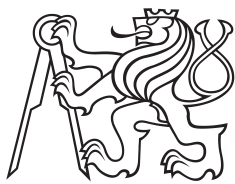


Diplomová práce



České  
vysoké  
učení technické  
v Praze

**F1**

Fakulta stavební

## Simulace delaminace kompozitů založená na variačním modelu poškození

Bc. Jakub Mareš

Školitel: Ing. Martin Doškář, Ph.D.  
Leden 2024



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mareš** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **486098**  
Fakulta/ústav: **Fakulta stavební**  
Zadávací katedra/ústav: **Katedra mechaniky**  
Studijní program: **Stavební inženýrství**  
Studijní obor: **Konstrukce pozemních staveb**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Simulace delaminace kompozitů založená na variačním modelu poškození**

Název diplomové práce anglicky:

**Simulation of delamination in composites based on a variational damage model**

Pokyny pro vypracování:

Seznam doporučené literatury:

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Martin Doškář, Ph.D. katedra mechaniky FSv**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **26.09.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **08.01.2024**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Ing. Martin Doškář, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Jiří Máca, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Jiří Máca, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval všem učitelům, kteří mě provedli svým dosavadním studiem od základní školy až po poslední ročník magisterského studia. Jim patří dík za vstřícný přístup, s jakým nám předávali své znalosti, a za trpělivost, kterou se mnou měli při mnohých nedorozuměních a nezdarech.

Z nich nejvíce bych chtěl poděkovat Ing. Martinu Doškáři, Ph.D., který se mě aktivně ujal již v druhém ročníku bakalářského studia a od té doby ve mě podporoval nadšení pro numerické metody a různé oblasti mechaniky. Jemu patří dík za flexibilitu, s níž mi přizpůsoboval svůj vlastní rozvrh, a za to, že byl snad nejlepším vedoucím bakalářské a diplomové práce, jakého jsem si mohl přát.

Má vděčnost v neposlední řadě patří mým rodičům, kteří vždy trpělivě snášeli nekonečné roky studia svých tří dětí a kteří často dbali o mé zdraví a mé potřeby mnohem víc, než já sám.

Nakonec děkuji svým sestřám, přátelům a své partnerce za to, že strpěli mou častou roztržitost, když jsem nemohl najít řešení nějakého problému, a za to, že mne vždy podporovali v mém snažení často i na úkor vlastního pohodlí a času.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Simulace delaminace kompozitů založená na variačním modelu poškození“ vypracoval samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označil a uvedl v příloženém seznamu.

V Praze, 3. ledna 2024

Podpis .....

## Abstrakt

Předmětem této práce je studium a numerická simulace rozvoje delaminačního poškození v kompozitních materiálech s předem daným místem šíření trhliny. Součástí práce je implementace provedená v programu MATLAB®, která je volně přístupná.

Řešení problému je založeno na variačním modelu poškození. Numerický výpočet pak využívá algoritmus střídavé minimalizace energie a opravu řešení pomocí heuristického zpětného trasování energie uvedeného v [8]. Práce se podrobně věnuje postupu výpočtu, v rámci něhož uvádí postup pseudočasové diskretizace úlohy a geometrické diskretizace pomocí metody konečných prvků. Je představena metoda aktivní množiny pro řešení kvadratických problémů omezených podmínkami ve formě nerovnic a je uvedeno odvození explicitního vzorce pro aktualizaci vektoru poškození, který minimalizuje celkovou energii úlohy.

V závěru práce je provedeno testování zmíněných algoritmů na dvou jednoduchých úlohách a je uvedeno krátké shrnutí výpočetní náročnosti úlohy.

**Klíčová slova:** delaminace, poškození, variační model, algoritmus střídavé minimalizace, zpětné trasování energie, metoda aktivní množiny, rozhraní, protlačení, křehké a duktilní chování

**Školitel:** Ing. Martin Doškář, Ph.D.  
Katedra mechaniky  
Fakulta stavební

## Abstract

The subject of this thesis is the study and numerical simulation of delamination in composites by means of an interfacial damage model. A part of work includes an in-house code implemented in MATLAB®, which is freely accessible.

The formulation of the problem is based on a variational rate-independent model solved with the alternating minimization algorithm supplemented with the heuristic energy backtracking algorithm presented in [8] to avoid local minimum. This work discusses in detail the numerical scheme, which uses pseudo-time discretization of the problem and the finite element method to solve minimisation formulation. In the alternating minimization, displacement unknowns are updated with an active set method suitable for solving quadratic problems constrained by linear inequalities. Damage unknowns follow from an explicit formula for minimizing the total energy with respect to the damage unknowns. The performance of the numerical procedure is illustrated with two delamination problems, followed by a discussion of the impact of model parameters on the algorithm.

**Keywords:** delamination, damage, variational model, alternating minimization algorithm, energy backtracking, active set method, interface, penetrability, brittle and ductile material behavior

**Title translation:** Simulation of delamination in composites based on a variational damage model

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Model poškození</b>	<b>3</b>
<b>3 Oblasti a hranice</b>	<b>5</b>
<b>4 Energetická formulace delaminace</b>	<b>7</b>
4.1 Disipační energie . . . . .	7
4.2 Energie pružné deformace . . . . .	8
4.3 Neznámé a jejich omezení . . . . .	8
4.4 Hustoty energií na rozhraní . . . . .	10
4.4.1 Hustota energie pružné deformace . . . . .	10
4.4.2 Hustota disipační energie . . . . .	12
<b>5 Numerické řešení úlohy</b>	<b>13</b>
5.1 Časová diskretizace . . . . .	13
5.2 Diskretizace pole posunů a poškození . . . . .	14
5.2.1 Diskretizace na podoblastech	15
5.2.2 Diskretizace na hranici mezi podoblastmi . . . . .	19
5.2.3 Diskretizace disipační energie	20
5.3 Střídavá minimalizace úlohy . . . . .	21
5.4 Zpětné trasování energie . . . . .	22
5.5 Metoda aktivní množiny . . . . .	24
5.6 Výpočet poškození s konstantní aproximací . . . . .	30
<b>6 Implementace konkrétních úloh</b>	<b>33</b>
6.1 Zadání úloh . . . . .	33
6.2 Výsledky . . . . .	35
6.2.1 Výsledky úlohy č. 1 . . . . .	35
6.2.2 Výsledky úlohy č. 2 . . . . .	39
6.3 Výpočetní náročnost algoritmu . . . . .	44
<b>7 Závěr</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>47</b>
<b>A Seznam použitých znaků</b>	<b>49</b>

## Obrázky

1.1 Ukázka delaminace v praxi . . . . .	2	6.13 Deformace a poškození úlohy č.2 s křehkým chováním . . . . .	43
2.1 Poškození rovnoběžných prutů . . . . .	4		
3.1 Oblasti a hranice . . . . .	5		
4.1 Skok posunů . . . . .	8		
4.2 Protlačení podoblastí . . . . .	9		
4.3 Zvolený tahový separační zákon . . . . .	11		
4.4 Závislost tuhosti na poškození . . . . .	11		
5.1 Oboustranný energetický odhad . . . . .	14		
5.2 Diskretizace podoblasti $\bar{\Omega}^{(i)}$ čtvercovou sítí . . . . .	14		
5.3 Metoda konečných prvků . . . . .	16		
5.4 Aproximace pole posunů na rozhraní . . . . .	19		
5.5 Diagram algoritmu střídavé minimalizace . . . . .	22		
5.6 Algoritmus zpětného trasování . . . . .	23		
5.7 Diagram metody aktivní množiny . . . . .	28		
5.8 Příklad metody aktivní množiny . . . . .	29		
6.1 Geometrie úlohy č. 1 . . . . .	33		
6.2 Geometrie úlohy č. 2 . . . . .	34		
6.3 Porovnání energií úlohy č. 1 . . . . .	35		
6.4 Závislost výsledků na idealizaci úlohy . . . . .	36		
6.5 Zpřesněné řešení úlohy č. 1 s křehkým chováním . . . . .	37		
6.6 Reakce v místě zatěžování úlohy č. 1 . . . . .	37		
6.7 Deformace a poškození úlohy č.1 s křehkým chováním . . . . .	38		
6.8 Vliv zpětného trasování na výsledky úlohy č.2 s křehkým chováním . . . . .	39		
6.9 Prognóza vývoje jednotlivých složek energie úlohy č. 2 . . . . .	40		
6.10 Porovnání řešení se zpětným trasováním bez zpětného trasování a s vylepšeným zpětným trasováním . . . . .	41		
6.11 Vnitřní síly v místě zatěžování úlohy č. 2 . . . . .	41		
6.12 Deformace a poškození úlohy č.2 s duktilním chováním . . . . .	42		



## Tabulky

5.1 Integrovní body a váhy . . . . .	18
6.1 Materiálové parametry . . . . .	34
6.2 Porovnání výpočetní náročnosti	44



# Kapitola 1

## Úvod

Ve stavebním oboru si své nezaměnitelné místo vydobily kompozity s vrstevnatou strukturou. Dnes jsou již součástí většiny stavebních odvětví a plní statické, tepelné, akustické a mnohé další funkce.

Díky své struktuře umožňují kombinování nestejných vrstev a tím i kombinování jejich jedinečných vlastností. Tímto postupem může být dosaženo mnoha lepších estetických, fyzikálních a mechanických vlastností, jejichž vyjmenování by zde zabralo přinejmenším celou stránku [10]. Nás v této práci budou zajímat především mechanické vlastnosti laminárních kompozitů a jejich poškozování.

Ve většině inženýrských konstrukcí je neměnnou pravdou, že chování laminárních kompozitů je nejvíce ovlivněno právě přítomností rozhraní mezi jednotlivými prvky. Pro laminární kompozity je navíc možné tvrdit, že právě rozhraní mezi vrstvami je slabé místo, ve kterém může dojít ke vzniku trhliny, a na němž může docházet k jejímu dalšímu rozvoji. Pro řešení šíření trhlín, které přecházejí z rozhraní do vlastní hmoty materiálu, a pro něž je nutné určit jejich směr, jsou využívány modely s takzvanou kohezní zónou. O těchto modelech je možné se dočíst více v [3].

V tomto textu budeme předpokládat, že rozhraní podléhá porušení mnohem rychleji než spojovaný materiál, a proto dochází k rozvoji trhliny pouze na styku mezi vrstvami. Rozhraní tedy bude popsáno nepružným chováním ve smyslu separace jednotlivých vrstev a kohezním tahovým přemostěním trhliny [13]. To znamená, že trhlina zde není myšlena jako čistě oddělená hranice, na které se síly přenáší pouze v tlaku, kdy se jednotlivé vrstvy o sebe navzájem opřou. Jedná se zde o linii, na které postupně vzniká poškozování, a dokud nedojde ke kompletnímu porušení, jsou v jejím místě aspoň částečně přenášeny i tahové síly. Bližší vysvětlení pojmu poškozování naleznete v kap. 2.

Budeme-li předpokládat, že rychlost zatěžování je malá a dynamické ani viskoelastické jevy nehrají při výpočtu roli, může být takto zadefinovaný model řešen jako energetický problém nezávislý na rychlosti zatěžování představený v [8].

Je důležité si uvědomit, že takto zavedený jednoduchý model delaminace nevystihuje plně všechny skutečnosti, které mohou ve stavební praxi nastat. Za dobu životnosti stavby se vlastnosti rozhraní i vrstev mění v závislosti na povětrnostních vlivech a únavě materiálu. Je zřejmé, že všechny tyto vlivy můžou značně ztížit navrhování konstrukcí.

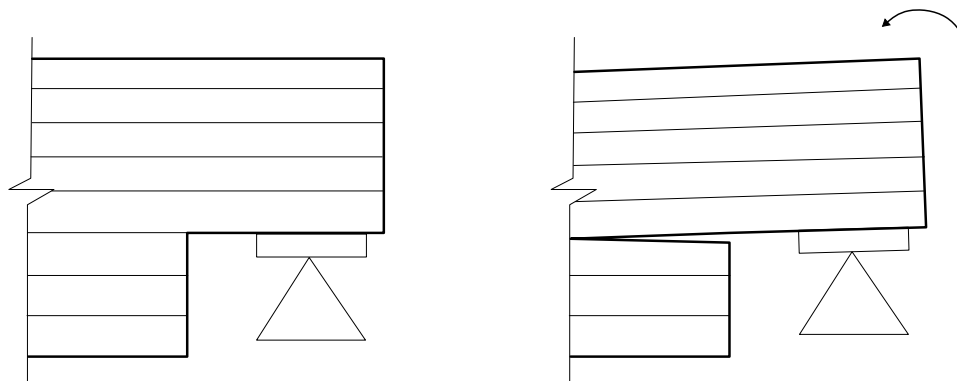
V praxi se pro ověření většiny vlivů na únosnost konstrukce, ať už navrhované, nebo již existující, užívají postupy shrnuté v českých technických normách. Normové postupy se snaží zavést jednotný přístup posudku, který pokud možno zjednoduší ověření únosnosti, či spolehlivosti konstrukce. Bohužel, pro delaminační poškozování je velmi obtížné shrnout všechny vlivy

do jednoduché normové poučky, a proto této problematice v českých normách zatím mnoho prostoru věnováno nebylo.

České technické normy prakticky neřeší ani případy zjednodušené; závislé pouze na mechanické deformaci či teplotě. Věc je jednoduše řešena tak, že se za každou cenu snažíme vyhnout případům, kdy by mohl nastat vliv delaminačního poškození. Nicméně i přes to se mohou naskytnout případy, kdy je delaminaci nutné ověřit, ať už kvůli nevhodnému návrhu, nebo jiným okolnostem stavby. Příklad takového případu je uveden na obr. 1.1. V takových případech přicházejí na řadu zkoušky, které jsou finančně a časově náročné.

Například norma ČSN EN 14080 „Dřevěné konstrukce - Lepené lamelové dřevo a lepené rostlé dřevo - Požadavky“ stanovuje takzvanou hodnotu delaminace a její mez pro lepené spáry. Následně k ověření těchto hodnot určuje postup praktické zkoušky.

V této práci bude ukázán numerický model pro výpočet delaminace vlivem mechanických deformací. Snad někdy v budoucnu by mohl tento model poskytnout podklad pro tvorbu alternativních možností posouzení lepených spojů u laminárních kompozitů a tím zlevnit užití materiálů jako jsou vrstvené desky stavebního skla nebo lepené lamelové dřevo.



**Obrázek 1.1:** Ukázka delaminace v praxi.

Delaminace nosníku z lepeného lamelového dřeva vlivem náhlé změny průřezu

## Kapitola 2

### Model poškození

I když v obecné řeči má pojem „poškození“ velké množství významů, v této práci ho budeme používat ve velmi úzkém smyslu slova. Poškození budeme chápat jako postupný vznik, šíření a spojování trhlin a v důsledku toho snižování celistvosti materiálu [5].

Vznik trhlin a defektů narušuje spojitost pole posunů. Pro takové úlohy je možné využít výpočetní postupy založené na X-FEM, tedy rozšířené metodě konečných prvků [11]. Princip této metody spočívá v rozšíření počítané oblasti i na místa diskontinuit (trhlin a jiných singularit) a ve volbě vhodných bázových funkcí, které obsahují daný typ nespojitosti. Tím je nespojitost pole posunů do výpočtu zavedena explicitně.

V této práci je užita představa spojitého průběhu pole posunů, která je pro tento typ úloh neméně častá. Aby bylo možné reprezentovat změnu vlastností, která nastává v důsledku vzniku trhlin, jsou pro výpočet užívány hodnoty průměrované přes tzv. efektivní objem  $\bar{V}$ , který představuje objem tak velký, že se v něm ztratí vliv jednotlivých trhlin, ale dostatečně malý v porovnání s rozměry konstrukce.

Je zřejmé, že model, ve kterém jsou trhliny takto rozloženy do určitého reprezentativního objemu, je vhodný pouze pro počáteční fázi porušování, kdy jsou trhliny skutečně rovnoměrně rozloženy v mikrostruktuře. V pozdější fázi zatěžování však dochází k lokalizaci rozvoje trhlin. Jedná se o jev, kdy rozvoj několika konkrétních trhlin převládne nad všemi ostatními a zároveň se vývoj všech ostatních trhlin výrazně zmenší, nebo dokonce zastaví.

Pro řešení úloh s lokálními trhlinami je vhodnější použít přístupy lomové mechaniky, protože model se spojitou idealizací pole posunů přestává být vypovídající. Takovým přístupem může být například model „Phase field“, který spočívá v nahrazení okrajových podmínek na rozhraní parciální diferenciální rovnicí, jejímž účelem je simulovat spojitou změnu mezi porušeným a neporušeným stavem [7]. Pro praxi je výhodné pracovat s jedním modelem během celého výpočtu, proto se předpoklad spojitého poškození běžně používá i pro velké trhliny.

V následujícím textu se budeme věnovat ilustrativnímu příkladu jednoosého modelu poškození viz obr. 2.1. Při jednoosém působení si můžeme představit, že celkový materiál je složený z jednotlivých rovnoběžných vláken a zatěžovací síla se rozkládá rovnoměrně na celou průřezovou plochu. Vlivem působícího zatížení se materiál protahuje a jednotlivá vlákna se postupně porušují. Všechna vlákna jsou dokonale křehká, ale mají různá mezní protažení, proto celková průřezová plocha klesá, ale klesá postupně. Plocha všech vláken, která stále nejsou porušena, je nazývána plochou efektivní  $\bar{A}$ .

V tuto chvíli můžeme zadefinovat parametr poškození  $\omega$ . [5]

$$\omega = 1 - \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (2.1)$$

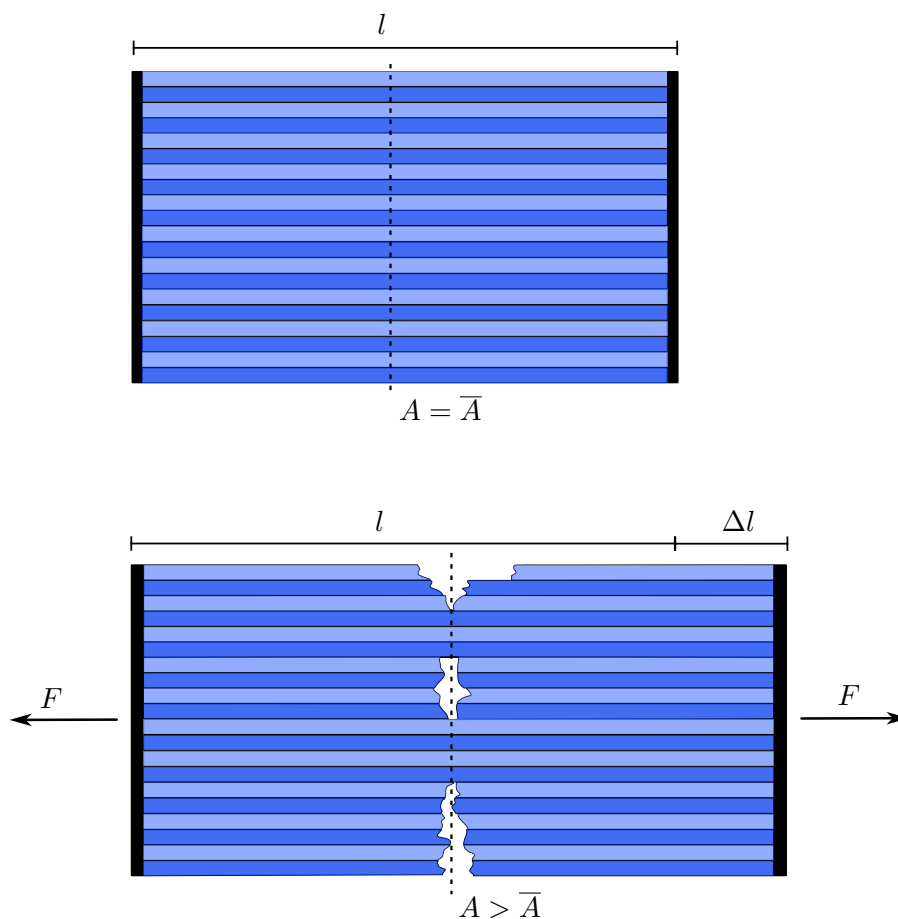
Jedná se o celkovou plochu porušených vláken podělenou původní průřezovou plochou  $A$ . Protože celková plocha porušených vláken nemůže být větší, než původní plocha vláken a zároveň nemůže být menší než 0, nachází se parametr  $\omega$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Sílu, která je přenášena reálným částečně porušeným průřezem, lze vyjádřit jako součin efektivního napětí  $\bar{\sigma}$  a efektivní plochy. Pokud tedy chceme vyjádřit napětí, které by působilo na původní neporušené ploše (napětí nominální), platí pro něj vztah:

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma} = (1 - \omega) \bar{\sigma} \quad (2.2)$$

Pro nominální napětí se obvykle stanovuje pracovní diagram materiálu v závislosti na deformaci. Společně s ním je možné stanovit takzvaný zákon poškození, který zobrazuje závislost poškození na relativní deformaci.

V této práci se nebudeme zabývat víceosými modely poškození, protože to není pro účely práce nezbytné.



**Obrázek 2.1:** Poškození rovnoběžných prutů

## Kapitola 3

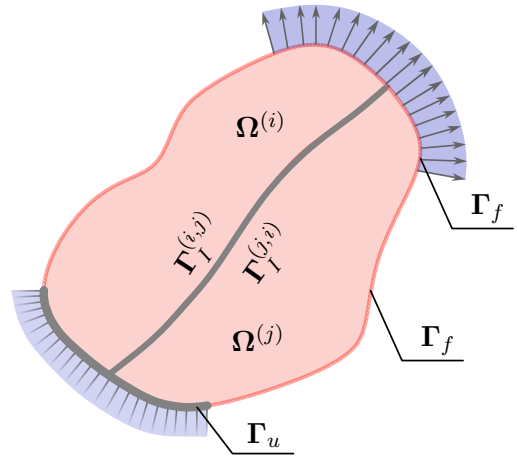
### Oblasti a hranice

Úlohu delaminace laminárního kompozitu lze modelovat jako úlohu napjatosti, která se odehrává na uzavřené oblasti  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ ;  $d = 2, 3$ . Tato oblast je Lipschitzovsky spojitá a její hranici budeme obecně značit  $\Gamma$ .

Tuto hranici je možné rozdělit podle typu okrajových podmínek, které jsou na ní zavedeny. Část hranice, na které jsou zavedeny Dirichletovy okrajové podmínky, tudíž tu část, na které jsou předepsané posuny, budeme značit  $\Gamma_u$ . Zbytek hranice, na které jsou předepsané hodnoty vnějšího zatížení, budeme značit  $\Gamma_f$ .

Následně rozdělíme oblast  $\bar{\Omega}$  na konečné množství podoblastí  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1 \dots n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ . Při dělení oblasti je nutné respektovat rozložení vrstev v kompozitu a pokud je kompozit složen z více opakujících se stejných celků, je vhodné, aby rozmístění podoblastí sledovalo rozmístění jednotlivých celků. Vhodným rozmístěním podoblastí je možné dosáhnout nižší výpočetní náročnosti úlohy.

V závislosti na podoblastech je nutné rozdělit i hranici  $\Gamma$ . Každé uzavřené podoblasti  $\bar{\Omega}^{(i)}$  přísluší část hranice  $\Gamma^{(i)}$ , která se dále dělí na  $\Gamma_u^{(i)}$ ,  $\Gamma_f^{(i)}$  a  $\Gamma_I^{(i,j)}$ , kde  $\Gamma_I^{(i,j)}$  je část hranice na podoblasti  $\bar{\Omega}^{(i)}$ , která přímo sousedí s  $\bar{\Omega}^{(j)}$  a zároveň  $j = 1 \dots n$ ;  $i \neq j$ .



Obrázek 3.1: Oblasti a hranice

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \quad (3.1)$$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}^{(i)} \quad (3.2)$$

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f \quad (3.3)$$

$$\Gamma^{(i)} = \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_f^{(i)} \cup \Gamma_I^{(i,j)} \quad (3.4)$$

$$\Gamma_I^{(i,j)} = \bar{\Omega}^{(i)} \cap \bar{\Omega}^{(j)} \quad (3.5)$$





## Kapitola 4

### Energetická formulace delaminace

Zkusme si nejprve shrnout, co je to delaminační úloha. Jak už bylo uvedeno v předchozí kapitole, jedná se o úlohu rovinné či trojrozměrné napjatosti, při které v závislosti na vzniklých deformacích vzniká poškození na předepsaném rozhraní a tedy k rozvoji předem definovaných trhlin. Klasický průběh delaminace tudíž vypadá tak, že je postupně zvětšováno zatížení a při tom je sledován rozvoj trhlin v konstrukci.

Pro účely dalších výpočtů budeme předpokládat, že daná úloha je zatěžována funkcí předepsaných posunutí  $\mathbf{u}_D(t)$ , která je spojitě závislá na čase  $t$ ,  $t \in \langle 0, T \rangle$ ,  $T \in \mathbb{R}$ . Přitom čas zde nepředstavuje fyzikální veličinu, ale pomocnou hodnotu, která nám umožňuje specifikovat chování úlohy při postupném zatěžování.

Zároveň budeme předpokládat, že rychlost zatěžování je dostatečně malá, aby její vliv na energii soustavy byl zanedbatelný. Za této podmínky je možné delaminační úlohu převést na energetický problém nezávislý na rychlosti zatěžování.

Celkovou energii soustavy můžeme zapsat jako součet dvou jejích složek: energie disipované vzniklým poškozením hranice mezi podoblastmi,  $\mathcal{D}$ , a energie uložené v pružné deformaci úlohy,  $\mathcal{E}$ .

#### 4.1 Disipační energie

Disipační energie obvykle označuje energii, která je spojena s nevratnou změnou. Běžně provází změnu materiálových charakteristik nebo okrajových podmínek konstrukce, jako je např. vznik plastických kloubů. V našem případě je definována jako množství energie uvolněné při změně poškození.

V rámci práce budeme uvažovat energii disipovanou mezi časem  $t$  a  $t - 1$  jako [13]

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_I^{(i,j)}} d^{(i,j)} \left( \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}), \omega_{(t-1)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \right) dS, \quad (4.1)$$

kde  $d^{(i,j)} \left( \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}), \omega_{(t-1)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \right)$  je hustota disipační energie na hranici mezi podoblastmi  $\Omega^{(i)}$  a  $\Omega^{(j)}$  závislá na poli poškození v aktuálním časovém kroku  $\omega_{(t)}(\mathbf{x})$  a na poli poškození v předchozím časovém kroku  $\omega_{(t-1)}(\mathbf{x})$ .

Energie disipovaná je tedy definována ve formě přírůstku energie, který vznikne při změně poškození mezi jednotlivými časy. Celková energie disipovaná během zatěžování je potom součtem jednotlivých přírůstků.

## 4.2 Energie pružné deformace

Jde o práci, kterou vykonají vnitřní síly v konstrukci na pružných deformacích úlohy, jedná se tedy o energii dočasně uloženou ve vzniklých deformacích.

V našem případě ji můžeme rozdělit na dvě složky: na složku  $\mathcal{E}_\Omega$ , která je uložena v přetvoření oblasti  $\Omega$ , a na část  $\mathcal{E}_\Gamma$ , kterou vyvolá pružné přetvoření hranice  $\Gamma_I$  mezi podoblastmi. [13]

$$\mathcal{E}_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)) : \mathbf{C}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (4.2)$$

$$\mathcal{E}_\Gamma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_I^{(i,j)}} e(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t), \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})) dS \quad (4.3)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Omega + \mathcal{E}_\Gamma \quad (4.4)$$

Zde  $\mathbf{C}^{(i)} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  představuje pozitivně definitní tenzor materiálové tuhosti podoblasti  $\Omega^{(i)}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  je tenzor poměrného přetvoření závislý na časovém průběhu posunů, který vznikl z teorie malých deformací.

Energie uložena v přetvoření rozhraní mezi podoblastmi je specifikována svou hustotou  $e$ , která je závislá na hodnotě poškozění  $\omega$  a rozevření hranice mezi podoblastmi  $\hat{\mathbf{u}}$ , které můžeme také nazvat skokem posunů na hranici mezi podoblastmi.

## 4.3 Neznámé a jejich omezení

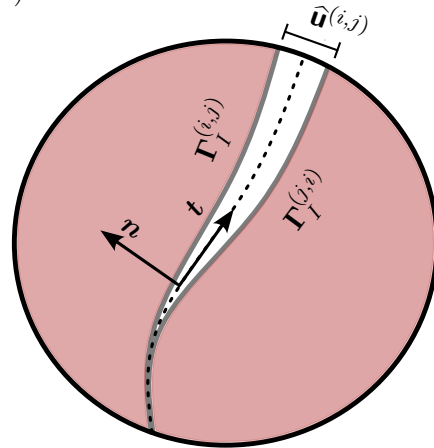
Z výše uvedených odstavců vyplývá, že celková energie soustavy je závislá na dvou neznámých veličinách: na poli posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  a poli poškozění  $\omega_{(t)}(\mathbf{x})$  v aktuálním čase  $t$ .

Neznámé posuny jsou omezeny následujícími podmínkami.

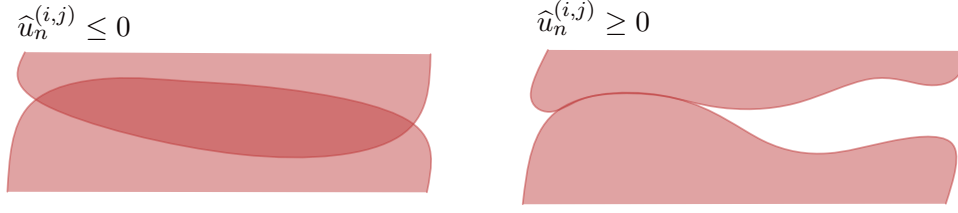
- Pole posunů se nachází na oblasti  $\bar{\Omega}$ .
- Hodnoty posunů na hranici  $\Gamma_u^{(i)}$  jsou rovny předepsaným Dirichletovým podmínkám pro všechna  $i$ .
- Jsou splněny podmínky neprotlačitelnosti (viz obr. 4.2).

Podmínky neprotlačitelnosti zabraňují protlačení bodů z jedné podoblasti do druhé. Jsou vyjádřeny omezením hodnoty normálového skoku mezi posuny na rozhraní  $\Gamma_I^{(i,j)}$ . Skoky posunů  $\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}$  představují rozdíl mezi posuny obou podoblastí na jejich vzájemné hranici. [13]

$$\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_I^{(i,j)}} - \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_I^{(j,i)}} \quad (4.5)$$



Obrázek 4.1: Skok posunů



Obrázek 4.2: Protlačení podoblastí

Pro takto zdefinovaný skok posunů tedy nedochází k protlačení, pokud jeho normálová složka definovaná jako  $\hat{u}_n^{(i,j)} = \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}$  nabývá pouze kladné nebo nulové hodnoty, tj. [13]

$$\hat{u}_n^{(i,j)}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I^{(i,j)}, \quad (4.6)$$

kde  $\mathbf{n}$  představuje normálu k hranici  $\Gamma_I^{(i,j)}$ . Směr normály budeme v této práci vždy uvažovat od podoblasti  $\Omega^{(j)}$  k podoblasti  $\Omega^{(i)}$ , kde  $j > i$ . Zvolený směr je naznačen na obr. 4.1.

Pokud tedy shrneme všechny výše uvedené podmínky, můžeme následovně zdefinovat přípustný prostor pole posunů. [13]

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d) : \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{W}^{(1,2)}(\Omega^{(i)}; \mathbb{R}^d), \right. \\ \left. \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_D^{(i)}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u^{(i)}; \hat{u}_n^{(i,j)}(\mathbf{x}, t) \geq 0, \forall i, j, j > i, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I^{(i,j)} \right\} \quad (4.7)$$

Poškození bylo podrobněji vysvětleno v kap. 2, proto již víme, že hodnota poškození se musí nacházet na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Dále nesmí docházet k takzvanému hojení, to znamená, že poškození v čase  $t$  nesmí nabýt menší hodnoty než poškození v předchozím časovém kroku  $t - 1$ .

$$\mathcal{Z} = \left\{ \omega_{(t)}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma_I) : \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma_I^{(i,j)}); 0 \leq \omega_{(t-1)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \leq \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I^{(i,j)} \right\} \quad (4.8)$$

Přípustné prostory  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{Z}$  nám určují definiční obor výše uvedených energetický funkcionalů. Pro  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{D}$  lze celková omezení shrnout následovně:

$$\mathcal{E} : \langle 0, T \rangle \times \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{D} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

## 4.4 Hustoty energií na rozhraní

Hustoty energií, které se objevují v rovnicích (4.3) a (4.1), jsou pro výpočet úlohy nezbytné. Obvykle vychází z materiálových vlastností rozhraní, které je nutné určit pomocí měření.

### 4.4.1 Hustota energie pružné deformace

Hustota energie na rozhraní představuje hustotu práce, která je vykonávána skoky posunů hranice na tuhosti rozhraní. Jde tedy o práci, kterou vykonávají síly bránící rozevření trhliny na jednotkovém rozhraní.

Je obvyklé, že normálová i tečná složka skoku posunů netvoří stejnou silovou odezvu, proto zavádíme takzvaný efektivní skok posunů na rozhraní  $\delta(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t))$  definovaný jako:

$$\delta^2(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t)) = (\hat{u}_n^{(i,j)}(\mathbf{x}, t))^2 + \beta (\hat{u}_t^{(i,j)}(\mathbf{x}, t))^2, \quad (4.11)$$

kde  $\beta$  je kombinační součinitel, který vychází z měření, a  $\hat{u}_t^{(i,j)}$  představuje velikost skoku posunů ve směru tečny k hranici  $\Gamma_I^{(i,j)}$ .

Tuhosti na rozhraní  $k(\omega_{(t)}^{(i,j)})$  se mění v závislosti na poškození rozhraní. Tento vztah určuje tahový separační zákon na rozhraní. Hustotu pružné energie na rozhraní tedy můžeme definovat jako:

$$e(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t), \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} k(\omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})) \delta^2(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t)). \quad (4.12)$$

### Volba konkrétního tvaru tahového separačního zákona

Pokud nyní chceme přesněji zavést tuhost na rozhraní, jsme nuceni zvolit konkrétní tvar tahového separačního zákona na rozhraní. Jedná se o pracovní diagram zobrazující závislost efektivního rozevření  $\delta$  hranice  $\Gamma_I$  a napětí  $\sigma$ , které je tato hranice schopna přenést.

Skutečné chování materiálu bývá obvykle vcelku složité a jeho dokonale přesné modelování by mohlo značně ztížit navazující výpočty, proto se obvykle volí tahový separační zákon, který je oproti skutečnému chování zjednodušený. Toto zjednodušení by mělo přibližně vystihovat skutečné chování materiálu.

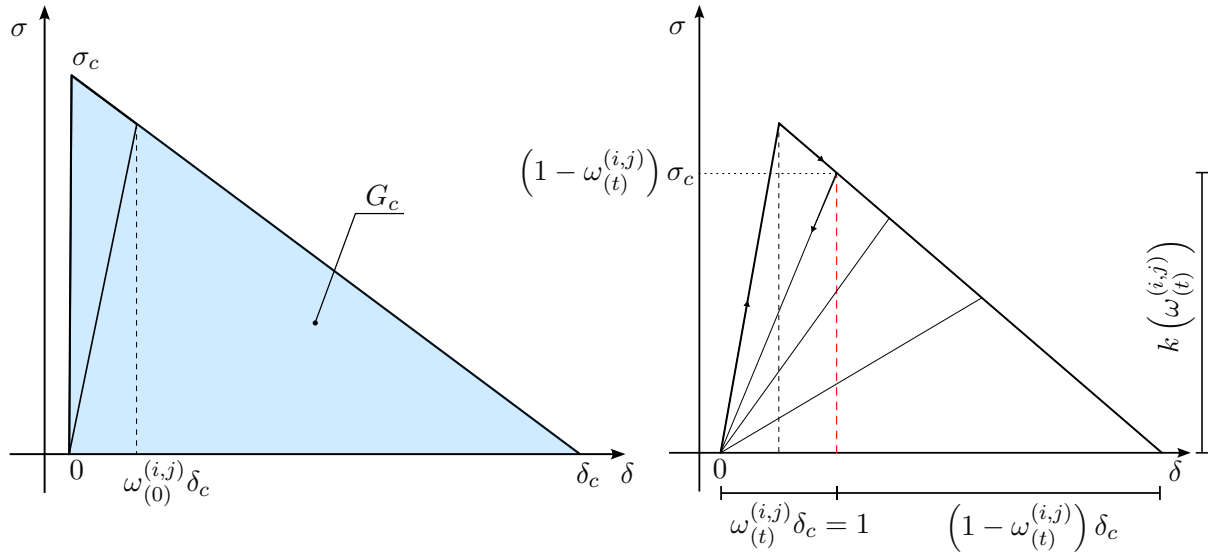
Na obr. 4.3 je zobrazen příklad tahového separačního zákona s lineárním průběhem a nenulovým počátečním poškozením. Tento tvar diagramu dokonale postačí pro účely této práce a bude užít v celém jejím zbytku.

Takový tvar je jasně specifikován mezním napětím na rozhraní před začátkem porušování  $\sigma_c$  a mezním efektivním rozevřením rozhraní  $\delta_c$ . Tím jsou přesně určeny vlastnosti rozhraní, které mají výrazný vliv na celkové chování úlohy. Je-li například  $\delta_c$  malé a mezní napětí  $\sigma_c$  velké, bude se rozhraní chovat křehce a k uvolňování disipační energie bude docházet náhle a skokově.

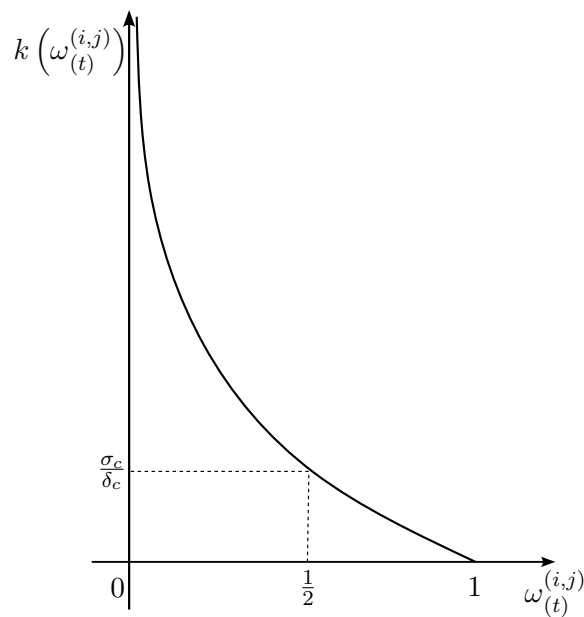
Nyní lze díky trojúhelníkovému tvaru diagramu snadno určit, jak závisí tuhost rozhraní na poškození:

$$k(\omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})) = \frac{\sigma_c}{\delta_c} \left( \frac{1 - \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})}{\omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})} \right) \quad (4.13)$$

Z této rovnice a jejího grafického znázornění na obr. 4.4 je zřejmé, proč je důležité nenulové počáteční poškození  $\omega_{(0)}^{(i,j)}$ . Pro nulové poškození se tuhost rozhraní blíží k nekonečnu, což by způsobilo nemalé obtíže v následujících výpočtech.



**Obrázek 4.3:** Zvolený tahový separační zákon



**Obrázek 4.4:** Závislost tuhosti na poškození

### 4.4.2 Hustota disipační energie

Hustota disipační energie, která byla uvolněna mezi dvěma časovými kroky, se obvykle odvozuje jako část energie nutné k celkovému porušení rozhraní. Stejně jako tuhost rozhraní je možné tuto energii určit z tahového separačního zákona.

Práci, kterou je třeba vykonat, aby rozhraní přešlo z neporušeného stavu do stavu zcela porušeného, odpovídá plocha pod křivkou na obr. 4.3.

$$G_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c \quad (4.14)$$

Hodnota  $G_c$  zde představuje tak zvanou lomovou energii. Jedná se o energii, která je nutná ke kompletnímu porušení v jednotkové ploše rozhraní rozhraní.

Pro takto zvolený separační zákon lze hustotu disipační energie potřebné ke změně poškození z  $\omega_{(t-1)}^{(i,j)}$  na  $\omega_{(t)}^{(i,j)}$  odvodit jako:

$$d^{(i,j)} \left( \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}), \omega_{(t-1)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \right) = G_c \left( \omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) - \omega_{(t-1)}^{(i,j)}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.15)$$

## Kapitola 5

### Numerické řešení úlohy

#### 5.1 Časová diskretizace

Pro výpočet problémů s rozvojem delaminačního poškození bývá obvykle užíváno diskrétního evolučního přístupu. To znamená, že spojitý časový interval  $\langle 0, T \rangle$  je rozdělen na  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  časových kroků  $t_{(k)}$ ,  $k = 1 \dots m$ . Následně je výpočet proveden v každém časovém kroku zvlášť pro hodnoty poškození a posunů zjištěné z předchozího časového kroku a zatížení v kroku současném.

Jak už bylo uvedeno v předchozí kapitole, funkce energie má ve směru gradientu podle poškození a posunů konvexní tvar, a proto je možné hledat správné řešení jako takové hodnoty  $\omega$  a  $\mathbf{u}$ , pro které nabývá součet uložené elastické energie a energie disipované minimální hodnoty. Tím se výpočet stává postupnou minimalizací energie v každém čase  $k$  pro předem dané zatížení a poškození z předchozího stavu zatěžování  $\bar{\omega}_{(k-1)}$ .

$$\left( \bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)} \right) = \arg \min_{(\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U}, \mathcal{Z}} \left( \mathcal{E}(t_{(k)}, \mathbf{u}, \omega) + \mathcal{D}(\omega, \bar{\omega}_{(k-1)}) \right) \quad (5.1)$$

Existence jednoznačného řešení určeného tímto postupem byla prokázána v [6], kde zároveň byla formulována následující tvrzení:

**Tvrzení 5.1.** *Existuje-li jednoznačné řešení rovnice (5.1)  $(\bar{\mathbf{u}}_{(1)}, \bar{\omega}_{(1)})$  v počátečním čase  $t_1 = 0$ , které se nachází na přípustném prostoru  $\mathcal{U} \times \mathcal{Z}$ , potom na tomto přípustném prostoru existuje přírůstkové řešení  $(\bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)})$  pro každý následující časový bod  $t_k$ .*

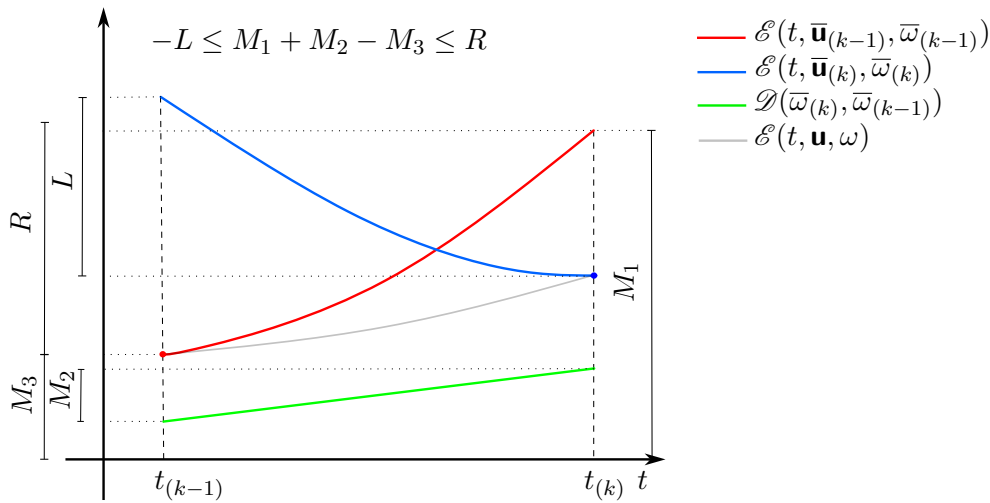
**Tvrzení 5.2.** *Stabilita řešení  $(\bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)})$  v každém bodě časové diskretizace je zaručena, pokud je splněno*

$$\mathcal{E}(t_{(k)}, \bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)}) \leq \mathcal{E}(t_{(k)}, \mathbf{u}, \omega) + \mathcal{D}(\omega, \bar{\omega}_{(k-1)}) \quad \forall (\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}. \quad (5.2)$$

**Tvrzení 5.3.** *Pro libovolný časový krok  $t$  platí oboustranný energetický odhad [13]:*

$$\begin{aligned} \overbrace{\int_{t_{(k-1)}}^{t_{(k)}} \partial_t \mathcal{E}(t, \bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)}) dt}^{-L} &\leq \overbrace{\mathcal{E}(t_{(k)}, \bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k)})}^{M_1} + \overbrace{\mathcal{D}(\bar{\omega}_{(k)}, \bar{\omega}_{(k-1)})}^{M_2} - \overbrace{\mathcal{E}(t_{(k-1)}, \bar{\mathbf{u}}_{(k-1)}, \bar{\omega}_{(k-1)})}^{M_3} \quad (5.3) \\ &\leq \underbrace{\int_{t_{(k-1)}}^{t_{(k)}} \partial_t \mathcal{E}(t, \bar{\mathbf{u}}_{(k-1)}, \bar{\omega}_{(k-1)}) dt}_R \end{aligned}$$

Grafické zobrazení oboustranného energetického odhadu je možné nalézt na obr. 5.1.



**Obrázek 5.1:** Grafické zobrazení oboustranného energetického odhadu uvedeného v rovnici (5.3). Jsou zde uvedeny možné průběhy jednotlivých energetických funkcí na intervalu  $\langle t_{(k-1)}, t_{(k)} \rangle$ .

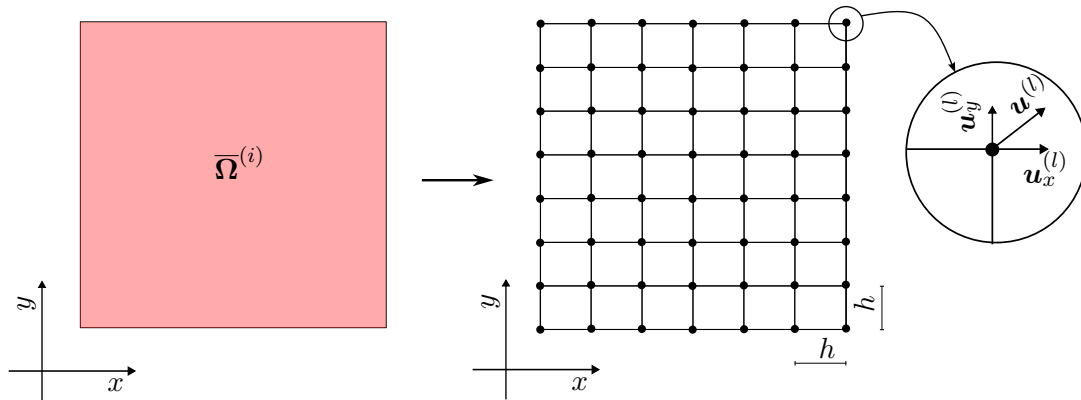
Funkce energie uložené v pružných deformacích s vypočtenými hodnotami posunů a poškození náležícím času  $t_{(k-1)}$  a s měnící se hodnotou zatížení (červeně)

Funkce energie uložené v pružných deformacích s vypočtenými hodnotami posunů a poškození náležícím času  $t_{(k)}$  a s měnící se hodnotou zatížení (modře)

Vypočtené hodnoty disipační energie (zeleně)

Vypočtené hodnoty energie uložené v pružných deformacích (šedě)

## 5.2 Diskretizace pole posunů a poškození



**Obrázek 5.2:** Příklad diskretizace podoblasti  $\bar{\Omega}^{(i)}$  čtvercovou sítí konečných prvků

Pro numerické výpočty je nutné převést spojité pole posunů a poškození na jejich diskrétní aproximaci pomocí zvolených básových funkcí. V této práci využíváme standardní aproximaci běžně užívanou v metodě konečných prvků.

Každou podoblast úlohy  $\bar{\Omega}^{(i)}$  rozdělíme na síť o velikosti prvku  $h \times h$  viz obr. 5.2. Následně umístíme do každého průsečíku sítě po jednom bodu. Pokud máme v úmyslu využít aproximaci vyššího, než prvního řádu, doplníme síť body, tak aby každá hrana konečného prvku byla



rozdělena na tolik rovnoměrných úseků, jaký je zvolený stupeň aproximace. Tímto postupem vznikne  $o$  bodů,  $o \in \mathbb{N}$ , a každému bodu je přiřazeno pořadové číslo  $l$ .

Na vzniklé bodové síti je nyní definováno diskrétní pole posunů tak, že každému bodu sítě s pořadovým číslem  $l$  je přiřazen vektor  $\mathbf{u}^{(l)}$ ,  $\mathbf{u}^{(l)} \in \mathbb{R}^d$ , který obsahuje stupně volnosti daného bodu. Shrnutím stupňů volnosti všech bodů do jediného vektorů vzniká vektor posunů  $\mathbf{u}$ . Zároveň je průběh funkce posunů mezi body idealizován polynomem stejného řádu, jaký je stupeň užití aproximace. Stupeň aproximace není předem daný, ale pro běžné aplikace, které budou popsány v tomto textu se využívá lineární idealizace funkce posunů.

Funkce poškození na rozhraní mezi podoblastmi bude aproximována podobně jako pole posunů. Stupeň aproximace funkce poškození je opět libovolný, ale pro další odvozování je výhodné převést funkci poškození na funkci po částech konstantní. Díky tomu vzniká vektor poškození  $\boldsymbol{\omega}$ , který přiřazuje každému bodu na rozhraní (v případě konstantní aproximace každému prvku) právě jednu hodnotu poškození.

Nyní můžeme zapsat minimalizaci energie z rovnice (5.1) v diskrétním tvaru: [13]

$$(\bar{\mathbf{u}}_{(k)}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k)}) = \arg \min_{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \in U, Z} \left( \mathcal{E}(\mathbf{u}(t_{(k)}), \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k-1)}) \right) \quad (5.4)$$

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^e, e = d \times o; \mathbf{B}_u \mathbf{u} = \mathbf{c}, \mathbf{B}_I \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (5.5)$$

$$Z = \left\{ \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d; 0 \leq \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k-1)} \leq \boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{1} \right\}, \quad (5.6)$$

kde

$$\mathbf{u}(t_{(k)}) = \mathbf{u} + \mathbf{u}_D(t). \quad (5.7)$$

Vektor posunů se zde tedy skládá ze dvou složek: vektor  $\mathbf{u}$  je hledaný vektor všech posunů, jehož souřadnice v místě předepsaných časově proměnných stupňů volnosti jsou nulové a  $\mathbf{u}_D(t)$  představuje vektor posunů zavádějící předepsané posuny, které jsou závislé na čase a přísluší aktuálnímu časovému kroku.

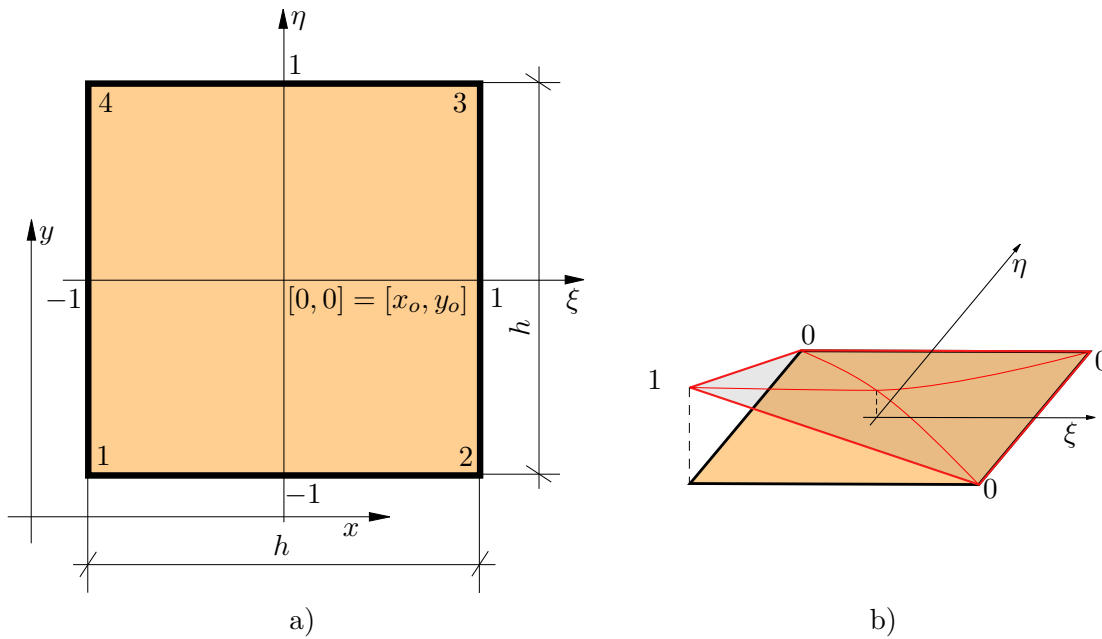
Všechny předepsané posuny, které jsou v čase konstantní jsou sdruženy do vektoru  $\mathbf{c}$ . Ten společně s Booleovou maticí  $\mathbf{B}_u$  udává informaci o hodnotě a poloze předepsaných posunů. Matice  $\mathbf{B}_I$  společně s nulovou pravou stranou odpovídá všem podmínkám impenetrability na rozhraní mezi podoblastmi.

Matice  $\mathbf{B}_u$  a  $\mathbf{B}_I$  jsou složeny z řádkových vektorů  $\mathbf{b}^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, \dots, s$ ;  $s \in \mathbb{N}$ , které obsahují pouze číslice  $-1$ ,  $0$  a  $1$  a z nichž u matice  $\mathbf{B}_u$  každý vektor představuje maticový zápis levé strany právě jedné okrajové podmínky. Každý vektor  $\mathbf{b}^{(p)}$  náležící matici  $\mathbf{B}_I$  reprezentuje rozdíl ve vektoru posunů, který tvoří normálový skok posunů v jednom bodě rozhraní.

### ■ 5.2.1 Diskretizace na podoblastech

V rámci diskretizace pole posunů a poškození je možné převést zápis jednotlivých energií do maticového zápisu, k čemuž je možné využít metodu konečných prvků. Pro přehlednost zde bude ukázán postup pro diskretizaci dvourozměrné úlohy na jednom konečném prvku.

Zavedeme lokální parametrické souřadnice. Počátek souřadnic  $\xi \times \eta$  se nachází v těžišti prvku a definiční obor souřadnic je  $\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$  viz. obr. 5.3. Díky tomuto kroku v následujících výpočtech dojde ke zjednodušení integrace úlohy přes oblast  $\boldsymbol{\Omega}$ .



**Obrázek 5.3:** Metoda konečných prvků  
 a) Čtvercový konečný prvek na dvourozměrné oblasti  
 b) Lineární básová funkce  $N_l$  na dvourozměrném konečném prvku

Pro převod mezi souřadnicemi  $x, y$  a  $\xi, \eta$  platí následující vztahy:

$$x = \frac{1}{2}h\xi + x_o \qquad y = \frac{1}{2}h\eta + y_o, \qquad (5.8)$$

kde  $[x_o, y_o]$  představují souřadnice těžiště v globálním souřadnicovém systému  $x, y$ .

V takto vytvořeném souřadnicovém systému zvolíme básové funkce, pro které platí, že každá básová funkce  $N_l$  se v bodě  $l$  rovná 1 a v ostatních bodech se rovná nule. Stupeň funkce je závislý na stupni volené aproximace. Čím vyšší je stupeň aproximace, tím je náročnější výpočet prvkových matic tuhosti, ale snižuje se odchylka od skutečnosti. Obecně platí, že stupeň aproximace by měl být stejný nebo nižší než stupeň aproximované funkce. V našem případě budou voleny bilineární básové funkce, jejich příklad můžete vidět na obr. 5.3b.

Pro lineární aproximaci lze předpisy jednotlivých básových funkcí, v případě že body čtyřúhelníku jsou číslovány od levého dolního rohu a proti směru hodinových ručiček, shrnout do společného předpisu [2]:

$$N_l = \frac{1}{4}(1 + \xi_l\xi)(1 + \eta_l\eta), \qquad (5.9)$$

kde  $\xi_l$  a  $\eta_l$  jsou parametrické souřadnice v bodě  $l$ .

Nyní zavedeme předpoklad, že funkci posunů na prvku je možné zapsat jako součet násobků jednotlivých básových funkcí. Tím je provedena aproximace funkce posunů na jednom elementu.[2]

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \mathbf{u}_e, \qquad (5.10)$$

kde vektor  $\mathbf{u}_e$  představuje vektor uzlových posunů příslušících jednomu konečnému prvku.

Z aproximovaného pole posunů je možné vyjádřit vektor relativních deformací  $\boldsymbol{\varepsilon}$  podle vztahů klasické mechaniky.[2]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(\xi, \eta)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Aby bylo možné provést derivace v předchozích rovnicích, je nutné převést derivace podle  $x$  a  $y$  na derivace podle  $\xi$  a  $\eta$ . K tomuto účelu budou užity vzorce pro derivace složených funkcí. Pro zlepšení přehlednosti budeme v následujících vzorcích  $u_x(\xi, \eta)$  a  $u_y(\xi, \eta)$  značit pouze jako  $u_x$  a  $u_y$ .

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \eta} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.13)$$

Vztahy (5.12) a (5.13) lze přepsat do maticového zápisu.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

kde matice  $\mathbf{J}$  se nazývá jakobián a její inverzi je možné snadno nalézt s využitím determinantů, jako

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Nyní můžeme zapsat interpolaci pole relativního přetvoření v bodě  $[\xi, \eta]$  v rámci elementu v závislosti na vektoru posunutí elementu. Označení závislosti  $(\xi, \eta)$  u bázevých funkcí bude vynecháno.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (5.16)$$

Rovnici (5.16) můžeme přeznačit pro zjednodušení zápisu.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta) = \mathbf{A} \mathbf{u}_e \quad (5.17)$$

Podle typu úlohy můžeme nyní určit i matici materiálových vlastností  $\mathbf{C}$ . Pokud zavedeme předpoklad rovinné napjatosti, tedy že napětí ve směru kolmém k rovině průřezu je nulové, má  $\mathbf{C}$  tvar:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Matice materiálových vlastností se skládá z Youngova modulu pružnosti  $E$  a z Poissonovy konstanty  $\nu$ , která zahrnuje vliv příčného zkrácení.

Nyní můžeme matici tuhosti pro jeden konečný prvek oblasti  $\Omega^{(i)}$  zapsat jako [2]

$$\mathbf{K}_{\Omega^{(i)},e} = \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} d\Omega^{(i)} dz = \bar{t} \det J \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} d\xi d\eta, \quad (5.19)$$

kde  $\bar{t}$  značí tloušťku prvku.

Integrace je možné řešit numericky například s pomocí Gaussovy integrační metody (Gaussovy kvadratury). Tato metoda převádí výpočet integrálu funkce na součet součinů funkčních hodnot ve vhodně zvolených integračních bodech a příslušných váhových hodnot.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{int} w_{(int)} f(\xi_{(int)}) \quad (5.20)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{int} w_{(int)} f(\xi_{(int)}, \eta_{(int)}) \quad (5.21)$$

Takový postup si můžeme představit jako zjednodušení plochy pod obecnou křivkou na součet ploch několika obdélníků, jejichž výška je rovna funkční hodnotě v daném integračním bodě a šířka je rovna váze, která přísluší danému integračnímu bodu. Integrační body a váhové funkce jsou vypočítány tak, aby numerická odchylka takového postupu byla co nejmenší.

V tabulkách 5.1a a 5.1b jsou uvedeny příklady integračních bodů a k nim příslušících vah nejprve pro jednorozměrné integrály a následně pro čtvercové izoparametrické konečné prvky užívané v této práci.

Jednotlivé vypočtené prvkové matice tuhosti lze lokalizovat do jediné matice  $\mathbf{K}_{\Omega}$ . Následně je možné pomocí ní přepsat rovnici (4.2) do aproximovaného diskrétního tvaru.

$$\mathcal{E}_{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \mathbf{K}_{\Omega} \mathbf{u}(t_k) \quad (5.22)$$

počet integračních bodů	souřadnice $\xi_{(int)}$	váhy $w_{(int)}$
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0 $\pm \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$

**a)** : integrační body a váhy  
pro dvourozměrné integrály

počet integračních bodů	souřadnice $\xi_{(int)}$ $\eta_{(int)}$	váhy $w_{(int)}$
1	0   0	4
4	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1

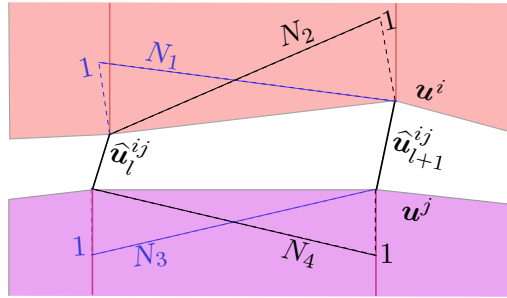
**b)** : integrační body a váhy  
pro bilineární izoparametrické prvky

**Tabulka 5.1:** Integrační body a váhy

### 5.2.2 Diskretizace na hranici mezi podoblastmi

Podobně jako jsme provedli diskretizaci na podoblastech, můžeme tento postup použít i pro vztahy na hranicích mezi podoblastmi. Již máme síť bodů, která vyplývá z postupu uvedeného výše, tím je rozdělena i hranice každé podoblasti a pro každou z podoblastí  $i$  a  $j$  vzniká vektor posunutí  $\mathbf{u}^i$  a  $\mathbf{u}^j$ .

Každá část rozhraní přísluší styku mezi dvěma čtvercovými prvky, z nichž každý náleží jiné podoblasti. Z toho vyplývá že funkce posunů na rozhraní je na nich idealizována dvěma překrývajícími se 1D prvky viz obr. 5.4. Každému z těchto prvků náleží jeden vektor posunů,  $\mathbf{u}_e^i$  a  $\mathbf{u}_e^j$ .



Obrázek 5.4: Aproximace pole posunů na rozhraní metodou konečných prvků

Pro zjednodušení zavedeme předpoklad, že hranice  $\Gamma_I^{(i,j)}$  je rovnoběžná s osou  $x$ , pak můžeme zavést parametrickou souřadnici  $\xi$ , pro kterou platí vztah uvedený v rovnici (5.8). Pro ní zvolíme lineární báze funkce :

$$N_l = \frac{1}{2}(1 + \xi_l \xi) \quad (5.23)$$

Opět zavedeme předpoklad, že funkci posunů na prvku je možné zapsat jako součet násobků jednotlivých báze funkcí.

$$\mathbf{u}^{(ij)}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(i)}(\xi) \\ \mathbf{u}^{(j)}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 & N_4(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 & N_4(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^{(i)} \\ \mathbf{u}_e^{(j)} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Nyní je možné vyjádřit kvadrát efektivního skoku  $\delta^2$  zdefinovaný v rovnici (4.11) následujícími vztahy.

$$\mathbf{N}_I(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 & N_4(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 & N_4(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{u}_e^{(ij)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^{(i)} \\ \mathbf{u}_e^{(j)} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_n^{ij} = \mathbf{n}^T \mathbf{N}_I(\xi) \mathbf{u}_e^{(ij)} \quad (5.27)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_t^{ij} = \mathbf{t}^T \mathbf{N}_I(\xi) \mathbf{u}_e^{(ij)} \quad (5.28)$$

$$\delta^2(\xi) = \left( \mathbf{u}_e^{(ij)} \right)^T \mathbf{N}_I^T(\xi) \left( \mathbf{n}^T \mathbf{n} + \beta^2 \mathbf{t}^T \mathbf{t} \right) \mathbf{N}_I(\xi) \mathbf{u}_e^{(ij)}, \quad (5.29)$$

kde  $\mathbf{n}$  je normálový a  $\mathbf{t}$  tečný vektor k vnější hranici  $\Gamma_I^{(i,j)}$  a  $\beta$  je kombinační součinitel, který omezuje vliv tečné složky skoku posunů na rozhraní.

Pro poškození se obvykle předpokládá zjednodušení na konstantní průběh po prvku, proto i mi zde zavedeme tuto aproximaci. Následkem toho budeme poškození  $\omega_{e,(k)}$  i tuhost  $k_e(\omega_{e,k})$  v čase  $t_k$  na jednom konečném prvku uvažovat jako konstantní hodnoty nezávislé na parametrické souřadnici  $\xi$ .

Matici tuhosti prvku na rozhraní můžeme zapsat jako:

$$\mathbf{K}_{I,e} = k_e(\omega_{e,(k)}) \bar{t} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_I^T(\xi) \left( \mathbf{n}^T \mathbf{n} + \beta^2 \mathbf{t}^T \mathbf{t} \right) \mathbf{N}_I(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (5.30)$$

Potom můžeme lokalizovat všechny prvkové matice na rozhraní do globální matice  $\mathbf{K}_I$  a vyjádřit celkovou energii v čase  $t_k$  uloženou v pružných deformacích na rozhraních.

$$\mathcal{E}_\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \mathbf{K}_I(\omega_{(k)}) \mathbf{u}(t_k) \quad (5.31)$$

Přitom  $\omega_{(k)}$  zde představuje sloupcový vektor poškození, který přiřazuje každému prvku na rozhraní právě jednu konstantní hodnotu poškození.

### 5.2.3 Diskretizace disipační energie

Disipační energii lze vypočítat jako součet všech příspěvků disipační energie uvolněných na každém konečném prvku na rozhraní. Proto lze hustotu disipační energie pro každý prvek  $e$  zapsat zvlášť:

$$d^{(i,j)}(\xi) = G_{e,c} \left( \omega_{e,(k)} - \omega_{e,(k-1)} \right), \quad (5.32)$$

zde  $G_{e,c}$  představuje hustotu energie nutné ke kompletnímu porušení celého konečného prvku.

Pokud složíme hodnoty  $G_{e,c}$  přenásobené délkou rozhraní spočtenou jako  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{d\xi} d\xi$  pro všechny konečné prvky na rozhraní do jednoho sloupcového vektoru  $\mathbf{G}_c$ , můžeme zapsat disipační energii jako:

$$\mathcal{D} = \bar{t} \mathbf{G}_c^T \left( \boldsymbol{\omega}_{(k)} - \boldsymbol{\omega}_{(k-1)} \right) \quad (5.33)$$

### 5.3 Střídavá minimalizace úlohy

V rovnici (5.4) jsme nuceni provést minimalizaci podle  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\omega}$ , což představuje rozsáhlou nekonvexní úlohu [13]. Pro takovou úlohu by bylo hledání řešení značně náročné. Naštěstí je mnohem snazší provést minimalizaci podle každého vektoru proměnných zvlášť.

V důsledku toho je možné využít algoritmus střídavé minimalizace představený v [1]. Algoritmus střídavé minimalizace je založen na postupné minimalizaci energie nejprve podle  $\mathbf{u}$  s předpokládaným vektorem  $\boldsymbol{\omega}$  a poté podle  $\boldsymbol{\omega}$  s vypočteným vektorem posunů. Následně je porovnáno, zda se vypočtený vektor poškození příliš neliší od původního předpokladu, a pokud tomu tak není, je  $\boldsymbol{\omega}$  opraveno a celý postup je opakován. Díky tomu se celý postup rozdělí na dvě konvexní úlohy, které jsou počítány postupně.

Postup výpočtu v každém časovém kroku je tedy následující:

1. Nejprve je nutné zvolit počáteční poškození  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}$ . V prvním časovém kroku vychází počáteční vektor poškození z vlastností úlohy. V následujících časových krocích je vhodné volit počáteční vektor jako skutečný vektor poškození vypočtený v předchozím časovém kroku.
2. Následně je vypočten vektor posunů pro daná poškození.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{(g)} = \arg \min_{(\mathbf{u} \in U)} \left( \mathcal{E} \left( \mathbf{u}(t_{(k)}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g-1)} \right) \right) \quad (5.34)$$

Disipační část energie je v této části výpočtu nepodstatná, protože je nezávislá na vektoru posunutí.

3. Z vypočtený posunů je opět vypočten vektor poškození.

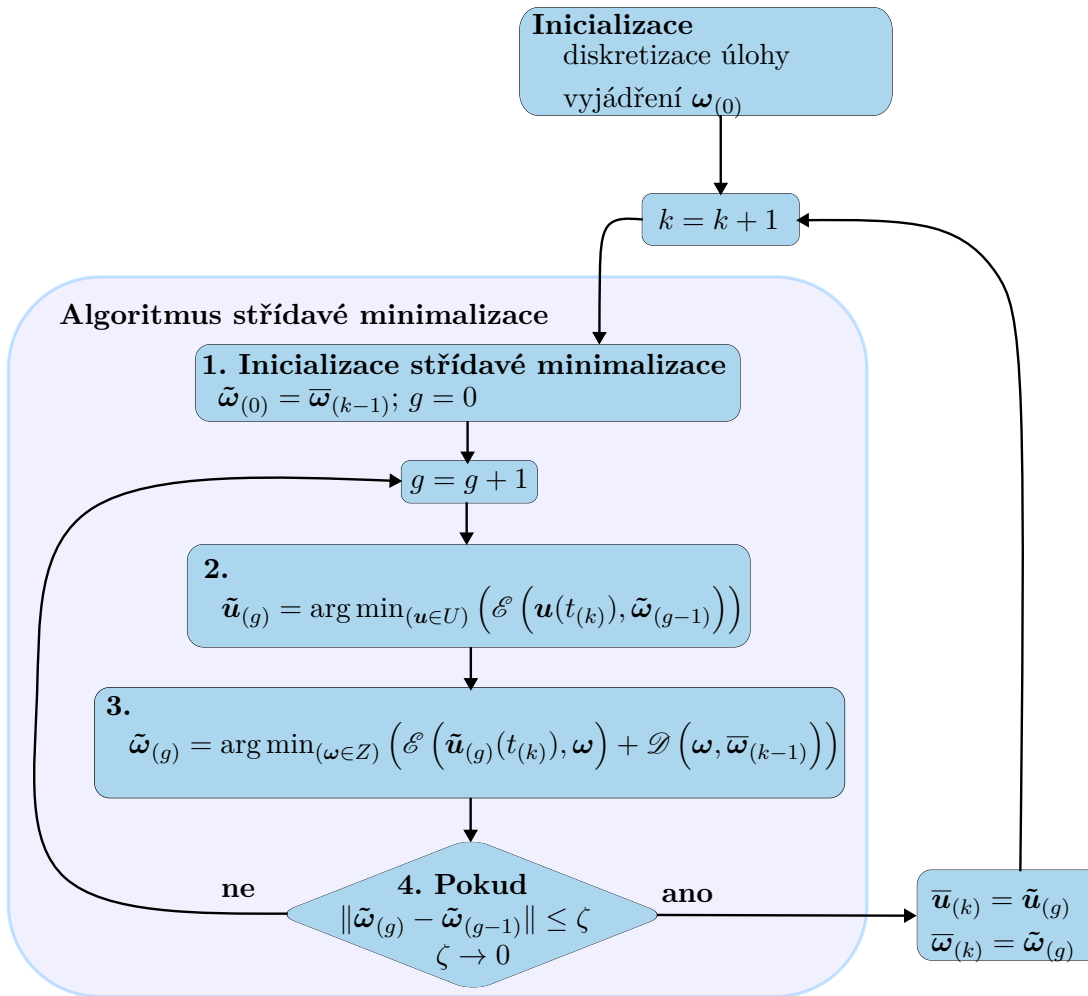
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g)} = \arg \min_{(\boldsymbol{\omega} \in Z)} \left( \mathcal{E} \left( \tilde{\mathbf{u}}_{(g)}(t_{(k)}), \boldsymbol{\omega} \right) + \mathcal{D} \left( \boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k-1)} \right) \right) \quad (5.35)$$

4. Na závěr, zda došlo ke změně poškození. Pokud změna poškození není zanedbatelná, navrátíme se ke kroku 2 a celý postup opakujeme. Pokud se poškození již příliš nemění, pak

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{(k)} &= \tilde{\mathbf{u}}_{(g)} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k)} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g)} \end{aligned}$$

a přejdeme do dalšího časového kroku.

Na obr. 5.5 je schématicky zobrazen algoritmus metody střídavé minimalizace.



Obrázek 5.5: Diagram výpočtu pomocí algoritmu střídavé minimalizace

## 5.4 Zpětné trasování energie

Pro výše uvedenou metodu bylo v [1] ukázáno, že v konečném počtu kroků může konvergovat k lokálnímu minimu časově diskretizované funkce (5.4). Energie v tomto tak zvaném „kritickém bodu“ může porušit oboustranný energetický odhad (5.3) [8]. Je obvyklé, že k tomuto jevu dochází u křehkých materiálů, kde porušení je náhlé a díky tomu dochází i k náhlému uvolnění disipační energie.

To, že energie nalezeného lokálního minima nespĺňuje oboustranný energetický odhad značí, že rozvoj poškození je výraznější již v některém z předchozích časových bodů. Proto je nyní nutné upravit již získaná řešení.

Úpravu je možné provést například s pomocí stochastických metod pro globální optimalizaci, což je obvykle velmi náročné na počet iterací [8][4]. Naštěstí můžeme, díky vědomí, že skutečné poškození je vyšší, než to které bylo vypočteno, přepočítat opět s využitím výpočtu střídavé minimalizace. Pro každý časový bod  $k$ , pro který není splněn oboustranný energetický odhad (5.3), je možné znovu iniciovat řešení bodu  $k - 1$  pomocí algoritmu střídavé minimalizace,

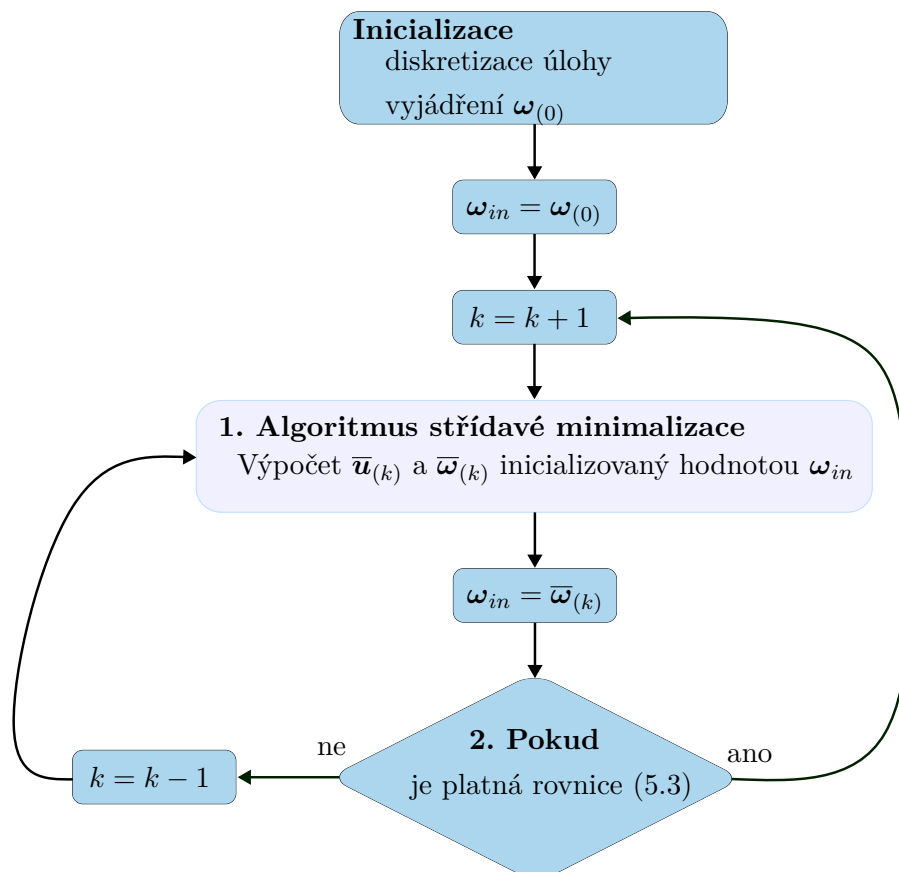


tak, že za počáteční bod algoritmu  $g = 0$  vezmeme poškození z bodu  $k$ . Tím dosáhneme toho, že metoda bude k řešení postupovat z opačného směru, než v předchozím výpočtu, což umožní dokonvergovat do globálního minima úlohy.

Na tomto předpokladu je pak založené heuristické zpětné trasování energie [8].

1. V každém kroku  $k$  časové diskretizace je pro čas  $t_k$  vypočteno poškození  $\bar{\omega}_{(k)}$  a posun  $\bar{u}_{(k)}$ , pomocí algoritmu střídavé minimalizace. Při tomto výpočtu je jako počáteční poškození  $\bar{\omega}_{(g=0)}$  využita hodnota  $\omega_{in}$  získaná z předchozích výpočtů.
2. Následně je ověřeno zda je splněna oboustranná nerovnost (5.3).
  - a. Pokud je tato podmínka splněna, můžeme tvrdit, že  $\bar{\omega}_{(k)}$  je globálním minimem rovnice (5.4), a přejdeme do následujícího časového kroku.
  - b. Pokud tomu tak není, vrátíme se o krok zpět a vypočteme řešení v časovém kroku  $(k - 1)$  s hodnotou poškození z předchozího výpočtu  $\omega_{in} = \bar{\omega}_{(k)}$ .

Je důležité si uvědomit, že v kroku č.1 nesmí dojít k záměně  $\omega_{in}$  a  $\bar{\omega}_{(k-1)}$ . Tyto hodnoty při zpětném trasování nejsou totožné a pro výpočet poškození stále platí omezení  $\bar{\omega}_{(k-1)} \leq \bar{\omega}_{(k)} \leq \mathbf{1}$ . Schématický postup heuristického zpětného trasování je uveden na obr. 5.6



Obrázek 5.6: Výpočet s využitím zpětného trasování úlohy

## 5.5 Metoda aktivní množiny

Formulace úlohy uvedená v kap. 4 uvažuje separační zákon na rozhraní pouze při tahovém namáhání. Při tlakovém namáhání působí rozhraní jako tuhý celek, na kterém je vyloučeno vzájemné protlačení podoblastí. Kvůli tomu v úloze vznikají omezující podmínky ve formě soustavy lineárních nerovnic.

Metoda aktivní množiny je iterativní postup vhodný pro řešení úloh ve formě soustavy lineárních rovnic, která je omezena podmínkami ve tvaru lineárních rovnic a nerovnic. Aby bylo možné tuto metodu použít je nutné, aby kvadratická forma úlohy byla pozitivně nebo negativně definitní. Přesně takovou úlohou je rovnice (5.34) v algoritmu střídavé minimalizace úlohy.

Není nijak složité nalézt řešení soustavy lineárních rovnic omezené další soustavou lineárních rovnic, ale pokud se v úloze začnou objevovat i nerovnice řešení přestává být triviální. Jsme nuceni nejprve převést všechny lineární nerovnice na lineární rovnice, čímž vznikne kvadratický podproblém omezený pouze rovnicemi. Tím vzniká úloha, kde se všechny podmínky na rozhraní chovají jako dokonale tuhé, proto musíme některé podmínky z výpočtu vyřadit, aby bylo dovoleno použití separačního zákona v místech, kde dochází k tahovému namáhání.

Stěžejním úkolem metody aktivní množiny je nalezení kvadratického podproblému omezeného podmínkami ve formě rovnic a některými podmínkami ve formě nerovnic převedenými na rovnice, který má stejné řešení jako původní úloha. O nerovnicích, které nejsme nuceni zavést do výpočtu, budeme tvrdit, že jsou přirozeně splněné a není nutné jejich splnění vynucovat. Ostatní podmínky jsou takové, které by bez zavedení příslušných rovnic do výpočtu nebyly splněny, a je tedy nutné jejich splnění vynutit. Tyto podmínky zároveň budeme nazývat aktivními.

Pro zjednodušení zápisu v následujících odstavcích zavedeme několik nových množin. V kap. 5.2 bylo uvažováno  $s$  vektorů omezujících podmínek  $\mathbf{b}^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, \dots, s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  sdružených do Booleových matic  $\mathbf{B}_I$  a  $\mathbf{B}_u$ . Množinu všech pořadových čísel  $p$  budeme značit  $\mathcal{B}$ . Tuto množinu můžeme dále rozdělit na množinu pořadových čísel náležících okrajovým podmínkám ve tvaru rovnic  $\mathcal{B}_u$  a množinu  $\mathcal{B}_I$  pořadových čísel náležící nerovnostem.

Metoda aktivní množiny navíc zavádí takzvanou aktivní množinu  $\mathcal{A}_{(g)}$ , která představuje množinu všech pořadových čísel  $p$  náležícím podmínkám, které jsou při daném zatížení, poškození a skutečných deformacích aktivní. To znamená, že množina  $\mathcal{A}_{(g)}$  v každém kroku střídavé minimalizace  $g$  obsahuje pořadová čísla všech podmínek ve formě rovnic a všech podmínek ve formě nerovnic, kterými je nutné úlohu omezit. Nerovnice, jejichž pořadová čísla náleží  $\mathcal{A}_{(g)}$ , jsou převedeny do tvaru rovnic. Následně je možné nalézt řešení úlohy jako řešení podproblému omezeného takto upravenými podmínkami.

Tím dojde i k úpravě rovnice (5.34).

$$\tilde{\mathbf{u}}_{(g)} = \arg \min_{(\mathbf{u} \in \hat{U})} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \mathbf{K}_\Omega \mathbf{u}(t_k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \mathbf{K}_I (\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \mathbf{u}(t_k) \right) \quad (5.36)$$

$$\hat{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^e; \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{c}} \Leftrightarrow \mathbf{b}^{(p)} \mathbf{u} = c^{(p)}, \forall p \in \mathcal{A}_{(g)}(\mathbf{u}(t_k)); \right. \quad (5.37)$$

$$\left. \mathbf{b}^{(p)} \mathbf{u} \geq c^{(p)}, \forall p \in \mathcal{B}_I \setminus \mathcal{A}_{(g)}(\mathbf{u}(t_k)) \right\},$$

zde matice  $\hat{\mathbf{B}}$  představuje Booleovu matici složenou ze všech vektorů  $\mathbf{b}^{(p)}$ , které přísluší aktivním podmínkám a  $c^{(p)}$  představuje předepsaný posun, nebo skok posunů, příslušící podmínce  $p$ .

Jak už bylo uvedeno výše, hlavním problémem této metody je určení aktivní množiny. Proto je

zavedena pomocná, takzvaná pracovní množina  $\mathcal{W}_{(f)}$ . Pracovní množina se mění v každém kroku metody a shrnuje všechna pořadová čísla podmínek, které jsou aktivní v aktuálním kroku  $f$ .

Pro každou množinu  $\mathcal{W}_{(f)}$  existuje nejvýše jedno řešení  $\hat{\mathbf{x}}_{(f)}$ , které minimalizuje funkci z rovnice (5.36) na prostoru omezeném podmínkami, jejichž pořadová čísla náležejí pracovní množině. Proto určíme-li bod v aktuální iteraci  $\mathbf{x}_{(f)}$  jako [9]:

$$\mathbf{x}_{(f)} = \mathbf{x}_{(f-1)} + \alpha_{(f)} \hat{\mathbf{q}}_{(f)}, \quad (5.38)$$

můžeme definovat směr kroku z jedné iterace do druhé následovně:

$$\hat{\mathbf{q}}_{(f)} = \hat{\mathbf{x}}_{(f)} - \mathbf{x}_{(f-1)}. \quad (5.39)$$

Zde  $\alpha_{(f)}$  představuje délku kroku, která omezuje vektor  $\hat{\mathbf{q}}_{(f)}$  aby nebyla porušena některá z podmínek, jejíž pořadové číslo není zavedeno v pracovní množině. Zároveň platí předpoklad, že směr kroku je takový, že nepřispívá k porušení ani jedné z podmínek zahrnutých v pracovní množině. Díky těmto omezením můžeme tvrdit, že pokud žádnou podmínku neporušuje počáteční bod  $\mathbf{x}_{(0)}$ , pak neporušuje žádnou podmínku ani následující bod iterace.

Směr kroku z jedné iterace do druhé můžeme najít jako řešení kvadratického podproblému, který lze odvodit dosazením do funkce v rovnici (5.36). Pro zjednodušení zde budeme součet  $\mathbf{K}_{\Omega} + \mathbf{K}_I(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)})$  značit pouze jako  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)})$ .

$$\begin{aligned} f(t, \hat{\mathbf{x}}_{(f)}) &= f(t, \mathbf{x}_{(f-1)} + \hat{\mathbf{q}}_{(f)}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}_{(f-1)} + \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \mathbf{u}_D(t) \right]^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \left[ \mathbf{x}_{(f-1)} + \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \mathbf{u}_D(t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right) \right]^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \left[ \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right) + \\ &\quad + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{(f)}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \hat{\mathbf{q}}_{(f)} = \\ &= f(t, \mathbf{x}_{(f-1)}) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{(f)}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \hat{\mathbf{q}}_{(f)} \end{aligned}$$

Protože řešení v předchozí iteraci metody je předem daná konstanta, je i  $f(t, \mathbf{x}_{(f-1)})$  konstantní. Díky tomu můžeme krok iterace najít jako řešení kvadratického podproblému:

$$\hat{\mathbf{q}}_{(f)} = \arg \min_{\mathbf{q} \in \mathcal{P}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \mathbf{q} + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \mathbf{q} \right) \quad (5.40)$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^e; \hat{\mathbf{B}}\mathbf{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{b}^{(p)}\mathbf{q} = 0, \forall p \in \mathcal{W}_{(f)} \right\}. \quad (5.41)$$

Podmínka uvedená v definici (5.41) vyplývá z předpokladu, že krok nepřispívá k porušení ani jedné z podmínek, jejichž pořadová čísla náležejí pracovní množině.

Takto zdefinovanou úlohu můžeme s výhodami řešit rozšíření funkce z rovnice (5.40) na Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \mathbf{q} + \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t) \right)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \mathbf{q} \right) - \boldsymbol{\lambda}^T \hat{\mathbf{B}}\mathbf{q}. \quad (5.42)$$

Lagrangeova funkce vzniká tak, že ke klasické kvadratické formě přičteme skalární součin Lagrangeových multiplikátorů  $\boldsymbol{\lambda}$  a omezující funkce. Omezující funkce  $g(\mathbf{y})$  vznikne z obecné soustavy omezujících rovnic  $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{c}$  tak, že jí převedeme do tvaru s nulovou pravou stranou. Pro takovou soustavu rovnic má omezující funkce následující tvar:

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{c}. \quad (5.43)$$

Každé omezující podmínce tedy náleží jeden Lagrangeův multiplikátor  $\lambda^{(p)}$ . Multiplikátory  $\lambda^{(p)}$  mají fyzikální význam sil, které musí být přidány do soustavy, aby bylo vynuceno splnění okrajových podmínek. Stav, kdy je směr kroku nulový, nastává ve chvíli, kdy iterace algoritmu dojde do bodu, který na dané pracovní množině optimalizuje funkci z rovnice (5.36).

V našem případě podmínky ve tvaru nerovnic mají význam vyloučení protlačení na rozhraní  $\Gamma_I$ . Vektor  $\boldsymbol{\lambda}$  tedy představuje síly na rozhraní, které vynucují nulový normálový skok posunů v místech aktivních podmínek.

Z fyzikální podstaty úlohy vyplývá, že pokud je nutné bránit protlačení, musí síly na rozhraní působit v tlaku. Z definice Lagrangeovy funkce (5.42) vyplývá, že síla působí v tlaku, pokud je kladná. Proto musí platit podmínka:

$$\lambda^{(p)} \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{A}_{(g)}(\mathbf{u}(t_k)) \quad (5.44)$$

O Lagrangeově funkci (5.42) platí, že má sedlobodový tvar a její optimum se nachází ve stejném bodě jako funkce v rovnici (5.36). Tato funkce je konvexní ve směru  $\mathbf{q}$  a konkávní ve směru  $\boldsymbol{\lambda}$ , proto lze její optimum nalézt jako minimalizaci funkce podle  $\mathbf{q}$  a maximalizaci podle  $\boldsymbol{\lambda}$  s přihlédnutím ke všem omezujícím podmínkám, které platí pro oba neznámé vektory. Zároveň platí, že v místě optima musí být gradient funkce roven nulovému vektoru.

$$\left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{q}} \right]_{(\hat{\mathbf{q}}_{(f)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{(f)})} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) \hat{\mathbf{q}}_{(f)} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) (\mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t)) - \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{(f)} = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

$$\left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]_{(\hat{\mathbf{q}}_{(f)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{(f)})} = -\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{q}}_{(f)} = \mathbf{0} \quad (5.46)$$

Směr kroku a jím příslušící hodnoty Lagrangeových multiplikátorů tedy lze najít pomocí monolitického přístupu jako řešení následující soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) & -\hat{\mathbf{B}}^T \\ -\hat{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{(f)} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{(f)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{(g-1)}) (\mathbf{x}_{(f-1)} + \mathbf{u}_D(t)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Pro takto vypočtený směr kroku je nyní nutné určit délku kroku  $\alpha_{(f)}$ . Délka kroku je hodnota na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , která určuje vzdálenost bodu, který ve směru  $\hat{\mathbf{q}}_{(f)}$  optimalizuje danou funkci a zároveň neporuší žádnou z podmínek, jejíž pořadové číslo není zahrnuto v  $\mathcal{W}_{(f)}$ .

Můžeme si představit, že z předem daného bodu vykročíme určitým směrem. Tento směr se pohybuje v prostoru, který definují podmínky náležící do pracovní množiny. Díky tomu neporuší žádnou z podmínek, jejíž pořadové číslo náleží  $\mathcal{W}_{(f)}$ , ale mohlo by se stát, že poruší některou z podmínek, která není přímo vynucena. Tím jsou myšleny podmínky neaktivní, tedy ty, které nebyly vynuceny ve formě rovností. Proto omezíme délku kroku v daném směru tak, aby nepřekročil žádnou z těchto neaktivních podmínek.

Délku kroku tedy zjistíme snadno z podmínek, pro které platí  $\mathbf{b}^{(p)} \hat{\mathbf{q}}_{(f)} < 0$ ,  $p \notin \mathcal{W}_{(f)}$ , to znamená z těch podmínek, které nebyly vynuceny a na nichž vektor  $\hat{\mathbf{q}}_{(f)}$  přispívá k zmenšení

rozevření hranice. Pokud žádná taková podmínka neexistuje, není potřeba krok omezovat a  $\alpha_{(f)} = 1$ , jinak pro tyto podmínky platí:

$$\mathbf{b}^{(p)} \mathbf{x}_{(f)} \geq c^{(p)} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{b}^{(p)} \left( \mathbf{x}_{(f-1)} + \alpha_{(f)}^{(p)} \widehat{\mathbf{q}}_{(f)} \right) \geq c^{(p)}, \quad (5.49)$$

z čehož lze vyjádřit  $\alpha_{(f)}$  [9].

$$\alpha_{(f)}^{(p)} \mathbf{b}^{(p)} \widehat{\mathbf{q}}_{(f)} \leq c^{(p)} - \mathbf{b}^{(p)} \mathbf{x}_{(f-1)} \quad (5.50)$$

$$\alpha_{(f)}^{(p)} \leq \frac{c^{(p)} - \mathbf{b}^{(p)} \mathbf{x}_{(f-1)}}{\mathbf{b}^{(p)} \widehat{\mathbf{q}}_{(f)}} \quad (5.51)$$

Tímto jsme získali pro každou z podmínek jinou hodnotu délky kroku. Abychom zajistili, že nedojde k porušení ani jedné z nich, vybereme z těchto hodnot tu nejnižší. Zároveň však jsme omezení tím, že  $\alpha_{(f)} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

$$\bar{\alpha}_{(f)} = \min \left[ 1, \min_{p \notin \mathcal{W}_{(f)}, \mathbf{b}^{(p)} \widehat{\mathbf{q}}_{(f)} \leq 0} \frac{c^{(p)} - \mathbf{b}^{(p)} \mathbf{x}_{(f-1)}}{\mathbf{b}^{(p)} \widehat{\mathbf{q}}_{(f)}} \right] \quad (5.52)$$

$$\alpha_{(f)} = \max [0, \bar{\alpha}_f] \quad (5.53)$$

V případě, že je  $\alpha_{(f)} \leq 1$ , existuje alespoň jedna podmínka  $p$ , která není součástí pracovní množiny, a přesto omezuje směr kroku, tedy je aktivní. Tyto podmínky budeme nazývat blokovacími podmínkami.

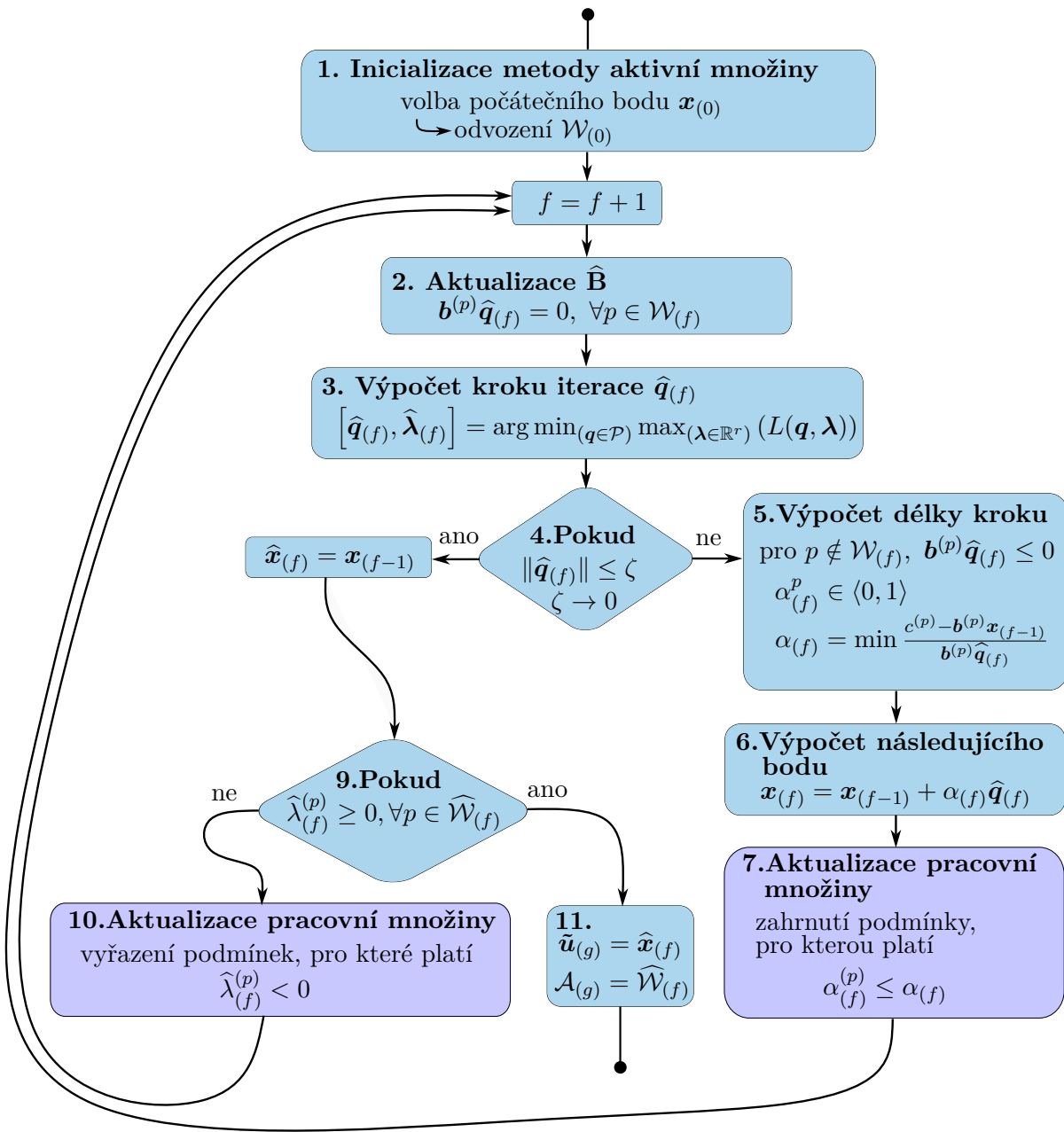
Na základě tohoto zjištění upravíme pracovní množinu tak, že do ní zahrneme pořadové číslo podmínky, pro niž platí, že  $\alpha_{(f)}^{(p)} \leq \alpha_{(f)}$ . Pro novou pracovní množinu výpočet provedeme znovu a tento postup opakujeme, dokud nenalezneme bod  $\widehat{\mathbf{x}}_{(f)}$ , který na aktuální pracovní množině  $\widehat{\mathcal{W}}_{(f)}$ , minimalizuje funkci z rovnice (5.34).

Zatím byla pořadová čísla do pracovní množiny pouze přidávána, proto je nutné ověřit, zda nevynucujeme podmínky, které se dříve v průběhu výpočtu jevíly jako aktivní, ale nyní aktivní nejsou. Jedná se o podmínky, jejichž síly na rozhraní jsou nyní v tahu.

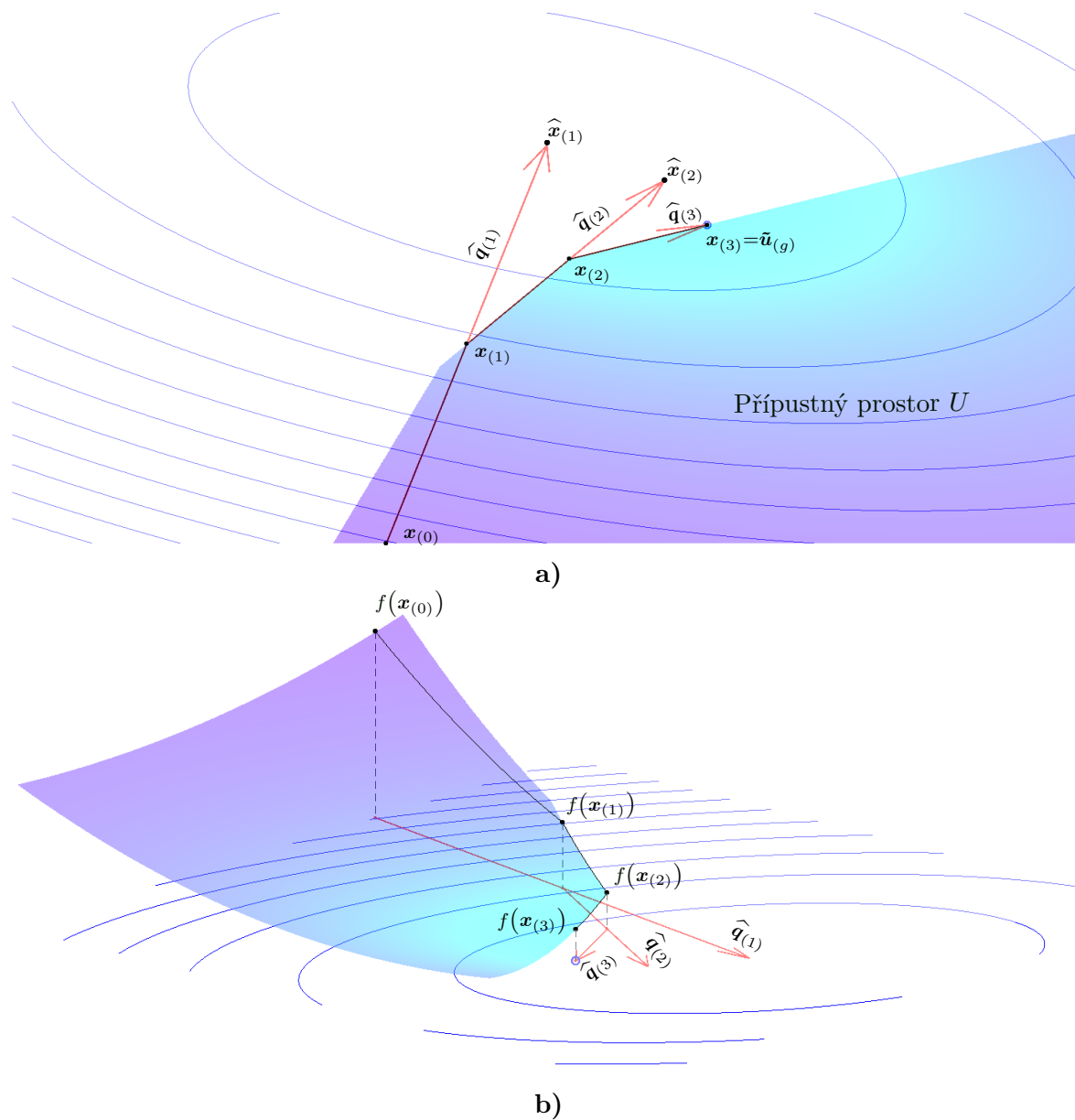
V tomto kroku je tedy pro všechny omezující podmínky ověřena platnost rovnice (5.44). Pokud je pro všechny síly splněna, je aktuální pracovní množina totožná s aktivní množinou a  $\widehat{\mathbf{u}}_{(g)} = \widehat{\mathbf{x}}_{(f)}$ .

Pokud ale existuje nejméně jedno pořadové číslo  $p$ , pro které  $\widehat{\lambda}_{(f)}^{(p)} < 0$ , pak je nutné všechna taková pořadová čísla nalézt a vyřadit je z pracovní množiny. Pro nově vzniklou pracovní množinu zopakujeme výpočet od začátku. Celý postup se opakuje, dokud nebudou všechny síly v místech podmínek na rozhraní kladné.

Schématický postup metody aktivní množiny je shrnut na obr. 5.7. Na obr. 5.8 je znázorněna konvergence metody aktivní množiny na jednoduché dvojrozměrné kvadratické úloze. Obrázek 5.8a zobrazuje jednotlivé kroky metody v půdorysném náhledu. Je zde zřetelné, že krok metody aktivní množiny postupuje směrem k minimu funkce, dokud nenarazí na hranici přípustného prostoru. Následně krok postupuje po hranici přípustného prostoru dokud na této hranici nenalezne bod s minimální funkční hodnotou. Na obr. 5.8b je viditelné, že metoda v každé iteraci nachází bod s nižší funkční hodnotou dokud nedokonverguje k hledanému minimu úlohy.



Obrázek 5.7: Diagram metody aktivní množiny



**Obrázek 5.8:** Příklad metody aktivní množiny vypočtený na jednoduché dvourozměrné úloze  
 a) Půdorys zobrazující nalezení minima jednoduché kvadratické funkce  $f(x)$  omezené třemi lineárními rovnicemi s pomocí metody aktivní množiny.  
 b) Pohled na též výpočet.

## 5.6 Výpočet poškození s konstantní aproximací

Jak už bylo zmíněno výše, pro poškození se v numerických výpočtech obvykle zavádí aproximace na konstantní průběh po prvku na rozhraní. Díky tomu dojde k zjednodušení výpočtu tuhosti prvku na rozhraní (5.30), což má za následek zjednodušení odvození derivací jednotlivých složek energie. Hodnoty poškození jednotlivých prvků navíc nejsou vzájemně závislé, proto lze odvodit, že výpočet jednotlivých složek vektoru poškození lze provést na každém prvku zvlášť. To nabízí pro větší množství prvků na rozhraní možnost paralelního výpočtu.

V následujících odstavcích se pokusíme odvodit explicitní vzorec pro výpočet minimalizace z rovnice (5.35).

Funkce součtu jednotlivých složek energie je ve směru  $\boldsymbol{\omega}$  konvexní. Proto můžeme její minimum hledat v bodě, pro který platí:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \left( \mathcal{E} \left( \tilde{\mathbf{u}}_{(g)}(t_k), \boldsymbol{\omega} \right) + \mathcal{D} \left( \boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(k-1)} \right) \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g)}} = \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

Derivace energie uložené v pružných deformacích na  $\boldsymbol{\Omega}$  podle  $\boldsymbol{\omega}$  je rovna nule, proto dále budeme pracovat pouze s  $\mathcal{E}_T$  a  $\mathcal{D}$ .

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \mathbf{K}_I(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}(t_k) + \bar{t} \mathbf{G}_c^T \left( \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{(k-1)} \right) \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g)}} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t_k) \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \mathbf{K}_I(\boldsymbol{\omega}) \right]_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{(g)}} \mathbf{u}(t_k) + \bar{t} \mathbf{G}_c = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

Protože jsou jednotlivé složky poškození na sobě navzájem nezávislé, je možné pokračovat v odvození na každém prvku zvlášť.

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T(t_k) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega_e} \mathbf{K}_{I,e}(\omega_e) \right]_{\tilde{\omega}_{e,(g)}} \mathbf{u}_e(t_k) + \bar{t} G_{c,e} \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\xi} d\xi = 0 \quad (5.57)$$

$$\frac{1}{2} \bar{t} \mathbf{u}_e^T \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \omega_e} k_e(\omega_e) \right]_{\tilde{\omega}_{e,(g)}} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_I^T(\xi) \left( \mathbf{n}^T \mathbf{n} + \beta^2 \mathbf{t}^T \mathbf{t} \right) \mathbf{N}_I(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi \right) \mathbf{u}_e + 2 \bar{t} G_{c,e} \frac{dx}{d\xi} = 0 \quad (5.58)$$

Nyní lze za hustotu energie  $G_{c,e}$  dosadit ze vztahu (4.14) odvozeného výše. Obdobně lze dosadit i za tuhost prvku na rozhraní podle rovnice (4.13). Potom lze derivaci z předchozí rovnice zapsat jako:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \omega_e} k_e(\omega_e) \right]_{\tilde{\omega}_{e,(g)}} = \left[ \frac{\partial}{\partial \omega_e} \left( \frac{\sigma_c}{\delta_c} \frac{1 - \omega_e}{\omega_e} \right) \right]_{\tilde{\omega}_{e,(g)}} = - \frac{\sigma_c}{\delta_c} \frac{1}{\tilde{\omega}_{e,(g)}^2}. \quad (5.59)$$

Z rovnice (5.58) je navíc zřejmé, že výpočet poškození není závislý na tloušťce elementu  $\bar{t}$  ani na jeho dalších rozměrech obsažených v  $\frac{dx}{d\xi}$ , protože  $\frac{dx}{d\xi}$  zde nezávisí na parametrické souřadnici  $\xi$ .

$$- \frac{1}{2} \frac{\sigma_c}{\delta_c} \frac{1}{\tilde{\omega}_{e,(g)}^2} \left( \int_{-1}^1 \underbrace{\mathbf{u}_e^T \mathbf{N}_I^T(\xi) \left( \mathbf{n}^T \mathbf{n} + \beta^2 \mathbf{t}^T \mathbf{t} \right) \mathbf{N}_I(\xi) \mathbf{u}_e}_{\delta^2(\xi)} d\xi \right) + 2 \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c = 0 \quad (5.60)$$

$$- \frac{1}{\tilde{\omega}_{e,(g)}^2} \left( \int_{-1}^1 \delta^2(\xi) d\xi \right) + 2 \delta_c^2 = 0 \quad (5.61)$$

$$\tilde{\omega}_{e,(g)}^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta^2(\xi) d\xi}{2 \delta_c^2} \quad (5.62)$$



Kvadrát efektivního skoku posunů na rozhraní  $\delta^2(\xi)$  byl představen již v kapitole kap. 5.2.2 a lze ho zde považovat za hodnotu, kterou je možné snadno vypočítat. Navíc lze dokázat, že čítec zlomku v rovnici (5.62) je za všech okolností větší nebo roven nule. Stejně tak i  $\delta_c$  musí ze své fyzikální podstaty být větší než 0. Proto můžeme výraz (5.62) odmocnit, čímž získáme bod minimalizující funkci uvedenou v rovnici (5.35). Jelikož je ale hodnota poškození omezena na interval  $\langle 0, 1 \rangle$  a zároveň nemůže být menší než hodnota poškození z předchozího zkonvergovaného řešení, je finální hodnota poškození určena jako

$$\tilde{\omega}_{e,(g)} = \sqrt{\frac{\int_{-1}^1 \delta^2(\xi) d\xi}{2\delta_c^2}} \wedge \tilde{\omega}_{e,(g)} \in \langle \tilde{\omega}_{e,(k-1)}, 1 \rangle. \quad (5.63)$$



## Kapitola 6

### Implementace konkrétních úloh

Následující kapitola obsahuje výsledky několika jednoduchých úloh a jejich vzájemné porovnání. Tyto úlohy se liší jak svou geometrií, tak i materiálovými vlastnostmi a parametry určujícími tahový separační zákon.

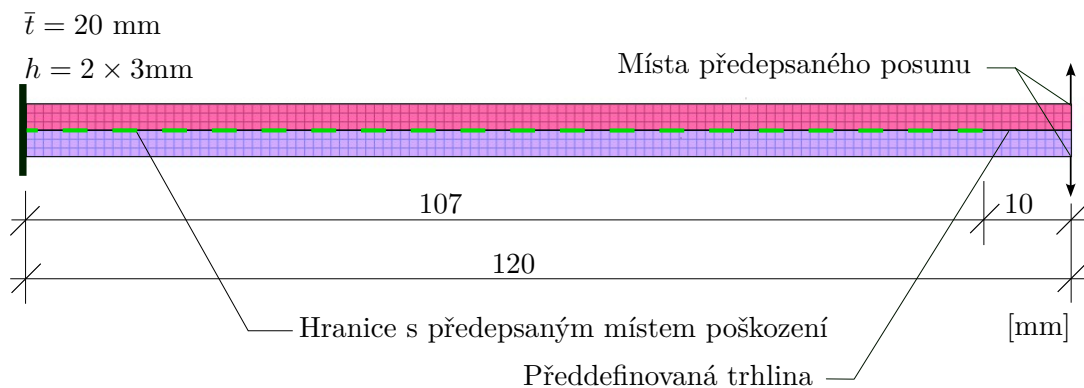
Vlastní implementace byla provedena v programu MATLAB® a je volně přístupná na adrese <https://gitlab.com/maresj/simulation-of-delamination.git>.

#### 6.1 Zadání úloh

##### Úloha č. 1: Jednoduchá konzola

První úloha je tvořena dvěma stejně dlouhými hliníkovými deskami o délce 120 mm, výšce 3 mm a hloubce ve směru třetího rozměru  $\bar{t} = 20$  mm. Tyto desky jsou slepeny vrstvou lepidla, jehož vlastnosti jsou specifikovány parametry tahového separačního zákona, které budou uvedeny níže. Model je idealizován tak, že mezivrstva má nulovou tloušťku. V mezivrstvě mezi deskami je předdefinovaná trhlina o délce 10 mm.

Takto slepené desky jsou ukotveny jako vetknutá konzola, která je na jejím protilehlém konci zatěžována dvěma opačnými předepsanými posuny, takže jsou desky od sebe postupně roztahovány. Takový způsob zatěžování zajistí, že se tahové síly přenáší přímo do mezivrstvy a vliv protlačení je zde minimální. To znamená, že v metodě aktivní množiny bude jen minimum aktivních podmínek. Schéma úlohy je znázorněno na obr. 6.1.



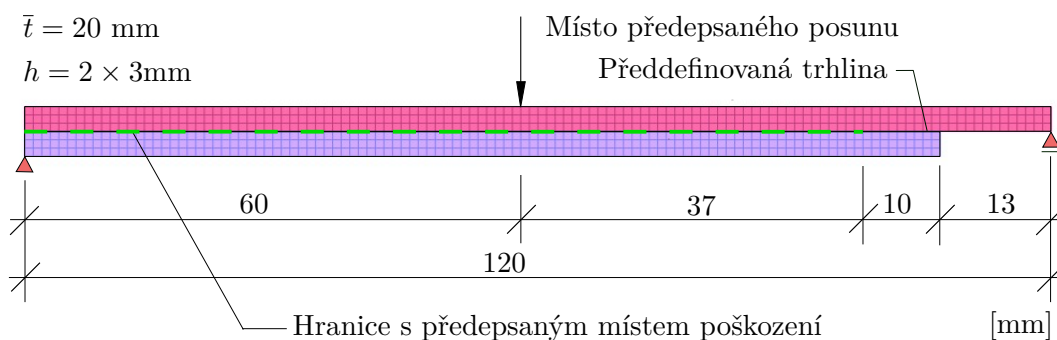
Obrázek 6.1: Geometrie úlohy č. 1

### Úloha č. 2: Prostý nosník

Druhé zadání je podobné předchozímu. Jedná se o dvě nestejně dlouhé hliníkové desky o rozměrech  $120 \times 3 \times 20$  mm a  $107 \times 3 \times 20$  mm, které jsou slepeny tak, že horní deska na jedné straně přesahuje přes spodní o 13 mm. V mezivrstvě tvořené lepidlem je opět předdefinována trhlinka o délce 10 mm

Tyto desky jsou podepřeny jako prostý nosník tak, že na jedné straně je podepřena pouze horní deska. Zatěžování je provedeno předepsaným svislým posunem uprostřed nosníku, tak jak je zobrazeno na obr. 6.2.

Úloha byla poprvé uvedena v [12] a je vytvořena tak, aby byly při výpočtu aktivní podmínky protlačení a aby jejich vliv na výsledky úlohy byl co nejvýraznější. To znamená, že v metodě aktivní množiny bude velké množství aktivních podmínek, které předepisují vzájemnou neprotlačitelnost podoblastí.



Obrázek 6.2: Geometrie úlohy č. 2

### Materiálové parametry

Materiálové parametry jsou voleny shodně pro obě úlohy. Parametry materiálu slepovaných desek jsou pro všechny úlohy totožné, liší se však vlastnosti mezivrstvy, které jsou definovány tahovým separačním zákonem. Tyto parametry byly voleny tak, že tvoří dvě sady hodnot příslušící zadání s křehkým respektive duktilním chováním.

Mezivrstva s duktilním chováním má vyšší hodnotu lomové energie a nižší kritické napětí. Proto každý prvek přenesení jen malé napětí a přenášené zatížení se rovnoměrněji rozloží po rozhraní. K poškozování rozhraní bude tedy docházet plynule. Oproti tomu u materiálu s křehkým chováním dojde k velkému nárůstu napětí a pak k náhlému porušení rozhraní.

Materiálové parametry				
název a značení		jednotky	materiál	
<b>parametry v objemu materiálu</b>				
Youngův modul pružnosti	$E$	GPa	75	
poissonovo číslo	$\nu$		0.3	
<b>parametry na rozhraní</b>			duktilní	křehký
Mezní kritické napětí	$\sigma_c$	MPa	5	130
Lomová energie	$G_c$	$\text{Jm}^{-2}$	250	80
Počáteční poškození	$\omega_0$		$10^{-3}$	$10^{-3}$
Parametr vlivu tečných deformací	$\beta$		1	1

Tabulka 6.1: Materiálové parametry

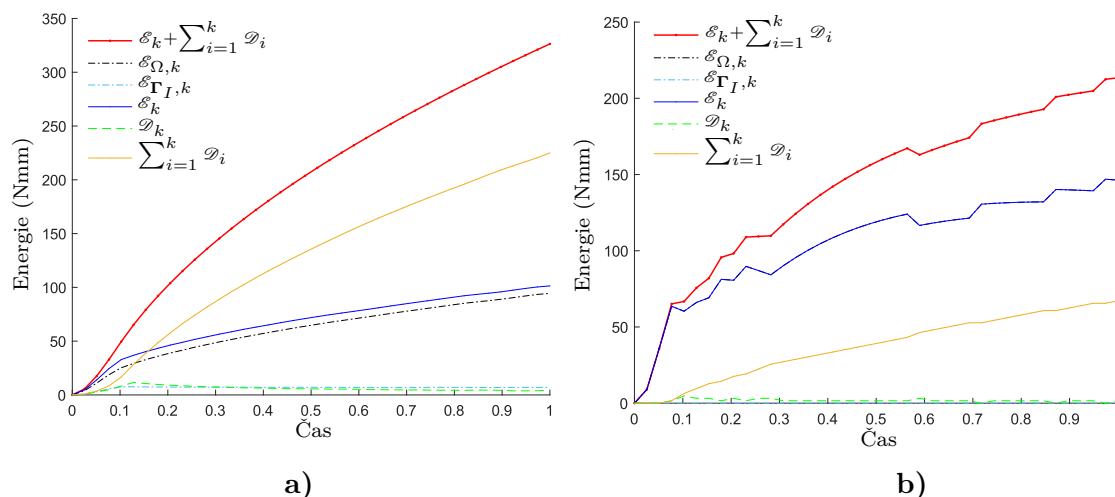
## 6.2 Výsledky

Zatěžování úloh bylo provedeno předepsaným posunem v místech naznačených na obr. 6.1 a 6.2 s počáteční hodnotou  $\mathbf{u}_D(t) = 0$  v čase  $t = 0$  a s koncovou hodnotou  $\mathbf{u}_D(t) = 1.5$  mm v čase  $t = T = 1$ . Kvůli tomu, že rozsah hodnot v oboustranném energetickém odhadu (5.3) je závislý na délce časového kroku, byla u úloh, kde dochází k větším energetickým změnám, výrazně zmenšena délka časového kroku. Tím bylo dosaženo zpřesnění zpětného trasování energie.

Numerické tolerance užití ve výpočtu byly  $\zeta = 10^{-6}$  pro změnu poškození v algoritmu střídavé minimalizace uvedeného v kap. 5.3 a  $\zeta = 10^{-9}$  pro délku kroku v metodě aktivní množiny popsané v kap. 5.5.

### 6.2.1 Výsledky úlohy č. 1

Jak je možné vidět z porovnání na obr. 6.3, v této úloze nevznikají náhlé skoky v hodnotě disipační energie, proto zde není patrný vliv zpětného trasování energie.



**Obrázek 6.3:** Porovnání energií úlohy č. 1.

Zobrazení vývoje jednotlivých složek energie při postupném zatěžování:

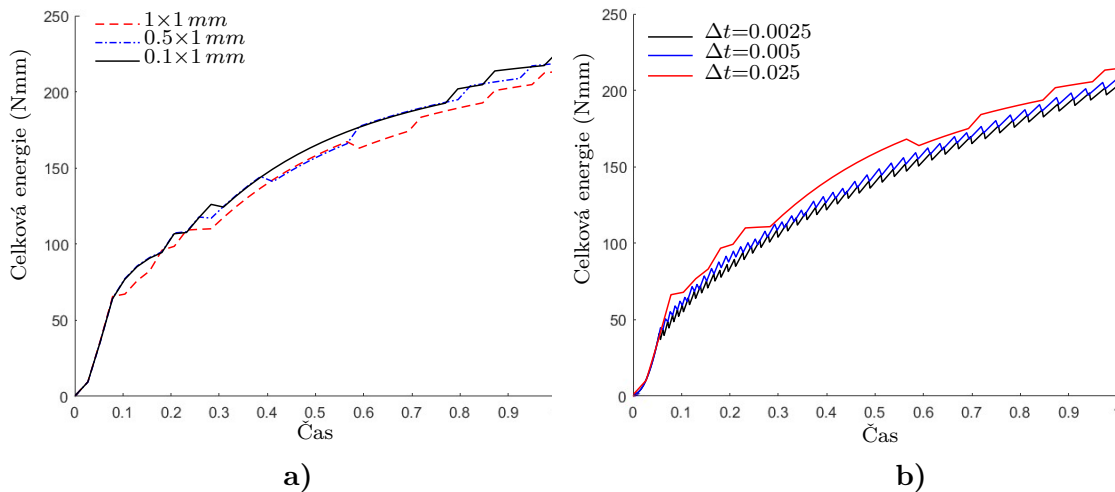
**a)** materiál s duktilním chováním, **b)** materiál s křehkým chováním.

Pro výpočet bylo užito čtvercové sítě konečných prvků s velikostí kroku  $h = 1$  mm a časové diskretizace s rovnoměrnou délkou kroku  $\Delta t = 0.025$ .

Můžeme si povšimnout, že u materiálu s křehkým chováním nemá křivka energie úplně hladký tvar. Tento jev vzniká kvůli diskretizaci úlohy (časové i prostorové) a je možné ho omezit zahuštěním konečné prvkové sítě nebo zkrácením časového kroku, viz porovnání výsledků pro různé diskretizace na obr. 6.4.

Na výsledné energie má vliv rozměr konečných prvků na rozhraní. Z toho důvodu je zde uvedeno porovnání výsledků s rozdílnými rozměry prvkové sítě. Z výpočetních důvodů bylo pro porovnání použito kromě prvků čtvercových o rozměru  $1 \times 1$  mm i prvků obdélníkových o rozměrech  $0.5 \times 1$  mm a  $0.1 \times 1$  mm. Tím bylo dosaženo zmenšení konečných prvků na rozhraní a zároveň omezení nárůstu počtu neznámých.

Na obr. 6.4a je možné vidět vliv velikosti konečných prvků na rozhraní na vývoj celkové energie soustavy. Z tohoto porovnání je zřejmé, že hustota sítě má vliv na výsledky úlohy, ale tento vliv není nijak významný. Přesto má zhušťování sítě za následek vyhlazování tvaru průběhu závislosti celkové energie na zatěžování, ačkoliv tento benefit je spojen s nárůstem výpočetní náročnosti úlohy.



**Obrázek 6.4:** Závislost výsledné celkové energie úlohy s křehkým chováním rozhraní na zjemňování výpočetní sítě a časové diskretizace.

- a) Závislost výsledků na horizontální velikosti konečných prvků na rozhraní při konstantní délce kroku  $\Delta t = 0.025$ .  
 b) Závislost výsledků na délce časového kroku na síti s délkou kroku  $1 \times 1$  mm

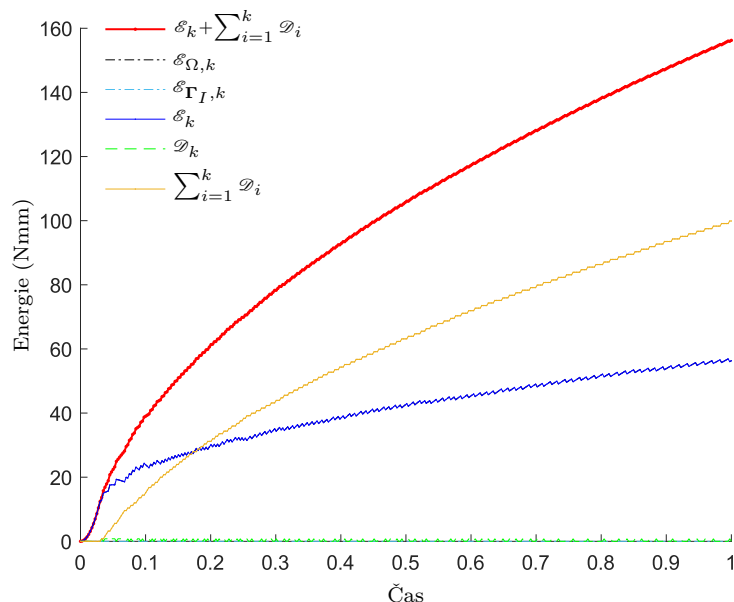
Obrázek 6.4b zobrazuje vliv zkracování časového kroku na výsledky úlohy. Toto zkracování má za následek zpřesňování vypočtených výsledků, díky kterému je zřetelný pilovitý tvar funkce celkové energie úlohy. Tento tvar je zapříčiněn křehkým chováním prvků na rozhraní, kvůli kterému vždy dojde k porušení celého konečného prvku najednou a ke kompletnímu uvolnění disipační energie.

Pokud tedy zahustíme výpočetní síť a zároveň zkrátíme časový krok, dojde ke zpřesnění výsledků a k vyhlazení průběhu funkce. Na obr. 6.5 jsou uvedeny přesnější výsledky pro úlohu s křehkým chováním. Tyto výsledky se již značně liší od výsledků uvedených v obr. 6.3b. Je zde výraznější vliv poškození a průběh jednotlivých složek energie se více podobá úloze s duktilním chováním materiálu. Podobnost mezi křehkým a duktilním chováním je specifickým znakem této konkrétní úlohy, ve které má rozhraní tendenci k plynulému porušování i pro zadání s křehkými vlastnostmi materiálu.

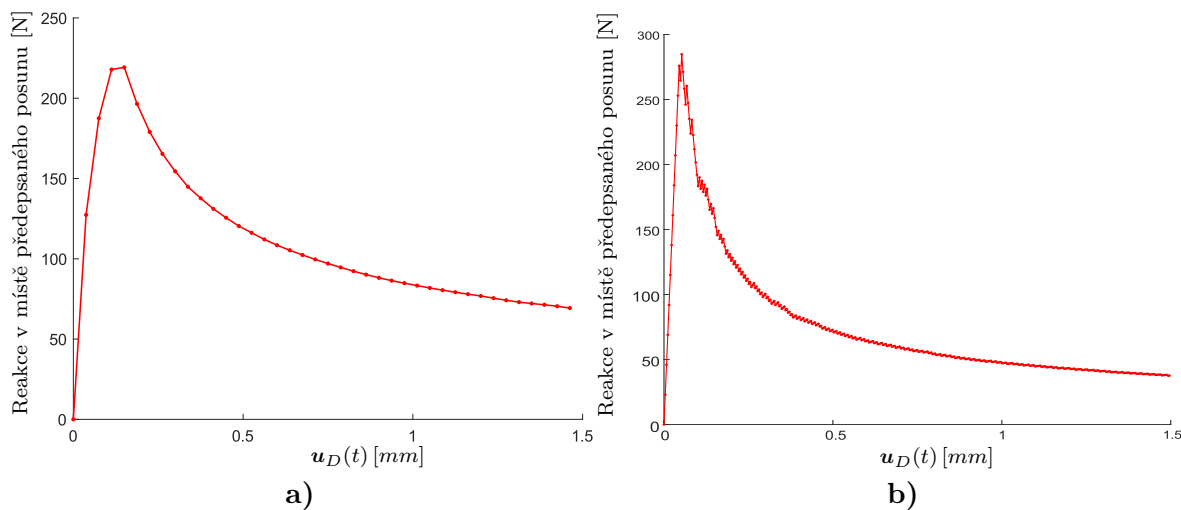
Dosud jsme se nezmínili, proč zatěžujeme úlohu pouze předepsanými posuny a nikoliv předepsanou silou. Důvodem je, že při porušování rozhraní se síly v místě předepsaného posunu mění v závislosti na změnách tuhosti celé soustavy. Nastává tedy stav, kdy pro jednu předepsanou sílu existují dva vynucované posuny. Navíc bychom snadno mohli dojít do bodu, kdy bychom sílu nemohli dále zvětšit, protože by ji konstrukce nebyla schopna přenést. Kvůli tomu by zatěžování předepsanou silou bylo značně nepraktické.

Na obr. 6.6 je uveden průběh reakce v místě předepsaného posunu v závislosti na hodnotě tohoto posunu. Jedná se tedy o sílu, kterou by bylo nutné zatěžovat konstrukci, aby v jejím působišti bylo dosaženo stejného posunu, jakým byla úloha zatěžována.

Na obr. 6.7 jsou uvedeny deformace a poškození ve vybraných časových krocích úlohy, jejíž energetické výsledky jsou uvedeny na obr. 6.5.



**Obrázek 6.5:** Zpřesněné řešení úlohy č. 1 s křehkým chováním  
Výpočet provedený s délkou kroku  $\Delta t = 0.0025$  a s užitím konečných prvků  $0.5 \times 1$  mm

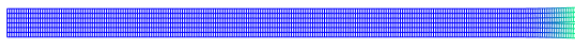


**Obrázek 6.6:** Reakce v místě předepsaného posunu úlohy č. 1  
v závislosti na hodnotě tohoto posunu:

- a) materiál s duktilním chováním (délka kroku  $\Delta t = 0.025$ , rozměry konečných prvků  $1 \times 1$  mm),  
b) materiál s křehkým chováním (délka kroku  $\Delta t = 0.0025$ , rozměry konečných prvků  $0.5 \times 1$  mm).

## Deformace úlohy

$$u_D(t)=0.045 \text{ mm}; t=0.03$$



$$u_D(t)=0.0525 \text{ mm}; t=0.035$$



$$u_D(t)=0.15 \text{ mm}; t=0.1$$



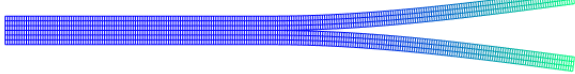
$$u_D(t)=0.375 \text{ mm}; t=0.25$$



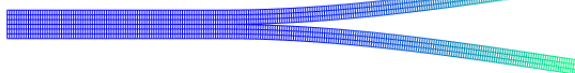
$$u_D(t)=0.75 \text{ mm}; t=0.5$$



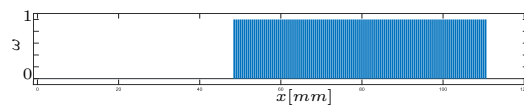
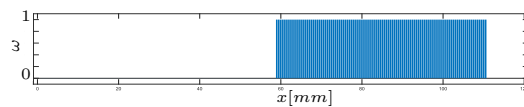
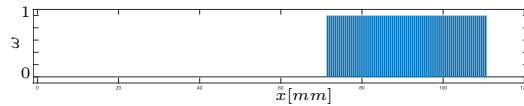
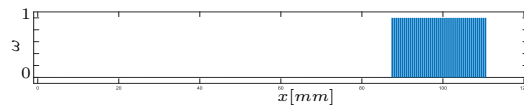
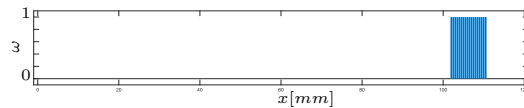
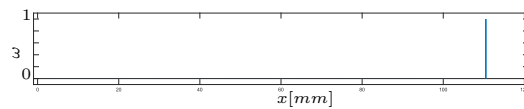
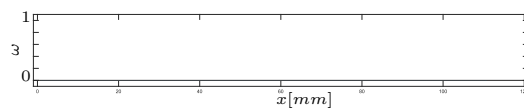
$$u_D(t)=1.125 \text{ mm}; t=0.75$$



$$u_D(t)=1.5 \text{ mm}; t=1$$



## Poškození



**Obrázek 6.7:** Deformace a rozložení poškození na rozhraní úlohy č. 1 s křehkým chováním

Vykreslené deformace jsou pětkrát zvětšeny oproti skutečným hodnotám.

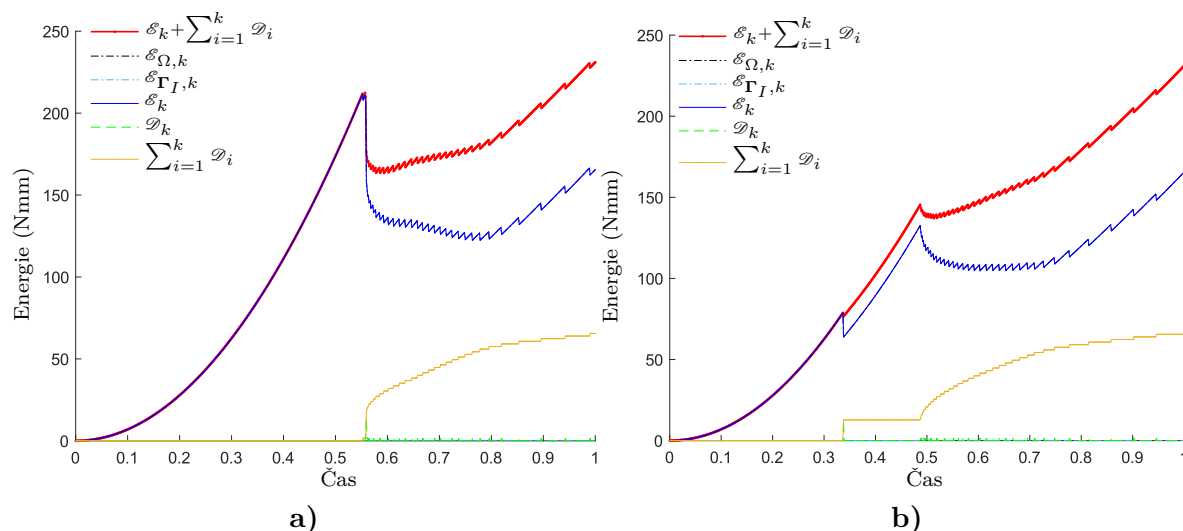
Barevné škálování zde značí porovnání délek vektorů uzlových posunů v rámci jednoho časového kroku.



### 6.2.2 Výsledky úlohy č. 2

Tato úloha se od předchozí liší především tím, že v ní pro materiálové parametry s křehkým chováním dochází k výrazným energetickým skokům. Pokud je tedy úloha počítána s dostatečně malou délkou kroku, dochází k porušení oboustranného energetického odhadu. Nastává tedy případ, kdy metoda nachází lokální minimum energetické funkce a je tedy nutné zavést zpětné trasování energie úlohy.

Aby bylo dosaženo dostatečné přesnosti oboustranného energetického odhadu, byla úloha vypočtena s rovnoměrnou délkou časového kroku  $\Delta t = 0.00125$ .



**Obrázek 6.8:** Provnání vývoje jednotlivých složek energie úlohy č. 2 s křehkým chováním, a) bez užití zpětného trasování energie, b) s užitím zpětného trasování energie.

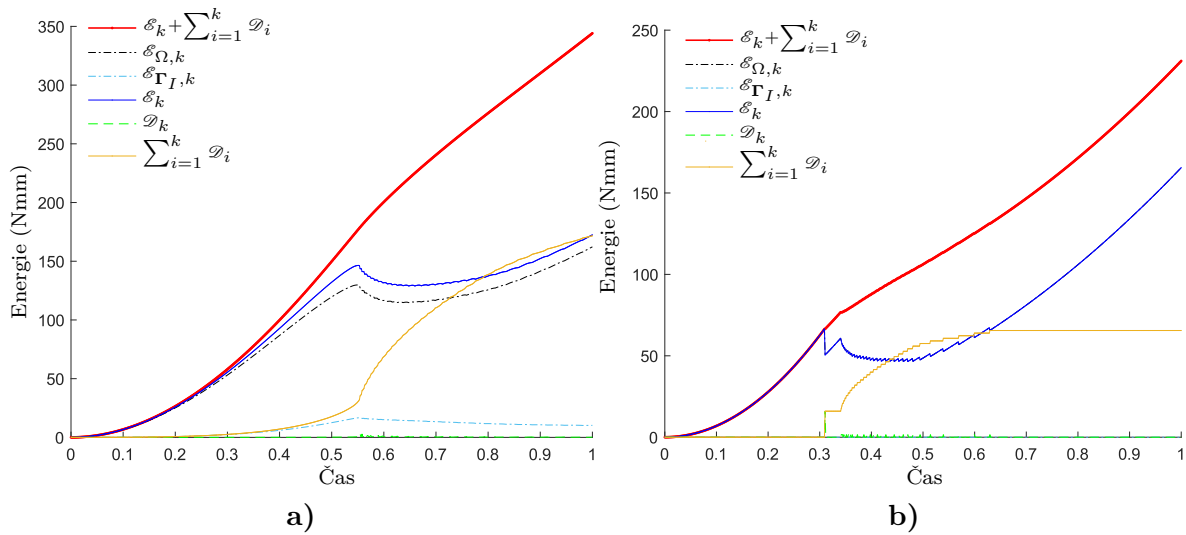
Pro výpočet bylo užito čtvercové sítě konečných prvků s velikostí kroku  $h = 1$  mm a časové diskretizace s rovnoměrnou délkou kroku  $\Delta t = 0.00125$ .

Na obr. 6.8a je zobrazeno řešení úlohy č. 2 s křehkým chováním materiálu. Je možné si povšimnout, že k rozvoji poškození zde dochází až v kroku  $t = 0.56$  a do té doby se úloha chová elasticky. Následně dochází k významnému poklesu energie spojenému s počátkem poškození rozhraní. Od té doby má křivka energie pilovitý tvar, který doprovází porušování jednotlivých konečných prvků.

Právě výrazný skok v kroku  $t = 0.56$  je průvodním jevem stavu, kdy výpočet konverguje k lokálnímu řešení úlohy a kdy bez kontroly oboustranného energetického odhadu a zavedení zpětného trasování energie není dosaženo skutečného řešení úlohy.

Na obr. 6.8b jsou uvedeny výsledky téhož výpočtu jako na obr. 6.8a s tím rozdílem, že bylo užito zpětného trasování energie. Zde je vidět, že skok celkové energie úlohy zde byl značně omezen, i když nevymizel zcela. To je způsobeno přesností oboustranného energetického odhadu, která je především závislá na délce časového kroku a strmosti kvadratické formy úlohy. Nabízí se tedy otázka, co by se stalo, kdyby zpětné trasování bylo prováděno dál bez ohledu na hodnotu oboustranného energetického odhadu.

Na obr. 6.9b je zobrazeno řešení úlohy s upravenou metodou zpětného trasování energie. Při výpočtu zde bylo postupováno tak, že nesplnění oboustranného energetického odhadu zapříčinilo spuštění zpětného trasování. To bylo bez ohledu na další ověřování energetického odhadu prováděno až do té doby, než celková energie v aktuálním časovém kroku  $k$  nabyla vyšší nebo rovné hodnoty než celková energie v kroku předchozím  $k - 1$ . Podmínkou pro zastavení zpětného trasování tedy bylo vymizení poklesu celkové energie úlohy mezi dvěma následujícími kroky.



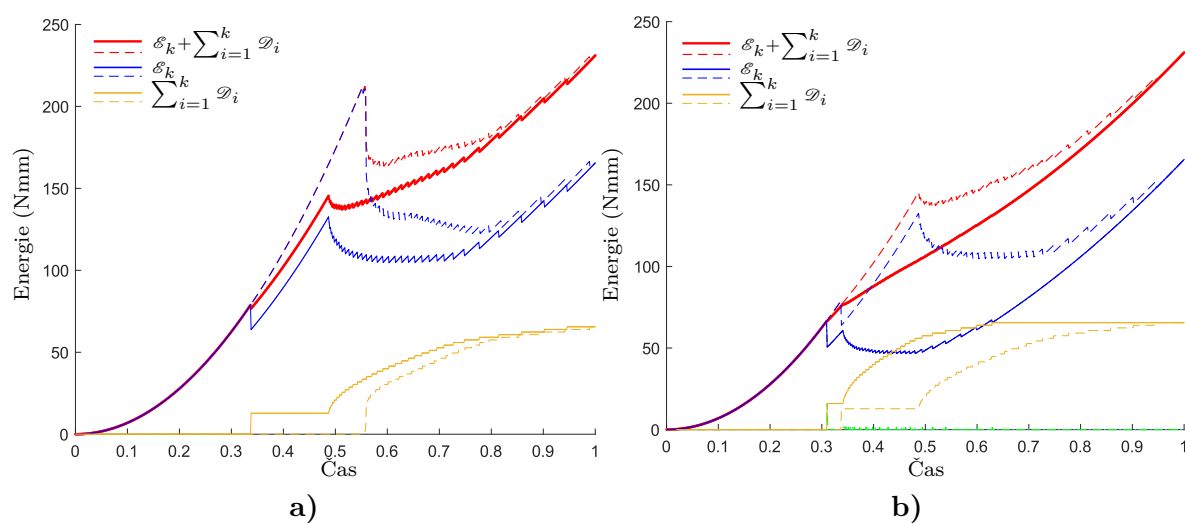
**Obrázek 6.9:** Provnání vývoje jednotlivých složek energie úlohy č. 2, pro  
a) materiál s duktilním chováním,

b) materiál s křehkým chováním vypočtená s vylepšenou metodou zpětného trasování.  
Pro výpočet bylo užito čtvercové sítě konečných prvků s velikostí kroku  $h = 1 \text{ mm}$  a časové diskretizace s rovnoměrnou délkou kroku  $\Delta t = 0.00125$ .

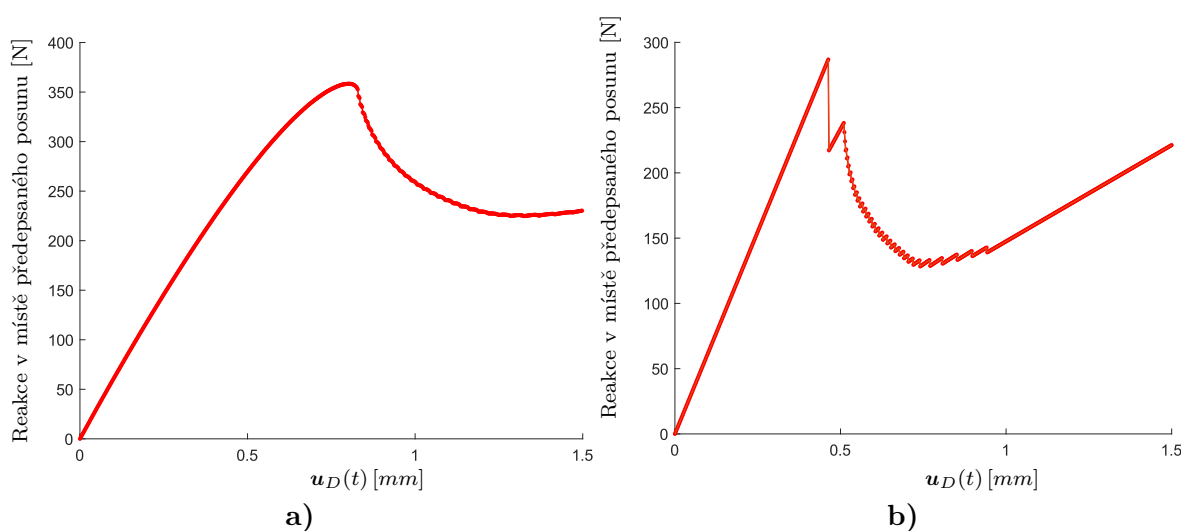
Takto zvolené kritérium není zcela správné, protože není jisté, jestli ve skutečném působení nemůže dojít k poklesu celkové energie úlohy. Jak se porušuje rozhraní mezi vrstvami, dochází i k poklesu celkové tuhosti soustavy. Kvůli tomu předepsaný posun  $u_D(t)$  vyvolává čím dál nižší silovou odezvu. Je tedy otázka jestli silová odezva nemůže klesnout tak, že by došlo i k poklesu celkové energie soustavy, i když předepsaný posun je čím dál větší. Námí zvolenou úpravu zpětného trasování je tedy možné užít pouze, pokud je úloha průběžně sledována a její výpočet kontrolován.

Pokud zajdeme se zpětným trasováním příliš daleko, může se stát, že výpočet sklouzne k lokálnímu řešení v místech, kde již bylo nalezeno řešení správné. Z obou vypočtených řešení je tedy nutné vybrat to nižší, navíc je tento stav znamením pro zastavení zpětného trasování. Proto dalším kritériem pro zastavení zpětného trasování je nalezení řešení, které pro daný časový krok navyšuje energii oproti dříve vypočtenému řešení.

Na obr. 6.10 je uvedeno porovnání vlivu užítí zpětného trasování a upraveného zpětného trasování na vypočtené výsledky. Následuje obr. 6.11 s porovnáním silových reakcí v místě předepsaného zatížení pro výsledky znázorněné na obr. 6.9. Nakonec jsou zde uvedeny vypočtené deformace a hodnoty poškození na rozhraní pro duktilní (obr. 6.12) a křehké (obr. 6.13) chování úlohy.



**Obrázek 6.10:** a) Porovnání řešení se zpětným trasováním energie podle [8] (plně) a bez zpětného trasování (čárkovaně).  
 b) Porovnání řešení s upraveným zpětným trasováním energie (plně) a se zpětným trasováním podle [8] (čárkovaně).



**Obrázek 6.11:** Průběh vnitřní síly v místě předepsaného posunu úlohy č. 2 v závislosti na hodnotě tohoto posunu, pro  
 a) materiál s duktilním chováním, b) materiál s křehkým chováním.

## Deformace úlohy

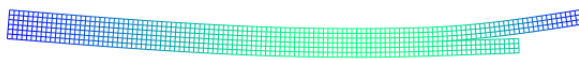
$$u_D(t)=0.15 \text{ mm}, t=0.1$$



$$u_D(t)=0.45 \text{ mm}, t=0.3$$



$$u_D(t)=0.75 \text{ mm}, t=0.5$$



$$u_D(t)=0.9 \text{ mm}, t=0.6$$



$$u_D(t)=1 \text{ mm}, t=0.667$$



$$u_D(t)=1.2 \text{ mm}, t=0.8$$



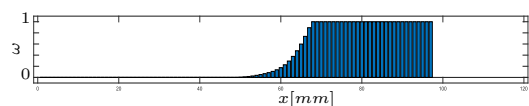
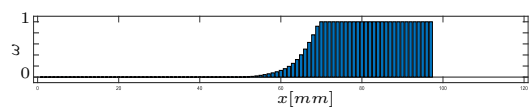
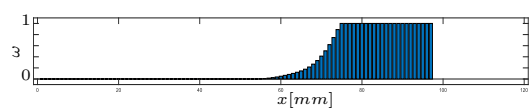
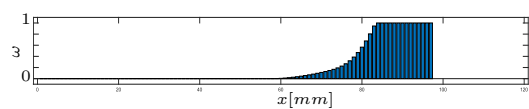
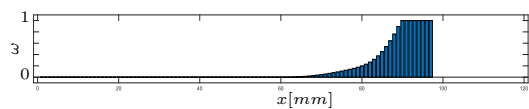
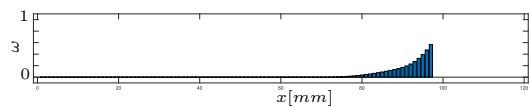
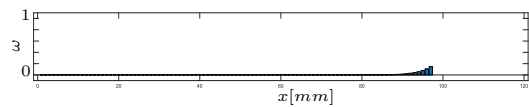
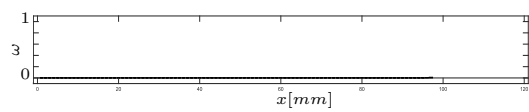
$$u_D(t)=1.4 \text{ mm}, t=0.933$$



$$u_D(t)=1.5 \text{ mm}, t=1$$



## Poškození



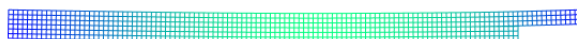
**Obrázek 6.12:** Deformace a rozložení poškození na rozhraní úlohy č.2 s duktilním chováním

Vykreslené deformace jsou pětikrát zvětšeny oproti skutečným hodnotám.

Barevné škálování zde značí porovnání délek vektorů uzlových posunů v rámci jednoho časového kroku.

## Deformace úlohy

$$u_D(t)=0.15 \text{ mm}, t=0.1$$



$$u_D(t)=0.45 \text{ mm}, t=0.3$$



$$u_D(t)=0.495 \text{ mm}, t=0.33$$



$$u_D(t)=0.6 \text{ mm}, t=0.4$$



$$u_D(t)=0.75 \text{ mm}, t=0.5$$



$$u_D(t)=0.9 \text{ mm}, t=0.6$$



$$u_D(t)=1.05 \text{ mm}, t=0.7$$



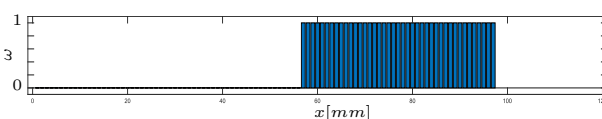
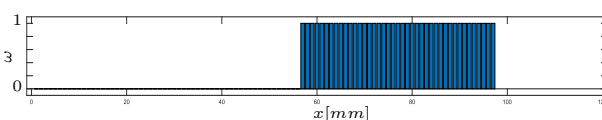
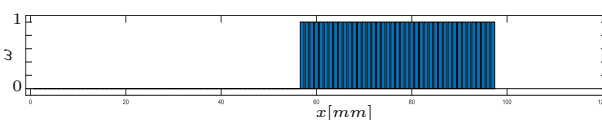
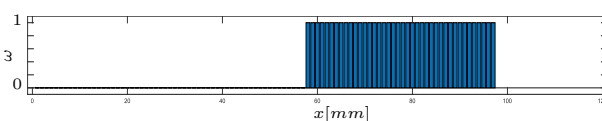
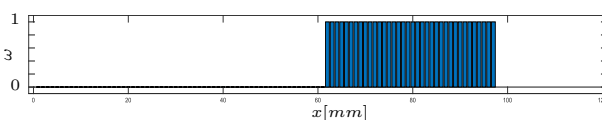
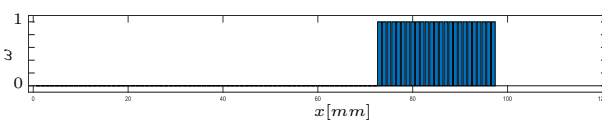
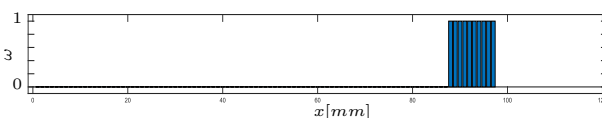
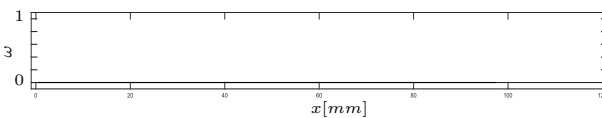
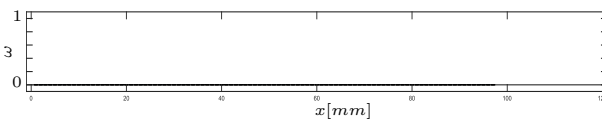
$$u_D(t)=1.2 \text{ mm}, t=0.8$$



$$u_D(t)=1.5 \text{ mm}, t=1$$



## Poškození



**Obrázek 6.13:** Deformace a rozložení poškození na rozhraní úlohy č.2 s křehkým chováním  
 Vykreslené deformace jsou pětkrát zvětšeny oproti skutečným hodnotám.  
 Barevné škálování zde značí porovnání délek vektorů uzlových posunů v rámci jednoho časového kroku.

### 6.3 Výpočetní náročnost algoritmu

Výpočetní náročnost počítačových algoritmů se obvykle měří jako čas, který daný výpočet na určitém zařízení zabere, nebo jako počet iterací nutných k nalezení řešení. Protože námi provedená implementace byla zhotovena v programu MATLAB®, nedává v našem případě měření výpočetního času příliš smysl. Důvodem je, že například programovací jazyk C++ je obvykle nesrovnatelně rychlejší než implementace v Matlabu.

V našem případě tedy budeme sledovat vliv vlastností materiálu na počty provedených iterací užitých algoritmů. Toto porovnání můžete nalézt v tabulce 6.2.

Je zde nápadné, že u úloh s duktilním chováním rozhraní provede algoritmus střídavé minimalizace průměrně výrazně více iterací ( $\emptyset g$ ), než u úloh křehkých. To je způsobeno tím, že algoritmus střídavé minimalizace spočívá v postupné aktualizaci poškození. Pokud se tedy poškození výrazně mění, vyžaduje tento výpočet větší množství iterací.

Také je možné si povšimnout že maximální počet iterací ( $\max g$  a  $\max f$ ) u křehkých úloh je velmi vysoký oproti průměrným hodnotám. To je způsobeno tím, že v jednom kroku dojde k významnému porušení materiálu, ale v ostatních nejsou takto významné změny poškození.

V posledním sloupečku tabulky je možné si povšimnout, že průměrné množství iterací metody aktivní množiny ( $\emptyset f$ ) potřebné k nalezení skutečného řešení je velmi malé. To je způsobeno tím, že počáteční bod metody je velmi blízký výslednému řešení. Metoda aktivní množiny je pro tento typ úloh efektivní a pokud je navíc dodán vhodný počáteční bod, metoda nachází řešení často již ve dvou iteracích.

Porovnání počtů iterací užitých metod									
úloha	materiál	časový krok	počet neznámých		počet kroků	$N_g$	$\max g$ / $\emptyset g$	$N_f$	$\max f$ / $\emptyset f$
			posunů	poškození					
1	duktilní	0.025	1925	110	40	2285	91/57.1	13750	36/6
1	křehký	0.025	1925	110	40	893	46/22.3	4773	33/5,3
1	křehký	0.0025	3845	220	400	5014	54/12.5	26967	58/5.4
2	duktilní	0.00125	1828	97	800	23154	269/28.9	45651	5/2
2	křehký	0.00125	1828	97	800	3105	387/3.9	7606	7/2.45
2	křehký*	0.00125	1828	97	3519	8349	92/2.4	18246	7/2.2
2	křehký**	0.00125	1828	97	15949	21749	70/1.4	51350	7/2.4

**Tabulka 6.2:** Porovnání výpočetní náročnosti užitých algoritmů.

$N_g$ -Součet počtu iterací algoritmu střídavé minimalizace ve všech časových krocích.

$N_f$ -Součet počtu iterací metody aktivní množiny ve všech krocích algoritmu střídavé minimalizace.

$\max g/\emptyset g$ -maximální/průměrné množství iterací metody střídavé minimalizace.

$\max f/\emptyset f$ -maximální/ průměrné množství iterací metody aktivní množiny.

\* s vlivem klasického zpětného trasování

\*\* s vlivem upraveného zpětného trasování

# Kapitola 7

## Závěr

V rámci práce byl uveden postup simulace delaminačních problémů založený na variačním modelu poškození pro úlohy s předem definovanou linií porušení na rozhraní oblastí.

V úvodu práce byly zdefinovány pojmy poškození a laminární kompozity. Představili jsme formulaci delaminačních procesů založenou na bilanci jednotlivých složek energie (kap. 4) a následně jsme tuto formulaci převedli do diskrétního tvaru s využitím pseudočasové diskretizace a metody konečných prvků (kap. 5). Pro takto zdefinovaný model byl uveden algoritmus střídavé minimalizace (kap. 5.3), založený na postupné minimalizaci celkové energie, kdy je střídavě jeden z neznámých vektorů (posunů  $\mathbf{u}$  a poškození  $\omega$ ) uvažován jako neměnný s hodnotou z předchozí aktualizace, zatímco druhý je aktualizován. Algoritmus střídavé minimalizace může konvergovat k lokálnímu řešení úlohy. Tento nedostatek byl řešen heuristickým zpětným trasováním energie (kap. 5.4).

Pro algoritmus střídavé minimalizace byly podrobně ukázány námi zvolené způsoby řešení jednotlivých kroků algoritmu. Pro získání vektoru posunů, který minimalizuje funkci energie, byla užitá metoda aktivní množiny (kap. 5.5), která je vhodná pro řešení kvadratických optimalizačních problémů, které jsou omezeny podmínkami ve formě rovnic a nerovnic. Těmito omezeními jsou v našem případě předepsané posuny a podmínky neprotlačitelnosti, které brání překrytí jednotlivých podoblastí.

Pro vektor poškození minimalizující energii úlohy byl odvozen explicitní vzorec založený na konkrétním tahovém separačním zákonu (kap. 5.6). V závěru práce byly uvedené metody implementované v programu MATLAB<sup>®</sup> testovány na dvou úlohách.

Z vypočtených výsledků vyplývá, že pro duktilní materiály, u nichž nedochází k náhlým energetickým skokům, probíhá výpočet spolehlivě. Úloha konverguje do stavu s minimální hodnotou energie při nepříliš malé délce kroku bez nutnosti zmenšení konečných prvků na rozhraní. Při těchto úlohách není nutné užít zpětného trasování energie a výpočetní náročnost těchto úloh není nijak významná.

Oproti tomu u úloh výrazně křehkých má algoritmus tendenci konvergovat k lokálnímu minimu energie. Dochází zde k výrazným energetickým skokům a projevuje se zde vliv hustoty sítě konečných prvků. Výsledky je možné opravit zahuštěním sítě a zkrácením časového kroku. Tím dojde ke zpřesnění výpočtu, ale není zaručeno, že řešení nebude konvergovat k lokálnímu minimu úlohy.

Další možností je zavedení zpětného trasování energie. Algoritmus zpětného trasování energie je založen na oboustranném energetickém odhadu, který je bohužel značně citlivý na délku kroku. Pro užití této metody je nutné značně snížit délku časového kroku, i přesto se může stát, že energetické skoky úlohy budou pouze omezeny a ne zcela eliminovány a algoritmus tedy

nalezne další, i když přesnější, lokální minimum. Tento postup lze vylepšit, pokud se oboustranný energetický odhad použije pouze jako jakési spouštěcí kritérium pro zpětné trasování. Pokud tedy oboustranný energetický odhad nebude splněn, bude zpětné trasování prováděno až do chvíle, kdy celková energie úlohy v aktuálním časovém kroku nebude stejná nebo vyšší než v kroku předchozím, nebo dokud nově nalezené řešení pro daný časový krok nenavýšuje hodnotu celkové energie oproti dříve vypočtenému řešení.

Tímto způsobem je možné průběh funkce prakticky vyhladit a eliminovat všechny náhlé energetické skoky. Bohužel takový postup vyžaduje průběžnou kontrolu, protože není zaručeno, že ve skutečném působení nemá dojít k poklesu energie. To je způsobeno tím, že zatěžujeme předepsaným posunem. Vlivem poškození proto může dojít k poklesu tuhosti materiálu, a tedy i k poklesu přenášených sil.

Při testování úloh vyšlo najevo, že jak zahušťování výpočetní sítě, tak zavedení zpětného trasování úlohy značně zvyšuje čas výpočtu. Při zahušťování výpočetní sítě se zvyšuje počet neznámých a to jak posunů tak i poškození. Tím se zvyšuje čas výpočtu jednotlivých soustav lineárních rovnic a nároky na výpočetní paměť. Zároveň se může zvýšit i počet iterací algoritmu střídavé minimalizace. Při zpětném trasování navíc dochází k opakovanému výpočtu některých časových kroků. Tím se může mnohonásobně zvýšit množství spuštění algoritmu střídavé minimalizace. V tomto případě množství provedených operací značně závisí na vlastnostech úlohy, protože záleží, kolikrát nebyl splněn oboustranný energetický odhad.

V kap. 6.2.2 bylo uvedeno, že energetický odhad úlohy závisí na strmosti kvadratické formy. Úlohy, které zde byly testovány, mají bez výjimky velmi strmý průběh kvadratické formy. To znamená, že při malé změně ve vektoru posunů se významně zvýší hladina energie.

V porovnání s uvedenými výsledky by se mohlo zdát, že zpřesnění výsledků funkce energie je vzhledem ke strmosti funkce mizivé, tedy že dosažené zpřesnění ve vektoru posunů a poškození bude vzhledem k výpočetní náročnosti oprav zanedbatelné. To však není pravda, protože dva naprosto odlišné vektory posunů mohou vyvolat velmi podobnou energetickou odezvu. Navíc je i z uvedených průběhů energie zřejmé, že každé zlepšení posouvá počátek porušování. Zanedbání těchto skutečností by tedy mohlo mít fatální důsledky pro chování modelované úlohy.





## Literatura

- [1] BOURDIN, B., FRANCFORT, G. A. A MARIGO, J.-J. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 4 (2000), 797–826.
- [2] BROŽOVSKÝ, J. A KONEČNÝ, P. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice, pomůcka pro stavební inženýry*. Technická vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita, 2012.
- [3] ELICES, M., GUINEA, G., GOMEZ, J. A PLANAS, J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering fracture mechanics* 69, 2 (2002), 137–163.
- [4] HASLINGER, J., JEDELSKÝ, D., KOZUBEK, T. A TVRDÍK, J. Genetic and random search methods in optimal shape design problems. *Journal of Global Optimization* 16 (2000), 109–131.
- [5] JIRÁSEK, M. A ZEMAN, J. *Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození*. České vysoké učení technické, 2012.
- [6] KOČVARA, M., MIELKE, A. A ROUBÍČEK, T. A rate-independent approach to the delamination problem. *Mathematics and mechanics of solids* 11, 4 (2006), 423–447.
- [7] MIEHE, C., HOFACKER, M. A WELSCHINGER, F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 45-48 (2010), 2765–2778.
- [8] MIELKE, A., ROUBÍČEK, T. A ZEMAN, J. Complete damage in elastic and viscoelastic media and its energetics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 21-22 (2010), 1242–1253.
- [9] NOCEDAL, JORGE A WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*, vol. 651 of *Springer Series in Operations Research*. Springer, 2006.
- [10] STAAB, G. *Laminar composites*. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [11] SUKUMAR, N., MOËS, N., MORAN, B. A BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering* 48, 11 (2000), 1549–1570.

- [12] VALOROSO, N. A CHAMPANEY, L. A damage-mechanics-based approach for modelling decohesion in adhesively bonded assemblies. *Engineering Fracture Mechanics* 73, 18 (2006), 2774–2801.
- [13] ZEMAN, J. A GRUBER, P. Numerical approach to a rate-independent model of decohesion in laminated composites. *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics* (2010), 239–250.

## Příloha A

### Seznam použitých znaků

#### Množiny, oblasti, prostory

Symbol Význam

---

$\mathbb{N}$  množina přirozených čísel

$\mathbb{R}$  množina reálných čísel

$\Omega$  oblast úlohy

$\bar{\Omega}$  uzávěr oblasti  $\Omega$

$\Omega^{(i)}, \Omega^{(j)}$  podoblasti úlohy

$\Gamma$  hranice oblasti  $\bar{\Omega}$

$\Gamma_u$  část hranice oblasti s předepsanými posuny

$\Gamma_f$  část hranice oblasti s předepsaným zatížením

$\Gamma_I^{(i,j)}$  hranice mezi podoblastmi  $\Omega^{(i)}$  a  $\Omega^{(j)}$

$\Gamma^{(i)}$  hranice podoblasti  $\Omega^{(i)}$

$\mathcal{U}$  prostor přípustných deformací

$U$  diskrétní prostor přípustných deformací

$\hat{U}$  prostor přípustných deformací vymezený aktivními podmínkami

$\mathcal{Z}$  prostor přípustných poškození

$Z$  diskrétní prostor přípustných poškození

$\mathcal{B}$  množina všech pořadových čísel  $p$  omezujících podmínek

$\mathcal{B}_u$  množina všech pořadových čísel  $p$  náležících nerovnicím

$\mathcal{B}_I$  množina všech pořadových čísel  $p$  náležících rovnicím

$\mathcal{A}_{(g)}$  množina všech aktivních podmínek v kroku  $g$

$\mathcal{W}_{(f)}$  pracovní množina

$\mathcal{P}$  přípustný prostor vektoru kroku v metodě aktivní množiny

## Funkce

Symbol	význam
$\mathbf{u}_D(t)$	funkce předepsaných posunů
$\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$	časově závislé pole posunů na podoblasti $\Omega^{(i)}$
$\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t)$	časově závislá funkce skoku posunů na hranici $\Gamma_I^{(i,j)}$
$\delta(\hat{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{x}, t))$	efektivní skok posunů na rozhraní
$\omega_{(t)}^{(i,j)}(\mathbf{x})$	pole poškození rozhraní v čase $t$ na hranici $\Gamma_I^{(i,j)}$
$k\left(\omega_{(t)}^{(i,j)}\right)$	tuhost na rozhraní závislá na poškození rozhraní
$\varepsilon\left(\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)\right)$	funkce poměrného přetvoření závislá na časovém průběhu pole posunů
$f(\xi, \eta), f(\xi)$	libovolná funkce závislá na parametrických souřadnicích
$L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})$	Lagrangeova funkce
$\mathcal{D}$	disipační energie
$d$	hustota disipační energie
$\mathcal{E}$	energie uložená v pružných přetvořeních
$\mathcal{E}_\Omega$	energie uložená v pružných přetvořeních oblasti $\Omega$
$\mathcal{E}_\Gamma$	energie uložená v pružných přetvořeních rozhraní $\Gamma_I$
$e$	hustota energie uložená v pružném přetvoření rozhraní mezi podoblastmi
$N_l$	bázová funkce příslušící bodu $l$

## Indexy

Symbol	Význam
$d$	index označující dimenzi
$i, j$	pořadové číslo oblasti
$t$	parametr času
$k$	pořadové číslo časového kroku
$g$	pořadové číslo iterace algoritmu střídavé minimalizace
$f$	pořadové číslo iterace metody aktivní množiny
$l$	pořadové číslo bodu v bodové síti
$p$	pořadové číslo omezující podmínky
$e$	pořadové číslo konečného prvku
$n, m, o, s$	libovolné číslo náležící řadě přirozených čísel

## Matice, tenzory a vektory

## Symbol Význam

$\mathbf{C}^{(i)}$	tenzor materiálové tuhosti konstantní na podoblasti $\Omega^{(i)}$
$\mathbf{C}$	matice materiálových vlastností
$\mathbf{A}$	matice převodu vektoru posunů na vektor přetvoření
$\mathbf{B}_u$	Booleova matice předepsaných posunů
$\mathbf{B}_I$	Booleova matice předepsaných podmínek impenetrability
$\hat{\mathbf{B}}$	Booleova matice všech aktivních podmínek
$\mathbf{J}$	Jakobián
$\mathbf{K}_\Omega$	matice tuhosti na oblasti $\Omega$
$\mathbf{K}_I$	matice tuhosti na rozhraní $\Gamma_I$
$\mathbf{G}_c$	vektor lomových energií všech prvků na rozhraní přenásobených délkami jednotlivých prvků
$\mathbf{x}$	vektor topologických souřadnic $x$ a $y$
$\epsilon$	vektor poměrných přetvoření
$\mathbf{u}$	vektor posunutí
$\mathbf{u}_e$	vektor uzlových posunů jednoho konečného prvku $e$
$\tilde{\mathbf{u}}_{(g)}$	vektor posunů vypočtený v iteraci $g$ metody střídavé minimalizace
$\bar{\mathbf{u}}_{(k)}$	skutečný vektor posunutí v časovém kroku $k$
$\mathbf{x}_{(f)}$	vektor posunutí v iteraci $f$ metody aktivní množiny
$\hat{\mathbf{q}}_{(f)}$	krok z iterace $f - 1$ do $f$ metody aktivní množiny
$\mathbf{q}$	neznámý vektor kroku v metodě aktivní množiny
$\alpha_{(f)}$	délka kroku $\hat{\mathbf{q}}_{(f)}$
$\omega$	vektor poškození
$\tilde{\omega}_{(g)}$	vektor poškození vypočtený v iteraci $g$ metody střídavé minimalizace
$\omega_{in}$	hodnota poškození použitá pro inicializaci algoritmu střídavé minimalizace při užití metody zpětného trasování.
$\bar{\omega}_{(k)}$	skutečný vektor poškození v časovém kroku $k$
$\lambda$	vektor Lagrangeových multiplikátorů
$\mathbf{n}$	vektor normály
$\mathbf{t}$	vektor tečny
$\mathbf{b}$	řádkový vektor předepsaných podmínek
$\mathbf{c}$	vektor předepsaných posunů
$\hat{\mathbf{c}}$	vektor všech aktivních předepsaných posunů

## Skaláry

## Symbol Význam

---

$V$	objem materiálu
$\bar{V}$	efektivní objem materiálu
$A$	průřezová plocha
$\bar{A}$	efektivní průřezová plocha
$\sigma$	nominální napětí
$\bar{\sigma}$	efektivní napětí
$\omega$	parametr poškození
$T$	maximální hodnota časového intervalu zatěžování
$h$	délka kroku metody konečných prvků (velikost konečného prvku)
$\bar{t}$	tloušťka konečného prvku
$\beta$	kombinační součinitel tečné složky skoku posunů
$\delta_c$	mezní efektivní rozevření rozhraní
$\sigma_c$	mezní napětí na rozhraní před začátkem porušování
$G_c$	lomová energie
$G_{c,e}$	lomová energie jednoho konečného prvku
$E$	Youngův modul pružnosti
$\nu$	Poissonova konstanta
$x, y$	topologické souřadnice
$x_o, y_o$	souřadnice těžiště konečného prvku
$\xi, \eta$	parametrické souřadnice
$\xi_l, \eta_l$	parametrické souřadnice v bodě $l$
$\zeta$	numerická tolerance