reaktance (imaginární část) akustické impedance neobsahuje informace o tlumení a tato část určuje u netlumeného systému pozici kolmé vlny vůči stěně. Rezistance (reálná část) akustické impedance nese informace o tlumení. Rezistanci je možné spojit se součinitelem akustické pohltivosti pro kolmý dopad vln  $\alpha$  následujícím vztahem.

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\beta + \beta^{-1})} \quad (2.43)$$

Parametr  $\beta$  je součinitel akustické admitance a je definovaný vztahem.

$$\beta = \frac{\text{real}(Z_s)}{c_0 \rho_0} \quad (2.44)$$

Součinitel akustické pohltivosti je závislý na charakteru stěny. Vliv má její tuhost a především její materiálové tlumení. Dalším faktorem jsou mechanické vlastnosti uložení stěny. Pokud uložení má tlumící účinky, tak i ideálně tuhá stěna pohlcuje energii. Hodnoty součinitele

pohltivosti pro kolmý dopad akustických vln lze experimentálně určit a výsledky těchto experimentů jsou tabelovány pro mnoho materiálů [41].

## 2.7 Modelování vokálního traktu jako 1D kontinuum

Vlnová rovnice je obecná rovnice, kde její řešení závisí na okrajových podmínkách. Okrajové podmínky obsahují informace o geometrii řešené oblasti a vlastnosti okrajů řešené oblasti. Obecné analytické řešení vlnové rovnice existuje pouze pro speciální případy. V případě obecné úlohy nelze zajistit analytickou řešitelnost. V takovém případě se využívají numerické metody, především metoda konečných prvků.

Akustika vokálního traktu je typickým příkladem úlohy, kde nelze využít analytické řešení. Tato část práce popisuje analytický postup řešení vokálních traktů. Tento postup je analytický, ale jeho řešení probíhá numericky. Podstatou tohoto postupu je rozdělení geometrie na části, které se nahradí jednoduchými geometriemi, ty lze řešit analyticky. Tyto části se spojí okrajovými podmínkami. Tento postup připomíná metodu konečných prvků (MKP), nemá s ní ale téměř nic společného. V MKP se používá úplně jiná formulace akustického problému.

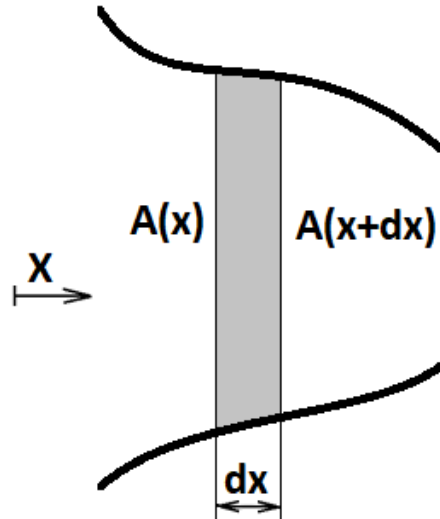
Vokální trakt je vlastně zakřivený kanál, který mění průřez a na několika místech se větví. Proto se dá modelovat jako soustava složená z válců a kuželů. Model sestavený z analytických řešení spojených okrajovými podmínkami má mnoho omezení, ale kompenzuje je zase jinými pozitivními vlastnostmi. Nevýhodami jsou nezhlednění tvaru průřezu, absence řešení geometrie míst, kde se model větví (úhel, který svírají kanály) a předpokládá šíření akustických vln pouze v jediném směru. Model nedohledá příčné tvary kmitu, které jsou naštěstí až ve vyšších frekvenčních pásmech, proto nejsou pro akustiku vokálních traktů tak významné jako podélné tvary. Model dokáže postihnout situaci, kdy dvě boční kavity umístěné proti sobě kmitají v opačné fázi a tento stav je v podstatě příčný tvar kmitu.

### 2.7.1 Vlnová rovnice 1D kontinua

Při 1D šíření akustické vlny v kanálu konstantního průřezu se vlnová rovnice změní na jednodušší tvar. Derivace ve směrech kolmých na směr šíření jsou nulové a rovnice přejde na tvar (2.45). Jako směr šíření se uvažuje směr osy  $x$ . Byla použita vlnová rovnice rozšířená o ztrátový člen, ve kterém parametr  $r$  [ $kg \cdot s \cdot m^{-3}$ ] popisuje velikost ztrát při kompresi a expanzi.

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (2.45)$$

Složitější je případ, kdy kanál není konstantního průřezu. V takovém případě postupující akustická vlna průchodem kanálu expanduje nebo je stlačována. Tyto jevy mají vliv na hodnoty akustických veličin. Jsou dvě cesty, jak odvodit vlnovou rovnici pro kanál proměnného průřezu. Použitým postupem je úprava vlnové rovnice a alternativní možností je přímé odvození pro tento speciální případ.



Obrázek 2.15 Vyjmutý element v akustickém kanále proměnného průřezu

Na vlnovou rovnici je možné aplikovat objemový integrál, kde integrační objem  $V$  [ $m^3$ ] je ohraničený dvěma řezy  $A(x)$  [ $m^2$ ] vzdálenými o  $dx$  [ $m$ ], jak zobrazuje obrázek 2.15. Obě strany rovnice lze vydělit  $dx$ .

$$\frac{1}{dx} \int_V \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV = \frac{1}{dx} \int_V c_0^2 \Delta p' dV \quad (2.46)$$

Na pravé straně lze použít Gaussovu větu, která převede objemový integrál na plošný. Parametr  $dS$  [ $m^2$ ] je diferenciál plochy  $\partial V$ , která je uzávěrem množiny (okrajem objemu)  $V$  a  $\mathbf{n}$  je normálový vektor k  $dS$ .

$$\frac{1}{dx} \int_V \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV = \frac{c_0^2}{dx} \int_{\partial V} \nabla p' \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.47)$$

Integrační plocha se skládá ze tří částí: vstupní plocha, výstupní plocha a obruba. Velikost plochy obruby je zanedbatelně malá oproti plochám řezu, proto může být zanedbaná.

$$\frac{1}{dx} \int_{\partial V} \nabla p' \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{dx} \left( \int_{A(x+dx)} \frac{\partial p'}{\partial x} dS - \int_{A(x)} \frac{\partial p'}{\partial x} dS \right) \quad (2.48)$$

Jelikož jsou integrační plochy od sebe vzdáleny o diferenciál prostorové souřadnice a jejich rozdíl je tímto diferenciálem dělen, jedná se o definiční vztah pro derivaci podle prostorové souřadnice.

$$\frac{1}{dx} \left( \int_{A(x+dx)} \frac{\partial p'}{\partial x} dS - \int_{A(x)} \frac{\partial p'}{\partial x} dS \right) = \frac{d}{dx} \int_{A(x)} \frac{\partial p'}{\partial x} dS = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial p'}{\partial x} A(x) \right) \quad (2.49)$$

Ze stejného důvodu může být integrační objem přepsán na součin plošného integrálu a diferenciálu  $dx$ . Podle předpokladu 1D šíření akustické vlny jsou hodnoty akustického tlaku a jeho derivací v celém průřezu stejné, to umožňuje vytknout akustický tlak mimo integrál.

$$\frac{1}{dx} \int_V \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV = \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) \int_{A(x)} dS = \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) A(x) \quad (2.50)$$

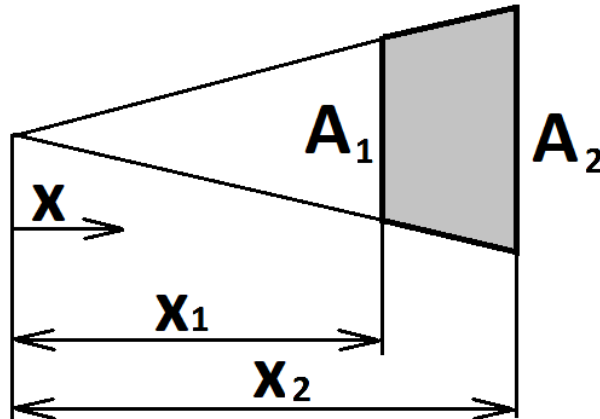
Použitím těchto předpokladů lze rovnici upravit do konečné podoby.

$$\left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) A(x) = c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p'}{\partial x} A(x) \right) \quad (2.51)$$

Vzniklá vlnová rovnice (2.51) se nazývá Websterova [65], po derivování pravé strany má totožný tvar s rovnicí pro konstantní průřez, ale obsahuje jeden člen navíc. Tento člen je závislý na změně průřezu.

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.52)$$

Výpočtový model bude složen pouze z válcových a kuželových částí. Podle toho je volena vlnová rovnice, která popisuje danou geometrii. V případě kuželové části je nutné definovat průřez jako funkci polohy. Nejprve je potřeba volit počátek lokálního souřadného systému. Pro válec je volen počátek na jedné jeho podstavě a směr axiální osy je kladný směrem k druhé podstavě. V případě kuželu je počátek volen tak, aby se nacházel ve vrcholu kuželu, jak naznačuje obrázek 2.16. Tato definice upraví tvar vlnové rovnice na jednodušší.



Obrázek 2.16 Definice lokálního souřadného systému v kuželu

$$r(x) = kx \quad (2.53)$$

Poloměr  $r$  [m] je lineární funkcí polohy  $x$  [m] s koeficientem  $k$ . Průřez je potom vyjádřen rovnicí.

$$A(x) = \pi k^2 x^2 \quad (2.54)$$

Člen ve vlnové rovnici s průřezem se zjednoduší.

$$\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} = \frac{2}{x} \quad (2.55)$$

Volba počátku lokálního souřadného systému zajistí, že se ve vlnové rovnici přímo nevyskytuje žádný parametr pro kuželovitost. Kuželovitost je skryta v hodnotách lokálních souřadnic konců komolého kužele. Vlnová rovnice (2.56) má tedy stejný tvar pro kužel s libovolnou kuželovitostí. Proto bude i obecný tvar řešení pro každou kuželovitost stejný.

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{2}{x} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.56)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru (2.57). To je klasický odhad řešení nejen pro lineární vlnové rovnice. Odhad je součin dvou funkcí, kde jedna je funkce času a druhá funkce prostoru. Funkce prostoru je obecná funkce  $X(x)$  [Pa] a funkce času předpokládá harmonické kmity o frekvenci  $\omega$  [1/s].

$$p' = X(x)e^{i\omega t} \quad (2.57)$$

Po dosazení řešení do vlnové rovnice (2.45) vznikne obyčejná diferenciální rovnice pro válec.

$$\left( X'' + \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - i \frac{r\omega}{\rho_0 c_0^2} \right) X \right) e^{i\omega t} = 0 \quad (2.58)$$

Pro kužel se odhad řešení dosadí do rovnice (2.56).

$$\left( X'' + \frac{2}{x} X' + \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - i \frac{r\omega}{\rho_0 c_0^2} \right) X \right) e^{i\omega t} = 0 \quad (2.59)$$

Funkce času obsažená v těchto rovnicích může nabývat libovolných hodnot, proto ji lze vykrátit. Pro přehlednost se zavede substituce  $\vartheta$  [1/m], která je funkcí  $\omega$ .

$$\vartheta^2 = \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - i \frac{r\omega}{\rho_0 c_0^2} \quad (2.60)$$

Po dosazení substituce má rovnice pro válec tvar:

$$X'' + \vartheta^2 X = 0 \quad (2.61)$$

Vzniklá rovnice je obyčejnou lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty a platí pro trubici konstantního průřezu. Její řešení je obecně známé a dá se odvodit na základě odhadu a charakteristické rovnice.

$$X(x) = C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x} \quad (2.62)$$

A pro kužel vznikne rovnice:

$$X'' + \frac{2}{x}X' + \vartheta^2 X = 0 \quad (2.63)$$

To je Besselova rovnice, obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu s nekonstantními koeficienty. Tato Besselova rovnice má řešení podle [25] ve tvaru (2.64). Jediný rozdíl mezi řešením pro válec a kužel je v podílu se souřadnicí  $x$ .

$$X(x) = \frac{1}{x} (C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) \quad (2.64)$$

Řešení těchto diferenciálních rovnic obsahuje integrační konstanty  $C_1, C_2$  [Pa], které je nutné určit z okrajových podmínek. Po určení těchto konstant je toto řešení tvarem kmitu v dané části pro danou frekvenci. Integrační konstanty jsou pro každý element obecně různé. Dosazením do obecného tvaru řešení akustického tlaku se získá řešení pro válec.

$$p'(t, x) = (C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

A pro kužel:

$$p'(t, x) = \frac{1}{x} (C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) e^{i\omega t} \quad (2.66)$$

Jeli známé celé tlakové pole, není problém dopočítat odpovídající rychlostní pole. K tomu slouží vztah (2.35). Pro válec je rychlostní pole následující:

$$v'(t, x) = -\frac{\vartheta}{\rho_0 \omega} (-C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) e^{i\omega t} \quad (2.67)$$

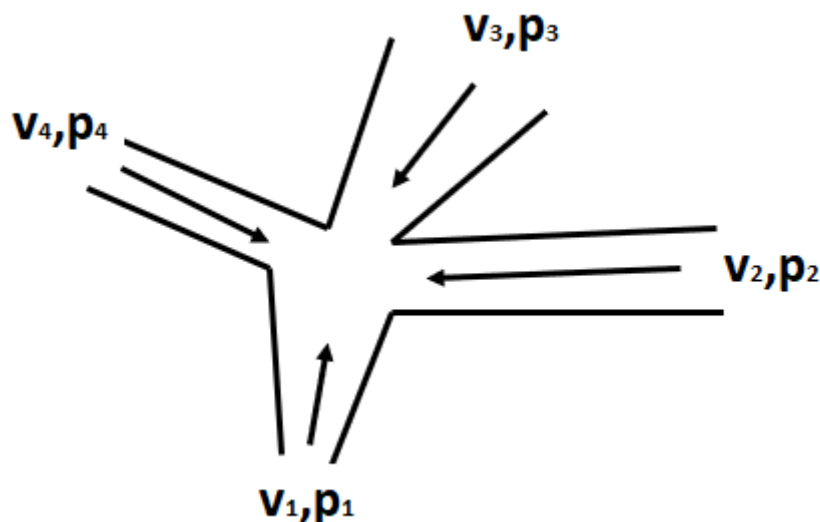
A pro kužel:

$$v'(t, x) = \frac{-1}{\rho_0 \omega} \left( \frac{i}{x^2} (C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) + \frac{\vartheta}{x} (-C_1 e^{-i\vartheta x} + C_2 e^{i\vartheta x}) \right) e^{i\omega t} \quad (2.68)$$

Model vznikne spojením jednotlivých částí a popsáním volných konců. Elementy jsou svázány okrajovými podmínkami ve spojích. Obrázek 2.17 zobrazuje spojení čtyř elementů. Jednou podmínkou je rovnost akustických tlaků ve spoji, v případě nakresleném na obrázku to představuje tři rovnice.

$$p'_1 = p'_2 = \dots = p'_n \quad (2.69)$$

V obecném případě, kdy je spojeno  $n$  elementů vznikne  $n-1$  rovnic. Druhou podmínkou je rovnice kontinuity (2.70), kde  $v'_j$  jsou akustické rychlosti a  $A_j$  jsou průřezy.



Obrázek 2.17 Spojení čtyř elementů

$$\sum_{j=1}^n v_j' A_j = 0 \quad (2.70)$$

Konce elementů, které nejsou připojeny k jiným elementům, musí být zakončeny okrajovou podmínkou. Je možné použít tlakovou, rychlostní nebo impedanční okrajovou podmínku.

Nutnou podmínkou pro řešitelnost obecné úlohy je, aby počet integračních konstant byl roven počtu okrajových podmínek. Každé spojení  $n$  elementů generuje jednu rovnici kontinuity a  $n-1$  rovnic rovnosti tlaků. Celkem spojení  $n$  elementů tvoří  $n$  rovnic. Všechny konce elementů, které nejsou připojeny k jiným, mají okrajovou podmínku. Každý element má 2 integrační konstanty a 2 konce. To dohromady znamená, že počet rovnic je stejný jako počet integračních konstant.

### 2.7.2 Frekvenční analýza

Modální či frekvenční úloha je základní úlohou, která hledá vlastní frekvence a tvary kmitu. Vlastní kmitání je stav, kdy model je nebudzený a sám kmitá. Ve frekvenční analýze se tedy uvažují tlakové a rychlostní okrajové podmínky homogenní. Okrajové podmínky dané akustickou impedancí mohou být libovolné.

Tento typ modelu je možné použít pro frekvenční analýzu. Sestaví se všechny rovnice definující okrajové podmínky. Tedy rovnosti tlaků, rovnice kontinuity ve spojích a okrajové podmínky na koncích kanálů. Ve vzniklé soustavě rovnic jsou neznámé integrační konstanty a frekvence kmitání  $\omega$ . Je-li elementů  $n$ , pak je rovnic a integračních konstant  $2n$ . Všechny členy všech rovnic obsahují člen  $e^{i\omega t}$ . Následně se rovnice vynásobí členem  $e^{-i\omega t}$ . Poté jsou všechny rovnice lineární vůči integračním konstantám a nelineární vůči frekvenci. Celá soustava rovnic se dá přepsat do maticového zápisu, který je v tomto případě homogenní.

$$\Phi(\omega)\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.71)$$

Matrice  $\Phi(\omega)$  obsahuje informace o celém modelu, vektor  $\mathbf{C}$  obsahuje integrační konstanty.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{n1} \\ C_{n2} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (2.72)$$

Soustava rovnic má triviální řešení, to je případ, kdy systém nekmitá. Hledá se netriviální řešení (2.72). To může nastat, pokud matice  $\Phi(\omega)$  bude singulární. Úloha tedy spočívá v nalezení takové frekvence, kdy je matice singulární. Takovou frekvenci můžeme nazvat vlastní.

$$\det(\Phi(\omega)) = 0 \quad (2.73)$$

Netriviální řešení soustavy rovnic pak definuje tvar kmitu, který kmitá touto frekvencí. Po dosazení tvaru kmitu do rovnic (2.65) nebo (2.66) se získá tlakové pole daného tvaru kmitu.

Vlastních frekvencí a tvarů kmitů je nekonečně mnoho. Hodnoty vlastní frekvence  $\omega$  jsou obecně komplexní. Reálná hodnota je frekvence  $\Omega$  a imaginární hodnota je součinitel dozívání  $\delta$  obsahující tlumení systému. U netlumeného modelu jsou vlastní frekvence reálné. Pro každou vlastní frekvenci existuje sdružená vlastní frekvence. Tyto sdružené vlastní frekvence mají stejný útlum, stejný tvar kmitu, ale opačnou frekvenci kmitání (obrácené znaménko). Tato tvrzení jsou platná, pokud má model fyzikálně reálné vstupy. Pokud jsou například rozměry komplexní, rezistence není sudá nebo reaktance lichá, pak symetrie vlastních frekvencí a útlumů nemusí být platná.

$$e^{i\omega t} = e^{i(\Omega+i\delta)t} = e^{(i\Omega-\delta)t} = e^{-\delta t}(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)) \quad (2.74)$$

Výraz (2.71) je vůči integračním konstantám lineární, ale vůči frekvenci velice nelineární. A proto musí být výpočet vlastních frekvencí prováděn numericky. Pouze pro jednoduché případy lze snadno nalézt analytické řešení. Postup hledání vlastních frekvencí probíhá následovně. Určí se rozsah reálné frekvence, ve kterém se hledají vlastní hodnoty. V daném rozsahu s daným krokem se numericky spočítá podmíněnost matice  $\Phi(\omega)$  nebo alternativa k podmíněnosti (typicky determinant, který se nazývá frekvenční). Vyhledají se lokální extrémů podmíněnosti, to jsou přibližné hodnoty vlastních frekvencí. Každá nalezená frekvence se upřesní pomocí optimalizačních metod. Cílová funkce je podmíněnost odpovídající singularitě a proměnný parametr je frekvence v komplexní rovině. Výsledná komplexní hodnota je vlastní frekvence a její útlum. Výpočet příslušného vlastního tvaru kmitu je řešením singulární soustavy lineárních rovnic. Po dosazení komplexní vlastní frekvence do  $\Phi(\omega)$  se spočítají vlastní čísla a vektory. Vlastní vektor mající nulové vlastní číslo je tvarem kmitu. Pokud je více vlastních čísel nulových, pak je to vícenásobná vlastní frekvence a má více



vlastních tvarů. Pokud žádné vlastní číslo není nulové, pak tato frekvence není vlastní frekvencí a musí být vyřazena.

### 2.7.3 Simulace ustálených kmitů

Model může být použitý na plnohodnotné simulace přechodových jevů. Pro tuto práci jsou významné pouze simulace ustálených kmitů. Tyto simulace lze provést velice snadno ve frekvenční oblasti.

Předpokládejme, že buzení je realizované tlakovou nebo rychlostní okrajovou podmínkou. Je třeba znát frekvenční spektrum (komplexní amplitudu) budícího signálu. Pro úlohy akustiky vokálního traktu je typická rychlostní okrajová podmínka na vstupu do vokálního traktu u hlasivek. Tento rychlostní pulz byl v této práci již popsán.

Ve frekvenční analýze se uvažovaly okrajové podmínky homogenní, a proto je rovnice (2.71) také homogenní. V případě nehomogenních okrajových podmínek vznikne pravá strana rovnice  $f(\omega)$  (2.75). Při výpočtu pro jednu budící frekvenci bude pravá strana obsahovat komplexní amplitudu budícího signálu. Rovnice nebude obsahovat člen  $e^{i\omega t}$ , který lze vykrátit. Krácení je možné, protože frekvence vybuzených kmitů je shodná s frekvencí budícího signálu.

$$\Phi(\omega)\mathbf{C} = \mathbf{f}(\omega) \quad (2.75)$$

V získané rovnici je neznámý vektor integračních konstant. Ostatní členy jsou známé, jelikož je známá úhlová frekvence. Vzniklá soustava lineárních algebraických rovnic má netriviální jednoznačné řešení. Speciálním případem je buzení netlumeného systému jeho vlastní frekvencí. V tomto případě není na začátku použitý odhad řešení správný a řešení není nalezeno. Při výpočtu se tato situace projeví singularitou matice soustavy. Pokud nedochází k rezonanci, řešení se dosadí do výrazu pro akustický tlak. Získá se velikost a rozložení akustického tlaku v celém modelu pro danou frekvenci a dané buzení. Toto rozložení tlaku je komplexní. Pokud je buzení reálné, pak jeho frekvenční obraz obsahuje kladnou i zápornou frekvenci a komplexní amplitudy jsou komplexně sdružené. Při výpočtu pro kladnou i zápornou frekvenci vyjdou řešení akustického tlaku také komplexně sdružené a po převodu do časové oblasti je řešení reálné. Výhodou je, že není potřeba provádět výpočet dvakrát pro kladnou a zápornou frekvenci, jelikož při fyzikálních vstupech vyjde řešení vždy komplexně sdružené.

Pokud buzení obsahuje více frekvenčních složek, pak platí princip superpozice. Superpozice platí na budící signál i na řešení. Superpozici je možné použít díky linearitě rovnic (2.45) a (2.56). Zvolí se dostatečný počet frekvencí z budícího spektra a výpočet se provede pro každou složku zvlášť, výsledky se mohou sečíst. Pokud zvolené frekvenční složky dostatečně aproximovaly budící signál, pak i řešení bude dostatečně aproximováno.

Pokud se jako buzení použije Diracův impulz, jehož frekvenční obraz je reálný jednotkový pro celé spektrum, a výsledek se nepřevédo do časové oblasti, pak je výsledkem přenosová funkce. Přenosová funkce je funkcí frekvence a vynásobením frekvenčním obrazem vstupu se získá frekvenční obraz výstupu.

## 2.8 Metoda konečných prvků pro úlohy akustiky

S rozvojem výpočetní techniky se rozšířilo použití numerických metod. Metoda konečných prvků (MKP) je asi nejrozšířenější numerická metoda pro úlohy mechaniky kontinua. Úlohy akustiky jsou typickým příkladem, kde je MKP velice vhodná k použití. Díky masivnímu rozšíření MKP v současné době existuje mnoho softwarových produktů pro řešení MKP úloh. Tyto komerční systémy způsobily rozšíření MKP (především díky pohodlnému grafickému prostředí) a zpřístupňují je i pro pracovníky bez znalosti matematických a fyzikálních problémů.

Komerční výpočtové produkty nabízejí obrovské možnosti a univerzálnost, ale jsou to kompilované softwary a uživatel nevidí, jak fungují. Vytvoření vlastního MKP řešiče není triviální záležitost, ale vyplatí se s ohledem na nestandardní analýzy nebo postupy. V této práci bude upřednostňována cesta vlastního MKP řešiče.

### 2.8.1 Formulace úlohy pro metodu konečných prvků

Základem MKP je diskretizace řešené domény na konečný počet elementů, které disjunktně vyplní celý řešený objem (v případě 3D kontinua). Existuje mnoho typů elementů, které se liší svojí topologií, typem stupňů volnosti, účelem použití, bázovými funkcemi a podobně. Každý element má uzlové body (uzly/nody), které definují jeho tvar, a uzly, ve kterých se určuje řešení úlohy (pro akustiku akustický tlak). Často jsou tyto dva typy uzlů totožné. Dále má element bázové (tvarové) funkce, které určují kompletní rozložení hledaných veličin z uzlů v celém objemu elementu.

$$\mathbf{N}_e(x, y, z) = [N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \dots] \quad (2.76)$$

Tvarových funkcí je stejný počet, jako je počet uzlů pro řešení, a seskupují se do bezrozměrného řádkového vektoru tvarových funkcí elementu  $\mathbf{N}_e$ .

$$\mathbf{P}_e(t) = \begin{bmatrix} p'_1(t) \\ p'_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

V případě vynásobení sloupcovým vektorem uzlových hodnot akustického tlaku elementu  $\mathbf{P}_e [Pa]$  se získá funkce rozložení akustického tlaku v objemu elementu.

$$p'(t, x, y, z) = \mathbf{N}_e(x, y, z) \mathbf{P}_e(t) \quad (2.78)$$

Zatímco přímé řešení parciálních diferenciálních rovnic (vztahených na elementární objem) je takzvaná silná formulace, metoda konečných prvků využívá variačních principů. Ty patří mezi takzvané slabé (integrální – vztahené na skutečný objem) formulace [46]. V MKP je nejčastěji používanou metodou nalezení slabého řešení (řešení slabé formulace úlohy) Galerkinova metoda. Je to univerzálně použitelná metoda, kde diferenciální rovnice silné formulace je skalárně vynásobena testovací funkcí a vzniklý výraz je integrován přes řešený objem [46]. Pro odvození jednoho elementu stačí integrovat přes jeho objem  $V_e [m^3]$ , ale

obecně se integruje přes celou řešenou oblast složenou z mnoha elementů. Testovací funkce může být chápána jako virtuální hodnota hledané veličiny. V případě akustiky je vlnová rovnice násobena virtuálním akustickým tlakem a integrována přes objem jednoho elementu.

$$\int_{V_e} \left( \delta p' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \delta p' \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV = \int_{V_e} (\delta p' c_0^2 \Delta p') dV \quad (2.79)$$

Parametr  $\delta p' [Pa]$  je virtuální akustický tlak, často je používán název variace akustického tlaku. Je to analogie k virtuálnímu posuvu v metodě virtuálních prací. Protože se jedná o 3D úlohu, je  $\delta p'$  funkcí prostoru. Pro platnost principu je důležitá vlastnost  $\delta p'$  a to, že na množině s předepsanou Dirichletovou okrajovou podmínkou je nulový, ale jinak je zcela libovolný [7]. Pokud  $\delta p'$  může nabývat libovolných hodnot a vždy je splněna rovnice (2.79), pak je zaručeno, že je splněna i původní vlnová rovnice [7]. Z toho je patrné, že slabá a silná formulace problému jsou ekvivalentní, tato tvrzení platí pouze pro dostatečně hladká diferencovatelná řešení. Pouze v těch částech objemu, kde je předepsána okrajová podmínka, není vynucována platnost vlnové rovnice, ale v těchto místech je hodnota řešení známá a není nutné se tam zabývat splněním původní silné formulace.

Pro účely MKP modelu je vhodné upravit pravou stranu rovnice. Člen, kde se násobí virtuální akustický tlak s divergencí gradientu akustického tlaku, lze rozdělit na dva členy.

$$\delta p' \Delta p' = \nabla^T (\delta p' \nabla p') - (\nabla \delta p')^T (\nabla p') \quad (2.80)$$

Z nich se jeden člen pomocí vztahů mezi akustickým tlakem a rychlostí upraví na rychlostní vyjádření.

$$\delta p' \Delta p' = -\nabla^T \left( \delta p' \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) - (\nabla \delta p')^T (\nabla p') \quad (2.81)$$

Po dosazení do rovnice (2.79) se využije Gaussova věta a objemový integrál se převede na plošný.

$$\int_{V_e} \left( \delta p' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \delta p' \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV = - \int_{V_e} c_0^2 \left( \nabla^T \left( \delta p' \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) + (\nabla \delta p')^T (\nabla p') \right) dV \quad (2.82)$$

$$\int_{V_e} \left( \delta p' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \delta p' \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial t} + c_0^2 (\nabla \delta p')^T (\nabla p') \right) dV = - \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{n}^T c_0^2 \delta p' \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) dS \quad (2.83)$$

Tyto úpravy nejsou nezbytné, ale zajistí, že výsledné matice budou symetrické a vzniklý člen s akustickou rychlostí umožní použít libovolné okrajové podmínky.

Virtuální akustický tlak je v tomto případě pole v čase a prostoru. Stejně jako skutečný akustický tlak může být vyjádřen pomocí tvarových funkcí a uzlových hodnot. Pro variace funkcí se používají analogická pravidla jako k diferencování [10].

$$\delta p' = \delta(\mathbf{N}_e \mathbf{P}_e) = \delta \mathbf{N}_e \mathbf{P}_e + \mathbf{N}_e \delta \mathbf{P}_e \quad (2.84)$$

Jelikož jsou tvarové funkce jednoznačně dané a neměnné, je jejich variace nulová.

$$\delta \mathbf{N}_e = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

Dále se využije vlastnosti, že skalár se nemění s transpozicí.

$$\delta p' = \mathbf{N}_e \delta \mathbf{P}_e = \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{N}_e^T \quad (2.86)$$

Výrazy pro akustický tlak a jeho variaci se mohou dosadit do upravené rovnice. Jelikož uzlové hodnoty akustického tlaku jsou hodnoty v diskrétních místech (uzlech), je možné jejich vytknutí mimo integrály.

$$\delta \mathbf{P}_e^T \int_{V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{N}_e^T \frac{r}{\rho_0} \mathbf{N}_e \dot{\mathbf{P}}_e + c_0^2 (\nabla \mathbf{N}_e)^T (\nabla \mathbf{N}_e) \mathbf{P}_e \right) dV = -\delta \mathbf{P}_e^T \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}^T c_0^2 \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) dS \quad (2.87)$$

Nyní je potřeba zpracovat poslední člen s akustickou rychlostí. Pokud by v modelu existovaly pouze tlakové okrajové podmínky nebo homogenní rychlostní okrajové podmínky, potom je možné tento člen odstranit. Pokud je potřeba využívat akustickou impedanci, vyjádří se akustická rychlost pomocí akustické impedance a akustického tlaku. Akustická impedance se v čase nemění, a proto je možné ji definovat jako podíl derivací akustického tlaku proti rychlosti. Ale dosažení specifické akustické impedance je nekorektní operace, protože specifická akustická impedance je definovaná ve frekvenční oblasti a dosavadní odvození probíhá v časové oblasti. Převedení do frekvenční oblasti v podstatě znamená pouze nahrazení časových derivací součinem s  $i\omega$ . Uzlový akustický tlak  $\mathbf{P}_e$  se tímto stává frekvenčním obrazem uzlového akustického tlaku  $\hat{\mathbf{P}}_e$ .

$$\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T \int_{V_e} \left( -\mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \omega^2 \hat{\mathbf{P}}_e + \mathbf{N}_e^T \frac{r}{\rho_0} \mathbf{N}_e i\omega \hat{\mathbf{P}}_e + c_0^2 (\nabla \mathbf{N}_e)^T (\nabla \mathbf{N}_e) \hat{\mathbf{P}}_e \right) dV = -\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}^T c_0^2 \rho_0 i\omega \mathbf{v}' \right) dS \quad (2.88)$$

Nyní je možné dosadit specifickou akustickou impedanci.

$$\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T \int_{V_e} \left( -\mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \omega^2 \hat{\mathbf{P}}_e + \mathbf{N}_e^T \frac{r}{\rho_0} \mathbf{N}_e i\omega \hat{\mathbf{P}}_e + c_0^2 (\nabla \mathbf{N}_e)^T (\nabla \mathbf{N}_e) \hat{\mathbf{P}}_e \right) dV = -\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T c_0^2 \rho_0 i\omega \frac{p'}{Z_s} \right) dS \quad (2.89)$$

Akustický tlak v posledním členu se vyjádří z uzlových hodnot.

$$\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T \left( \int_{V_e} \left( -\mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \omega^2 \hat{\mathbf{P}}_e + \mathbf{N}_e^T \frac{r}{\rho_0} \mathbf{N}_e i\omega \hat{\mathbf{P}}_e + c_0^2 (\nabla \mathbf{N}_e)^T (\nabla \mathbf{N}_e) \hat{\mathbf{P}}_e \right) dV + \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T c_0^2 \rho_0 i\omega \frac{1}{Z_s} \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{P}}_e \right) dS \right) = 0 \quad (2.90)$$

Ze vzniklého výrazu je možné vyjádřit vztahy pro matice MKP modelu. Většinou se vztah ještě dělí kvadrátem rychlostí zvuku. První z těchto matic je matice hmotnosti elementu  $\mathbf{M}_e$  [ $s^2 m$ ].

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} (\mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) dV \quad (2.91)$$

Druhou maticí je matice tlumení  $\mathbf{B}_e$  [m. s]. Tato matice má dvě části, první je objemový integrál, který popisuje tlumení vzniklé kompresí plynu a druhý je plošný integrál přes povrch elementu, který vyjadřuje tlumení dané akustickou impedancí.

$$\mathbf{B}_e = \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \int_{V_e} (r \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) dV + \rho_0 \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \frac{1}{Z_s} \mathbf{N}_e \right) dS \quad (2.92)$$

Poslední maticí je matice tuhosti elementu  $\mathbf{K}_e$  [m].

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} ((\nabla \mathbf{N}_e)^T (\nabla \mathbf{N}_e)) dV \quad (2.93)$$

Všechny tyto matice jsou symetrické a pozitivně definitní (hmotnost a tlumení), nebo pozitivně semidefinitní (tuhost). Po dosazení těchto matic do rovnice (2.90) vznikne výsledná rovnice.

$$\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T (-\omega^2 \mathbf{M}_e + i\omega \mathbf{B}_e + \mathbf{K}_e) \hat{\mathbf{P}}_e = 0 \quad (2.94)$$

Tato rovnice je slabá formulace akustického problému v jednom elementu ve tvaru, který je přímo použitelný pro MKP. Protože hodnoty virtuálních uzlových akustických tlaků jsou libovolné a výsledek je vždy nulový, musí být zbytek rovnice nulový. De facto se dá říct, že vektor virtuálních hodnot lze vykrátit.

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_e + i\omega \mathbf{B}_e + \mathbf{K}_e) \hat{\mathbf{P}}_e = \mathbf{0} \quad (2.95)$$

A toto je rovnice dynamické rovnováhy akustiky v elementu. Je zde okamžitě vidět analogie s mechanickými systémy, podle toho byly voleny názvy a značení matic. Rovnice svádí k převodu z frekvenční oblasti do časové, to ale nelze provést, protože obsahuje akustickou impedanci. Pokud by nebyla akustická impedance použita a všechny okrajové podmínky by byly tlakové a rychlostní, pak celý člen s akustickou impedancí nevznikne a rovnice lze řešit v časové i frekvenční oblasti.

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

## 2.8.2 Okrajové podmínky v MKP formulaci

Nezákladnější je tlaková okrajová podmínka. Rovnice akustiky pro MKP jsou odvozeny v tlakové formě. To znamená, že v nich přímo vystupují uzlové akustické tlaky. Pokud je někde předepsaný akustický tlak, je možné ho převést na předepsané uzlové akustické tlaky. Vektor tvarových funkcí platí v celém objemu elementu i na jeho povrchu.

$$p' = \mathbf{N}_e \mathbf{P}_e \quad (2.97)$$

Z tohoto výrazu nelze určit uzlové hodnoty, protože není možné vytvořit inverzi vektoru. Řešení ani obecně neexistuje. Existence řešení je zaručena pouze tehdy, pokud je požadované pole na povrchu elementu lineární kombinací tvarových funkcí. Pokud řešení neexistuje, je efektivní použití metody nejmenších čtverců.

$$\mathbf{P}_p = \left( \int \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p dS \right)^{-1} \int \mathbf{N}_p^T p' dS \quad (2.98)$$

Tento vztah dává přesné řešení, pokud existuje a pokud neexistuje, pak řešení odpovídá metodě nejmenších čtverců. Ve vztahu není plný vektor tvarových funkcí, vektor  $\mathbf{N}_p$  vznikne odebráním tvarových funkcí uzlů, kterými není dotčena integrovaná plocha. Řešení v těchto uzlech je nula a vytvořila by singulární matici. Výsledný vektor tlaků  $\mathbf{P}_p$  se pak musí doplnit o tyto nuly, aby vznikl vektor  $\mathbf{P}_e$ . Nejčastější případ je, že v dané ploše je hodnota tlaku konstantní (nulový akustický tlak). Poté netřeba nic počítat, všechny uzly v dané ploše mají tuto hodnotu tlaku.

Nyní, když jsou známé uzlové hodnoty, použijí se v modelu. To se provede dosazením hodnot do vztahu (2.95). Tím se v soustavě rovnic sníží počet neznámých a soustava rovnic přestane platit. Vynucení okrajové podmínky se děje z vnějšku akustického systému. Tento efekt je možné zahrnout tak, že se homogenní pravá strana rovnice rozšíří o budící členy v příslušných rovnicích k známým uzlům a rovnice se stanou platnými. Tyto budící členy jsou nové neznámé a soustava má řešení. Častější postup je odstranění celých rovnic, které přísluší známým stupňům volnosti. Tento postup zároveň zaručí, že matice v soustavě rovnic zůstanou symetrické.

Další typ okrajové podmínky je rychlostní. Pro odvození vztahů se využije rovnice (2.87). Člen na pravé straně obsahuje akustickou rychlost a byl postupně upraven na část matice tlumení obsahující akustickou impedanci.

$$-\delta \mathbf{P}_e^T \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}^T \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) dS = \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{V}_e \quad (2.99)$$

Pokud se do tohoto členu dosadí požadovaná akustická rychlost, výsledný matematický model (2.95) nebude obsahovat část matice tlumení s akustickou impedancí, místo toho bude obsahovat na pravé straně budící člen.

$$\mathbf{V}_e = - \int_{\partial V_e} \left( \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}^T \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) dS \quad (2.100)$$

Tento budící člen lze zapsat v časové i frekvenční oblasti.

$$\hat{\mathbf{V}}_e = - \int_{\partial V_e} (\mathbf{N}_e^T \mathbf{n}^T \rho_0 i \omega \hat{\mathbf{v}}') dS \quad (2.101)$$

Poslední typ okrajové podmínky je akustická impedance. Tato okrajová podmínka je skrytá v matici tlumení v části definované plošným integrálem. Tím jsou popsány všechny běžné okrajové podmínky. Důležitý je fakt, že celý povrch řešené oblasti musí být popsán okrajovou podmínkou a zároveň nelze definovat více různých typů okrajových podmínek na jednom místě. Pokud je použito označení  $\Gamma_p, \Gamma_v, \Gamma_z$  pro povrchy (množiny), kde jsou definované okrajové podmínky tlakového, rychlostního a impedančního typu a  $\Gamma$  pro celý povrch řešeného objemu, pak platí:

$$\Gamma_p \cup \Gamma_v \cup \Gamma_z = \Gamma \quad (2.102)$$

$$(\Gamma_p \cap \Gamma_v = \emptyset) \wedge (\Gamma_v \cap \Gamma_z = \emptyset) \wedge (\Gamma_z \cap \Gamma_p = \emptyset) \quad (2.103)$$

Definovat na stejné ploše rychlostní a impedanční okrajovou podmínku nelze, jelikož členy, kterými se tyto podmínky definují, vznikly rozdílnou úpravou stejného členu. Nelze použít jeden člen rovnice dvakrát. Kombinovat tlakovou okrajovou podmínku s jinou také prakticky nelze, jelikož podmínkou ovlivněná plocha je vlastně z výpočtu vyjmuta a tím není kam definovat redundantní podmínku. V případě nedefinování žádné okrajové podmínky, tedy vynechání části matice tlumení a rychlostního budícího členu, bude chování modelu odpovídat homogenní Neumannově podmínce [13]. Tato podmínka je v akustice totožná s homogenní rychlostní podmínkou.

### 2.8.3 Sestavení MKP modelu

V předcházejících kapitolách byly odvozeny definiční vztahy pro matice hmotnosti, tlumení a tuhosti jednoho elementu a vztahy pro definici okrajových podmínek. Z elementů je potřeba postavit celý model. Tedy vyplnit řešený objem elementy. To má více fází. Jednou fází je definovat polohu a geometrický tvar všech potřebných elementů. Druhou fází je sestavit matematický model z matic popisujících elementy. První fáze (síťování modelu) neřeší fyzikální problematiku, ale jedná se o geometrický problém, který tato práce neřeší. Síťování může být provedeno zcela ručně, ale většinou se používají specializované programy nebo moduly v MKP programech. Ruční síťování je pro inženýrské úlohy nereálné, protože běžný MKP model obsahuje obrovské množství elementů.

Jsou-li známé konfigurace jednotlivých elementů, je možné pro každý element spočítat matice, které ho fyzikálně popisují. Elementy se spojují v uzlových bodech a toto spojení lze realizovat několika způsoby. Méně používaným postupem je zavedení vazbových rovnic mezi spojené uzly a použití Lagrangeových multiplikátorů, které zajistí fyzikální vazbu mezi uzly. Tento postup se nepoužívá, protože neúměrně zvyšuje výpočetní velikost úlohy. Příkladem může být rovinná úloha ve čtvercové geometrii, kde jsou použity čtvercové elementy se čtyřmi uzly. Elementů po jedné straně je použito 10. Úloha má tedy 121 nezávislých uzlů a 100 elementů. Tyto elementy mají 400 uzlů, je tedy potřeba použít 279 vazbových rovnic a

multiplikátorů. Úloha má dohromady 679 rovnic a neznámých. Kdyby se multiplikátory eliminovaly a vazbové rovnice zavedly do rovnic, mohla by mít úloha pouze 121 neznámých, to je v konečném důsledku 82% úspora velikosti úlohy. Časová úspora je ještě výraznější. Z tohoto důvodu se elementy nikdy nevážou rovnicemi a multiplikátory.

Postup, který se v MKP používá, nezavádí zbytečné proměnné, ale naopak generuje nejmenší možnou velikost úlohy. Rovnice (2.94) říká, že variace virtuální práce (i když nemá rozměr energie) je nulová, to samé říká rovnice (2.79), ze které je odvozená. Nadřazená rovnice (2.79) je fyzikální formulací úlohy a musí platit pro celý model, zatímco (2.94) je odvozená pouze pro objem jednoho elementu. Jelikož je odvození založené na objemovém integrálu (který je aditivní), platí, že součet všech rovnic (2.94) pro všechny elementy je ekvivalentní rovnici (2.79), která musí být splněna nejen pro jediný element, ale i pro celý řešený objem.

$$\sum_{\forall el} (\delta \hat{\mathbf{P}}_e^T (-\omega^2 \mathbf{M}_e + i\omega \mathbf{B}_e + \mathbf{K}_e) \hat{\mathbf{P}}_e)_{el} = 0 \quad (2.104)$$

Podstatou je tedy sečíst rovnice (2.94) všech elementů. Vektor  $\hat{\mathbf{P}}_e$  obsahuje neznámé uzlové akustické tlaky jednoho elementu. Jelikož elementy mají společné uzly, je potřeba zavést globální vektor uzlových hodnot. Nový globální vektor uzlových hodnot  $\hat{\mathbf{P}}$  obsahuje všechny unikátní uzly v úloze, pokud je některý uzel společný pro více elementů, pak je tento uzel v globálním vektoru obsažen pouze jednou. Při přechodu z vektoru uzlových hodnot elementu do globálního vektoru se změny rozměry matic. Ty budou odpovídat velikosti globálního vektoru uzlových hodnot a jejich prvky se přesunou na nová místa v závislosti na polohách příslušných prvků v  $\hat{\mathbf{P}}$ . To umožní vytknout vektor  $\hat{\mathbf{P}}$  a jeho variaci ze sumy a sečíst známé matice.

$$\delta \hat{\mathbf{P}}^T (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{P}} = 0 \quad (2.105)$$

Vzniklé matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}$  jsou globálními maticemi hmotnosti, tlumení a tuhosti. Definují celý model bez tlakových okrajových podmínek. Jelikož pořád platí, že virtuální akustické tlaky jsou libovolné vyhovující okrajovým podmínkám, lze rovnici přepsat do tvaru:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.106)$$

Postup sestavení je ukázán na maticích modelu, úplně totožný postup se provede i s budícím vektorem, pokud existuje. Rovnice potom přechází do tvaru:

$$\delta \hat{\mathbf{P}}^T \left( (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{V}} \right) = 0 \quad (2.107)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad (2.108)$$

Jako poslední se aplikují tlakové okrajové a počáteční podmínky. Jelikož je vlnová rovnice diferenciální rovnicí druhého řádu v čase, je potřeba definovat v každém uzlu 2 počáteční podmínky. První podmínkou je hodnota akustického tlaku a druhou je její časová derivace. Alternativně lze definovat okrajové podmínky v časové oblasti (Dirichletova úloha



místo Cauchyho úlohy), ale to nemá praktické uplatnění pro akustiku a vyžadovalo by to jiný přístup k řešení modelu. Tím vzniká uzavřený systém obyčejných diferenciálních rovnic, který je řešitelný.

## 2.8.4 Frekvenční analýza

Matematický popis odvozený pro MKP je ideální pro výpočet modálních vlastností modelu. Vlastní kmitý popisují rovnice (2.95) a (2.96), protože neobsahují buzení. Vlastními kmitý kmitá nebuzený model. Rovnice psaná v časové oblasti není ideální, protože se do ní musí dosadit odhad řešení ( $\hat{\mathbf{P}}e^{i\omega t}$ ), a tím přejde do frekvenční oblasti. Proto dává smysl rovnou použít rovnici (2.95), která je platná ve frekvenční oblasti. Platí, že tato rovnice má triviální řešení:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.109)$$

Toto řešení je nevyhovující, protože při něm systém nekmitá. Existence nehomogenního řešení u homogenní rovnice je podmíněna singularitou systémové matice.

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) = 0 \quad (2.110)$$

Úhlová frekvence, při které je determinant nulový, musí být vlastní frekvencí. Hledání této frekvence je problematika vlastních čísel matic. Při použití substituce  $i\omega = \lambda$  rovnice (2.95) přejde do tvaru:

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.111)$$

Řešení tohoto matematického problému je zvládnutá disciplína. Mnoho výpočetních a programovacích nástrojů má v sobě implementované funkce pro řešení těchto úloh. Algoritmy pro efektivní řešení úlohy zobecněných vlastních čísel jsou popsány v publikacích [61] a [28]. Speciálním případem je netlumený systém, kde lze rovnici přepsat do tvaru:

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2)\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.112)$$

Zde lze použít algoritmy pro standardní výpočet vlastních čísel. U netlumeného systému jsou vlastní frekvence reálné, u tlumeného jsou komplexní. Platí, že imaginární část je tlumení a reálná část je frekvence (2.74). Dále platí, že pro každou vlastní frekvenci existuje sdružená vlastní frekvence s obráceným znaménkem reálné části. Vlastní vektory jsou přímo frekvenční amplitudy uzlových akustických tlaků daných tvarů kmitu.

Algoritmy pro řešení problémů vlastních čísel předpokládají konstantní matice. To je komplikace, protože matice tlumení obsahuje informace o akustické impedanci a ta je zpravidla frekvenčně závislá. Úloha je tedy nelineární. V takovém případě je nutné použít jiné postupy, nebo nad řešičem vlastních čísel použít iterační smyčku. Tato smyčka může iterovat matici tlumení, tak aby spočítaná frekvence odpovídala frekvenci v matici tlumení. Tento postup výrazně zpomaluje výpočet.

### 2.8.5 Simulace ustálených kmitů

MKP model je obecně velice vhodný pro simulace. Je nepodstatné, zda jde o strukturní mechaniku, akustiku nebo jiné. Popis je vždy založen na maticích hmotnosti, tlumení a tuhosti, tento tvar je vhodný pro řešení.

Pro potřeby simulací v čase je možné rovnici převést do časové oblasti. Vyjádřit nejvyšší časovou derivaci neznámých hodnot a integrovat ji v čase.

$$\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{P}} - \mathbf{K}\mathbf{P}) \quad (2.113)$$

Pro integraci v čase lze použít libovolné integrační schéma pro obyčejné diferenciální soustavy rovnic druhého řádu. Případně soustavu převést na soustavu prvního řádu.

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Kde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice a  $\mathbf{Z}$  je stavový vektor.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Přímá integrace rovnic je možná jen pokud akustická impedance umožní převod rovnice do časové oblasti.

Druhá možnost je simulace ve frekvenční oblasti. Budící člen se Fourierovou transformací převede do frekvenční oblasti a rovnice se může přímo řešit.

$$\hat{\mathbf{P}} = (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{B} + \mathbf{K})^{-1}\hat{\mathbf{V}} \quad (2.116)$$

Řešení se zpětnou Fourierovou transformací převede do časové oblasti. Každý postup má výhody i nevýhody. V jednom případě je nutné provádět integraci v čase a v druhém Fourierovu transformaci. Výhoda řešení v časové oblasti je neměnnost matice hmotnosti. Její inverze se provede pouze jednou a tento výpočetně náročný krok se neopakuje. Při řešení ve frekvenční oblasti se inverze systémové matice provádí opakovaně, jelikož je frekvenčně závislá. Přesto je to používanější metoda. Často není zapotřebí převádět řešení do časové oblasti, jelikož frekvenční spektrum je názornější výsledek než časový průběh. Volba řešení je individuální.

### 2.8.6 Redukce MKP modelu

Běžné MKP modely jsou tvořeny velkým počtem elementů. Mají, proto značný počet uzlů a stupňů volnosti. Nejsou výjimkou modely, kde počet stupňů volnosti je řádově v milionech. Rozměr matic je totožný s počtem stupňů volnosti, a to je zároveň počet rovnic, které je potřeba vyřešit. Úlohy bývají extrémně výpočetně náročné, proto se většinou počítají na speciálních HPC clusterech k tomu určených.

Pokud není možné zvýšit výpočetní výkon a zároveň je potřeba snížit výpočtový čas, musí se snížit výpočtová náročnost modelu. Toho se dá dobře dosáhnout mnoha způsoby. Většina z nich je spojená se snížením přesnosti modelu. Jako účinný prostředek pro snížení náročnosti je odstranění nelinearity, pokud je model nelineární. Tento postup je velice účinný, ale mnohdy má tato úprava modelu příliš negativní vliv na kvalitu výsledků a lze jí použít pouze u nelineárních modelů. Prakticky tato metoda nemá opodstatnění, jelikož modely se zahrnutými nelineárními účinky, které nejsou důležité, prakticky neexistují.

Asi nejběžnější postup pro snížení náročnosti je změna sítě. Použitím sítě s méně uzly se sníží počet rovnic, které musí být splněny. Určitá analýza citlivosti výsledků na hustotu sítě by měla být samozřejmostí u každého MKP modelování. Začíná se s hrubou sítí a výpočty jsou relativně rychlé. Na základě výsledků se síť upravuje a v místech s vyššími gradienty řešení musí být síť jemnější než na ostatních místech. Během úprav se sleduje konvergence modelu ve smyslu schopnosti nalézt řešení. Dále se sleduje konvergence ve smyslu, zda při zjemňování sítě řešení konverguje. Podle toho se volí finální síť jako kompromis mezi výpočetní náročností a kvalitou modelu.

Pokud i přes optimalizaci výpočetní sítě stále přetrvává požadavek na snížení výpočetní náročnosti, je možné MKP model redukovat na úrovni matematického popisu. Existuje mnoho metod, jak redukovat MKP model. Různé druhy redukcí mají rozdílné vlastnosti a hodí se na různé typy úloh. Některé redukce nesnižují kvalitu modelu vůbec, jiné hodně. Stejně tak se liší vlastní výpočtovou náročností. Není zaručeno, že redukce modelu a výpočet na redukovaném modelu nebude stejně náročný jako výpočet na původním neredukovaném modelu. Větší význam má redukce, pokud je možné model redukovat pouze jednou, a poté se výpočet provádí opakovaně třeba s rozdílnými vstupy. V takovém případě je redukce modelu silný nástroj, který je efektivní i pokud je redukce náročná jako samotný výpočet. Je potřeba si uvědomit, že po redukcii modelu se ztratí možnost mnoho vstupních parametrů ovlivnit, protože se do modelu zahrnuly již před redukcí.

### 2.8.6.1 Modální redukce

Tato metoda využívá transformaci souřadnic a následné zanedbání některých neznámých uzlových hodnot. Zanedbání uzlové hodnoty v tomto smyslu představuje dosažení za danou neznámou nulu. Aby stále odpovídal počet rovnic počtu neznámých, musí se odstranit příslušná rovnice, tak aby matice modelu zůstaly symetrické. Přímé zanedbání některých uzlových hodnot je zásah, který zcela změní model z pohledu fyzikální interpretace. Z tohoto důvodu se nejdříve transformují souřadnice, tak aby existovaly takové, které je možné odstranit bez zásadního poškození modelu.

Modální transformace vycházející z frekvenční analýzy modelu má vlastnosti vhodné pro redukcii modelu. Transformace převede uzlové hodnoty řešení do modálních hodnot. Proveďte se frekvenční analýza netlumeného systému.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.117)$$

Matice tlumení je zanedbána a dohledají se vlastní frekvence  $\omega_i$  a tvary kmitu  $\hat{\mathbf{P}}_i$ . Nechť počet stupňů volnosti modelu je  $n$ . Každá vlastní frekvence má sdruženou vlastní frekvenci, která má obrácené znaménko a stejný tvar kmitu. Dohromady jich je  $2n$ . Po získání všech  $n$  unikátních tvarů kmitu se sestaví modální matice  $\mathbf{U}$  [Pa] netlumeného systému.

$$\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{P}}_1, \dots, \hat{\mathbf{P}}_n] \quad (2.118)$$

Tato matice je čtvercová a regulární. To je postačující předpoklad, aby byla použita jako transformační.

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.119)$$

Vektor  $\hat{\mathbf{P}}_m$  je nový vektor modálních souřadnic. Modální matice je v čase neměnná a proto slouží k transformaci neznámých, ale i jejich derivací. Regularita matice zajistí existenci a jednoznačnost zpětné transformace. Samotná transformace soustavy do nových souřadnic je pouhé dosazení transformačního vztahu do soustavy.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{U}\hat{\mathbf{P}}_m - \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad (2.120)$$

Toto je transformovaná soustava rovnic. Vynásobením zleva transponovanou modální maticí se zachová symetrie matic a rovnice se zjednoduší [37].

$$(-\omega^2 \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} + i\omega \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U})\hat{\mathbf{P}}_m - \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad (2.121)$$

Vlastní vektor (vlastní tvar kmitu  $\hat{\mathbf{P}}_i$ ) není určen jednoznačně. Je možné jej násobit libovolnou konstantou a zůstane vlastním vektorem. Pro jednoznačnost vlastního vektoru se vektor normuje, tak aby platilo:

$$\hat{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{P}}_i = 1 \quad (2.122)$$

Díky vlastnostem rovnice (2.117) a použité normě vlastního vektoru platí praktické vztahy:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{E} \quad (2.123)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Matice hmotnosti se transformuje na jednotkovou a matice tuhosti na spektrální matici [62]. Spektrální matice  $\mathbf{\Lambda}$  [ $s^{-2}$ ] je diagonální matice, která má na diagonále kvadráty vlastních frekvencí. Rovnice tedy přechází do tvaru:

$$(-\omega^2 \mathbf{E} + i\omega \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} + \mathbf{\Lambda})\hat{\mathbf{P}}_m - \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

Úloha bez tlumení se tím diagonalizuje, což zjednoduší její řešení. Složitější situace je u matice tlumení, ta se obecně tímto nedialogalizuje. Existují speciální případy, kdy se matice

tlumení diagonalizuje a systém se rozpadá na samostatné rovnice. Tlumení, při kterém to nastává, se nazývá proporciální. Příkladem proporciálního tlumení v akustice je jeden element se stejnou akustickou impedancí na celém povrchu. Pokud je zájem diagonalizovat matici tlumení, přesunou se mimodiagonální prvky na diagonálu matice. Tím vzniká chyba, její velikost závisí na poměru velikosti diagonálních prvků vůči ostatním. Čím více je diagonálně dominantní matice, tím menší chyba vznikne.

Řešení modelu (uzlové akustické tlaky) v daný časový okamžik lze vždy složit jako lineární kombinace tvarů kmitu. Modální souřadnice mají tu vlastnost, že ukazují zastoupení tvarů kmitu. Tato tvrzení jsou jasně patrná z rovnice (2.119). Při grafickém znázornění tvarů kmitu je vidět, že vyšší tvary (s vyšší frekvencí) mají složitější tvar než nižší tvary. Při vyřešení modelu v modálních souřadnicích je zase vidět, že vyšší souřadnice nabývají menších hodnot než nižší. Toto tvrzení neplatí obecně, ale zpravidla spektrální charakteristika buzení je klesající s frekvencí a potom toto tvrzení bývá platné. Pokud toto tvrzení platí, pak se nabízí jako možnost redukce modelu, odebrání některých tvarů kmitů z modelu. Tedy převedení modelu do modálních souřadnic a vyřazení některých rovnic a neznámých [62]. Následně se redukováný model řeší a výsledky se převedou zpět.

Tato redukce dokáže výrazně snížit velikost modelu při dobrém zachování kvality výsledků. Asi největší nevýhodou je náročnost provedení frekvenční analýzy – vyřešení problému vlastních čísel a vektorů. Proto její uplatnění je například, pokud se zkouší model simulovat s různým buzením. V takovém případě se model pouze jednou zredukuje a transformace budícího vektoru se sice opakuje, ale je nenáročná. Tento typ redukce je vhodný pro dynamické modely, pro statické prakticky nemá význam a pouze komplikuje sestavení modelu a výpočet.

### 2.8.6.2 Guyanova redukce

Předchozí modální redukce zcela odstraňovala některé stupně volnosti. Proto se musel model transformovat do souřadnic, kde jsou některé stupně volnosti méně významné a mohou se odstranit. Guyanova redukce neodstraňuje stupně volnosti, ale eliminuje je z rovnic.

Stupně volnosti modelu se rozdělí na ty, které se zachovají  $\hat{\mathbf{P}}_m$  a ty, které se zredukují  $\hat{\mathbf{P}}_s$  [34]. Pořadí rovnic a neznámých se upraví tak, aby matice hmotnosti, tlumení a tuhosti zůstaly symetrické a vektor neznámých měl tvar:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \\ \hat{\mathbf{P}}_s \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

Toto setřídění lze provést ručně nebo s pomocí permutační matice [37]. Předpokládá se, že v uzlech, které se eliminují není žádné buzení. Celá soustava rovnic přejde do tvaru:

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,m} & \mathbf{M}_{m,s} \\ \mathbf{M}_{s,m} & \mathbf{M}_{s,s} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m,m} & \mathbf{B}_{m,s} \\ \mathbf{B}_{s,m} & \mathbf{B}_{s,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m,m} & \mathbf{K}_{m,s} \\ \mathbf{K}_{s,m} & \mathbf{K}_{s,s} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \\ \hat{\mathbf{P}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Tato metoda se nejčastěji využívá u statických výpočtů, protože pak nevzniká žádná chyba. Pro statiku přejde soustava do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m,m} & \mathbf{K}_{m,s} \\ \mathbf{K}_{s,m} & \mathbf{K}_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \\ \hat{\mathbf{P}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

Z této soustavy lze vyjádřit vztah pro redukované stupně volnosti  $\hat{\mathbf{P}}_s$ :

$$\hat{\mathbf{P}}_s = -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.129)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že  $\hat{\mathbf{P}}_s$  nelze vyjádřit, pokud je  $\mathbf{K}_{s,s}$  singulární. Singularita značí špatnou volbu redukovaných souřadnic. Většinou stačí snížit počet redukovaných parametrů. Transformace  $\mathbf{T}_s$  ze zachovaných stupňů volnosti do původního počtu vypadá následovně [34]:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \\ \hat{\mathbf{P}}_s \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s \hat{\mathbf{P}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.130)$$

Postup transformace je pak analogický s modální transformací. Matice tuhosti se transformuje:

$$\mathbf{K}_{red} = \mathbf{T}_s^T \mathbf{K} \mathbf{T}_s = \mathbf{K}_{m,m} - \mathbf{K}_{m,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} \quad (2.131)$$

U ryze statické úlohy, kde není buzení v eliminovaných uzlech, nedochází ke snížení kvality modelu. U úloh dynamických vznikají nepřesnosti, a to i zásadní. Redukce vychází pouze z matice tuhosti a nijak nerespektuje tvar matice hmotnosti a tlumení. Proto nelze očekávat kvalitu dynamického modelu. Pokud jsou dominantní hmotnosti a tlumení modelu soustředěny do uzlů, které jsou zachovány, potom nejsou výrazně dotčeny výsledky. V opačném případě není tato redukce vhodná pro dynamické úlohy, ale pouze pro statické.

Existuje možnost nezaložit tuto redukci na matici tuhosti (2.128) a (2.129), ale použít celou matici dynamické tuhosti  $(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})$ . V takovém případě je redukce vhodná pro dynamické úlohy. Problém matice dynamické tuhosti je její frekvenční závislost. Tím, že matice dynamické tuhosti není konstanta, by bylo potřeba provést redukci pro každou frekvenci zvlášť. Pokud je budících frekvencí málo, je možné pro tyto frekvence provést redukci a nedochází k chybě. Jestliže je buzení širokopásmové, je tato redukce uplatnitelná pouze v případě, že redukované uzly mají malé zobecněné hmoty a tlumení. V případě, že ani toto není splněno, pak je tato redukce pro dynamiku nevhodná.

Stejně jako u modální redukce je její provedení výpočtově náročné. U statické úlohy je provedení redukce a následné řešení stejně náročné jako řešení neredukovaného modelu. Úspora vznikne až při opakovaném výpočtu. U dynamické úlohy je úspora větší, ale za cenu popsanych problémů.

### 2.8.6.3 IRS redukce

Pro dynamické systémy existuje iterační redukční metoda. Tato metoda se nazývá Improved Reduced System (IRS) a principiálně vychází z Guyanovy redukce. Guyanova redukce je pouhé vyřešení části regulárního jádra statické soustavy a ponechání zbylé části soustavy jako redukovaný model. To je v podstatě triviální záležitost. IRS redukce takto triviální není. Odvození vychází z netlumeného systému, kde se stejně jako u Guyanovy redukce rozdělí neznámé do dvou skupin a hledá se transformační matice  $\mathbf{T}_{IRS}$  [29], pro kterou platí vztah analogický k (2.130). Netlumený systém je ve tvaru:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,m} & \mathbf{M}_{m,s} \\ \mathbf{M}_{s,m} & \mathbf{M}_{s,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m,m} & \mathbf{K}_{m,s} \\ \mathbf{K}_{s,m} & \mathbf{K}_{s,s} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_m \\ \hat{\mathbf{P}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Druhý řádek soustavy má tvar:

$$(\mathbf{K}_{s,m} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,m}) \hat{\mathbf{P}}_m + (\mathbf{K}_{s,s} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,s}) \hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{0} \quad (2.133)$$

Vyjádří se redukované stupně volnosti:

$$\hat{\mathbf{P}}_s = -(\mathbf{K}_{s,s} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,s})^{-1} (\mathbf{K}_{s,m} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,m}) \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.134)$$

Z výrazu se vytkne  $\mathbf{K}_{s,s}^{-1}$ . Při inverzi součinu matic se mění pořadí násobení, proto má výraz tvar:

$$\hat{\mathbf{P}}_s = -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} (\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1})^{-1} (\mathbf{K}_{s,m} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,m}) \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.135)$$

Inverze rozdílu matic se dá použitím binomické věty převést na součet nekonečné řady [58]. Tím se tato inverze odstraní z výrazu. Obor platnosti této nekonečné řady je malý. Předpokládejme pro reálné úlohy, že je řada platná. Z nekonečného součtu se uplatní pouze první dva členy a ostatní se zanedbají.

$$(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\omega^2 \mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1})^k = \mathbf{E} + \omega^2 \mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1} + O(\omega^4) \quad (2.136)$$

Tento výraz se dosadí do rovnice (2.135) a vzniklý tvar se roznásobí. Jelikož se v nekonečné řadě zanedbaly všechny členy, kde byla frekvence ve vyšší mocnině než 2, tak se i zde tyto členy zanedbají [29].

$$\hat{\mathbf{P}}_s = -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} \left( \mathbf{K}_{s,m} + \omega^2 (\mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} - \mathbf{M}_{s,m}) + O(\omega^4) \right) \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.137)$$

Hlavním problémem této transformace je její závislost na frekvenci. Úhlová frekvence se dá z rovnice eliminovat. Předpokládejme existenci výsledného redukovaného modelu. Redukované matice hmotnosti  $\mathbf{M}_{red}$  a tuhosti  $\mathbf{K}_{red}$  jsou zatím neznámé. Homogenní redukovaný model bude ve tvaru:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_{red} + \mathbf{K}_{red}) \hat{\mathbf{P}}_m = \mathbf{0} \quad (2.138)$$

Jednoduchou úpravou lze redukovaný model použít pro eliminaci úhlové frekvence z transformačního vztahu.

$$\omega^2 \hat{\mathbf{P}}_m = \mathbf{M}_{red}^{-1} \mathbf{K}_{red} \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.139)$$

Po dosažení a zanedbání chybového členu přejde transformační vztah do tvaru:

$$\hat{\mathbf{P}}_s = -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} (\mathbf{K}_{s,m} + (\mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} - \mathbf{M}_{s,m}) \mathbf{M}_{red}^{-1} \mathbf{K}_{red}) \hat{\mathbf{P}}_m \quad (2.140)$$

Toto je finální transformační vztah pro dopočítání redukovaných hodnot z neredukovaných. Na základě tohoto vztahu lze vytvořit vztah pro definici transformační matice vyjadřující všechny stupně volnosti.

$$\mathbf{T}_{IRS} = \left[ = -\mathbf{K}_{s,s}^{-1} (\mathbf{K}_{s,m} + (\mathbf{M}_{s,s} \mathbf{K}_{s,s}^{-1} \mathbf{K}_{s,m} - \mathbf{M}_{s,m}) \mathbf{M}_{red}^{-1} \mathbf{K}_{red}) \right] \quad (2.141)$$

Tento vztah lze přepsat do úspornějšího tvaru [29].

$$\mathbf{T}_{IRS} = \mathbf{T}_s + \mathbf{SMT}_s \mathbf{M}_{red}^{-1} \mathbf{K}_{red} \quad (2.142)$$

Parametr  $\mathbf{T}_s$  je transformační matice definovaná vztahem (2.130),  $\mathbf{M}$  je matice hmotnosti neredukovaného systému,  $\mathbf{M}_{red}$  a  $\mathbf{K}_{red}$  jsou matice redukovaného modelu. Matice  $\mathbf{S}$  je definována vztahem:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{s,s}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

Je-li definována hledaná transformační matice  $\mathbf{T}_{IRS}$ , mohou se použít již známé a používané vztahy pro transformaci (redukci) modelu.

$$\mathbf{K}_{red} = \mathbf{T}_{IRS}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{IRS} \quad (2.144)$$

$$\mathbf{M}_{red} = \mathbf{T}_{IRS}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{IRS} \quad (2.145)$$

Tento postup naráží na jeden problém. Během odvození byl učiněn předpoklad, že matice redukovaného systému jsou již známé. To není pravda, cílem odvození je nalézt vztahy pro tyto matice. Transformační matice je funkcí redukovaného systému. Důsledkem toho mají i výrazy pro redukované matice na pravé straně neznámé. Rovnice (2.144), (2.145) nejsou explicitním vyjádřením redukovaného systému, ale implicitním vztahem. Tento vztah se řeší prostou iterační metodou. Jelikož nelze provést první iteraci IRS metodou, protože neexistuje transformační matice, tak se provádí první iterace statickou metodou (2.130), (2.131) neboli Guyanovou redukcí. Tím se získají redukované matice pro další iterace, které se provádějí již IRS metodou. Iterační schéma popisuje následující rovnice.

$$\mathbf{T}_{IRS,i+1} = \mathbf{T}_s + \mathbf{SMT}_s \mathbf{M}_{red,i}^{-1} \mathbf{K}_{red,i} \quad (2.146)$$



Nově získaná transformační matice  $T_{IRS,i+1}$  se použije pro redukci modelu (2.144), (2.145). Takto vzniklý redukováný model se znovu použije do další iterace (2.146) a postup se opakuje.

Ukončovací podmínka iterační metody může být stanovena na základě citlivostní studie výsledků redukováného modelu na počtu iterací. Zkušenosti s touto metodou ukazují, že postačují jednotky iterací a redukováný model se mění minimálně.

Existují modifikace popsané IRS metody. Konvergenci iterační metody je možné ovlivnit modifikací iteračního schématu. Rovnice (2.146) obsahuje statické transformační matice. Pokud se tyto statické matice nahradí nejnovějšími IRS transformačními maticemi, získá se podobný vztah, který může konvergovat lépe [9].

$$T_{IRS,i+1} = T_{IRS,i} + SMT_{IRS,i} M_{red,i}^{-1} K_{red,i} \quad (2.147)$$

Existuje ještě dynamická IRS redukce, která se nezakládá na statické Guyanově redukci, ale na redukci při nenulové frekvenci. Tato redukce je stejně náročná jako normální IRS, ale vykazuje lepší chování redukováného modelu v okolí zvolené frekvence pro redukci. Normální IRS metoda má nejlepší výsledky pro nízké frekvence a s rostoucí frekvencí rostou chyby modelu.

Celkově je IRS metoda velmi kvalitní a vhodná pro dynamické úlohy. Na rozdíl od Guyanovy metody není její odvození triviální a je v něm použito několik předpokladů, které je nutné zohlednit při použití. Guyanova metoda je pro statický model ryze analytická. IRS metoda vychází z netlumeného dynamického systému. U tlumeného modelu proto musí vznikat nepřesnosti. Během odvození se jeden člen v rovnici nahradil nekonečnou řadou (2.135). Tato řada se dá odvodit z binomické věty nebo jako Taylorův polynom. Oba postupy vedou na stejný součet nekonečné řady. Je důležité vědět, že konvergence této řady je pouze na malém definičním oboru. V odvození se uvažují pouze první dva členy této řady a ostatní se zanedbávají, to je de-facto linearizace. Tím se odstranil problém malého definičního oboru, ale tato úprava generuje chybu, která roste s frekvencí. Proto platí tvrzení, že IRS vykazuje nejlepší výsledky pro nižší frekvence a dynamická IRS vykazuje nejlepší výsledky v okolí frekvence, na které je odvozena. Dalším předpokladem v odvození, který není plně korektní, je rovnice (2.138), která je použita pro úpravu transformačních vztahů. Původní model, který se redukuje, nemusí být homogenní. Pokud se redukováný model používá jako homogenní, tak tento předpoklad je korektní.

### 3. Cíle práce

Současný trend výzkumu lidského hlasu je silně zaměřený na kvalitu výsledků. Autoři vytvářejí velice podrobné modely a zaměřují se na přesný popis vybraného problému. Jak jde výzkum dopředu, zlepšují se výpočetní možnosti, modely popisují zároveň samobuzené kmity hlasivek a proudění, zatímco dřív se jednotlivé části vokálního traktu musely řešit samostatně. V tomto ohledu jde tato práce proti současnému trendu. Cílem není vytvořit univerzální komplexní model celého systému. Cílem je analyzovat akustické vlastnosti vokálního traktu bez hlasivek. K těmto analýzám se dnes využívá téměř výhradně MKP. Princip MKP byl podrobně popsán v předchozí kapitole. Pro diskretizaci kontinua metodou konečných prvků je potřeba velký počet elementů a vzniklý model má velký počet stupňů volnosti. Tento počet udává výpočtovou náročnost. Hlavním cílem práce je snížit výpočtovou náročnost MKP modelu vokálního traktu. Jednou z možností je redukce sestaveného modelu. Popsané redukční metody MKP modelů jsou funkční nástroje odzkoušené ve vědeckých publikacích i v průmyslu. Všechny vycházejí z předpokladu, že je sestavený plný neredukovaný model, se kterým se pracuje. Samotná redukce plného modelu může být v mnoha situacích srovnatelně náročná jako výpočet na neredukovaném modelu. Proto je hlavní uplatnění při opakovaných analýzách, kde se redukce provede pouze jednou. Pro případ jediné analýzy většinou není výhodné model redukovat. Významným omezujícím prvkem redukčních metod je nemožnost úprav redukováného modelu. Zpravidla je možné měnit některé okrajové podmínky, ale třeba geometrii modelu nikoliv. Větší změna modelu znamená znovu redukovat model.

Popsané nevýhody redukčních metod vedly k rozhodnutí, že cílem práce je rovnou vytvářet menší modely. Snížení výpočtové náročnosti je docíleno použitím elementu, který je vytvořen s ohledem na charakter geometrie vokálního traktu. Hlavní cíl je tedy formulace elementu pro metodu konečných prvků, který umožní sestavovat MKP modely s nižším počtem stupňů volnosti. Tyto modely musí být vhodné pro akustické analýzy vokálních traktů ve frekvenční oblasti významné pro lidský hlas. Dalším požadavkem na vytvořený element je schopnost modelovat vokální trakt včetně k němu připojených kavit, které se běžně ve výzkumných pracích zanedbávají.

Paralelně s vývojem nového elementu budou vytvořeny modely akustiky vycházející z analytického řešení 1D vlnové rovnice. Takový model netrpí chybou diskretizace a je výpočtově efektivní. To vše je vykoupeno negativy plynoucími z 1D rovnice. Výsledky tohoto a MKP modelu budou použity pro srovnání.

Dalším cílem je použití obou metod sestavení akustických modelů na reálné geometrii vokálního traktu, a tím potvrzení použitelnosti nového elementu. Reálná geometrie bude použita jak bez větvení, tak i s přidanými kavitami. Dále využití numerické efektivity modelů pro řešení inverzní úlohy. Touto úlohou je myšleno hledání geometrické konfigurace vokálního traktu pro vznik optimálních akustických vlastností lidské fonace. Specifickou hlasovou schopností je pěvecký formant. Jedním z cílů je potvrdit obecně uznávané podmínky potřebné pro jeho existenci. Poslední cíl je provést stručné porovnání MKP modelu s běžnými elementy a nově vyvinutým elementem. Toto porovnání bude na úrovni velikosti vzniklého matematického popisu. Velikost matematického popisu modelu je úměrná výpočtové

náročnosti a tím i výpočtovým časům, které jsou ale i závislé na dalších parametrech, jako je výpočetní výkon, optimalizace MKP programu a podobně.

Cíle práce lze tedy shrnout bodově:

1. Formulovat nový element pro metodu konečných prvků. Tento element musí být vhodný pro akustické analýzy vokálních traktů a musí dokázat snížit velikost úlohy v porovnání s běžně používanými elementy.
2. Ověřit schopnost diskretizovat složitou geometrii vokálního traktu odvozenými elementy. Použitím geometrií vokálního traktu bez paralelních kavit i s nimi.
3. Využít úspory výpočtových nároků pro výpočet potřebné geometrie vokálního traktu k dosažení požadovaných akustických vlastností.
4. Potvrdit obecně uznávané podmínky vzniku pěveckého formantu.

## 4. Návrh úpravy výpočtu pomocí metody konečných prvků

MKP výpočty akustiky vokálních traktů jsou specifické úlohy. Tato specifika jsou v charakteristické geometrii, kterou lze popsat jako zakřivený kanál, jehož podélný rozměr je dominantní vůči příčným rozměrům. Průřez je odlišný od kruhového a obsahuje mnoho rozvětvení, kde většina větví je krátká a zaslepená. Další specifikum akustiky vokálních traktů je frekvenční spektrum, které se v úlohách analyzuje. Významné jsou frekvence mezi 200 Hz a 6000 Hz, to odpovídá vlnovým délkám 0.06 m až 1.75 m. Podle toho se volí hustota sítě. Nejvyšší vlastní tvary kmitu jsou pro fonaci nejvýznamnější, protože buzení je nejintenzivnější v nízkých frekvencích. Nejvyšší frekvence mají tvary kmitu, kde se tlaková vlna pohybuje ve směru největšího rozměru vokálního traktu, takové tvary jsou nejsnáze vybuditelné hlasivkami a vyzáří nejvíce energie do vnějšího prostoru. Příčné tvary kmitu jsou v přenosových charakteristikách méně výrazné. Z těchto důvodů se běžně používají 1D modely vokálních traktů.

Všechny tyto poznatky vedly k úvaze, zda neexistuje element pro MKP, který by byl vhodný pro akustiku vokálních traktů. Požadavkem na takový element je schopnost popsat složitý tvar průřezu vokálního traktu. Dále schopnost analyzovat podélné i příčné tvary kmitu, s tím, že na kvalitu popisu příčných tvarů není kladen takový důraz jako na tvary podélné. To při požadavku na nízký počet stupňů volnosti modelu. Použití nejrozšířenějších elementů vede k modelům o vysokém počtu elementů, protože k popisu tvaru průřezu jich musí být v jediném řezu velmi mnoho. Aby byla zachována dobrá podmíněnost elementu, musí být jeho rozměry ve všech směrech podobné, proto musí být elementů velmi mnoho i v podélném směru, i když se v tomto směru nemění tvar průřezu. To je zjednodušeně řečeno, proč má MKP model s běžnými elementy vokálního traktu tisíce stupňů volnosti. Při použití redukce může mít MKP model jen desítky stupňů volnosti. Náročnost sestavení modelu roste s počtem stupňů volnosti a náročnost redukce roste s počtem redukovaných stupňů volnosti.

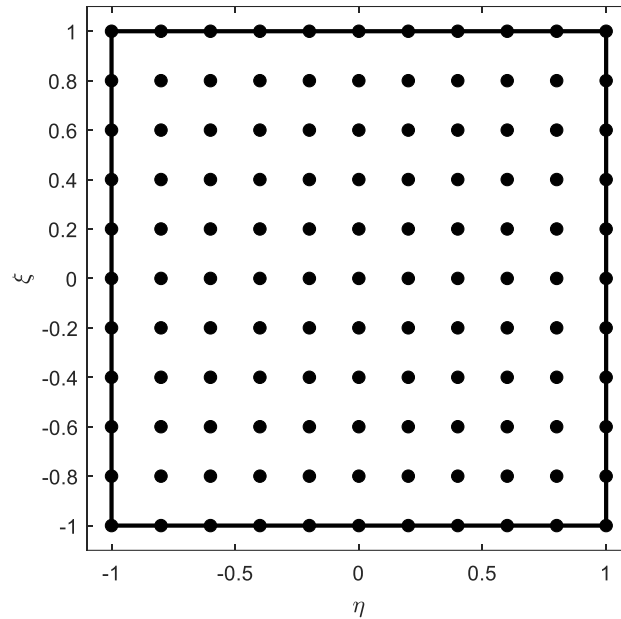
Byl definován požadavek, aby nový element popisoval celý průřez vokálního traktu v daném místě. V případě modelu bez větvení by pak hustota sítě byla dána pouze počtem elementů v podélném směru vokálního traktu. Pro definici tvaru průřezu je nutný dostatečný počet uzlů po obvodě. Uvnitř průřezu teoreticky žádný uzel není potřebný. Tím, že budou uzly pouze na povrchu modelu, bude dobře popsáno podélné rozložení akustického tlaku, ale příčné rozložení bude méně přesné.

### 4.1 Element založený na úpravě nelineárního šestistěnu

V MKP jsou dnes velice rozšířené izoparametrické prvky [6]. Tyto prvky mají tu vlastnost, že uzly definující geometrii prvku jsou totožné s uzly, ve kterých se hledá řešení. Tato vlastnost je využita při transformaci geometrie prvku, která bude ještě popsána. Nejjednodušší prostorový prvek pro odvození je lineární šestistěn. Tento prvek má 8 uzlů ve vrcholech a lineární tvarové funkce. Pokud se v libovolném směru zvýší stupeň polynomu tvarových funkcí, zvýší se i počet uzlů v tomto směru. Tím je možné vytvořit prvek, který bude

v jednom směru pouze lineární a v ostatních směrech bude mít vysoký stupeň tvarových funkcí i počet uzlů.

Izoparametrické prvky se definují ve svém bezrozměrném lokálním souřadném systému ( $\eta \in \langle -1,1 \rangle, \xi \in \langle -1,1 \rangle, \zeta \in \langle -1,1 \rangle$ ) a poté se transformují do geometrické konfigurace, kterou mají v modelu. Jako první testovací element byl vybrán čtvercový element, který je v osách  $\eta, \xi$  popsán polynomem 10. stupně a v poslední ose je lineární. Takový prvek má ve dvou směrech 11 uzlů a v jednom směru 2 uzly (obrázek 4.1). Dohromady má 242 uzlů, z toho pouze 80 na obvodě.



Obrázek 4.1 Zobrazení uzlů v rovině  $\eta - \xi$  elementu 11x11x2

Tento element má vektor tvarových funkcí složený z 242 prvků, tedy pro každý uzel jednu funkci. Všechny tyto funkce musí splňovat podmínku, která říká, že ve svém uzlu mají hodnotu 1 a ve všech ostatních uzlech mají hodnotu 0. Další podmínka je, že součet všech tvarových funkcí musí být 1 v celém objemu elementu. Postupů pro odvození tvarových funkcí je více. Jeden z možných je následující, kdy se definují polohy všech uzlů v lokálních souřadnicích, to znamená všechny kombinace těchto souřadnic:

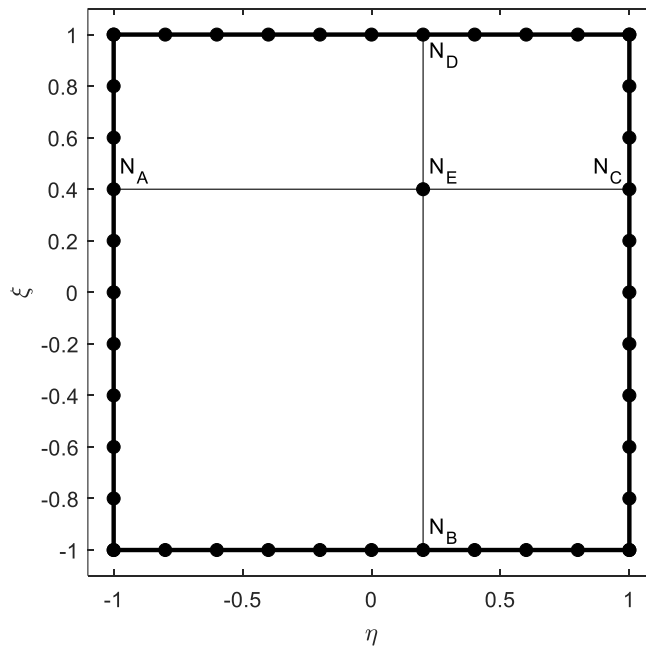
$$\begin{cases} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{cases} = \begin{cases} [-1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1] \\ [-1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1] \\ [-1, 1] \end{cases} \quad (4.1)$$

Zvolí se pořadí uzlů, kde každý uzel má definovanou polohu. Poté tvarová funkce  $i$ -tého uzlu bude následující:

$$N_i(\eta, \xi, \zeta) = \frac{\prod_{\eta_j \in \{\forall \eta\} - \{\eta_i\}} (\eta_j - \eta) \prod_{\xi_j \in \{\forall \xi\} - \{\xi_i\}} (\xi_j - \xi) \prod_{\zeta_j \in \{\forall \zeta\} - \{\zeta_i\}} (\zeta_j - \zeta)}{\prod_{\eta_j \in \{\forall \eta\} - \{\eta_i\}} (\eta_j - \eta_i) \prod_{\xi_j \in \{\forall \xi\} - \{\xi_i\}} (\xi_j - \xi_i) \prod_{\zeta_j \in \{\forall \zeta\} - \{\zeta_i\}} (\zeta_j - \zeta_i)} \quad (4.2)$$

Operátor součinu se vždy aplikuje pro všechny hodnoty souřadnic (4.1), vyjma té souřadnice, na které leží daný uzel. Tím se získají tvarové funkce elementu, který má uzly ve dvou rovinách a každou tuto rovinu zobrazuje obrázek 4.1.

Cílem bylo vytvořit element, který neobsahuje žádné vnitřní uzly ve výsledném modelu. Je tedy potřeba odstranit všechny uzly, které neleží na hraně elementu. Eliminace uzlů není triviální odstranění vybrané tvarové funkce z vektoru tvarových funkcí. Při pouhém odstranění by v odebraném uzlu nikdy nemohla existovat žádná veličina, jelikož všechny ostatní tvarové funkce tam jsou nulové. Tvarová funkce nadbytečného uzlu musí být váhově rozdělena a vzniklé složky přičteny k ponechaným tvarovým funkcím.



Obrázek 4.2 Eliminace uzlu  $N_E$  z elementu

Funkci vnitřního eliminovaného uzlu přebírají okrajové uzly ležící na totožných osách. Obrázek 4.2 zobrazuje příklad eliminace jednoho uzlu. Tvarové funkce eliminovaného uzlu  $N_E$  se přesunou k tvarovým funkcím uzlů  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_C$  a  $N_D$ . Protože po dokončení eliminací všech vnitřních uzlů zůstanou na spojnicích z obrázku vždy jen 2 uzly, znamená to, že na těchto spojnicích je výsledný element lineární. Linearita umožní volit váhové koeficienty proporcionalně vůči vzdálenostem od krajních uzlů. Následující vztahy ukazují, jak se eliminuje uzel z obrázku.

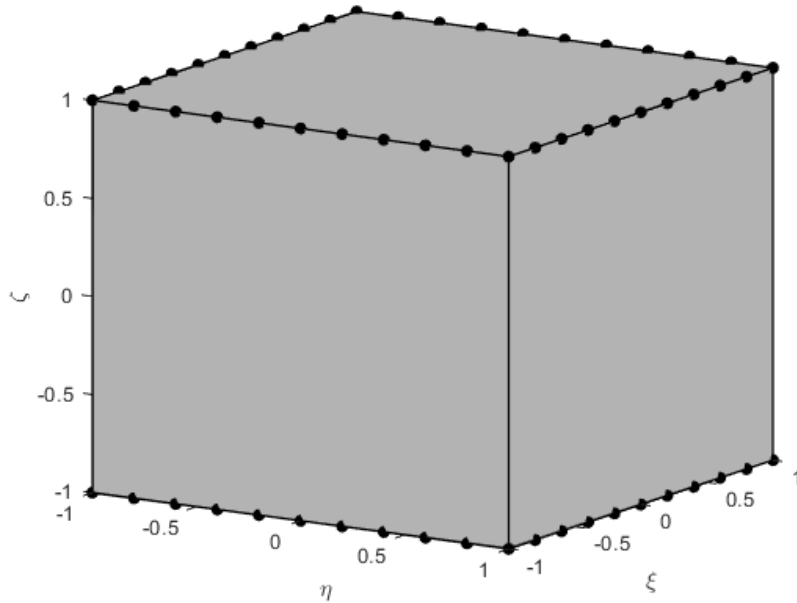
$$N_A(\eta, \xi, \zeta) = N_{A_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1 - \eta_E}{4} N_E(\eta, \xi, \zeta) = N_{A_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1}{5} N_E(\eta, \xi, \zeta) \quad (4.3)$$

$$N_B(\eta, \xi, \zeta) = N_{B_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1 - \xi_E}{4} N_E(\eta, \xi, \zeta) = N_{B_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{3}{20} N_E(\eta, \xi, \zeta) \quad (4.4)$$

$$N_C(\eta, \xi, \zeta) = N_{C_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1 + \eta_E}{4} N_E(\eta, \xi, \zeta) = N_{C_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{3}{10} N_E(\eta, \xi, \zeta) \quad (4.5)$$

$$N_D(\eta, \xi, \zeta) = N_{D_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1 + \xi_E}{4} N_E(\eta, \xi, \zeta) = N_{D_0}(\eta, \xi, \zeta) + \frac{7}{20} N_E(\eta, \xi, \zeta) \quad (4.6)$$

Parametry  $N_{A_0}$  a  $N_A$  jsou tvarové funkce uzlu A před a po eliminaci, analogicky jsou označeny tvarové funkce ostatních uzlů z obrázku. Tímto postupem se eliminují všechny nežádoucí uzly. Výsledkem je element s 80 uzly. Tento element (obrázek 4.3) dokáže postihnout složitý průřez vokálního traktu s relativně nízkým počtem stupňů volnosti.



Obrázek 4.3 Výsledný element

Izoparametrický element je vždy odvozen v lokálním souřadném systému a v referenční geometrii. U šestistěnných elementů je referenční geometrie krychle o straně 2 a se středem v počátku souřadného systému. V modelu má element obecně jinou geometrickou konfiguraci. Může být jinak veliký, protáhlý a různě zakřivený. Přejít z referenční geometrie do skutečné je realizován transformací souřadného systému. Při znalosti tvarových funkcí elementu jsou tyto transformace triviální záležitostí. Tvarové funkce zajišťují převod uzlových hodnot libovolné veličiny na pole této veličiny v celém objemu elementu. Rovnice (2.78) ukazuje příklad uzlových akustických tlaků na pole akustického tlaku. Tento princip lze použít na libovolnou veličinu, a tedy i polohu elementu. Dosadí-li se za uzlové hodnoty poloh uzlů, získá se převod lokálních souřadnic do reálných poloh elementu. Protože poloha elementu je vektorová veličina, musí se transformace provést pro každou složku zvlášť.

$$x(\eta, \xi, \zeta) = \mathbf{N}_e(\eta, \xi, \zeta) \mathbf{X}_e \quad (4.7)$$

$$y(\eta, \xi, \zeta) = \mathbf{N}_e(\eta, \xi, \zeta) \mathbf{Y}_e \quad (4.8)$$

$$z(\eta, \xi, \zeta) = \mathbf{N}_e(\eta, \xi, \zeta) \mathbf{Z}_e \quad (4.9)$$

Souřadnice  $x, y, z$  jsou polohou (v globálním souřadném systému) místa definovaného souřadnicemi  $\eta, \xi, \zeta$  (v lokálním souřadném systému). Řádkový vektor  $\mathbf{N}_e$  je vektor tvarových funkcí elementu (2.76) a  $\mathbf{X}_e, \mathbf{Y}_e, \mathbf{Z}_e[m]$  jsou sloupcové vektory poloh uzlů.

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_e = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Vyjádření kompletního polohového vektoru bodu v elementu může být následující:

$$\mathbf{r}(\eta, \xi, \zeta) = \begin{bmatrix} x(\eta, \xi, \zeta) \\ y(\eta, \xi, \zeta) \\ z(\eta, \xi, \zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_e^T \\ \mathbf{Y}_e^T \\ \mathbf{Z}_e^T \end{bmatrix} \mathbf{N}_e^T(\eta, \xi, \zeta) \quad (4.11)$$

Hlavní výhodou izoparametrických prvků je, že se nemusí odvozovat v komplikované geometrické konfiguraci, ale vždy se odvodí v jednoduché referenční konfiguraci. Nemusí se složitě hledat vztahy pro geometrickou transformaci. Transformaci geometrie zajistí samotné tvarové funkce.

Přirozenou omezující podmínkou je nutnost regularity této transformace. Regularita transformace představuje existenci zpětné transformace a jednoznačnost obou transformací. Regularitu lze ověřit analýzou Jacobiho matice. Jacobiho matice  $\mathbf{J}[m]$  je matice parciálních derivací transformace, která je definovaná vztahem:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

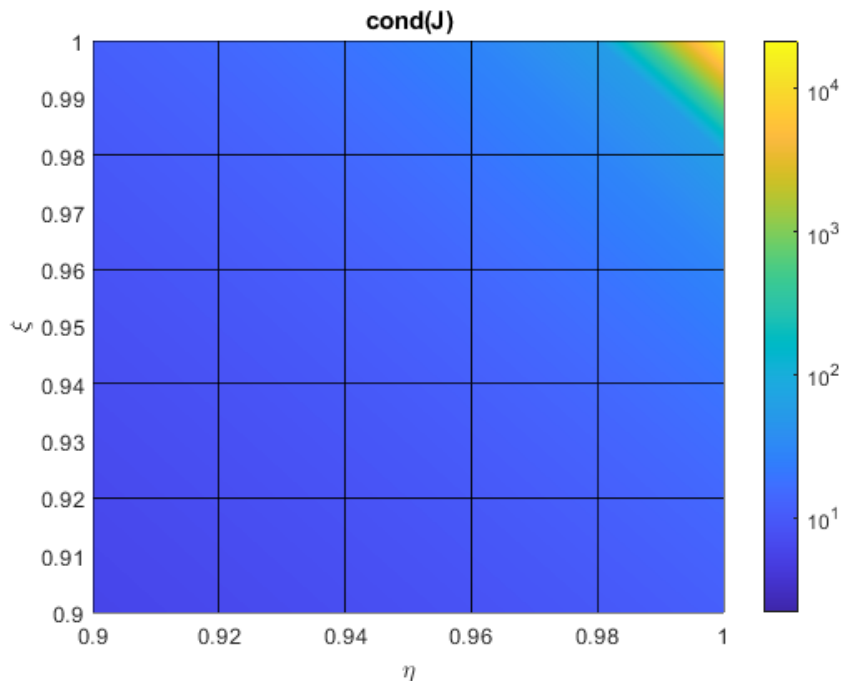
Jacobiho matice může být explicitně spočítána využitím tvarových funkcí a poloh uzlů:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e[\mathbf{X}_e \quad \mathbf{Y}_e \quad \mathbf{Z}_e] \quad (4.13)$$

Podmínkou regularity elementu je tedy regulární Jacobiho matice v celém objemu elementu. Špatná podmíněnost matice (blízkost singularit) neznemožňuje výpočet, ale má negativní vliv na kvalitu výsledků. Kvalitu každého elementu je při tvorbě modelu nutné kontrolovat, protože až na výjimečné případy singularita nebrání sestavení modelu a výpočtu. Vliv singularit elementů na výsledky modelu je těžko odhadnutelný.

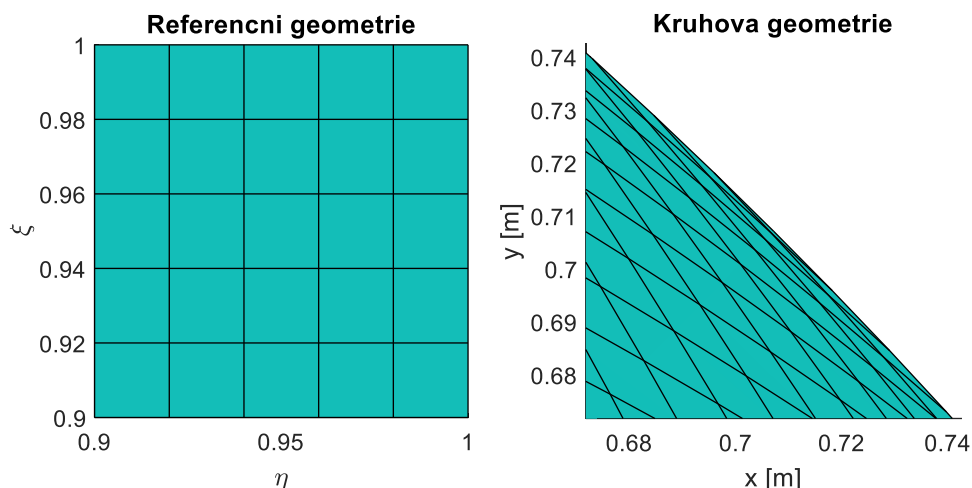


Vytvořený element má v referenční geometrii čtvercový průřez a je potřeba otestovat, jestli je možné element transformovat do tvarů reálného vokálního traktu. Provede se tedy jednoduchý test, kdy se zkontroluje regularita na testovacích průřezech. Jelikož je v podélném směru lineární, a nemá v podélných stěnách uzly, stačí test provést na zjednodušeném 2D elementu s uzly po obvodě.



Obrázek 4.4 Podmíněnost elementu v jeho vrcholu při transformaci na kružnici/válec o poloměru 1 m

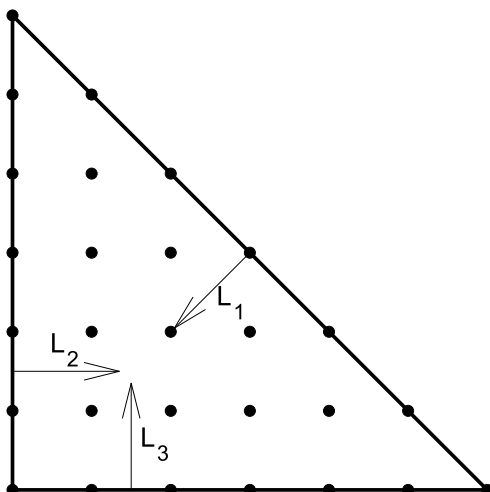
Jako první testovací tvary byly použity obdélníky různých velikostí a poměrů stran. Tento tvar je standardní v MKP a dle očekávání funguje s novým elementem spolehlivě. Další základní tvar je kruh nebo elipsa. Pokud se element transformuje do kružnice, tak vzniká problém. Obrázek 4.4 zobrazuje podmíněnost v okolí vrcholu ( $\eta = \xi = 1$ ) elementu. Podmíněnost je zobrazena v referenčním souřadném systému. Element měl původně hrany vzájemně kolmé a transformace je mění na prakticky rovnoběžné (obrázek 4.5). To je zásadní změna a dle analýzy jsou všechny vrcholy singulární. Singularita nastává přesně ve vrcholech a už v těsné blízkosti těchto bodů je element regulární. Podmíněnost ve vzdálenosti pouhých 0.0005 m od singulárních bodů je na hodnotách okolo 20. Taková podmíněnost není omezující ve výpočtu. Analýza ukázala, že element při kruhovém průřezu vokálního traktu není regulární, ale singularita není v ploše nebo objemu. Při modelování válce by singulární oblasti měly míru v jedné dimenzi. Vokální trakt má tvary průřezů obecně komplikovanější než kruhové. Je možné, že by tyto singularity neovlivnily kvalitu výsledků analýz vokálního traktu. To testováno nebylo, jelikož i přes dobré výsledky by model nebyl matematicky korektní. Problematika geometrické interpretace singularit je popsána v [6].



Obrázek 4.5 Zobrazení kritického místa elementu před a po geometrické transformaci. zobrazení jasně ukazuje, jak se element zplošťuje v kritickém místě. Z geometrického významu Jacobiánu je patrné, že v kritickém místě je nulový.

#### 4.2 Nelineární trojúhelníkový element lineárně vysunutý do prostoru

Problém, kdy se původně kolmé hrany elementu narovnávají do velmi tupých úhlů v modelu (obrázek 4.5), bude u krychlového izoparametrického elementu vznikat vždy. Proto vznikl nový návrh elementu. Ustoupilo se od myšlenky jediného elementu pro celý průřez a jsou použity řádově jednotky elementů. Dále není dodržen předpoklad uzlů pouze na vnějším obvodu průřezu a je použit jeden uzel uvnitř v průřezu navíc. Průřez bude postaven na trojúhelníkových elementech v 2D referenční geometrii [104], [105]. V jednom průřezu je použito šest elementů, které sdílejí jeden společný vrchol. Na hranách vycházejících ze společného vrcholu nejsou žádné uzly. Na hraně protilehlé společnému vrcholu je uzlů více, tyto uzly tvoří vnější obvod průřezu. Do třetí dimenze je element vysunut lineárními tvarovými funkcemi. Odvozovaný element vychází z trojúhelníkového elementu, aby měl výsledný průřez rozumný počet uzlů po obvodě, byly zvoleny tvarové funkce stupně 6 (obrázek 4.6). Plný trojúhelníkový 2D element bez redukovaných uzlů obsahuje  $n(n + 3)/2 + 1$  uzlů, kde  $n$  je stupeň polynomu tvarových funkcí. V tomto případě má plný element 28 uzlů.



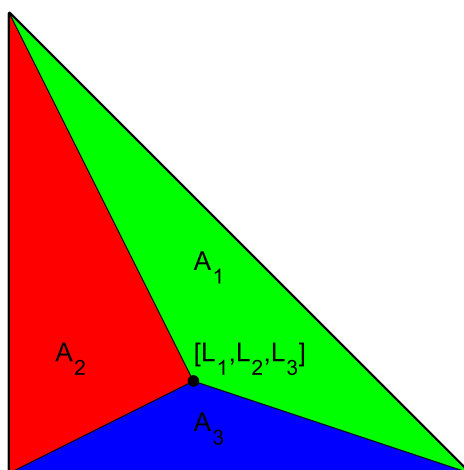
Obrázek 4.6 Plný rovinný element 6. řádu.

U trojúhelníkových elementů je pro odvození tvarových funkcí praktické používat plošné souřadnice. To je soustava 3 přeurtčených souřadnic ( $L_1, L_2, L_3$ ) v rovině. Tyto souřadnice jsou definovány jako poměry ploch v trojúhelníku (obrázek 4.7).

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad (4.14)$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} \quad (4.15)$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (4.16)$$



Obrázek 4.7 Definice plošných souřadnic

V rovině můžou existovat maximálně dvě nezávislé souřadnice. Z toho plyne, že pro tuto soustavu souřadnic musí existovat jedna vazbová podmínka. Celková plocha trojúhelníku  $A$  je součet dílčích ploch  $A_i$ . To definuje vazbovou podmínku.

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (4.17)$$

Algoritmus odvození tvarových funkcí pro trojúhelníkový element o libovolném stupni tvarových funkcí je odvozený v publikaci [68]. Tento algoritmus předpokládá existenci všech vnitřních uzlů pro daný stupeň elementu. Pokud některé uzly nejsou žádané, musí se eliminovat až po odvození plného elementu. Dalším předpokladem je rovnoměrné rozložení uzlů. Obrázek 4.6 zobrazuje použitý element 6. stupně, je vidět, že obsahuje všechny uzly a že jsou rovnoměrně rozloženy.

Prvním krokem algoritmu je vytvoření pořadí uzlů. Pořadí je libovolné, každému uzlu se přiřadí souřadnice  $L_1, L_2, L_3$ . Ze souřadnic uzlů se spočítají parametry  $\alpha, \beta, \gamma$  ke každému uzlu.

$$\alpha = nL_1 \quad (4.18)$$

$$\beta = nL_2 \quad (4.19)$$

$$\gamma = nL_3 \quad (4.20)$$

Parametry  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vhodné pro kontrolu výpočtu souřadnic uzlů. Pokud se spočítají pro každý uzel, vždy musí platit následující tvrzení. Parametry  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vždy celočíselné, jejich součet je  $n$  a jejich kombinace je v každém uzlu jiná. Pokud některé z těchto pravidel není splněno, musela někde vzniknout chyba. Nyní je možné vyjádřit explicitní vztah pro tvarovou funkci uzlu.

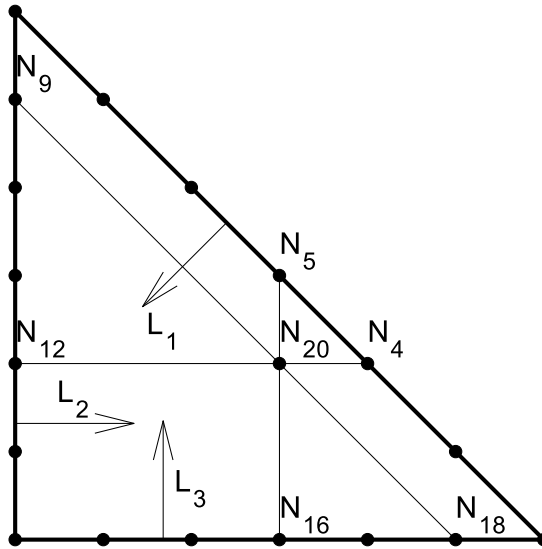
$$N_i(L_1, L_2, L_3) = \eta_{\alpha_i}(L_1)\eta_{\beta_i}(L_2)\eta_{\gamma_i}(L_3) \quad (4.21)$$

Kde:

$$\eta_{\alpha_i}(L_1) = \prod_{i=1}^{\alpha_i} \left( \frac{nL_1 - i + 1}{i} \right) \text{ pro } \alpha_i \geq 1 \quad (4.22)$$

$$\eta_{\alpha_i}(L_1) = 1 \text{ pro } \alpha_i = 0$$

Funkce  $\eta_{\beta_i}$  a  $\eta_{\gamma_i}$  jsou definovány analogicky k funkci  $\eta_{\alpha_i}$ . Parametry  $\alpha, \beta, \gamma$  určují, pro který uzel je daná tvarová funkce platná. Tímto postupem vznikne plnohodnotný element. Jelikož je cílem vytvořit element, který nemá všechny uzly, přichází na řadu eliminace nadbytečných.



Obrázek 4.8 Eliminace uzlu 20 s tvarovou funkcí  $N_{20}$

Eliminace vnitřních uzlů je na trojúhelníkové geometrii pracnější než u čtvercové. Obrázek 4.8 ukazuje příklad eliminace uzlu 20. Tvarové funkce se rozdělí a přičtou k uzlům 4,5,9,12,16 a 18. Poměr, jak se tvarové funkce rozloží, je daný z následujících vztahů.

$$N_4 = N_{4_0} + \frac{1}{3} \frac{\beta_{20}}{\beta_4} N_{20} \quad (4.23)$$

$$N_5 = N_{5_0} + \frac{1}{3} \frac{\gamma_{20}}{\gamma_5} N_{20} \quad (4.24)$$

$$N_9 = N_{9_0} + \frac{1}{3} \frac{\gamma_{20}}{\gamma_9} N_{20} \quad (4.25)$$

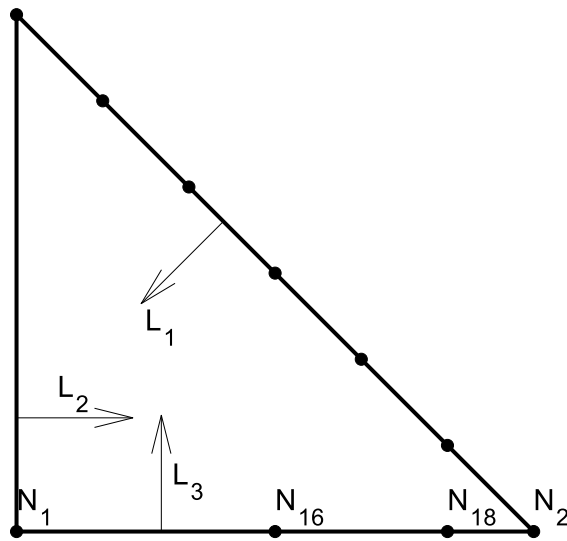
$$N_{12} = N_{12_0} + \frac{1}{3} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{12}} N_{20} \quad (4.26)$$

$$N_{16} = N_{16_0} + \frac{1}{3} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{16}} N_{20} \quad (4.27)$$

$$N_{18} = N_{18_0} + \frac{1}{3} \frac{\beta_{20}}{\beta_{18}} N_{20} \quad (4.28)$$

Postup, jak je vidět, je analogický k eliminaci ve čtverci. Eliminační vztahy mají pevnou strukturu. Jediné co nemusí být na první pohled zřejmé, je zda ve vztahu má být použit parametr  $\alpha$ ,  $\beta$  nebo  $\gamma$ . To se dá určit pohledem na schéma, nebo numerickým testem. Vždy jen jedna z těchto tří možností má použitelný výsledek. V jednom případě se vždy dělí nulou, v druhém případě vyjde 1 a ve třetím případě číslo z intervalu (0,1). Výsledek třetího případu je jediný možný. Algoritmus eliminace uzlů není jednoznačný, schémat pro eliminaci je možné vytvořit více. Možná alternativa je nepoužít uzly 9 a 18. To se provede vynecháním příslušných

vztahů a v ostatních eliminačních vztazích se nahradí  $1/3$  za  $1/2$ . Smysl této nesystematicky vypadající změny souvisí s rozložením významu uzlů.



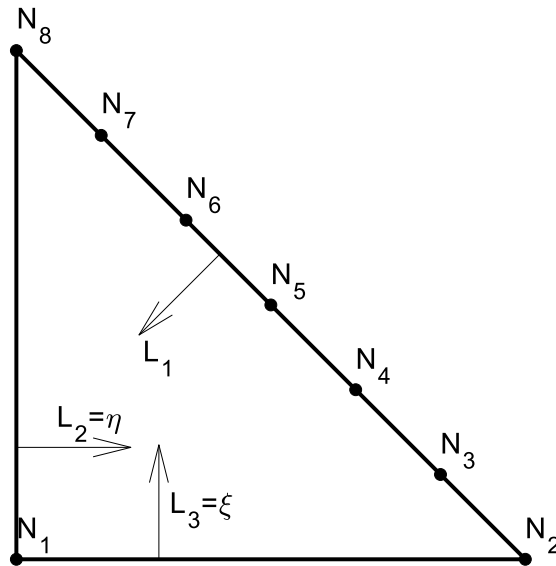
Obrázek 4.9 Eliminace uzlů v hraně

Hledaný trojúhelníkový element má uzly pouze ve vrcholech a jedné straně, proto musí proběhnout ještě jedna fáze eliminace. Obrázek 4.9 znázorňuje schéma pro eliminaci uzlů 16 a 18. Tím navazuje na eliminaci vnitřních uzlů. Potřebné vztahy jsou znovu pouze váhovým rozkladem tvarových funkcí a přičtením k ostatním.

$$N_1 = N_{10} + \frac{\alpha_{16}}{\alpha_1} N_{16} + \frac{\alpha_{18}}{\alpha_1} N_{18} \quad (4.29)$$

$$N_2 = N_{20} + \frac{\beta_{16}}{\beta_2} N_{16} + \frac{\beta_{18}}{\beta_2} N_{18} \quad (4.30)$$

Touto metodou se postupně eliminují všechny vnitřní uzly a poté všechny nežádoucí uzly na hranách až do konečného tvaru (obrázek 4.10). Postup eliminace lze provádět až do stavu, kdy má element pouze rohové uzly, které korektně eliminovat nelze nikdy, protože pro ně neexistují zastupující uzly. Při eliminaci až do stavu, kdy zůstanou 3 uzly v rozích se všechny polynomy druhého a vyšších řádů v tvarových funkcích odečtou a zůstanou pouze lineární tvarové funkce. Vzniklý lineární element bude totožný s přímo odvozeným lineárním elementem.



Obrázek 4.10 Výsledný tvar rovinného elementu

Použitá soustava plošných souřadnic v rovině je přeurčená a platí u ní podmínka (4.17). Pro další použití v MKP není přeurčená soustava souřadnic praktická, proto se po odvození tvarových funkcí přejde do přirozených souřadnic  $\eta, \xi$ . To lze provést volbou dvou plošných souřadnic za nezávislé a třetí se dopočítává z vazbové podmínky [6].

$$L_1 = 1 - \eta - \xi \quad (4.31)$$

$$L_2 = \eta \quad (4.32)$$

$$L_3 = \xi \quad (4.33)$$

Argument tvarových funkcí se tím změní:

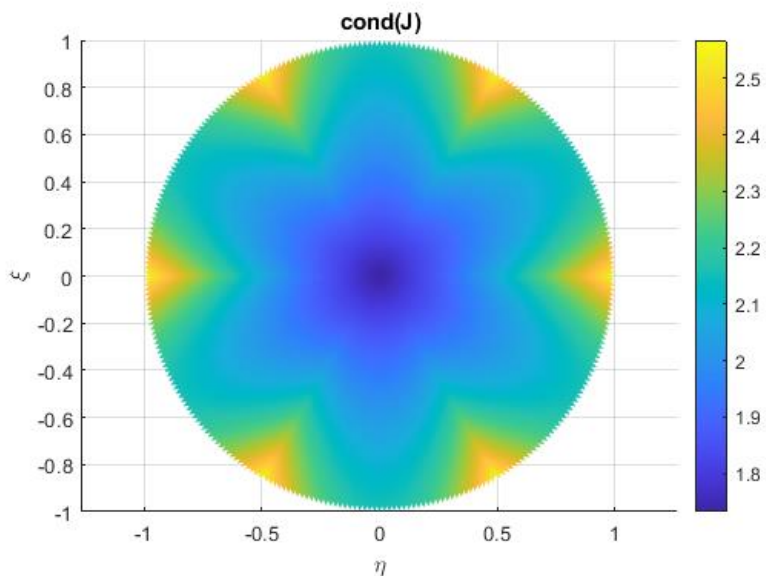
$$N_i(L_1, L_2, L_3) = N_i(1 - \eta - \xi, \eta, \xi) \quad (4.34)$$

Tvarové funkce jsou platné pouze v ploše elementu. Množina souřadnic definující plochu elementu je následující:

$$\eta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (4.35)$$

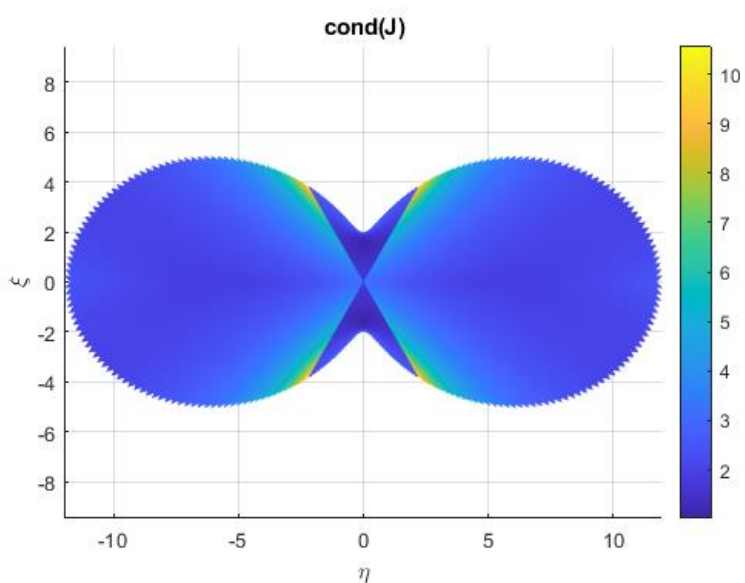
$$\xi \in \langle 0, 1 - \eta \rangle \quad (4.36)$$

Takto je element použitelný pro MKP výpočty. První, co je potřeba provést, je kontrola kvality navrženého elementu v závislosti na geometrii. Při tomto postupu odvození a použité transformaci do přirozených souřadnic odpovídá referenční geometrie zobrazenému schématu elementu. V této geometrii je podmíněnost ideální v celé ploše elementu. První testovací geometrie je znovu kruh. Pro složení jednoho průřezu bude vždy použito 6 elementů.



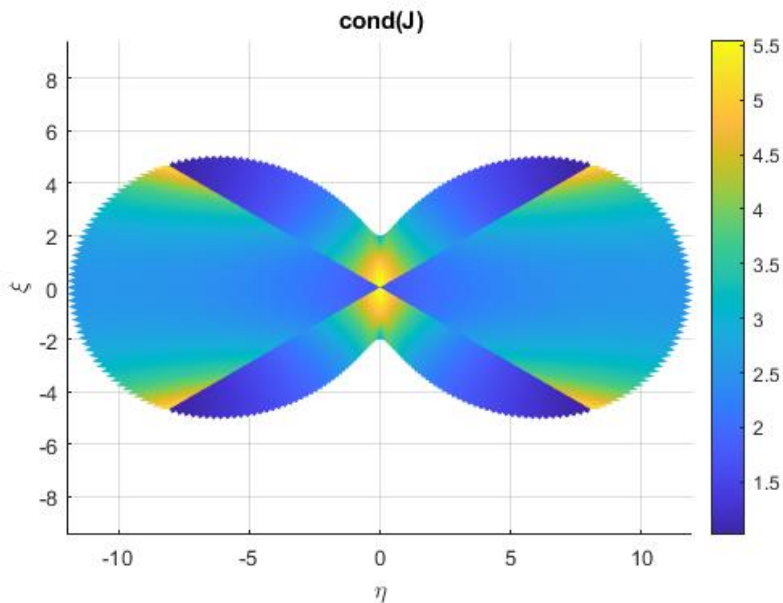
Obrázek 4.11 Podmíněnost – kruhová geometrie

Podmíněnost kruhového průřezu je velmi dobrá (obrázek 4.11). V okolí středu kruhu jsou hodnoty podmíněnosti okolo 1.7 a při okrajích 2.1–2.6. Nejhorší podmíněnost je v místech, kde se vrchol elementu, který měl původně úhel  $45^\circ$ , mění na  $90^\circ$ .



Obrázek 4.12 Podmíněnost – nekonvexní geometrie





Obrázek 4.13 Podmíněnost – nekonvexní geometrie, jiné rozložení elementů

Kruhová geometrie pro potvrzení použitelnosti elementu není dostačující. Vokální trakty mají složitější geometrie průřezů. Proto byl navrhnut nekonvexní průřez (obrázek 4.12 a obrázek 4.13). Síťování tohoto průřezu není jednoznačné, šest elementů může být v geometrii umístěno různě a ovlivňuje to podmíněnost. Byly použity dvě možnosti vyplnění průřezu elementy. V obou případech podmíněnost nepřekročila hodnotu 10.3. Na rozhraní mezi elementy není podmíněnost spojitá, a to není chyba. Tvarové funkce zajišťují spojitost řešených veličin (akustický tlak) a ničeho jiného. Z obrázků je vidět, jak komplikované geometrie lze modelovat. Znovu se potvrzuje, že nejkomplicovanější místa jsou rohy, kde se mění úhel.

Analýzy potvrdily schopnost šesti rovinných trojúhelníkových elementů modelovat složité rovinné plochy. Aby se dal element použít pro akustiku složitých kanálů, musí být vytažen do prostorové dimenze. V třetím rozměru může být element pouze lineární, kvalita aproximace se zajistí dostatečným počtem elementů v tomto směru. Element bude mít osm uzlů ve dvou rovinách, celkem 16 uzlů. Rovinný element existuje v rovině  $\eta, \xi$  a jeho vytažení je v ose  $\zeta \in (0,1)$ . Z tvarové funkce každého uzlu se vytvoří dvě nové tvarové funkce. První pro uzel v  $\zeta = 0$ .

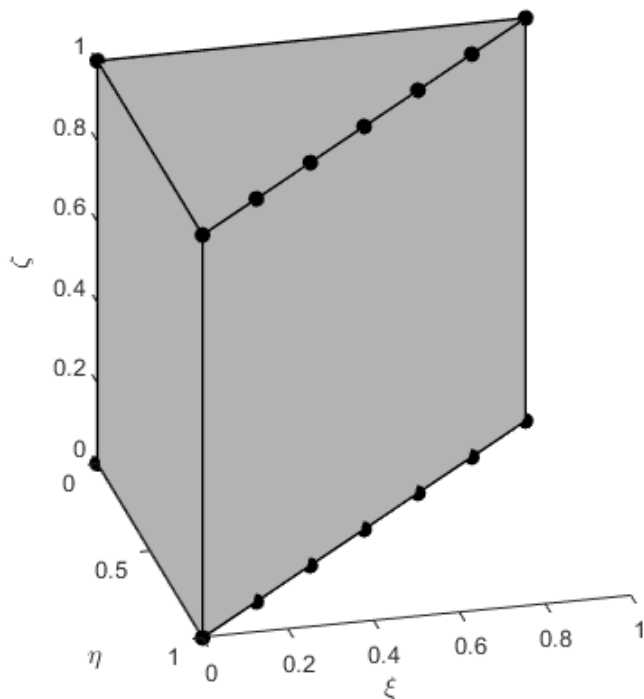
$$N_i(\eta, \xi, \zeta) = (1 - \zeta)N_i(\eta, \xi) \quad (4.37)$$

A druhá tvarová funkce pro uzel v  $\zeta = 1$ .

$$N_{i+8}(\eta, \xi, \zeta) = \zeta N_i(\eta, \xi) \quad (4.38)$$

Tím je speciální element pro akustiku vokálních traktů hotový (obrázek 4.14). Je to element 6. stupně polynomu v rovině a 1. stupně ve třetím rozměru. To umožňuje modelovat složité tvary s použitím pouze 6 elementů [104], [105]. Jeho omezení jsou ale významná. Tím, že obsahuje

uzly pouze na jedné straně a pak v protilehlých vrcholech, je ve směru kolmém na tuto stranu prakticky lineární. To omezuje použití na úlohy, kde jsou gradienty v tomto směru konstantní nebo jen minimálně proměnné. Pro akustiku vokálního traktu to znamená, že modelování příčných tvarů kmitu je možné, ale jen pro nižší příčné tvary. V podélném směru bude použito mnoho elementů, a proto gradienty v podélném směru nejsou problém. Pouze se musí zohlednit počet elementů vůči modelovaným tlakovým polím.



Obrázek 4.14 Element použitý pro modelování akustiky vokálních traktů

### 4.3 Numerická integrace pohybových matic navrženého elementu

Fyzikálně je element definovaný svými maticemi hmotnosti, tlumení a tuhosti, alternativně ještě vektorem buzení. Definiční vztahy byly již odvozeny, jedná se o vztahy (2.91), (2.92), (2.93) a (2.100). Všechny tyto vztahy mají společného jmenovatele, a tím je integrace přes objem, povrch nebo část povrchu elementu. Integrand těchto integrálů je vždy funkce tvarových funkcí, nebo jejich derivací v prostoru. Takže je potřeba vyřešit problematiku vícerozměrných integrálů přes skutečný objem/povrch elementu. Taková integrační množina může být složitá, to závisí na geometrické konfiguraci elementu. Další pozitivní vlastností izoparametrických elementů je existence jejich referenčního tvaru a lokálního souřadného systému. Veškeré integrály lze transformovat do referenční konfigurace, tím se integrály velice zjednoduší.

Nejvýznamnější jsou matice hmotnosti a tuhosti. Bez těchto matic nelze provést žádnou akustickou nebo strukturní dynamickou analýzu. Proto jako první bude řešena integrace přes objem, která je nutná pro odvození těchto matic. Jelikož matice se integrují po

prvcích, neboli integrál matice je matice integrálů, bude odvození probíhat na integrálu obecné funkce  $F(\eta, \xi, \zeta)$ . Předpokládejme integrál přes jeden element ve tvaru:

$$INT = \int_{V_e} F(\eta, \xi, \zeta) dV = \int_{V_e} F(\eta, \xi, \zeta) dx dy dz \quad (4.39)$$

Integrand je funkcí tvarových funkcí a tedy lokálních souřadnic  $\eta, \xi, \zeta$ , nikoliv  $x, y, z$ . To je výhodná vlastnost, pokud se má integrál převést do referenční konfigurace. Transformace diferenciálu objemu se provede pomocí Jacobiánu.

$$dV = dx dy dz = \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi d\zeta \quad (4.40)$$

Tento vztah vychází z teorie matematické analýzy [97]. Jacobián je determinant Jacobiho matice. Tento determinant má geometrický význam objemu rovnoběžnostěny báze lokálního souřadného prostoru v globálním systému. Jelikož Jacobiho matice má rozměr metr, pak Jacobián má rozměr  $m^3$ . Elementární objem referenčního systému je bezrozměrný, protože referenční systém je bezrozměrný. Spolu s transformací diferenciálu objemu se musí transformovat meze integrálu. Trojúhelníkovou podstavu elementu definuje množina (4.35), (4.36) a poslední souřadnice  $\zeta$  je v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Integrál tím přejde do tvaru:

$$INT = \int_{V_e} F(\eta, \xi, \zeta) dV = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^1 F(\eta, \xi, \zeta) \det(\mathbf{J}) d\zeta d\xi d\eta \quad (4.41)$$

Integrál v tomto tvaru je možné integrovat, protože je celý zapsán v jedné soustavě souřadnic. Transformací integrálu nevzniká chyba. Pokud je v integrandu derivace tvarových funkcí, například v matici tuhosti, je nutné si uvědomit, že tato derivace je vztažena na skutečný souřadný systém a skutečnou konfiguraci elementu. Naopak tvarové funkce jsou definované v lokálním souřadném systému. Derivace podle globálních a lokálních souřadnic nejsou totožné.

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \nabla_{\eta\xi\zeta} \quad (4.42)$$

Závislost mezi operátorem nabra v referenční a skutečné geometrii vychází ze znalosti transformačních vztahů mezi souřadnicemi. Podle principu derivování složené funkce platí:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Maticový operátor transformující diferenciální operátory je již známá Jacobiho matice. Vztah je možné zapsat ve tvaru:

$$\nabla_{\eta\xi\zeta} = J\nabla \quad (4.44)$$

Je-li v integrandu použit operátor nabla, je nutné ho vyjádřit následujícím vztahem:

$$\nabla = J^{-1}\nabla_{\eta\xi\zeta} \quad (4.45)$$

Matice hmotnosti, tuhosti a část matice tlumení jsou definovány jako objemový integrál, oproti tomu budící vektor nebo tlumení akustickou impedancí jsou definované plošným integrálem přes povrch elementu. Transformace plošného integrálu do lokálních souřadnic se provádí odlišným způsobem. Plocha má míru pouze ve dvoudimenzionálním prostoru, proto se parametrizuje dvěma parametry. Vztah (4.40) je u plošných integrálů bezpředmětný. Aditivnost integrálu umožňuje převést plošný integrál na součet plošných integrálů přes jednotlivé plochy, které složí celkovou integrační plochu. Prvně je potřeba parametrizovat jednotlivé plochy integrálu.

Integruje-li se plocha spodní trojúhelníkové podstavy, pak je souřadnice  $\zeta = 0$ . Zbylé dvě souřadnice mají stejné meze jako u objemového integrálu. Diferenciál skutečné plochy je plochou rovnoběžníku v globálním souřadném systému definovaném diferenciály lokálního systému. Z výrazu pro totální diferenciál platí:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\eta \\ d\xi \\ d\zeta \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} d\eta \\ d\xi \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Z tohoto výrazu je patrný vztah, jak se diferenciály lokálních souřadných os transformují na diferenciální vektor v globálním systému. Tyto diferenciální vektory jsou řádky Jacobiho matice. Plocha rovnoběžníku, a tedy i elementární plocha integrace, se potom dá vyjádřit jako absolutní hodnota vektorového součinu. Samotné diferenciály lze z absolutní hodnoty vytknout, jelikož při integraci jsou vždy kladné.

$$dS = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right| d\eta d\xi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \xi} \right| d\eta d\xi \quad (4.47)$$

Obecná integrace skalární funkce přes plochu spodní podstavy elementu má tvar:

$$INT = \int_S F(\eta, \xi, \zeta) dS \quad (4.48)$$

Transformuje se do tvaru:

$$INT = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\eta, \xi, 0) \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 0)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 0)}{\partial \xi} \right| d\xi d\eta \quad (4.49)$$

Integruje-li se přes plochu horní trojúhelníkové podstavy  $\zeta = 1$ , je výraz analogický:

$$INT = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\eta, \xi, 1) \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 1)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 1)}{\partial \xi} \right| d\xi d\eta \quad (4.50)$$

Stejně tak se dá analogie použít pro plochu  $\eta = 0$ .

$$INT = \int_0^1 \int_0^1 F(0, \xi, \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T(0, \xi, \zeta)}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(0, \xi, \zeta)}{\partial \xi} \right| d\xi d\zeta \quad (4.51)$$

A plochu  $\xi = 0$ .

$$INT = \int_0^1 \int_0^1 F(\eta, 0, \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, 0, \zeta)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, 0, \zeta)}{\partial \zeta} \right| d\zeta d\eta \quad (4.52)$$

Komplikovanější je parametrizace poslední plochy, která tvoří plášť vokálního traktu. U této plochy je souřadnice  $\zeta$  volná a mezi souřadnicemi  $\eta, \xi$  platí vztah  $\eta + \xi = 1$ . Jedna z vázaných souřadnic se uvažuje za nezávislou a druhá za závislou. Platí, že integrál přejde do tvaru:

$$INT = \int_0^1 \int_0^1 F(\eta, 1 - \eta, \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, 1 - \eta, \zeta)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, 1 - \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right| d\zeta d\eta \quad (4.53)$$

Všechna tato odvození předpokládala skalární integrand, byly to plošné integrály prvního druhu. U budícího vektoru je v integrandu jednotkový normálový vektor k integrační ploše. Součin normálového vektoru a diferenciálu integrační plochy tvoří orientovaný diferenciál plochy a integrál se stává plošným integrálem druhého druhu. Orientovaný diferenciál integrační plochy je definován následovně:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \xi} \right|} dS = \left( \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \xi} \right) d\eta d\xi \quad (4.54)$$

Pokud je tedy potřeba řešit plošný integrál vektorové funkce, pak se transformuje tímto způsobem.

$$INT = \int_S \mathbf{F}(\eta, \xi, \zeta) \mathbf{n}dS = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{F}(\eta, \xi, 0) \left( \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 0)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}^T(\eta, \xi, 0)}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \quad (4.55)$$

Uvedený příklad integrace vektorové funkce je ukázán pouze na integraci přes spodní podstavu elementu. Ostatní plochy jsou analogické. U integrací vektorových funkcí je důležité dbát na znaménkové konvence. Normálový vektor může směřovat dovnitř nebo ven z elementu. Je nutné, aby orientace v definičním vztahu byla v souladu s parametrizací plochy. V případě obrácené orientace je výsledek stejný, ale se špatným znaménkem.

Tvarové funkce a jejich derivace jsou pouhé polynomy vyšších řádů. Integrace takových funkcí může být pracná, ale je vždy možná. Transformací souřadnic se do integrálu dostal Jacobián, který nese informaci o geometrické konfiguraci elementu. Tento člen je znovu pouze polynomem. Reálně je integrand tvořen integrovatelným polynomem, analytická integrace je u takových polynomů náročná. Snaha je, aby generování matic elementů probíhalo rychle a automaticky. Analytická integrace není vhodná, proto se v MKP integruje výhradně numericky.

V MKP se dnes používá prakticky výlučně Gaussova numerická integrace [6]. Tato integrace vychází z Newton-Cotesovy metody. Newton-Cotesova metoda předpokládá, že integrand lze nahradit součtem součinů hodnot integrandu v daných bodech s interpolačními funkcemi. Je tu jistá analogie mezi integračními a uzlovými body. A analogie mezi interpolačními a tvarovými funkcemi. Pokud se integruje tato náhrada místo původního integrandu, jsou hodnoty integrandu v integračních bodech pouze konstanty. Je tedy možné integrál rozdělit na více integrálů (jejich počet je roven počtu integračních bodů) a z každého integrálu vytknout hodnotu původního integrandu. Výsledkem je, že se integrují pouze samostatné interpolační funkce. Tyto funkce jsou pro element neměnné, nezávisí ani na geometrické konfiguraci ani na původním integrandu. To znamená, že jejich integrace jde provést pouze jednou a jejich hodnoty tabelovat. Těmto hodnotám se říká váhové koeficienty. Přesnost integrace závisí na počtu a rozmístění integračních bodů. Gaussova metoda se odlišuje pouze odvozením polohy integračních bodů tak, aby se maximalizovala přesnost integrace. To je základní myšlenka. Za předpokladu 1D integrace je výraz pro integraci následující:

$$\int_a^b F(\eta) d\eta = \sum_i \alpha_i F(\eta_i) \quad (4.56)$$

Parametry  $a, b$  jsou integrační meze,  $\eta_i$  integrační body a  $\alpha_i$  váhové koeficienty integračních bodů. Pokud je integrál vícerozměrný použije, se Fubiniova věta. Vyřeší se vnitřní integrál tímto algoritmem, tím se sníží počet integrací, a algoritmus se opakuje.

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} F(\eta, \xi) d\eta d\xi = \sum_i \alpha_{\eta_i} \int_{\xi_0}^{\xi_1} F(\eta_i, \xi) d\xi = \sum_{i,j} \alpha_{\eta_i} \alpha_{\xi_j} F(\eta_i, \xi_j) \quad (4.57)$$

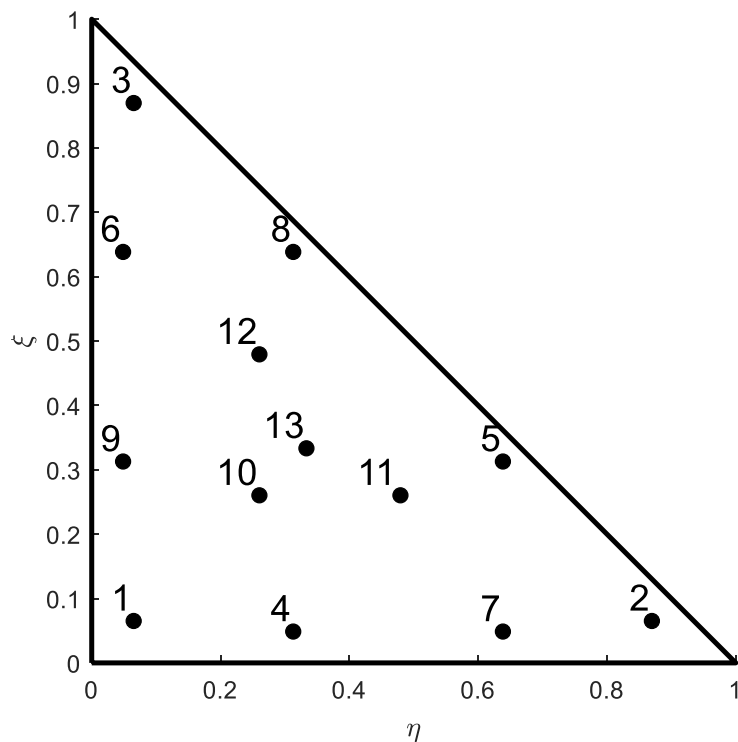
Výraz zobrazuje postup integrace ve dvou dimenzích. Postup je analogický jako v jedné dimenzi. Pouze je použitý dvojitý sumační operátor a dva váhové koeficienty. Vždy odděleně pro obě dimenze. Tento postup lze použít i na trojné a další vyšší integrály.

Ukázaný postup má pro vyvinutý element jedno zásadní omezení. Integrační meze jsou vždy konstanty. Nejčastěji používané elementy v MKP jsou šestistěny různého stupně polynomu tvarových funkcí. Ty se vždy odvozují tak, aby integrační meze byly -1 a 1 ve všech integračních dimenzích, proto se i polohy integračních bodů a jejich váhy tabelují pro tyto meze. Pokud je integrační oblast trojúhelník (ve 2D), musí se integrační schéma odvodit pro celou 2D oblast a dvojný integrál se nepřevádí na 2 jednorozměrné. Odvození vychází ze stejných principů jako 1D integrace s pevnými mezemi. Integrační schémata, pro trojúhelníkovou oblast s různými řády přesnosti, jsou odvozena v [12].

Pro vytvořený element v této práci jsou vždy použita Gaussova integrační schémata 7. řádu přesnosti. Jelikož je element tvaru vysunutého trojúhelníku, je objemová integrace řešena kombinací 2D integrace trojúhelníku (obrázek 4.15, tabulka 4.2) a 1D integrace (tabulka 4.1). Pokud je potřeba provést plošný integrál na některé z čtyřhranných stěn, použije se kombinace dvou 1D integrací. Tím je výčet potřebných možných integrací pokryt.

Tabulka 4.1 Integrační schéma 1D integrace 7. řádu přesnosti v intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Hodnoty jsou převzaty ze schématu pro integraci v intervalu  $\langle -1,1 \rangle$  [6] a přepočítány pro interval  $\langle 0,1 \rangle$ .

Poloha integračního bodu	Váha integračního bodu
0.069431844202974	0.173927422568727
0.330009478207572	0.326072577431273
0.669990521792428	0.326072577431273
0.930568155797026	0.173927422568727



Obrázek 4.15 Schéma integračních bodů v trojúhelníku

Tabulka 4.2 Integrační schéma 2D integrace 7. řádu přesnosti trojúhelníku [6]. Čísla integračních bodů jsou v souladu se schématem.

Int. bod	Souřadnice $\eta_i$	Souřadnice $\xi_i$	Váha $\alpha_i$
1	$\eta_1 = 0.0651301029022$	$\xi_1 = \eta_1$	$\alpha_1 = 0.0533472356088$
2	$\eta_2 = 0.8697397941956$	$\xi_2 = \eta_1$	$\alpha_2 = \alpha_1$
3	$\eta_3 = \eta_1$	$\xi_3 = \eta_2$	$\alpha_3 = \alpha_1$
4	$\eta_4 = 0.3128654960049$	$\xi_4 = \eta_6$	$\alpha_4 = 0.0771137608903$
5	$\eta_5 = 0.6384441885698$	$\xi_5 = \eta_4$	$\alpha_5 = \alpha_4$
6	$\eta_6 = 0.0486903154253$	$\xi_6 = \eta_5$	$\alpha_6 = \alpha_4$
7	$\eta_7 = \eta_5$	$\xi_7 = \eta_6$	$\alpha_7 = \alpha_4$
8	$\eta_8 = \eta_4$	$\xi_8 = \eta_5$	$\alpha_8 = \alpha_4$
9	$\eta_9 = \eta_6$	$\xi_9 = \eta_4$	$\alpha_9 = \alpha_4$
10	$\eta_{10} = 0.2603459660790$	$\xi_{10} = \eta_{10}$	$\alpha_{10} = 0.1756152574332$
11	$\eta_{11} = 0.4793080678419$	$\xi_{11} = \eta_{10}$	$\alpha_{11} = \alpha_{10}$
12	$\eta_{12} = \eta_{10}$	$\xi_{12} = \eta_{11}$	$\alpha_{12} = \alpha_{10}$
13	$\eta_{13} = 0.3333333333333$	$\xi_{13} = \eta_{13}$	$\alpha_{13} = -0.1495700444677$

U 1D integrace musí být součet váhových koeficientů roven délce intervalu, a to jedné. U 2D schématu pro trojúhelník musí být součet roven ploše trojúhelníku, to je jedna polovina. Při kontrole hodnot v tabulkách je u 2D integrace součet roven jedné. Proto je nutné do vztahu pro numerickou integraci přidat koeficient 1/2.

Vytvoření matematického popisu MKP modelu spočívá v diskretizaci řešeného prostoru elementy. Vhodný element pro síťování vokálních traktů byl odvozen. Pro každý



element jsou spočítány matice a budící vektor. Definiční vztahy byly odvozeny včetně technikálií potřebných pro jejich spočítání. Z matematického popisu elementů se sestaví matematický popis celého modelu. Tento popis tvoří numerický model, na kterém lze provádět analýzy a simulace.

## 5. Geometrie vokálního traktu

Geometrie vokálního traktu je pro každého jedince unikátní. Schopnost člověka měnit velikost a tvar průřezu vokálního traktu v různých místech nám umožňuje tvořit různé hlásky. Díky unikátnosti vokálního traktu má každý člověk charakteristický hlas, proto může být využíván i pro identifikaci člověka. Citlivost přenosové funkce vokálního traktu na změnu vokálního traktu je vysoká. To znamená, že je těžké simulovat přesný hlas. Člověk přirozeně při fonaci používá svůj sluch jako zpětnou vazbu. Tato zpětná vazba nám umožňuje v době, kdy se učíme mluvit, nalézt takovou pozici svalů a dalších částí těla v okolí vokálního traktu pro vznik hledané hlásky. Tímto způsobem jsme se naučili vyslovovat hlásky stejně nebo podobně jako naše okolí a tuto schopnost používáme ke komunikaci.

Tato biologická různorodost a velké množství hlásek komplikuje výzkum v této oblasti. Získání jakékoliv funkční geometrie vokálního traktu je problematické. Geometrie je ovlivněna fonací dané hlásky a proto je nutné ji měřit na živých osobách. Zavádění měřícího zařízení do těla člověka ovlivní geometrii a ta se změní. Takové měření může být chybné i v případě, že člověk během měření dokáže fonovat hlásku správně. Člověk totiž může dokázat v dané situaci nalézt novou geometrickou konfiguraci vokálního traktu, která vykompenzuje vliv měřícího zařízení.

V minulosti bylo měření geometrie vokálního traktu problematické. Z pitev je možné získat především topologickou strukturu vokálního traktu, avšak takto získané rozměry jsou jen velmi přibližné. Dnes existují moderní zobrazovací metody, které graficky dokážou zobrazit charakteristiky lidských tkání uvnitř těla. Tyto metody můžou fungovat i bez vnějšího působení, které by lidské tělo v danou chvíli pociťovalo. To umožní, aby člověk mohl fonovat bez vnějšího ovlivnění.

Mezi tyto metody patří především CT nebo MRI. Teoreticky lze uvažovat i o rentgenové tomografii, která nevytváří 3D výstup. Další možností je ultrazvuk, který je také pouze 2D a vyžaduje přímý kontakt s měřenou osobou. Existuje i mnoho dalších zobrazovacích metod. Dnes se k měření vokálních traktů pro výzkum používají prakticky výhradně CT nebo MRI.

CT je metoda, která využívá rentgenový tomograf. To je zařízení generující rentgenové záření, které prochází tělem. Různé tkáně mají různou pohltivost tohoto záření a intenzita záření je po průchodu tělem měřena. Vzniklý 2D obraz zobrazuje monochromaticky intenzitu prošlého záření. Typickým použitím je diagnostika zlomenin, protože kosti mají velkou pohltivost, a tak jsou jasně rozpoznatelné. Výstup této metody integruje pohltivost tkání během celého průchodu záření tělem. To znamená, že nelze změřit nebo odhadnout, jak je chování tkání rozloženo v třetí dimenzi prostoru. CT používá rentgen pro snímkování z mnoha směrů. Teoreticky, pokud existuje mnoho snímků z různých směrů, lze zkonstruovat 3D obraz měřené oblasti. K tomu lze použít Radonovu transformaci [45]. Prakticky se tento princip dá uplatnit i na konečném počtu snímků. Tato metoda je v medicíně rozšířená, jedna z jejích nevýhod je ozáření člověka nebezpečným rentgenovým zářením. Dávka záření je výrazně větší než u rentgenu, protože se provádí mnoho snímků. MRI je mladší metoda, která využívá složitějších fyzikálních principů. Stručně ji lze popsat jako silné magnetické pole, které orientuje jádra atomů podle tohoto pole a vlivem působení druhého kolmého harmonického

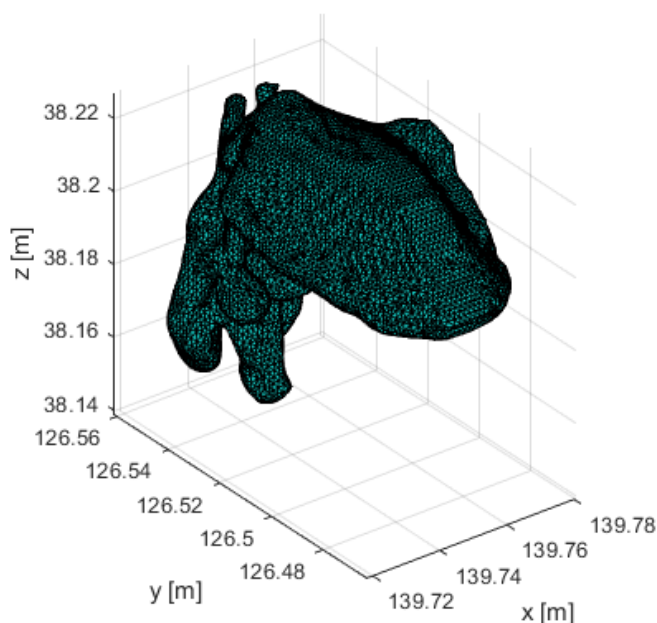
magnetického pole se moment hybnosti jader mění. To indukuje elektrické pole, které je zaznamenáváno.

## 5.1 Zpracování měřené geometrie

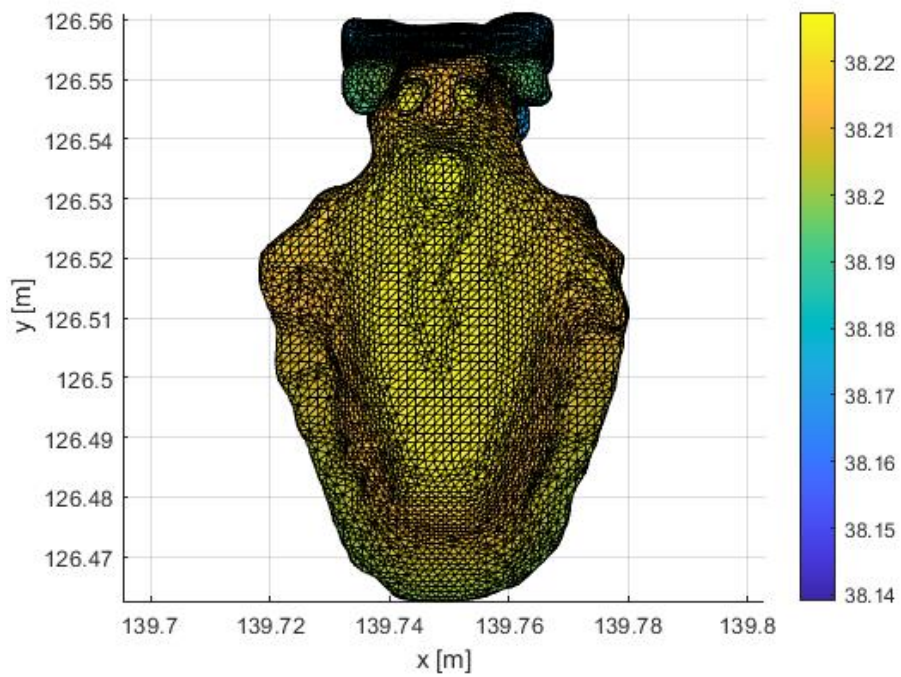
Pro účely získání geometrie vokálního traktu je v principu jedno, jaká bezkontaktní zobrazovací metoda je použita, pokud je její rozlišení a přesnost dostačující k určení geometrie vokálního traktu. V publikacích řešících tuto problematiku se nejčastěji využívají data právě z CT nebo MRI.

Pro účely výzkumu lidského hlasu, v rámci výzkumných projektů vedených na Českém Vysokém Učení Technickém v Praze, proběhlo měření geometrie vokálního traktu [91]. Ke snímkování bylo použito CT LightSpeed VCT GE-64 od výrobce General Electric. Měřením bylo získáno 181 řezů o tloušťce 0.625 mm. Rozlišení snímku je 512x512 pixelů, velikost pixelu 0.27 mm. Měřená osoba byla žena bez hlasových nebo sluchových poruch. Měření probíhalo v poloze vleže. Během celého procesu měření inkresivně fonovala hlásku a:. Fonaci započala před začátkem měření a ukončila až po dokončení měření. To zajistilo, že přechodové jevy při začátku a konci fonace neovlivnily měření. Měření trvalo přibližně dvě sekundy.

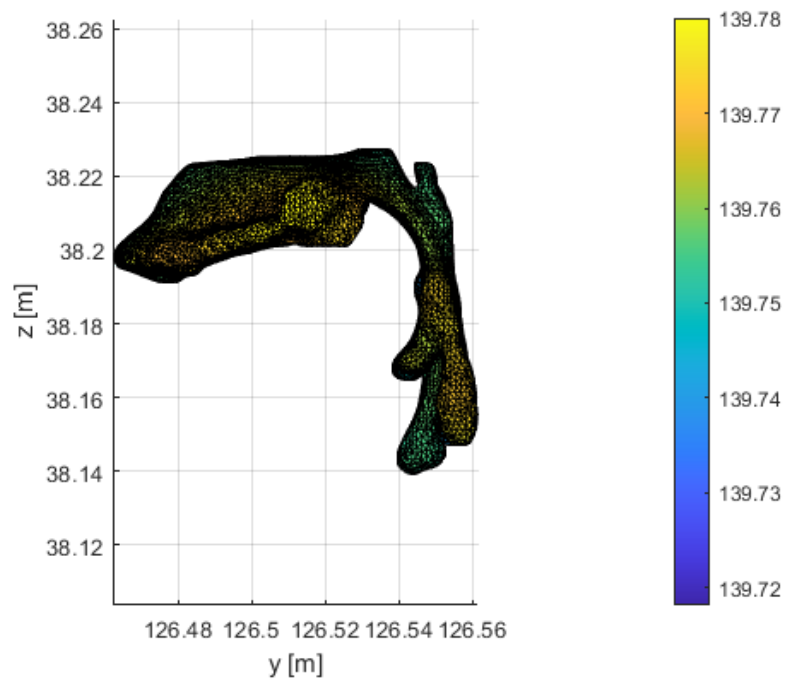
První geometrický model vokálního traktu vznikl analýzou sagitálních řezů CT. Jednotlivé tkáně byly odlišeny a tím vznikl voxel model vokálního traktu. Povrch voxel modelu slouží pro vytvoření MKP modelu vokálního traktu. Následující obrázky (obrázek 5.1, obrázek 5.2, obrázek 5.3 a obrázek 5.4) zobrazují v různých pohledech změřenou geometrii pro hlásku a:. Povrch vokálního traktu je zobrazen jako trojúhelníková síť. U zobrazení ve dvou osách je třetí rozměr definován barevnou stupnicí.



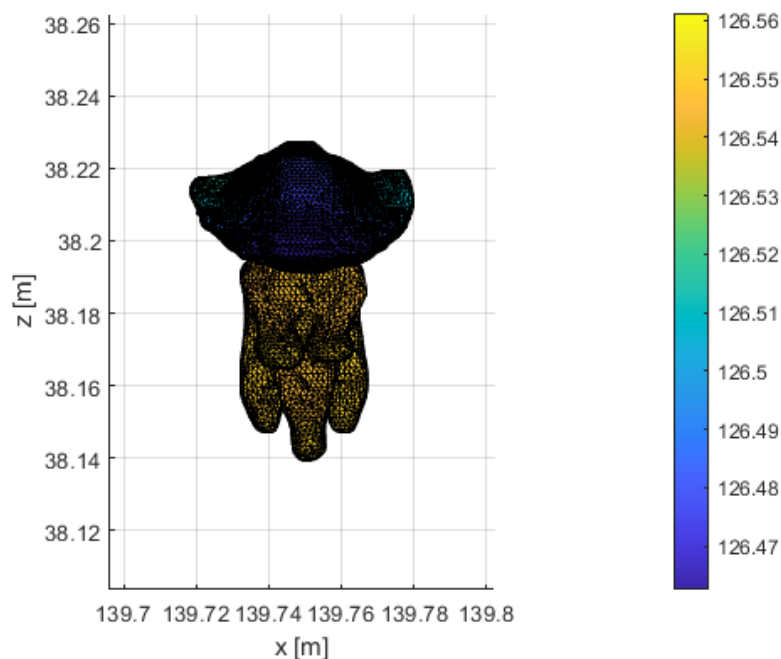
Obrázek 5.1 Geometrický CT model hlásky a:



Obrázek 5.2 Zobrazení průřezu modelu do roviny XY, barevná škála je osa Z



Obrázek 5.3 Zobrazení průřezu modelu do roviny YZ, barevná škála je osa X



Obrázek 5.4 Zobrazení průmětu modelu do roviny XZ, barevná škála je osa Y

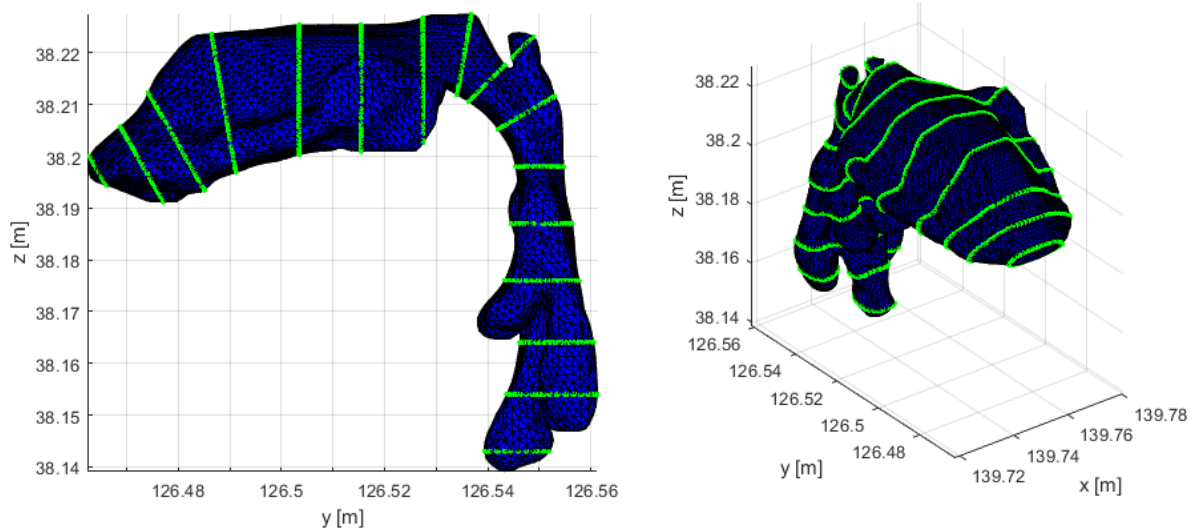
Stejným způsobem lze zobrazit vokální trakt i pro další hlásky. Tento geometrický model je možné importovat do počítačových programů určených pro tvorbu MKP sítí. Vzniklý MKP model lze řešit v běžných MKP řešičích. Běžně se takové úlohy řeší v komerčních programech. V této práci se prezentuje postup modelování vokálního traktu jako 1D kontinua analytickými postupy a použití MKP se speciálním typem elementu.

Postupy použité v této práci nejsou běžné, proto je nutné si vytvořit vlastní programy, které je provádějí. V 1D analytickém výpočtu je geometrie složena z válcových a kuželových částí. Je tedy potřeba znát velikost průřezu vokálního traktu ve vybraných řezech a vzdálenosti těchto řezů. U MKP se speciálním elementem je nutné znát tvar těchto řezů, polohu a orientaci rovin řezů. V každém případě je nutné geometrii převést do řezů. Počet a poloha řezů ovlivní kvalitu geometrické aproximace. Pro potřeby analýz v zájmovém frekvenčním pásmu je rozhodující správně aproximovat délkové rozměry a velikosti průřezů. Přesný popis každého detailu na geometrii se v nízkých frekvencích projeví minimálně. Vliv těchto geometrických detailů se projeví až ve vysokých frekvencích, kde je možné vybudit i tvary kmitu s vysokou frekvencí v malých detailech.

Jako kompromis mezi přesností diskretizace a velikostí modelu se zvolil počet 16 řezů a tedy 15 vrstev elementů. Polohy a orientace řezů byly voleny tak, aby co nejlépe nahradily geometrický tvar vokálního traktu a aby jejich rozteče byly podobné. S přihlédnutím ke tvaru geometrie není nutné definovat roviny řezu obecně v prostoru, ale použijí se pouze roviny rovnoběžné s osou X. Stačí vycházet z roviny XY, která se natočí okolo osy X a poté posune v normálovém směru. Jako počáteční poloha roviny XY se uvažuje střed vokálního traktu. Definicí roviny řezu jsou pouze 2 čísla (tabulka 5.1), obrázek 5.5 zobrazuje roviny graficky.

Tabulka 5.1 Definice rovin řezů modelu, normálový posun je relativní vůči středu modelu.

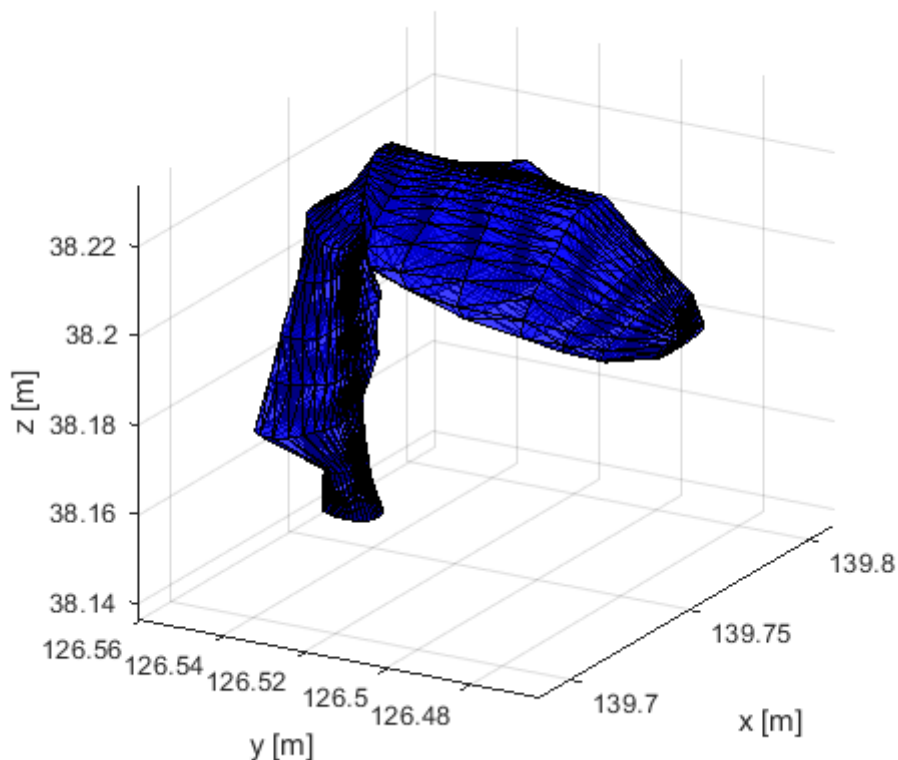
Rovina	Natočení [°]	Normálový posun [m]
1	0	-0.055
2	0	-0.044
3	0	-0.034
4	0	-0.022
5	0	-0.011
6	0	0
7	30	-0.005
8	45	-0.003
9	80	-0.012
10	90	-0.008
11	90	0.004
12	90	0.016
13	100	0.028
14	120	0.032
15	120	0.040
16	120	0.048



Obrázek 5.5 Zobrazení rovin řezů

Každá rovina řezu protíná trojúhelníky sítě. Průniky roviny s hranami trojúhelníků jsou jednoznačné a na obrázku jsou zobrazeny zeleně. Je vidět, že roviny protnuly i vedlejší části vokálního traktu, například připojení nosního traktu (choanae).

Kvalita modelu z CT je velmi dobrá a počet bodů na obvodu řezů je vysoký. To umožňuje obvody popsat analyticky. Tímto vznikají výhody pro další zpracování geometrie. Tento postup s Bezierovými křivkami byl použit v [85]. Pro účely této práce není nutné analyticky popisovat hranice řezů, množina hraničních bodů je postačující. Pro MKP se na hranicích řezů volí potřebný počet uzlů a jeden uzel uvnitř. Uzly jsou ideálně rovnoměrně rozmístěné po obvodě a na střední sagitální rovině leží vždy dva uzly (obrázek 5.6).



Obrázek 5.6 Zobrazení MKP modelu

Všechny analýzy vokálního traktu v této práci jsou provedeny na MKP modelu s nově formulovaným elementem. Aby se potvrdily výsledky založené na novém elementu jsou výpočty paralelně provedeny i na 1D modelu založeném na analytickém řešení Websterovy diferenciální rovnice [98]. Tento 1D model bude v práci často označován jako analytický. Pro 1D analytický přístup stačí určit plochy řezů a vzdálenosti mezi nimi (tabulka 5.2). Tyto vzdálenosti v součtu tvoří délku vokálního traktu přibližně 16 cm.

Tabulka 5.2 Parametry vokálního traktu pro 1D model.

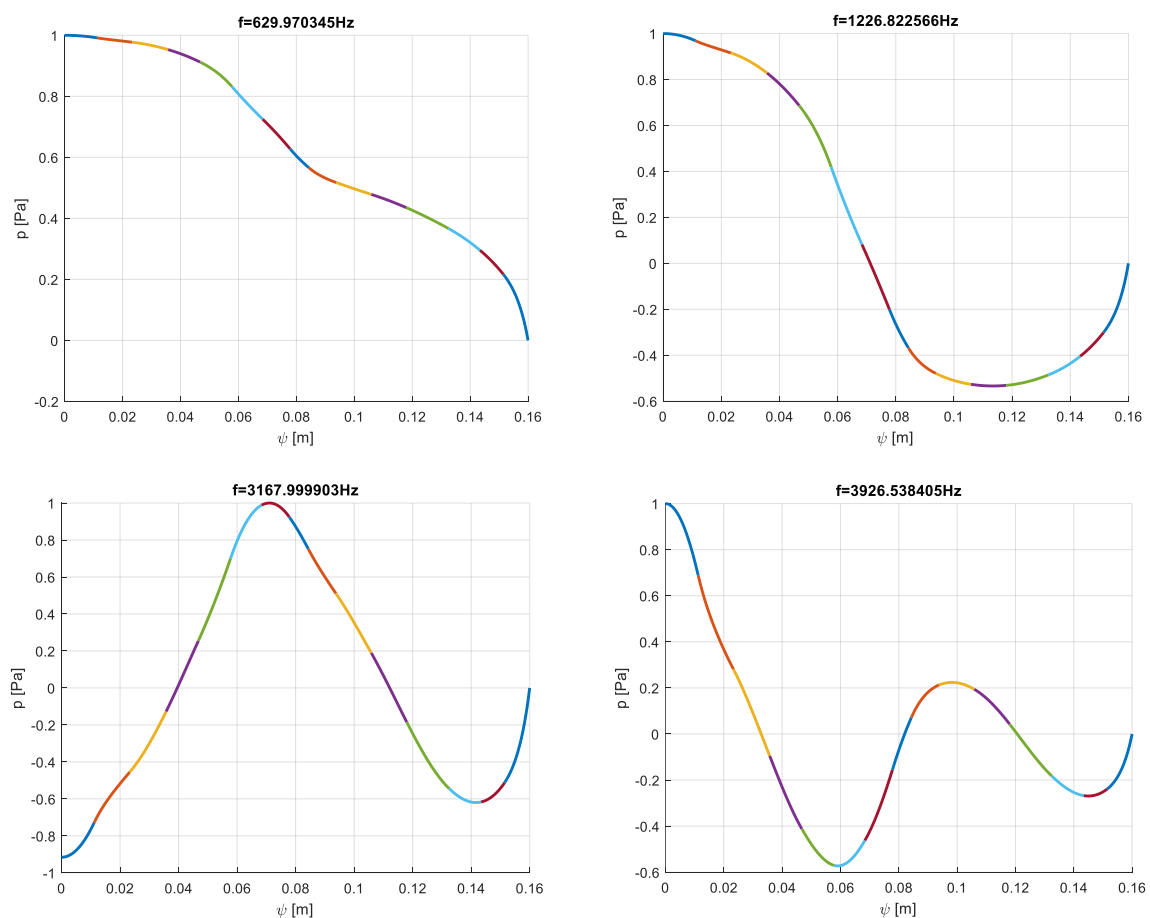
Rovina	Plocha průřezu [m <sup>2</sup> ]	Vzdálenost k další rovině [m]
1	9.524842e-05	1.119644e-02
2	8.216402e-05	1.212492e-02
3	4.107922e-04	1.241460e-02
4	3.884618e-04	1.102871e-02
5	3.362000e-04	1.100816e-02
6	1.702584e-04	1.059490e-02
7	2.238731e-04	9.445585e-03
8	1.993873e-04	6.509895e-03
9	2.914699e-04	9.473242e-03
10	8.045720e-04	1.206707e-02
11	1.120172e-03	1.213260e-02
12	1.019482e-03	1.449135e-02
13	9.357035e-04	1.092008e-02
14	6.609761e-04	8.033228e-03
15	4.589032e-04	8.543940e-03
16	1.023381e-04	-

Tento postup ukazuje zpracování dat získaných z CT. Výsledný model není jednoznačný, jelikož možností, jak zpracovat data, je nespočet. Uživatel má možnost volit počet a polohy řezů apod. Analytický popis tvarů řezů je bezpochyby sofistikovanější a vhodnější pro kvalitnější zpracování. Může být výhodný pro modelování geometrie v programech určených pro MKP síťování. V tomto případě se síťování provádí ručně, protože vytváření generátoru sítě pro takto specifický problém není výhodné. Proto se zde pracuje přímo s hraničními body. Případné modifikace vokálního traktu budou především na úrovni změny měřítka v různých částech vokálního traktu, to lze provést i bez parametrizace. Asi nejsofistikovanějším postupem zpracování by bylo nalezení analytického popisu celé plochy nebo objemu. To by umožnilo provádět libovolné zpracování pouze na úrovni rovnic a bylo by to velmi efektivní. Pracnost získání analytického modelu geometrie je však neúměrná vůči vzniklým benefitům.



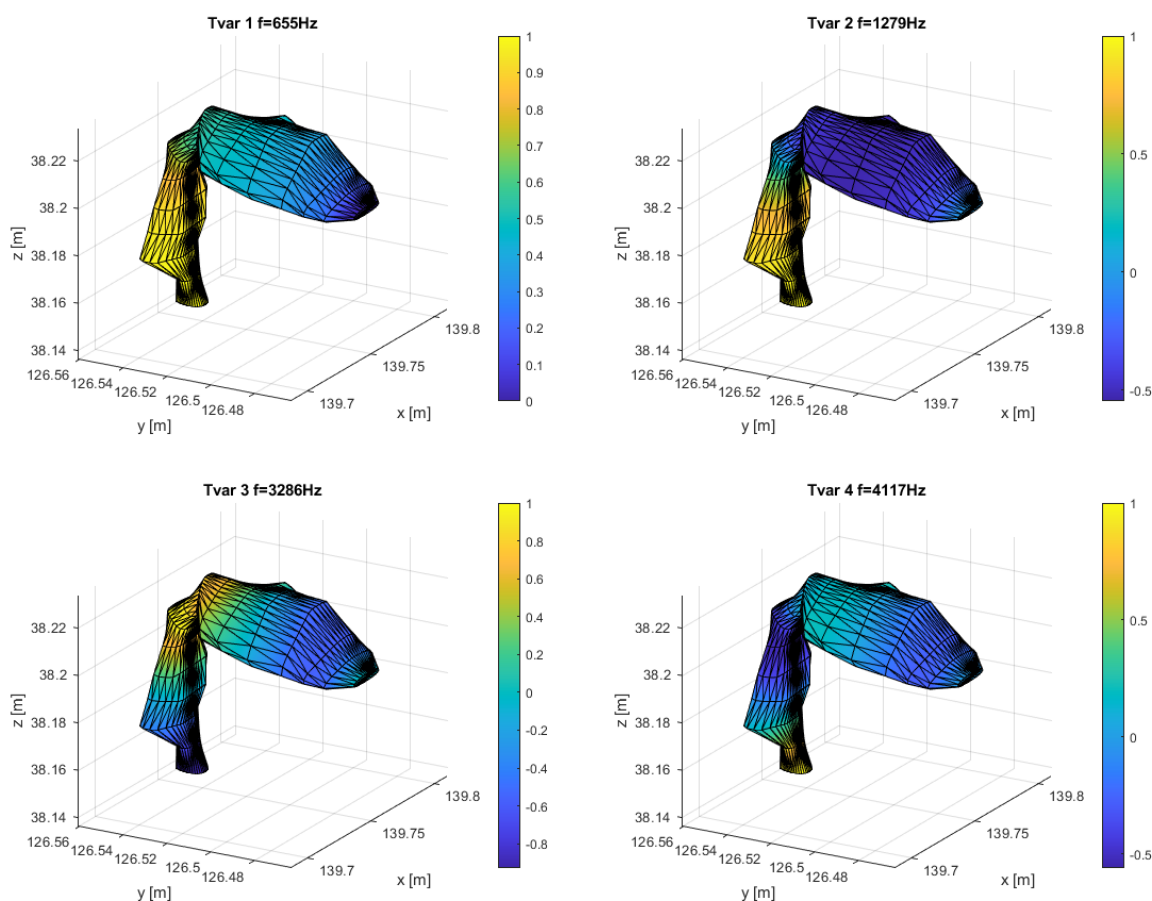
## 6. Základní akustické analýzy

Po zpracování geometrie je možné přistoupit k akustickým analýzám. CT měření, jak bylo psáno, proběhlo při fonaci hlásky a: a zpracování prozatím ignoruje větvení vokálního traktu. Analytický model vyžaduje pro svůj výpočet geometrii ve formě průřezů a délek svých částí. Tabulka 5.2 zobrazuje tato data. Obrázek 5.6 zase zobrazuje geometrii pro MKP model složený z nových elementů. Dále je pro akustickou analýzu potřeba znát rychlost zvuku a hustotu vzduchu. Tyto hodnoty byly voleny pro běžné podmínky fonace, to je vzduch při teplotě lidského těla. Teplota vzduchu se uvažuje 36 °C a tomu odpovídá rychlost zvuku 350 m/s a hustota 1.15 kg/m<sup>3</sup>. Dále je potřeba znát veličiny související se ztrátami. To je akustická impedance na povrchu modelu a ztráty v prostředí. Ztráty v prostředí jsou u vzduchu, který se ve fyziologických podmínkách blíží ideálnímu plynu, zanedbatelné a neuvažují se. Nejvýznamnější je ztráta vyzařováním akustických vln do vnějšího prostředí. Tato ztráta je prozatím zanedbána a nahrazena nulovým akustickým tlakem v ústní dutině. Ztráty na stěnách vokálního traktu jsou nižší než ztráty vyzařováním, proto jsou také zanedbány. Plocha vokálního traktu navazující na hlasivky je místem, kde je vokální trakt buzen. Buzení vokálního traktu je realizováno pulzy stlačeného vzduchu podle modelu [24]. Realizace buzení v modelu je provedena okrajovou podmínkou rychlostního typu. Modální analýza modelů je základ pro testování použitých metod. V modální analýze jsou rychlostní pulzy nulové a vstup vokálního traktu je v podstatě tuhá stěna.



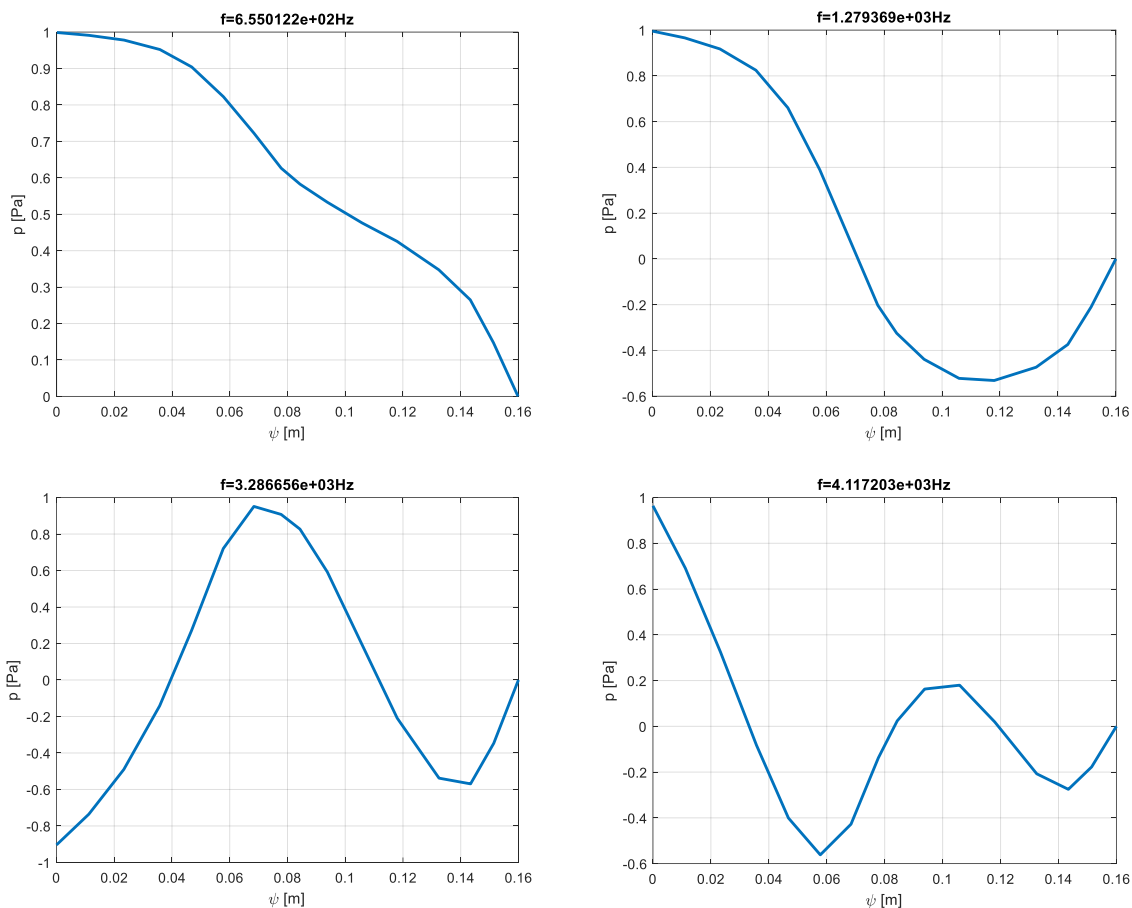
Obrázek 6.1 Zobrazení prvních 4 vlastních tvarů kmitu 1D modelu

Frekvenční analýza 1D analytického modelu našla vlastní frekvence modelu na hodnotách 630, 1227, 3168 a 3927 Hz. Běžně používané hodnoty prvních dvou formantů hlásky a: jsou hodnoty okolo 600 a 1250 Hz. Tento model se od těchto hodnot odlišuje zhruba o 5%. Je nepochybné, že naladit geometrii modelu tak, aby formanty byly přesné, je možné. Dá se očekávat, že geometrické modifikace, které to zajistí, budou relativně malé a tvar vokálního traktu jako celku prakticky nezmění, takže CT měření je možné považovat za kvalitní. Obrázek 6.1 zobrazuje první 4 tvary kmitu. Barevné rozlišení odlišuje jednotlivé segmenty vokálního traktu. Průběh obou tvarů je dle očekávání, u hlasivek je nulová derivace daná okrajovou podmínkou. První tvar je monotónní, tlak klesá směrem k ústům, u druhého tvaru kmitu dochází k jednomu překmitu a v každém dalším tvaru kmitu je překmit navíc. V případě válcové trubice konstantního průřezu by první tvar měl tvar čtvrtiny periody funkce cosinus a druhý tvar by měl tvar tří čtvrtin stejné funkce. Analyzované tvary se těmito odhadům analogicky blíží.



Obrázek 6.2 Zobrazení prvních čtyř vlastních tvarů kmitu MKP modelu

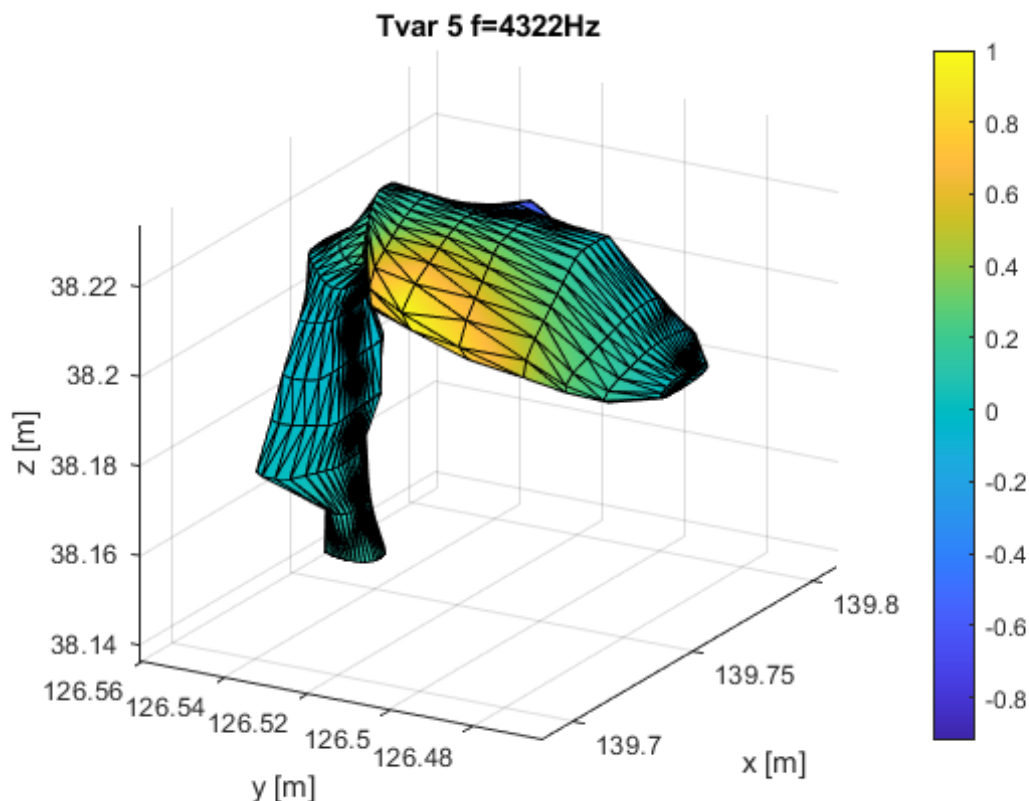
MKP model stejné geometrie byl také podroben modální analýze se stejnými okrajovými podmínkami. V tomto případě jsou výsledky frekvencí 655, 1279, 3286 a 4117 Hz. Obrázek 6.2 zobrazuje první čtyři tvary kmitu MKP modelu a obrázek 6.3 zobrazuje průběh těchto tvarů po střednici vokálního traktu. Obrázek 6.3 je vhodný pro porovnání analytických a MKP tvarů kmitu. Je vidět, že průběhy jsou odpovídající. Aby se průběhy mohly dobře porovnávat, je akustický tlak normován tak, aby maximální hodnota byla 1 Pa.



Obrázek 6.3 Zobrazení prvních čtyř vlastních tvarů kmitu MKP modelu jako funkce tlaku po střednici vokálního traktu

Při porovnání výsledků MKP modelu a analytického 1D modelu je rozdíl ve vypočtených prvních čtyřech tvarech kmitu minimální. Frekvence těchto tvarů se liší o méně než 5%. MKP model vykazuje frekvence vždy vyšší. Porovnání samotných tvarů kmitu také potvrzuje vynikající shodu obou modelů. Průběhy jsou prakticky totožné. Jsou shodné trendově i absolutně. Rozdíly poloh významných míst, jako jsou uzly nebo kmitny a jejich amplitudy, jsou v jednotkách procent.

Frekvence 5 tvaru kmitu je u obou modelů odlišnější. Tato frekvence je v případě MKP modelu příčný vlastní tvar kmitu a analytický model nemůže tento tvar nalézt, proto se musí srovnávat pátý tvar a frekvence analytického modelu s šestým u MKP modelu. Obrázek 6.4 zobrazuje první příčný vlastní tvar kmitu MKP modelu, je vidět, že se dle očekávání vyskytuje v ústní dutině, protože je tam nejširší místo. Tabulka 6.1 ukazuje porovnání vlastních frekvencí obou modelů.



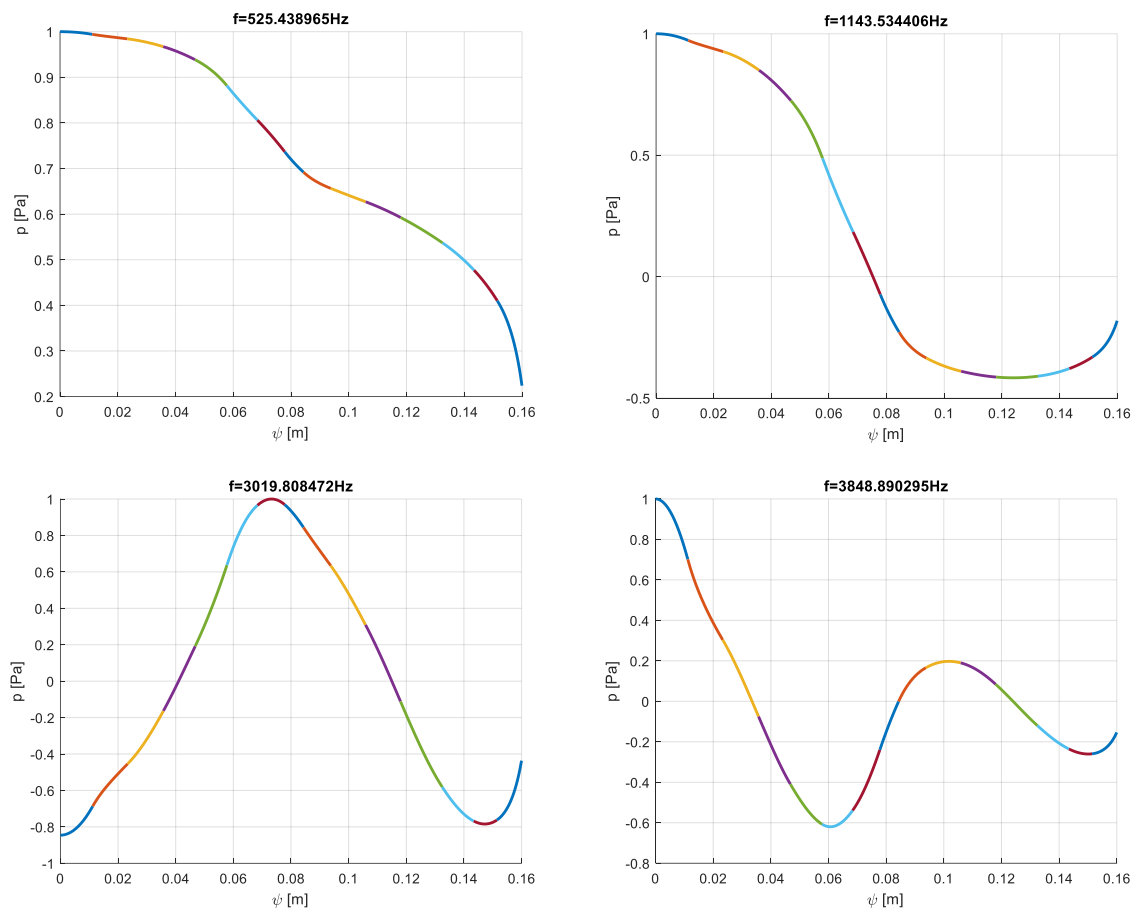
Obrázek 6.4 První příčný tvar kmitu

Tabulka 6.1 Porovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu.

Tvar	Analytický [Hz]	MKP [Hz]	Druh tvaru
1	630	655	1. podélný tvar
2	1227	1279	2. podélný tvar
3	3168	3286	3. podélný tvar
4	3927	4117	4. podélný tvar
5	-	4322	1. příčný tvar, ústní dutina
6	5020	5270	5. podélný tvar
7	-	6258	1. křížový tvar, ústní dutina
8	5982	6408	6. podélný tvar
9	-	6645	1. příčný tvar v krku
10	-	6952	2. příčný tvar, ústní dutina
11	6794	7613	7. podélný tvar

Dosud model neobsahoval informaci o disipaci akustické energie. Mimo ústní otvor jsou stěny modelovány jako tuhé, od kterých se akustická vlna beze ztrát odráží. Ústa mají předepsaný akustický tlak. To sice umožní sdílení energie s okolím, ale v celkové energetické bilanci to není ztráta energie. V minulých kapitolách bylo vysvětleno modelování výtoku akustických vln z úst. Tento jev se modeluje akustickou impedancí. Tato impedance vnáší do modelu tlumení.

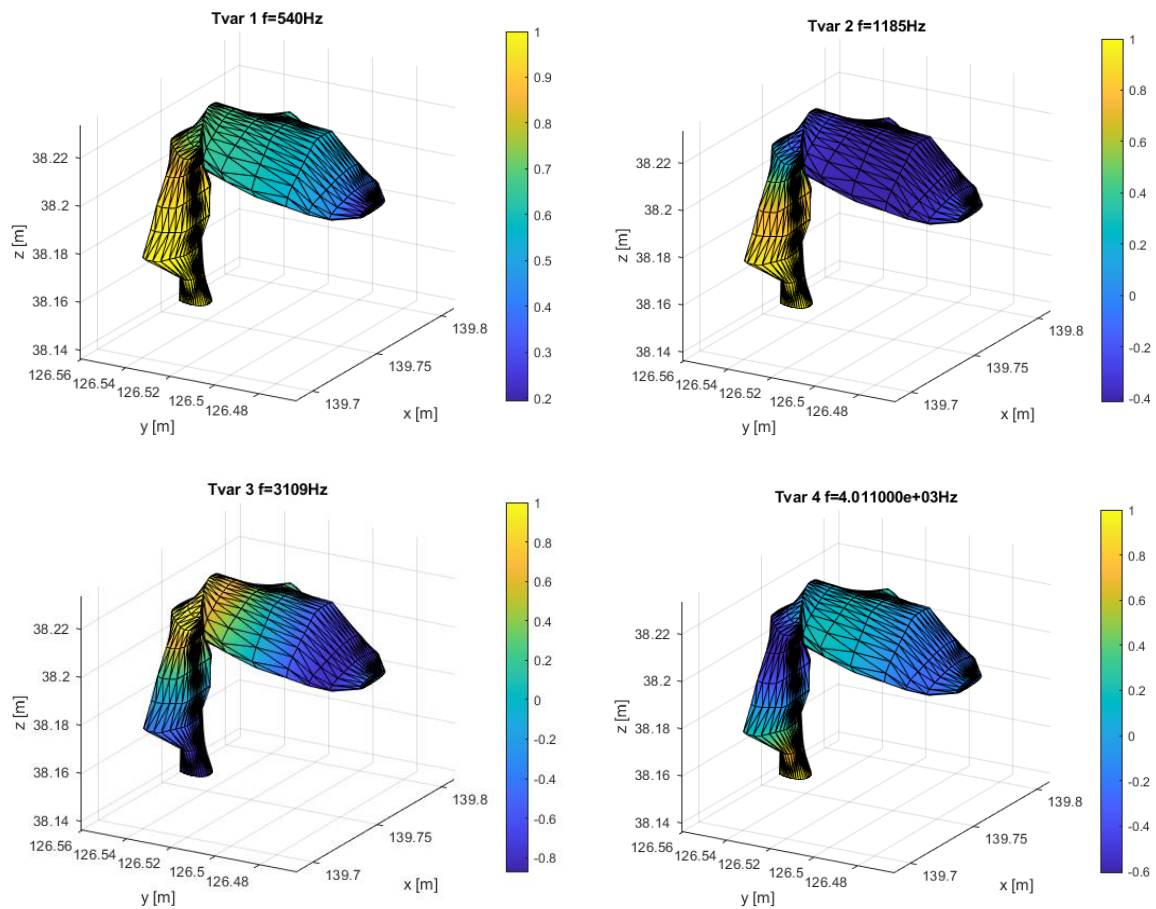
Nejprve byl proveden výpočet analytického modelu. Obrázek 6.5 zobrazuje vypočítané první 4 tvary kmitu. Z porovnání stejného modelu s akustickou impedancí a bez ní se ukazuje minimální vliv akustické impedance na tvary kmitu. Vliv je spíše kosmetický, malý rozdíl je vidět ve velikosti akustického tlaku v ústech.



Obrázek 6.5 Tvary kmitu analytického modelu s akustickou impedancí

Akustická impedance má mnohem větší vliv na velikost vlastních frekvencí než na tvary kmitu. Změna prvních vlastních frekvencí je zhruba 100 Hz k nižším hodnotám. MKP model vykazuje podobné změny jako model analytický. Obrázek 6.6 zobrazuje tvary kmitu MKP modelu a obrázek 6.7 zobrazuje průběhy akustického tlaku těchto tvarů po střednici vokálního traktu. I zde se potvrzuje, že tvary kmitu jen minimálně ovlivňuje akustická impedance. Při letmém pohledu na zobrazení tvarů není vidět rozdíl. Při podrobném porovnání jsou vidět stejné změny jako u analytického modelu. Podobně i frekvence tvarů kmitu se snížily. Tabulka 6.2 zobrazuje stejně jako předešlá tabulka porovnání obou modelů, tentokrát s akustickou impedancí. Porovnání znovu ukazuje, že MKP model vykazuje mírně vyšší frekvence než analytický model. Znovu je vidět, že příčné tvary kmitu analytický model nezachytí. Frekvence podélných tvarů kmitu se snížily. Toto snížení je u obou modelů okolo 100 Hz, pouze u některých bylo snížení mírně vyšší. Příčné tvary kmitu u MKP modelu prakticky nebyly ovlivněny akustickou impedancí. Změna frekvence příčných tvarů je většinou pouze v jednotkách hertzů. To je zcela přirozené, podélný tvar kmitu se odráží od plochy s akustickou impedancí a tím je ovlivněn. Příčný tvar kmitu se nijak dotýká plochy, a proto jí není

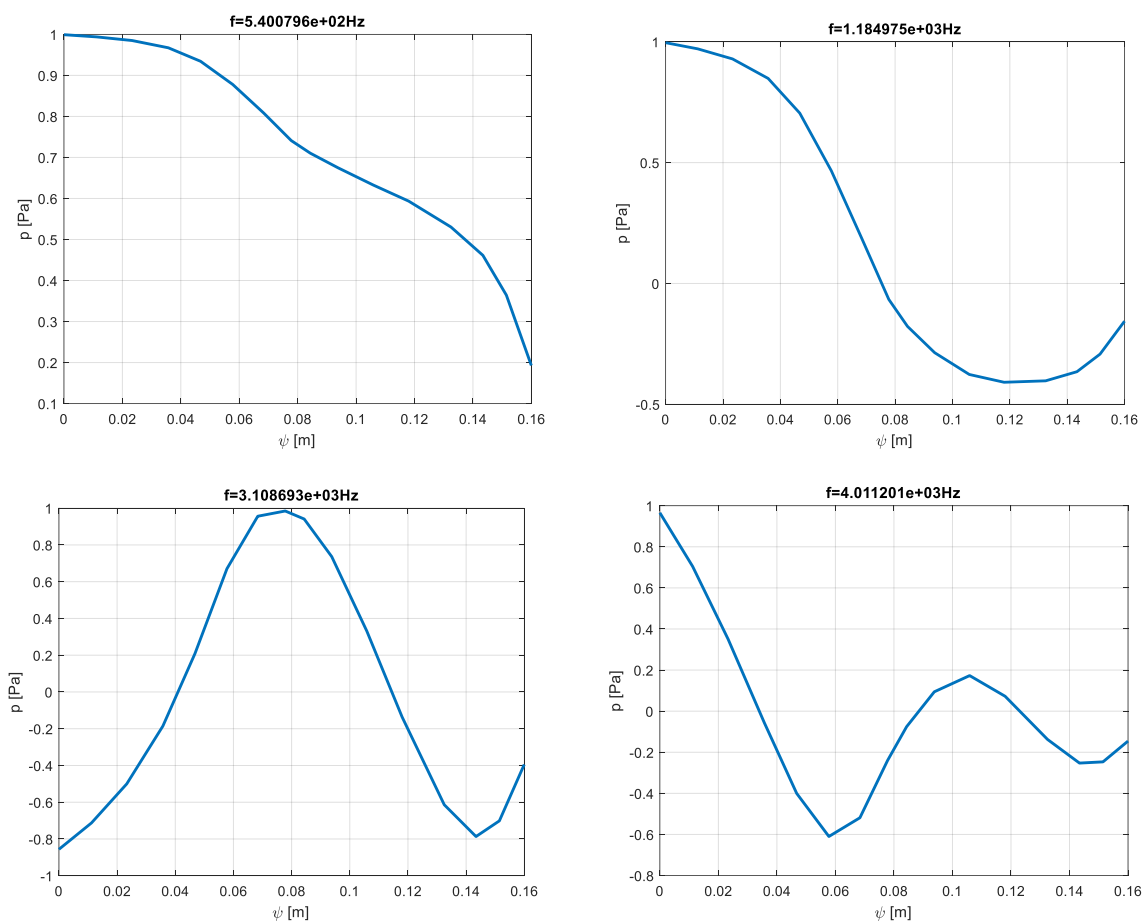
ovlivněn. Vlivem změny frekvence podélných tvarů a zachování frekvence příčných tvarů se prohodil charakter 7. a 8. tvaru kmitu.



Obrázek 6.6 Tvary kmitu MKP modelu s akustickou impedancí

Tabulka 6.2 Porovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu s akustickou impedancí

Tvar	Analytický [Hz]	MKP [Hz]	Druh tvaru
1	525	540	1. podélný tvar
2	1144	1185	2. podélný tvar
3	3020	3109	3. podélný tvar
4	3849	4011	4. podélný tvar
5	-	4320	1. příčný tvar, ústní dutina
6	4959	5186	5. podélný tvar
7	5813	6191	6. podélný tvar
8	-	6249	1. křížový tvar, ústní dutina
9	-	6645	1. příčný tvar v krku
10	-	6853	2. příčný tvar, ústní dutina
11	6715	7523	7. podélný tvar



Obrázek 6.7 Tvary kmitu na střednici MKP modelu s akustickou impedancí

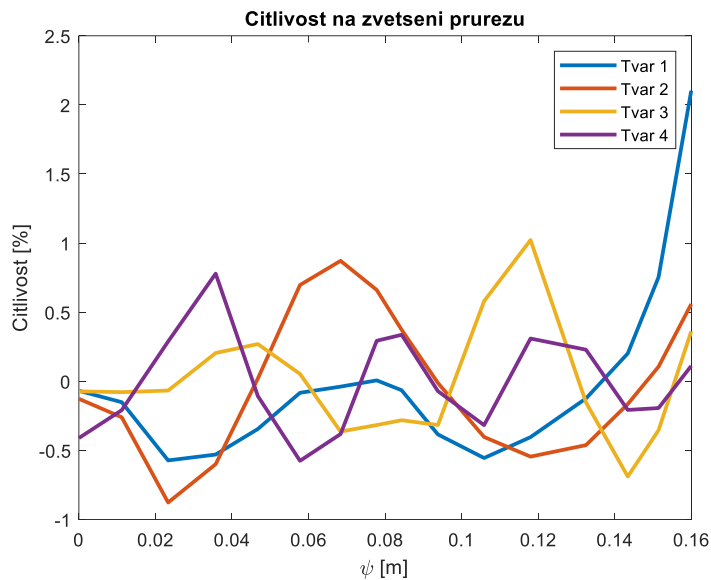
## 6.1 Citlivost modelu na vstupní parametry

Geometrie vokálního traktu bude laděna, aby se získaly požadované akustické vlastnosti. První odhady, jak upravovat geometrii, mohou vycházet z citlivosti akustických vlastností na změny geometrie. Geometrie analytického modelu je definována pouze délkami a průřezy. Proto je možné vyhodnocovat citlivost modelu na změny jednotlivých parametrů. Základní parametry ovlivňující reálnou akustiku vokálního traktu jsou vlastní frekvence. Proto byla provedena citlivostní analýza vlastních frekvencí na změny celkové délky vokálního traktu a na jednotlivé průřezy.

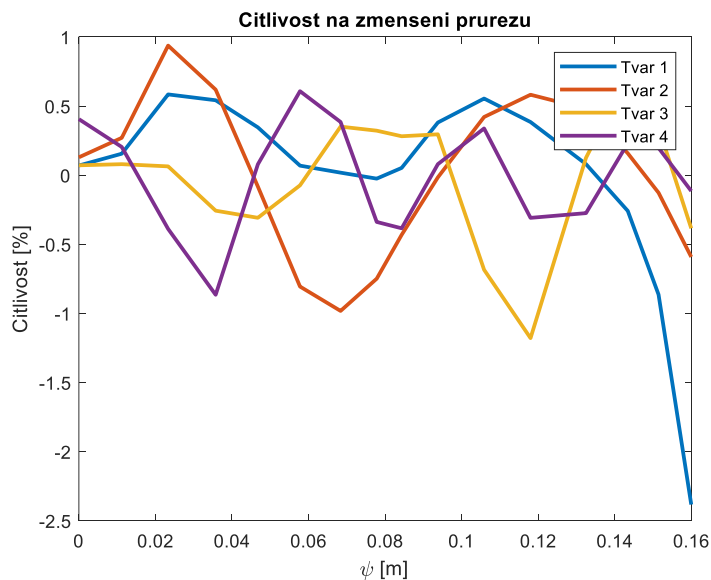
Dominantní tvary kmitu ve vokálním traktu jsou jednoznačně podélného charakteru. Obecně platí, že frekvence podélného tvaru kmitu v trubici konstantního průřezu je dána rychlostí zvuku, délkou trubice a okrajovými podmínkami. Vliv délky trubice je nepřímo úměrný vůči vlastní frekvenci. To u vokálního traktu neplatí přesně, protože nemá konstantní průřez. Z analýzy, kde se délka změnila o 10% (nahoru i dolů), je vidět, že se vlastní frekvence analytického modelu měnily očekávaným způsobem o 8 až 11%.

Vliv zvětšení jednotlivých průřezů na vlastní frekvence ukazuje obrázek 6.8 a obrázek 6.9. Změna průřezů pro analýzy byla znovu 10% v obou směrech. Na obrázcích jsou grafy pro první 4 vlastní frekvence. První sada grafů předpokládá zvětšení průřezů a druhá zmenšení. Je

vidět, že vliv při zmenšení je zhruba inverzní vůči zvětšení průřezu. Z grafů jde snadno zjistit, jak ovlivní změna průřezu v libovolném místě vlastní frekvence. První vlastní frekvence je nejcitlivější na změnu velikosti ústního otvoru. To se dá vysvětlit změnou akustické impedance, která je závislá na výstupním průřezu. Při úpravě průřezu o 10% se vlastní frekvence změní zhruba o 2–2.5% stejným směrem. Z porovnání citlivostních charakteristik a tvarů kmitu není zřejmá korelace mezi samotným tvarem a jeho citlivostí na změnu geometrie.



Obrázek 6.8 Citlivost analytického modelu na zvětšení průřezů



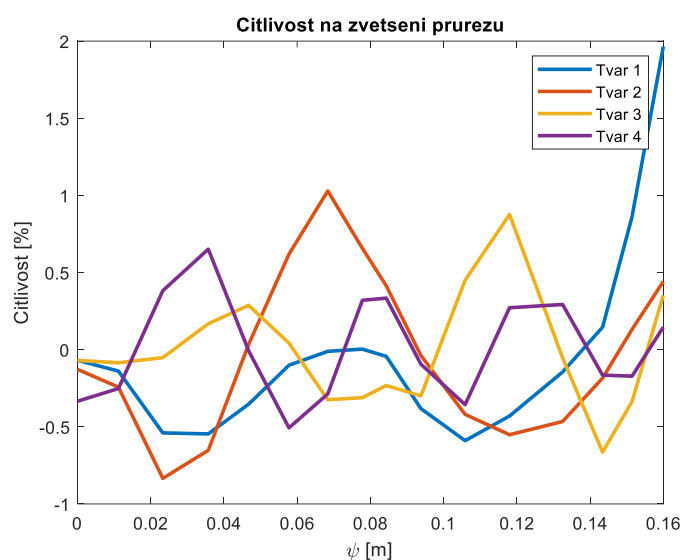
Obrázek 6.9 Citlivost analytického modelu na zmenšení průřezů

Stejná citlivostní analýza byla provedena s MKP modelem. MKP model je složitější a není omezen kruhovými průřezů. Jelikož geometrie je získána z CT, jsou průřezů obecného tvaru a není jednoduché je analyticky popsat a upravovat. Proto se možnost měnit tvar průřezu v citlivostní analýze nevyužil a stejně jako u analytického modelu se měnila pouze délka a průřezů. Dále MKP model umožňuje měnit zakřivení střednice vokálního traktu. Tato

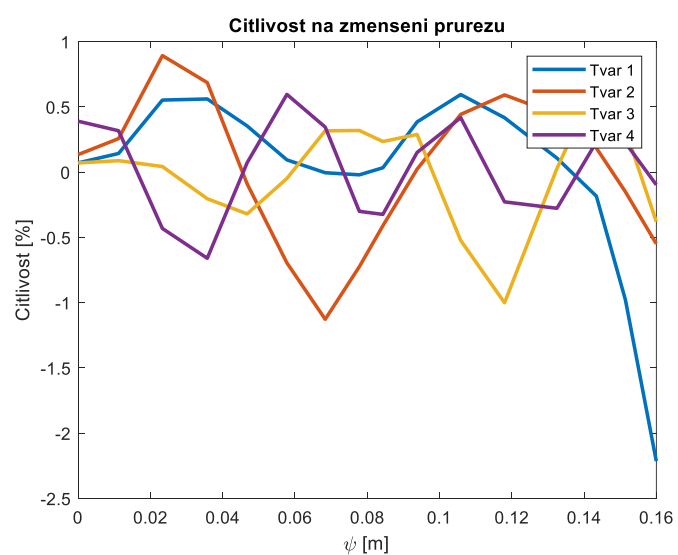


možnost také nebyla využita. Obecně se předpokládá, že zakřivení kanálu má marginální vliv na akustiku [3].

Změna délky vokálního traktu měla stejný vliv na vlastní frekvence jako u analytického modelu. A to zhruba 8–10% při 10% změně délky. Průřezy byly měněny tak, aby rovina, ve které se nacházejí uzly, byla zachována, a zároveň aby se zachovala poloha středního uzlu. Nová poloha obvodového uzlu je určena tak, aby uzel ležel na přímce protínající původní polohu a střední uzel. Tyto podmínky jsou postačující pro jednoznačnou definici nového řezu definovaného původním modelem a měřítkem. Obrázek 6.10 a obrázek 6.11 ukazují výsledky citlivostní analýzy MKP modelu. Při porovnání s výsledky analytického modelu je vidět, že se velice dobře shodují. Zásadní rozdíl je až u 5. tvaru kmitu. To je dáno tím, že je to příčný tvar. Tento tvar se nachází v ústní dutině, proto má nulovou citlivost na změny v krční části vokálního traktu. Naopak jeho citlivost na změny 11. průřezu je okolo 2%, protože v tomto průřezu má tvar své kmitny.



Obrázek 6.10 Citlivost MKP modelu na zvětšení průřezů



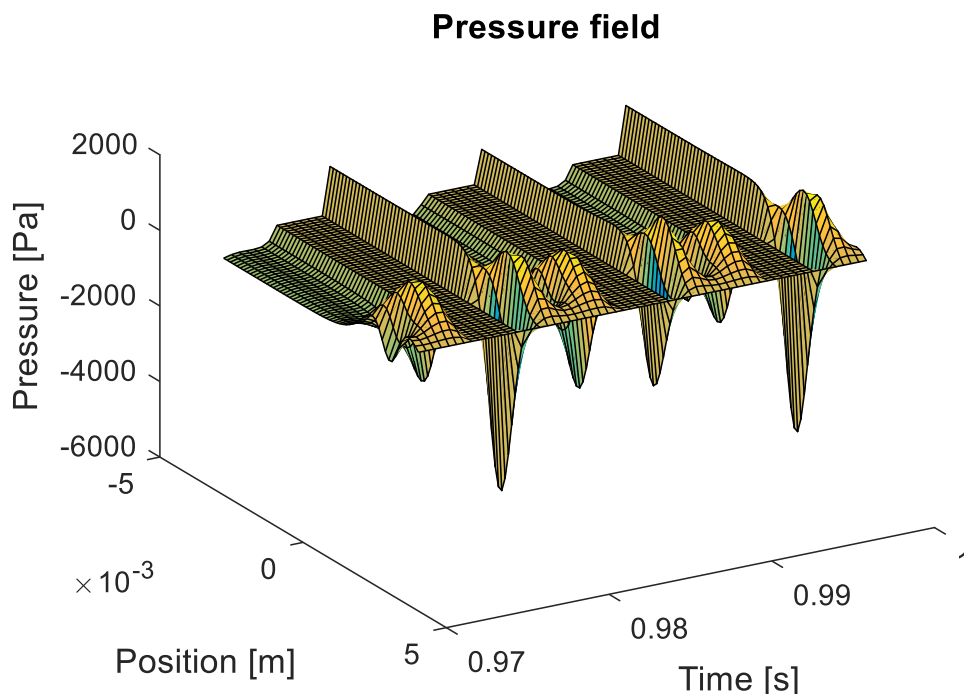
Obrázek 6.11 Citlivost MKP modelu na zmenšení průřezů

## 6.2 Simulace fonace

Pomocí vytvořených modelů lze při znalosti buzení simulovat akustický tlak v ústech. Takto je možné simulovat jednotlivé hlásky a přehrát je z reproduktoru. Simulování fonace je méně významné při zkoumání vokálních traktů. Analyzování modálních vlastností má nejzásadnější význam. Hlásku tvoří v podstatě pouze formanty a ty jsou dány vlastními frekvencemi vokálního traktu. Frekvenční analýza nezohledňuje buzení ani zesílení akustického přenosu vokálním traktem. Simulace přináší kvalitnější popis akustického vyzářování, ale její výsledky je složitější interpretovat. U frekvenční analýzy jsou výsledkem pouze číselné hodnoty frekvencí (alternativně tlumení), které lze jednoduše porovnávat a hodnotit.

Vokální trakt je buzen kmitáním hlasivek. Pro akustické simulace vokálního traktu není nutné modelovat hlasivky. Jsou totiž minimálně ovlivněné vokálním traktem. To je příznivé, modelování samobuzených kmitů hlasivek je komplikovaná úloha. Existují práce, které popisují výstupní parametry proudění z hlasivek. Model může být buzen akustickým tlakem, nebo akustickou rychlostí. Většinou se buzení modeluje funkcí rychlosti nebo průtoku vzduchu v čase. Tato práce již popsala Fantův-Liljencrantův čtyřparametrový model [24] objemového pulzu, který se běžně používá, protože experimentální data jsou špatně dostupná.

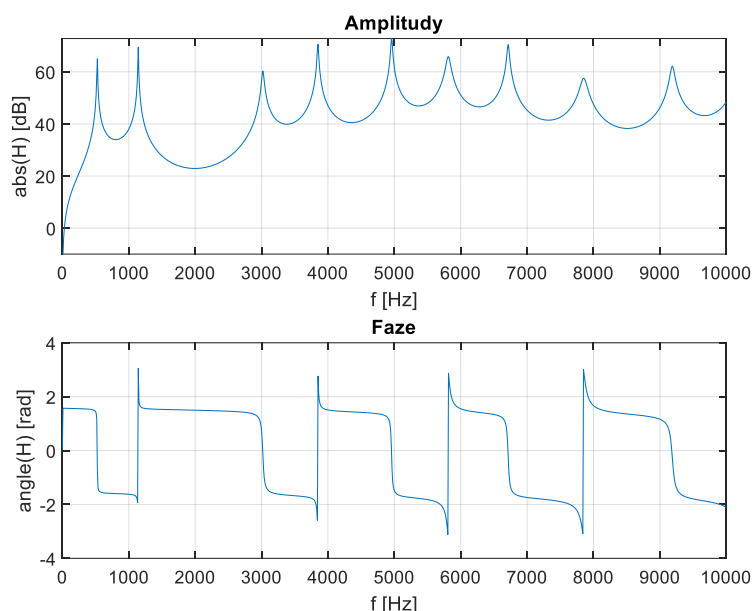
Použitý pulz v této práci má tyto parametry: základní frekvence 100 Hz,  $t_e = 0.006$  s,  $t_a = 0.00023$  s,  $t_p = 0.0045$  s a  $E_e = 0.4$  m<sup>3</sup>s<sup>-2</sup>. Obrázek 2.7 zobrazuje použitý objemový pulz procházející hlasivkami. Obrázek 2.8 zobrazuje amplitudové a fázové spektrum, které je vstupem do modelu, jelikož model pracuje ve frekvenční oblasti.



Obrázek 6.12 Tlakové pole v glottis [99]

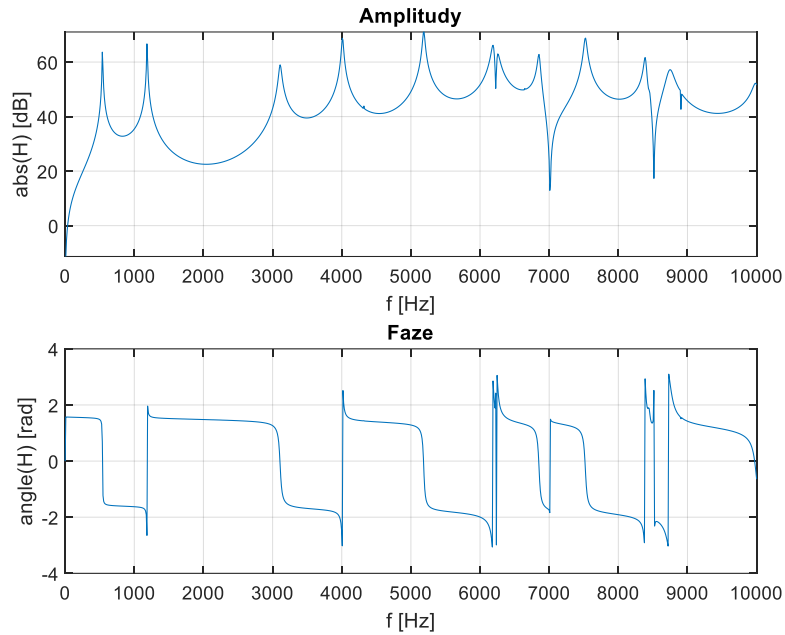
Alternativně je možné použít jiné budící signály, příkladem mohou být tlaková pole (obrázek 6.12), která se používají pro buzení poddajných modelů hlasivek [101] a [100]. Existují efektivní modely samobuzených kmitů hlasivek [103] a [99], určené právě ke generování těchto tlakových polí. Postup, kde se využije jednoduchý model samobuzených kmitů pro získání tlakového pole, zajistí, že ve složitějších modelech hlasivek [102] není nutné řešit náročnou problematiku proudění tekutin. Hodnoty tlakového pole v horní části hlasivek jsou tlakové pulzy budící vokální trakt.

Budící pulz je periodická funkce, obrázek 2.7 zobrazuje pouze jednu periodu. Frekvenční obraz periodické funkce není spojitý, obsahuje pouze diskrétní hodnoty, které jsou násobkem základní frekvence. To je výhodná vlastnost, protože při simulaci se vyhodnocuje odezva pouze na tyto budící frekvence. Základní frekvence hlasivek je většinou blízká 100 Hz a zájmové frekvenční pásmo je do 5–10 kHz. Takže reálně stačí spočítat odezvu na pár desítek frekvencí pro získání výsledků v zájmovém frekvenčním pásmu. Kdyby buzení nebylo periodické, obsahovalo by nekonečně mnoho harmonických složek, a bylo by nutné provést výpočet na výrazně větším počtu frekvencí pro získání kvalitního výsledku.



Obrázek 6.13 Přenosová funkce analytického modelu

Frekvenční přenos mezi akustickou vstupní rychlostí a akustickým tlakem v ústech je nezávislý na frekvenční charakteristice buzení. Proto byl nejprve vyhodnocen samotný přenos, podle kterého jdou dobře potvrdit výsledky frekvenčních analýz a je i vhodnější pro porovnání různých typů modelů. Frekvenční přenos je totéž jako odezva na buzení Diracovým pulzem, který má frekvenční obraz roven jedné a je reálný a nezávislý na frekvenci.

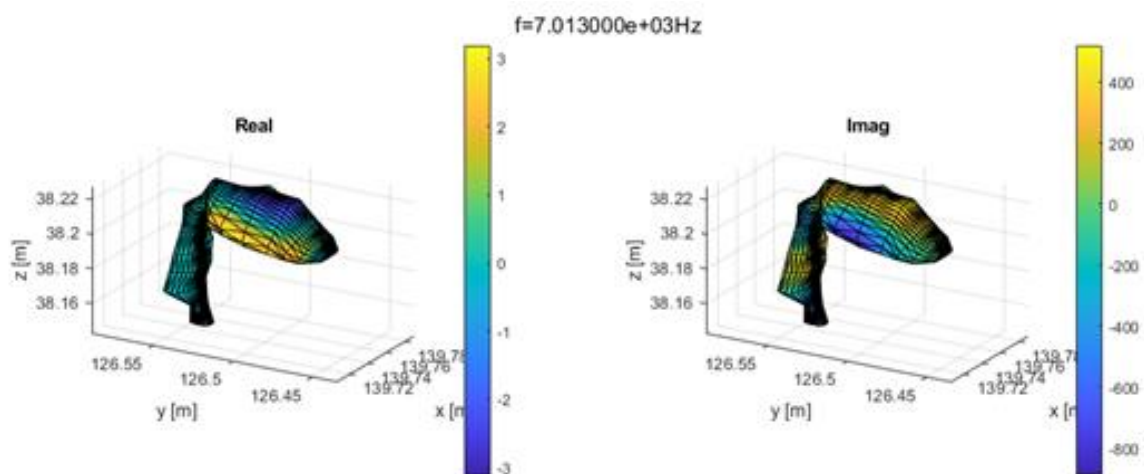


Obrázek 6.14 Přenosová funkce MKP modelu

Obrázek 6.13 zobrazuje přenosovou funkci analytického 1D modelu vokálního traktu. Přenosová funkce vypadá přesně podle obecných předpokladů. Na většině frekvenčního spektra je fázový posuv mezi vstupem a výstupem jedna čtvrtina periody. Tento posuv je daný charakterem vstupu a výstupu. Vstupem je akustická rychlost, zatímco výstup je akustický tlak. Mezi akustickou rychlostí a tlakem v jednom místě je vždy právě tento posuv. Maxima amplitudového přenosu vznikají při vlastních frekvencích. Při průchodu jakékoli rezonance se odezva opozdí o polovinu periody. To jsou očekávané výsledky. Jsou to obecně platná očekávání, která lze snadno odvodit na triviálních geometriích. Dále lze odhadnout, že tlumení v nižších frekvencích je nižší než ve frekvencích vyšších. To lze pozorovat především z tvaru prvních dvou rezonančních vrcholků, které jsou výrazně štíhlejší než ostatní. I fázový diagram naznačuje vyšší tlumení ve vyšších frekvencích. Fáze se při nižších frekvencích mimo rezonance téměř nemění, ale ve vyšších frekvencích je klesající. To skvěle koresponduje s definovaným tlumením modelu. Jediný efekt vnášející do modelu tlumení je vyzařování akustickou impedancí v ústech. Informace o tlumení je obsažená v reálné části impedance. Obrázek 2.14 zobrazuje použitou akustickou impedanci. Je zde vidět, že v řešeném frekvenčním pásmu je reálná složka rostoucí s frekvencí, a tím je vysvětleno, proč model vykazuje nejnižší tlumení v nízkých frekvencích.

Naproti tomu obrázek 6.14 zobrazuje tutéž charakteristiku pro MKP model. I zde jsou splněna základní očekávání jako rezonanční vrcholky na vlastních frekvencích modelu a fázové zpoždění o půl periody při překročení vlastní frekvence. MKP model potvrdil charakter tlumení daný akustickou impedancí. První dva rezonanční vrcholky jsou štíhlejší ve srovnání s ostatními, tlumení ve vyšších frekvencích je vyšší než v nízkých. Na rozdíl od analytického modelu zde existují antirezonance. Vlivem tlumení nejsou antirezonance ideální a přenos nikde neklesá k nule.

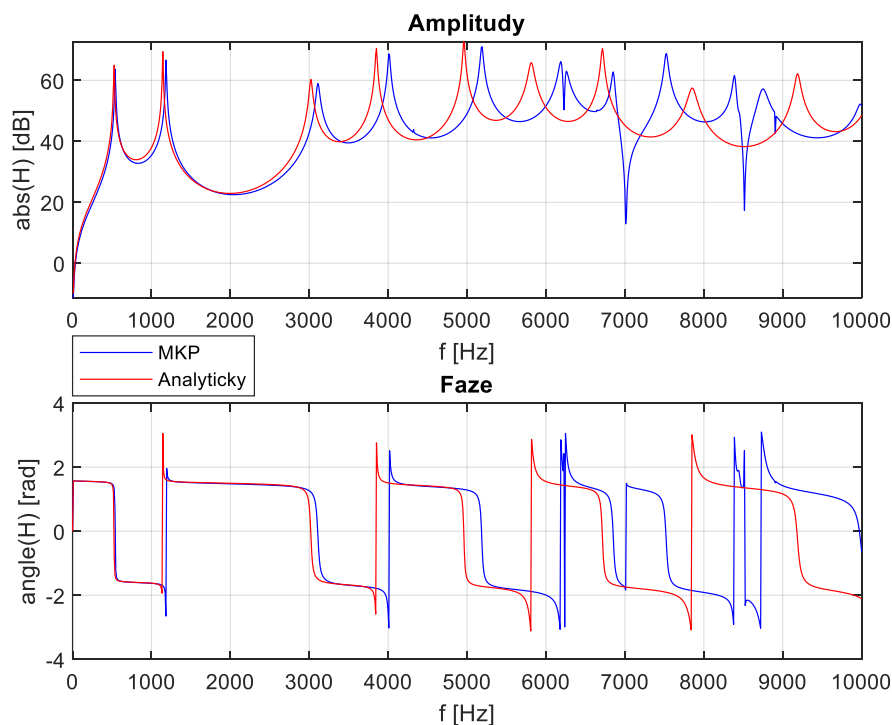
Při běžném pohledu na přenos jsou vidět 4 antirezonance při frekvencích 6227 Hz, 7013 Hz, 8515 Hz, 8904 Hz. Stejně jako při průchodu rezonancí se fázová charakteristika změní o půl periody. Rozdíl je v tom, že většinou se fázová charakteristika nezpzdí jako u rezonance, a naopak předbíhá k menšímu fázovému zpoždění. Jedinou výjimkou je frekvence 7013 Hz, kde dochází ke zpoždění. Na první pohled se poslední zobrazená antirezonance nijak neprojevuje ve fázovém prostoru. To je pouze důsledek zobrazení grafu. U této antirezonance se zároveň nachází rezonance. Jedná se o příčný tvar kmitu v krční části vokálního traktu. Tyto rezonance a antirezonance jsou vzdálené jen asi o 0.5 Hz, proto se jejich fázové efekty prakticky ruší. Graf by musel mít jemnější frekvenční rok, aby zobrazení v této oblasti bylo korektní. Protože se antirezonance zpravidla nachází v blízkosti rezonance, tak antirezonanční tvar kmitu je zpravidla téměř totožný s vlastním tvarem kmitu, který je jí nejbližší. Obrázek 6.15 ilustruje tvar antirezonančního kmitu s nehlubší antirezonancí. V krční části se jedná o podélný tvar, ten je prakticky ryze imaginární, jelikož je vyhodnocován tlak, ale buzení je rychlostí. Mezi rychlostí a tlakem je fázový posuv o čtvrtinu periody. Tento tvar se v ústní části transformuje na příčný, který má uzel ve středu úst, tím vzniká propad na amplitudové charakteristice.



Obrázek 6.15 Antirezonance při frekvenci 7013 Hz

Zvláštní pozornost zasluhují vlastní frekvence, jejichž tvar kmitu nemá podélný charakter. První takový tvar je v celkovém pořadí pátý a má frekvenci 4320 Hz. V amplitudové charakteristice je téměř neznatelný. To znamená, že použité buzení ho nedokáže vybudit, nebo uzel sítě, ve kterém sledujeme výsledky, je blízko jeho uzlu. Alternativně může nastat kombinace. Je to čekávaný výsledek. Jedná se tvar, který kmitá mezi levou a pravou stranou ústní dutiny. V rovině symetrie ústní dutiny má uzel a tím se navenek nemůže projevit. Miniaturní rezonanční vrcholek se však ve výsledku objevil, to je důsledkem pouze přibližné geometrické symetrie modelu. Stejný jev je pozorován u příčného tvaru kmitu v krční části traktu při frekvenci 6645 Hz. Oproti tomu tvary, které mají frekvence 6249 Hz a 6853 Hz, se v přenosu projeví, přestože nemají příčný charakter. To je dáno tím, že jeden je šikmý a nemá tedy uzel v oblasti úst, a druhý je sice příčný, ale už je to druhý příčný tvar, který má v rovině

symetrie svou střední kmitnu. Oba tyto tvary se v přenosu projevují, ale jejich zesílení není tak velké jako u podélných tvarů.



Obrázek 6.16 Porovnání frekvenční charakteristiky modelů

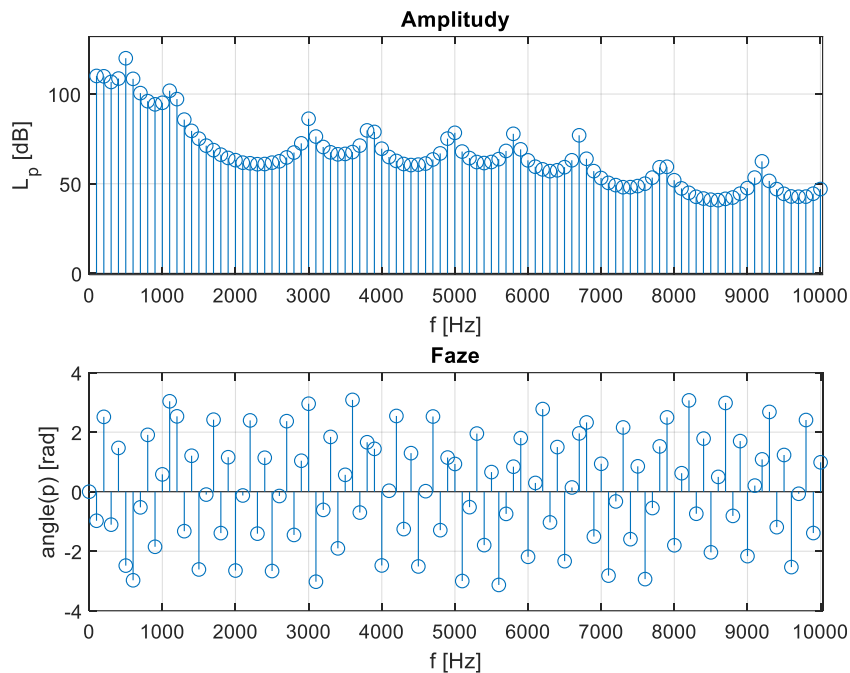
Výsledky frekvenčního přenosu obou modelů je možné porovnat. Porovnání zobrazuje obrázek 6.16. V nízkých frekvencích je shoda ideální. Modely se začínají lišit na frekvenci 4 kHz. Ve vyšších frekvencích se lokálně projevují antirezonance a nepodélné tvary kmitu. Tyto efekty musí vytvořit rozdíly ve frekvenčních přenosech. Při použití jemnější diskretizace MKP modelu by se oba modely frekvenčně přiblížily, ale na úkor výpočtové efektivity. Tato diskretizace byla zvolena jako kompromis mezi rychlostí výpočtu a kvalitou výsledků. Vyšší frekvence, kde vznikají rozdíly, nejsou pro řešené problémy rozhodující.

Přenosové charakteristiky odpovídají obecným očekáváním na akustický přenos v oblasti, která charakterově připomíná 1D kanál obecného průřezu. Není tedy problém zkusit určit frekvenční odezvu výstupního akustického tlaku na buzení hlasivkami. Ta se dá spočítat použitím okrajové podmínky na vstupním průřezu vokálního traktu s hodnotami rychlosti proudícího vzduchu. Nebo se využije předem spočítaný frekvenční přenos  $H(\omega)$  a pouze se vynásobí frekvenčním obrazem budícího signálu  $\hat{v}'_n(\omega)$ , který představuje rychlost výtoku vzduchu z hlasivek.

$$\hat{p}'(\omega) = H(\omega)\hat{v}'_n(\omega) \quad (6.1)$$

Frekvenční přenos modelu je po částech spojitá komplexní funkce, proto byla zobrazena souvislými čarami. Budící pulz je periodická funkce, proto její frekvenční obraz obsahuje pouze základní frekvenci (první harmonická složka) a její násobky (vyšší harmonické složky), ostatní frekvence mají nulovou amplitudu. Z principu výpočtu výstupu modelu je

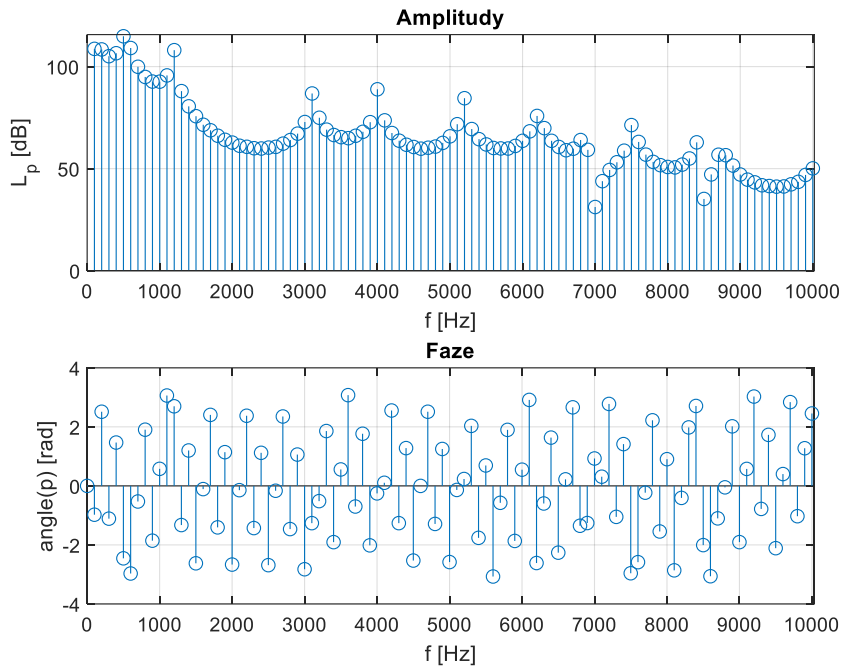
jasné, že výstup bude obsahovat pouze ty frekvenční složky, které jsou obsaženy v buzení a ostatní zůstanou nulové. Z tohoto důvodu je stejně jako u zobrazení budícího spektra použit stem (stonkový) graf, který je vhodný pro zobrazení diskretních dat.



Obrázek 6.17 Frekvenční obraz výstupního akustického tlaku analytického modelu

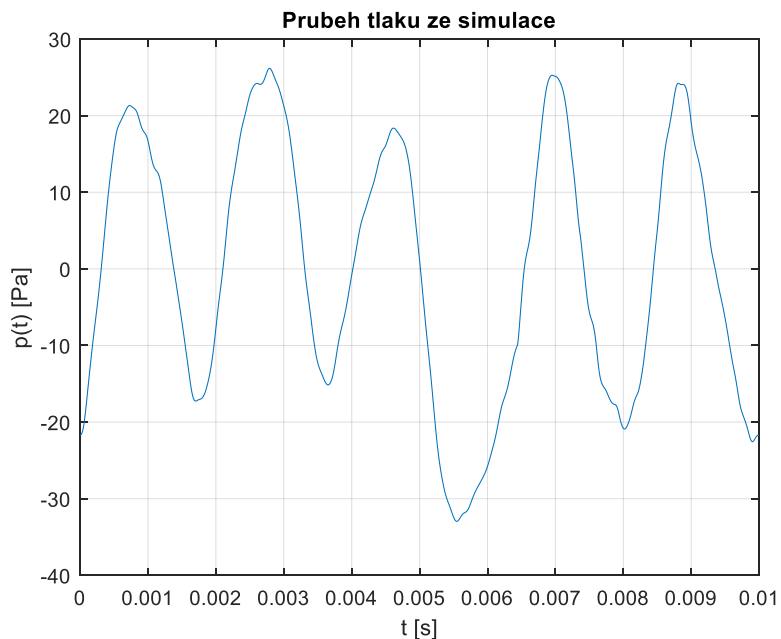
Výsledky analytického modelu zobrazuje obrázek 6.17. V amplitudové charakteristice je jasně vidět vliv vlastních frekvencí modelu. Dále je jasně vidět vliv klesající tendence amplitud s rostoucí frekvencí budícího signálu. To jsou očekávané vlastnosti. Amplitudy nejnižších harmonických složek (před prvním rezonančním vrcholkem) jsou téměř totožné, druhý rezonanční vrcholek je relativně nevýrazný. Vzhledem k charakteru fázové charakteristiky budícího pulzu nelze očekávat, že fázová charakteristika výstupního tlaku bude obsahovat charakteristické znaky.

Prakticky stejné vlastnosti mají výsledky MKP modelu (obrázek 6.18). Klesající charakter s rezonančními vrcholy. Nejviditelnější rozdíl mezi modely je v oblasti dvou nejhlubších antirezonancí (7 kHz a 8.5 kHz), kde přirozeně jsou výrazně nižší amplitudy.



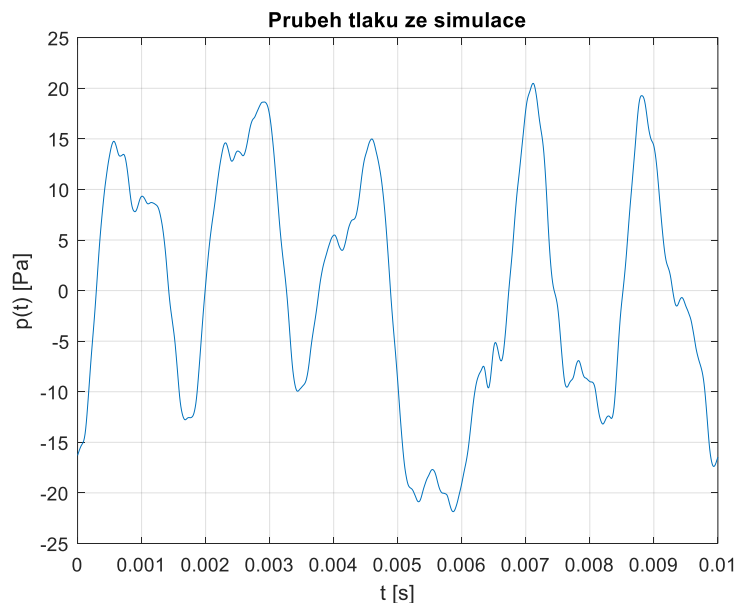
Obrázek 6.18 Frekvenční obraz výstupního akustického tlaku MKP modelu

Pro hodnocení akustické emise do okolí je nevhodnější sledovat spektrum výstupního akustického tlaku. Přesto pro úplnost byl výsledek převeden zpětnou Fourierovou transformací do časové oblasti. Jelikož budící pulz je periodický a dlouhý 0.01 s, tj. 100 Hz, musí být i výstupní signál periodický se stejnou frekvencí. Rychlostní pulz má nenulovou střední hodnotu. To je dané tím, že normální fonace probíhá vždy při výdechu. Tato střední hodnota se ve výpočtu ignoruje. Jedná se o složku o nulové frekvenci, kde akustika ztrácí význam. Oba modely (analytický i MKP) jsou, mimo speciální případy okrajových podmínek, při této frekvenci singulární.



Obrázek 6.19 Výstupní tlak analytického modelu v časové oblasti





Obrázek 6.20 Výstupní tlak MKP modelu v časové oblasti

Diskretizace časového pulzu je provedena 1024 vzorky a délka pulzu je 0.01 s. Frekvenční krok po převedení do frekvenční oblasti je 100 Hz, maximální frekvence obsahuje 102 300 Hz, vlivem aliasingu je použitelné spektrum pouze do 51 200 Hz. To je výrazně více než rozsah lidského ucha.

První, co je na časovém průběhu (obrázek 6.19, obrázek 6.20) jasně vidět, je nejdominantnější frekvence. Na průběhu je 5 vrcholů, to znamená, že je nejvíce zastoupená pátá harmonická složka. To souhlasí s frekvenčním spektrem, kde je nejvyšší vrchol na této frekvenci. Zároveň je to v blízkosti vlastní frekvence, kde je velké zesílení. Další vlastní frekvence již nemají tak vysoké zesílení, aby vykompenzovaly pokles amplitud v buzení a projevují se jako lokální maxima, ale nepřevyšují vliv frekvencí v oblasti 100–600 Hz. Další viditelný rozdíl jsou větší amplitudy u analytického modelu a méně hladký průběh u MKP modelu.

Vypovídající hodnota výstupu zobrazeného v časové oblasti je sporná. Časový průběh je citlivý na změny frekvenčního spektra. Největší vliv má okolí rezonančních vrcholů. Velký problém je, že tvar budícího pulzu byl určen uměle podle univerzálního modelu. Během CT měření nebyl nijak měřen. Takové měření se běžně nedělá. Jelikož oba modely nemají přesně stejné polohy rezonančních vrcholů, je v jejich okolí veliký rozdíl v amplitudovém přenosu. Spektrum budícího pulzu je tvořeno diskrétními frekvencemi. Pokud se potká harmonická složka buzení s rezonančním vrcholkem jednoho modelu, pak se dá očekávat, že výstup na této frekvenci bude na tomto modelu výrazně vyšší než na druhém. Tato situace jde vidět hned na první vlastní frekvenci modelů. Pátá harmonická složka má 500 Hz, to je 25 Hz daleko od rezonančního vrcholku analytického modelu a 40 Hz daleko u MKP modelu. Proto je u MKP modelu tato složka méně zastoupená. Jelikož je to nejvýraznější složka v celém spektru, projevuje se to na tlakovém rozsahu v časové oblasti. U analytického modelu je dynamický rozsah asi -33–25 Pa a u MKP -22–21 Pa. Nižší hladkost MKP výsledků je dána stejným efektem.

Stačila by malá úprava základní frekvence buzení, aby se vybrané vlastní frekvence lépe či hůře trefily a rozdíl by byl viditelný na časových průbězích.

### 6.3 Tvarové optimalizace

Výsledky frekvenčních a přenosových vlastností jsou důvěryhodné. Oba přístupy k řešení problému jsou zcela odlišné. Spojuje je pouze vlnová rovnice, přesto jsou vlastnosti modelů prakticky totožné. V případě testovacích úloh, kde se modeloval nezakřivený kanál kruhového průřezu o proměnném průměru a byla použita jemnější síť po délce MKP modelu, byly výsledky obou modelů zcela totožné a tedy ideální. Rozdíly ve výsledcích modelů vyplývají především ze dvou faktorů. Ten méně významný je zanedbání zakřivení kanálu a tvaru průřezu u analytického modelu. Druhý faktor je diskretizace MKP modelu s použitím pouhých 15 vrstev elementů. Hrubší diskretizace MKP modelu se může projevit až ve chvíli, kdy existují větší tlakové gradienty, to nastává až s rostoucí frekvencí. Stejný závěr lze provést i o vlivu zakřivení a tvaru průřezu. Modely jsou naladěny tak, aby dobře fungovaly do 4 až 5 kHz, teprve poté začnou být jejich výsledky nedůvěryhodné. Lidský sluch sice rozezná i vyšší frekvence, ale pro lidský hlas už takto vysoké frekvence významné nejsou. Proto takové nastavení modelů je dobrým kompromisem mezi rychlostí výpočtu a kvalitou výsledků.

Rychlost výpočtu je stěžejní parametr u optimalizačních výpočtů, protože při nich je výpočet řešen opakovaně a mnohokrát. Časová úspora jednoho běhu se násobí počtem běhů a ve výsledku to mohou být obrovské časové rozdíly. Další řešenou úlohou je hledání tvaru vokálního traktu pro získání definovaných vlastností. Tato úloha spočívá v hledání průřezů a délek u analytického modelu, nebo poloh uzlů MKP modelu. Už z principu fungování těchto modelů je nemyslitelné snažit se hledat analytickou cestou algoritmus inverzního výpočtu. Výpočet vždy probíhá na základě známé geometrie a neznámých akustických vlastností. Optimalizační algoritmy jsou implementačně velice snadnou cestou hledání inverzního řešení. Jejich implementační efektivita a snadná pochopitelnost je draze vykoupena jejich výpočetní neefektivitou. Přestože existuje mnoho více či méně efektivních optimalizačních algoritmů, všechny v konečném důsledku jsou založeny na metodě pokusu a omylu, i když se tak nemusí na první pohled zdát.

Požadované vlastnosti vokálního traktu jsou především jeho formanty. To jsou z fyzikálního hlediska vlastní frekvence akustického modelu. K tomuto účelu byly použity genetické algoritmy. Genetický algoritmus [32] byl zvolen, jelikož je to moderní, často používaná a osvědčená metoda. Základní princip se inspirované v genetice a biologii. Vychází se z existence populace jedinců. V tomto případě jakýkoliv model vokálního traktu představuje jedince. Jedinci v první populaci mohou být generováni náhodně nebo algoritmem. Každý jedinec je ohodnocen jeho skórem/kvalitou (výpočet cílové funkce). Tato kvalita je dopočítána, výpočet je definován uživatelem. Z populace je vytvořena nová populace. Jedinci nové populace vzniknou z jedinců generace předešlé. Algoritmus zajistí, že lepší jedinci z minulé generace mají větší šanci se projevit v následující. Při vytváření nových jedinců se parametry rodičů mohou křížit, mutovat a podobně. To závisí na konkrétním optimalizačním řešiči. Slabší

jedinci postupně zanikají a silnějším se kombinují vlastnosti. Takto vznikají další a další generace, dokud není splněna ukončovací podmínka algoritmu. Výsledkem je nejsilnější jedinec. Velkou výhodou je, že genetické algoritmy se řadí mezi globální optimalizační metody. To znamená, že mohou nalézt nejen nejpřístupnější lokální extrém cílové funkce, ale mohou překonat potenciální bariéry a dojít k větším extrémům cílové funkce. Globální charakter v tomto případě vznikl díky použití pseudonáhodných rozhodnutí při křížení a mutacích. To, že naleznou globální extrém bez ohledu na počáteční stav výpočtu, však není zajištěno.

Pro použití optimalizace je třeba definovat variované vstupní parametry a cílovou funkci, která ohodnotí daného jedince. Vstupní parametry musí dokázat dostatečně měnit tvar vokálního traktu, aby paleta geometrických konfigurací byla ideálně neomezená. To vede k vysokému počtu parametrů. S rostoucím počtem parametrů roste časová náročnost, protože víc kombinací znamená víc možných variant, a tím i víc analýz a výpočetního času. Musí se tedy nalézt kompromis. Největší vliv na akustiku vokálního traktu má jeho průřez a délka. Proto byly jako optimalizační parametry zvoleny právě průřezy a délka celého vokálního traktu (nikoliv jednotlivých částí samostatně). Průřezů je dohromady 16 (15 vrstev prvků), celkový počet parametrů je 17. Pro snazší představu při běžném pohledu na výsledky nejsou hodnoty optimalizačních parametrů absolutní hodnoty v metrech a m<sup>2</sup>, ale pouze koeficienty udávající velikosti relativně vůči výchozí geometrii. Jednotkové hodnoty znamenají výchozí model (popsaný v předešlých kapitolách), číslo větší než 1 znamená zvětšení parametru a číslo menší než 1 zase zmenšení.

Formulace cílové funkce je asi nejzásadnější pro optimalizace. Použitý řešič genetických algoritmů (funkce *ga* v optimalizačním toolboxu Matlabu) úlohu formuluje jako hledání minima cílové funkce. Je potřeba definovat požadované akustické chování. K tomu byla použita naměřená data pro hlásku *a*: [91]. Měřená osoba byla žena bez hlasových a sluchových poruch. K měření byl použit mikrofón DPA 4066-F, omnidirekční se zesilovačem DPA MMA6000 nastavený na zesílení +15 dB. Záznamové zařízení bylo M-Audio Microtrack II, s 48 kHz vzorkovací frekvencí a 24 bitovým AD převodníkem. Z těchto dat byly známé pouze hodnoty formantů pro základní hlásky. Předchozí výpočty ukázaly klesající význam frekvenčního spektra při rostoucí frekvenci. Z tohoto důvodu jsou použity první čtyři formanty.

$$f_{\text{měřené}} = [623, 1251, 2552, 3459] \text{ Hz} \quad (6.2)$$

Hlavní část cílové funkce je definována jako rozdíl frekvencí formantů a vlastních frekvencí modelu. Protože se hledá minimum, je na rozdíly aplikovaná absolutní hodnota a hodnoty sečteny. Taková cílová funkce nabývá hodnoty 0 pro ideální shodu a roste lineárně s odchylkou frekvence. Význam vyšších formantů je násobně nižší než prvních, proto byl výpočet zobecněn. Místo prostého součtu absolutních hodnot byl použit vážený součet.

$$CIL = \sum_{i=1}^4 d_i |f_{i \text{ měřené}} - f_i| + PEN \quad (6.3)$$

Parametr  $d_i$  je váha  $i$ -té frekvence a  $f_i$  je vlastní frekvence modelu. Váhy byly voleny tak, aby jejich součet byl roven 1 a rozdíl mezi po sobě jdoucími váhami byl konstantní. Při splnění těchto podmínek jsou váhy definovány jediným parametrem  $D \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle$ .

$$\mathbf{d} = \frac{1}{4} [1 + 6D, 1 + 2D, 1 - 2D, 1 - 6D] \quad (6.4)$$

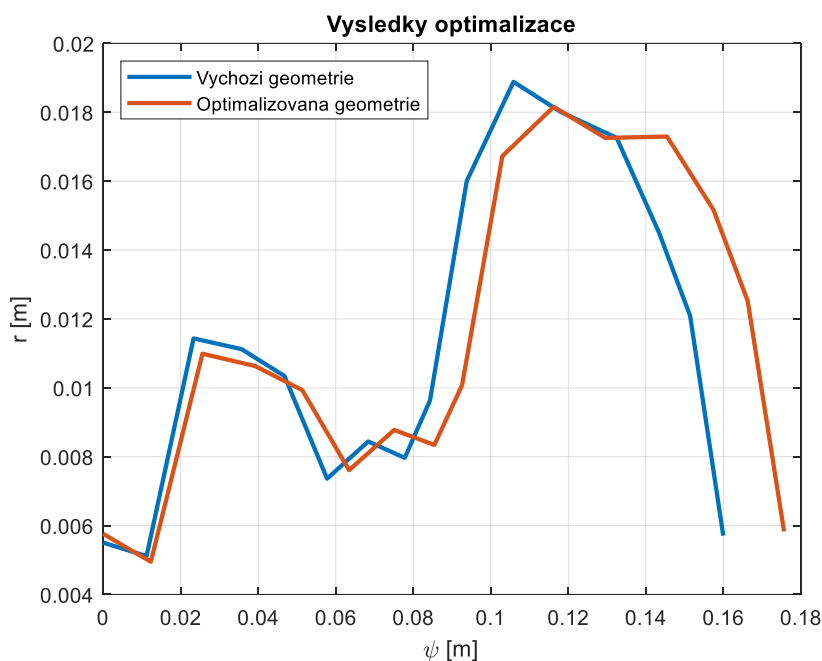
Pokud se tento parametr rovná 0, pak jsou váhy všech frekvencí stejné, pokud dosáhne hodnoty  $1/6$ , pak je maximální důraz kladen na první frekvenci a poslední frekvence není řešena vůbec.

Takto formulovaná úloha pravděpodobně nebude mít jednoznačné řešení. Geometrických konfigurací, které mají hledané 4 první vlastní frekvence, pravděpodobně existuje nekonečně mnoho. Je jasné, že výsledná geometrie musí být fyziologicky přípustná. Výchozí geometrická konfigurace vznikla CT měřením a je tedy fyziologicky přípustná. Hodnocení, zda je libovolná geometrie přípustná nebo nikoliv, je problematické a subjektivní. Proto se použil jednoduchý přístup. Čím více se liší výchozí geometrie vokálního traktu od geometrie modelu, tím více se předpokládá jeho fyziologická nepřípustnost. To se do výpočtu zohledňuje penalizačním faktorem.

$$PEN = k_1 \left( e^{k_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{17} (p_i - 1)^2}} - 1 \right) \quad (6.5)$$

Použitá cílová funkce je součtem popsané cílové funkce a penalizace. Ve vztahu pro penalizační faktor vystupují 2 koeficienty  $k_1$ ,  $k_2$  definující citlivost penalizace na odchylku tvaru. Parametr  $p_i$  je optimalizační parametr dané geometrie. Odmocnina ve výrazu definuje Euklidovskou normu vektoru optimalizačních parametrů snížených o hodnotu 1. Je to tedy číslo rostoucí, pokud se model začíná lišit od výchozí geometrie. Euklidovská norma definuje vzdálenost parametrů od výchozích hodnot ve vícerozměrném prostoru. Tato norma je v exponentu přirozené exponenciální funkce. Penalizace tedy roste exponenciálně s odchylkou. Aby výchozí geometrie neměla žádnou penalizaci, je odečtena jednička. To má jen formální význam a výpočet to neovlivní. A aby bylo možné penalizaci ladit, obsahuje dva koeficienty. Prvním se násobí celá funkce a druhý je v exponentu v součinu s normou. Citlivost penalizační funkce na velikost normy je v okolí počáteční hodnoty 0 roven součinu obou koeficientů. Na tomto okolí je význam obou koeficientů stejný a jsou zaměnitelné. S rostoucí velikostí normy převyšuje význam druhého koeficientu nad prvním. Je-li záměrem, aby penalizace co nejdéle rostla minimálně a poté vytvořila silnou bariéru, volí se první koeficient malý a druhý velký. Je-li žádoucí, aby se rychlost růstu penalizace zvyšovala jen málo, volí se první koeficient velký a druhý malý. Limitním případem je, když se součinem koeficientů nastaví směrnice růstu a pošle se první koeficient limitou do nekonečna (nebo druhý k nule), pak je penalizace prostou lineární funkcí normy. Bez použití penalizace je řešení pravděpodobně nejednoznačné, s použitím penalizace existuje pravděpodobně pouze suboptimální řešení, ale mělo by být jednoznačné.

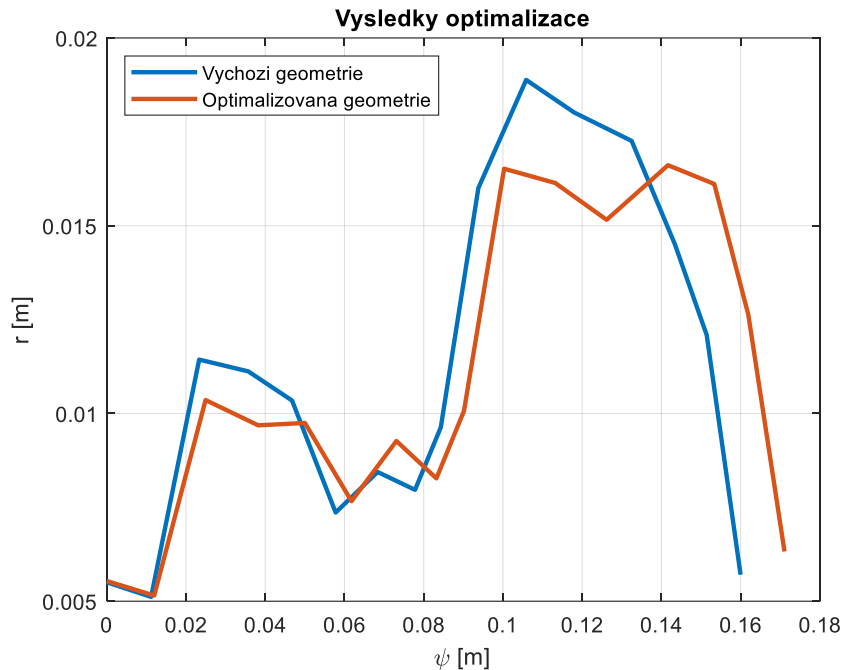
Nastavení genetických algoritmů mohou být rozsáhlá. Závisí na možnostech řešiče a uživateli. Mezi nejzákladnější nastavení patří počet jedinců v generaci. Další nastavení jsou ukončovací podmínky, to mohou být konvergenční podmínky, počet generací nebo hodnota cílové funkce. Mezi pokročilejší nastavení může patřit způsob vytvoření první generace a algoritmy pro křížení, mutace a podobně. Pro potřeby výpočtu byla velikost populace 200 nebo 250 jedinců. Tyto 2 hodnoty jsou si tak blízké, že jejich vliv na výsledky je zanedbatelný. Ukončovacích podmínek bylo nastaveno několik, ale reálně se vždy uplatnila podmínka, která zastaví výpočet, pokud již nedochází ke zlepšení výsledků neboli konvergenční podmínka. Hlubší nastavení algoritmů řešiče nebylo využito. Mimo nastavení penalizace byly použity tvrdé limity pro maximální a minimální hodnoty optimalizačních parametrů. Jednoznačně největší vliv na výsledky má nastavení váhových koeficientů a parametrů penalizace. Ideální nastavení těchto parametrů prakticky nelze určit dopředu. Strategii, jak ideálně zvolit parametry, existuje mnoho. Zde se využil obyčejný přístup nastavení parametrů citem. Po dokončení optimalizace se mohou upravit na základě výsledků. Například se přitvrdí nebo uvolní penalizace a výpočet se opakuje. Takovým způsobem proběhlo mnoho optimalizací.



Obrázek 6.21 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie při nastavení optimalizace s důrazem na zachování původního geometrického charakteru

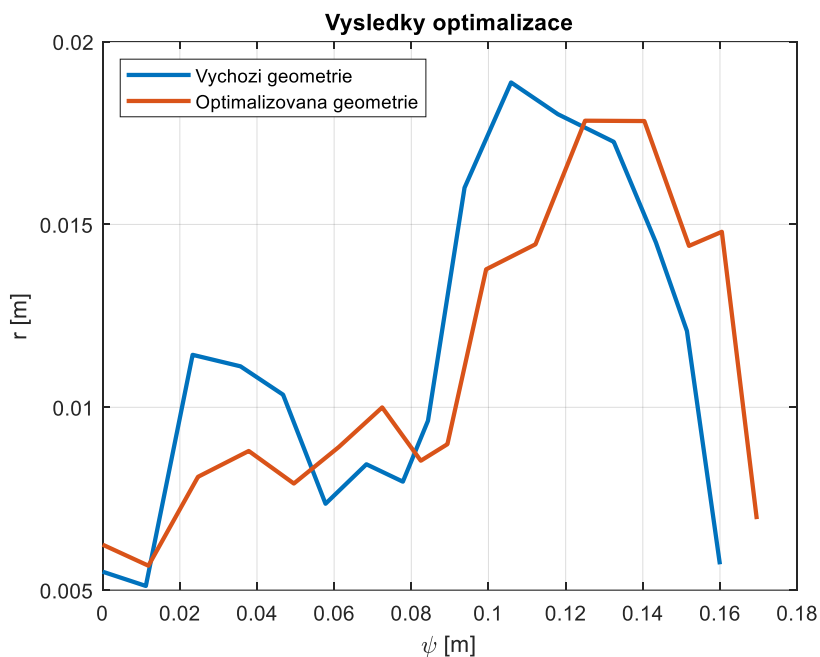
Výchozí geometrie na analytickém modelu se na prvních čtyřech frekvencích liší od požadovaných frekvencí o stovky hertzů (přesně 98, 107, -468, -390 Hz). Výpočet je časově náročný, to omezuje množství pokusů o nastavení výpočtu. Během jednoho výpočtu vznikne asi 10000 jedinců. Pokud se výpočet nastavil s důrazem na malé geometrické modifikace a větší toleranci frekvencí, pak se vlastní frekvence změnily na 501, 1092, 2660 a 3453 Hz. Obrázek 6.21 zobrazuje velikost poloměru průřezu po délce vokálního traktu před a po optimalizaci. Je vidět, že geometrie je prakticky nezměněná, největší změna je v délce vokálního traktu, který se prodloužil. Prodloužení geometrie obecně snižuje frekvence, což se pozitivně projeví na třetí a čtvrté frekvenci, kde jsou odchylky největší. Naopak to zhorší první

dva formanty. Zatímco původní geometrie měla frekvenční odchylky od požadovaných hodnot jednotky stovek hertzů, nyní se odchylky snížily na hodnoty 122, 159, -108, 6 Hz. Takže první dva formanty se zhoršily o pár desítek hertzů, další dva se zlepšily o stovky hertzů. Celkově jsou výsledky výrazně lepší, ale hlavní význam mají první formanty, které se zhoršily, takže se jedná o zdánlivé zlepšení. Pokud se uvolní penalizace, aby optimalizace měla volnější ruce a zvýší se váhy prvních formantů, dojde se k následujícím výsledkům.



Obrázek 6.22 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie, vyšší důraz na formanty

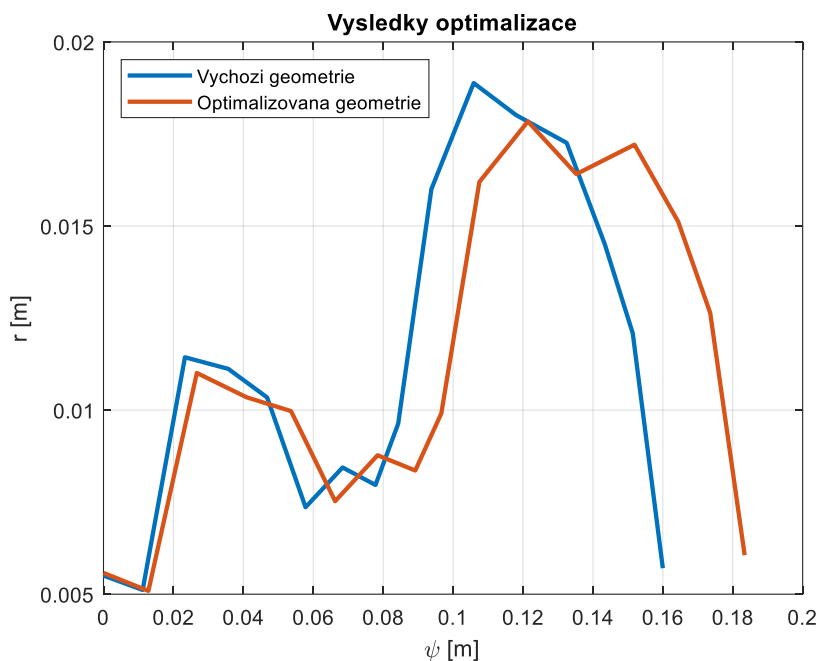
Hlavní geometrická změna je zmenšení průřezu v ústní dutině (obrázek 6.22). Podobný, ale mnohem menší propad, vznikl už v předešlé optimalizaci. Taková změna geometrie je realizovatelná fyziologicky. Hodnoty vlastních frekvencí jsou 550, 1191, 2589 a 3458 Hz. Odchylky od požadovaných hodnot jsou 73, 60, -37, 1 Hz. Odchylky jsou tedy asi poloviční oproti minulé optimalizaci.



Obrázek 6.23 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie, nízký důraz na zachování rozměrů

Pokud se ještě více sníží penalizace na úkor váhy pro formanty, dosáhne se výsledků, které zobrazuje obrázek 6.23. Geometrie v první části je výrazně ztenčená, naopak ve střední části je mírně zvětšená. Důsledkem je, že už nemá 2 typická rozšíření, ale pouze jedno. Stále však zachovává typický tvar vokálního traktu pro hlásku a:. Fyziologicky tento tvar je přípustný. Hodnoty formantů jsou: 611, 1257, 2556 a 3456 Hz. To jsou konečně hodnoty v dobré shodě s hledaným. Největší odchylka je u prvního formantu 12 Hz a nejmenší u třetího 4 Hz. U akustiky vokálního traktu je zbytečné řešit jednotky hertzů.

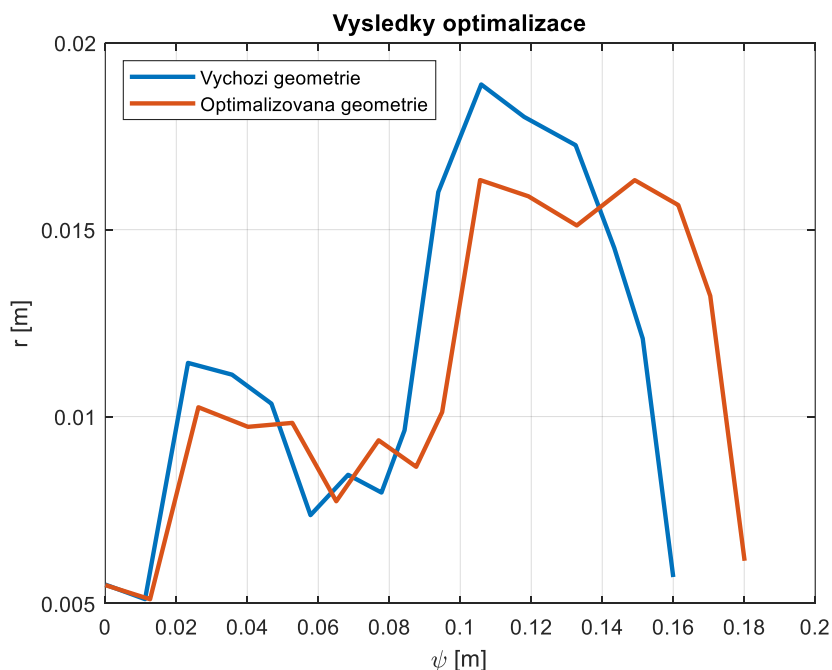
Stejně optimalizace tvaru proběhly na MKP modelu. Cílová funkce i penalizace jsou formulované stejně. Rozdíl je ve výpočtu frekvencí pro cílovou funkci. U analytického modelu se použily první 4 vlastní frekvence. Vycházelo se z předpokladu, že každý vlastní tvar kmitu bude mít na výstupu z vokálního traktu nenulovou hodnotu, a tím i rezonanční vrcholek. U MKP modelu existují příčné tvary kmitu, které nemusí vytvořit žádný rezonanční vrcholek. Takový tvar je sice vlastním tvarem, ale z hlediska akustického vyzařování nemá význam a výpočet by ho měl ignorovat. Z tohoto důvodu se nepočítají vlastní frekvence, ale počítá se frekvenční odezva na výstupu a jako formanty se uvažují lokální maxima.



Obrázek 6.24 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie při nastavení optimalizace s důrazem na zachování původního geometrického charakteru

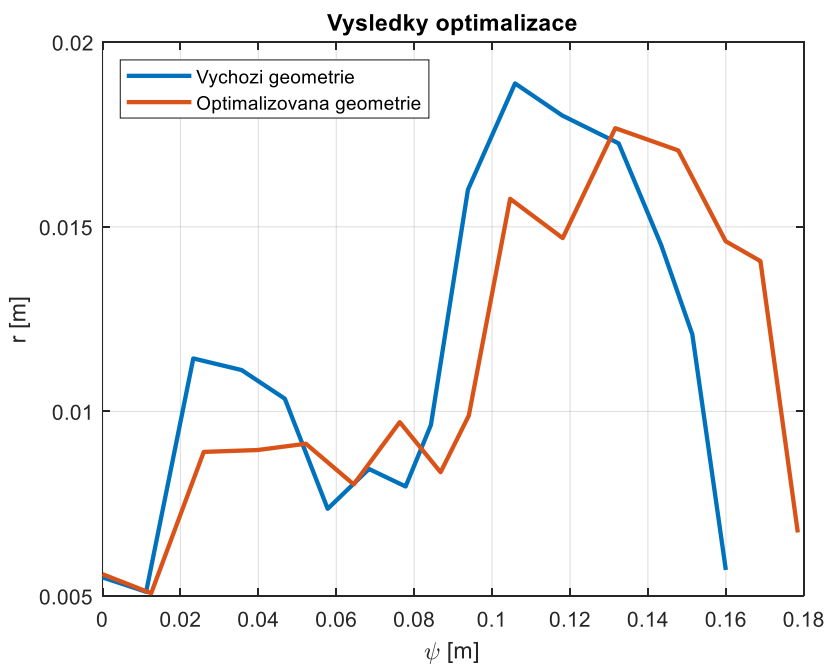
Výsledky jsou charakterově stejné jako u analytického modelu. Hlavní rozdíl je ve výpočtovém čase. MKP model je několikrát pomalejší, ale počty generací a jejich velikost jsou v podstatě stejné. Při použití silné penalizace za změnu rozměrů se dosáhne výsledků, které zobrazuje obrázek 6.24. Frekvence vypočtených formantů jsou 512, 1101, 2625 a 3459 Hz. Odchyłky od hledaných frekvencí jsou 111, 150, -73 a 0 Hz. Tedy skoro stejné jako u analytického modelu. Obrázek 6.25 zobrazuje výsledky optimalizace, kde se snížila penalizace. Znovu jsou výsledky skoro stejné jako u analytického modelu. Frekvence formantů jsou 541, 1194, 2554 a 3459 Hz. Tomu odpovídají odchyłky 82, 57, -2 a 0 Hz.



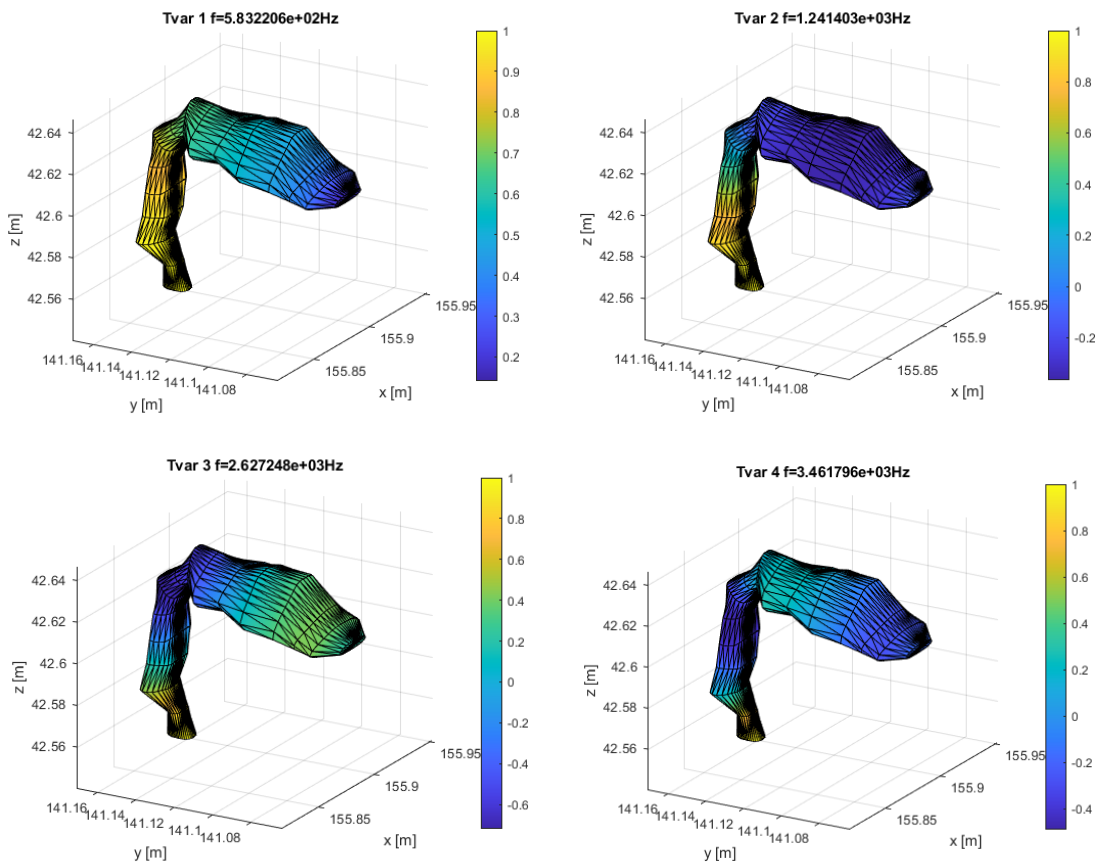


Obrázek 6.25 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie, vyšší důraz na formanty

Poslední z optimalizačních výpočtů hledal nastavení parametrů optimalizace tak, aby výsledek co nejlépe hledal kompromis mezi tvarovou a akustickou podobností. Obrázek 6.23 zobrazuje nejlepší výsledky na 1D modelu, jeho alternativou je obrázek 6.26, který je velice podobný. I přes velice podobnou geometrii nejsou frekvence formantů zcela totožné. Hodnoty frekvencí jsou 583 Hz, 1241 Hz, 2627 Hz a 3462 Hz. Maximální odchylka frekvencí formantů je 75 Hz a průměrná odchylka je okolo 30 Hz.

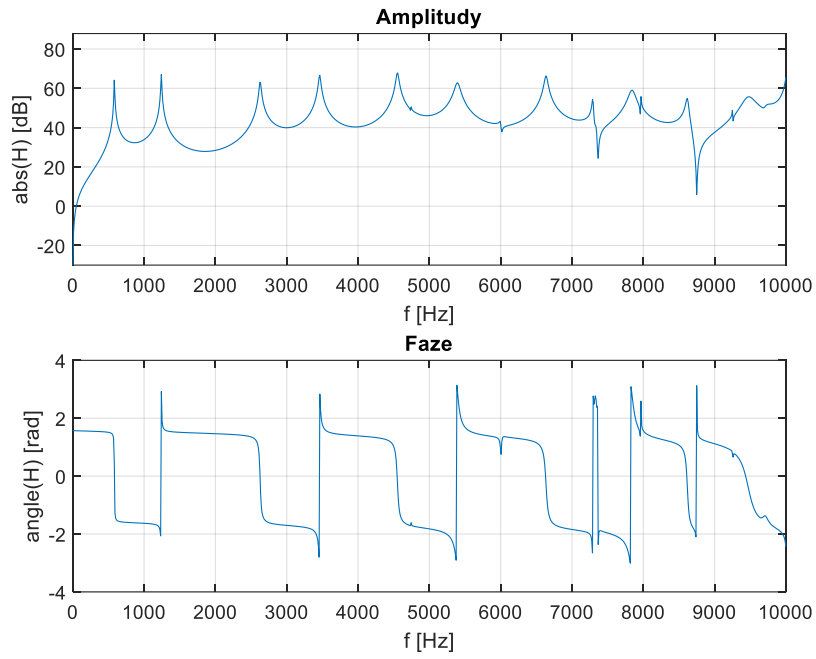


Obrázek 6.26 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie, nejlepší kompromis mezi zachováním geometrie a požadovanými formanty



Obrázek 6.27 Zobrazení vlastních tvarů kmitu vokálního traktu z poslední optimalizace

Bude-li se poslední optimalizace považovat za nejlépe aproximující hledaný vokální trakt, je na místě zobrazit vlastnosti této geometrie podrobněji. Obrázek 6.26 zobrazoval porovnání srovnání referenčního a vypočteného průřezu po délce vokálního traktu. Je vidět, že ve spodní části dochází ke zúžení a dochází k protažení vokálního traktu. Vzniklou geometrii vokálního traktu a první 4 vlastní tvary kmitu zobrazuje obrázek 6.27. Z tohoto obrázku je patrné, že charakter nižších tvarů kmitu není pozměněn. Ke změnám pravděpodobně dochází až ve vyšších frekvencích. Tvar nové geometrie se od původní liší jen v detailech a nic nenaznačuje, že by měl být fyziologicky problematický. Největší zúžení je asi o 40% a největší rozšíření je asi o 38%. Tyto hodnoty se vztahují na velikost průřezu, to znamená, že rozměry se mění o méně než 20%. Akustické vlastnosti nové geometrie ve vyšších frekvencích zobrazuje obrázek 6.28, který ukazuje přenosovou funkci mezi hlasivkami a ústy. Z něj je vidět, že ve významné frekvenční oblasti lidského hlasu nedochází k zásadním změnám. Ve vyšších frekvencích se přenos liší více oproti geometrii před optimalizací.



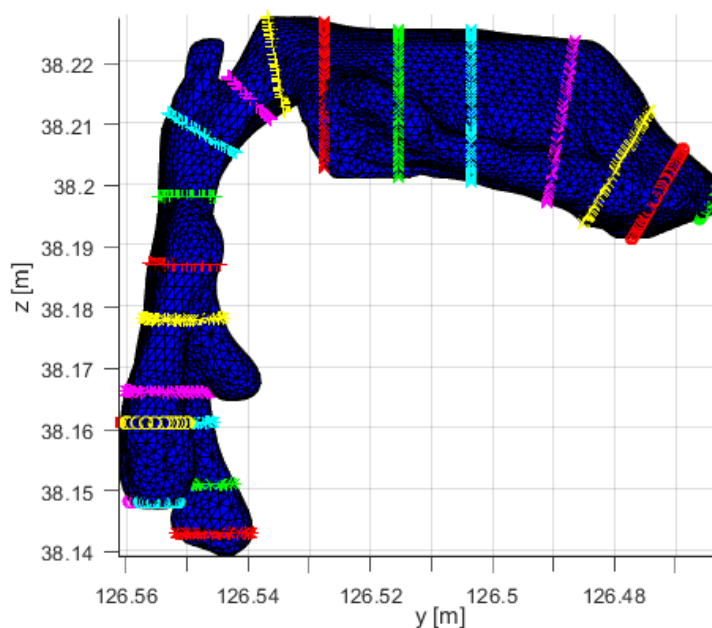
Obrázek 6.28 Zobrazení přenosové funkce vokálního traktu z poslední optimalizace

## 7. Geometrie vokálního traktu s paralelními kavitami

Použité postupy modelování akustiky vokálních traktů jsou použitelné i s rozvětvenou geometrií. Geometrie vokálního traktu z předchozí kapitoly byla upravena, aby neobsahovala žádné větvení. Reálný vokální trakt obsahuje nosní trakt a slepé paralelní kavity, které mají vliv na akustiku. Použité snímkování z CT obsahuje piriformní sinu a valemuly, které byly v dosavadním modelu odstraněny. Geometrický model vůbec neobsahuje nosní trakt, který tím nemůže být zahrnut do modelu. Nosní trakt je při normální fonaci odpojen od vokálního traktu, studie [106] analyzovala metodou konečných prvků vliv nosního traktu při nedostatečnosti patrohltanového uzávěru, práce ukázala vznik nových rezonančních a antirezonančních frekvencí.

Analytický model přímo umožňuje vytvářet větvené akustické struktury pomocí okrajových podmínek, které spojují jednotlivé segmenty. Tyto podmínky jsou shoda akustických tlaků ve spoji a rovnice kontinuity. Samozřejmě tento model nezohlední způsob, jak jsou kavity připojeny k hlavní části vokálního traktu. Jedná se stále o 1D modelování. Zohlední pouze jejich velikost a místo, kde jsou připojeny.

MKP model s popsánymi elementy je ideální pro použití nevětvených struktur, které mění pouze svoji velikost a tvar. Model se skládá z vrstev ze 6 elementů (spojeny rohovými uzly ve čtyřúhelníkové stěně) a tyto vrstvy jsou spojeny 36 uzly po obvodě a jedním středovým uzlem. Rozvětvení lze vytvořit snadno. Elementy mohou navazovat i svou vnější stěnou. Tedy stěnou, která má tvar čtyřúhelníku a v protějších hranách je 7 uzlů. Celé vrstvy z šestic elementů se tím dají spojovat nejen v jednom směru, ale i ve směrech ostatních. To umožňuje modelovat větvené struktury.

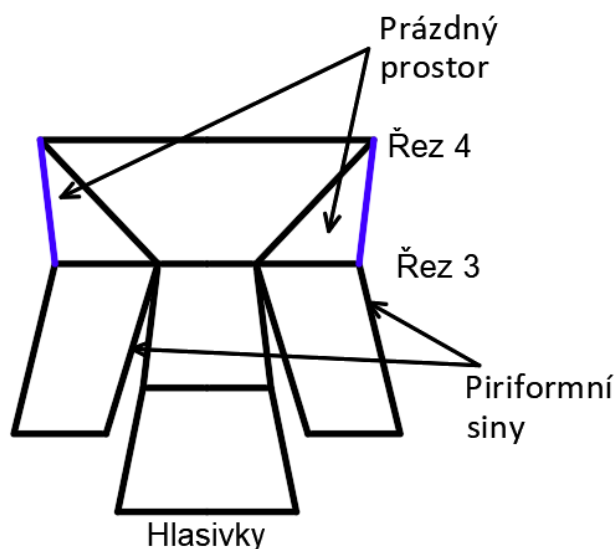


Obrázek 7.1 Zobrazení rovin řezu

Výpočtové modely vznikly rozřezáním CT modelu vokálního traktu. Řezy pro předešlé úlohy zobrazuje obrázek 5.5. Zde bylo použito 16 řezů a tím vzniklo 15 vrstev. Polohy řezů byly umístěny tak, aby zanedbání kavit zbytečně neovlivnilo geometrii. V případě uvažování existence kavit byl model rozřezán 17 rovinami. Polohy těchto rovin jsou tentokrát zvoleny (obrázek 7.1), aby šly kavity co nejnáze připojit.

Třetí rezná rovina ve směru od hlasivek je přesně v místě vyústění piriformních sinů. V této rovině dochází k prvnímu větvení. Definice tohoto větvení v 1D analytickém modelu je snadné. V tomto řezu jsou známy plochy průřezu vstupního kanálu, obou piriformních sinů i výstupu, takže je pouze definované spojení 4 elementů (segmentů) v jednom místě. Oba piriformní siny představují samostatný segment. Zakončení těchto segmentů je na obrázku zobrazeno samostatnými rovinami řezu.

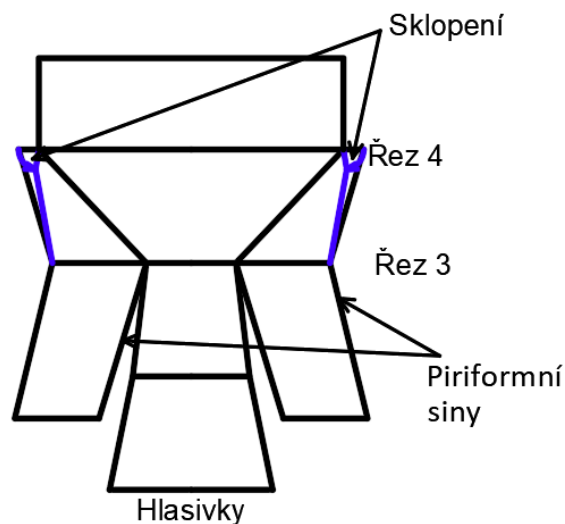
Čtvrtá a pátá rovina řezu ohraničují valemuly. Tyto kavity jsou na CT snímku málo hluboké. Jejich hloubku nelze považovat za rozměr výrazně převyšující ostatní rozměry. To představuje problém při 1D modelování akustiky, která zanedbává příčné šíření vln. Také určení polohy řezu kolmého na střednici vokálního traktu, kde jsou valemuly připojeny, nelze jasně definovat. Proto valemuly nejsou modelovány jako větvení přidáním dalšího elementu (segmentu). Při pohledu na obrázek 7.1 je možné valemuly chápat jako skokové zvětšení průřezu v úrovni čtvrtého řezu. Jinak řečeno průřez na konci třetího segmentu nezapočítává velikost valemul a o jejich velikost je zvětšen průřez na začátku čtvrtého segmentu. Velikost valemul se ve směru k ústům rovnoměrně zmenšuje až k pátému řezu, kde kavity končí. valemuly nevnášají do modelu další segmenty a tím nezvyšují náročnost výpočtu. Analytický 1D model s kavitami je celkem tvořen 18 elementy, obsahuje 15 spojů a 4 okrajové podmínky.



Obrázek 7.2 Schéma připojení piriformních sinů

Úprava analytického modelu, aby obsahoval kavity vokálního traktu, je relativně snadná záležitost. U MKP modelu je to komplikovanější, protože se neskládá pouze z délek a průřezů, ale je potřeba definovat polohy uzlů. V případě nevětvené struktury je každý řez tvořen jedním středním uzlem a 36 uzly na obvodě. Připojení piriformních sinů je provedeno

následovně. Třetí řez je rozdělen do 3 částí. Každá část má svůj střední uzel a 36 uzlů na obvodě. Sousední části vždy sdílí 7 uzlů (hranu jednoho elementu), tím je zajištěna vazba mezi nimi. Prostřední z těchto částí je součástí hlavní části vokálního traktu a na boční části jsou připojeny piriformní siny. Obrázek 7.2 zobrazuje schéma tohoto připojení. Je zde jasně vidět, že spojení kavity s vokálním traktem je provedeno pouze na jediné hraně jednoho elementu (7 uzlů) a nad piriformními siny vzniká prázdný prostor, který ale má být součástí vokálního traktu. Tento prostor se musí také vyplnit elementy. Protože jsou použity nestandardní elementy, musí se tento prostor vyplnit tímto typem elementů. Na horní konec piriformních sinů se připojí další šestice elementů. Jeden z nich sdílí svojí vnější stranu s hlavní částí vokálního traktu. Zbýlých 5 vnějších stran tvoří vnější povrch. Nastává problém s umístěním uzlů z horních podstav těchto elementů. Kdyby se všechny umístily na úroveň čtvrtého řezu směrem do stran, vznikl by na této úrovni úskok. Tento problém byl vyřešen tak, že tato podstava je sklopena směrem dolů (obrázek 7.3). Ostrý úskok je tím odstraněn. Nevýhodou je, že natočením horní podstavy vůči spodní podstavě se zhorší podmíněnost elementů.



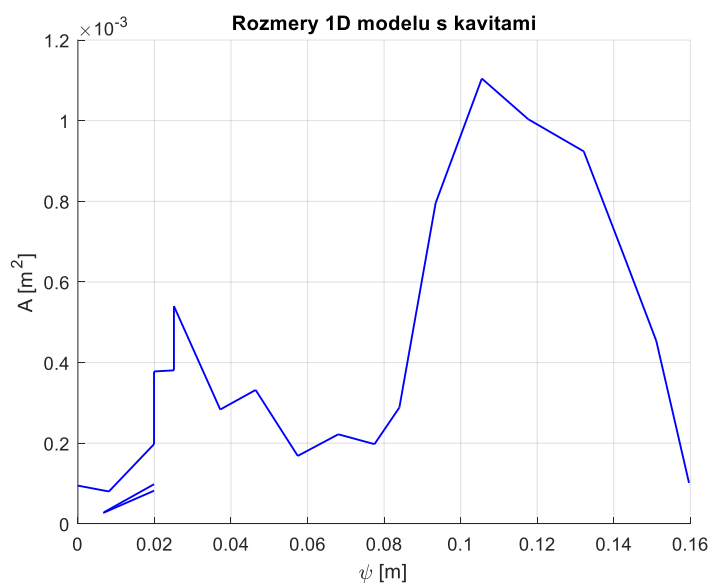
Obrázek 7.3 Schéma sklopení čel elementů, které vystupují mimo vokální trakt

Přidání valemů do MKP modelu je realizováno pouhým přidáním elementů na stěnu vokálního traktu mezi 4. a 5. řez. Levá i pravá část je zase tvořena šesticí elementů. Velikost těchto elementů koresponduje s velikostí kavít. To znamená, že v horní části jsou elementy menší než ve spodní. Hrany, které vznikají po okrajích valemů na úrovni 4. a 5. řezu nejsou řešeny.

Předešlý text popsal postup tvorby geometrických modelů vokálního traktu s piriformními siny a valemů. Pro tvorbu byly využity roviny řezu tak, jak je ukazuje obrázek 7.1. Parametry analytického modelu zobrazuje tabulka 7.1. Číslování segmentů je směrem od hlasivek k ústům (16 segmentů). Piriformní siny jsou tvořeny 17. a 18. segmentem. Parametr  $A_0$  je vstupní průřez segmentu (průřez blíže k hlasivkám) a  $A_1$  je výstupní průřez (na straně úst). Platí tedy, že výstupní průřez jednoho segmentu je roven následujícímu vstupnímu průřezu. Výjimkou je přechod ze segmentu 2 na 3. Zde se připojují piriformní siny, rozdíl průřezů v tomto spoji je rovný průřezům piriformních sinů v místě spojení. A druhou výjimkou je přechod ze segmentu 3 na 4, kde rozdíl průřezu odpovídá velikosti valemů v tomto řezu.

Tabulka 7.1 Parametry analytického modelu s kavitami

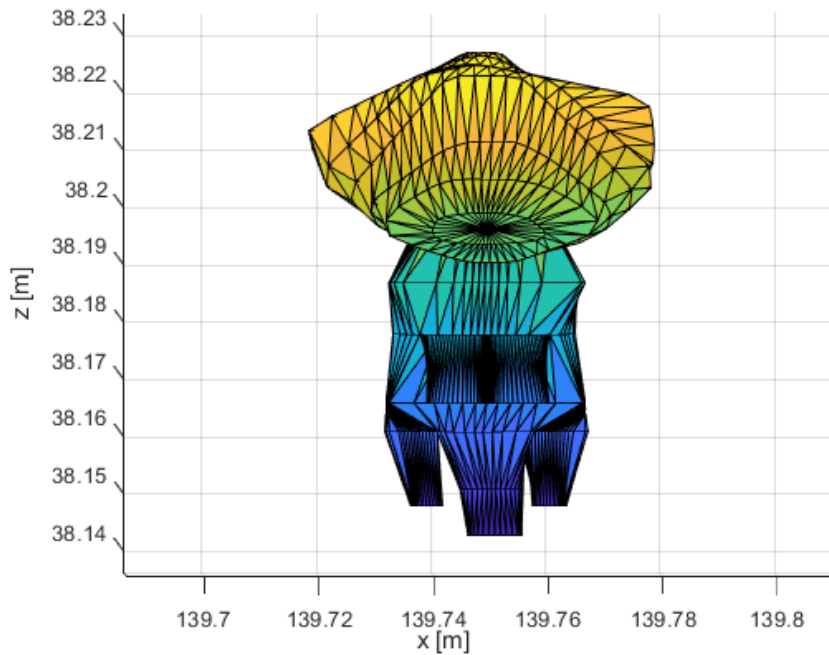
Segment	Plocha průřezu $A_0$ [m <sup>2</sup> ]	Plocha průřezu $A_1$ [m <sup>2</sup> ]	Délka [m]
1	9.475978e-05	8.024786e-05	8.100022e-03
2	8.024786e-05	1.976216e-04	1.179525e-02
3	3.779313e-04	3.807203e-04	5.198232e-03
4	5.400473e-04	2.835231e-04	1.210065e-02
5	2.835231e-04	3.320894e-04	9.244510e-03
6	3.320894e-04	1.684749e-04	1.100816e-02
7	1.684749e-04	2.220586e-04	1.059490e-02
8	2.220586e-04	1.976281e-04	9.445585e-03
9	1.976281e-04	2.886011e-04	6.509895e-03
10	2.886011e-04	7.956690e-04	9.473242e-03
11	7.956690e-04	1.104570e-03	1.206707e-02
12	1.104570e-03	1.003555e-03	1.213260e-02
13	1.003555e-03	9.238937e-04	1.449135e-02
14	9.238937e-04	6.545479e-04	1.092008e-02
15	6.545479e-04	4.538132e-04	8.033228e-03
16	4.538132e-04	1.015361e-04	8.543940e-03
17	2.700475e-05	8.210168e-05	1.327582e-02
18	2.874179e-05	9.820802e-05	1.307410e-02



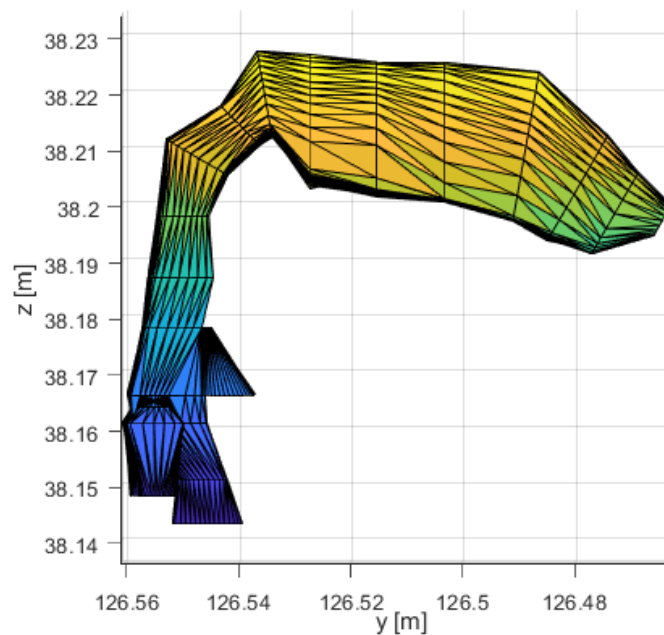
Obrázek 7.4 Průřez vokálního traktu s kavitami jako funkce vzdálenosti od hlasivek

Data z tabulky je názorné zobrazit graficky (obrázek 7.4) jako závislost průřezu vokálního traktu na poloze. Ve druhé polovině vokálního traktu není rozdíl mezi modelem s kavitami a bez kavit. V první polovině jsou vidět 2 nespojitosti. První je na úrovni 3. řezu, kde se skokově zvětší průřez díky připojení piriformních sinů. Samotné piriformní siny jsou na obrázku znázorněny samostatnými grafy. Druhá nespojitost je na úrovni 4. řezu a popisuje valemuly.

Sestrojená MKP síť je tvořená 132 elementy. Samotný vokální trakt bez kavit je tvořen 16 vrstvami, a to je 96 prvků. Jeden piriformní sinus tvoří 6 elementů a dalších 6 ji připojuje k vokálnímu traktu. Každá valemula je tvořena dalšími 6 elementy. Celkový počet uzlů a tím i stupňů volnosti je 949. To je podstatný nárůst asi o 60% oproti modelu neobsahujícímu kavity. Tento nárůst je velký i ve srovnání s analytickým modelem, kde se model zvětšil o 20%. Tento nárůst se přirozeně musí projevit na časových náročnostech výpočtů.



Obrázek 7.5 Pohled na připojení piriformních sinů k MKP modelu



Obrázek 7.6 Pohled na připojení valemul k MKP modelu



Obrázek 7.5 zobrazuje síť MKP modelu. Jsou zde vidět piriformní siny připojené k vokálnímu traktu. Nad nimi je vidět šestice přechodových elementů, které se odklánějí směrem na vnější stranu vokálního traktu. Obrázek 7.6 zobrazuje stejnou síť z jiného pohledu. Zde se názorně ukazuje připojení valem, tvořené elementy přichycenými na uzly z boku vokálního traktu. Toto zobrazení zároveň vysvětluje 1D modelování valem, které je řešeno pouhou změnou průřezu na úrovni 3. řezu.

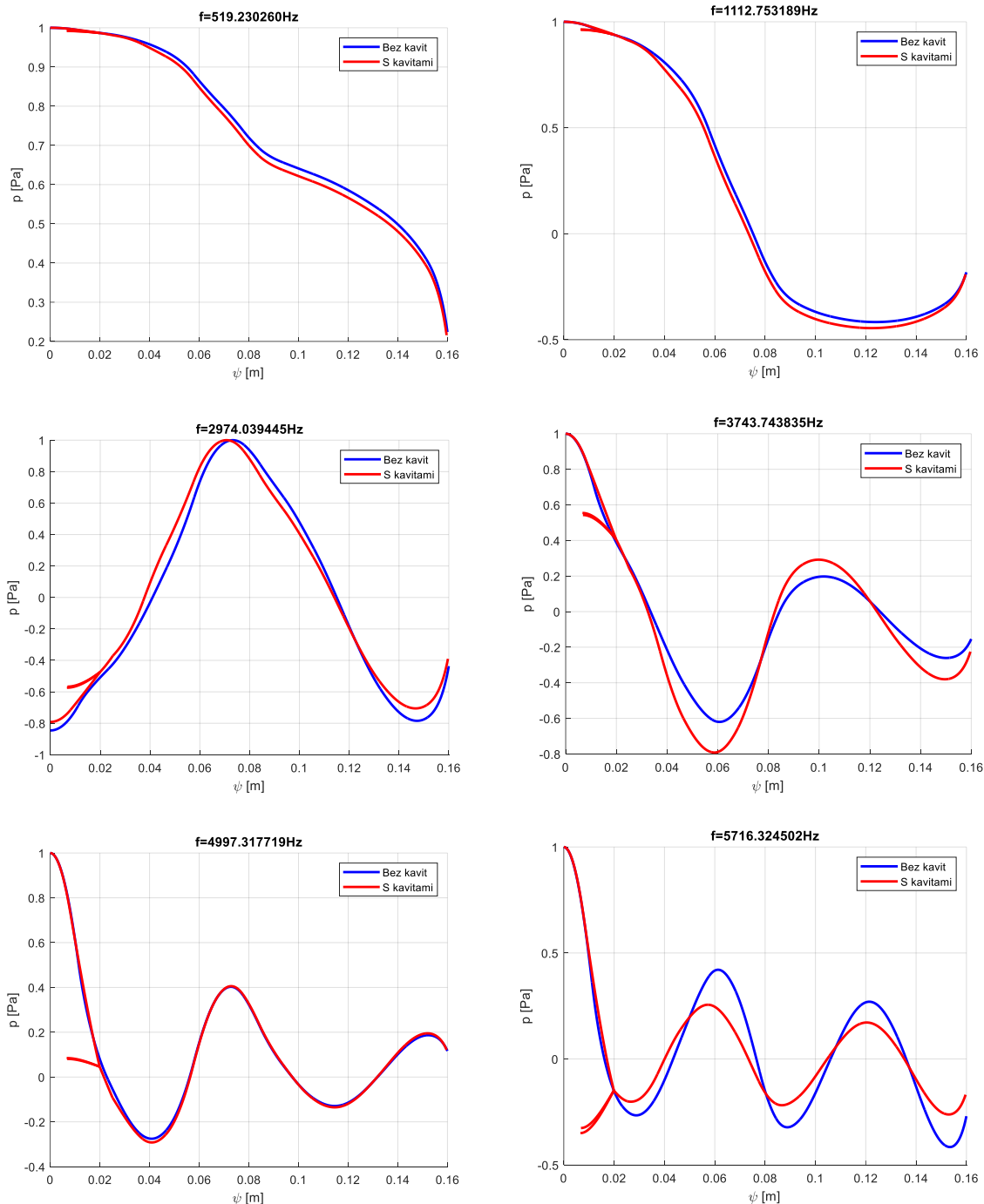
### 7.1 Vliv kavit na akustické vlastnosti vokálního traktu

Oba modely jsou po přidání okrajových podmínek připraveny k použití. Nejprve se provede porovnání výsledků analytického modelu před a po přidání kavit. Dá se očekávat, že v nízkých frekvencích bude vliv kavit zanedbatelný a ve vyšších frekvencích poroste.

Tabulka 7.2 Srovnání vlastních tvarů analytického modelu bez kavit a s kavitami

Číslo tvaru	Frekvence bez kavit [Hz]	Frekvence s kavitami [Hz]	Změna [%]
1	525.45	519.2	-1.2
2	1143.5	1112.8	-2.7
3	3019.9	2974.1	-1.5
4	3848.9	3743.7	-2.7
5	4959.3	4997.3	0.8
6	5813.3	5716.4	-1.7
7	6714.7	6376.3	-5.0
8	7854.1	7641.4	-2.7
9	-	8179.1	-
10	-	8334.8	-
11	9187.4	9587.5	4.4

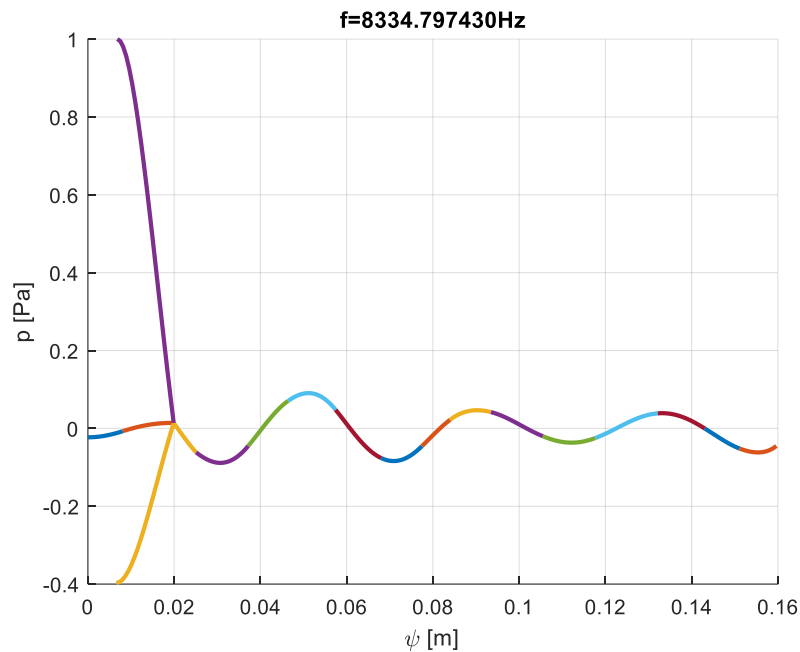
Výsledky frekvenční analýzy ukazují, že přidání kavit nemá velký význam na akustiku vokálního traktu. Přidáním vznikly nové tvary kmitu ve vyšších frekvencích (mezi 8–9 kHz), jak ukazuje tabulka 7.2. Ostatní vlastní frekvence se změnily o jednotky procent. Tvary kmitů se také téměř nezměnily (obrázek 7.7). Nejmenší vliv mají kavity na 5. vlastní tvar kmitu, a to jak na frekvenci, která se změnila o méně než 1%, tak i na tvar, kde na první pohled nevznikla změna. U tohoto tvaru kmitu je to dáno tím, že v piriformních sinech je v porovnání s jinými částmi vokálního traktu zanedbatelný akustický tlak. Model se tedy v okolí tohoto tvaru kmitu chová jako by piriformní siny neobsahoval. Naopak tvary kmitu, kde tlaky v piriformních sinech jsou vzdálenější od nuly nebo se více odchyľují od tlaků v okolí připojení piriformních sinů, se liší více od modelu bez paralelních kavit.



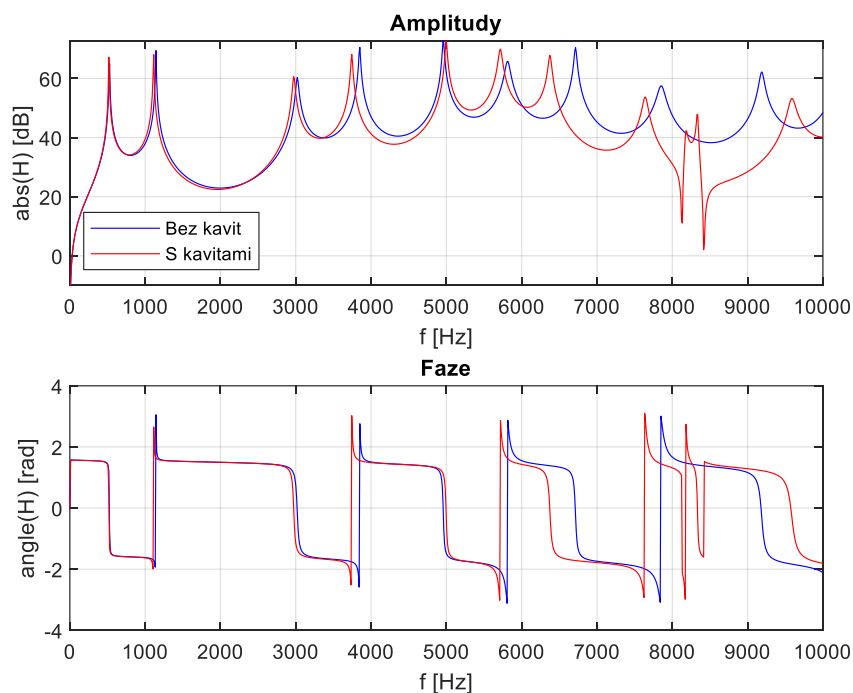
Obrázek 7.7 Porovnání tvarů kmitu analytického modelu bez kavit a modelu s kavitami, nadpis udává frekvenci modelu s kavitami

Připojení kavit k modelu vytvořilo i nové vlastní tvary. Obrázek 7.8 zobrazuje příklad takového tvaru. Je zde vidět, že zde jsou piriformní siny dominantní. Akustický tlak se v podstatě přelévá mezi levým a pravým piriformním sinem. Zbytek vokálního traktu má akustické tlaky výrazně nižší. Z fyzikální podstaty se jedná o příčný tvar kmitu, protože se piriformní siny nacházejí na stranách vokálního traktu. To je zajímavá vlastnost tohoto modelu. Jedná se o ryze 1D popis akustiky a přesto nalezený tvar kmitu je fyzikálně příčný. Šíření tlakových vln v modelu je stále jednorozměrné, ale polohy různých částí modelu mohou být libovolné, a tedy i šíření může být ve skutečnosti v různých směrech. Na výsledcích 1D modelu

se prakticky neprojevují valemky. Je možné, že jejich vliv se částečně přikládá piriformním sinům, protože místo jejich připojení je tak blízké, že to na průběhu akustického tlaku ve vokálním traktu splyne do jednoho místa.



Obrázek 7.8 Nově vzniklý vlastní tvar kmitu



Obrázek 7.9 Porovnání přenosových charakteristik analytického modelu

Porovnání přenosových charakteristik (obrázek 7.9) ukazuje shodu modelu s kavitami a bez kavit do frekvence 6 kHz. Ve vyšších frekvencích se vlastní frekvence snižují a v oblasti

8 kHz až 8.5 kHz jsou vidět nové vlastní frekvence, se kterými vznikly i antirezonance. V této oblasti je celkově zesílení nižší. Poslední vlastní frekvence se zvýšila.

Porovnání výsledků MKP modelu po přidání kavit přináší podobné informace. Tabulka 7.3 srovnává frekvence vlastních tvarů kmitu. Pořadí tvarů kmitu je dané podle modelu obsahujícího kavitu. V případě 1D modelu je snadné porovnávat vlastní tvary kmitu. Tím, že jsou všechny podobného charakteru, se dá určit, které tvary kmitu u modelu s kavitami a bez kavit patří k sobě. Tím, že MKP model je prostorový, obsahuje podélné, příčné, ale i všemožně šikmé a jinak složité tvary, je těžké tyto tvary spárovat mezi oběma modely. Přidáním kavit se některé tvary skoro neovlivní a některé vzniknou nové. A některé se modifikují, a to i tak, že je potom těžké říct, zda je to nový tvar kmitu a některý původní zanikl, nebo je to změna tvaru a frekvence. Příkladem je původní tvar kmitu na frekvenci 6645.5 Hz, tento tvar měl charakter příčného kmitání ve spodní části vokálního traktu. Na kmitnách tohoto tvaru jsou nyní připojeny piriformní sinu, to úplně mění podmínky pro existenci takového tvaru kmitu. Například kmitny tohoto tvaru se nacházejí až na koncích piriformních sinů, a to znamená, že vzdálenost, kterou musí vlna urazit mezi jejími konci, je výrazně delší. To výrazně snižuje frekvenci tohoto kmitu na 5171.6 Hz. Podobný jev nastává u tvaru kmitu, který má původní frekvenci 8905 Hz. Původně se jednalo o šikmý (křížový) tvar v krční části vokálního traktu. Přidáním piriformních sinů se v tomto směru vokální trakt prodloužil, a proto se frekvence snížila na 7551.5 Hz. U ostatních tvarů kmitu se většinou frekvence snížila, ale pouze o jednotky procent. Popis jednotlivých tvarů kmitu uvádí tabulka 7.4. Číslo tvaru je korespondující s předešlou tabulkou.

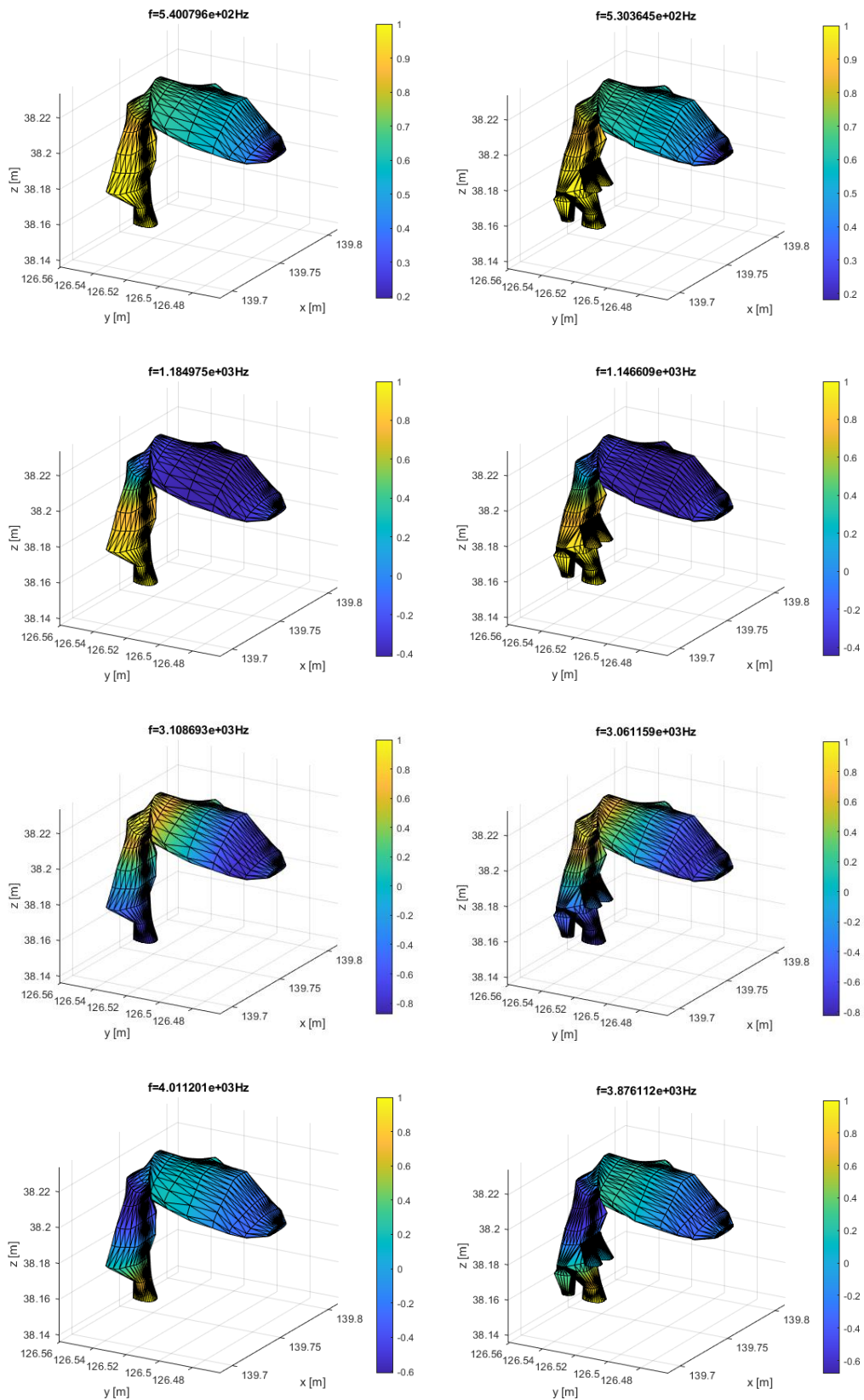
Tabulka 7.3 Srovnání vlastních tvarů MKP modelu bez kavit a s kavitami

Číslo tvaru	Frekvence bez kavit [Hz]	Frekvence s kavitami [Hz]	Změna [%]
1	540.1	530.4	-1.8
2	1185.0	1146.6	-3.2
3	3108.7	3061.2	-1.5
4	4011.2	3876.1	-3.4
5	4319.8	4261.9	-1.3
6	5185.9	5006.3	-3.5
7	6645.5	5171.6	-22.2
8	6191.4	5633.5	-9.0
9	6249.1	6228.1	-0.3
10	-	6494.7	-
11	6852.9	6871.5	0.3
12	8905.0	7551.5	-15.2
13	7522.9	7814.6	3.9
14	8389.6	8390.0	0.005
15	8450.0	8521.2	0.8
16	8740.5	8840.3	1.1
17	-	9883.9	-

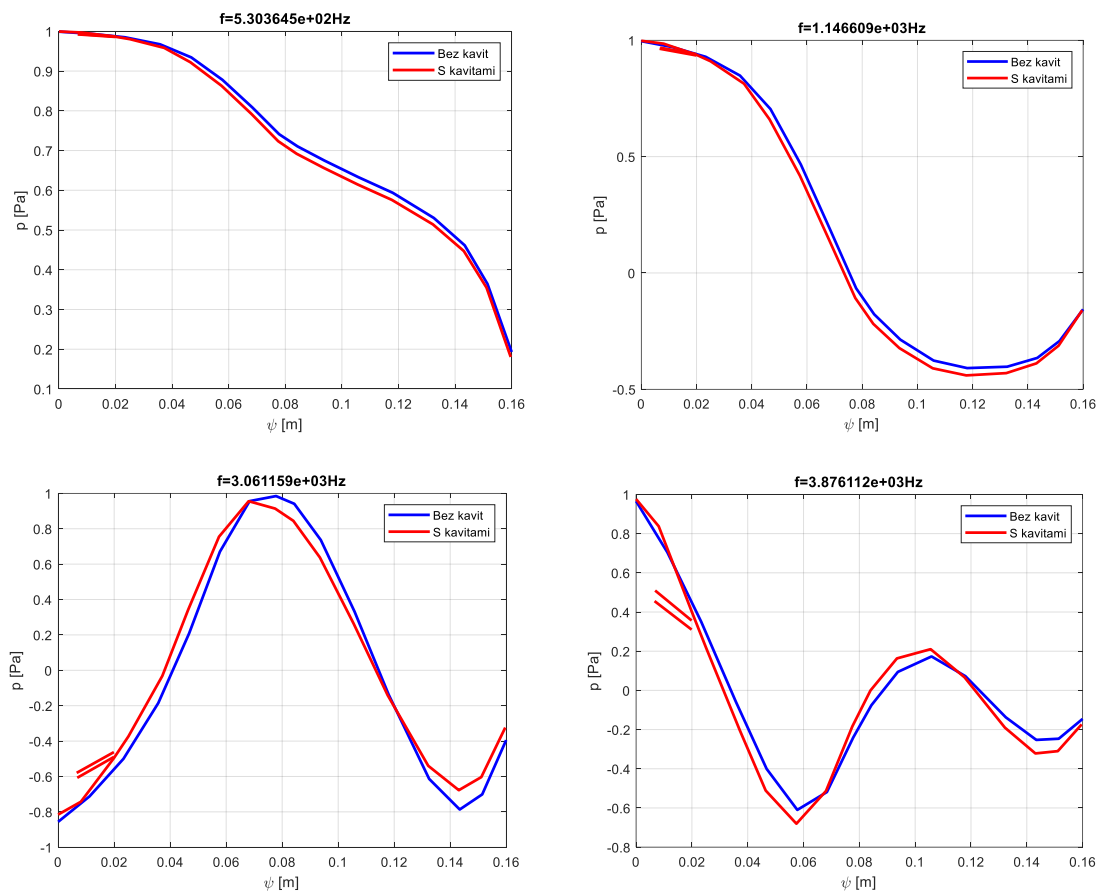
Tabulka 7.4 Popis tvarů kmitu

Číslo tvaru	Popis tvaru
1	1. podélný tvar
2	2. podélný tvar
3	3. podélný tvar
4	4. podélný tvar
5	1. příčný tvar v ústech
6	5. podélný tvar
7	1. příčný tvar v krku (využívá piriformní siny v modelu s kavitami)
8	6. podélný tvar
9	1. křížový tvar v ústech
10	6. podélný tvar (nezačíná u hlasivek ale v piriformních sinech)
11	2. příčný tvar v ústech
12	1. křížový tvar v krku (využívá piriformní siny v modelu s kavitami)
13	7. podélný tvar
14	Vyšší křížový tvar
15	Vyšší křížový tvar
16	8. podélný tvar
17	Křížový tvar kmitu mezi piriformními siny a valekulami

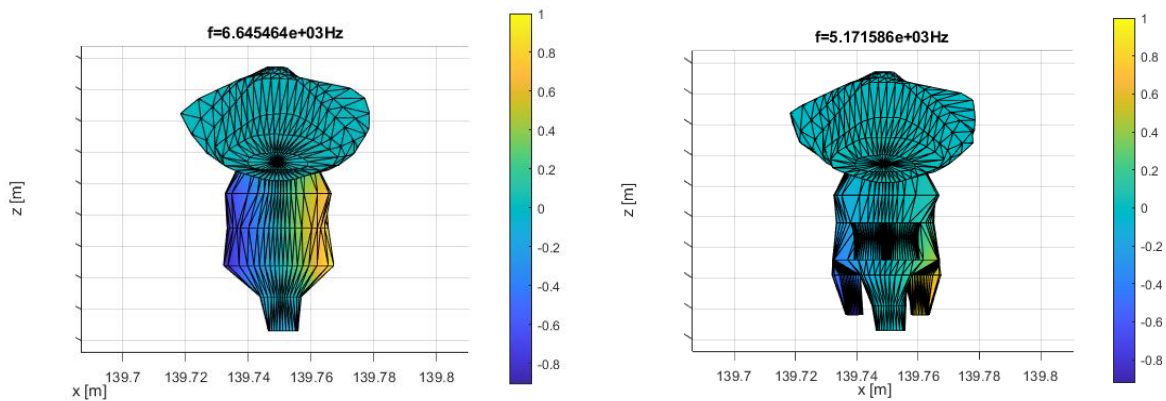
Následující obrázky porovnávají tvary kmitu modelu s kavitami a bez nich. Protože je tvarů mnoho, nebudou zobrazeny všechny a pouze u prvních bude zobrazen průběh akustického tlaku po střednici vokálního traktu. Nejprve budou zobrazeny první 4 tvary včetně průběhu tlaku po střednici (obrázek 7.10). Dle očekávání není na těchto tvarech kmitu znatelný významný rozdíl. Jsou to podélné tvary kmitu, na které nemají kavity velký vliv. Frekvence těchto kmitů také není příliš dotčena, maximální vliv kavit na frekvence těchto tvarů je 3.4%. Obrázek 7.11 zobrazuje průběh tlaku po střednici v porovnání obou variant. Průběhy v piriformních sinech jsou zobrazeny samostatně. Nespojitost mezi tlakem na střednici vokálního traktu a v piriformních sinech je dána tím, že vokální trakt a piriformní siny nesdílejí společnou střednici.



Obrázek 7.10 Porovnání prvních 4 tvarů kmitu s kavitami a bez kavit

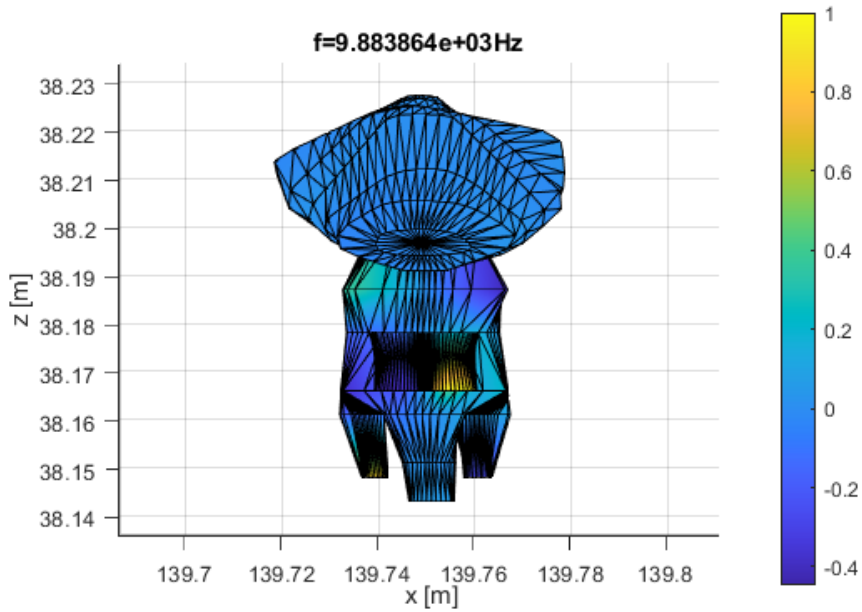


Obrázek 7.11 Porovnání prvních 4 tvarů kmitu s kavitami a bez kavit



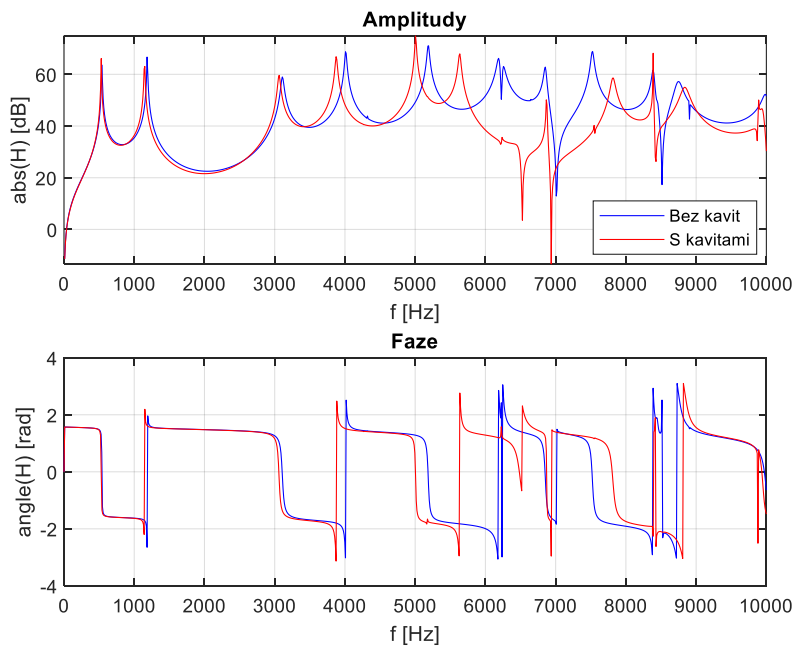
Obrázek 7.12 Vliv piriformních sínů na příčný tvar kmitu a jeho frekvenci

Obrázek 7.12 zobrazuje porovnání 7. tvaru kmitu modelu s kavitami s původně 9. tvarem na modelu bez kavit. Zde je výrazné snížení frekvence, protože se kmitny tvaru přesunuly z boků vokálního traktu do piriformních sínů. A poslední obrázek 7.13 zobrazuje nově vzniklý tvar kmitu. V tomto tvaru jsou kmitny v piriformních sinech a valekulách. Kavity zde rezonují křížem proti sobě.



Obrázek 7.13 Nově vzniklý tvar kmitu

Při porovnání přenosových charakteristik (obrázek 7.14) jsou vidět nepatrné rozdíly v nízkých frekvencích. První větší rozdíl je 8. vlastní frekvence, která se posunula z 6191.4 Hz na 5633.5 Hz. Další rozdíl je v oblasti 6 kHz až 6.5 kHz, kde je jedna antirezonance, která danou oblast tlumí. A poslední znatelný rozdíl je zvýšení 13. vlastní frekvence z 7522.9 Hz na 7814.6 Hz. Obě přenosové charakteristiky obsahují dominantní podélné tvary kmitu, ostatní tvary mají zpravidla nižší zesílení nebo jsou úplně neznamenné.



Obrázek 7.14 Porovnání přenosových charakteristik MKP modelu



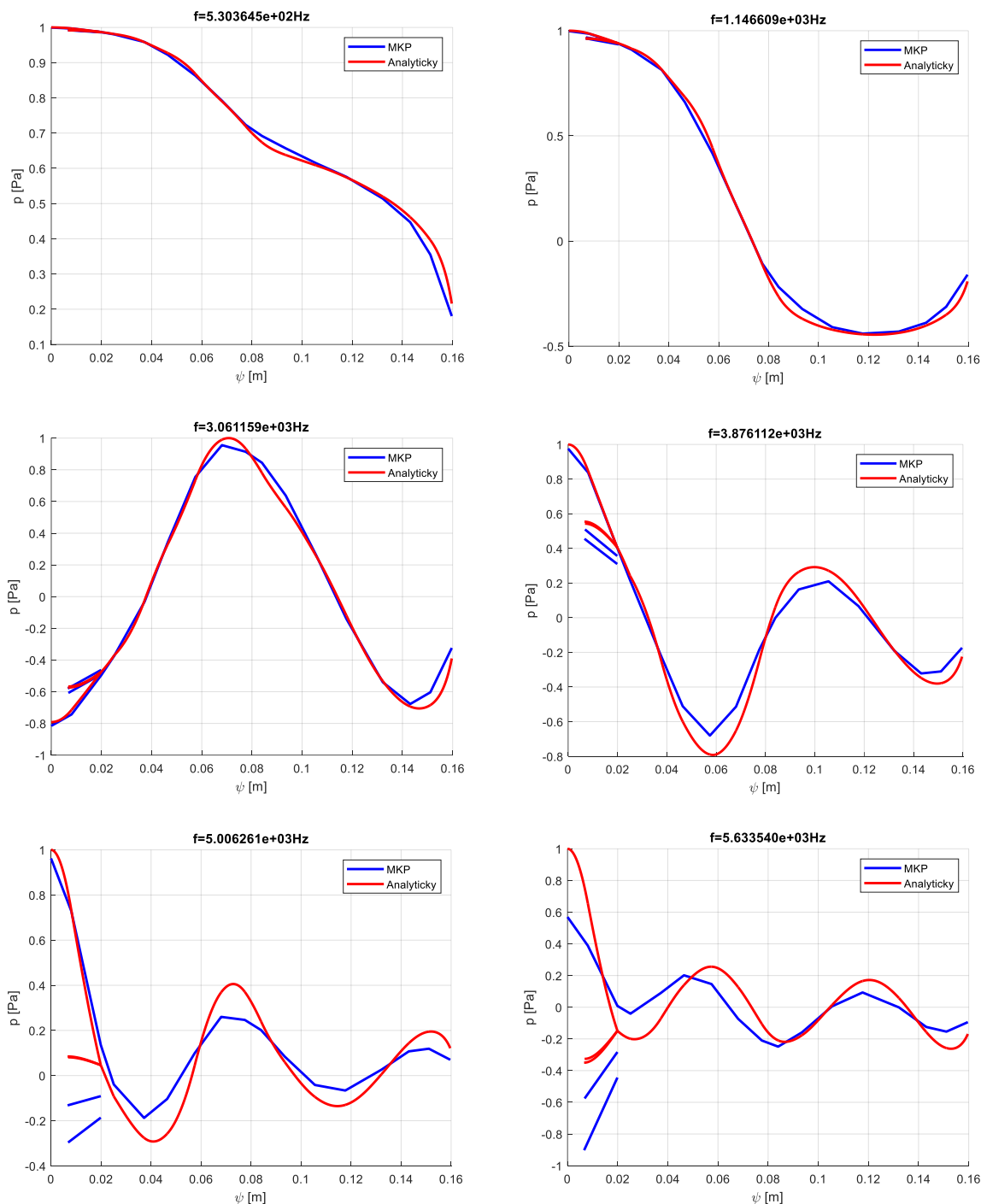
Porovnání výsledků analytického a MKP modelu s kavitami odpovídá porovnání modelů bez nich. Zásadním rozdílem je neschopnost analytického modelu rozpoznat jiné než podélné tvary kmitu. A druhý rozdíl jsou vyšší nalezené frekvence MKP modelu (tabulka 7.5). Do 5 kHz je rozdíl frekvencí zanedbatelný (méně než 4%). Ve vyšších frekvencích stoupá frekvenční chyba nad 10%. Analytický model je schopný modelovat libovolně vysoké tvary kmitu, MKP model je limitován diskretizací (17 řezů po délce), proto jsou v tomto případě věrohodnější výsledky analytického modelu. Protože v analýzách akustiky vokálních traktů je významné frekvenční pásmo pod 5 kHz, není tato chyba podstatným problémem pro provádění analýz.

Tabulka 7.5 Srovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu s kavitami

Číslo tvaru	Analytický [Hz]	MKP [Hz]	Relativní rozdíl [%]
1	519.2	530.4	2.2
2	1112.8	1146.6	3.0
3	2974.1	3061.2	2.9
4	3743.7	3876.1	3.5
5	-	4261.9	-
6	4997.3	5006.3	0.2
7	8179.1/8334.8	5171.6	-36.8/-38.0
8	5716.4	5633.5	-1.5
9	-	6228.1	-
10	-	6494.7	-
11	-	6871.5	-
12	-	7551.5	-
13	6376.3	7814.6	22.6
14	-	8390.0	-
15	7641.4	8521.2	11.5
16	-	8840.3	-
17	-	9883.9	-

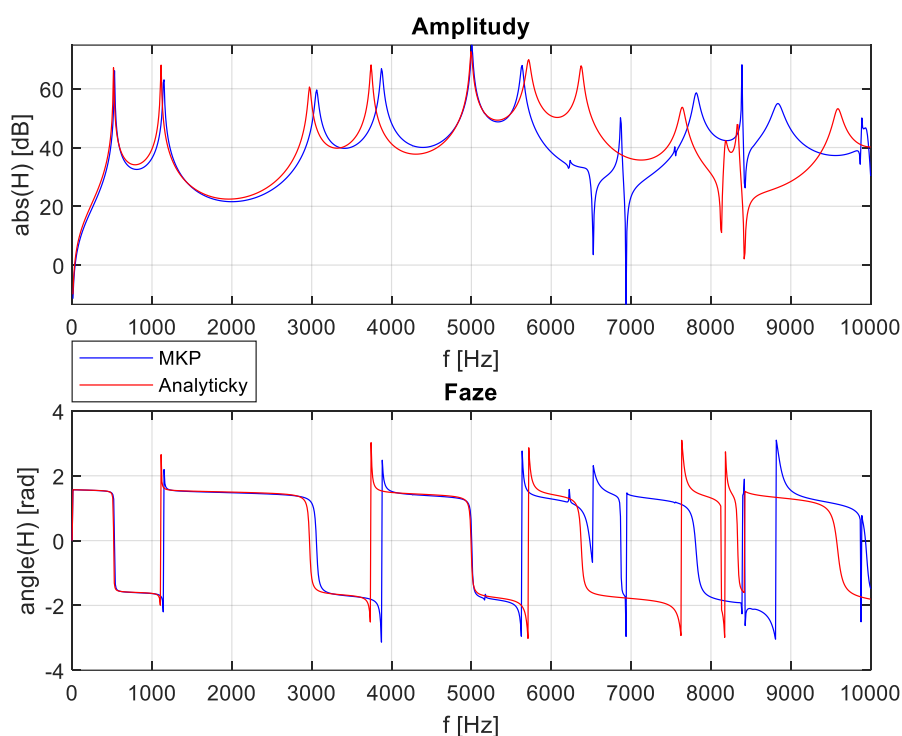
Zásadní rozdíl mezi modely vzniká u tvarů kmitu, kde se aktivně zapojují piriformní siny. Tyto kavity mají vliv především na příčné tvary kmitu, kterým výrazně snižují frekvenci. Jak bylo popsáno, analytický model dokáže modelovat podélné tvary kmitu v piriformních sinech, přestože z fyzikálního hlediska podélné nejsou. Takto analytický model nalezne dva tvary kmitu na frekvencích 8179.1 Hz a 8334.8 Hz, které charakterem odpovídají tvaru MKP modelu na frekvenci 5171.6 Hz. Zde je relativní rozdíl obrovský – přes 30%. Tento rozdíl je jednoduše vysvětlitelný. Místo, kde se připojují piriformní siny k vokálnímu traktu, je v analytickém modelu místem, kde se spojují 4 trubice. První vede od hlasivek, 2 jsou piriformní siny a poslední pokračuje k ústům. Frekvence tvaru kmitu, kde akustická vlna cestuje mezi konci piriformních sinů, je dána především součtem délek piriformních sinů a rychlostí zvuku. Ostatními rozměry vokálního traktu není příliš dotčena. To je ale špatně, ve skutečnosti tento tvar kmitu nepřekonává pouze délku piriformních sinů, ale navíc musí překonat šířku vokálního traktu v daném řezu. Tato šířka není ve rovnání s délkou piriformních sinů zanedbatelná. Tím, že je výsledná délka větší, vychází frekvence nižší. Tím je vysvětleno, proč je frekvence tohoto

typu tvaru kmitu u analytického modelu o více než 30% vyšší než u MKP modelu. V tomto případě je důvěryhodnější výsledek MKP modelu. Provede-li se porovnání vlastních tvarů kmitu, potvrdí se konstatování, že do 5 kHz jsou modely velice podobné a až ve vyšších frekvencích dochází k rozdílům. Obrázek 7.15 porovnává prvních 6 tvarů kmitu. První 3 tvary se shodují velice přesně, na dalších tvarech je vidět vliv diskretizace MKP modelu v podélném směru. Amplitudy MKP modelu jsou u těchto tvarů nižší než u analytického modelu. Charakterově jsou všechny tvary kmitu obou modelů stejné.



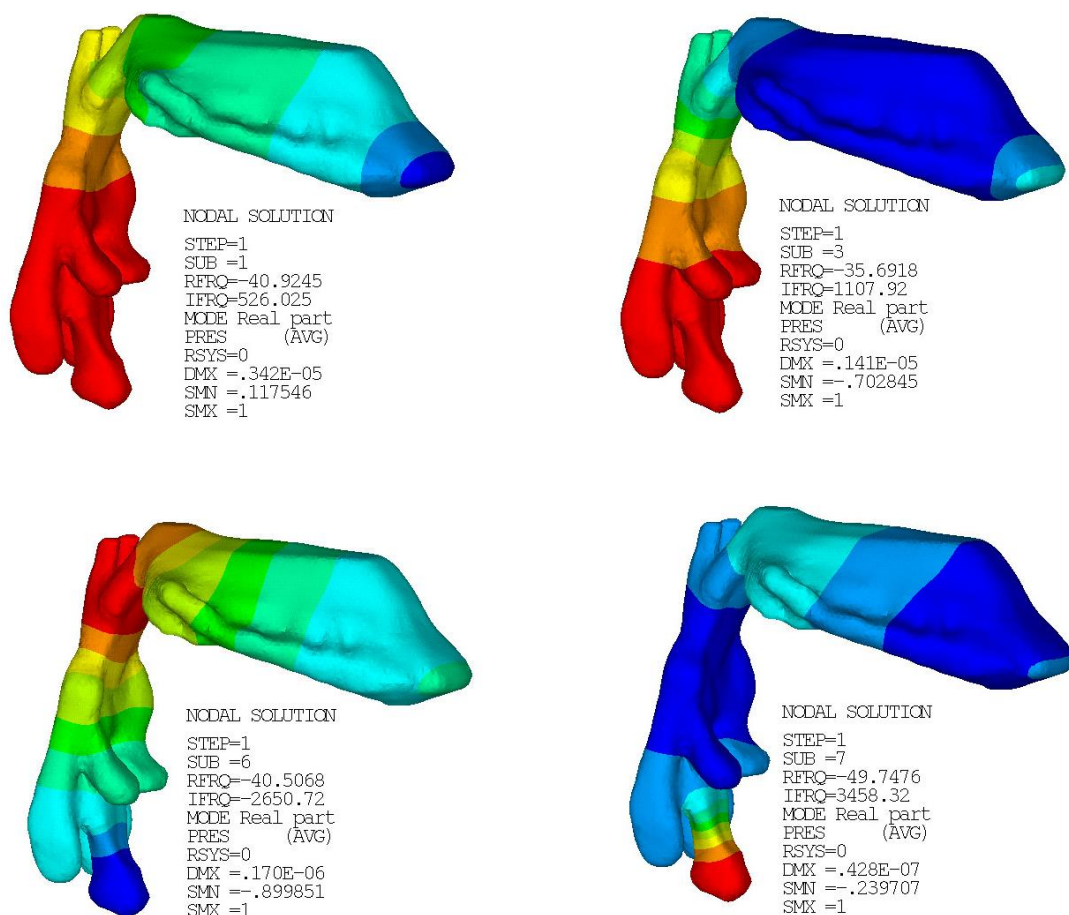
Obrázek 7.15 Porovnání tvarů kmitů analytického a MKP modelu

Pro úplnost se ještě porovná přenosová charakteristika. Tu zobrazuje obrázek 7.16. Zde se potvrzuje, že do 5–6 kHz se modely shodují. Prvních 6 vrcholů dobře odpovídá a jsou to vždy podélné tvary. MKP model mezi nimi obsahuje další 2 vlastní frekvence. Pokaždé se jedná o příčné tvary kmitu, které nevytvoří (nebo jen neznatelný) rezonanční vrchol. Důvodem, proč se tyto tvary kmitu zde nezobrazí, je, že mají u hlasivek i v ústech uzly. To znamená, že nejdou vybudit a pokud jsou vybudeny, tak nevyzařují akustickou energii ven z vokálního traktu. To zároveň ukazuje, že neschopnost analytického modelu modelovat příčné šíření vln není diskvalifikací pro účely modelování lidského hlasu. Pro frekvence do 5–6 kHz jsou oba modely rovnocenné. Ve frekvencích nad 6 kHz se již přenosové charakteristiky neshodují a ani nelze říct, že nejbližší vrcholky si odpovídají svým tvarem kmitu. V případě vyšších příčných tvarů kmitu navíc není pravda, že se neprojeví v přenosové charakteristice.



Obrázek 7.16 Porovnání přenosových charakteristik analytického a MKP modelu

Porovnání obou modelů ukazuje dobrou shodu výsledků. V současnosti je nejběžnější modelování tohoto problému pomocí MKP v komerčních programech. Takový model poskytne jemnější a kvalitnější síť a tím i věrohodnější výsledky než zde používaný MKP model. Aby práce byla úplná, je provedeno porovnání s výsledky MKP modelu v programu Ansys 2022 R2. Tento model byl sestaven z 198 456 elementů FLUID220 (kvadratický šestistěn s 20 uzly) a celkový počet stupňů volnosti modelu je 68 950. Obrázek 7.17 zobrazuje vlastní tvary kmitu, všechny zobrazené tvary se svým charakterem přesně shodují s dosavadními výsledky, polohy uzlů a kmiten tvarů kmitů jsou shodné. Tabulka 7.6 porovnává vlastní frekvence obou MKP modelů. První 2 frekvence se shodují velice přesně, u dalších vznikají odchylky okolo 10%. To je pravděpodobně dáno ztrátou některých geometrických detailů při tvorbě sítě pro nové elementy. Model v programu Ansys obsahuje části kanálů připojující nosní trakt a detaily v oblasti zubů, které MKP model s odvozenými prvky neobsahuje.



Obrázek 7.17 Vlastní tvary kmitu MKP modelu z programu Ansys

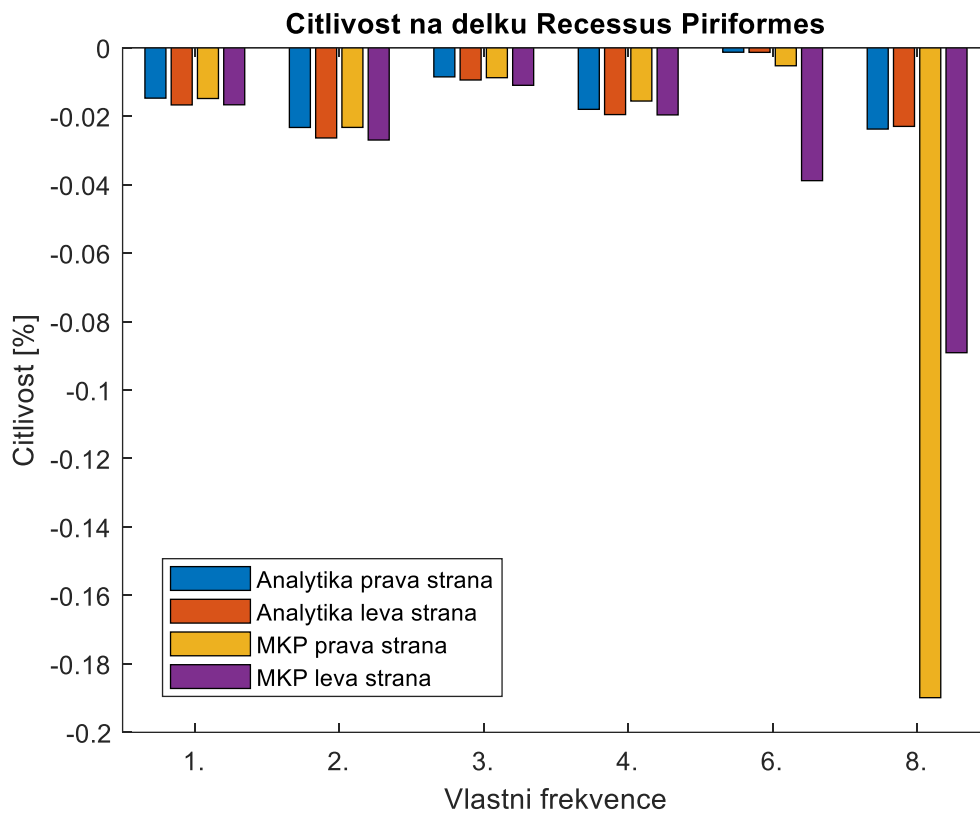
Tabulka 7.6 Srovnání vlastních frekvencí MKP modelů novými a běžnými prvky

Číslo tvaru	Model s novým elementem [Hz]	Ansys model [Hz]	Relativní rozdíl [%]
1	530.4	526.0	0.8
2	1146.6	1107.9	3.4
3	3061.2	2650.7	13.4
4	3876.1	3458.3	10.8

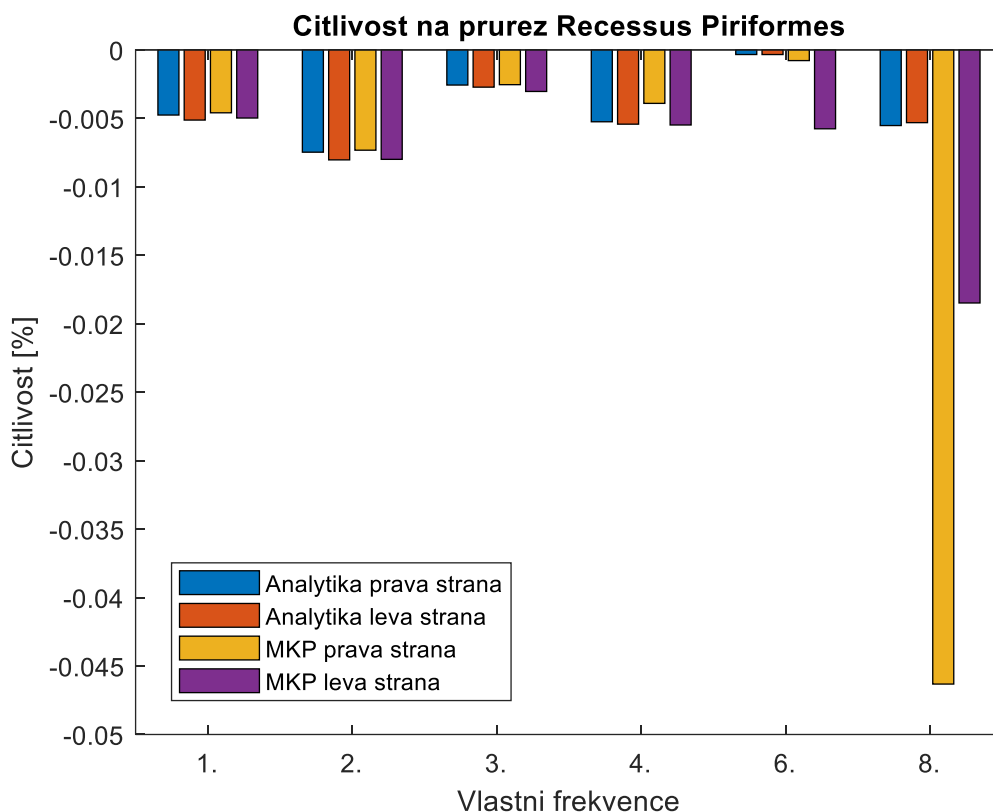
Akustické vlastnosti obou modelů obsahujících kavity byly analyzovány a porovnány i s běžným MKP modelem. Další významnou informací je citlivost akustických vlastností vokálního traktu na modifikace kavit. Modely jsou postaveny tak, že lze snadno modifikovat délku a průřez na konci piriformních sinů. Valekuly jde modifikovat jejich velikostí (průřez) na úrovni 4. řezu. U valekul by bylo ještě možné modifikovat jejich výšku, myšleno vzdálenost řezu 4. a 5. od sebe, ale tato možnost není využívána. Rozměry piriformních sinů se dají modifikovat nezávisle na levé i pravé straně. U valekul se mění obě kavity současně, protože jsou tak blízko u sebe, že jejich význam je zaměnitelný.

Protože pro účely této práce jsou nejvýznamnější hodnoty vlastních frekvencí, bude citlivostní analýza sledovat pouze hodnoty vlastních frekvencí. Je použito zmíněných 5 modifikací kavit vokálního traktu. Tyto modifikace jsou vždy provedeny 2x, jednou se daný

parametr zvětší o 10% a poté se zmenší 10%. Z napočítaných dat se určí relativní rozdíl mezi referenční geometrií a modifikovanou. Hodnoty při zmenšení a zvětšení daného parametru jsou průměrovány.

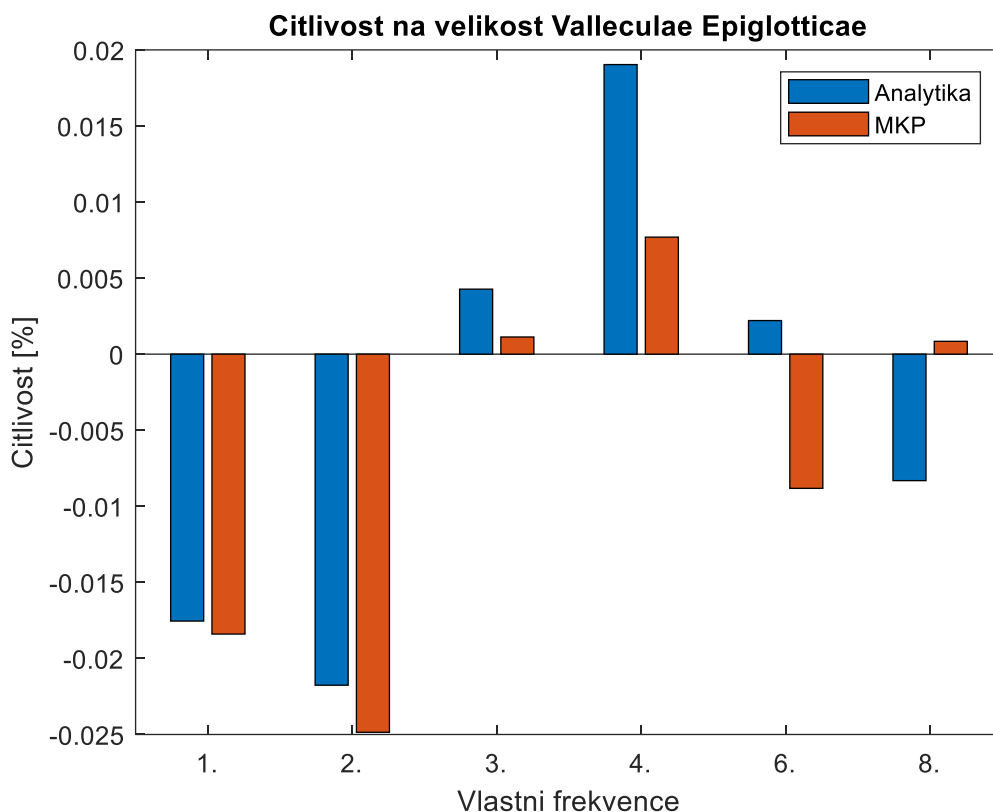


Obrázek 7.18 Citlivost vlastních frekvencí na délku piriformních sinů



Obrázek 7.19 Citlivost vlastních frekvencí na průřez piriformních sinů

Výsledky jsou zobrazeny na několika sloupcových grafech (obrázek 7.18, obrázek 7.19). Graf vždy porovnává oba typy modelů a v případě piriformních sinů porovnává i levou a pravou stranu. Mezi modely, které kavity neobsahují a obsahují, vznikly rozdíly v řádech jednotek procent. Modifikace jediného rozměru o 10% jediné kavity musí vytvořit rozdíl ještě řádově menší. Výsledky ukazují, že prodloužení nebo zvětšení průřezu piriformních sinů, vždy sníží vlastní frekvence. Na prvních 4 frekvencích je perfektní shoda mezi oběma modely a vliv modifikací se projeví v setinách procent. Na dalších vlastních frekvencích je MKP model výrazně citlivější. Navíc se u MKP modelu ve vyšších frekvencích projevuje vliv nesymetrie vokálního traktu a tím vznikají rozdíly citlivosti mezi levou a pravou stranou. Při porovnání citlivosti na délku a průřez piriformních sinů je patrné, že délka má asi 4x větší vliv na vlastní frekvence než průřez.



Obrázek 7.20 Citlivost vlastních frekvencí na velikost valemul

Valekuly se modifikují svojí velikostí na úrovni 4. řezu. Vliv 10% změny na vlastní frekvence je řádově v setinách procenta (obrázek 7.20). První dvě vlastní frekvence se snižují a další 2 zvyšují. Přesná shoda mezi modely je pouze na prvních dvou frekvencích, na dalších dvou už jsou vidět odchylky a při vyšších frekvencích se modely rozcházejí.

## 7.2 Tvarové optimalizace

Stejně jako u modelu neobsahujícím kavity je vyzkoušena schopnost modifikovat geometrii vokálního traktu k dosažení definovaných akustických vlastností. Výpočet je koncipován stejně jako u modelu bez kavit. První krok je parametrizace geometrie. V předešlém případě bylo použito 17 parametrů. Model obsahující kavity má přirozeně větší možnosti variování tvaru a tím i větší počet parametrů pro optimalizaci. První parametr bude znovu udávat zvětšení nebo zmenšení (měřítko) délky vokálního traktu a bude se uplatňovat pro celý vokální trakt bez piriformních sinů. Následující parametry jsou měřítko pro jednotlivé řezy. Definovány jsou jako poměry průřezů, nikoliv rozměrů. MKP model obsahuje ve třetí vrstvě (mezi 3. a 4. řezem) elementy, které zajišťují spojení mezi piriformními siny a vokálním traktem. Umístění těchto elementů je topologicky odlišné od ostatních a v případě nevhodné kombinace parametrů modifikujících tvar by mohlo dojít k singularitám. Z tohoto důvodu je měřítko zvětšení pro řez 3. a 4. totožné. Jinak řečeno tyto řezy sdílí společný optimalizační parametr. U piriformních sinů je možné modifikovat délku a koncový průřez, to znamená další 2 parametry na každé straně. Valekuly se modifikují pouze svojí velikostí na úrovni 4. řezu.

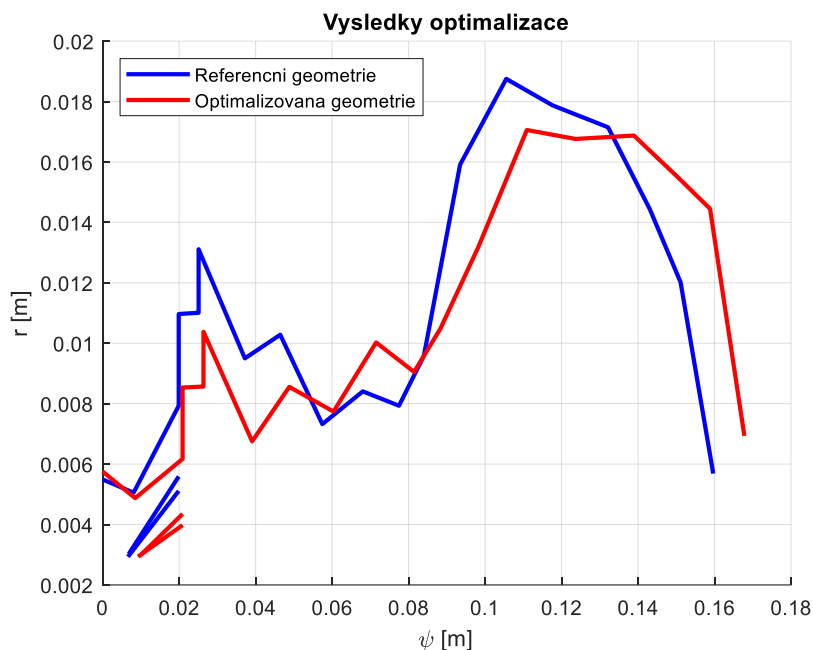
Levá a pravá valemula se v tomto případě nerozlišuje, protože jsou obě kavity tak blízko u sebe, že jejich vliv je prakticky totožný. Celkově je k modifikaci vokálního traktu použito 22 parametrů.

Hodnoty, které mohou nabývat, jsou u analytického modelu libovolná kladná čísla a model zůstane fyzikálně korektní, fyziologicky nikoliv. MKP model je v tomto komplikovanější a mohou u něj vznikat singularity. Testování podmíněnosti modelu ukázalo, že pokud je parametr měnící délku vokálního traktu v intervalu  $\langle 0.75, 1.25 \rangle$  a všechny ostatní parametry v intervalu  $\langle 0.5, 1.5 \rangle$ , pak existuje pouze jedno místo, kde může existovat singularita. Je to místo největšího ohybu vokálního traktu. V tomto místě se při zkrácení traktu a zvětšení průřezů mohou protnout na vnitřní straně 2 řezy. V tomto místě mají části některých elementů záporný objem a jsou singulární. Tento stav je ale velmi vzdálený od referenčního vokálního traktu (CT měření), a proto k němu během optimalizace nedochází. Z tohoto důvodu není zapotřebí během optimalizace kontrolovat podmíněnost MKP modelu.

Formulace cílové funkce je stejná jako v optimalizacích bez kavit. Jedná se o vážený součet odchylek formantů od požadovaných hodnot. Váhové koeficienty jsou voleny tak, aby jejich součet byl roven 1 a aby váha prvního formantu byla největší a klesala (6.4). Ve výpočtu se optimalizují první 4 formanty (hodnoty jsou znovu pro hlásku a: [623,1251,2552,3459] Hz), to znamená frekvenční oblast do 4 kHz. Vyšší frekvence už nejsou tak důležité. Dále se přičte penalizace, která zohledňuje odchylku geometrie od referenční geometrie. Tato penalizace je formulována vztahem (6.5). Penalizace tedy roste exponenciálně se změnou geometrie. Změna geometrie je brána jako euklidovská norma rozdílů parametrů. Citlivost penalizace je nastavena dvěma parametry.

Znovu byly použity genetické algoritmy s 200 jedinci v generaci a výpočet byl spuštěn vícekrát s různě nastavenou penalizací. Optimalizace většinou skončily u geometrií, které výrazně deformovaly ústní dutinu. Tyto deformace byly fyziologicky nepřijatelné. Proto se upravily meze optimalizačních parametrů v ústní dutině na hodnoty přibližně  $\langle 0.8, 1.2 \rangle$ . Ze vzniklé sady výsledků byl manuálně zvolen nejlepší výsledek. Obrázek 7.21 zobrazuje porovnání referenční geometrie s nejlepším výsledkem optimalizace. Geometricky je vidět především prodloužení vokálního traktu o 5%, ústní dutina se zúžila asi o 10%, rozměry hrtanu jsou výrazně menší, hltan se těsně před ústní dutinou rozšířil. Piriformní sivy se o 10% zkrátily. Valemuly se změnilo stejně jako hrtan. Hodnoty prvních čtyř formantů vzniklé geometrie jsou [610,1249,2558,3460] Hz. Při porovnání s požadovanými frekvencemi jsou rozdíly minimální. Největší rozdíl je u prvního formantu, a to 13 Hz, a průměrný rozdíl je pouhých 5.5 Hz. Celkově se výsledky dají hodnotit jako velmi dobré, jsou i mírně lepší než u geometrie neobsahující kavity. Nová geometrie není fyziologicky v rozporu s obecně uznávanými geometriemi hlásky a:. Frekvenční nepřesnost oproti požadovaným formantům je pouze v jednotkách hertzů, což je chyba desetin, maximálně jednotek procent.

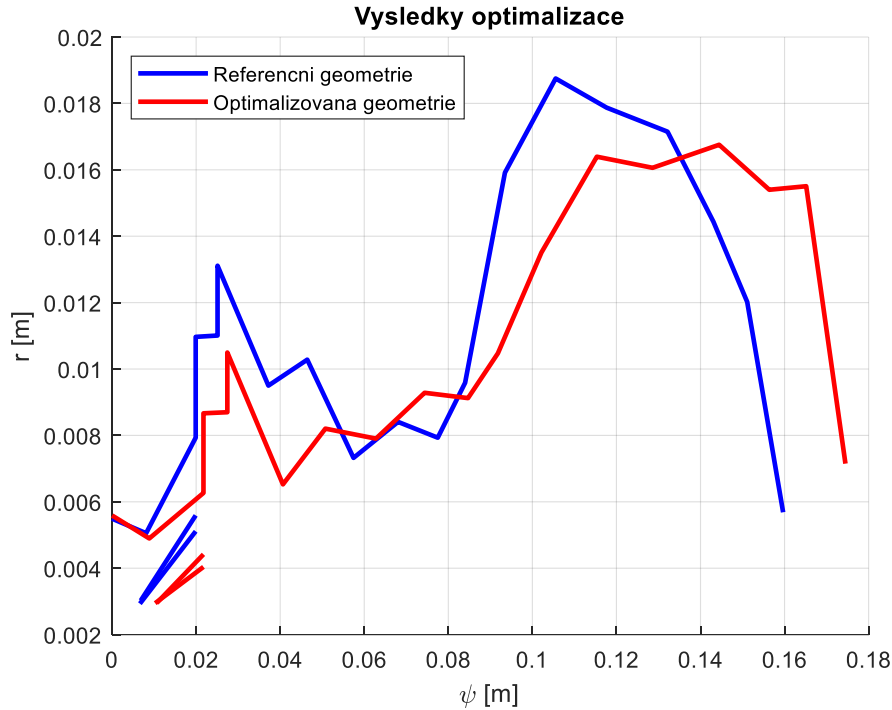




Obrázek 7.21 Porovnání výsledné geometrie analytického modelu s CT geometrií

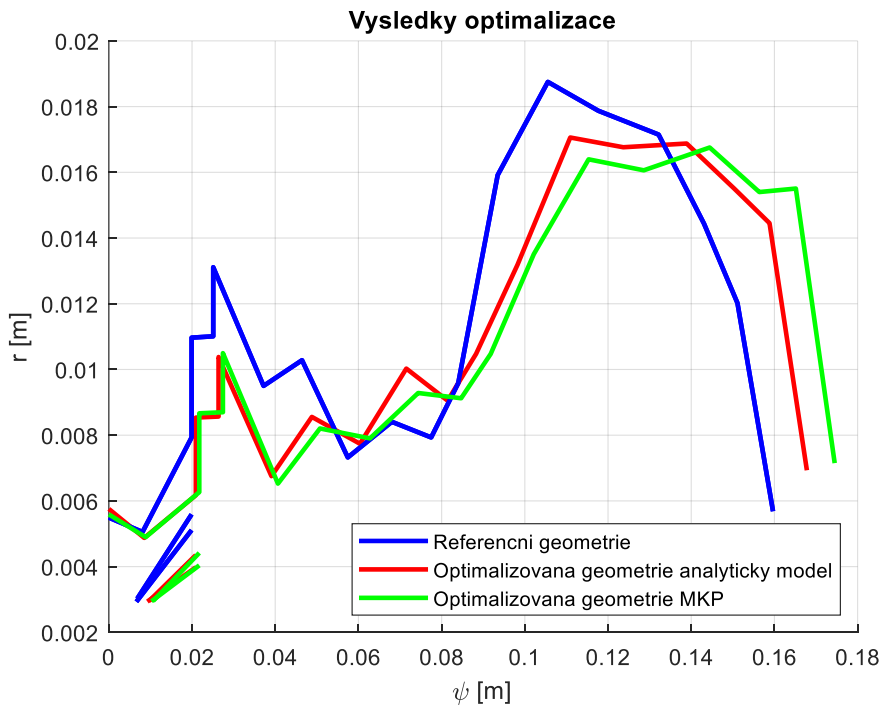
Výsledky akustických vlastností optimalizovaného modelu vokálního traktu budou rozebrány dále. Stejně jako analytický model, i MKP model s kavitami byl podroben optimalizaci formantů pro získání shod s měřenými daty. Výpočet byl prakticky totožný, sada parametrů k modifikaci geometrie vokálního traktu byla totožná s analytickým modelem a nastavení optimalizačního řešiče také. Jediná úprava byla v cílové funkci, kde byly použity 2 varianty. Jedna byla totožná s analytickým modelem a ve druhé byl jako referenční model pro penalizaci použit výsledek optimalizace analytického modelu. Tato modifikace má jednoduché opodstatnění, výpočet cílové funkce MKP modelu je asi 20x pomalejší. Proto byl vždy první výpočet proveden na analytickém modelu. Na něm se vyladí nastavení uživatelských parametrů, například nastavení penalizací a vah. Až s naladěným výpočtem se spouští MKP optimalizace. Pokud se penalizace nastaví, aby pracovala s očekávaným řešením, místo CT geometrií, výpočet konverguje ještě rychleji a výsledky jsou lepší.

Optimalizovaná geometrie MKP modelu má podobné rysy jako u modelu analytického. Došlo k prodloužení vokálního traktu a mírnému zúžení ústní dutiny. Oblast hrtanu se také výrazně zeštíhlila a jediná část vokálního traktu, kde se rozměry zvětšily, je hltan. Popsané změny ukazuje obrázek 7.22. Polohy formantů MKP modelu jsou dokonce ještě přesnější než u analytického modelu. Formanty se nacházejí na frekvencích [623,1251,2552,3460] Hz. To znamená, že všechny formanty mají odchylku od požadovaných hodnot menší než 1 Hz. Akusticky tedy model přesně odpovídá požadavku. Geometricky je vyhovující také, MKP síť nové geometrie zde není samostatně zobrazena, bude zobrazena až při zobrazení vlastních tvarů kmitu.



Obrázek 7.22 Porovnání výsledné geometrie MKP modelu s CT geometrií

Rozdíly mezi výsledky na obou modelech jsou malé (obrázek 7.23). Největší rozdíl je asi o 15% menší průřez MKP modelu v části hltanu a o 4% větší délka MKP modelu. Především kapitoly potvrdily dobrou shodu akustických vlastností modelů, proto není překvapení, že výsledné geometrie jsou téměř totožné.

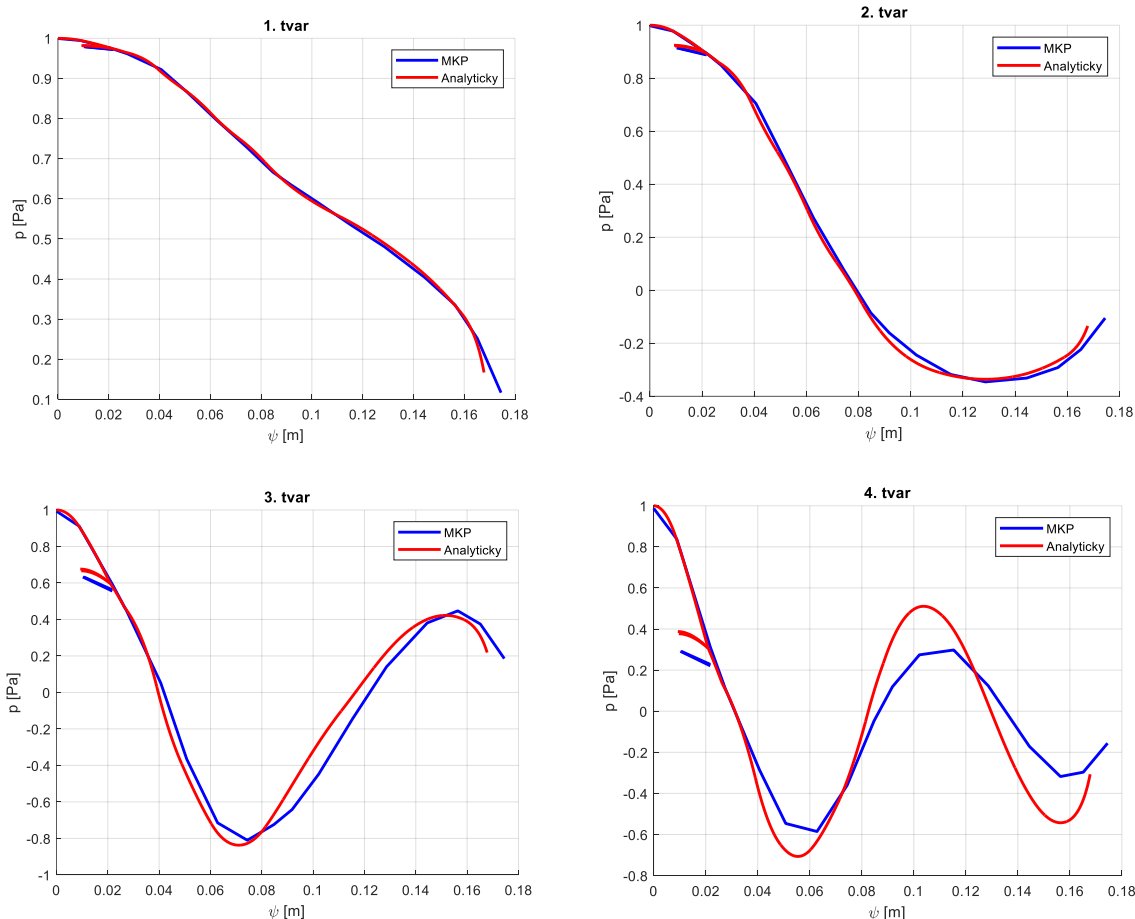


Obrázek 7.23 Porovnání optimalizovaných geometrií obou modelů

Geometricky se modely shodují, akustické vlastnosti porovnává tabulka 7.7. Zde je porovnání modelů před a po optimalizaci a zároveň jsou porovnány oba typy modelů. Dále tabulka uvádí cílové hodnoty. Zde je jasně vidět, že optimalizace tvaru splnila svůj účel perfektně. Referenční geometrie definovaná CT snímkováním vykazuje odchylky frekvencí formantů ve stovkách hertzů. Po optimalizaci se tyto odchylky redukuje na jednotky hertzů. Dále tabulka znovu potvrzuje dobrou shodu obou typů modelů.

Tabulka 7.7 Srovnání prvních 4 vlastních frekvencí optimalizovaných modelů

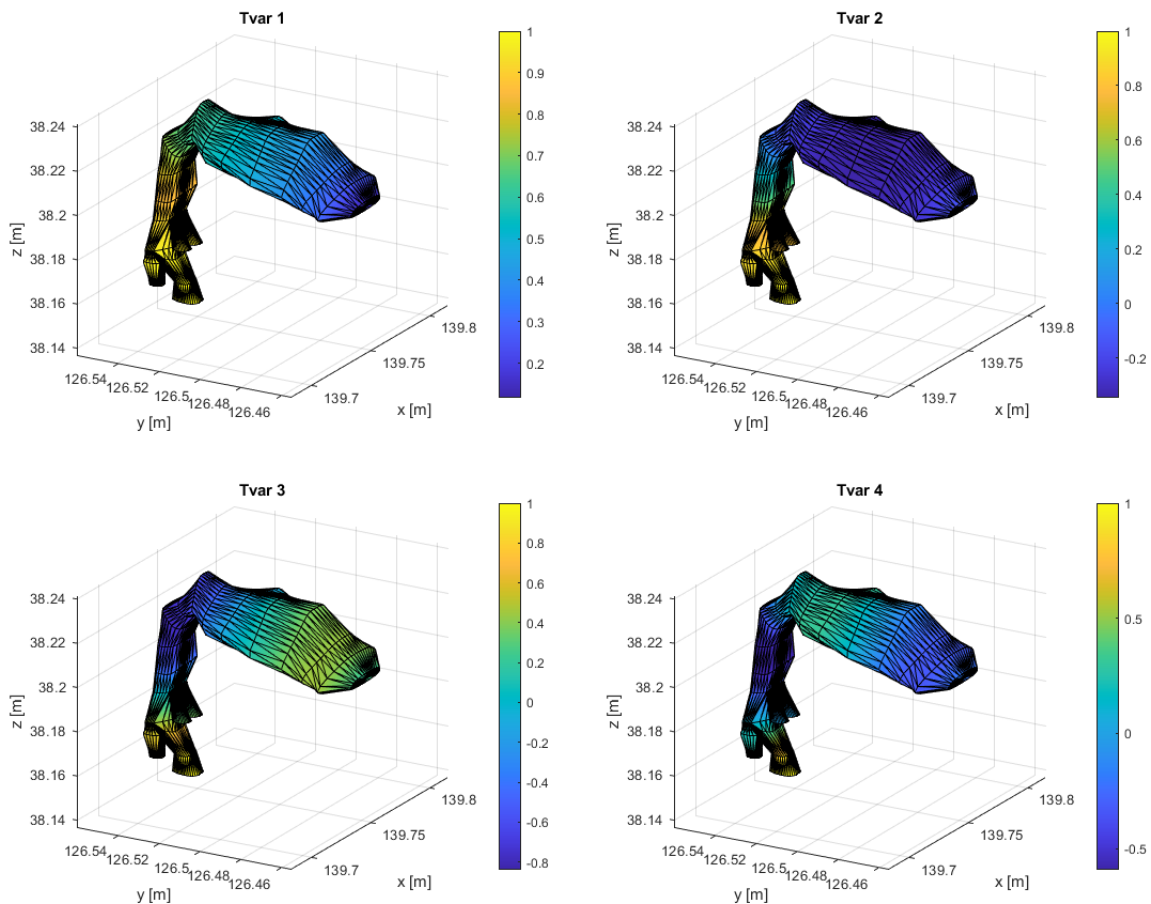
Číslo tvaru	Referenční model (CT)		Optimalizované modely		Cílové hodnoty [Hz]
	Analytický [Hz]	MKP [Hz]	Analytický [Hz]	MKP [Hz]	
1	519.2	530.4	610.39	622.8	623
2	1112.8	1146.6	1248.7	1250.9	1251
3	2974.1	3061.2	2557.8	2551.9	2552
4	3743.7	3876.1	3459.7	3459.5	3459



Obrázek 7.24 Srovnání tvarů kmitu analytického a MKP modelu po optimalizaci

I po optimalizaci zůstává geometrie vokálního traktu topologicky stejná jako před optimalizací. Geometrické změny jsou jen jemné doladění tvaru, proto nelze očekávat viditelné změny na vlastních tvarech kmitu. Obrázek 7.24 srovnává optimalizované tvary kmitu obou modelů. Je vidět, že optimalizace vůbec neovlivnila charakter tvarů kmitu (obrázek 7.15

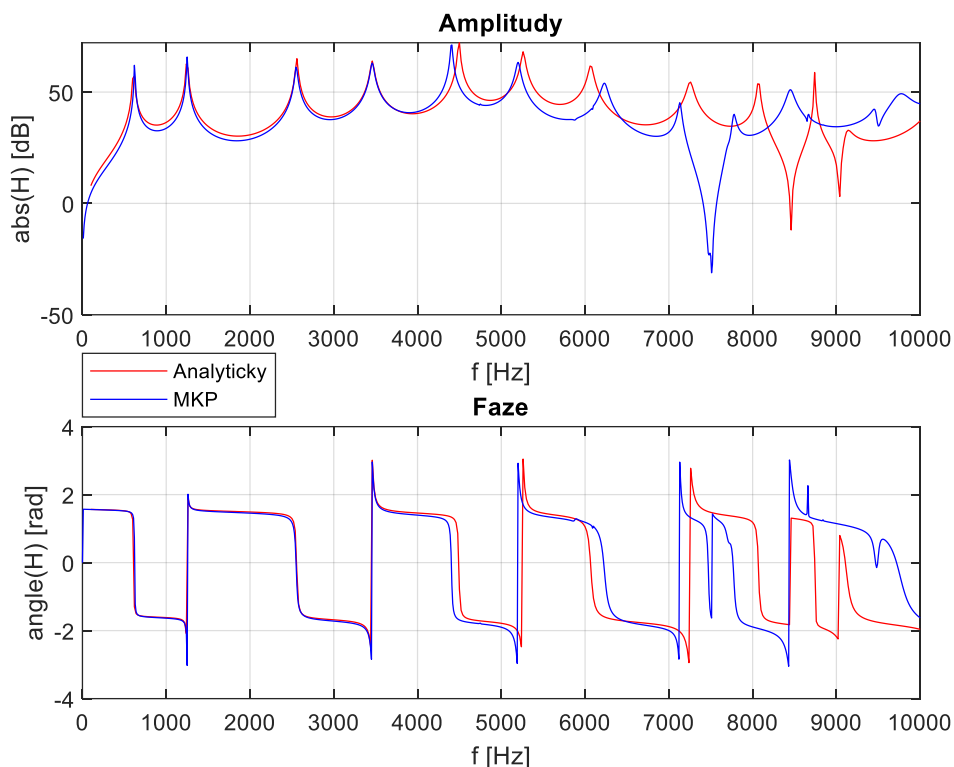
zobrazuje tvary kmitu před optimalizací). Při porovnávání je důležité si uvědomit, že analytický a MKP model nemají stejnou geometrii. MKP model je o 4% delší, a proto je viditelný rozdíl v protažení tvarů kmitu. První dva tvary se shodují přesně, třetí je ovlivněn protažením. Až 4. tvar obsahuje viditelný rozdíl v nižších amplitudách MKP modelu.



Obrázek 7.25 Vlastní tvary kmitu MKP modelu po optimalizaci

Pro MKP model je možné ještě vizualizovat vlastní tvary kmitu ve 3D zobrazení (obrázek 7.25). Zobrazení potvrzuje, že první 4 tvary jsou všechny podélného charakteru. Zároveň toto zobrazení dává náhled na tvar vokálního traktu po optimalizaci. Tvar si zachovává proporce, které odpovídají hlásce a:. Oproti referenční geometrii je vidět zúžení v oblasti hrtanu a protažení ústní dutiny.

Poslední srovnání optimalizovaných modelů zobrazuje přenosovou charakteristiku. Přenosy zobrazuje obrázek 7.26. První 4 vrcholky se přesně překrývají, to je důsledek optimalizace, která to měla za cíl. Další 4 viditelné vrcholky se frekvenčně odlišují v řádu jednotek procent, takže také výborná shoda. Celkově si tedy modely přesně odpovídají do 4 kHz a do 7 kHz si odpovídají dostatečně. MKP model má v oblasti dobré shody minimálně 3 vlastní frekvence s příčnými tvary kmitu. Jejich vliv na akustickou emisi z úst je minimální a na přenosové charakteristice jsou málo znatelné. V pásmech nad 7 kHz se modely výrazně rozcházejí. To je dáno dvojnásobnou antirezonancí MKP modelu v okolí 7.5 kHz, zatímco analytický model má antirezonance přibližně v 8.5 kHz a 9 kHz.



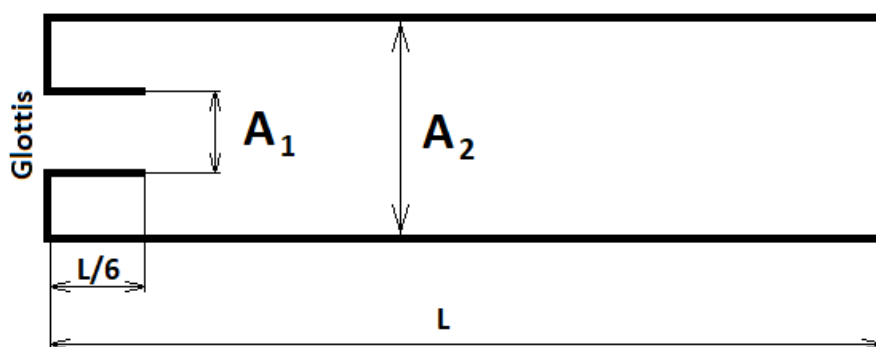
Obrázek 7.26 Srovnání přenosových charakteristik analytického a MKP modelu po optimalizaci

### 7.3 Geometrické modifikace vokálního traktu pro vznik pěveckého formantu

Geometrické optimalizace v předešlé kapitole ukázaly schopnost nalézt takový tvar vokálního traktu, aby se frekvenční charakteristiky modelu lišily od měřených dat o pouhé jednotky hertzů. Dalším krokem je definovat specifickou hlasovou úpravu a určit geometrickou úpravu vokálního traktu pro dosažení této úpravy. Zajímavou schopností některých vokalistů je využití pěveckého formantu. Tento formant byl zmíněn ve 3. kapitole této práce.

Charakteristická vlastnost pěveckého formantu je velký podíl akustické energie v okolí 3 kHz. Tento formant ovládají například operní zpěváci. V okolí této frekvence je lidský sluch nejcitlivější a zároveň tento formant výrazně vystupuje ze spektra orchestru a díky tomu není hlas zpěváka přehlušen orchestrem. Změnit charakter kmitů hlasivek tak, aby v okolí této frekvence vyzářovaly více akustické energie, není reálné. Proto to prakticky znamená, že vokálního formantu se dosahuje modifikací přenosové charakteristiky vokálního traktu. Jediná prakticky realizovatelná možnost zesílení signálu je využití rezonančních vrcholů. Nejvyšší zesílení je v místě vrcholku a v jeho okolí. Sblížením dvou vrcholů se mezi nimi vytvoří frekvenční pásmo s relativně velkým zesílením, které představuje pěvecký formant. První dva formanty definují hlásku a při jejich změně se změní informace, kterou hlas předává. Tyto formanty tedy nemohou být nástrojem pro tvorbu pěveckého formantu. Další dva formanty jsou naopak vhodné, jejich změna je možná, aniž by se změnila fonovaná hlásku a zároveň jsou tyto formanty nejbližší k ideálním 3 kHz.

Je-li tedy cílem nalézt geometrii vokálního traktu takovou, aby byla zachována potřebná hláska a vznikl pěvecký formant, může se provést optimalizační výpočet. Optimalizace může být formulována stejně, jako bylo již ukázáno, pouze se jako žádaná hodnota 3. a 4. formantu použije stejná hodnota v potřebné oblasti. Tento výpočet byl proveden s pozitivním výsledkem. První 2 formanty měly odchylku v řádu jednotek hertz a další dva se přiblížily na vzdálenost zhruba 500 Hz. Vzniklý pěvecký formant poskytuje zhruba 4x větší zesílení než ostatní části frekvenčního spektra.



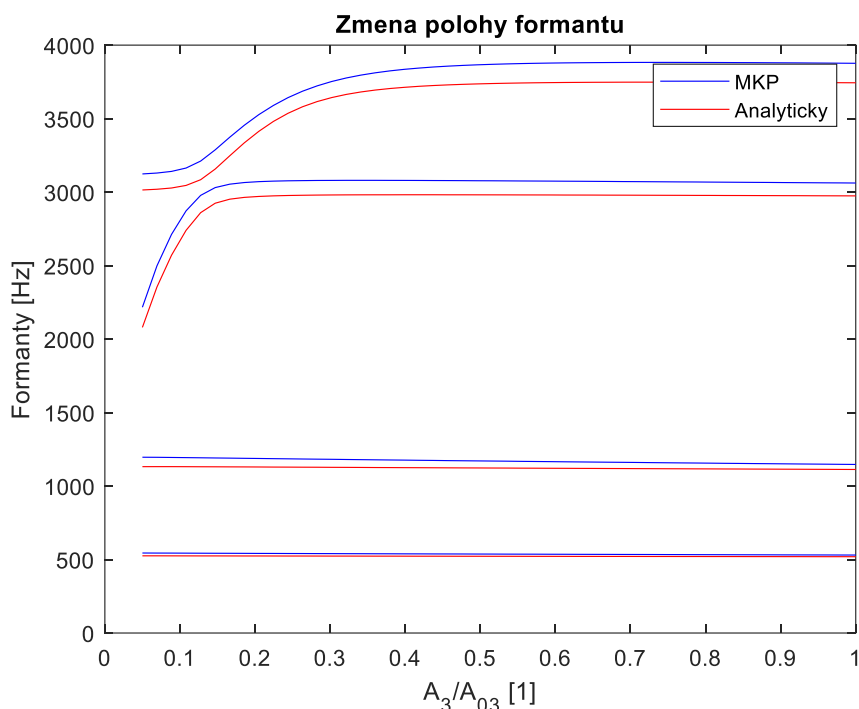
Obrázek 7.27 Schéma rezonanční trubice generující pěvecký formant (upraveno z [80])

Problém použité optimalizace je omezení geometrických změn, aby nedošlo k nefyziologické změně vokálního traktu. Lidé ovládající pěvecký formant jsou schopni modifikovat vokální trakt více než běžní lidé. Penalizace za změnu geometrie je nastavena relativně přísně, aby byl charakter tvaru zachován. Z tohoto důvodu bylo sblížení dvou formantů dosaženo pravděpodobně jinak, než se děje ve skutečnosti.

Experimentálně bylo zjištěno, že pěvecký formant vzniká modifikací hrtanové části vokálního traktu [94]. Ukázalo se, že přidáním dodatečné rezonanční trubice na začátek vokálního traktu se může tento jev vytvořit. Obrázek 7.27 ukazuje schéma rezonanční trubice. Jedná se pouze o vnořenou trubici do vokálního traktu, připojenou přímo za hlasivky. Taková trubice ve vokálním traktu přímo není, ale obrázek se dá interpretovat i jinak. Druhá interpretace je malý průřez vokálního traktu těsně za hlasivkami, který se v jednom místě rozšíří, a v tomto místě je připojena paralelní slepá kavita. A skutečný vokální trakt této interpretaci vyhovuje. Zhruba 2 cm nad hlasivkami se vokální trakt rozšíří a připojí se k němu piriformní siny. Skutečný vokální trakt tedy obsahuje rezonanční trubici z obrázku ohraničenou epiglottis. Výsledky z [94] dále ukazují, že pro přiblížení dvou rezonančních vrcholů je potřeba správný poměr ploch  $A_1$  a  $A_2$ . Podle jejich výsledků je ideální poměr  $A_1/A_2$  menší než  $1/6$ .

Tyto poznatky je možné ověřit použitím vytvořených modelů. Použijí se zpracované geometrie obsahující piriformní siny a postupy modifikace geometrie, které byly použity v optimalizacích tvaru. Možnosti modifikace geometrie byly změněny. Byla přidána možnost měnit poměr průřezu v epiglottis vůči průřezu piriformních sinů na úrovni řezu 3. Zároveň byla odstraněna možnost měnit levý a pravý piriformní sinus nezávisle. Tím se ztratí možnost měnit asymetrii vokálního traktu, ale ta pro tuto práci není účelná. Ověření výsledků [94] je pouhou citlivostní studií, kde se modifikuje (zmenšuje) průřez vokálního traktu v hrtanu na úkor

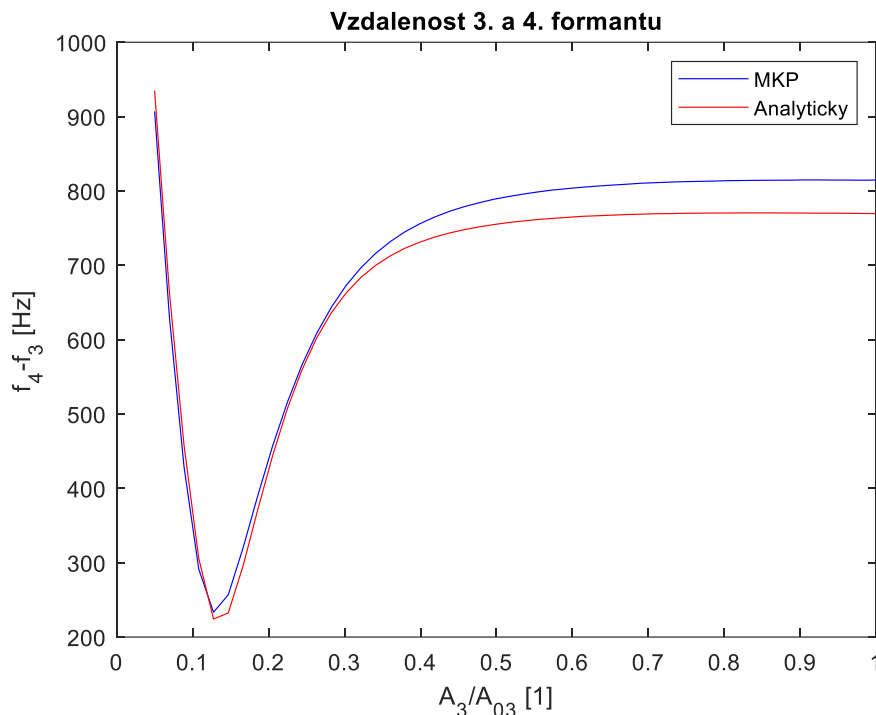
piriformních sinů, které se zvětšují. Průřez na úrovni hlasivek je neměnný a mění se ostatní hrtanové průřezy. Sledují se polohy prvních čtyř vypočtených formantů v závislosti na těchto změnách.



Obrázek 7.28 Citlivost frekvencí formantů na průřez vokálního traktu v hrtanu

Při malém zužování hrtanových průřezů nedochází k prakticky žádným změnám poloh formantů. Frekvence mírně rostou, jejich růst je tak nízký, že je možné považovat první 4 formanty za naprosto necitlivé na tento průřez. Ve chvíli, kdy měněné průřezy klesnou pod 50%, začne klesat frekvence čtvrtého formantu a tím se blížit ke třetímu. Při ještě větším zúžení hrtanu se frekvence čtvrtého formantu začne ustalovat na frekvenci podobné frekvenci třetího formantu. Třetí formant naopak začne klesat a blížit se ke druhému. Výsledek je, že čtvrtý formant frekvenčně nahradí formant třetí (obrázek 7.28). V případě, že by zužování v hrtanu probíhalo dále, stejný úkaz, co proběhl mezi třetím a čtvrtým formantem, by proběhl mezi třetím a druhým formantem.

Pozorovaný jev mezi třetím a čtvrtým formantem má velkou souvislost s pěveckým formantem. Nejprve se čtvrtý formant blíží třetímu a teprve poté se třetí formant začne odklánět. Dochází tedy nejprve k sblížení formantů a poté k jejich oddálení. Díky tomu existuje lokální minimum vzdálenosti mezi třetím a čtvrtým formantem. Toto minimum se nachází v okolí 3 kHz, což je frekvence pěveckého formantu. Pokud je pěvecký formant chápán jako sblížení těchto dvou formantů v okolí 3 kHz, pak fenomén z obrázku je pěveckým formantem.

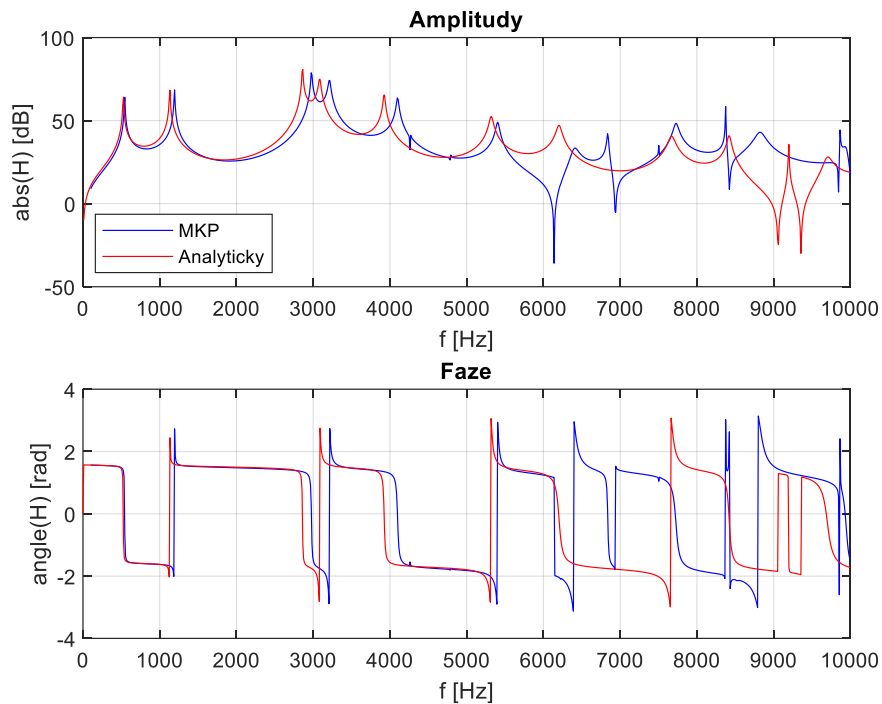


Obrázek 7.29 Vzdálenost 3. a 4. formantu v závislosti na modifikaci hrtanu

Vyhodnocení přiblížení formantu ukazuje obrázek 7.29. V referenční geometrii je třetí formant vzdálen od čtvrtého o zhruba 800 Hz. To je podobná vzdálenost, jako mají jiné sousedící formanty. Při zmenšování průřezu v hrtanu na 50% původní hodnoty začíná vznikat efekt sbližování formantů. Při dalším zmenšování je tento jev velice rychlý a výrazný, minimální frekvenční rozdíl je při zmenšení průřezu na 13% původního. Při této konfiguraci se frekvenční rozdíl zmenšil na 233 Hz u MKP modelu a 224 Hz u analytického. Lokální minimum je velmi úzké, rozsah geometrických konfigurací hrtanu (při požadavku na pěvecký formant) není široký. Zmenšení průřezu na 13% je výrazné a odpovídá zmenšení příčných rozměrů na 36% původních hodnot. Zúžení některých částí vokálního traktu na přibližně třetinu je obrovská změna, ale laryngoskopické vyšetření pěvců ukazuje, že je to dosažitelná hodnota [94]. Informace, že poměr průřezů  $A_1/A_2$  by měl být menší než  $1/6$ , je v tomto případě naplněn. Referenční geometrie má tento poměr přibližně  $1/2$ . V nalezeném lokálním minimu je tento poměr přibližně  $1/15$ .

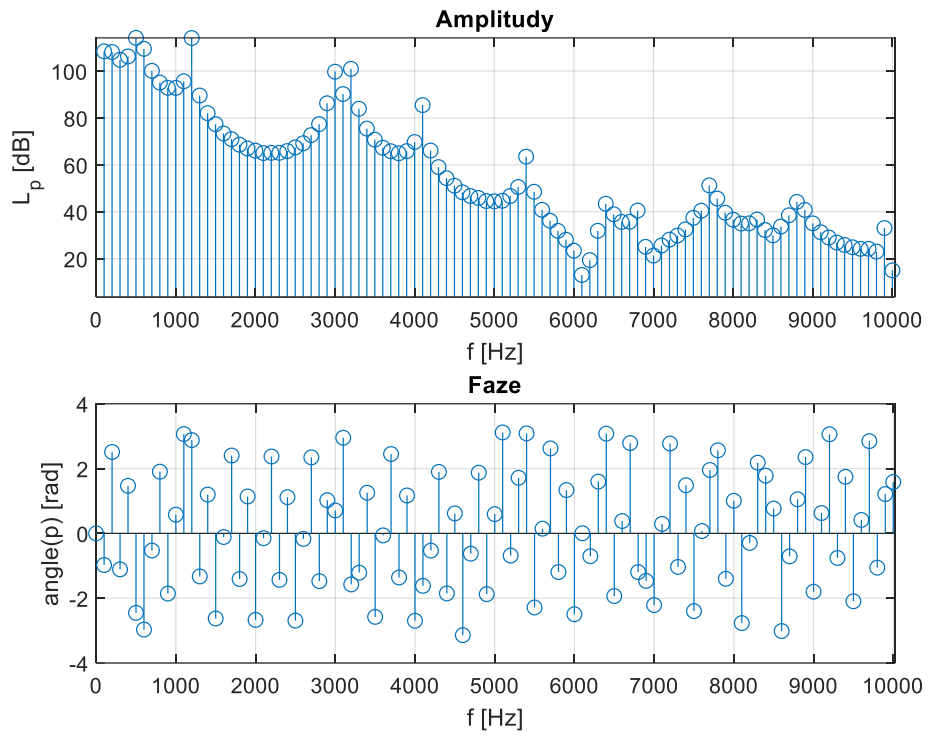
Pro pěvecký formant je stěžejní informace, kolik obsahuje akustické energie ve srovnání se zbytkem spektra. Toto množství energie je dané přenosovým zesílením a buzením. Obrázek 7.30 porovnává přenosové funkce obou modelů při ideálním nastavení pro pěvecký formant. Maximální zesílení je dle očekávání v okolí 3 kHz u obou modelů. Je zde vidět, že 2 rezonanční vrcholy zajistí vysoké zesílení v oblasti mezi nimi. Průměrně se mezi 0–10 kHz zesílení signálu pohybuje okolo 30 dB, naproti tomu v oblasti pěveckého formantu je zesílení přes 60 dB. Nejvýznamnější je porovnání v oblasti 500–1000 Hz, kde jsou formanty určující hlásku a zároveň je zde nejsilnější buzení, v tomto pásmu je zesílení okolo 35 dB a v místě rezonančního vrcholu 65 dB. V místě pěveckého formantu zesílení neklesá pod 60 dB a v místě vrcholů je i 80 dB. Celkově se dá říct, že zesílení pěveckého formantu je minimálně o 20 dB větší, tedy o jeden řád, místy i o 40 dB neboli o dva řády větší.





Obrázek 7.30 Přenosové charakteristiky obou modelů v konfiguraci s minimální vzdáleností 3. a 4. formantu

Skutečný efekt pěveckého formantu nelze dobře vyhodnotit bez zohlednění buzení. Intenzita budícího signálu obecně klesá s frekvencí. Tento pokles může být i v desítkách dB na dekádu a tím se může efekt zesílení přenosem ve vokálním traktu prakticky smazat. Teoreticky v okolí 3 kHz nemusí buzení existovat a pak pěvecký formant nevznikne bez ohledu na buzení. Z tohoto důvodu je znovu použit známý budící pulz a je vyhodnocována akustická emise z vokálního traktu do vnějšího prostředí. Obrázek 7.31 zobrazuje spektrum hladiny akustického tlaku. Je vidět, že v okolí 3 kHz jsou hned 3 harmonické složky vystupující ze svého okolí. Jedná se o frekvence mezi 3 kHz a 3.2 kHz (základní frekvence je 100 Hz). Toto seskupení vytváří výrazný a dominantní vrchol – pěvecký formant. I přes velké zesílení pěveckého formantu jsou nejdominantnější frekvence v okolí 500 Hz. To je dané charakterem buzení. Mezi frekvencemi 500 Hz a 3 kHz klesne intenzita buzení o více než 40 dB a mezi 1 kHz a 3 kHz je pokles o 27 dB. Na takto rychlý pokles budící intenzity zesílení vokálního traktu nestačí. To ale není překážkou pro funkci pěveckého formantu, literatura [70] uvádí intenzitu akustického tlaku pěveckého formantu o 10 dB nižší než intenzitu v okolí 500 Hz.



Obrázek 7.31 Spektrum vyzařovaného signálu z vokálního traktu MKP modelu

## 8. Přínosy pro vědu a praxi

Výzkum vzniku lidského hlasu je stále rozšířenější výzkumný směr. Jeho význam roste v čase a má to mnoho důvodů. Úroveň vědeckého poznání společnosti otevírá stále větší možnosti v řešení složitých úloh, kam problematika hlasu bezpochyby spadá. Dalším důvodem je poptávka společnosti po nových znalostech, které otevírají nové cesty řešení problémů v oblastech medicíny, fonologie, logopedie.

Principy vzniku hlasu byly zkoumány dávno před nástupem moderní vědy. Tento zájem o pochopení vzniku hlasu je přirozený, hlas tvoří stěžejní nástroj mezilidské komunikace. Pro mnoho lidí je v současnosti hlas nejen nástrojem komunikace, ale i nástrojem pracovním. Z hlediska současného členění výzkumu může být zkoumání hlasu zařazeno do aplikovaného výzkumu. V takovém případě zodpovídá konkrétní otázky přicházející ze zdravotnické praxe a řeší skutečné problémy reálných lidí. Tento výzkumný směr vyhodnocuje vliv různých změn na kvalitu hlasu, taková změna může být patologická nebo uměle vytvořená operačním zákrokem. V současnosti se i intenzivně zkoumá možnost nahrazení hlasivek implantátem, v případě jejich disfunkce nebo neexistence. Do této skupiny lze také zařadit výzkum hlasu samotného, hledání souvislostí mezi subjektivním vnímáním zvuku (hlasitost, výška, barva...) a skutečnými fyzikálními vlastnostmi hlasu (spektrum, hladina akustického tlaku). Nejen v aplikovaném výzkumu je daná problematika řešena, i v základním výzkumu má své místo. Základní výzkum nemá fyzicky realizované výsledky, ale zodpovídá související teoretické otázky, jejichž řešení může být v budoucnu využito v aplikovaném výzkumu. Hlavním zájmem základního výzkumu jsou hlasivky a jejich samobuzené kmity, kde se řeší interdisciplinární problém mechaniky tekutin a strukturní mechaniky.

Disertační práce k těmto výzkumům přispívá. Popsané a použité postupy najdou uplatnění při zkoumání vztahů mezi tvarem vokálního traktu a vzniklým hlasem. Schopnost nalézt tyto výsledky není nová, běžně se na tento problém používá MKP. I tato práce využívá MKP, ale pro tuto metodu byl vyvinut a odzkoušen nový prvek, který snižuje výpočtovou náročnost modelu. Hlavním přínosem práce je možnost snížit výpočtovou náročnost 3D modelu na úroveň 1D modelu při zachování postačující kvality výsledků.

To může být uplatněno pro rychlé analýzy vlivu různých chirurgických zákroků do vokálního traktu. Lékař rozhodující o provedení chirurgického zákroku může v krátkém čase získat odhad vlivu tohoto zákroku na pacientův budoucí hlas. Alternativně může v krátkém čase porovnat více variant zákroku k volbě nejvhodnějšího, které je poté možné ověřit detailním MKP modelem s konvenčními elementy. Další uplatnění může naleznout pro hledání možností zdokonalení hlasu. To mohou využít například operní pěvci, kterým to může poradit, jak které svaly zapojit pro dosažení specifických potřeb hlasu.

Použitelnost nového prvku není omezená pouze na úlohy akustiky vokálních traktů. Prvek má jasně danou topologii a může být použit univerzálně. Na diskretizaci oblasti obecného tvaru vhodný spíše není, ale je dobře využitelný pro geometrie, kde jeden rozměr dominuje ve srovnání s ostatními a jejich průřez se příliš neliší od kruhu. Tím, že se jedná o izoparametrický prvek, je univerzálně použitelný. V práci byl použit pro řešení akustiky, ale je použitelný i pro strukturní analýzy a libovolné jiné MKP aplikace.

Disertační práce využívá nový nestandardní prvek pro řešení akustiky vokálních traktů, ale nepřinesla ucelený programový nástroj pro jeho běžné využití. Všechny řešené úlohy byly v práci naprogramovány individuálně a jednoúčelově. Pro praktické efektivní využití je nutné prvek zakomponovat do komplexního MKP programu. Tím uživatel získá větší možnosti při tvorbě modelu, odladěný řešič a komfort při zpracování výsledků. Atypická topologie prvku vyžaduje i specializovaný generátor sítě, který nebyl vytvořen. Síť byla v práci generována částečně automaticky, ale detaily sítě byly ručně upravovány na úrovni poloh uzlů, aby síť byla co nejkvalitnější. Pro praktické využití je nutné vytvořit zcela automatický generátor nebo alespoň grafické uživatelské rozhraní usnadňující ruční zpracování sítě. Celkově lze říct, že pro praktické použití popsaného elementu je nutné vytvořit komplexní programové zázemí, které dosud nevzniklo. To otevírá další prostor pro navazující práce.

## 9. Závěr

Cílem disertační práce bylo sestavit vhodný matematický aparát pro analýzy vlastností lidských vokálních traktů s ohledem na jejich vliv na rozptřeni akustické energie ve frekvenčním pásmu lidského hlasu. V první části práce byly stručně popsány základní principy tvorby hlasu. Byl zde popsán vokální trakt člověka, jeho části a jejich význam pro hlasovou produkci. Jeho hlavními součástmi jsou hlasivky uložené v hrtanu a vzduchová kavita propojující hlasivky s vnějším prostředím.

Existují složité komplexní modely celého vokálního traktu. Ve vědecké praxi je běžné i modelování jednotlivých částí vokálního traktu samostatně. V této práci je řešena akustika vokálního traktu mezi hlasivkami a ústy. Funkce hlasivek byla nahrazena objemovými pulzy. K definici těchto pulzů byl použit Liljencrants-Fantův model, který je běžně používán v řešené problematice. Vyzařování akustické energie z úst je definováno akustickou impedancí odvozenou na základě kmitajícího pístu v nekonečné stěně.

Jedním z hlavních cílů práce bylo vytvořit výpočtově efektivní postupy modelování akustiky vokálního traktu. Dnes se tato problematika řeší nejčastěji metodou konečných prvků. Z hlediska výpočtové náročnosti MKP vytváří velice rozsáhlé soustavy rovnic, které se musí řešit. Použité metody řešení v této práci jsou dvě. První je diskretizace geometrie vokálního traktu na válcové a kuželové segmenty, které jsou spojeny okrajovými podmínkami a jejich 1D řešení je vyjádřeno analyticky (proto je tento model v práci nazýván analytický). Integrační konstanty řešení jsou dopočítávány numerickými metodami. Tento model, díky analytickému popisu, není limitován svým frekvenčním rozsahem a dokáže postihnout libovolně složitý tvar kmitu. Jeho nevýhodou je diskretizace řešeného objemu pouze segmenty válcového a kuželového tvaru, kterými nelze složitou geometrii vokálního traktu diskretizovat přesně. Druhý použitý model využívá optimalizovanou MKP, kde optimalizace spočívá ve využití nově formulovaného prvku. Tento prvek patří do skupiny izoparametrických prvků a byl speciálně vyvinut pro účely analýz vokálních traktů. Hlavní výhodou tohoto prvku je schopnost diskretizovat složitou geometrii vokálního traktu s minimálním zkreslením. Optimalizovaný MKP model obsahuje uzly pouze na vnějším povrchu vokálního traktu a ve středu jeho průřezu, díky tomu je počet stupňů volnosti velice nízký. Oba modely umožňují modelovat větvenou strukturu vokálního traktu (piriformní siny a valemky).

Vytvořené modely byly testovány na vokálním traktu, jehož geometrie odpovídá hlásce a:. Tato geometrie byla získána z CT. Nejprve byly vytvořeny matematické modely vokálního traktu bez paralelních kavit a po otestování obou modelů byly vytvořeny kompletní modely vokálního traktu, včetně piriformních sinů a valemek. Analytický model se skládal z 18 segmentů a MKP model ze 132 zmíněných prvků. Hustota sítě optimalizovaného MKP modelu byla volena tak, aby byl model spolehlivě použitelný ve frekvenčním spektru do 6 kHz. Počet stupňů volnosti modelu byl nižší než 1000, to je řádově nižší číslo než u MKP modelů sestavených z běžných elementů. Pro oba výpočetní modely byly vytvořeny vlastní řešiče, nebyly využity komerční MKP programy.

Teoretická část práce vysvětluje několik metod redukce (kondenzace) matematických popisů MKP modelů. Zde jsou popsána pozitiva redukčních metod, ale i jejich negativa.

Hlavním negativem redukčních metod pro použití v této práci je nemožnost modifikovat geometrii vokálního traktu po provedení redukce. Část této práce řešila úlohu hledání geometrických modifikací vokálního traktu pro dosažení optimálních hlasových charakteristik. Pro takovou úlohu redukční metody nepřinášejí žádný benefit, a proto nebyly použity.

Frekvenční spektrum akustického tlaku samohlásky je charakterizováno jeho formanty. To jsou rezonanční vrcholky přenosové funkce a zároveň vlastní frekvence. Nejnižší formant je nejvýznamnější a význam následujících postupně klesá. První čtyři formanty jsou dostatečné k jednoznačnému určení fonované hlásky. Výpočet prvních čtyř formantů analytického modelu trvá zhruba sekundu, optimalizovaný MKP model je zhruba 10x pomalejší. Těchto časů je dosaženo na běžném kancelářském počítači v prostředí Matlab. Při použití některého vhodnějšího nízkourovňového jazyka by výpočetní časy byly mnohonásobně nižší. Stejný výpočet s běžnými elementy by trval řádově déle. Rozdíly výsledků jsou v jednotkách procent, větší rozdíly vznikají až ve vyšších frekvencích. Dalším rozdílem jsou příčné tvary kmitu, které analytický model nezachytí. Analýzy potvrdily, že příčné tvary kmitu mají výrazně nižší podíl na vyzařované akustické energii z vokálního traktu než podélné tvary kmitu. Dále byly provedeny citlivostní analýzy. Vyhodnocoval se vliv geometrických modifikací vokálního traktu na frekvenční spektrum hlasu.

Provedené analýzy potvrdily splnění požadavků kladených na vytvořené výpočetní modely. Výsledky jsou bez problémů použitelné pro analýzy vokálních traktů v nejvýznamnější části frekvenčního rozsahu lidského hlasu. Časová náročnost výpočtů je také výrazně lepší ve srovnání s běžnými MKP modely. Z tohoto důvodu bylo možné otestovat provedení inverzních výpočtů s cílem nalezení geometrie vokálního traktu pro definované polohy formantů. Geometrie vokálního traktu byla parametrizována a výpočet byl formulován jako optimalizace genetickými algoritmy. Oba modely ukázaly schopnost naladit polohy prvních čtyř formantů na požadované hodnoty s odchylkou jednotek hertzů. Výsledná geometrie je fyziologicky přípustná a výrazně se neodlišuje od referenční geometrie získané z CT měření. Časová náročnost výpočtu geometrie vokálního traktu je u analytického modelu v řádech hodin a u optimalizovaného MKP modelu v řádech dnů. Přestože takový výpočet už neproběhne okamžitě, je to časová náročnost, která nepředstavuje překážku v provedení výpočtu. Stejný MKP výpočet s běžnými elementy by trval řádově déle. Přepsání kódu MKP řešiče do výkonného nízkourovňového jazyka by výpočet výrazně urychlilo a umožnilo srovnání s komerčními MKP řešiči.

Poslední část práce se zabývala možností vzniku pěveckého formantu. Zde se ověřila známá hypotéza o souvislosti pěveckého formantu s velikostí průřezu vokálního traktu a piriformních sinů. Tato hypotéza říká, že při zmenšení průřezu vokálního traktu těsně nad hlasivkami na úkor průřezů piriformních sinů se 3. a 4. formant přiblíží k sobě. Toto přiblížení je tak velké, aby se jejich dva rezonanční vrcholky ve vzniklém hlasu daly interpretovat za jeden dominantní vrchol, tedy pěvecký formant. Tato hypotéza se ověřila citlivostní studií, kde se měnily popsání průřezy. Při jednom nastavení poměrů průřezu se vzdálenost mezi formanty dostala na minimum, které má asi 233 Hz. Původní vzdálenost těchto formantů byla asi 800 Hz. Vzniklý pěvecký formant se nachází v okolí 3 kHz. První dva formanty, které interpretují

fonovanou hlásku, prakticky nebyly dotčeny, hláska nebyla touto změnou výrazně ovlivněna a hladina akustického tlaku v okolí 3 kHz je o desítky decibelů vyšší oproti okolní části spektra.

Práce potvrdila, že složité komplexně zpracované modely vokálního traktu lze zpracovat jednodušeji a zejména lze zlepšovat jejich výpočetní náročnost bez zhoršení kvality výsledků, které by omezovaly použitelnost modelu v analýzách vokálních traktů. Současně bylo potvrzeno, že lze najít kompromis mezi přesností a efektivitou výpočtu za použití speciálně definovaného prvku. Tím lze poukázat na současný trend, kdy je kladen důraz především na kvalitu výsledků a vytváří se velice komplikované modely. Tato práce se tomuto trendu částečně vymyká. Řešit problém snížení náročnosti výpočtu definicí nového prvku pro MKP je jednou z mnoha možností, kterých existuje bezpochyby bezpočet.

## 10. Literatura

- [1] Adcock J. E., Optimal Filtering and Speech Recognition with Microphone Arrays, Brown University ProQuest Dissertations Publishing, 2001
- [2] Aktosun T., Sacks P., Xu X., An inverse problem to determine the shape of a human vocal tract, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 393, 2021, 113477, ISSN 0377-0427
- [3] Arnela M., Dabbaghchian S., Blandin R., Guasch O., Engwall O., et al., Influence of vocal tract geometry simplifications on the numerical simulation of vowel sounds, The Journal of the Acoustical Society of America, 2016, 140. pp. 1707-1718. 10.1121/1.4962488.
- [4] Arnela M., Ureña D., Tuned two-dimensional vocal tracts with piriform fossae for the finite element simulation of vowels, Journal of Sound and Vibration, Vol. 537, 2022, ISSN 2022-460X, doi: 10.1016/117168.
- [5] Atal B., Chang J., Mathews M., Tukey J., Inversion of articulatory-to-acoustic transformation in the vocal tract by a computer-sorting technique, Journal of acoustical society of america, 1978, Vol 63, pp. 1535-1555
- [6] Bathe K. J., Finite Elements Procedures, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996, ISBN 0-13-301458-4
- [7] Bercovier M., Pironneau O., Sastri V., Finite Elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems, Appl. Math. Modelling, vol 7, 1983, pp. 89-96.
- [8] Bjuggren G., Fant G., The nasal cavity structures, Computer science and communication, 1964, Vol. 5, Iss. 4, pp. 5-7
- [9] Blair M. A., Camino T. S., Dickens J. M., An iterative approach to a reduced mass matrix, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Florence Italy, April 1991, 621-626
- [10] Brdička M., Hladík A., Teoretická mechanika, 1. vyd, Praha: Academia, 1987, 584 s. 21-093-87
- [11] Brdička M., Samek L., Sopko B., Mechanika Kontinua, Academia, 2005, ISBN 80-200-1344-X
- [12] Cowper G. R., Gaussian quadrature formulas for triangles, International journal for numerical method in engineering, Vol. 7, pp. 405-408, 1973
- [13] Čermák L., Algoritmy metody konečných prvků, FSi VUT, Brno, 2005
- [14] Čihák R., Anatomie 2, Třetí upravené a doplněné vydání, Grada Publishing a.s., 2013, ISBN 978-80-247-4788-0
- [15] Dabbaghchian S., Arnela M., Engwall O., Guasch O., Reconstruction of Vocal Tract Geometries from Biomechanical Simulations, International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2018, 10.1002/cnm.3159.



- [16] Dabbaghchian S., Arnela M., Engwall O., Guasch O., Simulation of vowel-vowel utterances using a 3D biomechanical-acoustic model, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2020, 37. 10.1002/cnm.3407.
- [17] Dang J., Honda K., Acoustic characteristics of the piriform fossa in models and humans, *The Journal of the Acoustical Society of America* 101(1), 1997, pp. 456-465, doi: 10.1121/1.417990
- [18] Dedouch K., Horáček J., Vampola T., Švec J. G., Kršek P., Havlík R., Acoustic modal analysis of male vocal tract for Czech vowels, *Proceedings Interaction and Feedbacks*, 2002, Publisher: Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, edited by Zolotarev, 13-20
- [19] Dehaene S., The neural basis of the Weber–Fechner law: a logarithmic mental number line, *Trends in Cognitive Sciences*, Vol. 7, Iss. 4, 2003, pp. 145-147, ISSN 1364-6613,
- [20] Delvaux B., Howard D., A New Method to Explore the Spectral Impact of the Piriform Fossae on the Singing Voice: Benchmarking Using MRI-Based 3D-Printed Vocal Tracts, *PLoS ONE* 9(7): e102680., 2014, doi: 10.1371/journal.pone.0102680
- [21] Echternach M., Popeil L., Traser L., Wienhausen S., Richter B., Vocal Tract Shapes in Different Singing Functions Used in Musical Theater Singing—A Pilot Study, *Journal of Voice*, Vol. 28, Issue 5, 2014, pp. 653.e1-653.e7, ISSN 0892-1997
- [22] Ewald R., Zur Konstruktion der Polsterpfeifen. *Pflügers Archiv*, 1898, Vol. 152, pp. 171-186
- [23] Fant G., *Acoustic Theory of Speech Production*. 2nd edition, The Hague, Netherlands: Mouton, 1970
- [24] Fant G., Liljencrants J., Lin Q., A four-parameter model of glottal flow, *STL-QPSR*, vol. 26, issue 4, 1985, pp. 1-13
- [25] Farrel O. J., Ross B., *Solved problem in analysis as applied to gamma, beta, legendre and bessel functions*, Dover Publications, New York, 1971
- [26] Feng M., Howard D. The Dynamic Effect of the Valleculae on Singing Voice - An Exploratory Study Using 3D Printed Vocal Tracts, *J Voice*, 2023 Mar, 37(2), pp. 178-186. doi: 10.1016/j.jvoice.2020.12.012. Epub 2021 Jan 1. PMID: 33397591.
- [27] Flanagan J., Landgraf L., Self-oscillating source for vocal tract synthesizers. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1968, AU-16, pp. 57-64
- [28] Françoise T., Meerbergen K., The quadratic eigenvalue problem, *SIAM Rev.* Vol. 43, Number 2, 2001, pp. 235–286.
- [29] Friswell M. I., Garvey S. D., Penny J. E. T., Model reduction using dynamics and iterated IRS techniques, *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 186(2), pp. 311-323
- [30] Fujita S., Honda K., An experimental study of acoustic characteristics of hypopharyngeal cavities using vocal tract solid models, *Acoustical Science and Technology*, 2005, Vol. 26, Issue 4, pp. 353-357, doi: 10.1250/ast.26.353

- [31] Gill B., Lee J., Lã F., Sundberg J., Spectrum Effects of a Velopharyngeal Opening in Singing, *Journal of Voice*, 2018, 34. 10.1016/j.jvoice.2018.11.014.
- [32] Goldberg D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989
- [33] Guasch O., Arnela M., Ribas A., Resonance tuning in vocal tract acoustics from modal perturbation analysis instead of nonlinear radiation pressure, *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 493. 10.1016/j.jsv.2020.115826.
- [34] Guyan R. J., Reduction of stiffness and mass matrices, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 3(2), 380, 1965
- [35] Havel M., Becker S., Schuster M., Johnson T., et al., Effects of functional endoscopic sinus surgery on the acoustics of the sinonasal tract, *Rhinology*, 2017, 55. pp. 81-89. 10.4193/Rhino16.229.
- [36] Havel M., Sundberg J., Traser L., Michael Burdumy, Matthias Echternach, Effects of Nasalization on Vocal Tract Response Curve, *Journal of Voice*, 2021, ISSN 0892-1997, <https://doi.org/10.1016/j.jvoice.2021.02.013>.
- [37] Hlaváč Z., Dynamická syntéza a redukce počtu stupňů volnosti soustav, *Učební texty Dynamická syntéza a optimalizace*, Západočeská univerzita v Plzni
- [38] Honda K., Kitamura T., Takemoto H., et al., Resonance characteristics of the hypopharyngeal cavities, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, 123. 3731. 10.1121/1.2935225.
- [39] Horáček J., Kozel K., Punčochářová P., Fürst J., Unsteady numerical computation of airflow through vocal folds. *Proc. The 6th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics*, pp. 161-171, Tampere, Finland, 2008
- [40] Horáček J., Šidlof P., Švec J. G., Numerical simulation of self-oscillations of human vocal folds with Hertz model of impact forces, *Journal of Fluids and Structures*, 2005, Vol. 20, pp. 853-869
- [41] Horák Z., Krupka F., Šindelář V., *Technická fyzika*, 1960, SNTL Praha
- [42] Ikävalko T., Laukkanen A. M., McAllister A., et al., Three Professional Singers' Vocal Tract Dimensions in Operatic Singing, Kulning, and Edge—A Multiple Case Study Examining Loud Singing, *Journal of Voice*, 2022, 10.1016/j.jvoice.2022.01.024.
- [43] Ishizaka K., Flanagan J., Synthesis of voices sounds from a two-mass model of the vocal cords, *The Bell System Technical Journal*, 1972, Vol. 51, pp. 1233-1268
- [44] Izydorczyk J., A Technique for Modeling Vocal-Tract Acoustic Properties, *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 36, Issue 1, 2003, pp. 269-272, ISSN 1474-6670,
- [45] Jan J., *Medical Image Processing, Reconstruction and Restoration: Concepts and Methods*. Boca Raton CRC Press, 2019, <https://doi.org/10.1201/b22391>, ISBN 9781315143699

- [46] Johnson C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [47] Kagawa Y., Ohtani Y., Shimoyama R., Vocal tract shape identification from formant frequency spectra—a simulation using three-dimensional boundary element models, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 203, Issue 4, 1997, pp. 581-596, ISSN 0022-460X,
- [48] Kagawa Y., Ryuichi S., Yamabuchi T., Murai T., Takarada K., Boundary element models of the vocal tract and radiation field and their response characteristics, *Journal of Sound and Vibration - J SOUND VIB*, 1992, 157. 385-403. 10.1016/0022-460X(92)90523-Z.
- [49] Kim J., Toutios A., Lee S., Narayanan S., Vocal tract shaping of emotional speech, *Computer Speech & Language*, Vol. 64, 2020, ISSN 0885-2308,
- [50] Kitamura T., Honda K., Takemoto H., Individual variation of the hypopharyngeal cavities and its acoustic effects, *Acoustical Science and Technology*, 2005, 26. pp. 16-26. 10.1250/ast.26.16.
- [51] Lindqvist-Gauffin J., Sundberg J., Acoustic properties of the nasal tract. *Phonetica*. 1976, 33(3), pp. 161-8, doi: 10.1159/000259720. PMID: 996111.
- [52] Lu C., Nakai T., Suzuki H., Finite element simulation of sound transmission in vocal tract, *The Journal of The Acoustical Society of Japan (e)*, 1993, 14, pp. 63-72.
- [53] Matsuzaki H., Miki N., Ogawa Y., FEM analysis of sound wave propagation in the vocal tract with 3-D radiational model, *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)*, 1996, Vol. 17, Iss. 3, pp. 163-166, doi. 10.1250/ast.17.163
- [54] Matsuzaki H., Motoki K., Study of acoustic characteristics of vocal tract with nasal cavity during phonation of Japanese /a/, *Acoustical Science and Technology*, 2007, 28, pp. 124-127.
- [55] Maxfield L., Palaparthi A., Titze I., New Evidence That Nonlinear Source-Filter Coupling Affects Harmonic Intensity and  $f_0$  Stability During Instances of Harmonics Crossing Formants, *Journal of Voice*, 2017, Vol. 31, No. 2, pp. 149–156
- [56] Meyer D., Rusho R., Alam W., Christensen G., et al, High-Resolution Three-Dimensional Hybrid MRI + Low Dose CT Vocal Tract Modeling: A Cadaveric Pilot Study, *Journal of Voice*, 2022, ISSN 0892-1997, <https://doi.org/10.1016/j.jvoice.2022.09.013>.
- [57] Motoki K., Three-dimensional acoustic field in vocal-tract, *Acoustical Science and Technology*, 2002, 20. 10.1250/ast.23.207.
- [58] O'Callahan J. C., A procedure for an improved reduced system (IRS) model, *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, January 1989, pp. 17-21
- [59] Palková Z., *Fonetika a fonologie češtiny*, 2. vyd. 1997, Praha: Karolinum.
- [60] Pierce S., *Acoustic An introduction to Its Physical Principles and Applications*, Springer, 1981, ISBN 978-3-030-11214-1
- [61] Pierre D., Tisseur F., Perturbation theory for homogeneous polynomial eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.* Vol. 358, 2003, pp. 71–94.

- [62] Qu Z., *Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis*, Springer-Verlag London 2004, ISBN 978-1-84996-924-6
- [63] Redford M. A., *The Handbook of Speech Production*, First edition, 2015, John Wiley & Sons inc.
- [64] Ribeiro V., Isaieva K., Leclere J., Vuissoz P., Laprie Y., Automatic generation of the complete vocal tract shape from the sequence of phonemes to be articulated, *Speech Communication*, Vol. 141, 2022, pp. 1-13, ISSN 0167-6393, <https://doi.org/10.1016/j.specom.2022.04.004>.
- [65] Rienstra S., Webster's Horn Equation Revisited, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 65, pp. 1981-2004, 10.1137/S0036139902413040, 2005
- [66] Robinson D. W., Dadson R. S., A re-determination of the equal-loudness relations for pure tones. *British Journal of Applied Physics*, 7, pp. 166–181, 1956.
- [67] Rokkaku M., Imaizumi S., Niimi S., Kiritani S., Measurement of the three-dimensional shape of the vocal tract on the magnetic resonance imaging technique, *Ann Bull RILP*, 20 (1986), pp. 47-54
- [68] Silvester P., High-order polynomial triangular finite elements for potential problems, *International Journal of Engineering Science*, Volume 7, Issue 8, 1969, Pages 849-861, ISSN 0020-7225
- [69] Story B., Bunton K., A model of speech production based on the acoustic relativity of the vocal tract, *The Journal of the Acoustical Society of America* 146, 2019, doi: 10.1121/1.5127756, pp. 2522–2528
- [70] Story B., *The Vocal Tract in Singing*, *The Oxford Handbook of Singing*, Oxford Library of Psychology, 2016, <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199660773.013.012>
- [71] Story B., Titze I., Hoffman E., Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100, 537-54, 10.1121/1.415960, 1996
- [72] Story B., Titze I., Parameterization of vocal tract area functions by empirical orthogonal modes, *Journal of Phonetics*, Vol. 26, Issue 3, 1998, pp. 223-260, ISSN 0095-4470,
- [73] Sundberg J., *The Science of the Singing Voice*. Dekalb, Illinois, Northern Illinois University Press, 1987
- [74] Sváček P., Horáček J., Finite element approximation of flow induced vibrations of human vocal folds model: Effects of inflow boundary conditions and the length of subglottal and supraglottal channel on phonation onset, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.: 319, 2018, pp. 178–194
- [75] Škvor Z., *Akustika a elektroakustika*, 2001, Academia, ISBN 80-200-0461-0
- [76] Švec J. G., Schutte H. K., Videokymography: High-Speed Line Scanning of Vocal Fold Vibration, *Journal of Voice*, 1996, 10: 201-205.

- [77] Švec J. G., Studium mechanicko-akustických vlastností zdroje lidského hlasu, Disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, 1996
- [78] Takemoto H., Kitamura T., Honda K., Masaki S., Deformation of the hypopharyngeal cavities due to F0 changes and its acoustic effects, *Acoustical Science and Technology*, 2008, Volume 29, Issue 4, Pages 300-303, Released on J-STAGE July 01, 2008, Online ISSN 1347-5177, Print ISSN 1346-3969
- [79] Thomson S., Mongeau L., Frankel S., Aerodynamics transfer of energy to the vocal folds, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, 118(3Pt1), 1689-1700
- [80] Titze I. R., Principles of Voice Production, National Center for Voice and Speech, Prentice-Hall, 2000, ISBN 0-87414-122-2
- [81] Titze I., Story B., Acoustic interactions of the voice source with the lower vocal tract, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1997, 101. 2234-43. 10.1121/1.418246.
- [82] Titze I., The Myoelastic Aerodynamic Theory of Phonation, Denver, CO: National Center for Voice and Speech, 2006
- [83] Titze I., The Physics of Small-Amplitude Oscillation of the Vocal Folds, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83, 1536-52, 10.1121/1.395910, 1988
- [84] Valášek J., Kaltenbacher M., Sváček P., On the Application of Acoustic Analogies in the Numerical Simulation of Human Phonation Process, Flow, Turbulence and Combustion, 2019, 102. 10.1007/s10494-018-9900-z.
- [85] Vampola T., Habilitační přednášky, Modelování akustických vlastností poškozeného vokálního traktu člověka se zaměřením na predikci změny hlasové kvality, ČVUT v Praze, 2006
- [86] Vampola T., Horáček J., Effect of the size of piriform sinuses on the voice quality, *Engineering Mechanics 2013*, Svratka, Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. v. i., ISBN: 978-80-87012-47-5, pp. 642-649
- [87] Vampola T., Horáček J., Klepáček I., Computer simulation of muscoal waves on vibrating human vocal folds, *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, Vol. 36, Iss. 3, 2016, Pages 451-465, ISSN 0208-5216, <https://doi.org/10.1016/j.bbe.2016.03.004>.
- [88] Vampola T., Horáček J., Radolf V., Švec J. G., Laukkanen A. M., Influence of nasal cavities on voice quality: Computer simulations and experiments. *J Acoust Soc Am.* 2020 Nov;148(5):3218. doi: 10.1121/10.0002487. PMID: 33261400.
- [89] Vampola T., Horáček J., Švec J. G., FE Modeling of Human Vocal Tract Acoustics. Part I: Production of Czech Vowels, *Acta Acustica united with Acustica* Vol. 94, 2008, pp. 433-447
- [90] Vampola T., Laukkanen A. M., Horáček J., Švec J. G., Finite element modelling of vocal tract changes after voice therapy, *Applied and Computational Mechanics* 5, 2011, pp. 77-88
- [91] Vampola T., Laukkanen A. M., Horáček J., Švec J. G., Vocal tract changes caused by phonation into a tube: a case study using computer tomography and finite-element modeling, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, Vol. 129 1, pp. 310-5

- [92] Ventura S., Freitas D., Ramos I., Tavares J., Morphologic Differences in the Vocal Tract Resonance Cavities of Voice Professionals: An MRI-Based Study, *Journal of Voice*, Vol. 27, Issue 2, 2013, pp. 132-140, ISSN 0892-1997,
- [93] Wolfe J., Chu D., An Experimentally Measured Source–Filter Model: Glottal Flow, Vocal Tract Gain and Output Sound from a Physical Model, *Acoustics Australia*, 2016, Vol. 44 Issue 1, pp. 187-191, doi: 10.1007/s40857-016-0046-7
- [94] Yanagisawa E., Estill J., Kmucha S., Leder S., The contribution of aryepiglottic constriction to “ringing” voice quality—A videolaryngoscopic study with acoustic analysis, *Journal of Voice*, Volume 3, Issue 4, 1989, P. 342-350, ISSN 0892-1997
- [95] Yoshinaga T., Hirtum A., Wada S., Multimodal modeling and validation of simplified vocal tract acoustics for sibilant /s/, *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 411. 10.1016/j.jsv.2017.09.004.
- [96] Zhang CH., Zhao W., Frankel S., Mongeau L., Computational aeroacoustics of phonation, Part II: Effects of flow parameters and ventricular folds. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, Vol. 112, pp. 2147-2154
- [97] Zorich V. A., *Mathematical Analysis II*, Springer, 2004, ISBN 3-540-40633-6

## 11. Publikace autora související s tématem disertační práce

[98] Štorkán J., Vampola T., Computationally efficient approach for modeling the acoustic of 1D models with branching of the structure. In: Kubášová K. a Z. Padovec, eds. 29th Workshop of Applied Mechanics Book of Papers. 29th Workshop of Applied Mechanics, Praha, 2021-11-05. Praha: ČVUT FS. Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky, 2021. s. 61-64. ISBN 978-80-01-06909-7

[99] Štorkán J., Vampola T., Horáček J., Computationally Efficient Model of the Human Vocal Fold. In: FUIS, V., ed. Engineering Mechanics 2017 - Book of full texts. Engineering Mechanics 2017, Svatka, 2017-05-15/2017-05-18. Brno: Brno University of Technology, 2017. s. 926-929. ISSN 1805-8248. ISBN 978-80-214-5497-2

[100] Štorkán J., Vampola T., Horáček J., Using the Proper Orthogonal Decomposition Analysis for Detecting Pathologic Vocal Fold Vibration. In: Zolotarev I. a V. Radolf, eds. Engineering Mechanics 2016 - Book of full texts. 22nd International Conference on Engineering Mechanics, Svatka, 2016-05-09/2016-05-12. Prague: Institute of Thermomechanics, AS CR, v.v.i., 2016. s. 534-537. ISSN 1805-8248. ISBN 978-80-87012-59-8

[101] Štorkán J., Vampola T., Horáček J., Vibration of the vocal fold with pathological changes. In: Padovec, Z. a J. Vondrová, eds. 20th Workshop of Applied Mechanics - Book of Papers. 20th Workshop of Applied Mechanics, Praha, 2016-06-10. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2016. s. 65-68. ISBN 978-80-01-05975-3

[102] Štorkán J., Vampola T., Numerical simulation of the human vocal fold vibration - reconstruction of videokymography records. In: 33rd conference with international participation Computational Mechanics 2017 - Extended Abstracts. 33rd CONFERENCE WITH INTERNATIONAL PARTICIPATION Computational Mechanics 2017, Špičák, Železná Ruda, 2017-11-06/2017-11-08. Pilsen: University of West Bohemia, 2017. s. 135-136. ISBN 978-80-261-0748-4

[103] Štorkán J., Vampola T., Numerical simulation of the movement of the vocal folds using a mathematical model with three degrees of freedom. In: Pelikán, J., ed. 21st Workshop of Applied Mechanics - Proceedings. 21st Workshop of Applied Mechanics, Praha, 2016-12-21. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2016. s. 47-50. ISBN 978-80-01-06085-8

[104] Štorkán J., Vampola T., Special elements for modeling the acoustics of the vocal tract. In: Pelikán, J., ed. 30th Workshop of Applied Mechanics. Praha, 2022-06-17. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2022. s. 50-53. 1. ISBN 978-80-01-07078-9

[105] Štorkán J., Vampola T., Vocal tract acoustic modelling using FEM with specific element. In: Proceedings of Computational Mechanics 2022. Computational Mechanics 2022, Srní, 2022-11-07/2022-11-09. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2022. s. 147-150. ISBN 978-80-261-1116-0

[106] Vampola T., Štorkán J., Horáček J., Radolf V., Numerical Investigation of Acoustic Characteristic of 3D Human Vocal Tract Model with Nasal Cavities. In: Proceedings 24th Engineering Mechanics 2018. 24th International Conference Engineering Mechanics 2018, Svratka, 2018-05-14/2018-05-17. Praha: AV ČR, Ústav teoretické a aplikované mechaniky, 2018. s. 893-896. ISSN 1805-8256. ISBN 978-80-86246-91-8. DOI 10.21495/91-8-893



## 12. Ostatní publikace autora

1. Štorkán, J., T. Vampola a V. Bauma. Modeling of non-synchronous rotor vibration. In: Padovec, Z., ed. 28th WORKSHOP OF APPLIED MECHANICS BOOK OF PAPERS. 28th WORKSHOP OF APPLIED MECHANICS, online, 2020-11-27. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2020. s. 104-107. ISBN 978-80-01-06791-8.
2. ČVUT v Praze, Fakulta strojní. A method for control of spherical motion of a body. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. European Patent Office. Patent EP3310535. 2019-06-19. Dostupné z: [https://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?FT=D&date=20190619&DB=EPODOC&locale=en\\_EP&CC=EP&NR=3310535B1&KC=B1&ND=4#](https://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?FT=D&date=20190619&DB=EPODOC&locale=en_EP&CC=EP&NR=3310535B1&KC=B1&ND=4#)
3. ČVUT v Praze, Fakulta strojní. A DEVICE FOR CONTROL OF A SPHERICAL MOTION OF A BODY. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. European Patent Office. Patent EP3183098. 2018-07-25. Dostupné z: [https://cz.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20180725&DB=EPODOC&locale=cz\\_CZ&CC=EP&NR=3183098B1&KC=B1&ND=4#](https://cz.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20180725&DB=EPODOC&locale=cz_CZ&CC=EP&NR=3183098B1&KC=B1&ND=4#)
4. Štorkán, J. et al. Modelling of Swelling and Deformations of Homogenous Hydrogel. In: PROCEEDINGS OF COMPUTATIONAL MECHANICS 2019. 35th conference with international participation COMPUTATIONAL MECHANICS 2019, Srní, 2019-11-04/2019-11-06. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd, 2019. s. 193-196. ISBN 978-80-261-0889-4.
5. Štorkán, J. a T. Vampola. Solve the FEM problem with nonconvex hyperelastic description. In: Pelikán, J., ed. 25th Workshop of Applied Mechanics - Proceedings. 25th Workshop of Applied Mechanics, Praha, 2018-12-07. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2018. s. 50-53. ISBN 978-80-01-06536-5.
6. Štorkán, J. et al. Modeling of the mechanical behavior of polymer hydrogels. In: 34th conference with international participation Computational Mechanics - Book of Extended Abstracts. Computational Mechanics 2018, Srní, 2018-10-31/2018-11-02. Pilsen: University of West Bohemia, 2018. s. 119-120. ISBN 978-80-261-0819-1.
7. Štorkán, J. et al. Swelling and Deformation Responses of Porous Hydrogel Simulated with Finite Element Method. In: Dušková-Smrčková, M., K. Dušek a J. Kotek, eds. Polymer networks and gels 2018. Praha, 2018-06-17/2018-06-21. Praha: AV ČR, Ústav makromolekulární chemie, 2018. s. 201. ISBN 978-80-85009-91-0.
8. Štorkán, J., T. Vampola a M. Dušková-Smrčková. Deformations Modeling of Swollen Gels. In: Vondrová, J. a Z. Padovec, eds. 24th WORKSHOP OF APPLIED MECHANICS - BOOK OF PAPERS. 24th Workshop of Applied Mechanics, ČVUT FS, 2018-06-08. Praha: ČVUT FS. Odbor pružnosti a pevnosti, 2018. s. 44-47. ISBN 978-80-01-06453-5.
9. ČVUT v Praze, FS. Způsob řízení sférického pohybu tělesa. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. Česká republika. Patent CZ 306555. 2017-01-25. Dostupné z: <https://isdv.upv.cz/webapp/webapp.pts.det?xprim=10126002>
10. ČVUT v Praze, FS. Zařízení pro řízení sférického pohybu tělesa. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. Česká republika. Patent CZ 306965. 2017-09-06. Dostupné z:

[https://isdv.upv.cz/webapp/webapp.pts.det?xprim=10178639&lan=cs&s\\_majs=&s\\_puvo=&s\\_naze=&s\\_annot=](https://isdv.upv.cz/webapp/webapp.pts.det?xprim=10178639&lan=cs&s_majs=&s_puvo=&s_naze=&s_annot=)

11. Štorkán, J. a T. Vampola. Open Source Finite Element Code for Solution Nonlinear Hyperelasticity. In: Pelikán, J., ed. 23rd Workshop of Applied Mechanics - Proceedings. 23rd Workshop of Applied Mechanics, Praha, 2017-12-15. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2017. s. 36-39. ISBN 978-80-01-06372-9.
12. Štorkán, J. a T. Vampola. Structure Optimization for Reduction Excited Vibration. In: Padovec, Z. a J. Vondrová, eds. 22nd Workshop of Applied Mechanics - Book of Papers. 22nd Workshop of Applied Mechanics, ČVUT, FS, 2017-06-16. Praha: ČVUT FS, Ústav mechaniky, Odbor pružnosti a pevnosti, 2017. s. 52-55. ISBN 978-80-01-06170-1.
13. Valášek, M. a J. Štorkán. Dexterity Improvement of Pointing Spherical Mechanism by Trajectory Planning. In: Kovacsics, J, J Mcphee a M. Valášek, eds. Proceedings of 4th Joint International Conference on Multibody System Dynamics. 4th Joint International Conference on Multibody System Dynamics, Montreal, 2016-05-29/2016-06-02. Montreal: McGill University, 2016. s. 1-7. ISBN 978-0-9682827-9-3.
14. ČVUT v Praze, Fakulta strojní. Zařízení pro řízení sférického pohybu tělesa. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. Česká republika. Užitečný vzor CZ 29702. 2016-08-16. Dostupné z: [https://isdv.upv.cz/webapp/webapp.pts.det?xprim=10178635&lan=cs&s\\_majs=&s\\_puvo=Val%C3%A1%C5%A1ek%20Michael&s\\_naze=&s\\_annot=](https://isdv.upv.cz/webapp/webapp.pts.det?xprim=10178635&lan=cs&s_majs=&s_puvo=Val%C3%A1%C5%A1ek%20Michael&s_naze=&s_annot=)
15. Štorkán, J. a T. Vampola. Influence of geometric configuration of the acoustic-structural system on deformation characteristics. In: 32nd conference with international participation Computational Mechanics 2016 - Book of Extended Abstracts. 32nd conference with international participation Computational Mechanics 2016, Špičák, 2016-10-31/2016-11-02. Pilsen: University of West Bohemia, 2016. s. 127-128. ISBN 978-80-261-0647-0.
16. ČVUT v Praze, fakulta strojní. Zařízení pro řízení sférického pohybu tělesa. Původci: M. Valášek a J. Štorkán. Česká republika. Patent CZ 305471. 2015-09-07. Dostupné z: [http://isdv.upv.cz/portal/pls/portal/portlets.pts.det?xprim=10064446&lan=cs&s\\_majs=&s\\_puvo=Val%C3%A1%C5%A1ek%20Michael&s\\_naze=&s\\_annot=](http://isdv.upv.cz/portal/pls/portal/portlets.pts.det?xprim=10064446&lan=cs&s_majs=&s_puvo=Val%C3%A1%C5%A1ek%20Michael&s_naze=&s_annot=)
17. Valášek, M., Zavřel, J., Nečas, M., Pelikán, J., Štorkán, J., Smolík, J. Stroj s plovoucím principem pro více stupňů volnosti. [Funkční vzorek] 2015.
18. Štorkán, J. a M. Valášek. Optimalizace mechanických vlastností mechanismu TetraSphere. Praha: Datum obhajoby 2015-07-01. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní.
19. Štorkán, J. a M. Valášek. Mechanical Properties Optimization of the Mechanism TetraSphere. In: Pelikán, J., ed. Workshop of Applied Mechanics 2015 (19-th WAM). Praha, 2015-12-18. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2015. ČVUT v Praze, FS, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky. Dostupné z: <http://mech.fs.cvut.cz>
20. Štorkán, J. a M. Valášek. Simulace plovoucího principu pro kinematické struktury Sliding delta. [Výzkumná zpráva] 2014. Zpráva č. V-14-101.
21. Štorkán, J. Control simulation of machine tools with floating mechanisms. In: PELIKÁN, J., ed. Workshop of Applied Mechanics WAM 2014. workshop of applied mechanics

WAM 2014, Praha, 2014-12-18. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2014. CVUT v Praze, FS, Ustav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky. Dostupné z: <http://mech.fs.cvut.cz>

22. Valášek, M., Šika, Z., Štorkán, J., Švéda, J., Koář, P., Smolík, J. DV#8 (2013) Výběr a simulace vhodných nových konceptů. [Výzkumná zpráva] Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2013. Zpráva č. V-13-091.
23. Štorkán, J. a M. Valášek. Simulace plovoucího principu pro rovinné kinematické struktury Sliding delta. [Výzkumná zpráva] 2013.

## Seznam obrázků

Ve většině obrázků není záměrně použita diakritika, pro zajištění kompatibility a spolehlivosti programového kódu, který byl použit pro výpočty a generování grafických výstupů.

Obrázek 2.1 Boční pohled na horní konec průdušnice a část hrtanu [63]. Překlad anglických odborných slov: Thyroid cartilage – štítná chrupavka, Arytenoid cartilage – hlasivková chrupavka, Cricoid cartilage – prstencová chrupavka, Trachea – průdušnice, Cricothyroid muscle – prstencovoštítný sval, Vocal folds – hlasivky .....	11
Obrázek 2.2 Příklad MKP modelu části hrtanu s hlasivkami [87].....	12
Obrázek 2.3 Vnitřní struktura hlasivky. Na povrchu tenká vrstva epitelu, pod ní vazivové vrstvy obklopující sval. [80].....	12
Obrázek 2.4 Zobrazení vokálního traktu na MRI snímku (upraveno z [64]) .....	13
Obrázek 2.5 Zobrazení hrtanu a jeho okolí [14]. V dolní části jsou konce průdušnice a jícnu, vlevo nahoře je jazyk a mezi nimi je hrtan. Symbolem „e“ je označena epiglottis, „pm“ označuje plica glossoepiglottica mediana. Žluté šipky směřují do valleculae epiglotticae, červené šipky směřují do recessus piriformes. ....	14
Obrázek 2.6 Průběh derivace průtoku objemového pulzu se zobrazením řídicích parametrů [24] .....	15
Obrázek 2.7 Tvar objemového pulzu pro buzení modelu .....	16
Obrázek 2.8 Spektrum objemového pulzu pro buzení modelu .....	16
Obrázek 2.9 Sudé a liché složky budícího pulzu .....	17
Obrázek 2.10 Schéma lidského ucha [14]. 1 – ušní boltec, 3 – zvukovod, 6 – bubínek, 8,9,10 – sluchové kůstky, 26 – kostěný hlemýžď. ....	18
Obrázek 2.11 Závislost hladiny akustického tlaku na frekvenci a hlasitosti [66]. ....	19
Obrázek 2.12 Umístění českých samohlásek v prostoru prvních dvou formantů. Upraveno z [18]. ....	20
Obrázek 2.13 Porovnání spektra orchestru, řeči a orchestru se zpěvem. V oblasti 2–3 kHz vystupuje u zpěvu výrazný pěvecký formant. [73].....	21
Obrázek 2.14 Frekvenční závislost specifické akustické impedance na kruhovém pístu o poloměru 0.01 m, při hustotě vzduchu 1.2 kg/m <sup>3</sup> a rychlosti zvuku 340 m/s .....	33
Obrázek 2.15 Vyjmutý element v akustickém kanále proměnného průřezu .....	35
Obrázek 2.16 Definice lokálního souřadného systému v kuželu .....	36
Obrázek 2.17 Spojení čtyř elementů .....	39
Obrázek 4.1 Zobrazení uzlů v rovině $\eta - \xi$ elementu 11x11x2 .....	61
Obrázek 4.2 Eliminace uzlu $N_E$ z elementu.....	62

Obrázek 4.3 Výsledný element.....	63
Obrázek 4.4 Podmíněnost elementu v jeho vrcholu při transformaci na kružnici/válec o poloměru 1 m.....	65
Obrázek 4.5 Zobrazení kritického místa elementu před a po geometrické transformaci. zobrazení jasně ukazuje, jak se element zploštuje v kritickém místě. Z geometrického významu Jacobiánu je patrné, že v kritickém místě je nulový. ....	66
Obrázek 4.6 Plný rovinný element 6. řádu.....	67
Obrázek 4.7 Definice plošných souřadnic .....	67
Obrázek 4.8 Eliminace uzlu 20 s tvarovou funkcí $N_{20}$ .....	69
Obrázek 4.9 Eliminace uzlů v hraně .....	70
Obrázek 4.10 Výsledný tvar rovinného elementu.....	71
Obrázek 4.11 Podmíněnost – kruhová geometrie .....	72
Obrázek 4.12 Podmíněnost – nekonvexní geometrie.....	72
Obrázek 4.13 Podmíněnost – nekonvexní geometrie, jiné rozložení elementů.....	73
Obrázek 4.14 Element použitý pro modelování akustiky vokálních traktů .....	74
Obrázek 4.15 Schéma integračních bodů v trojúhelníku .....	80
Obrázek 5.1 Geometrický CT model hlásky a:.....	83
Obrázek 5.2 Zobrazení průmětu modelu do roviny XY, barevná škála je osa Z.....	84
Obrázek 5.3 Zobrazení průmětu modelu do roviny YZ, barevná škála je osa X.....	84
Obrázek 5.4 Zobrazení průmětu modelu do roviny XZ, barevná škála je osa Y.....	85
Obrázek 5.5 Zobrazení rovin řezů .....	86
Obrázek 5.6 Zobrazení MKP modelu.....	87
Obrázek 6.1 Zobrazení prvních 4 vlastních tvarů kmitu 1D modelu .....	89
Obrázek 6.2 Zobrazení prvních čtyř vlastních tvarů kmitu MKP modelu.....	90
Obrázek 6.3 Zobrazení prvních čtyř vlastních tvarů kmitu MKP modelu jako funkce tlaku po střednici vokálního traktu .....	91
Obrázek 6.4 První příčný tvar kmitu.....	92
Obrázek 6.5 Tvary kmitu analytického modelu s akustickou impedancí.....	93
Obrázek 6.6 Tvary kmitu MKP modelu s akustickou impedancí .....	94
Obrázek 6.7 Tvary kmitu na střednici MKP modelu s akustickou impedancí .....	95
Obrázek 6.8 Citlivost analytického modelu na zvětšení průřezů .....	96
Obrázek 6.9 Citlivost analytického modelu na zmenšení průřezů .....	96
Obrázek 6.10 Citlivost MKP modelu na zvětšení průřezů .....	97

Obrázek 6.11 Citlivost MKP modelu na zmenšení průřezů .....	97
Obrázek 6.12 Tlakové pole v glottis [99] .....	98
Obrázek 6.13 Přenosová funkce analytického modelu .....	99
Obrázek 6.14 Přenosová funkce MKP modelu .....	100
Obrázek 6.15 Antirezonance při frekvenci 7013 Hz .....	101
Obrázek 6.16 Porovnání frekvenční charakteristiky modelů .....	102
Obrázek 6.17 Frekvenční obraz výstupního akustického tlaku analytického modelu .....	103
Obrázek 6.18 Frekvenční obraz výstupního akustického tlaku MKP modelu .....	104
Obrázek 6.19 Výstupní tlak analytického modelu v časové oblasti .....	104
Obrázek 6.20 Výstupní tlak MKP modelu v časové oblasti .....	105
Obrázek 6.21 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie při nastavení optimalizace s důrazem na zachování původního geometrického charakteru .....	109
Obrázek 6.22 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie, vyšší důraz na formanty .....	110
Obrázek 6.23 Porovnání výchozí a optimalizované geometrie, nízký důraz na zachování rozměrů .....	111
Obrázek 6.24 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie při nastavení optimalizace s důrazem na zachování původního geometrického charakteru .....	112
Obrázek 6.25 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie, vyšší důraz na formanty .....	113
Obrázek 6.26 Porovnání výchozí a optimalizované MKP geometrie, nejlepší kompromis mezi zachováním geometrie a požadovanými formanty .....	113
Obrázek 6.27 Zobrazení vlastních tvarů kmitu vokálního traktu z poslední optimalizace ....	114
Obrázek 6.28 Zobrazení přenosové funkce vokálního traktu z poslední optimalizace .....	115
Obrázek 7.1 Zobrazení rovin řezu .....	116
Obrázek 7.2 Schéma připojení piriformních sinů .....	117
Obrázek 7.3 Schéma sklopení čel elementů, které vystupují mimo vokální trakt .....	118
Obrázek 7.4 Průřez vokálního traktu s kavitami jako funkce vzdálenosti od hlasivek .....	119
Obrázek 7.5 Pohled na připojení piriformních sinů k MKP modelu .....	120
Obrázek 7.6 Pohled na připojení valem k MKP modelu .....	120
Obrázek 7.7 Porovnání tvarů kmitu analytického modelu bez kavit a modelu s kavitami, nadpis udává frekvenci modelu s kavitami .....	122
Obrázek 7.8 Nově vzniklý vlastní tvar kmitu .....	123
Obrázek 7.9 Porovnání přenosových charakteristik analytického modelu .....	123

Obrázek 7.10 Porovnání prvních 4 tvarů kmitu s kavitami a bez kavit .....	126
Obrázek 7.11 Porovnání prvních 4 tvarů kmitu s kavitami a bez kavit .....	127
Obrázek 7.12 Vliv piriformních sinů na příčný tvar kmitu a jeho frekvenci.....	127
Obrázek 7.13 Nově vzniklý tvar kmitu.....	128
Obrázek 7.14 Porovnání přenosových charakteristik MKP modelu.....	128
Obrázek 7.15 Porovnání tvarů kmitů analytického a MKP modelu .....	130
Obrázek 7.16 Porovnání přenosových charakteristik analytického a MKP modelu .....	131
Obrázek 7.17 Vlastní tvary kmitu MKP modelu z programu Ansys.....	132
Obrázek 7.18 Citlivost vlastních frekvencí na délku piriformních sinů .....	133
Obrázek 7.19 Citlivost vlastních frekvencí na průřez piriformních sinů .....	134
Obrázek 7.20 Citlivost vlastních frekvencí na velikost valekul.....	135
Obrázek 7.21 Porovnání výsledné geometrie analytického modelu s CT geometrií .....	137
Obrázek 7.22 Porovnání výsledné geometrie MKP modelu s CT geometrií .....	138
Obrázek 7.23 Porovnání optimalizovaných geometrií obou modelů .....	138
Obrázek 7.24 Srovnání tvarů kmitu analytického a MKP modelu po optimalizaci .....	139
Obrázek 7.25 Vlastní tvary kmitu MKP modelu po optimalizaci.....	140
Obrázek 7.26 Srovnání přenosových charakteristik analytického a MKP modelu po optimalizaci .....	141
Obrázek 7.27 Schéma rezonanční trubice generující pěvecký formant (upraveno z [80])....	142
Obrázek 7.28 Citlivost frekvencí formantů na průřez vokálního traktu v hrtanu .....	143
Obrázek 7.29 Vzdálenost 3. a 4. formantu v závislosti na modifikaci hrtanu .....	144
Obrázek 7.30 Přenosové charakteristiky obou modelů v konfiguraci s minimální vzdáleností 3. a 4. formantu.....	145
Obrázek 7.31 Spektrum vyzařovaného signálu z vokálního traktu MKP modelu .....	146

## Seznam tabulek

Tabulka 4.1 Integrační schéma 1D integrace 7. řádu přesnosti v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ . Hodnoty jsou převzaty ze schématu pro integraci v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ [6] a přepočítány pro interval $\langle 0,1 \rangle$ . 79
Tabulka 4.2 Integrační schéma 2D integrace 7. řádu přesnosti trojúhelníku [6]. Číslo integračních bodů jsou v souladu se schématem. .... 80
Tabulka 5.1 Definice rovin řezů modelu, normálový posun je relativní vůči středu modelu. . 86
Tabulka 5.2 Parametry vokálního traktu pro 1D model..... 88
Tabulka 6.1 Porovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu..... 92
Tabulka 6.2 Porovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu s akustickou impedancí ..... 94
Tabulka 7.1 Parametry analytického modelu s kavitami ..... 119
Tabulka 7.2 Srovnání vlastních tvarů analytického modelu bez kavit a s kavitami ..... 121
Tabulka 7.3 Srovnání vlastních tvarů MKP modelu bez kavit a s kavitami ..... 124
Tabulka 7.4 Popis tvarů kmitu ..... 125
Tabulka 7.5 Srovnání vlastních frekvencí analytického a MKP modelu s kavitami..... 129
Tabulka 7.6 Srovnání vlastních frekvencí MKP modelů novými a běžnými prvky ..... 132
Tabulka 7.7 Srovnání prvních 4 vlastních frekvencí optimalizovaných modelů ..... 139



## Seznam použitých symbolů a zkratek

Použité symboly:

$\alpha$	parametr LF modelu, součinitel akustické pohltivosti pro kolmý dopad vln, váhový koeficient numerické integrace, stupeň polynomu tvarové funkce
$\beta$	součinitel akustické admitance, stupeň polynomu tvarové funkce
$\gamma$	stupeň polynomu tvarové funkce
$\Gamma$	funkce gama, povrch modelu
$\Gamma_p$	povrch s definovanou tlakovou okrajovou podmínkou
$\Gamma_z$	povrch s definovanou impedanční okrajovou podmínkou
$\Gamma_v$	povrch s definovanou rychlostní okrajovou podmínkou
$\delta$	variace, součinitel doznívání
$\Delta$	Laplaceův operátor
$\varepsilon$	parametr LF modelu
$\zeta$	poměr specifické a charakteristické impedance, 3. lokální souřadnice elementu
$\zeta_i$	3. lokální souřadnice i-tého uzlu
$\eta$	1. lokální souřadnice elementu, polynomický koeficient tvarové funkce
$\eta_i$	1. lokální souřadnice i-tého uzlu
$\vartheta$	zobecněné vlnové číslo pro tlumený systém
$\kappa$	adiabatický exponent
$\lambda$	vlastní číslo
$\Lambda$	spektrální matice
$\xi$	2. lokální souřadnice elementu
$\xi_i$	2. lokální souřadnice i-tého uzlu
$\pi$	Ludolfovo číslo
$\rho$	hustota
$\rho_0$	časově stálá složka hustoty
$\rho'$	akustická hustota (fluktuace hustoty)
$\Phi$	matice koeficientů integračních konstant
$\psi$	křivočará souřadnice vedená středem průřezu hlavní kavity vokálního traktu měřená od hlasivek
$\omega$	úhlová frekvence
$\Omega$	vlastní úhlová frekvence

$\nabla$	operátor Nabla
$\nabla_{\eta\xi\zeta}$	operátor Nabla v lokálních souřadnicích
$\partial$	parciální diferenciál, hranice množiny
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\in$	prvek množiny
$\times$	vektorový součin
$\cup$	sjednocení
$\cap$	průnik
$\wedge$	konjunkce
<i>arg</i>	obecný výraz pro argument funkce
<i>A</i>	plocha, průřez
<b><i>B</i></b>	matice tlumení modelu
<b><i>B<sub>e</sub></i></b>	matice tlumení elementu
<b><i>B<sub>m,m</sub></i></b>	submatice tlumení neredukovaných souřadnic
<b><i>B<sub>s,m</sub></i></b>	vazební submatice tlumení mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
<b><i>B<sub>m,s</sub></i></b>	vazební submatice tlumení mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
<b><i>B<sub>s,s</sub></i></b>	submatice tlumení redukovaných souřadnic
<i>c<sub>0</sub></i>	rychlost zvuku
<i>C</i>	konstanta
<i>CIL</i>	hodnota cílové funkce
<i>C<sub>i</sub></i>	integrační konstanta
<b><i>C</i></b>	vektor integračních konstant
<i>d</i>	diferenciál
<i>d<sub>i</sub></i>	váhový koeficient formantu
<b><i>d</i></b>	vektor váhových koeficientů formantů
<i>D</i>	váhový rozdíl sousedících formantů
<i>e</i>	Eulerovo číslo
<i>E<sub>0</sub></i>	parametr LF modelu
<i>E<sub>e</sub></i>	parametr LF modelu
<b><i>E</i></b>	jednotková matice
<b><i>f</i></b>	frekvence, vektor pravých stran analytického řešení

$f_i$	vlastní frekvence modelu
$F$	obecné označení integrandu
$H$	přenosová funkce modelu
$H_1$	Struvova funkce I. řádu
$i$	imaginární jednotka
$INT$	obecný výraz pro výsledek integrálu
$J_1$	Besselova funkce I. řádu
$J$	Jacobiho matice transformace mezi globálním a lokálním souřadným systémem
$k_1$	1. koeficient pro nastavení penalizace
$k_2$	2. koeficient pro nastavení penalizace
$k$	kuželovitost
$K$	matice tuhosti modelu
$K_e$	matice tuhosti elementu
$K_{m,m}$	submatice tuhosti neredukovaných souřadnic
$K_{s,m}$	vazební submatice tuhosti mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
$K_{m,s}$	vazební submatice tuhosti mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
$K_{s,s}$	submatice tuhosti redukovaných souřadnic
$K_{red}$	redukovaná matice tuhosti
$L_i$	plošné souřadnice
$L_p$	hladina akustického tlaku
$M$	matice hmotnosti modelu
$M_e$	matice hmotnosti elementu
$M_{m,m}$	submatice hmotnosti neredukovaných souřadnic
$M_{s,m}$	vazební submatice hmotnosti mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
$M_{m,s}$	vazební submatice hmotnosti mezi redukovanými a neredukovanými souřadnicemi
$M_{s,s}$	submatice hmotnosti redukovaných souřadnic
$M_{red}$	redukovaná matice hmotnosti
$n$	jednotkový normálový vektor
$N_i$	prvek vektoru tvarových funkcí elementu
$N_{i_0}$	prvek vektoru tvarových funkcí elementu před eliminací
$N_e$	vektor tvarových funkcí elementu

$N_p$	vektor tvarových funkcí stěny elementu
$O$	chyba aproximace
$p$	tlak
$p_0$	časově stálá složka tlaku
$p_i$	optimalizační parametr
$p'$	akustický tlak
$\hat{p}'$	akustický tlak ve frekvenční oblasti
$p'_0$	akustický tlak – práh slyšitelnosti průměrného člověka
$PEN$	penalizace
$P$	uzlové akustické tlaky modelu
$P_e$	uzlové akustické tlaky elementu
$P_p$	vektor uzlových tlaků stěny elementu
$\hat{P}$	uzlové akustické tlaky modelu ve frekvenční oblasti
$\hat{P}_e$	uzlové akustické tlaky elementu ve frekvenční oblasti
$\hat{P}_i$	i-tý vlastní tvar MKP modelu
$\hat{P}_m$	vektor modálních souřadnic, vektor neredukovaných souřadnic
$\hat{P}_s$	vektor redukováných souřadnic
$Q_v$	průtok
$r$	plynová konstanta, koeficient objemového tlumení, poloměr
$\mathbf{r}$	radiusvektor
$R$	poloměr
$s$	měrná entropie
$S$	plocha, entropie
$S$	pomocná matice pro odvození IRS
$t$	čas
$t_a$	parametr LF modelu
$t_c$	perioda kmitu hlasivek
$t_e$	parametr LF modelu
$t_p$	parametr LF modelu
$T$	teplota, Transpozice matice
$T_s / T_{IRS}$	transformační matice redukováného systému na neredukovaný

$u$	měrná vnitřní energie
$U$	modální matice
$\hat{v}'_n$	normálová složka akustické rychlosti ve frekvenční oblasti
$v$	rychlost
$v'$	akustická rychlost (fluktuační rychlosti)
$\hat{v}'$	akustická rychlost ve frekvenční oblasti
$V$	objem
$V_e$	objem elementu
$\mathbf{V}_e$	budící vektor elementu
$\hat{\mathbf{V}}$	budící vektor MKP modelu ve frekvenční oblasti
$\hat{\mathbf{V}}_e$	budící vektor elementu ve frekvenční oblasti
$\hat{\mathbf{V}}_m$	budící vektor redukovaného MKP systému ve frekvenční oblasti
$x$	souřadnice x
$X$	prostorově závislá část řešení vlnové rovnice
$X_i$	souřadnice x i-tého uzlu
$\mathbf{X}_e$	vektor x souřadnic uzlů elementu
$y$	souřadnice y
$Y_i$	souřadnice y i-tého uzlu
$\mathbf{Y}_e$	vektor y souřadnic uzlů elementu
$z$	souřadnice z
$Z_c$	charakteristická akustická impedance
$Z_i$	souřadnice z i-tého uzlu
$Z_s$	specifická akustická impedance
$\mathbf{Z}$	stavový vektor
$\mathbf{Z}_e$	vektor z souřadnic uzlů elementu

Slovní pojmy a zkratky:

1D	jednodimenzionální prostor
2D	dvoudimenzionální prostor
3D	třídimenzionální prostor
el	element

CT počítačová (výpočtová) tomografie, computed tomography  
IRS improved reduced systém  
LF-model Liljencrantsův Fantův model pulzu vzduchu  
MKP metoda konečných prvků  
MRI magnetická rezonance, magnetic resonance imaging