

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta stavební**

K132 – Katedra mechaniky



**Dynamická analýza existující lávky pro chodce**

The dynamic analysis of the existing footbridge

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Bc. Matěj Šach**

Praha 2024

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby

Akademický rok: 2023/2024

Vedoucí práce: prof. Ing. Michal Polák, CSc.

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Šach	Jméno: Matěj	Osobní číslo: 483978
Zadávací katedra: K132 - katedra mechaniky		
Studijní program: SI - stavební inženýrství		
Studijní obor/specializace: K - konstrukce a dopravní stavby		

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Dynamická analýza existující lávky pro chodce.	
Název diplomové práce anglicky: The Dynamic Analysis of the Existing Footbridge.	
Pokyny pro vypracování: Diplomová práce bude zaměřena na teoretickou dynamickou analýzu existující lávky pro chodce. Součástí práce bude sestavení teoretického 3D modelu předmětné lávky, jeho validace na základě výsledků dynamického experimentu provedeného v dubnu 2023 a analýza vlivu změn parametrů nosné konstrukce lávky (např. změn teploty nosné konstrukce, tuhosti železobetonové mostovky, poddajnosti založení pilířů) na její dynamické chování.	
Seznam doporučené literatury: ČSN 736209 Zatěžovací zkoušky mostních objektů. ČSN EN 1991-2 Eurokód 1: Zatížení konstrukcí - Část 2: Zatížení mostů dopravou. ČSN EN 1990 Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí. Pirner, M. - Fischer, O.: Dynamika ve stavební praxi. Sétra, Footbridges. Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading. Technical guide. Paris: Ministry of Transport and Infrastructure, Technical Department of Transport, Roads and Bridges Engineering and Road Safety, 2006.	
Jméno vedoucího diplomové práce: prof. Ing. Michal Polák, CSc.	
Datum zadání diplomové práce: 4.10.2023	Termín odevzdání DP v IS KOS: 8.1.2024
Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku	
Podpis vedoucího práce	Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.	
4.10.2023	
Datum převzetí zadání	Podpis studenta(ky)

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou prací na téma „Dynamická analýza existující lávky pro chodce“ vypracoval samostatně, pod odborným vedením prof. Ing. Michala Poláka, CSc. a veškeré použité zdroje, ze kterých jsem čerpal informace, jsem uvedl v seznamu použité literatury a citoval v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Praze dne .....

Bc. Matěj Šach

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych poděkoval prof. Ing. Michalu Polákovi, CSc. za odborné vedení, trpělivost, čas a rady, které mi při zpracování práce poskytl. Dále bych rád poděkoval Ing. Tomáši Plachému, Ph.D. za odbornou pomoc při experimentu a Ing. Jiřímu Jachanovi ze společnosti Valbek, s. r. o. za poskytnutí podkladů. Tímto také děkuji mé přítelkyni a rodině za podporu při psaní této práce.

## **ABSTRAKT**

Předmětem této práce je experimentální a teoretická analýza dynamického chování existující lávky pro chodce a následná analýza změny tohoto chování. V rešeršní části je shrnuta problematika experimentální dynamické analýzy lávek pro chodce a jsou zde popsány konstrukce, na kterých byla pozorována změna dynamického chování a její možné příčiny. Druhá část práce je zaměřena na analýzu dynamického chování lávky pro chodce v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi. Na lávce byla provedena experimentální modální analýza, ze které byly vyhodnoceny vlastní frekvence a vlastní tvary. Výsledky tohoto experimentu byly porovnány s výsledky starších experimentů, které byly na lávce uspořádány. Dále byl sestaven teoretický 3D model lávky, na kterém byly vypočteny vlastní frekvence a vlastní tvary. Následně byla provedena verifikace a identifikace modelu lávky a na identifikovaném modelu byla provedena simulace faktorů, které mohly být příčinou sledované změny dynamického chování.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Dynamika, dynamické analýza, experiment, lávka pro chodce, vibrace, dynamická zkouška informativní, experimentální modální analýza, vlastní frekvence, vlastní tvary, 3D model, verifikace, identifikace, analýza změny dynamického chování

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is the experimental and theoretical analysis of the dynamic behavior of an existing footbridge and the subsequent analysis of the change in this behavior. In the research part, the issue of experimental dynamic analysis of footbridges is summarized and the structures on which a change in dynamic behavior was observed and its potential causes are described. The second part of the work is focused on the analysis of the dynamic behavior of the footbridge in the ŠKODA Auto a.s. complex in Mladá Boleslav. An experimental modal analysis was carried out on the footbridge, from which the natural frequencies and natural shapes were evaluated. The results of this experiment were compared with the results of older experiments that were performed on the footbridge. Furthermore, a theoretical 3D model of the footbridge was compiled, on which the natural frequencies and natural shapes were calculated. Subsequently, verification and identification of the footbridge model was done and on the identified model a simulation of factors that could be the cause of the observed changes in dynamic behavior was realized.

## **KEYWORDS**

Dynamics, dynamic analysis, experiment, footbridge, vibration, experimental modal analysis, natural frequencies, natural shapes, 3D model, verification, identification, analysis of changes in dynamic behavior

# OBSAH

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>CÍLE PRÁCE</b> .....	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>ZÁKLADNÍ ÚLOHY DYNAMIKY</b> .....	<b>3</b>
3.1	VLASTNÍ NETLUMENÉ KMITÁNÍ .....	4
3.2	VYNUCENÉ TLUMENÉ KMITÁNÍ.....	5
<b>4</b>	<b>PROBLEMATIKA LÁVEK PRO CHODCE</b> .....	<b>6</b>
4.1	EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA LÁVEK PRO PĚŠÍ .....	6
4.1.1	Základní pojmy používané při experimentální analýze.....	6
4.1.2	Dynamické zkoušky .....	9
4.1.3	Dynamické účinky chodců na lávky pro chodce .....	11
4.1.4	Souhrn požadavků pro kmitání lávek dle norem a předpisů .....	13
4.1.5	Porovnání charakteristik vlastního kmitání z výpočtu a z experimentu.....	17
<b>5</b>	<b>ZMĚNA ZÁKLADNÍCH DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCE</b> ....	<b>19</b>
5.1	ZMĚNA DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCÍ V ČASE .....	19
5.2	ZMĚNA DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ VLIVEM TEPLoty .....	22
5.3	VYUŽITÍ EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZY KE ZJIŠTĚNÍ POŠKOZENÍ KONSTRUKCE.....	25
<b>6</b>	<b>ANALÝZA ZMĚNY DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ LÁVKY PRO CHODCE V AREÁLU ŠKODA AUTO MLADÁ BOLESLAV</b> .....	<b>28</b>
6.1	POPIS OBJEKTU .....	28
6.2	EXPERIMENT NA LÁVCE Z ROKU 2023 .....	34
6.2.1	Měřicí linka .....	34
6.2.2	Experimentální modální analýza .....	36
6.3	POROVNÁNÍ CHARAKTERISTIK VLASTNÍHO KMITÁNÍ S OSTATÍMI EXPERIMENTY .....	50
6.3.1	Porovnání experimentů z roků 2023 a 2022 .....	51
6.3.2	Porovnání experimentů z roků 2023 a 2002 .....	55

6.4	TEORETICKÁ ANALÝZA ZMĚNY DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ LÁVKY V AREÁLU ŠKODA – MLADÁ BOLESLAV .....	62
6.4.1	Tvorba výpočetního modelu konstrukce .....	62
6.4.2	Verifikace výpočetního 3D modelu konstrukce .....	70
6.4.3	Jednotlivé kroky identifikace výpočetního 3D modelu konstrukce .....	72
6.4.4	Porovnání s ostatními výpočetními modely simulujícími dynamické chování konstrukce lávky .....	78
6.4.5	Detailnější analýza výsledků dynamické zkoušky .....	80
6.4.6	Identifikace výpočetního 3D modelu pomocí zahrnutí tuhosti zábradlí.....	83
6.4.7	Vypočtené vlastní tvary kmitání konstrukce .....	88
6.5	MODELOVÁNÍ ZMĚNY VLASTNÍCH FREKVENCÍ.....	100
6.5.1	Změna vlastních frekvencí vlivem změny teploty.....	100
6.5.2	Změna vlastních frekvencí vlivem trhlin v betonu mostovky .....	106
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>111</b>
<b>8</b>	<b>SEZNAM LITERATURY .....</b>	<b>114</b>
<b>9</b>	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>119</b>
<b>10</b>	<b>SEZNAM TABULEK .....</b>	<b>126</b>



# 1 ÚVOD

V současné době se při návrhu nových lávek pro chodce silně dbá na jejich architektonické řešení. Nové konstrukce jsou častokrát navrhovány tak, aby byly co nejsubtilnější a jejich vzhled byl co nejelegantnější. Tato skutečnost s sebou ovšem nese rizika, jako je například vznik rezonance u lávek pro chodce. K tomu dochází, když některá z vlastních frekvencí lávky leží v intervalu frekvencí, kterými působí chodci na mostovku při jejich pohybu po lávce. Na zamezení vzniku rezonance by měl být brán ohled už při návrhu lávky, přesto není vždy možné toto riziko zcela vyloučit. Při rezonanci může docházet k výraznému kmitání konstrukce lávky, což nepříznivě ovlivňuje pohodu chodců.

Vlastní frekvence konstrukce se mohou v průběhu její životnosti měnit. Změna vlastních frekvencí byla zaznamenána u více konstrukcí, u kterých probíhalo opakované měření, a častokrát se nejednalo o změnu zanedbatelnou, protože mohla poukazovat na poškození konstrukce. U lávek pro chodce se kromě toho může změnit jejich dynamické chování a může dojít k rezonanci, která se dříve neprojevovala. U mostních konstrukcí, na kterých probíhal dlouhodobý monitoring, se navíc zjistilo, že taková změna někdy souvisí i s měnící se teplotou okolního prostředí. Změna vlastních frekvencí je vhodným ukazatelem stavu konstrukce, protože měření vlastních frekvencí je nedestruktivní a poměrně levné. Identifikování různých vlivů, které mohou mít na změnu základních dynamických charakteristik vliv, je ale často komplikované a spletené.

První část této práce obsahuje shrnutí problematiky dynamické analýzy lávek pro chodce a jejich experimentálního zkoumání. Součástí první části je souhrn norem, předpisů a doporučení týkajících se této problematiky. V závěru první části jsou popsány faktory, které mohou mít na změnu vlastních frekvencí vliv, a příklady konstrukcí, na kterých byl takový jev zaznamenán.

Druhá část je věnována dynamické analýze existující lávky pro chodce v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi. Na začátku je uveden popis experimentu z roku 2023, který byl na lávce uspořádán a který byl zaměřen na experimentální modální analýzu. V další části jsou shrnuty výsledky tohoto experimentu a jejich porovnání s výsledky starších experimentů, které byly na lávce realizovány. Součástí dynamické analýzy bylo sestavení výpočetního 3D modelu konstrukce a jeho verifikace a identifikace na základě výsledků experimentů. Na tomto modelu byly dále simulovány faktory, které mohly vést ke změně dynamických vlastností zaznamenaných při vyhodnocení jednotlivých experimentů.

## 2 CÍLE PRÁCE

Předmětem této práce bylo provedení experimentální a teoretické analýzy dynamického chování lávky pro chodce. Součástí práce je porovnání výsledků realizované experimentální analýzy se staršími výsledky a simulování jejich zaznamenané změny na vytvořeném teoretickém modelu. Dílčí cíle lze rozdělit do následujících bodů:

- příprava experimentu a realizace experimentu,
- vyhodnocení charakteristik vlastního kmitání lávky,
- porovnání naměřených charakteristik vlastního kmitání se staršími experimenty,
- sestavení teoretického 3D modelu konstrukce,
- verifikace teoretického 3D modelu konstrukce na základě výsledků experimentu,
- identifikace teoretického 3D modelu konstrukce na základě výsledku experimentu,
- simulace změny dynamického chování lávky zaznamenané při porovnání výsledků experimentu s výsledky starších měření.

### 3 ZÁKLADNÍ ÚLOHY DYNAMIKY

Stejně jako statika stavebních konstrukcí, tak i dynamika popisuje zatížení a jím vyvolanou odezvu určité konstrukce. Na rozdíl od statiky je ale dynamické zatížení v čase proměnné, a tedy i odezva konstrukce na toto zatížení je časově závislá. V dynamice se uvažují nejen pružné (vnitřní) a vnější síly, které najdeme i ve staticce, ale jsou zde zahrnuty i setrvačné a tlumící síly. Obecně dynamická odezva konstrukce závisí na jejích vlastnostech ovlivňujících její dynamické chování, kterými jsou tuhost, hmotnost a útlum.

Vztahy, které jsou využívány k řešení dynamického chování konstrukcí, vychází ze tří Newtonových pohybových zákonů. Z druhého Newtonova pohybového zákona je odvozen D'Alambertův princip popisující pohyb hmotného bodu, který zní: „Vnější síly působící na soustavu hmotných bodů a jejich setrvačné síly jsou v každém okamžiku v rovnováze.“ D'Alambertův princip lze popsat následující rovnicí:

$$\sum_i \mathbf{F}_i - \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{F}_i$  je vnější síla,  $m_i$  hmotnost tělesa a  $\mathbf{a}_i$  zrychlení [1, 2].

Na úlohy dynamiky lze pohlížet z několika hledisek. Rozdělujeme úlohy s jednou nebo více neznámými (stupni volnosti), posuvné a otáčivé kmitání jednoho stupně volnosti a kmitání tlumené a netlumené. Dále rozdělujeme kmitání vynucené a vlastní. Vynucené kmitání je takové, při kterém je soustava zatěžována časově proměnnou budící silou. Jestliže byla soustava zatížena změnou počátečních podmínek a dále na ní žádná budící síla nepůsobí, jedná se o kmitání volné, jehož zvláštním případem je kmitání vlastní [2]. V následujících kapitolách bude popsáno pouze posuvné kmitání soustav s více stupni volnosti.

Základní charakteristiky konstrukce ovlivňující její dynamické chování jsou veličiny tuhost, hmotnost a útlum. Hledanou neznámou je vektor posunutí. Spojitou hmotu nejprve diskretizujeme na jednotlivé hmotné body, které mají určitý počet stupňů volnosti. Řešená soustava rovnic bude mít tolik neznámých, kolik je uvažovaných diskretizovaných stupňů volnosti (posunutí) soustavy. Vektor neznámých bude dále v práci nazýván vektorem posunutí a bude značen  $\mathbf{u}$ .

Tuhost soustavy popisuje matice tuhosti, která bude v práci značená  $\mathbf{K}$ . Tato matice má rozměry  $n \times n$ , kde  $n$  je počet uvažovaných stupňů volnosti. Matice tuhosti je symetrická a pozitivně definitní. Rozdělení hmotnosti soustavy popisuje matice hmotnosti, dále bude značena  $\mathbf{M}$ , která má stejné rozměry jako matice tuhosti  $\mathbf{K}$ . Matice hmotnosti nemusí být vždy diagonální, ale často se s ní jako s diagonální pracuje [3]. Útlum popisuje matice útlumu dále značená  $\mathbf{C}$ . Matice útlumu obecně není diagonální [2]. Matici útlumu je obtížné získat. Většinou

je využíván tzv. Rayleighův útlum, který definuje matici útlumu jako lineární kombinaci matice tuhosti a matice hmotnosti [3].

### 3.1 VLASTNÍ NETLUMENÉ KMITÁNÍ

Vlastní netlumené kmitání je kmitání soustavy, které bylo vyvoláno nenulovými počátečními podmínkami a při kterém není soustava dále zatěžována žádnou časově závislou vnější silou (budící silou). V případě velmi malého útlumu, který najdeme právě u stavebních konstrukcí, lze vliv útlumu zanedbat, protože charakteristiky vlastního kmitání nebudou malým útlumem téměř vůbec ovlivněny [3]. Vlastní netlumené kmitání popisuje vztah [2]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Výraz (2) je soustava pohybových rovnic, kterým vyhovuje řešení ve tvaru:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}(A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (3)$$

Po dosazení řešení (3) do soustavy pohybových rovnic (2) dostáváme vztah:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_n(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Soustava rovnic (4), která popisuje vlastní kmitání, je splněna, pokud platí:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Vztah (5) má triviální řešení, které je ale z hlediska dynamiky nezajímavé. Toto řešení by odpovídalo rovnovážnému stavu soustavy a jednalo by se o statiku. Hledáme tedy netriviální řešení výrazu (5). V něm vystupují dvě neznámé:  $\omega_n$  a  $\boldsymbol{\phi}_n$ .  $\omega_n$  jsou vlastní kruhové frekvence a  $\boldsymbol{\phi}_n$  jim příslušné vlastní tvary kmitání. Je zřejmé, že soustava bude mít tolik vlastních kruhových frekvencí a vlastních tvarů kmitání, jako je počet jejích stupňů volnosti. Mohou nastat i výjimky, kdy bude vlastních kruhových frekvencí méně než stupňů volnosti, jako u soustav s vícenásobnými vlastními frekvencemi. Vlastní kruhové frekvence a jim příslušné vlastní tvary jsou charakteristikami konstrukce, které jsou závislé na její tuhosti a hmotnosti. Tuhost konstrukce je ovlivňována její geometrií a použitými materiály.

Netriviální řešení bude mít rovnice (5) právě tehdy, když matice  $(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})$  bude singulární. Jedná se tedy o problém vlastních čísel, který popisuje rovnice:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (6)$$

Vztah (6) by se dal řešit rozvedením determinantu. Při tomto postupu bychom získali algebraickou rovnici  $n$ -tého stupně (charakteristický polynom), z které by se daly určit vlastní frekvence  $\omega_n$  (vlastní čísla). Ale soustava rovnic s větším počtem neznámých by byla tímto způsobem reálně neřešitelná, a proto jsou používány jiné metody, jako jsou například Jacobiho metoda, metoda inverzních iterací nebo metoda iterace podprostoru. Tyto metody se používají

k hledání vlastních kruhových frekvencí  $\omega_n$  i vlastních tvarů  $\phi_n$  [3]. Vlastní tvary jsou vlastními vektory úlohy (5), které jsou příslušné k jednotlivým vlastním číslům  $\omega_n$ . Získané vlastní tvary následně normujeme, většinou vzhledem k matici hmotnosti pomocí vztahu [2]:

$$\frac{\phi_n}{\sqrt{\phi_n^T M \phi_n}} \quad (7)$$

Dva vlastní tvary odpovídající dvěma různým vlastním frekvencím splňují podmínku ortogonalitu popsanou rovnicí [2]:

$$\phi_n^T M \phi_m = 0. \quad (8)$$

### 3.2 VYNUCENÉ TLUMENÉ KMITÁNÍ

Vynucené kmitání je kmitání soustavy, která je zatěžována časově závislou vnější silou. V případě, že do pohybových rovnic je zahrnuta i matice útlumu, pohybové rovnice tohoto typu kmitání jsou ve tvaru:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (9)$$

kde a  $\mathbf{f}(t)$  je vektor vnějších budících sil. Předpokládáme-li, že soustavu zatěžíme soustavou harmonických budících sil ve tvaru  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_s \sin \omega t + \mathbf{f}_c \cos \omega t$ , potom vyhovuje rovnici (9) řešení pro vektor posunutí  $\mathbf{u}$  ve tvaru [2, 3]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_s \sin \omega t + \mathbf{u}_c \cos \omega t. \quad (10)$$

Po dosazení řešení zpět do soustavy pohybových rovnic získáváme soustavu  $2n$  algebraických rovnic:

$$\begin{pmatrix} (K - \omega^2 M)\mathbf{u}_s - \omega C\mathbf{u}_c = \mathbf{f}_s \\ \omega C\mathbf{u}_s + (K - \omega^2 M)\mathbf{u}_c = \mathbf{f}_c \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Po vyřešení těchto rovnic získáme neznámé  $\mathbf{u}_{s,i}$  a  $\mathbf{u}_{c,i}$  z nichž můžeme dopočítat celkovou amplitudu:

$$u_{iA} = \sqrt{u_{s,i}^2 + u_{c,i}^2}. \quad (12)$$

Výpočet odezvy soustavy na vnější časově závislou sílu  $\mathbf{f}(t)$  lze také spočítat pomocí metody rozkladu do vlastních tvarů. Idea tohoto řešení je, že se celková odezva soustavy počítá jako kombinace odezvy jednotlivých vlastních tvarů na dynamické zatížení. Pro tuto metodu je nejprve potřebné znát vlastní frekvence a vlastní tvary soustavy. Musíme tedy nejprve řešit problém vlastního kmitání [2, 4].

Blíží-li se frekvence harmonické budící síly některé z vlastních frekvencí, může nastat rezonance mezi těmito frekvencemi. Při rezonanci mohou dosahovat amplitudy kmitání v módu

vlastního tvaru příslušného k vlastní frekvenci, která je blízká frekvenci působící budící síly, velmi vysokých hodnot.

## 4 PROBLEMATIKA LÁVEK PRO CHODCE

Lávky pro chodce jsou ve většině případů lehké a poddajné konstrukce. Nižší hmotnost je dána menší šířkou mostovky a větší poddajnost konstrukce architektonickým řešením, které je ve většině případů navrženo tak, aby lávka působila co nejtíhlejším a nejelegantnějším dojmem. Často se jedná o neobvyklé konstrukční systémy, jako jsou visuté či zavěšené konstrukce [5]. Co se týče problémů z hlediska dynamiky, tak tím, že jsou lávky poddajné a lehké, je velmi snadné je rozkmitat. Tomu navíc napomáhá to, že první vlastní frekvence těchto konstrukcí velmi často bývají blízké frekvenci lidského kroku nebo běhu [6]. Vibrace mostovky lávky, které jsou lidským pohybem způsobeny, obvykle nepůsobí problémy z hlediska únosnosti konstrukce, ale z hlediska pohodlí uživatelů lávky. Dojde-li k rezonanci mezi vlastní frekvencí konstrukce a lidským krokem, může být vyvoláno kmitání s velkými hodnotami zrychlení mostovky a potom může být tato konstrukce z hlediska pohodlí uživatelů nepoužitelná [3]. Při návrhu těchto konstrukcí je podstatné se tomuto stavu vyhnout, případně ho co nejvíce omezit. Na dokončených lávkách se před jejich uvedením do provozu také dělají dynamické zatěžovací zkoušky, které mají za účel prověřit maximální hodnoty zrychlení, a ty dále porovnat s maximálními přípustnými hodnotami definovanými v normách [5].

### 4.1 EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA LÁVEK PRO PĚŠÍ

Důvody, proč provádět experimentální zkoumání stavebních konstrukcí se mohou lišit. Může se jednat například o ověření spolehlivosti konstrukcí před jejich uvedením do provozu, o verifikaci a případnou identifikaci výpočetního modelu, či zjištění určitých parametrů (např. materiálových), které nelze jinak určit [7]. V následujících kapitolách budou popsány základy experimentální analýzy z hlediska dynamiky, uspořádání zkoušek na lávkách pro chodce a jejich vyhodnocení a také kritéria pro posouzení mezního stavu použitelnosti (komfortu chodců) týkající se těchto konstrukcí.

#### 4.1.1 Základní pojmy používané při experimentální analýze

##### 4.1.1.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace (FT) je jedním z nejpoužívanějších nástrojů aplikovaných při dynamických experimentech na skutečných konstrukcích včetně lávek pro chodce. Jedná se

o integrální transformaci převádějící funkci o dané proměnné na zápis, který je charakterizován pomocí funkcí sinus a cosinus o různých argumentech [8]. Při dynamických měřeních je pro získaná data základní proměnnou čas ( $t$ ) a FT využíváme následně k převodu naměřeného časového záznamu do frekvenční oblasti [9]. FT vychází z Fourierovy řady periodické funkce [10, 11]:

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_n t), \quad (13)$$

kde koeficienty  $A_n$  a  $B_n$  jsou definovány následujícími vztahy:

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \sin(n\omega_n t) dt \quad (14)$$

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cos(n\omega_n t) dt \quad (15)$$

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt. \quad (16)$$

Výhodnější vyjádření z hlediska dynamiky je zápis [7]:

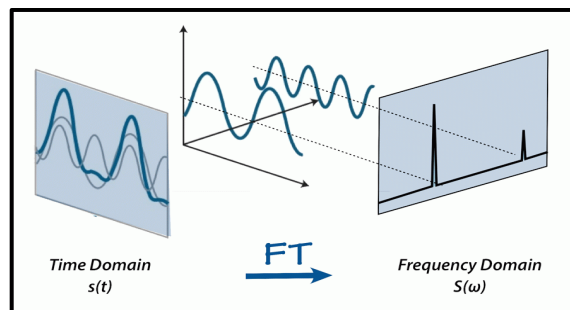
$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (17)$$

kdy platí, že amplituda harmonického členu řady s frekvencí  $f_n$  je:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (18)$$

a pro úhel fázového posunutí platí:

$$\tan \varphi_n = \frac{B_n}{A_n}. \quad (19)$$



Obr. 1: Fourierova transformace (obrázek byl převzat z publikace [9]). Naměřený signál v čase, z kterého můžeme získat pomocí Fourierovi transformace jeho frekvenční složení.

#### 4.1.1.2 Efektivní hodnota

V normách se často zmiňuje pojem efektivní hodnota, nejčastěji efektivní hodnota zrychlení. Tato veličina se často posuzuje a v normách jsou předešané její maximální hodnoty. Efektivní hodnota se jinak nazývá také RMS (Root Mean Square) hodnota. V následujících vzorcích bude popsána efektivní hodnota zrychlení, ale obdobně by se postupovalo i při výpočtu RMS hodnoty rychlosti a výchylky. Efektivní hodnota zrychlení je definováno jako [7]:

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [a(t)]^2 dt}. \quad (20)$$

Pro kmitání, které je harmonické (má jedinou frekvenci a konstantní amplitudu) platí, že efektivní hodnota je:

$$a_{RMS} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_A, \quad (21)$$

kde  $a_A$  je amplituda harmonického kmitání. Výhodou efektivní hodnoty je to, že pracuje kmitáním z určitého časového intervalu  $T$ . To se hodí právě k popisu kmitání stavebních konstrukcí, protože pohodu jejich uživatelů popíše lépe úroveň kmitání získaná za nějaký časový interval než jeden extrémní výkmit.

#### 4.1.1.3 Útlum

Útlum je schopnost konstrukce přeměnit kinetickou energii (energii pohybu při kmitání) na jiný typ energie, nejčastěji teplo, výjimečně i zvuk. Je to určitá obrana konstrukce proti jejímu výraznému rozkmitání [6]. Útlum lze obecně rozdělit na nadkritický, kritický a podkritický. Nadkritický a kritický útlum jsou charakteristické tím, že jejich dynamická odezva na dynamické zatížení je neperiodická. To znamená, že po vychýlení konstrukce z jejího rovnovážného stavu a následném uvolnění se konstrukce vrátí pozvolna do rovnovážného stavu a nebude dále kmitat.

Naopak útlum podkritický je charakteristický tím, že dynamická odezva na dynamické zatížení je periodická, konstrukce tedy bude po uvolnění kmitat a bude určitou dobu trvat, než se navrátí zpět do rovnovážného stavu. Tento charakter útlumu je typický pro stavební konstrukce. Obecně platí, že stavební konstrukce mají velmi malý útlum [2].

Pro popis tlumících vlastností konstrukcí se používá více charakteristik. Nejpoužívanější charakteristikou útlumu v dynamických výpočtech je poměrný útlum  $\zeta$ . Při experimentálním určování útlumu konstrukce se často využívá postup, při kterém se konstrukce nejdříve rozkmitá a následně se nechá dokmitávat volným tlumeným kmitáním. Pro vyhodnocení tohoto způsobu zjištění útlumu je zpravidla používána veličina logaritmický dekrement útlumu  $\vartheta$  určovaná na základě vzorce:

$$\vartheta = \frac{1}{n} \ln \frac{w(t_i)}{w(t_i + n \cdot T_D)}, \quad (22)$$

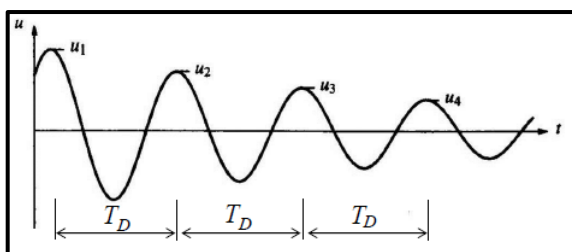
kde  $n$  je počet kmitů,  $w(t_i)$  je výchylka v čase  $t_i$ , a  $T_D$  je vlastní perioda tlumeného kmitání [2].



Pro malý útlum ( $\zeta < 0.2$ ), který se vyskytuje právě u stavebních konstrukcí, je možné využít s dostatečnou přesností přibližný vztah:

$$\vartheta \doteq 2\pi\xi. \quad (23)$$

Stanovení přesné hodnoty útlumu pro určitou konstrukci je mnohdy složité. Pro reálnou konstrukci platí, že každý její vlastní tvar může být tlumený jinak. Nicméně při teoretické analýze lze hodnotu útlumu analyzované konstrukce předpokládat na základě základního materiálu, ze kterého je její nosná konstrukce zhotovena. Na následujícím obrázku je zobrazeno dokmitání konstrukce při podkritickém útlumu. Jedná se o graf výchylek v čase při volném tlumeném kmitání. Výchylky se v čase postupně snižují. Takovýto záznam je při experimentální analýze vhodný k vyhodnocení logaritmického dekrementu útlumu na základě vzorce (22) [3]. Další možnou metodou k vyhodnocení útlumu konstrukce je také například metoda frekvenčních multispekter.



Obr. 2: Dokmitání konstrukce – průběh výchylky v čase při volném tlumeném kmitání [3].

#### 4.1.2 Dynamické zkoušky

Dynamické zkoušky stavebních konstrukcí jsou popsány v normě ČSN 73 2044 „Dynamické zkoušky stavebních konstrukcí“ [12]. Norma je platná pro provádění a vyhodnocování dynamických experimentů na všech stavebních konstrukcích kromě mostů a konstrukcí jim podobným, které se zkouší podle normy ČSN 73 6209 „Zatěžovací zkoušky mostních objektů“ [13].

Dynamické zkoušky lze rozdělit na zkoušky zaměřené na stanovení charakteristik vlastního kmitání (vlastních frekvencí a jim příslušných vlastních tvarů a útlumu), tyto zkoušky nazýváme experimentální modální analýza nebo dynamické zkoušky informativní (ve smyslu ČSN 73 2044 [12]). Druhým typem dynamických experimentů jsou potom dynamické zkoušky zatěžovací, při kterých se sledují účinky budících sil na konstrukce při vynuceném kmitání [7, 13, 14].

#### 4.1.2.1 Dynamická zkouška informativní

Dynamickou zkoušku informativní provádíme na určité existující konstrukci z důvodu vyhodnocení jejích vlastních frekvencí a jim příslušných vlastních tvarů. Dále se při zkoušce vyhodnocuje logaritmický dekrement útlumu této konstrukce, která není zatížena jinak, než zdrojem buzení [12]. V mezinárodní literatuře je používán pojem „experimentální modální analýza“. Tento pojem, co se názvosloví týče, je ekvivalentní k termínu „Dynamická zkouška informativní“ [14]. Při dynamické zkoušce informativní se používají dva základní principy: forced vibration testing (FVT) a ambient vibration testing (AVT) [7, 13, 14].

Při FVT je konstrukce rozkmitávána známou budící silou působící v jednom bodě konstrukce. Bod, do kterého je zdroj budící síly umístován, je volen tak, aby byly rozkmitávány všechny významné vlastní tvary, a tedy aby se daly zjistit všechny významné vlastní frekvence zkoumané konstrukce. Každý hledaný vlastní tvar by tedy měl mít v tomto bodě nenulovou pořadnici a vlastní tvary, na které se má experiment zaměřit nejdetailněji, by měly mít v tomto bodě pořadnici co největší. Vlastnosti této budící síly jsou v průběhu měření zaznamenávány a následně je naměřené kmitání normováno k této budící síle [14]. K rozkmitávání konstrukce jsou většinou využívány budiče. V dnešní době se používají nejčastěji budiče, které umožňují spojité buzení ve zvoleném frekvenčním pásmu (tzv. frekvenčně omezený bílý šum) [7].

Při AVT není konstrukce rozkmitávána známou budící silou, ale jak napovídá název, tak je rozkmitávána náhodnými okolními dynamickými silami, jejichž velikost je neznámá. Tyto síly mohou vznikat i přirozeně (např. od větru nebo od technické seismicity), na silničních mostech je často využíváno kmitání vyvolané dopravním proudem přejíždějícím po převáděné silniční komunikaci. Tato metoda může být použita pouze u konstrukcí, které jsou dynamicky citlivé a které tyto okolní síly dostatečně vybudí. Naměřené kmitání konstrukce je následně opět normováno, avšak tentokrát ne k budící síle, ale k dynamické odezvě naměřené v referenčním bodu, který je umístěn na konstrukci a ve kterém se po celou dobu experimentu nachází referenční snímač. Tento bod by měl být ideálně umístěn ve stejném bodě, jako budič v případě FVT [14].

#### 4.1.2.2 Dynamická zkouška zatěžovací

Dynamická zkouška zatěžovací se provádí v případě, že chceme znát odezvu konstrukce na určité dynamické zatížení. Zkoušku bychom měli provádět tak, aby zatížení použité během zkoušky co nejlépe odpovídalo proměnnému nebo provoznímu zatížení, kterému je konstrukce vystavována během jejího provozu [7]. Z naměřeného kmitání jsou vyhodnocovány dále různé

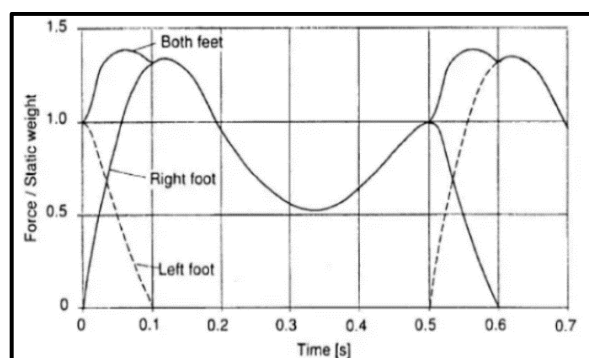
parametry kmitání, jako jsou například maximální výkmity, efektivní hodnoty nebo frekvenční spektra měřených veličin [12]. Je-li zkušební zatížení harmonické, jsou vyhodnocovány také frekvence, tvary a amplitudy vynuceného ustáleného kmitání. Při posuzování výsledků dynamické zkoušky zatěžovací, musí být naměřené hodnoty nejvýše takové, jaké byly stanovené teoretickým výpočtem, případně musí být naměřená úroveň kmitání nižší než mez stanovená jiným předpisem.

Na lávkách se při dynamické zkoušce zatěžovací zaměřené na zatížení chodce vyhodnocují především maximální výkmity a RMS hodnoty zrychlení měřeného v dostatečném počtu bodů vodorovné nosné konstrukce lávky.

### 4.1.3 Dynamické účinky chodců na lávky pro chodce

Zatížení lávek pohybem chodců je pro návrh a posouzení jejich nosné konstrukce velmi podstatná věc, a to především kvůli možnému vzniku rezonance mezi lidským krokem a některou vlastní frekvencí lávky. Zatížení chodce je proměnné nejen svou polohou, ale také velikostí v čase. Chůze každého chodce je jedinečná, ale obecně má toto zatížení charakteristické rysy [5].

Typický časový průběh vertikální dynamické síly vyvolané chůzí jedné osoby je zobrazen na Obr. 3. V tomto konkrétním případě se jedná o chůzi s frekvencí 2 Hz. Průběh zatížení způsobeného jednou nohou má sedlový tvar, vrcholy nastanou při dotyku paty a následně při odrazu ze špičky. Největší souhrnná vertikální síla způsobená chodcem nastane, když jsou na zemi obě jeho nohy [15] (V Obr. 3 část křivky označená „Both feet“). Tento průběh je typický pro chůzi, při zrychlování kroku by postupně vymizel.



Obr. 3: Dynamická síla na mostovku způsobená chůzí jedné osoby [3], frekvence kroku 2 Hz [16].

Při běhu, kdy se po nějakou dobu obě nohy nedotýkají země, by v grafu byly pouze navzájem oddělené oblasti vertikální síly (zhruba ve tvaru půlvlny funkce sinus) způsobené odrazem nohy od země [16].

Po provedení Fourierovy transformace záznamu vertikální síly vyvolaného chůzí jedné osoby (viz Obr. 3) lze zjistit, že dominantní jsou v tomto případě tři frekvence – frekvence základní odpovídající kročejové frekvenci, její dvojnásobek a trojnásobek. Koeficienty před jednotlivými členy Fourierovy řady by pro frekvenci kroku 2 Hz byly postupně  $G_1 = 0.4 \cdot G_0$ ,  $G_2 = G_3 = 0.1 \cdot G_0$ , kde  $G_0$  je tíha pohybující se osoby. Následující členy by měly koeficient menší než  $0.1 \cdot G_0$  a lze je tedy zanedbat. Tyto koeficienty by se se změnou frekvence kroku měnily, se zvyšující se frekvencí by se zvyšoval koeficient před prvním dominantním členem Fourierovy řady  $G_1$  [16]. V normě ČSN EN 1991-2 ed. A [17] ani v její národní příloze [18] není uveden dynamický model zatížení jedním chodcem. V publikace Sétra [16] je uvedeno, že ve francouzské národní příloze eurokódu je používán model zatížení popsán funkcí [5, 16]:

$$Q_{pv} = 280 \sin(2\pi f_v t), \quad (24)$$

kde  $Q_{pv}$  je vertikální síla od chodce a  $f_v$  je frekvence kroku. V tomto případě je uváženo, že chodec má tíhu  $G_0 = 700$  N. Hodnota 280 je 0.4násobek celkové tíhy chodce, uvažuje se tedy pouze s prvním členem Fourierovy řady.

Nejběžnější frekvence lidské chůze se uvažuje 2.0 Hz. Toto ale není jediná frekvence kroku, se kterou se může chodec na lávce pohybovat. V následující tabulce (Tab. 1) jsou shrnuty frekvence různých lidských pohybů [19].

Tab. 1: Rychlosti a frekvence různých lidských pohybů [19]

Druh lidského pohybu	Rychlost [m/s]	Frekvence kroku [Hz]
Pomalá chůze	1.1	1.7
Normální chůze	1.5	2.0
Rychlá chůze	2.2	2.3
Pomalý běh	3.3	2.5
Rychlý běh	5.5	> 3.2

#### 4.1.4 Souhrn požadavků pro kmitání lávek dle norem a předpisů

V následujících odstavcích je uveden stručný přehled požadavků pro kmitání lávek pro chodce podle norem, předpisů a doporučení.

##### 4.1.4.1 ČSN EN 1990 Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí [20]

V normě [20] je stanoveno, že pro libovolnou část hlavní nosné konstrukce lávky jsou doporučeny následující maximální hodnoty zrychlení kmitání:

1.  $0.7 \text{ m/s}^2$  pro svislá kmitání;
2.  $0.2 \text{ m/s}^2$  pro vodorovná kmitání od běžné dopravy;
3.  $0.4 \text{ m/s}^2$  pro vodorovné vibrace od výjimečného zatížení davem lidí.

Dále je v normě uvedeno, že kritéria pohody chodců se mají ověřit v případech, kdy základní frekvence nosné konstrukce lávky je menší než 5 Hz pro svislé kmitání a 2.5 Hz pro vodorovné (příčné) a kroutivé kmitání.

##### 4.1.4.2 ČSN EN 1991-2 NA ed. A – Národní aplikační dokument [18]

V národním aplikačním dokumentu normy ČSN EN 1991-2 ed. A je uvedeno, že ověření dynamického chování lávky pro pěší musí být provedeno v případě, že některá vlastní frekvence vertikálního ohybového kmitání leží v rozmezí 1.3 až 2.3 Hz. Pro konstrukce, které mají malý útlum (logaritmický dekrement útlumu menší než 0.05) jsou také omezující frekvence 2.5 až 4.6 Hz. Pro vlastní frekvence horizontálního vlastního kmitání musí být dynamické chování ověřeno, leží-li vlastní frekvence v rozmezí 0.5 až 1.2 Hz nebo 2.6 až 3.4 Hz.

Analýza dynamického chování lávky by měla obsahovat výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů, odhad útlumu a výpočet vynuceného kmitání lávky způsobené chodci. V normě je také uvedena tabulka (viz Tab. 2) určující kritérium komfortu chodců pomocí špičkových hodnot zrychlení mostovky. Komfort je zde rozdělen do tří úrovní. V normě je uvedeno, že není-li specifikováno jinak, tak by měla být zvolena úroveň pohodlí chodců „průměrná“.

Tab. 2: Úrovně pohodlí chodců na lávkách stanovené v [18]

Úroveň pohodlí chodců	Svislé zrychlení [ $\text{m/s}^2$ ]	Vodorovné zrychlení [ $\text{m/s}^2$ ]
Maximální	$\leq 0.50$	$\leq 0.10$
Průměrná	$\leq 0.70$	$\leq 0.20$
Minimální	$\leq 1.00$	$\leq 0.40$

#### 4.1.4.3 ČSN 73 6209 „Zatěžovací zkoušky mostních objektů“ [13]

V normě v kapitole týkající se zatěžovacích zkoušek lávek pro pěší a/nebo cyklisty jsou uvedeny tyto způsoby simulování provozu:

1. Náhodné přechody chodců po lávce na úrovni předpokládané hustoty provozu (počet chodců za jednotku času).
2. Vybuzení kroutivého nebo svislého ohybového kmitání lávky synchronizovaným přechodem dvou chodců našlapujících vždy „stejnou nohou“; kroková frekvence se volí tak, aby odezva lávky na přechod chodců byla co největší.
3. Vybuzení vodorovného příčného kmitání synchronizovaným přechodem dvou chodců našlapujících vždy „stejnou nohou“; kroková frekvence se volí tak, aby odezva na přechod chodců byla co největší.
4. Přejezd lehkého nákladního auta u lávek, které jsou na tento přejezd navrhovány.

V normě jsou také uvedeny mezní hodnoty vážených efektivních hodnot zrychlení ve svislém a vodorovném směru, na základě kterých je kmitání lávky posuzováno podle kritéria použitelnosti z hlediska účinku vibrací na lidský organismus. Pokud nejsou mezní hodnoty v projektu specifikovány odlišně, mají se uvažovat hodnoty z Tab. 3, které odpovídají průměrné úrovni pohodlí chodců.

Tab. 3: Mezní hodnoty vážených efektivních hodnot zrychlení podle normy [13]

Směr kmitání	$a_{w,ef}$ [ $m/s^2$ ]
Svislé kmitání	0.5
Vodorovné kmitání	0.14
Vodorovné kmitání při výjimečném zatížení davem lidí	0.28

#### 4.1.4.4 Sétra: Technical guide, Footbridges, Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian load [16]

Publikace Sétra je francouzský souhrn pokynů a poznatků týkající se lávek pro pěší. V této publikaci jsou stanoveny limitní hodnoty zrychlení rozdělené podle úrovní pohodlí chodců, podobně jako tomu bylo v [18]. V této publikaci jsou úrovně pohodlí chodců rozděleny do 4 skupin. V obrázcích (viz Obr. 4 a Obr. 5) jsou tyto skupiny značeny Range 1 až Range 4. První tři jsou postupně maximální, průměrná a minimální úroveň pohodlí. Čtvrtá skupina odpovídá úrovni pohodlí chodců, která je nepřijatelná. Na následujících dvou obrázcích jsou

barevně vyznačeny skupiny úrovně pohodlí a přípustné špičkové hodnoty zrychlení pro vertikální a horizontální směr kmitání.

Acceleration ranges	0	0.5	1	2.5
Range 1	Max			
Range 2		Mean		
Range 3			Min	
Range 4				

Obr. 4: Rozsahy hodnot zrychlení [ $m/s^2$ ] pro vertikální kmitání mostovky.

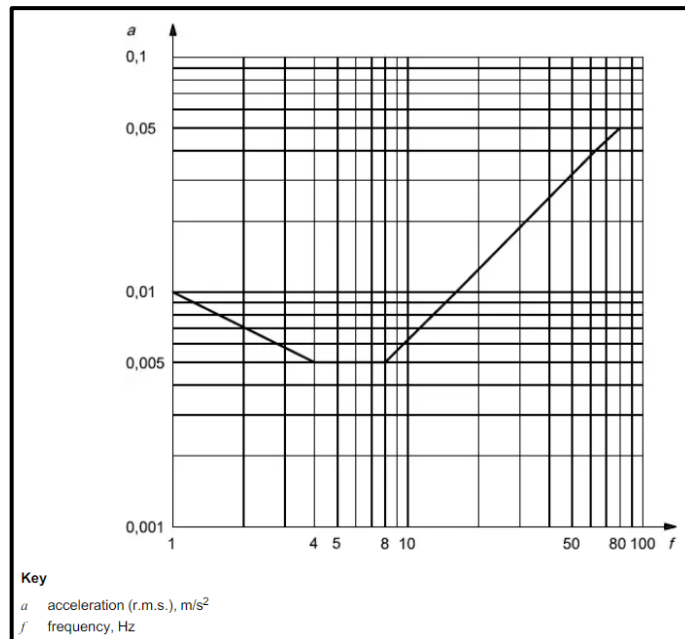
Acceleration ranges	0	0.1	0.15	0.3	0.8
Range 1	Max				
Range 2			Mean		
Range 3				Min	
Range 4					

Obr. 5: Rozsahy hodnot zrychlení [ $m/s^2$ ] pro horizontální kmitání mostovky.

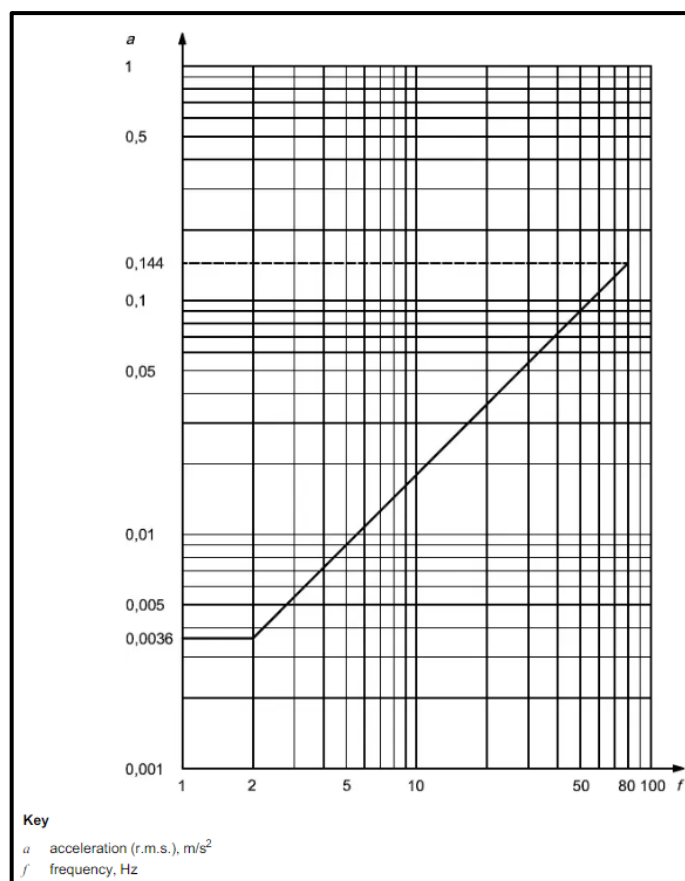
Na Obr. 5 je oranžově znázorněno, že je vhodné u horizontálního kmitání mostovky lávky nepřekračovat hodnotu zrychlení  $0.1 m/s^2$ . Toto je z důvodu, aby bylo zamezeno tak zvanému „lock in“ efektu. Ten vznikne v případě, že chodci na výrazněji rozkmitané lávce ve snaze zpříjemnění jejich chůze začnou jejich frekvenci kroku synchronizovat (začnou se horizontálně „pohupovat“) s kmitáním lávky a tím lávku ještě víc rozkmitávají. Tento jev nastal například v případě lávky Millenium bridge v Londýně. Lávka musela být uzavřena a doplněna o tlumiče, které snižovaly úroveň kmitání v horizontálním směru [21].

#### 4.1.4.5 ISO 10137 (2007) Bases for design of structures- Serviceability of buildings and walkways against vibrations [22]

Kritérium, které je podle normy [22] rozhodující, je vážená efektivní (RMS) hodnota zrychlení. Norma uvádí, že pro výpočet RMS hodnoty zrychlení je doporučeno uvažovat průměrný čas 1 s, v praxi se běžně používá čas 5 s. Limitní hodnoty jsou v tomto případě stanovené pomocí grafů. V případě vertikálního kmitání by neměly RMS hodnoty zrychlení překračovat šedesátinásobek hodnot daných grafem v Obr. 6. V případě horizontálního kmitání by RMS hodnoty zrychlení neměly překračovat třicetinásobek hodnot daných grafem v Obr. 7.



Obr. 6: Příпустné vážené RMS hodnoty zrychlení pro vertikální kmitání v závislosti na frekvenci.



Obr. 7: Příпустné vážené RMS hodnoty zrychlení pro horizontální kmitání v závislosti na frekvenci.



#### 4.1.4.6 Další publikace

Další publikace, které určitým způsobem stanovují maximální úroveň kmitání lávek pro pěší a které specifikují vlastní frekvence lávek, při kterých by se mělo dbát zvýšené pozornosti, jsou Hivoss [23], JRC [24] a Synpex [25]. Tyto publikace nebudou v této práci více popisovány.

#### 4.1.5 Porovnání charakteristik vlastního kmitání z výpočtu a z experimentu

Jednou disciplínou při provádění experimentů na mostních konstrukcích je porovnání charakteristik vlastního kmitání zjištěných na skutečné konstrukci při dynamické zkoušce informativní s výsledky, které byly zjištěny při dynamickém výpočtu. Tento problém je shrnut v normě ČSN 73 6209 Zatěžovací zkoušky mostních objektů [13]. Tato norma uvádí, že při porovnávání výsledků dynamického výpočtu s výsledky dynamické zkoušky informativní se porovnávají charakteristiky vlastního kmitání nosné konstrukce, čímž jsou myšleny ověřované vlastní tvary a vlastní frekvence. Dále norma definuje základní soubor ověřovaných vlastních frekvencí, který zahrnuje nejméně pět nejnižších vlastních frekvencí v pořadí podle dynamického výpočtu, které přísluší ke globálním vlastním tvarům konstrukce. Součástí souboru musí být vždy alespoň dvě nejnižší vlastní frekvence svislého ohybového kmitání a jedna vlastní frekvence krouživého kmitání.

V této normě je specifikované, že shoda mezi charakteristikami vlastního kmitání zjištěnými při experimentu a výpočtem je tehdy, když zároveň platí:

1. Zkouškou zjištěné vlastní frekvence se neliší od ověřovaných vypočtených vlastních frekvencí více, než je uvedeno v tabulce 4 [13]:

Rozdíl mezi srovnávanými vlastními frekvencemi se stanoví podle následujícího vztahu (25) a porovná se s mezními hodnotami z Tab. 4:

$$\Delta_{(j)} = \frac{f_{(j)CAL} - f_{(k)OBS}}{f_{(j)CAL}} * 100, \quad (25)$$

kde  $f_{(j)CAL}$  je vypočtená  $j$ -tá vlastní frekvence konstrukce a  $f_{(k)OBS}$  je změřená  $k$ -tá vlastní frekvence konstrukce.

Tab. 4: Hodnoty mezních odchylek pro porovnání vypočtených a naměřených vlastních frekvencí [13]

Frekvence	$f_{(min)CAL}, f_{(j)CAL,A}$	$f_{(j)CAL,B}$
Mezní odchylka $\Delta_{(j)}$ [%]	+10 až -15	$\pm(14 + f_{(j)CAL}/f_{(min),CAL} \leq \pm 25$

V tabulce je:

$f_{(min)CAL}$  nejnížší porovnávaná vypočtená vlastní frekvence příslušná ke globálnímu vlastnímu tvaru hl. nosné konstrukce s dominantními pořadnicemi ve svislém směru (ve většině případů se jedná o první vlastní tvar svislého ohybového kmitání mostovky),

$f_{(j)CAL,A}$  je jakákoliv ověřovaná vlastní frekvence nížší než  $f_{(min)CAL}$ , která přísluší ke globálnímu vlastnímu tvaru hl. nosné konstrukce, který nemá dominantní pořadnice ve svislém směru

a  $f_{(j)CAL,B}$  je jakákoliv ověřovaná vlastní frekvence vyšší než  $f_{(min)CAL}$ .

2. Zkouškou zjištěné ověřované vlastní tvary kmitání konstrukce mají shodný počet uzlových linií s vypočtenými tvary kmitání a linie leží ve shodných polích konstrukce.

Porovnání vlastních tvarů se standardně provádí vizuálně, v některých složitějších případech to však není možné. V těchto případech se zavádí výpočet koeficient korelace modální analýzy MAC, který se určí na základě vztahu:

$$MAC_{(i,j)} = \frac{\left| \{r_{(j)CAL}\}^T \{r_{(k)OBS}\} \right|^2}{(\{r_{(j)CAL}^*\}^T \{r_{(j)CAL}\})(\{r_{(k)OBS}\}^T \{r_{(k)OBS}\})} \quad (26)$$

Koeficient  $MAC_{(i,j)}$  popisuje míru shody vypočtených a naměřených tvarů vlastního kmitání  $\{r_{(j)CAL}\}$  a  $\{r_{(k)OBS}\}$  přes všechny jejich pořadnice. Jsou-li dva porovnávané vlastní tvary totožné, je  $MAC_{(i,j)}$  roven 1 a jsou-li ortogonální, je roven 0 [26].

V normě [13] je stanoveno, pokud je pro  $j$ -tý vypočtený vlastní tvar kmitání a  $k$ -tý naměřený vlastní tvar kmitání hodnota  $MAC_{(j,k)} \geq 0.85$  a zároveň pro všechny ostatní naměřené vlastní tvary kmitání  $\{r_{(m)OBS}\}$  je  $MAC_{(j,m)} \leq 0.4 MAC_{(j,k)}$ , lze oprávněně tvrdit, že jde o tentýž vlastní tvar kmitání. Potom také  $f_{j,CAL}$  a  $f_{k,OBS}$  odpovídají témuž vlastnímu tvaru.

3. Zkouškou stanovený logaritmický dekrement útlumu  $\vartheta_{OBS}$  je větší nebo roven hodnotě  $\vartheta_{CAL}$  použité při výpočtu vynuceného kmitání.

## 5 ZMĚNA ZÁKLADNÍCH DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCE

Parametry dynamické odezvy konstrukce, zejména pak základní charakteristiky vlastního kmitání konstrukce, kterými jsou vlastní frekvence, vlastní tvary a útlum, se mohou v průběhu životnosti této konstrukce měnit. Změněná hodnota vlastních frekvencí kmitání může poukazovat na určitou změnu na konstrukci, jako je snížení či zvýšení tuhosti nebo odlišné okrajové podmínky (uložení). Leckdy se takováto změna používá jako určitý diagnostický nástroj ke zjištění a stanovení míry poškození nosné konstrukce nebo míry degradace jejího materiálu [27-30].

Změna vlastních frekvencí u železobetonových konstrukcí může být způsobena různými faktory. Zvýšenou pozornost je třeba věnovat případům, kdy dojde ke snížení vlastních frekvencí konstrukce. Vlastní kmitání stavebních konstrukcí je závislé na hmotnosti a tuhosti konstrukce (viz. kapitola 3.1.). Snížení vlastních frekvencí konstrukce může tedy poukazovat na zmenšení tuhosti konstrukce nebo na zvětšení hmotnosti (například jejím provlhnutím nebo usazováním).

Betonové konstrukce obecně mění tuhost vlivem [27, 31]:

1. degradace betonu,
2. oslabení průřezu trhlinami,
3. změn okrajových podmínek.

Změna okrajových podmínek nemusí souviset pouze s vlastnostmi podpor a ložisek, ale může být také způsobena založením a změnou charakteristik základové půdy [27].

Změna dynamických vlastností konstrukcí není vždy závislá jen na poškození konstrukce nebo na určité ztrátě mechanických vlastností materiálu, jako je například degradace betonu. Další jevy, které mohou mít vliv na změnu dynamických vlastností konstrukce, jsou:

4. dotvarování betonu [27, 31-33],
5. fluktuace teploty konstrukce [32, 34-36].

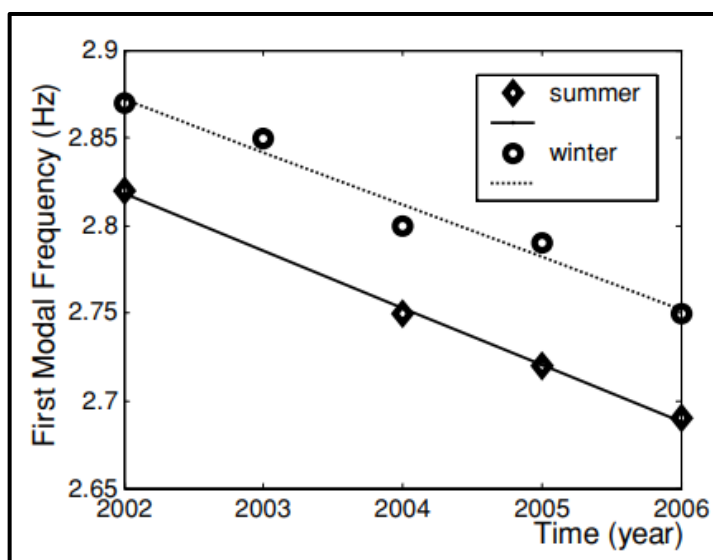
### 5.1 ZMĚNA DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCÍ V ČASE

Dlouhodobé měření dynamických vlastností konstrukcí je v dnešní době zatím spíše výjimkou. Publikací na toto téma je poměrně málo, protože dynamické zkoušky se dělají především před uvedením konstrukce do provozu v souvislosti s verifikací jejího výpočetního modelu. Měření, která by byla kontinuální a dlouhodobá, se ale vyskytují čím dál tím častěji a patří mezi

preventivní opatření pomáhající k efektivní údržbě mostu. Tato měření napomáhají snížit celkové náklady na údržbu a zvyšují životnost stavby [37].

Vzhledem k tomu, že takových měření je stále poměrně málo, tak nelze s jistotou říct, jaká je obecná tendence změny základních dynamických vlastností konstrukce. Většina publikací poukazuje na to, že s rostoucím stářím konstrukce se snižují vlastní frekvence, což poukazuje na pokles tuhosti, například v důsledku vzniku mikrotrhlin.

Jednou z mostních konstrukcí, na které bylo prováděno dlouhodobé monitorování, je most Jamboree v USA. Hlavní nosná konstrukce je tvořena spojitým komorovým nosníkem o třech polích z předpjatého betonu. Tento most byl otevřen v roce 1998 a probíhalo na něm monitorování vlastních frekvencí, které začalo v roce 2002 a trvalo 5 let. Během těchto pěti let byl zaznamenán pokles první vlastní frekvence o 5 % s lineární tendencí snižování (Obr. 8) [38].



Obr. 8: Graf poklesu první vlastní frekvence mostu Jamboree v USA. Data rozděleny na letní a zimní období. Na ose x je čas [roky], na ose y frekvence [Hz][38].

Další konstrukcí, na které bylo provedeno dlouhodobé monitorování, je most WSOR v Kalifornii v USA. Hlavní nosnou konstrukcí mostu je spojitý komorový nosník o třech polích z předepjatého betonu. Celý most je ve směrovém oblouku. Tento most byl postaven v roce 2001 a monitorován byl mezi lety 2002 a 2010. Na tomto mostě bylo zjištěno snížení první a třetí vlastní frekvence o 7 až 8 % a snížení druhé vlastní frekvence o 5 %. Během tohoto experimentu byl most vystaven 6 zemětřesením, ale z měření bylo zjištěno, že žádné zemětřesení nesnížilo jeho vlastní frekvence skokově a že snižování probíhalo kontinuálně [37]. Předpokládá se tedy, že zemětřesení konstrukci neponičilo a nemělo na snižování frekvencí žádný vliv.

Opakované zkoušení konstrukcí z předepjatého betonu a ze železobetonu probíhalo také v Česku. Jedná se o následující konstrukce:

1. Nuselský most v Praze: Na mostě byl naměřen pokles frekvencí u 2 vlastních tvarů o 4.07% mezi roky 1974 a 2008 [31].
2. Most na dálnici D8 na 9.181 km: Na mostě byl zjištěn pokles základní vlastní frekvence o 10.4 %. První měření proběhlo roku 1993 a druhé o 15 let později [31].
3. Most na dálnici D1 u Hvězdonic: Měření proběhla v letech 1978 a 2008. Nebyl naměřen žádný rozdíl vlastních frekvencí mezi jednotlivými experimenty [31].
4. Železobetonový komín v Praze – Malešicích: Tato konstrukce byla monitorována prvních 7 let její existence. Měření byla provedena po uvedení do provozu a následně po 9, 34, 62 a 86 měsících. První vlastní frekvence měla snižující se tendenci a po 86 měsících došlo ke snížení vlastní frekvence o 7,61 %. Autoři článku považují za jeden z možných důvodů poklesu vlastní frekvence vliv dotvarování betonu. Nevylučují však porušení dřívku komína v jednom nebo ve více řezech, či postupnou degradaci betonu. Doporučili tedy provést vizuální kontrolu dřívku a chemický rozbor betonu [27, 31, 39].
5. Most přes řeku Radbuzu v Plzni: Na mostě bylo naměřeno snížení prvních osmi vlastních frekvencí mezi roky 1997 a 1998. Snížení první vlastní frekvence bylo o 4.4 %. Po rekonstrukci mostu roku 2000 bylo naměřeno zvýšení všech měřených vlastních frekvencí a lze tedy předpokládat zvýšení tuhosti nosné konstrukce [40].

6. Most na D1 přes vodní nádrž Švihov (Želivka): Monitorování vlastních frekvencí na tomto mostu probíhalo každý rok od roku 1997 do roku 2001. Před prvním experimentem byla provedena rekonstrukce mostu. Do komory mostu byly přidány externí předpínací kabely. Vlastní frekvence u této konstrukce mezi jednotlivými experimenty postupně narůstají – nejvyšší nárůst byl zaznamenán u 2. vlastní frekvence o 3.5 % [40].

Klesající tendence vlastních frekvencí s postupujícím stářím je tedy něco, co bylo zaznamenáno u více konstrukcí. Nejde však s jistotou říct, co za tímto poklesem stojí a nelze říct, že takový pokles nastane u každé konstrukce, jako ukazují například mosty na D1 u Hvězdonic a přes vodní nádrž Želivka. Navíc mosty, které zde byly vyjmenovány, jsou z předepjatého betonu a mosty a lávky z železobetonu se mohou chovat odlišně. V normách není stanoveno, že by se s takovým jevem muselo při návrhu mostů a lávek pro pěší pracovat.

Dalším faktorem, který může mít vliv na vlastní frekvence konstrukce, je teplota. Například data naměřená na mostu Jamboree v USA měla rozdílné vlastní frekvence naměřené v zimním a v letním období, kdy v zimním období byly naměřené frekvence vyšší (Obr. 8) [38]. Autoři článku [31], který popisuje konstrukce na území Česka, neuvádějí teplotu, při které byly vlastní frekvence měřeny, a právě teplota mohla jimi získané výsledky zkreslovat.

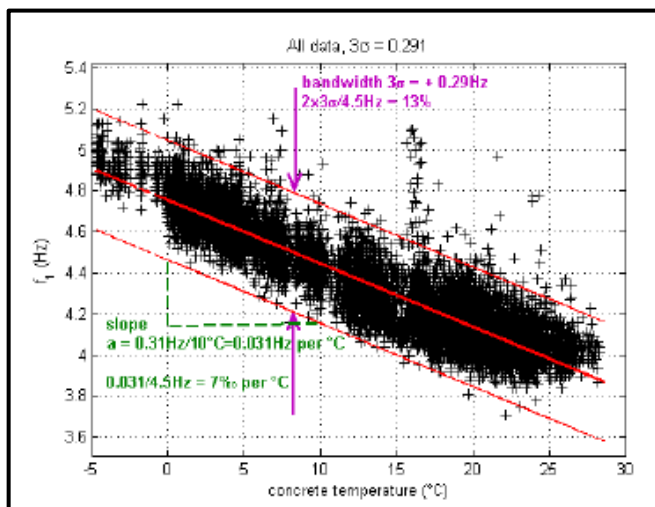
## 5.2 ZMĚNA DYNAMICKÝCH VLASTOSTÍ VLIVEM TEPLoty

Změna vlastních frekvencí konstrukcí s měnící se teplotou je další z témat, které není definované v normách. Existují však publikace, které ukazují, že s rostoucí teplotou klesají vlastní frekvence železobetonových a předepjatých betonových konstrukcí. Měření na mostě Alamosa Canyon bridge například poukazuje na to, že se vlastní frekvence mostu lišily až o 5% během 24 hodinového měření, což autoři vysvětlují změnami teplot a intenzit dopravy během dne [41].

Další publikace týkající se této problematiky [42] popisuje měření betonového komorového mostu ve směrovém oblouku o třech polích. Most byl monitorován po dobu jednoho roku a byla naměřena změna vlastních frekvencí maximálně o 6 % při celkové změně teploty vzduchu o 39°C během celého období, po které byl sledován [42].

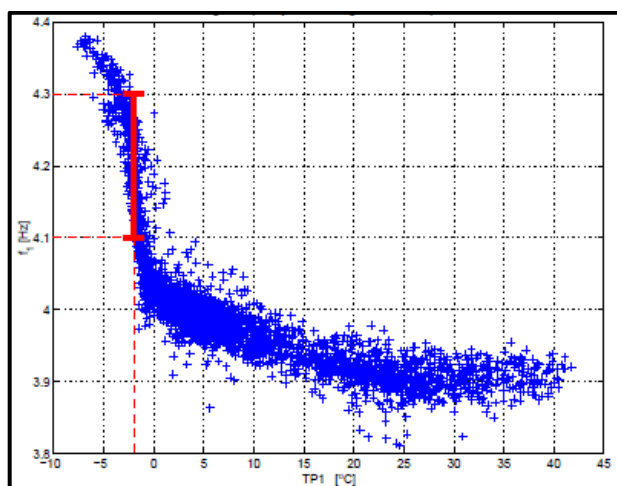
Podobná tendence byla naměřena a popsána v publikacích [43] popisující mosty ve Švýcarsku a Lucembursku, na kterých byla prováděna dlouhodobá kontinuální měření. Most v Lucemburském Useldange má hlavní nosnou konstrukci tvořenou čtyřmi ocelovými nosníky

spřaženými s železobetonovou deskou a poměrně silnou asfaltovou vrstvou. U tohoto mostu byl zaznamenán lineární trend růstu první vlastní frekvence s klesající teplotou (Obr. 9) [43].



Obr. 9: Graf závislosti první vlastní frekvence mostu v lucemburském Useldange na teplotě. Na ose x je teplota [°C] a na ose y frekvence [Hz] [43].

U švýcarského mostu Z24 byl také zaznamenán nárůst první vlastní frekvence se snižující se teplotou. Jedná se o silniční komorový most o třech polích z předpjatého betonu, na jehož mostovce je také asfaltový kryt. Na rozdíl od mostu v Lucembursku zde ale pokles frekvencí v závislosti na teplotě nemá lineární průběh. Na tomto mostě bylo naměřeno, že při klesání teplot do 0 °C se hodnota první vlastní frekvence zvyšuje pouze nepatrně. V intervalu od 0 °C do -5 °C však hodnoty první vlastní frekvence skokově narostou (viz Obr. 10) [35].



Obr. 10: Graf závislosti první vlastní frekvence švýcarského mostu Z24 na teplotě. Na ose x je teplota [°C] a na ose y frekvence [Hz] [35].

Podobný průběh závislosti první vlastní frekvence na teplotě, jako na švýcarském mostě Z24, byl zaznamenán na lávce Dawling Hall v kampusu americké Tuftsovy univerzity. Jedná se v tomto případě o spřaženou konstrukci s ocelovými nosníky a s betonovou mostovkou bez asfaltového krytu [36].

U mostů v lucemburském Useldange a Z24 ve Švýcarsku autoři nárůst vlastních frekvencí vysvětlují tím, že má most asfaltový kryt. Asfalt poměrně výrazně mění modul pružnosti s teplotou [44, 45]. Při poklesu teploty se tento jev projeví i v celkové tuhosti konstrukce, a tedy ve změně vlastních frekvencí. Měření na lávce Dawling Hall v USA však ukazuje, že tento jev může nastat i u konstrukcí, které asfaltový kryt nemají.

Skokovou změnu vlastních frekvencí u mostů Z24 a v Useldange autoři vysvětlují tím, že při teplotě pod bodem mrazu zamrzá nejsvrchnější část zeminy, což může mít efekt na tuhosti podpor a tedy na okrajové podmínky konstrukce, které ovlivňují vlastní frekvence [43].

Další fakt, na který autoři článku o lucemburském mostě v Useldange poukazují, je to, že je z měření zřejmé, že při jedné konkrétní teplotě nebyla vždy naměřena stejná vlastní frekvence. Na tomto měření, které trvalo 4 roky, byla nejistota naměřené první vlastní frekvence při jedné teplotě až 13 %, což je velmi vysoká hodnota. Tato nejistota v sobě odráží nejistotu měření, nelineární chování konstrukce, intenzitu dopravy při měření, vliv založení a stárnutí konstrukce [43]. Rozptylu naměřených hodnot si můžeme povšimnout na Obr. 9.

Zkoušení základních dynamických vlastností neprobíhalo jen na skutečných konstrukcích in situ, ale také v laboratořích na konstrukčních prvcích. Zkoušením vlivu teploty na vlastní frekvence prostě podepřeného železobetonového nosníku se zabývá publikace [46]. Autoři tohoto článku vzali v úvahu všechny faktory, na které má změna teploty vliv. Počítali tedy změnu Youngova modulu pružnosti, změnu délky a změnu rozměrů příčného řezu s teplotou. Dále byl vytvořený matematický model nosníku (model nosníku se spojitě rozloženou hmotou) a model v programu Midas (MKP model). Tyto modely byly upravovány změnou parametrů, na které má teplota vliv. Data vypočtená z modelů byla následně porovnávána s daty naměřenými na skutečném nosníku, který byl vystavován teplotám od  $-40\text{ °C}$  do  $60\text{ °C}$  [46].

Autoři v závěru tohoto měření vyhodnotili, že na změnu vlastních frekvencí má vliv zejména změna Youngova modulu pružnosti vlivem teploty a ostatní parametry (změna délky a geometrie příčného řezu) lze zanedbat. Dále pak stanovili, že existuje závislost mezi vlastními frekvencemi nosníku a teplotou. Závislost definovali, jako lineární [46]. K výpočtu Youngova



modulu pružnosti se závislostí na teplotě použili autoři vzorec z CEB-FIP Model Code 2010 [47]. Modul pružnosti se podle této publikace spočítá pomocí vzorce:

$$E_T = E_{20^\circ\text{C}}[1 - \theta_E(T - 20)], \quad (27)$$

kde  $E_T$  je modul pružnosti betonu při dané teplotě  $T$ ,  $T$  je teplota betonu,  $E_{20^\circ\text{C}}$  je modul pružnosti betonu při  $20^\circ\text{C}$  a  $\theta_E$  je teplotní koeficient modulu pružnosti mající hodnotu 0,003.

### 5.3 VYUŽITÍ EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZY KE ZJIŠTĚNÍ POŠKOZENÍ KONSTRUKCE

Základní dynamické charakteristiky konstrukce, jako jsou vlastní frekvence a vlastní tvary, jsou poměrně dobrými a citlivými ukazateli strukturální integrity konstrukce. Opakované dynamické zkoušky informativní mohou tedy být využívány ke sledování stavu konstrukce [14]. Výrazné změny vlastních frekvencí nebo vlastních tvarů mohou poukazovat, že se na konstrukci vyskytl problém, například její poškození trhlinami nebo nesprávná funkce ložisek [29].

Nejjednodušším ukazatelem určité změny na nosné konstrukci je sledování vlastních frekvencí. Sníží-li se vlastní frekvence, tak lze předpokládat, že se snížila tuhost konstrukce, což mohlo být způsobeno vznikem trhlin nebo degradací materiálu. Zvýší-li se naopak vlastní frekvence konstrukce, poukazuje to na změnu okrajových podmínek a problém může být v uložení, například ložiska mohla přestat fungovat správně [29]. Sledování vlastních frekvencí konstrukce je výhodné z toho důvodu, že se jedná o poměrně levné a jednoduché měření, které je nedestruktivní.

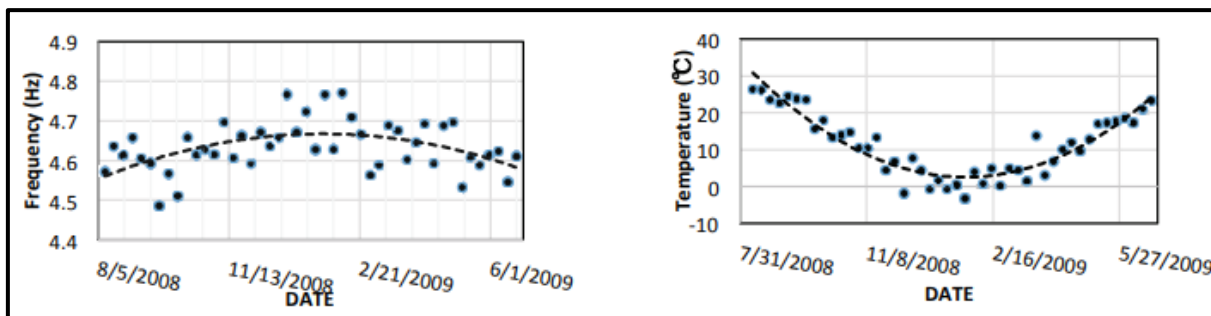
Měření, která takovou změnu frekvencí sledovala, byla realizována nejen na skutečných konstrukcích ale i v laboratořích. Například zkoušení v laboratoři na Fakultě stavební ČVUT v Praze bylo provedeno na železobetonových nosnicích tvaru T i na nosnicích s obdélníkovým průřezem. Nosníky byly zatěžovány statickým zatížením, které se stupňovitě zvyšovalo a poškozovalo železobetonové nosníky. Dále byla měřena změna modálních charakteristik na takto porušovaných nosníku. U obou typů nosníků (s průřezem ve tvaru písmene T i u obdélníkového průřezu) byl naměřen jasný pokles vlastních frekvencí vlivem poškození nosníku [40].

V dnešní době dokonce vznikají způsoby sledování vlastních frekvencí, které nevyžadují složité osazování akcelerometrů na konstrukci. Jedním z takových způsobů je monitorování vlastních frekvencí mostů za pomoci projíždějícího vozidla. Problém těchto měření byl, že kmitání vozidla dominovalo nad kmitáním mostu [48]. Byl tedy vynalezen způsob, kdy se

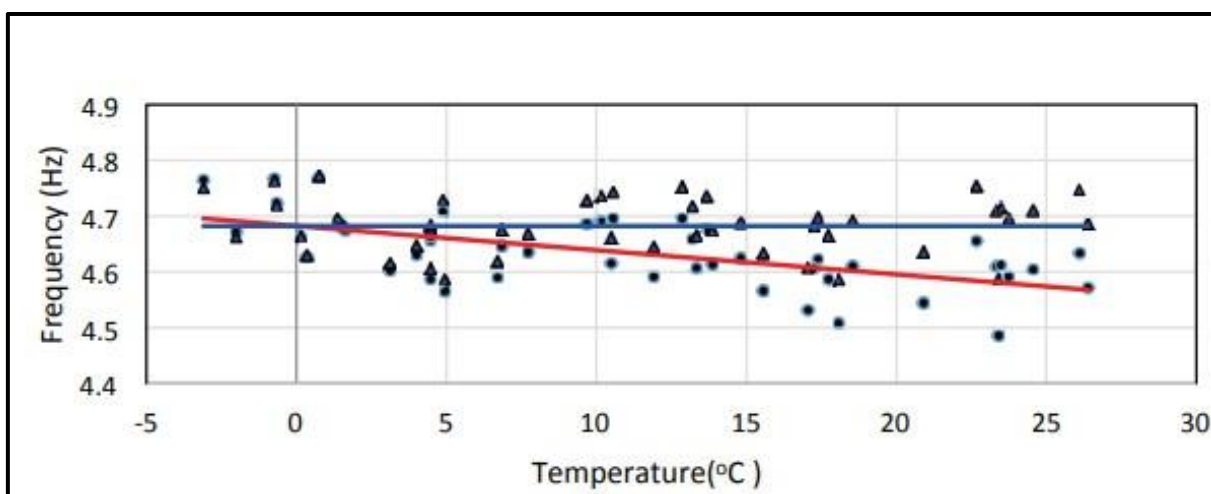
měřila dynamická odezva mostu pouze v bodu dotyku mezi kolem auta a vozovkou [49]. Toto bylo zkoušeno na skutečných konstrukcích a skutečně se podařilo oddělit kmitání vozidla od kmitání konstrukce, přes kterou přejíždělo [50]. Tímto způsobem by se dalo v budoucnu poměrně jednoduše monitorovat několik konstrukcí v krátkém čase a měření by se mohla periodicky opakovat.

Jak bylo ukázáno v předešlých kapitolách, tak na vlastní frekvence určité stavební konstrukce může mít nezanedbatelný vliv mnoho faktorů. Kdyby se měly zkoušky na jedné konstrukci opakovat a jejich výsledky následně porovnávat, je důležité, aby byly při zkouškách vždy podobné podmínky. Nelineární chování konstrukce, kdy při změně intenzity zatížení, které konstrukci rozkmitává, se mění i vlastní frekvence, lze vyloučit například tím, že při zkoušce bude používán vždy stejný systém buzení. Další věcí, která může modální charakteristiky ovlivňovat je množství proměnného zatížení na konstrukci. Například u mostu, který je po celé délce zaplněn těžkými vozidly, bude hmota podílející se na jeho kmitání jiná než u zcela prázdného mostu. Hmotnost je jedním z faktorů, které vlastní kmitání ovlivňují, není to pouze tuhost konstrukce. Je tedy důležité, aby z hlediska zatížení byly při opakovaném měření obdobné podmínky.

Výrazným faktorem, který ovlivňuje modální charakteristiky, je teplota konstrukce. Aby bylo opakované měření co nejpřesnější vzhledem k předchozím měřením, měla by být konstrukce vystavena vždy stejné teplotě. Toho se ale na konstrukci vystavené vnějším podmínkám těžko dosahuje. Autoři publikace [51] se faktor teploty snažili vyrovnat zavedením regresního koeficientu, který upravuje hodnoty základní vlastní frekvence v závislosti na teplotě, při které byly naměřeny. Tento regresní koeficient nastavili po kontinuálním ročním měření teplot konstrukce na změny naměřených hodnot vlastní frekvence. Na Obr. 11 vlevo je zobrazen graf měřené základní vlastní frekvence od 5.8.2008 do 1.6. 2009. Tečky zobrazují jednotlivá měření, která jsou proložena křivkou. Na grafu vpravo jsou zobrazeny měřené teploty ze stejného časového období. Na Obr. 12 jsou nasbíraná data základní vlastní frekvence (osa Y) zobrazena v závislosti na teplotě (osa X). Tyto data jsou zobrazeny pomocí Teček a proložena červenou křivkou. Je na nich vidět, že s rostoucí teplotou hodnota základní vlastní frekvence klesá. Pomocí trojúhelníčků jsou zobrazena stejná naměřená data, která jsou ale opravena regresním koeficientem. Jsou proložena modrou křivkou, na které je vidět, že hodnota základní vlastní frekvence se se změnou teploty nemění.



Obr. 11: Na levém obrázku je zobrazena naměřená základní vlastní frekvence v průběhu roku a na pravém obrázku naměřená teplota [51].



Obr. 12: Zavedení regresního koeficientu. Červená čára jsou naměřené hodnoty základní vlastní frekvence v závislosti na teplotě. Modrá čára jsou vlastní frekvence po vyrovnání vlivu teploty [51].

Monitorování základních dynamických vlastností konstrukce je tedy velmi komplexní problém. Naměření změny vlastních frekvencí nemusí vždy nutně znamenat změnu v tuhosti konstrukce a nelze ihned učinit závěr, že je konstrukce nějakým způsobem poškozena.

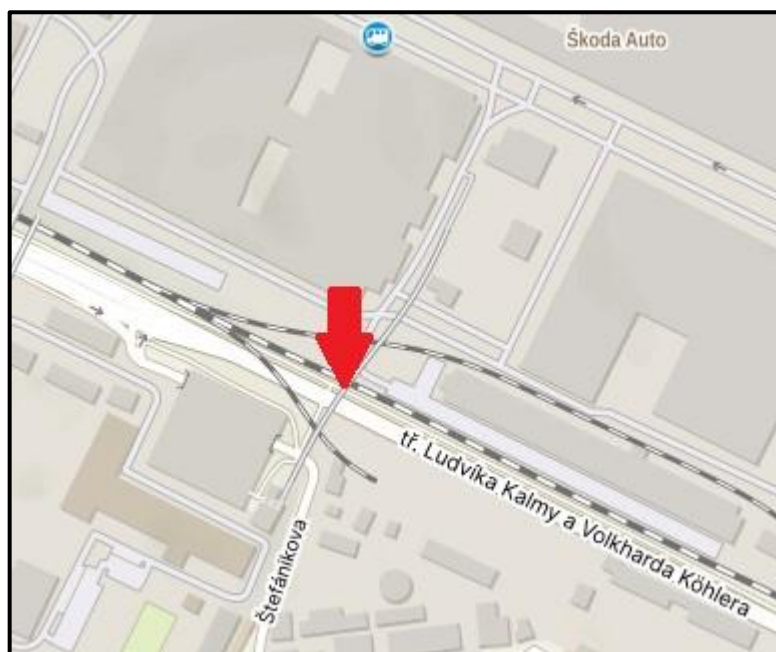
Změna vlastních frekvencí může být problematická nejen z hlediska změny tuhosti konstrukce, ale například u lávek pro pěší se v průběhu životnosti mohou vlastní frekvence lávky posunout do rezonanční oblasti s lidským krokem, a to může mít vliv na jejich vynucené kmitání. Změna vlastních frekvencí byla naměřena také na lávce pro pěší v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi. Právě na tuto lávku je zaměřena praktická část této práce.

## 6 ANALÝZA ZMĚNY DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ LÁVKY PRO CHODCE V AREÁLU ŠKODA AUTO MLADÁ BOLESLAV

Na lávce pro pěší v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi byly doposud realizovány tři dynamické experimenty. První experiment byl proveden před uvedením objektu do provozu v prosinci 2002, další v září 2022 a poslední v dubnu 2023. Součástí všech těchto experimentů bylo provedení experimentální modální analýzy konstrukce. Při zkoušce lávky před uvedením do provozu byly naměřeny vyšší hodnoty vlastních frekvencí než při dalších dvou experimentech. Tato diplomová práce popisuje realizaci a vyhodnocení experimentální modální analýzy provedené v roce 2023 a zabývá se možnou příčinou změny vlastních frekvencí. Za tímto účelem byl vytvořen numerický model konstrukce.

### 6.1 POPIS OBJEKTU

Lávka pro chodce, která je předmětem této diplomové práce, se nachází v areálu firmy ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi. Lávka vede přes dvě koleje vlečky, železniční trať Mladá Boleslav – Stará Paka a přes silniční komunikaci na třídě Ludvíka Kalmy a Volkharda Köhlera. Spojuje dvě části areálu, které jsou touto silnicí rozděleny. Lávka není přístupná pro veřejnost, ale je hodně využívána zaměstnanci společnosti.



Obr. 13: Umístění objektu na mapě, zdroj Mapy.cz.

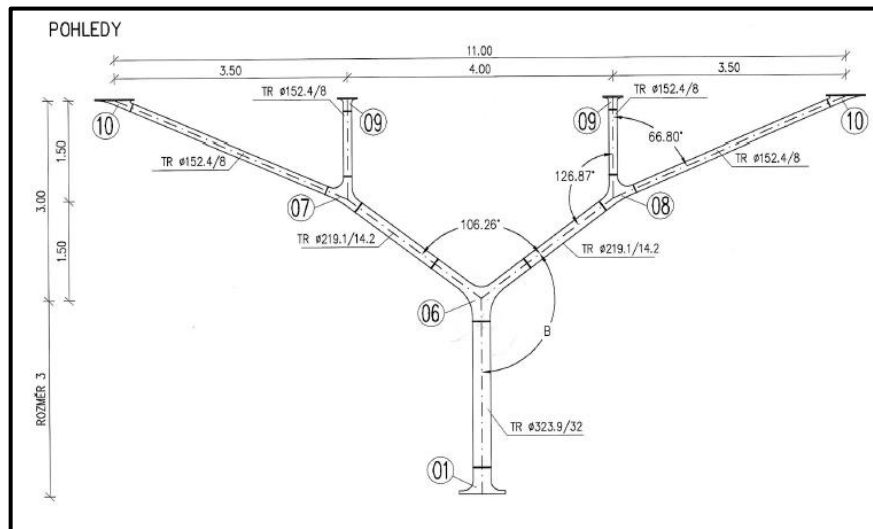
Lávka má 11 polí, celkovou délku 226 m a délka přemostění je 191,5 m. Rozpětí nejdelšího pole lávky je 22 m. Niveleta lávky je směrově tvořena dvěma na sebe navazujícími protisměrnými směrovými oblouky a výškově je vedena v jednom vrcholovém výškovém oblouku. Uprostřed lávky u pilíře P6 se nachází schodišťová rampa. Mostovka lávky je železobetonová a její příčný řez nad pilíři je obdélníkového tvaru šířky 3,0 m a tloušťky 400 mm. V oblasti středů polí je mostovka ve střední části příčného řezu vylehčena na tloušťku 200 mm (viz Obr. 15).



*Obr. 14: Spodní pohled proti směru staničení na nosnou konstrukci lávky a na schodišťovou rampu.*



větvi v další trubky průměru 152,4 mm s tloušťkou stěny 8 mm. Pilíře jsou navrženy jako rámové stojky, na pilířích tedy nejsou ložiska.



Obr. 17: Tvar pilíře P030 až 080 [52].



Obr. 18: Detailní pohled na spojení mostovky lávky a pilíře.

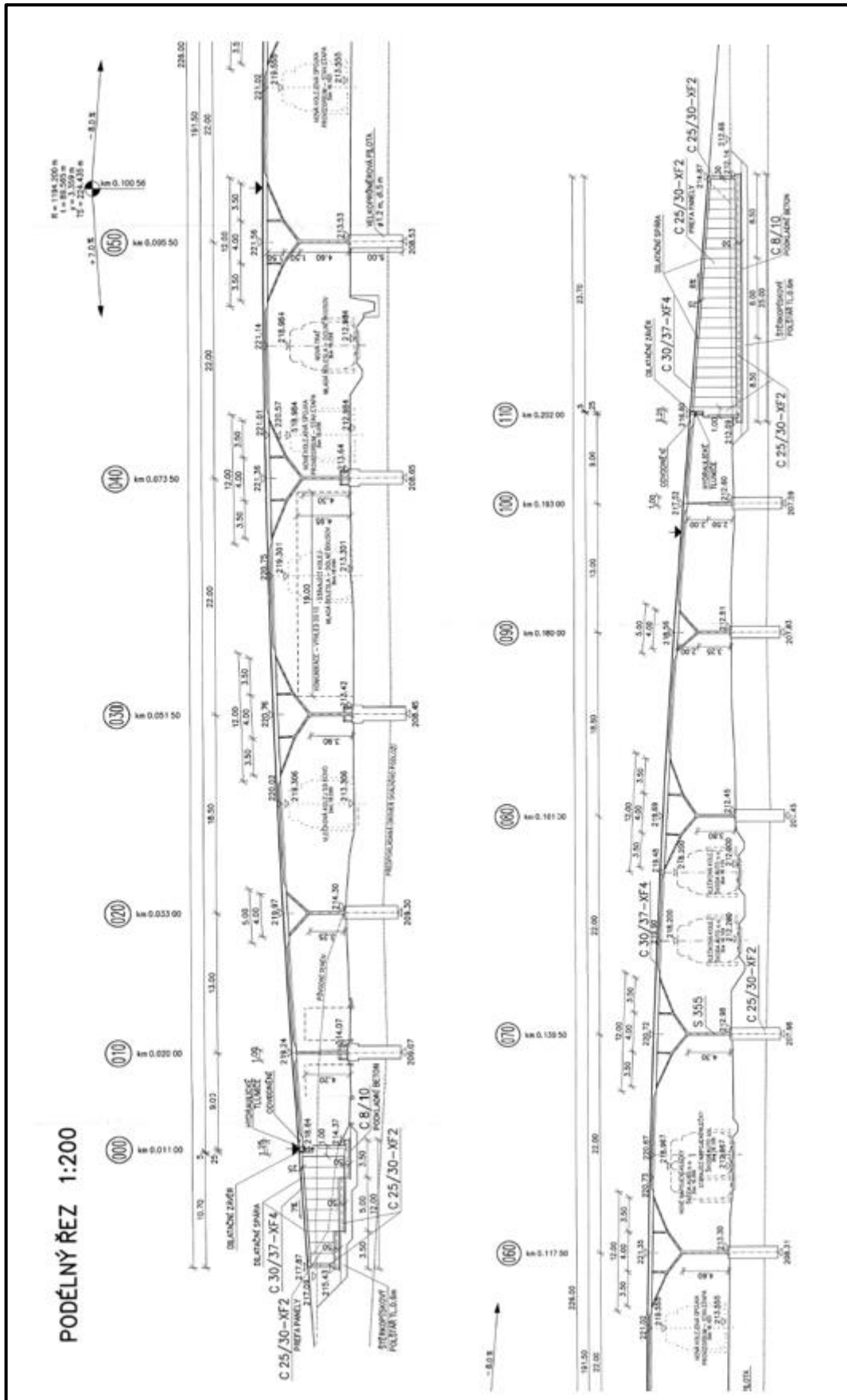
Pilíře jsou založeny na pilotách o průměru 1,2 m (pod jedním pilířem se nachází jedna pilota) procházejícími vrstvou navážek a vetknutými do skalního podloží nacházejícího se 4 m pod úrovní terénu. Opěry podírají mostovku kyvnými pruty umožňujícími podélnou dilataci konstrukce. Opěry jsou dále vybaveny hydraulickými tlumiči, na každé opěře dvěma, tlumícími kmitání lávky v podélném směru.



*Obr. 19: Spodní pohled na nosnou konstrukci lávky a na opěru O110.*

Podélný řez lávkou je za účelem lepší přehlednosti v této práci rozdělen do 2 částí. Na první části jsou viditelná pole lávky 1 až 5 a na druhé části pole 6 až 11 (Obr. 20).





Obr. 20: Podélný řez lávkou rozdělený na 2 části [52].

## 6.2 EXPERIMENT NA LÁVCE Z ROKU 2023

Dynamický experiment, na jehož přípravě, realizaci a vyhodnocení výsledků se autor této diplomové práce podílel, proběhl ve třech po sobě jdoucích dnech. První den experimentu byl pátek 21. 4. 2023 a v tento den byla lávka otevřená pro zaměstnance společnosti a na lávce se provedla dynamické zkouška zatěžovací. Nejprve se vyšetřovalo kmitání lávky vyvolané reálným davem lidí, kteří se po lávce pohybovali při výměně ranní a odpolední směny, a v odpoledních hodinách bylo prověřováno kmitání způsobené uspořádanými skupinami chodců. Večer bylo provedeno měření zaměřené na dynamickou odezvu lávky na účinek skupiny vandalů.

V sobotu 22. 4. byla provedena na lávce experimentální modální analýza, která bude dále v této práci podrobněji popsána.

V neděli 23. 4. byl realizován experiment zaměřený na kmitání mostovky vyvolané harmonickými budícími silami a dále byly osazeny snímače na pilíře a byla provedena modální analýza pilířů.

### 6.2.1 Měřicí linka

Použité základní členy měřicí linky jsou stejné, jako v případě experimentu, na který byla zaměřena autorova bakalářská práce a popis jednotlivých členů je tedy z této práce převzat [52].

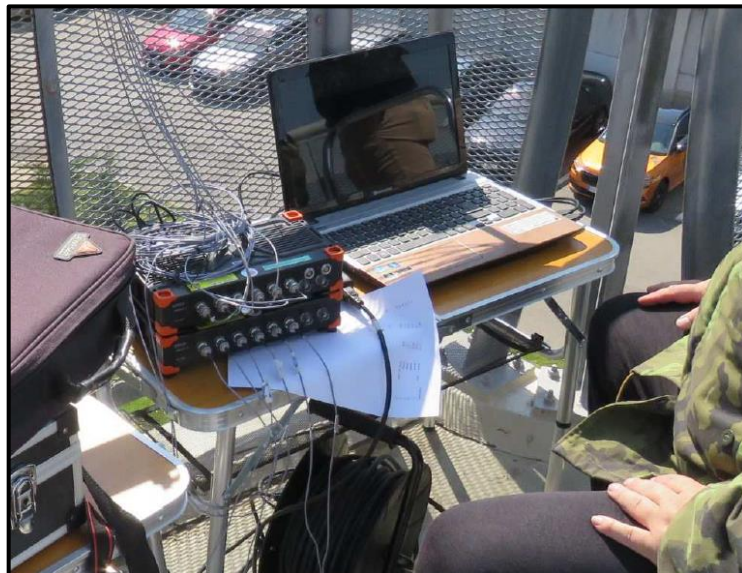
Měřicí linka použitá při experimentu se skládala z deseti akcelerometrů od firmy Brüel & Kjær typu 8344, dvou měřících ústředěn SIRIUS 6xACC – 2xACC+ a SIRIUS 8xACC od firmy DEWESoft s.r.o a řídicího počítače. Ústředny byly navzájem synchronizovány, pomocí USB portu byly připojeny k řídicímu počítači a ovládány byly pomocí programu DEWESoft. Tento program rovněž umožnil on-line vyhodnocení FFT z naměřeného kmitání lávky.

Použité snímače zrychlení typ 8344 byly piezoelektrické snímače s pracovním rozsahem od 0,2 Hz do 3 kHz, pracovním teplotním rozsahem od -50 °C do 100 °C a s citlivostí cca 2500 mV/g [53]. Tyto snímače byly speciálním koaxiálním kabelem připojeny k měřícím ústřednám. Příklad akcelometru typu 8344 od firmy Brüel & Kjær je zachycen na Obr. 21.



*Obr. 21: Tři akcelerometry od firmy Brüel & Kjær typu 8344 připevněné k přenosnému ocelovému závaží.*

Měřicí ústředny byly použity dvě, protože obě mají pouze osm kanálů a snímačů bylo při experimentu použito deset. Tyto ústředny lze řídit pouze pomocí programu DEWESoft z řídicího počítače. Měřicí ústředny SIRIUS mají osm napětových vstupů, přičemž všechny kanály mají svůj vlastní 2×24bitový A/D převodník, tzv. DualCore, který je schopen měřit s dynamickým rozsahem až 160 dB. Pro zajištění současného měření na všech aktivních kanálech jsou A/D převodníky navzájem synchronizovány [54].



*Obr. 22: Měřicí ústředny SIRIUS a řídicí počítač.*

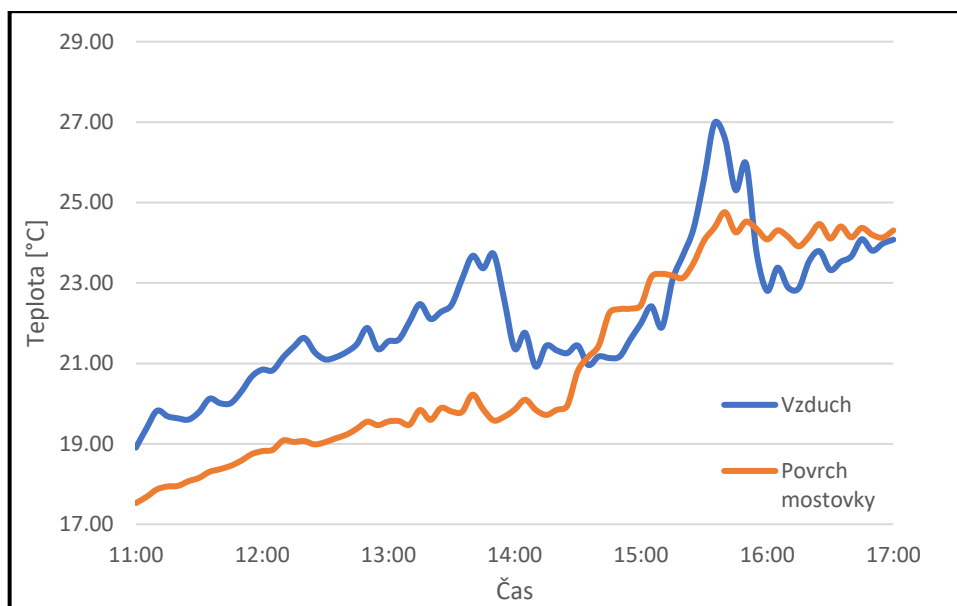
## 6.2.2 Experimentální modální analýza

V sobotu 22. 4. 2023 proběhla na lávce v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi experimentální modální analýza. Cílem této experimentální modální analýzy (dynamické zkoušky informativní ve smyslu ČSN 73 2044 [12]) bylo zjištění významných vlastních frekvencí a jim příslušných globálních vlastních tvarů vodorovné nosné konstrukce lávky.

### 6.2.2.1 Meteorologické podmínky

Termín zkoušky byl vybírán s ohledem na počasí. Při průběhu zkoušky byla malá oblačnost, která se měnila v rozmezí od jasno (pokrytí oblohy 0 %) až skorojasno (pokrytí oblohy cca 20 %). Rychlost větru během dne kolísala mezi bezvětřím a slabým větrem. Nejvyšší naměřené rychlosti větru se pohybovaly kolem 5 m/s.

Průběh teplot vzduchu 0,5 m nad horní povrchem mostovky a horní hrany mostovky byl měřen teploměrem ALMEMO 2290-2 firmy Ahlborn. Nejistota měření tohoto teploměru je 0,2 °C. Teplota byla zaznamenávána cca každých pět minut. Průběh naměřené teploty během provádění zkoušky je zobrazen na Obr. 23.

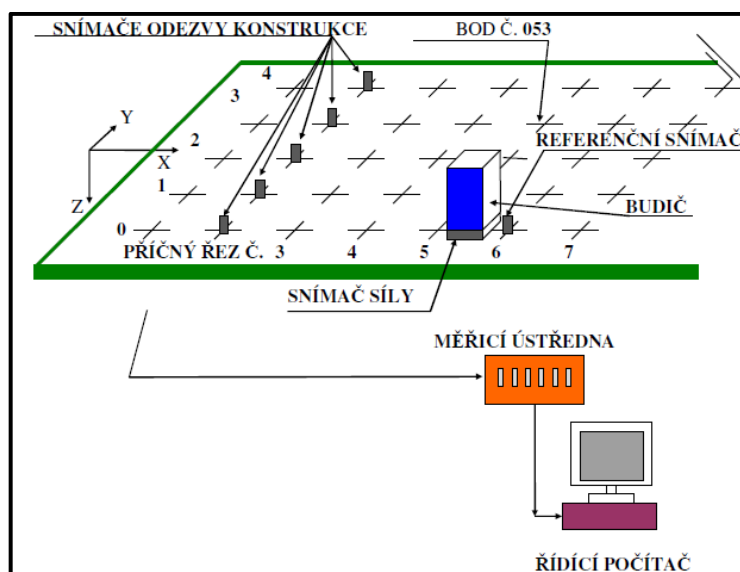


Obr. 23: Průběh teplot vzduchu a horního povrchu mostovky dne 22.4. 2023.

### 6.2.2.2 Uspořádání experimentální modální analýzy

Na mostovce lávky byl umístěn budič do místa, ze kterého dokázal vybudit všechny významné vlastní tvary konstrukce. V tomto případě se jednalo o polovinu 5. pole lávky. Jednalo se o elektrodynamický budič TIRAVIB 5140. Tento budič v průběhu experimentu rozkmitával konstrukci budící silou náhodného charakteru. V blízkosti budiče byly v referenčním bodě

umístěny dva snímače, jeden byl orientován ve svislém směru a druhý ve směru vodorovném kolmém na podélnou osu lávky. Na konstrukci byl umístěn ještě jeden referenční snímač, který nebyl v blízkosti budiče. Místa pro umístění budiče a referenčních snímačů byla vybrána na základě dvou předchozích experimentů, které na lávce proběhly, a na základě zkušeností s podobnými mostními objekty. Pro vyšetření vlastních tvarů lávky byla zvolena síť bodů na její mostovce. Obecné schéma uspořádání experimentální modální analýzy použité při tomto experimentu je ukázáno na Obr. 24. Orientace souřadných os X, Y a Z využívaná při experimentu odpovídá schématu z Obr. 24.

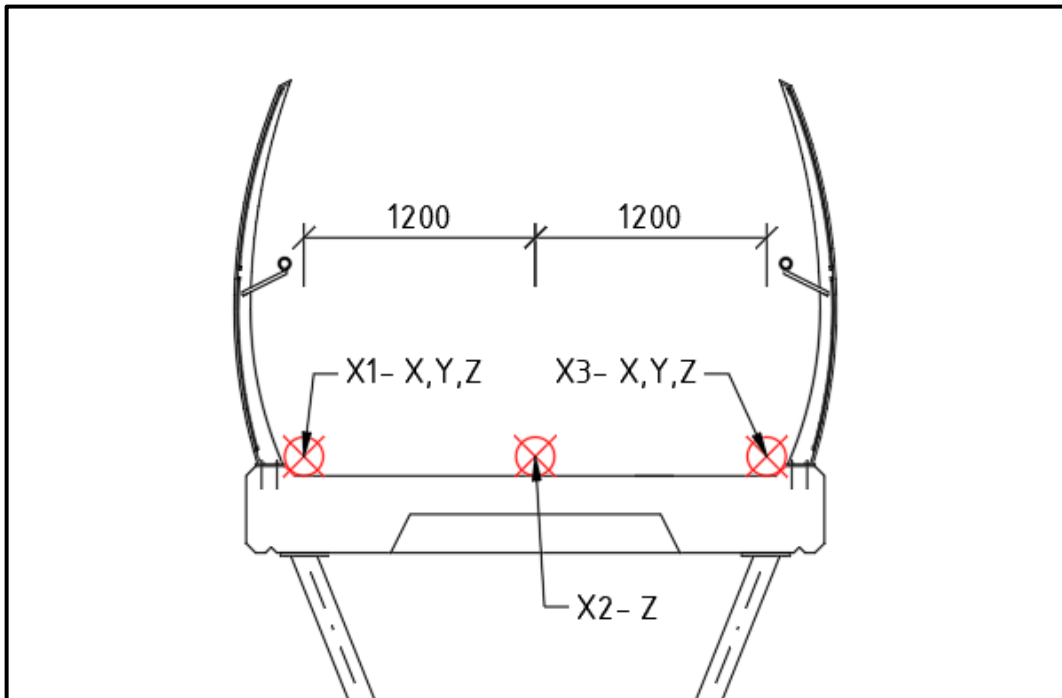


Obr. 24: Obecné schéma uspořádání měření použité při experimentu. Upraveno z [14].

Konstrukce byla rozdělena celkem do 52 příčných řezů. V každém řezu se měřilo ve třech bodech. Označení bodů v síti je ve formátu X1, X2 nebo X3, kde písmeno X značí číslo řezu, v kterém je bod umístěn, a číslice 1, 2, nebo 3 polohu bodu v příčném řezu. Bod 1 je vždy na levé straně mostovky při pohledu po směru staničení. V bodech řezu č. 1 a 3 byly snímače orientovány tak, aby měřily kmitání ve směrech X, Y a Z (viz Obr. 25). V bodě 2 bylo měřeno pouze ve svislém směru Z. Schéma uspořádání bodů a na nich umístěných snímačů v příčném řezu lávky je vykresleno na Obr. 25 a dokumentováno pomocí fotografie z realizace experimentu na Obr. 26.

V Tab. 5 je výpis sledovaných řezů na konstrukci a jejich staničení, kdy řez č. 1 v místě opěry O000 má staničení 0,00 m. V řezu číslo 20 byl umístěn referenční bod s dvěma snímači zrychlení na pozici 1 v příčném řezu (bod 201) a vedle něj se nacházel budič. Druhý referenční bod byl v řezu 31 na pozici 3 v příčném řezu (bod 313). V tomto referenčním bodě byl použit

pouze jeden snímač orientovaný v ose Y. V tabulce jsou žlutě označena místa podpěr a zeleně řezy s referenčním bodem.



Obr. 25: Rozmístění bodů v příčném řezu s označením orientace příslušných snímačů.



Obr. 26: Pohled proti směru staničení na snímače zrychlení umístěné ve sledovaném řezu.

Tab. 5: Výpis řezů na konstrukci lávky, ve kterých bylo prováděno měření

Číslo řezu	Staničení	Číslo řezu	Staničení	Číslo řezu	Staničení
<b>Opěra 000</b>		18	67.67	35	131.25
<b>1</b>	<b>0.00</b>	19	70.60	36	133.92
2	3.00	<b>Referenční snímač Y, Z, budič</b>		37	136.88
3	6.00	<b>20</b>	<b>73.53</b>	38	139.85
4	12.64	21	76.45	39	142.81
5	16.28	22	79.38	40	145.77
6	19.92	23	81.95	41	148.37
<b>Pilíř 020</b>		<b>Pilíř 050</b>		<b>Pilíř 080</b>	
<b>7</b>	<b>22</b>	<b>24</b>	<b>84.57</b>	<b>42</b>	<b>150.57</b>
8	24.00	25	87.16	43	153.32
9	29.50	26	89.75	44	156.07
10	35.00	27	95.57	45	161.60
<b>Pilíř 030</b>		28	101.40	46	167.11
<b>11</b>	<b>40.52</b>	<b>Pilíř 060</b>		47	171.04
12	46.02	<b>29</b>	<b>106.57</b>	48	174.71
13	51.52	30	112.09	49	178.39
14	57.02	<b>Referenční snímač Y</b>		50	185.08
15	59.77	<b>31</b>	<b>117.57</b>	51	188.09
<b>Pilíř 040</b>		32	123.05	<b>Opěra 110</b>	
<b>16</b>	<b>62.52</b>	33	125.81	<b>52</b>	<b>191.11</b>
17	65.10	<b>Pilíř 070</b>			
		<b>34</b>	<b>128.57</b>		

### 6.2.2.3 Průběh experimentální modální analýzy

Poté, co byl na konstrukci osazen budič a byly umístěny referenční snímače do řezů 20 a 31, se přešlo k měření kmitání konstrukce v jednotlivých řezech. Měření začalo po 11:00 a skončilo před 17:00.

Postupovalo se proti směru staničení a v jednom řezu bylo měřeno vždy sedmi snímači zrychlení najednou. Snímače byly pomocí magnetů přichyceny na ocelová závaží (viz Obr. 21) a jejich rozmístění odpovídalo schématu z Obr. 25. V každém řezu se tedy ve všech bodech měřilo ve svislém směru, a navíc v bodech X1 a X3 bylo měřeno ve směru rovnoběžném s podélnou osou lávky a ve směru kolmém na podélnou osu lávky. Každý záznam trval přibližně 5 minut. Celkem bylo použito 52 řezů, tedy výsledná naměřená síť byla tvořena celkem 156 body. Při experimentu byl použit systém zobrazený na Obr. 24. Naměřené kmitání lávky

bylo tedy vztahováno vzhledem k budící síle, ale také vzhledem k vibračním naměřeným referenčními snímači v referenčních bodech.

#### 6.2.2.4 Vyhodnocení experimentální modální analýzy

Naměřené časové záznamy z měření in situ byly uloženy do počítače a následně podrobněji analyzovány v režimu off-line. K vyhodnocení vlastních frekvencí a vlastních tvarů byl použit program MEscopeVES od firmy Vibrant Technology, Inc.

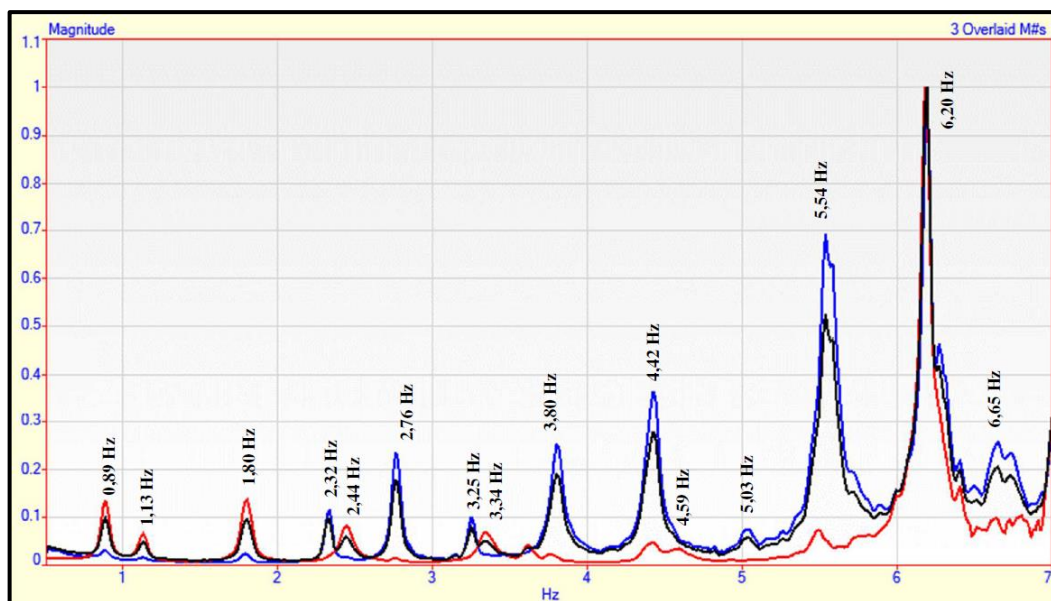
Naměřené záznamy kmitání mostovky lávky byly pomocí FFT převedeny z časové do frekvenční oblasti. Budící síly, které rozkmitávaly nosnou konstrukci lávky, a které byly vyvolané budičem, mohly být v průběhu zkoušky ovlivněny jinými dynamickými vlivy, jako je vítr nebo technická seismicita, jejichž velikost nebylo možné měřit. Vzhledem k tomu byly v jednotlivých sledovaných bodech lávky **k** vyhodnoceny tzv. frekvenční přenosové funkce  $ODSH_{kR}(if)$ . Tato funkce je komplexní, skládající se z reálné a imaginární složky a obvykle se udává v goniometrickém vyjádření pomocí magnitudy a fáze. Magnituda je vyjádřena jako magnituda frekvenční funkce kmitání konstrukce (výchyly, rychlosti kmitání, zrychlení) naměřená v daném bodě **k**. Při vyhodnocení fázového posunu funkce  $ODSH_{kR}(if)$  je fáze frekvenčního spektra odezvy v daném bodě vztažena k fázi frekvenčního spektra odezvy v referenčním bodě **R**.

Protože všechny body konstrukce nebyly měřeny ve stejném časovém okamžiku, ale měření bylo rozděleno do 52 řezů a úroveň budících sil nemusela být při jednotlivých měřeních shodná, byla stanovena i funkce Transmisibility  $T_{kR}(if)$ . Tato funkce se stanoví pomocí vzorce:

$$T_{kR}(if) = \frac{\ddot{w}_k(if)}{\ddot{w}_R(if)}, \quad (28)$$

kde  $i$  je imaginární jednotka,  $\ddot{w}_k(if)$  je odezva konstrukce v měřítku zrychlení v bodě **k** zobrazená ve frekvenční oblasti a  $\ddot{w}_R(if)$  je odezva konstrukce v měřítku zrychlení v referenčním bodě **R**. Při takto stanovených funkcích jsou odezvy konstrukce v jednotlivých měřících sestavách (řezech) vzájemně vždy ve stejném poměru bez ohledu na velikost aktuálně působících budících sil. Jsou-li známé vlastní frekvence konstrukce, mohou být z těchto funkcí zpřesněny vlastní tvary konstrukce. Na Obr. 27 je vykreslena integrální funkce vyhodnocovacího programu „Complex Mode Indicator Function“ (CMIF), ve které jsou vyznačeny vyhodnocené vlastní frekvence lávky. Černá křivka byla vyhodnocena přes všechny sledované body, červená pouze přes snímače orientované ve vodorovném směru Y a modrá pouze přes snímače orientované ve svislém směru Z.





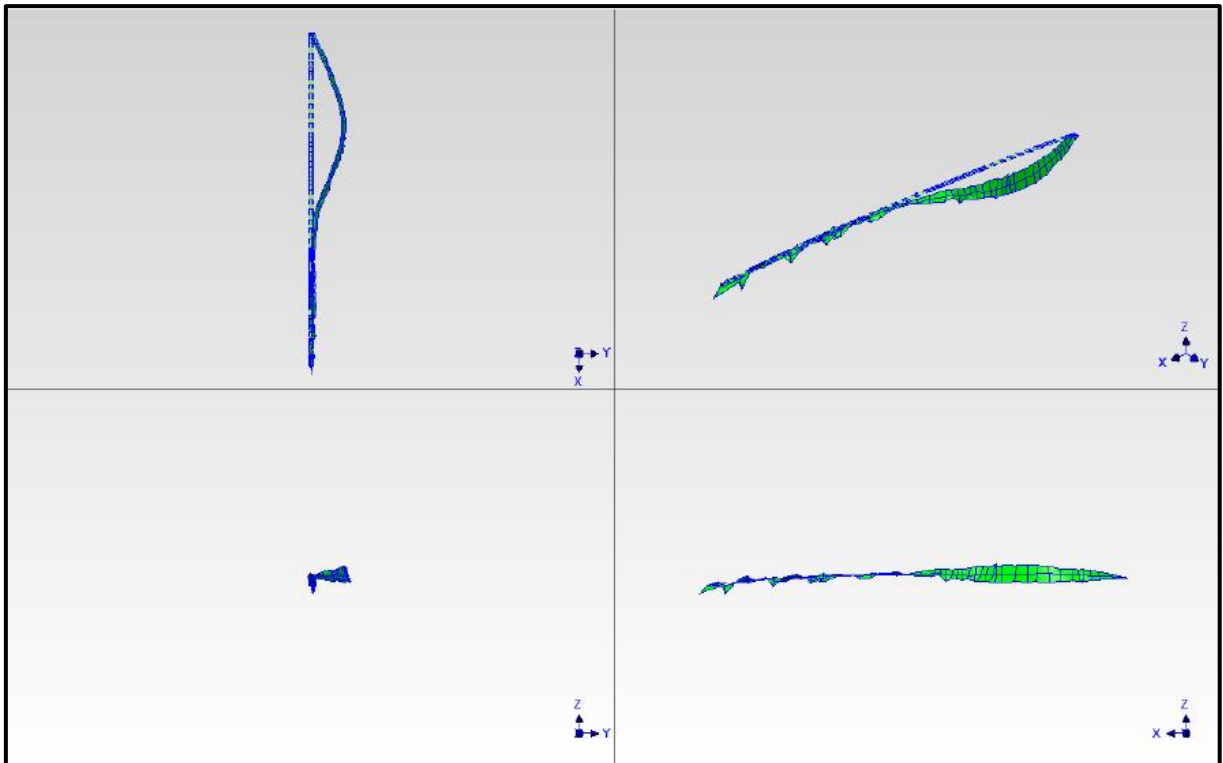
Obr. 27: Funkce CMIF (Complex Mode Indicator Function) s vyznačenými vlastními frekvencemi příslušnými ke globálním vlastním tvarům lávky.

#### 6.2.2.4.1 Vyhodnocené vlastní frekvence a vlastní tvary

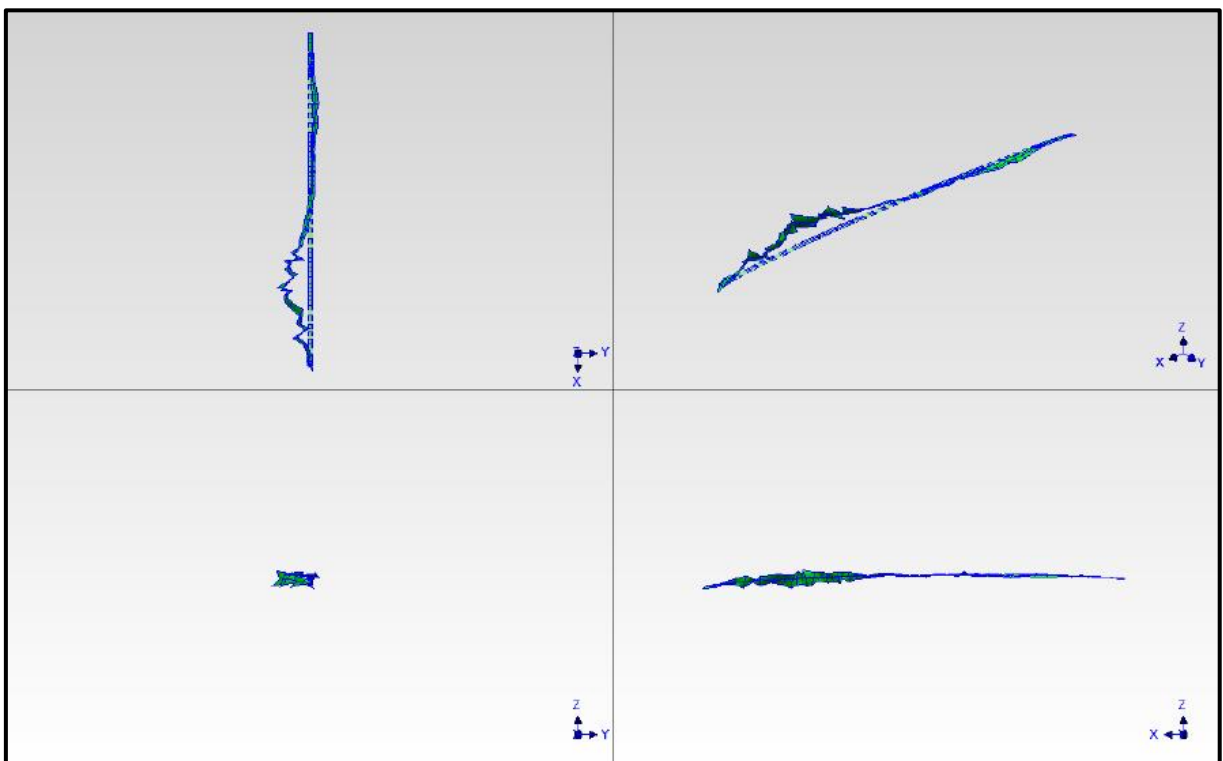
V následující tabulce jsou shrnuty vlastní frekvence lávky, které byly vyhodnoceny při experimentu, a popsán charakter jim příslušejících vlastních tvarů (Tab. 6). Následují obrázky, na kterých jsou vykresleny vyhodnocené vlastní tvary.

Tab. 6: Přehled vyhodnocených vlastních frekvencí a charakter jim příslušných vl. tvarů

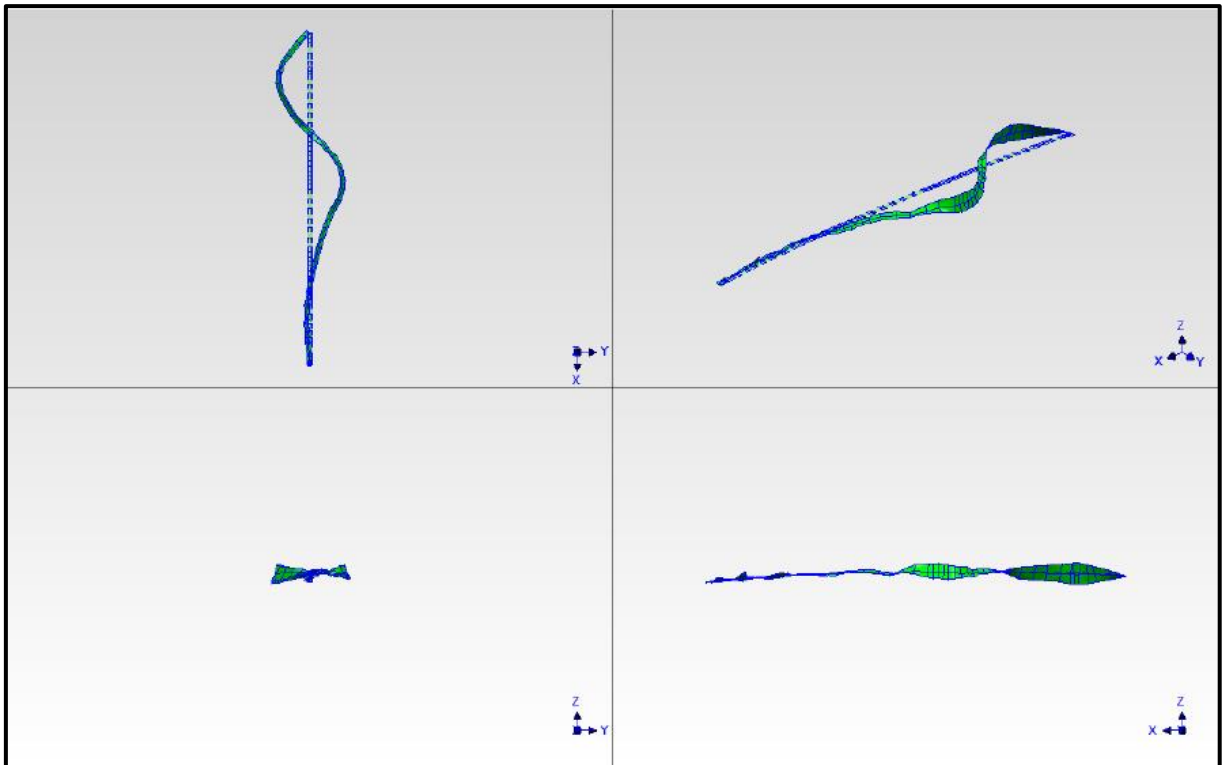
Poř. číslo (j)	Vlastní frekvence $f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vlastního tvaru
(1)	0.89	1. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(2)	1.13	2. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(3)	1.80	3. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(4)	2.32	1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(5)	2.44	4. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(6)	2.76	2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(7)	3.25	3. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(8)	3.34	5. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(9)	3.80	4. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(10)	4.42	5. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(11)	4.59	6. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky
(12)	5.03	6. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(13)	5.53	7. tvar svislého ohybového kmitání mostovky
(14)	6.20	1. tvar kroutivého kmitání mostovky
(15)	6.65	8. tvar svislého ohybového kmitání mostovky



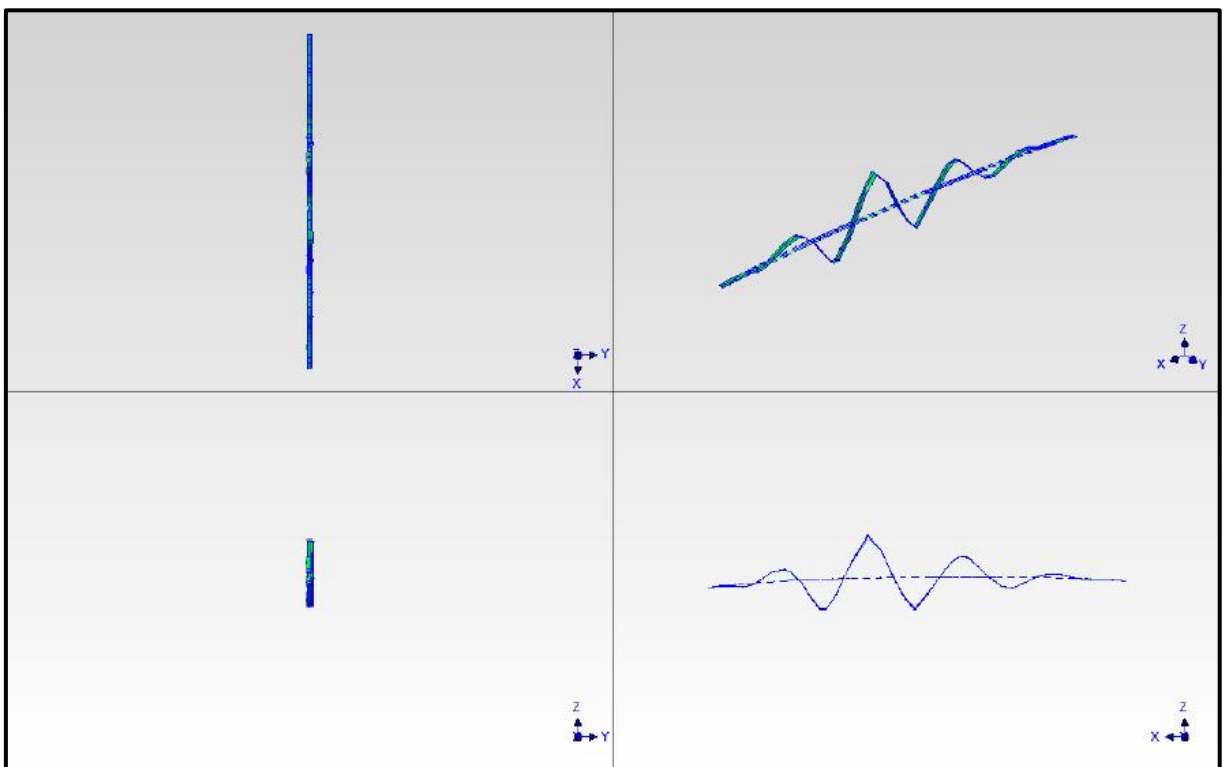
Obr. 28: 1. tvar vl. kmitání,  $f_{(1)} = 0.89$  Hz (1. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



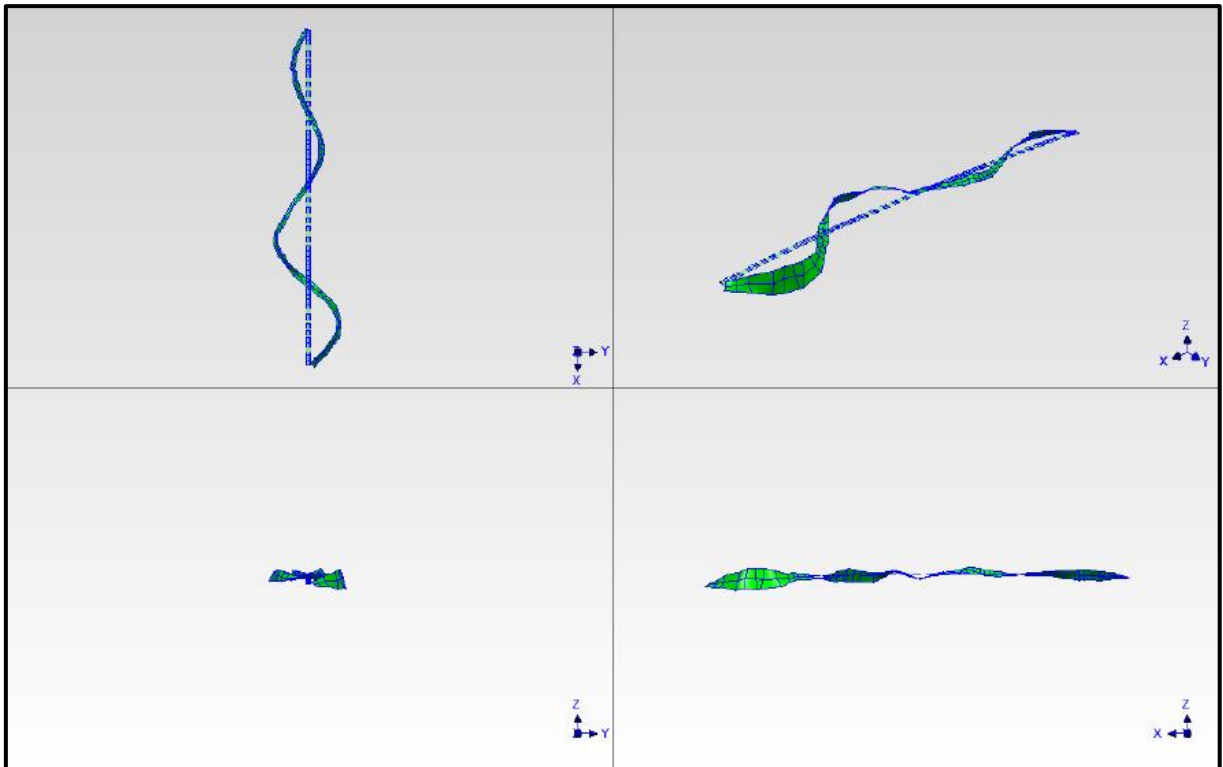
Obr. 29: 2. tvar vl. kmitání,  $f_{(2)} = 1.13$  Hz (2. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



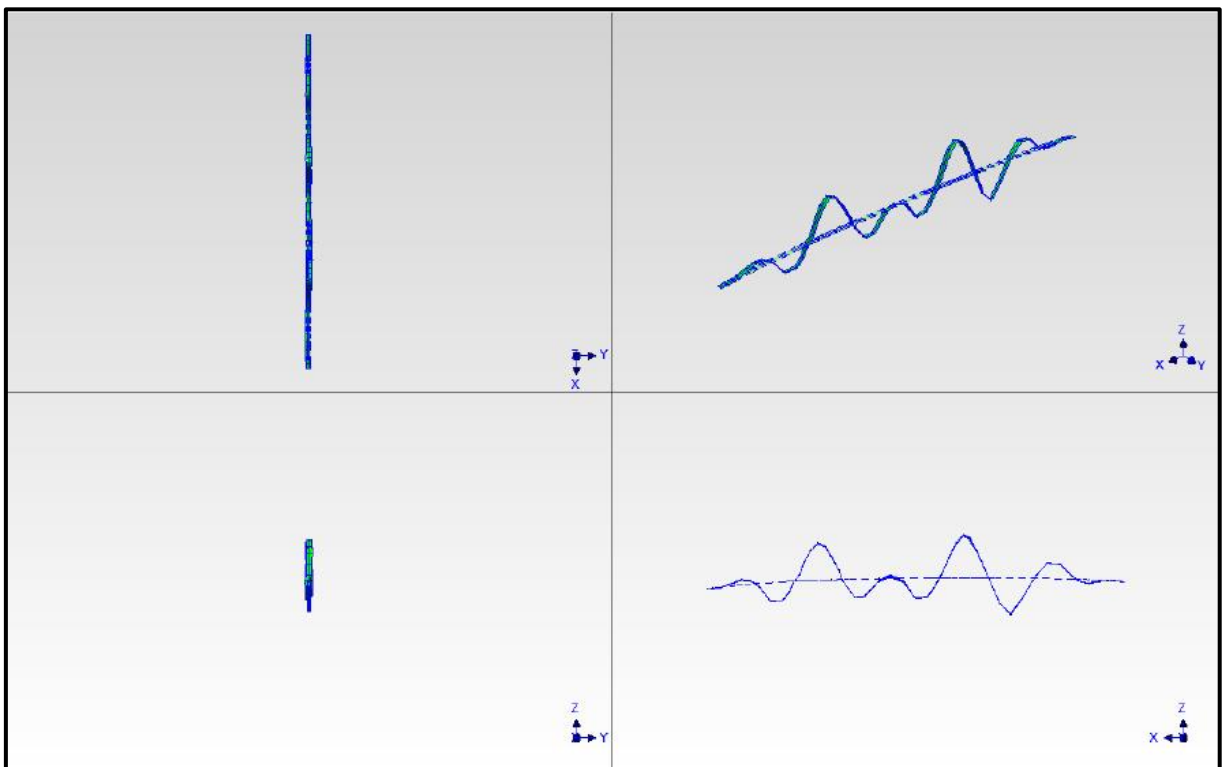
Obr. 30: 3. tvar vl. kmitání,  $f_{(3)} = 1.80 \text{ Hz}$  (3. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



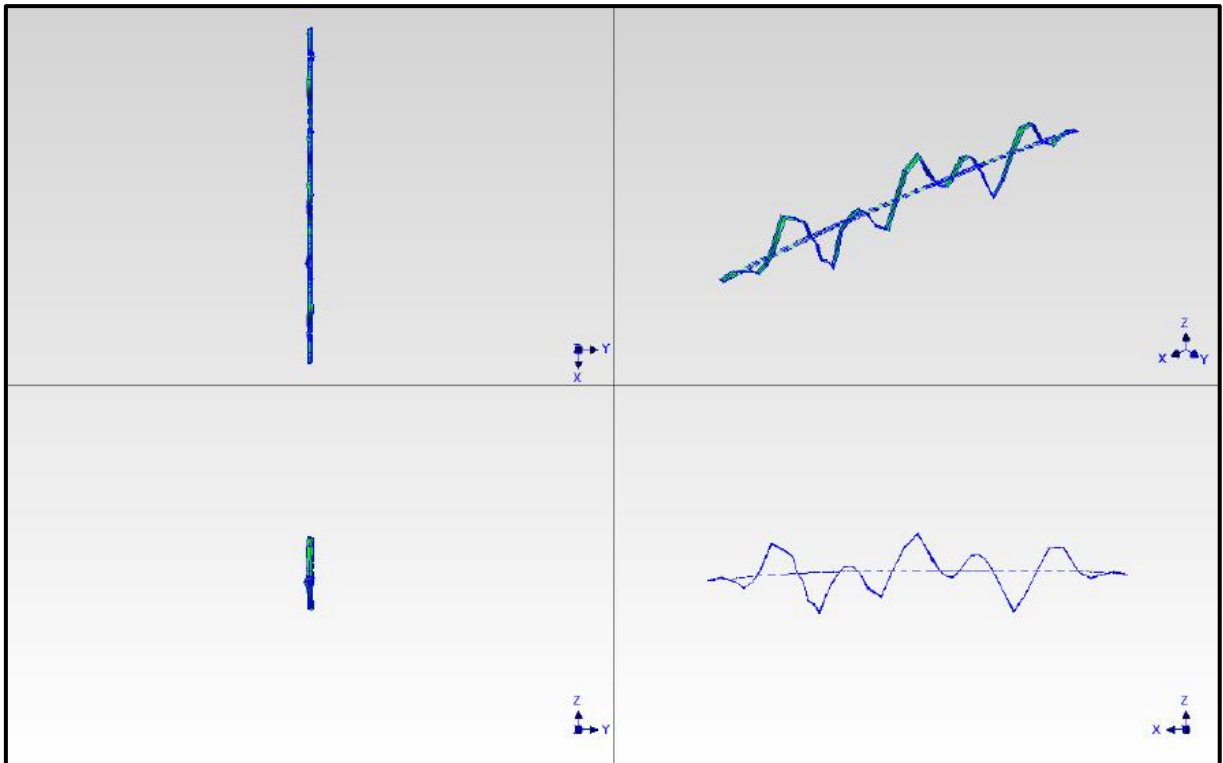
Obr. 31: 4. tvar vl. kmitání,  $f_{(4)} = 2.32 \text{ Hz}$  (1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



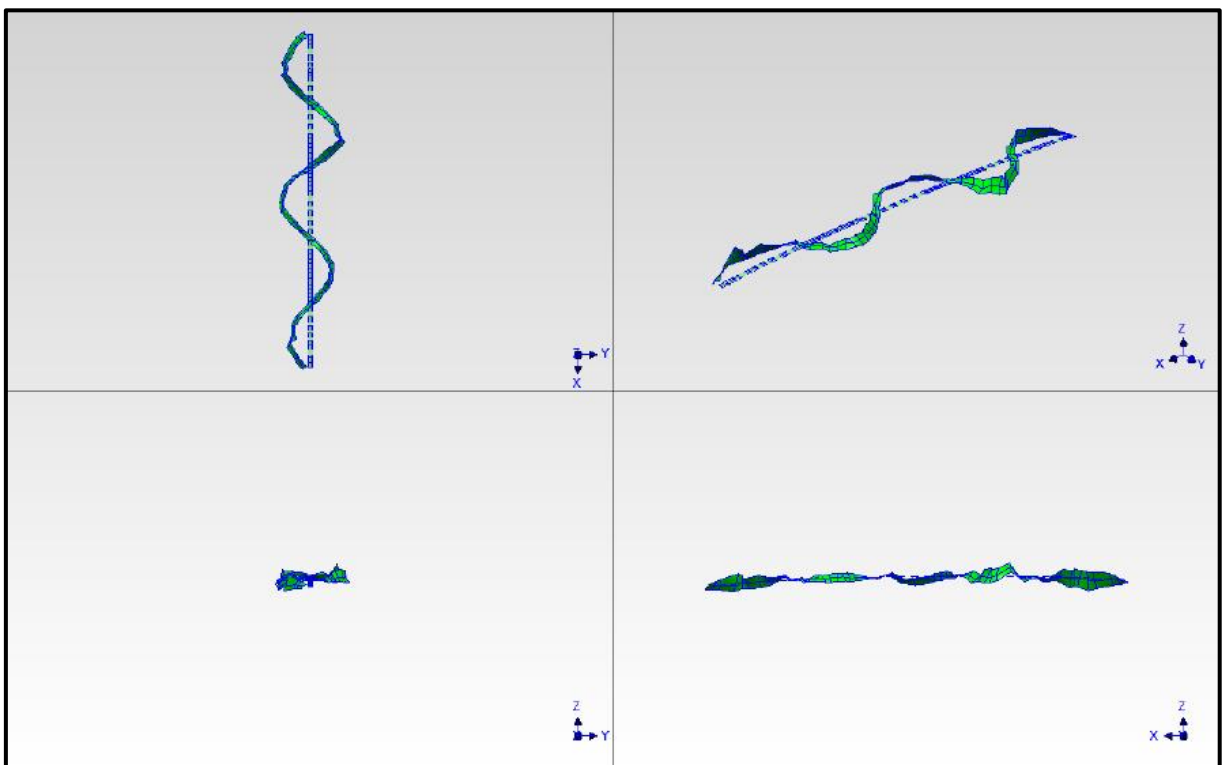
Obr. 32: 5. tvar vl. kmitání,  $f_{(5)} = 2.44 \text{ Hz}$  (4. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



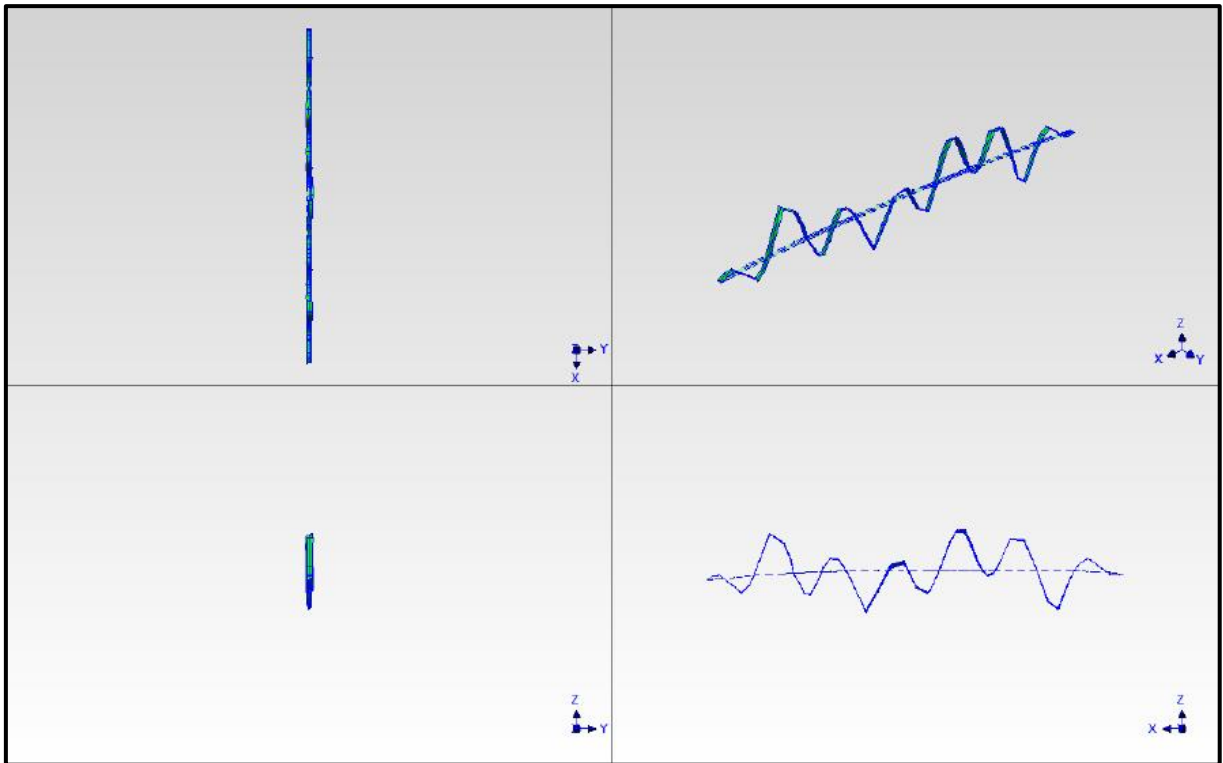
Obr. 33: 6. tvar vl. kmitání,  $f_{(6)} = 2.76 \text{ Hz}$  (2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



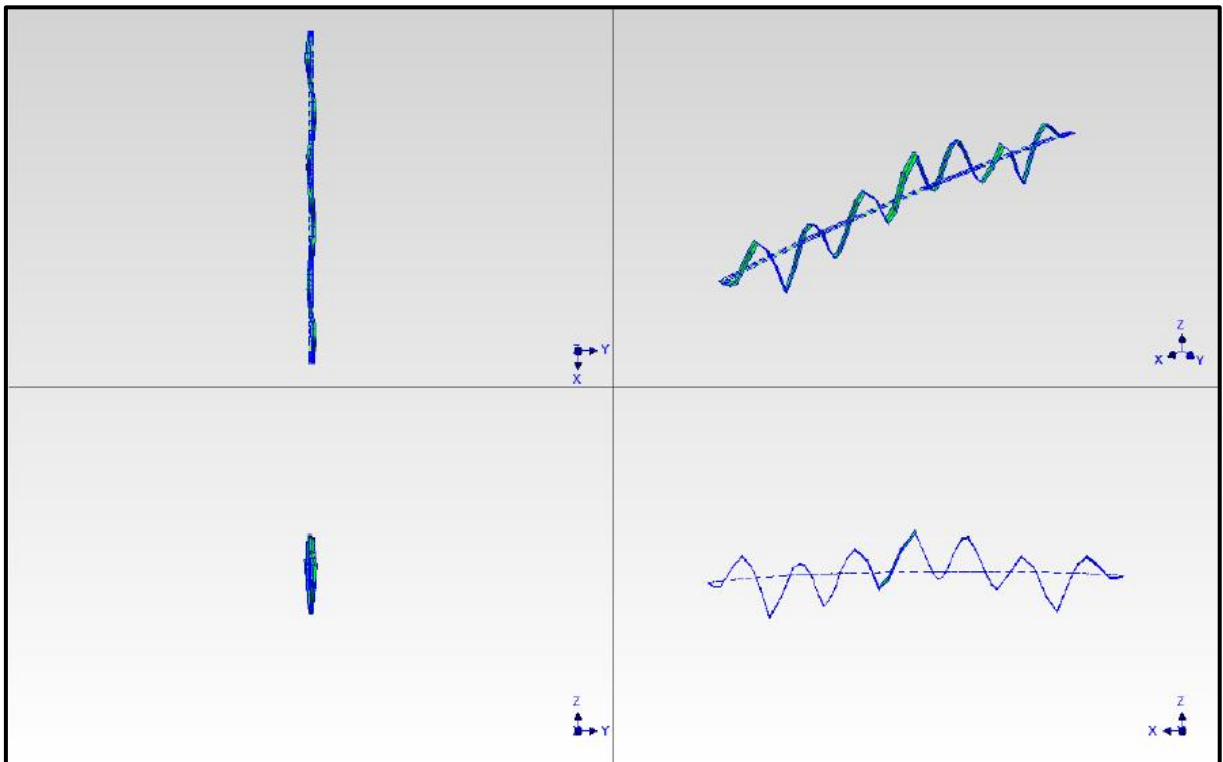
Obr. 34: 7. tvar vl. kmitání,  $f_{(7)} = 3.25 \text{ Hz}$  (3. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



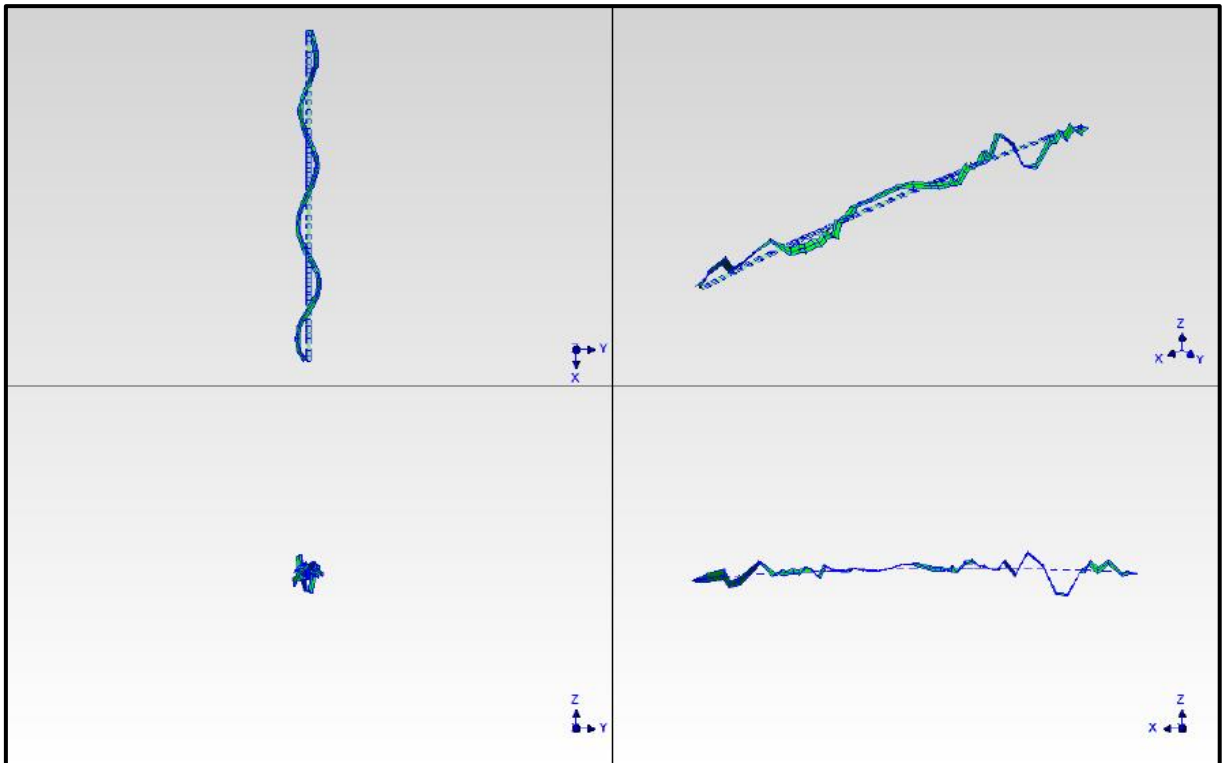
Obr. 35: 8. tvar vl. kmitání,  $f_{(8)} = 3.34 \text{ Hz}$  (5. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



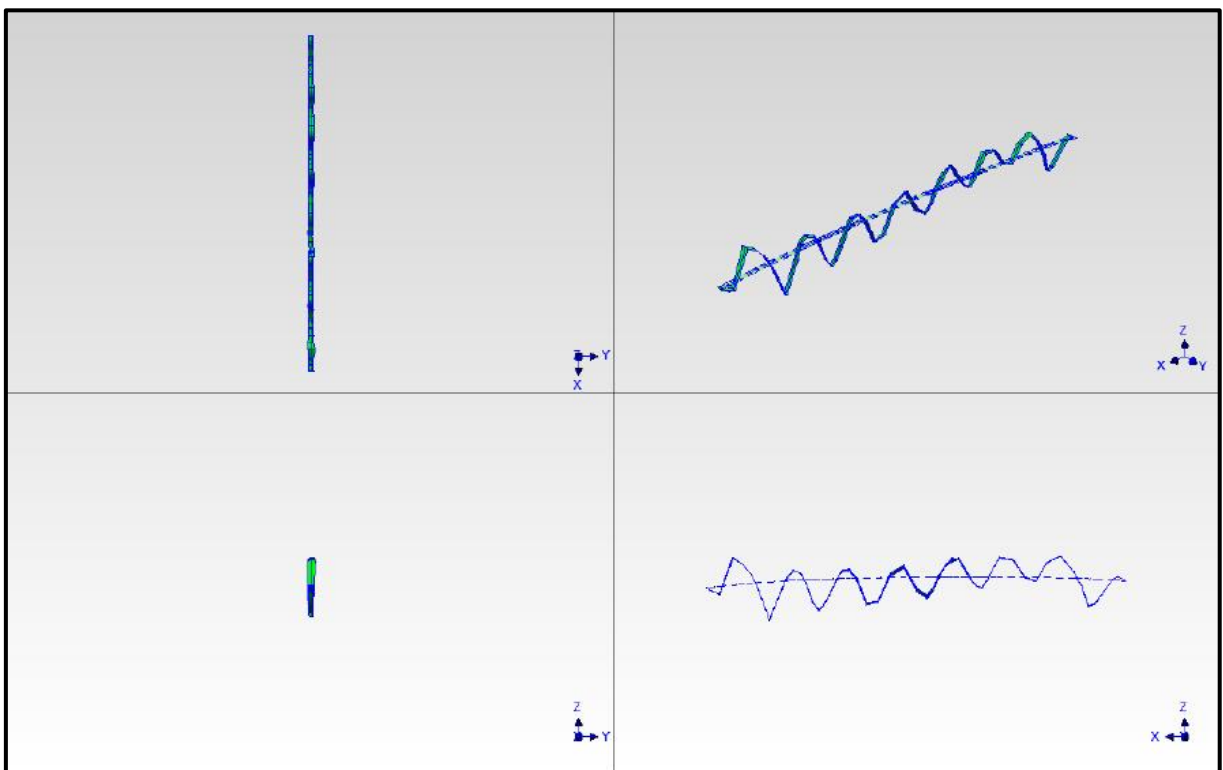
Obr. 36: 9. tvar vl. kmitání,  $f_{(9)} = 3.80$  Hz (4. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



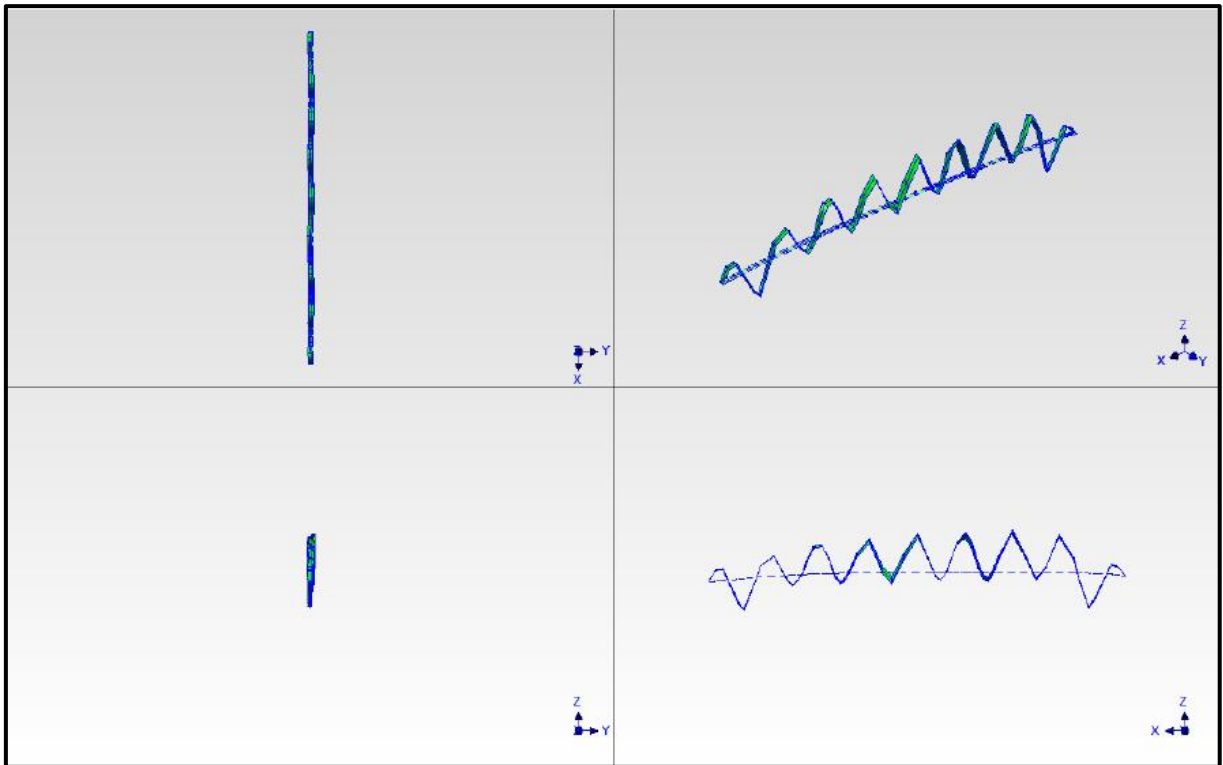
Obr. 37: 10. tvar vl. kmitání,  $f_{(10)} = 4.42$  Hz (5. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



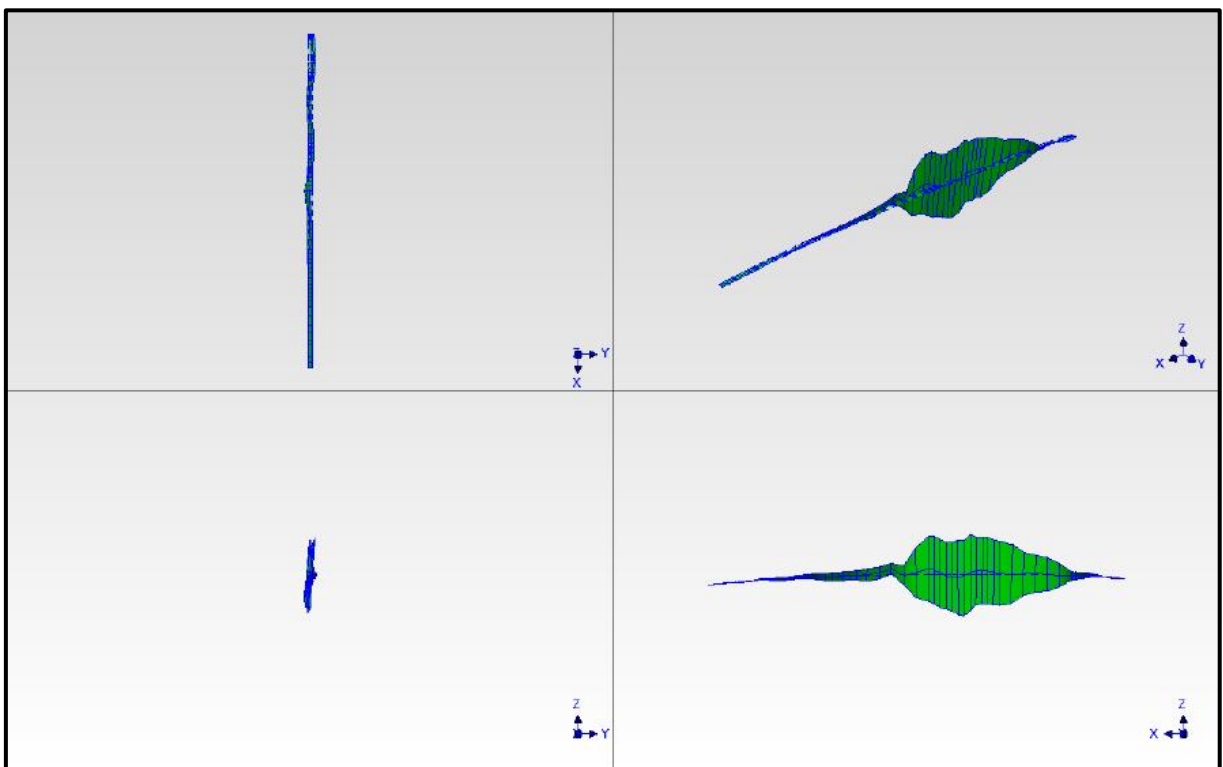
Obr. 38: 11. tvar vl. kmitání,  $f_{(11)} = 4.59 \text{ Hz}$  (6. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



Obr. 39: 12. tvar vl. kmitání,  $f_{(12)} = 5.03 \text{ Hz}$  (6. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).

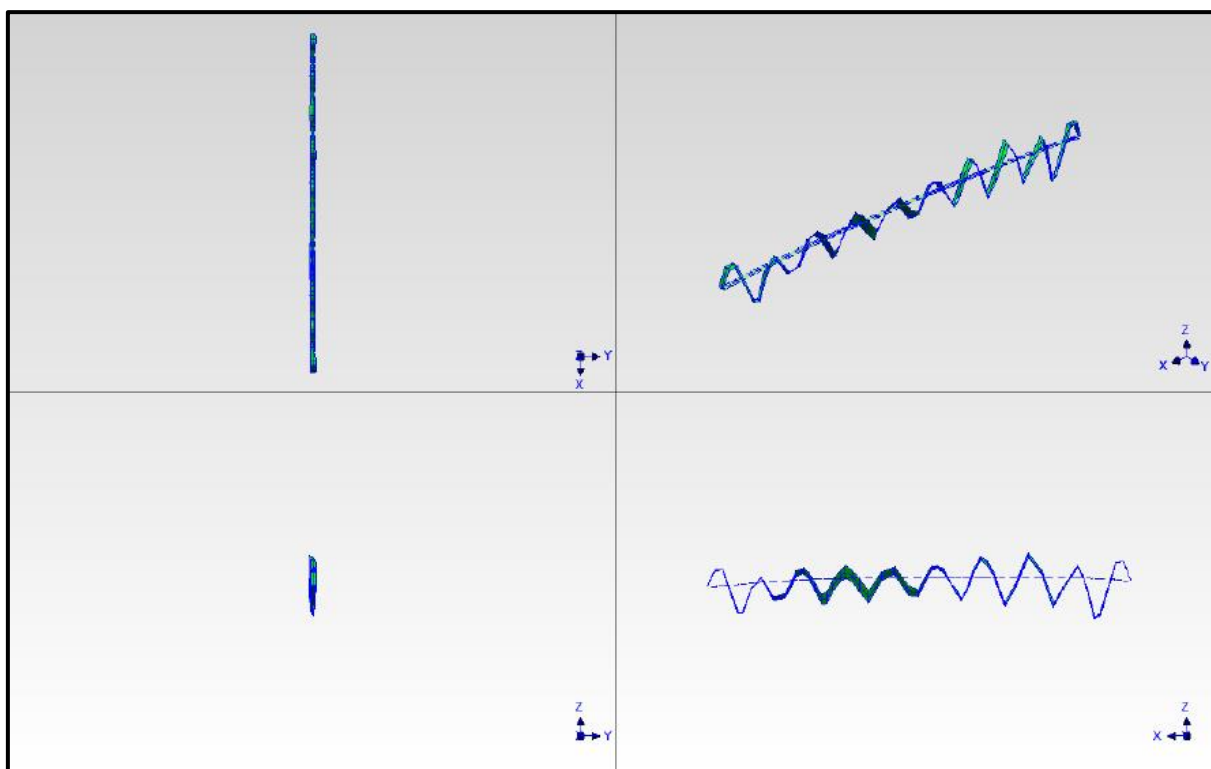


Obr. 40: 13. tvar vl. kmitání,  $f_{(13)} = 5.53$  Hz (7. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



Obr. 41: 14. tvar vl. kmitání,  $f_{(14)} = 6.20$  Hz (1. tvar kroutivého kmitání mostovky).

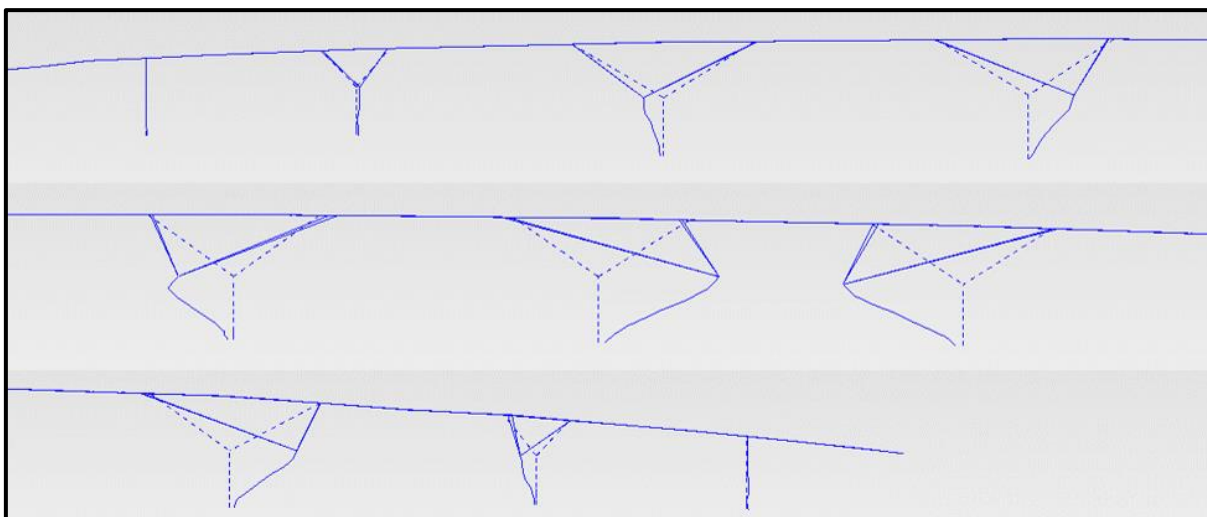




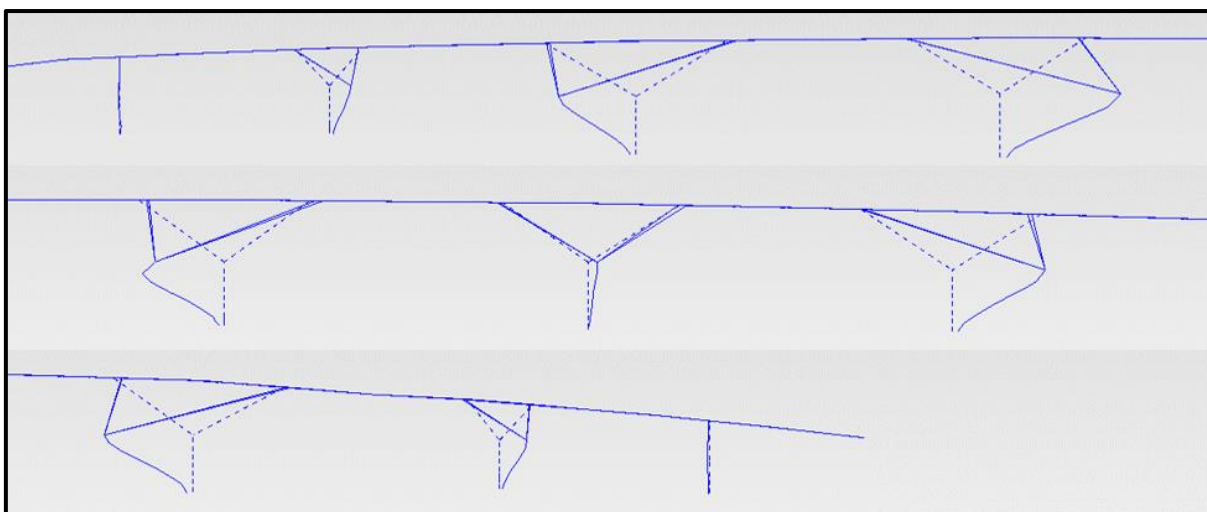
Obr. 42: 15. tvar vl. kmitání,  $f_{(15)} = 6.65 \text{ Hz}$  (8. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).

#### 6.2.2.4.2 Vlastní tvary měřeny v bodech na dřících pilířů

Při experimentu realizovaném v roce 2023 byly měřeny nejen vlastní tvary kmitání v bodech ležících na mostovce, ale také v bodech na dřících všech pilířů lávky. Tyto body byly umístěny v dolní části pilířů na hlavním dříku pod stromovým rozpletem. Vlastní kmitání pilířů bylo vyhodnoceno pro 1. a 2. svislý ohybový vlastní tvar. Na Obr. 43 a 44 jsou vykresleny vodorovné pořadnice (ve směru osy X) těchto tvarů pro měřenou část pilířů. Pro přehlednější zobrazení není na následujících obrázcích zobrazeno svislé kmitání mostovky lávky.



Obr. 43: 1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=2.32$  Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře.



Obr. 44: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(5)}=2.76$  Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře.

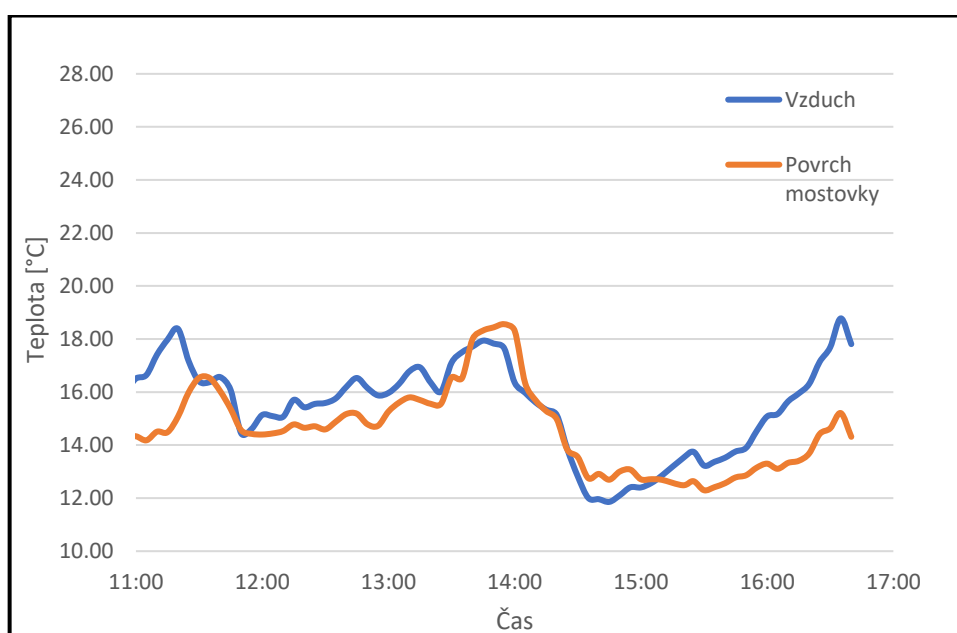
### 6.3 POROVNÁNÍ CHARAKTERISTIK VLASTNÍHO KMÍTÁNÍ S OSTATÍMI EXPERIMENTY

Na lávce, která je předmětem této práce, byly realizovány celkem tři experimenty, jejichž součástí byla experimentální modální analýza. V následující kapitole je provedeno porovnání charakteristik vlastního kmitání (vlastních frekvencí a vlastních tvarů) mezi výsledky experimentální modální analýzy z roku 2023 a výsledky z předchozích dvou experimentů. V této kapitole bylo čerpáno z publikací [55, 56].

### 6.3.1 Porovnání experimentů z roků 2023 a 2022

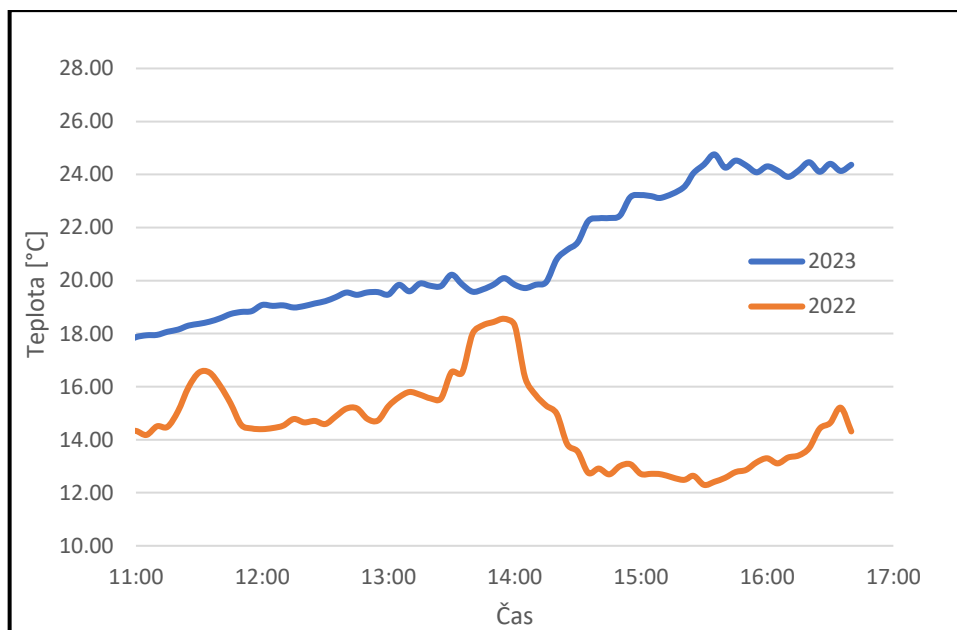
Experimentální modální analýza v roce 2022 proběhla na lávce ve čtvrtek 22. 9. cca od 11:00 do 17:35. Bylo měřeno ve stejných bodech konstrukce, jako tomu bylo při experimentu v roce 2023.

V průběhu zkoušky byla oblačnost velmi proměnlivá a měnila se v rozmezí od polojasno (pokrytí oblohy cca 50 %) až na zataženo (pokrytí oblohy 100 %), poté se začala oblačnost zmenšovat až na jasno. Od cca 14:15 do cca 15:15 přšlo. Průběh teplot vzduchu 0,5 m nad horní hranou mostovky a horní hrany mostovky byl měřen teploměrem ALMEMO 2290-2 firmy Ahlborn stejně, jako tomu bylo při experimentu z roku 2023. Průběh naměřené teploty během provádění zkoušky je zobrazen na Obr. 45.



Obr. 45: Průběh teplot vzduchu a povrchu mostovky 22. 9. 2022.

Při experimentu ze září 2022 byly teploty nižší než při měření v dubnu 2023. Největší rozdíl teplot mostovky byl 12,3 °C v 15:35. Teploty ani při jednom z těchto dvou experimentů neklesly pod bod mrazu. Je možné, že rozdíl teplot mohl ovlivnit charakteristiky vlastního kmitání lávky a vzhledem k tomu, že byly v roce 2022 naměřené nižší teploty, mohla mít při tomto měření konstrukce lávky vyšší tuhost v důsledku větší normálové síly vyvolané změnou teploty, což by mohlo vést k vyšším hodnotám naměřených vlastních frekvencí. Rozdíl naměřených teplot mostovky mezi těmito dvěma experimenty je zobrazen na Obr. 46 a rozdíl vlastních frekvencí je shrnut v Tab. 7.



Obr. 46: Porovnání teplot mostovky při experimentu z roku 2022 a 2023.

Tab. 7: Porovnání vlastních frekvencí vyhodnocených při modální analýze z roku 2022 a 2023

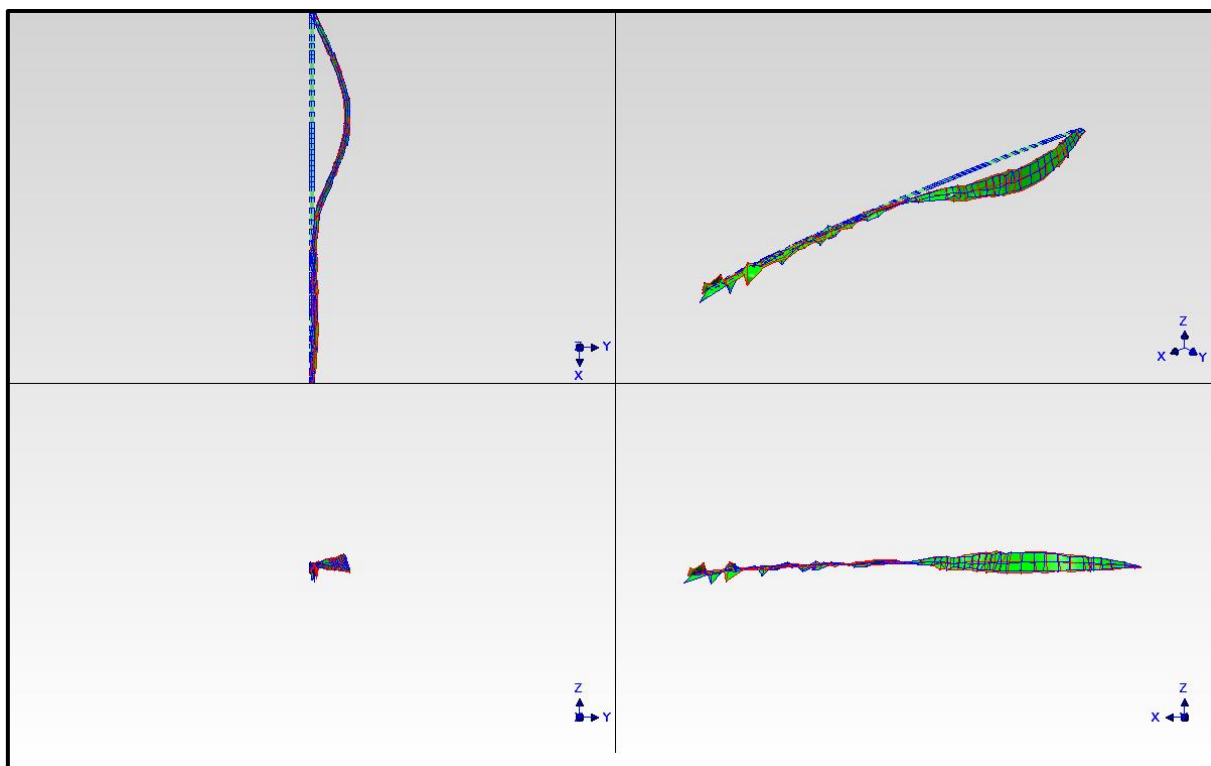
Poř. číslo (j)	Vlastní frekvence 2023 [Hz]	Odpovídající vl. frekvence 2022 [Hz]	Poměr 2023/2022 [%]
(1)	0.89	0.87	102
(2)	1.13	1.16	97
(3)	1.80	1.79	101
(4)	2.32	2.32	100
(5)	2.44	2.44	100
(6)	2.76	2.78	99
(7)	3.25	3.22	101
(8)	3.34	x	x
(9)	3.80	3.78	101
(10)	4.42	4.39	101
(11)	4.59	4.58	100
(12)	5.03	4.97	101
(13)	5.54	5.54	100
(14)	6.20	6.21	100
(15)	6.65	6.59	101

K vlastní frekvenci  $f_{(8)} = 3,34$  Hz z dubna 2023 se ve výsledcích dynamické zkoušky z roku 2022 nepodařilo nalézt odpovídající vlastní frekvenci ani při opakovaném vyhodnocení naměřených dat. Při opakovaném vyhodnocení byly sledovány tvary, ve kterých kmitá

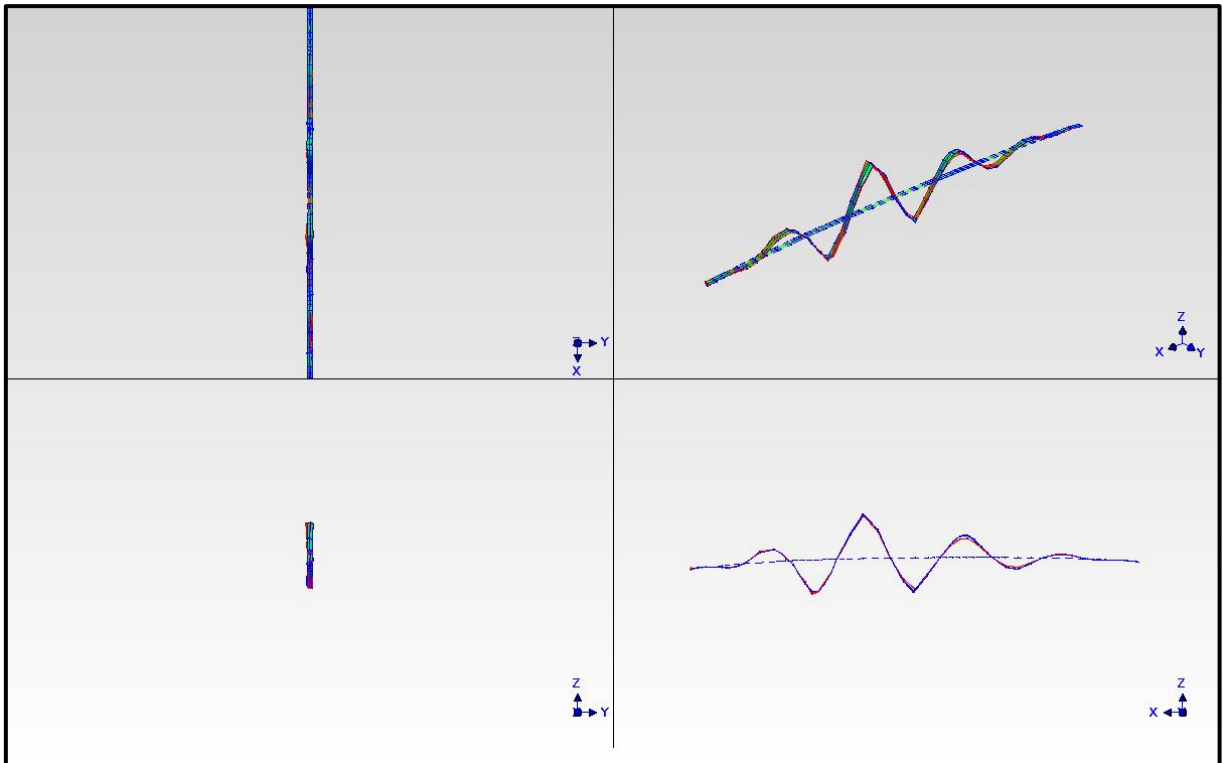
konstrukce právě kolem frekvence 3,34 Hz, ale u těchto tvarů dominovalo zejména svislé kmitání. Vlastní tvar příslušející této vlastní frekvenci se zřejmě při experimentu roku 2022 nepodařilo vybudit. Vlastní frekvence  $f_{(8)} = 3,34$  Hz naměřená při experimentu v roce 2023 je svázána s tvarem vodorovného příčného kmitání mostovky.

Z Tab. 7, v které jsou porovnané naměřené vlastní frekvence měření z roků 2022 a 2023, je zřejmé, že vlastní frekvence jsou prakticky stejné a u většiny porovnávaných dvojic je rozdíl v rámci nejistoty měření  $\pm 0,02$  Hz, což poukazuje na to, že rozdíl teplot při těchto dvou experimentech neměl na vlastní frekvence vliv.

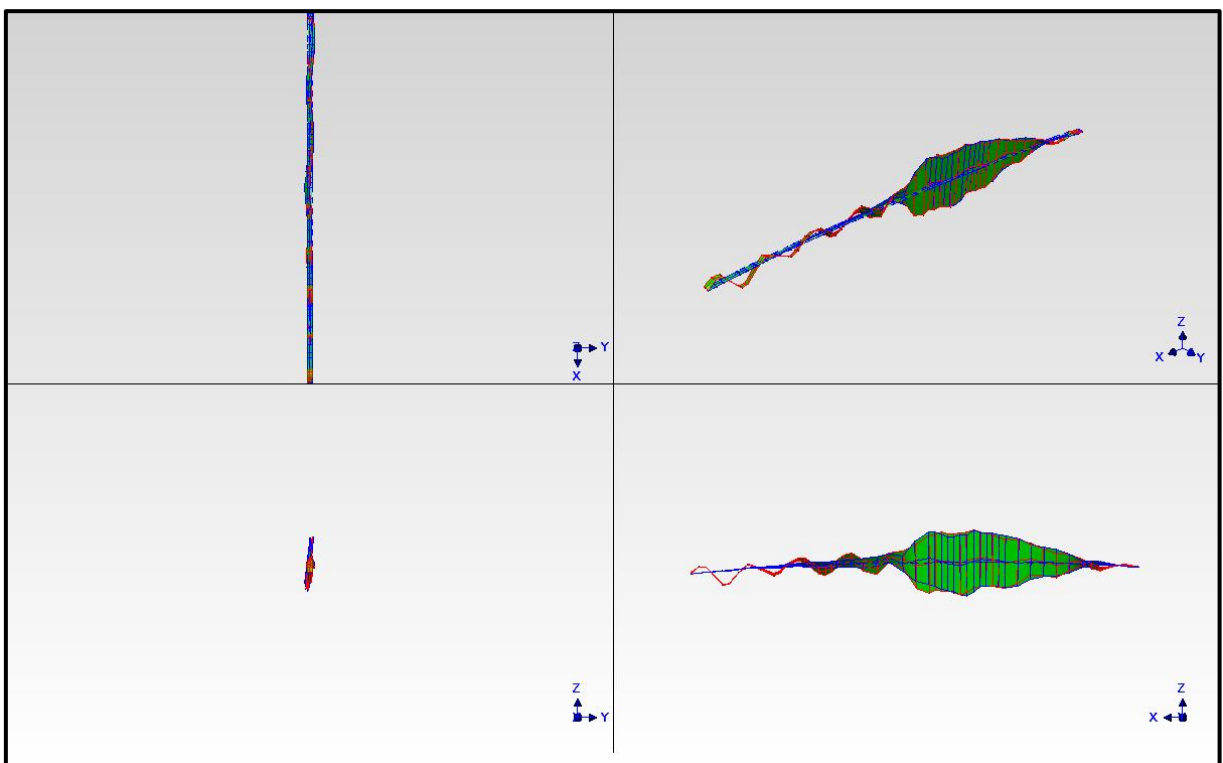
Dále byly porovnávány vlastní tvary. U žádného vlastního tvaru nedošlo k výrazné změně charakteru kmitání mezi zářím 2022 a dubnem 2023. V následujících obrázcích je vykresleno porovnání prvních vlastních tvarů vodorovného příčného kmitání, svislého ohybového kmitání a krouživého kmitání. Černě jsou ohraničeny vlastní tvary naměřené v dubnu 2023 a červeně vlastní tvary ze září 2022.



Obr. 47: Porovnání 1. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2022 (0.87 Hz) a 2023 (0.89 Hz).



Obr. 48: Porovnání 1. vl. tvaru svislého ohybového kmitání mezi roky 2022 (2.32 Hz) a 2023 (2.32 Hz).



Obr. 49: Porovnání 1. vl. tvaru krouživého kmitání mezi roky 2022 (6.21 Hz) a 2023 (6.20 Hz).

Porovnání mezi těmito dvěma měřeními nepřineslo žádné překvapivé výsledky, což lze přisuzovat tomu, že doba mezi prováděním jednotlivých experimentů byla pouze 6 měsíců,

teploty při jednotlivých měřeních nebyly významně odlišné a při obou experimentech byla teplota nad bodem mrazu. Během takto krátké doby zřejmě nedošlo k případnému výraznějšímu rozvoji trhlin v železobetonové mostovce a teplota zřejmě na výsledky měření neměla podstatnější vliv.

### 6.3.2 Porovnání experimentů z roků 2023 a 2002

Z hlediska dlouhodobějšího sledování konstrukce nabízí zajímavější závěry porovnání s experimentem, který se uskutečnil 12. 12. 2002 před uvedením lávky do provozu. Experiment byl zaměřen na modální analýzu konstrukce, a to zejména tak, aby byly vybudované vlastní tvary příslušné svislému ohybovému kmitání lávky. Při experimentu byl k rozkmitání konstrukce použit budič a byl použit princip FVT. Naměřené kmitání bylo tedy normováno k měřené budící síle vyvozené budičem.

Při experimentu bylo zataženo a z jeho průběhu neexistuje oficiální záznam teploty. Osoby, které byly při experimentu přítomné, však potvrdily, že při experimentu panovala teplota hluboko pod bodem mrazu, a to cca  $-13\pm 3$  °C. Z Mladé Boleslavi se nepodařilo dohledat archivní záznamy teplot z tohoto dne. Na stránce [weatheronline.co.uk](http://weatheronline.co.uk) byla dohledána teplota z nejbližší měřicí stanice z 12. 12. 2002, která se nachází v Liberci. Na této stanici je tento den zaznamenána teplota  $-11$  °C, což potvrzuje, že podobná teplota mohla být i v Mladé Boleslavi. Teplota vzduchu byla tedy při tomto experimentu hluboko pod bodem mrazu a až o  $36$  °C nižší než teplota naměřená při experimentu z dubnu 2023.

Z archivu teplot je také dohledatelné, že v Liberci panovaly teploty pod  $0$  °C už od 5. 12. 2002, je tedy možné, že při provádění experimentu na lávce 12. 12. 2002 byla základová půda promrznutá. Porovnání vlastních frekvencí naměřených v roce 2002 s odpovídajícími vlastními frekvencemi z roku 2023 je shrnuto v Tab. 8.

Tab. 8: Porovnání vlastních frekvencí vyhodnocených při experimentální modální analýze v roce 2002 a 2023 s popsáním charakterem vlastního tvaru

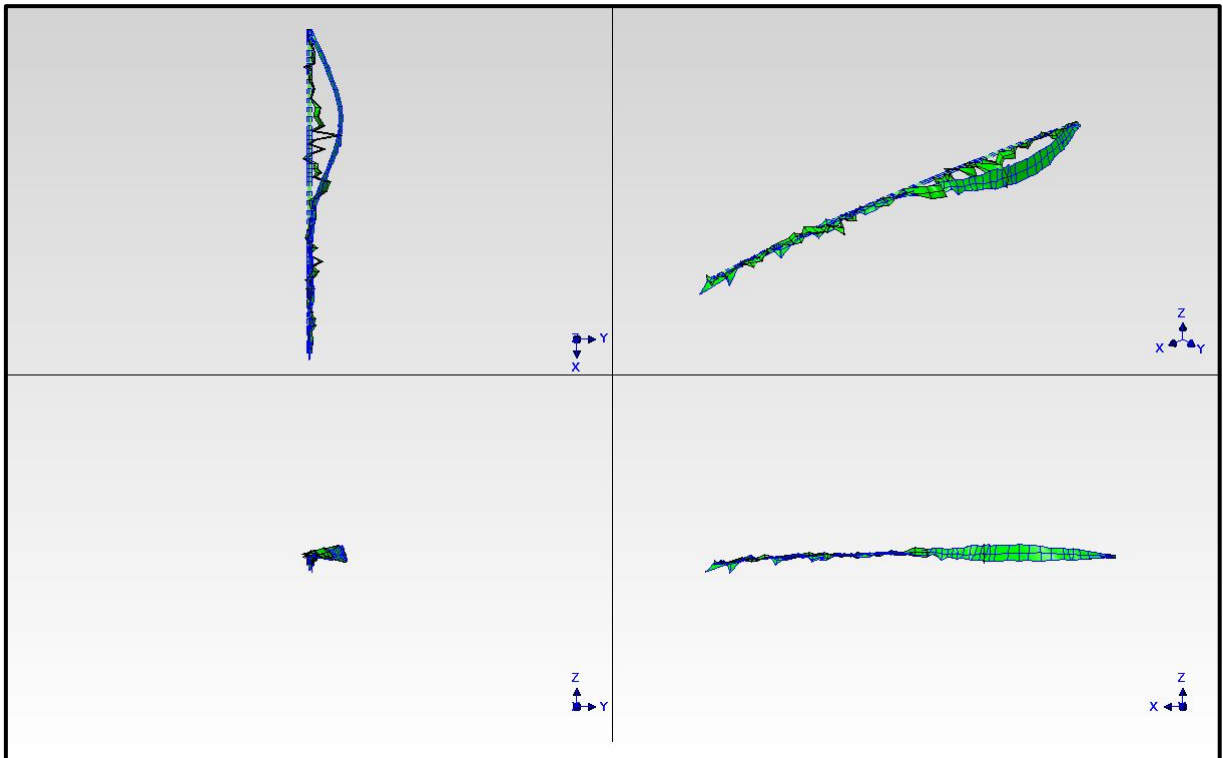
Poř. číslo (j)	Vlastní frekvence 2023 [Hz]	Odpovídající vl. frekvence 2002 [Hz]	Poměr 2023/2002 [%]	Charakter vlastního tvaru
(1)	0.89	1.04	86	1. tvar vodorovného příčného kmitání
(2)	1.13	1.39	81	2. tvar vodorovného příčného kmitání
(3)	1.80	x	x	3. tvar vodorovného příčného kmitání
(4)	2.32	2.55	91	1. tvar svislého ohybového kmitání
(5)	2.44	x	x	4. tvar vodorovného příčného kmitání
(6)	2.76	3.01	92	2. tvar svislého ohybového kmitání
(7)	3.25	3.54	92	3. tvar svislého ohybového kmitání
(8)	3.34	x	x	5. tvar vodorovného příčného kmitání
(9)	3.80	4.19	91	4. tvar svislého ohybového kmitání
(10)	4.42	4.93	90	5. tvar svislého ohybového kmitání
(11)	4.59	5.44	84	6. tvar vodorovného příčného kmitání
(12)	5.03	5.59	90	6. tvar svislého ohybového kmitání
(13)	5.54	6.24	89	7. tvar svislého ohybového kmitání
(14)	6.20	6.37	97	1. tvar. kroutivého kmitání
(15)	6.65	7.63	87	8. tvar svislého ohybového kmitání

Výsledky experimentu z roku 2002 neobsahují některé vlastní frekvence, které byly naměřeny v dubnu 2023. Jedná se o vlastní frekvence  $f_{(3)} = 1,80$  Hz,  $f_{(5)} = 2,44$  Hz a  $f_{(8)} = 3,34$  Hz. Všechny tyto vlastní frekvence jsou svázány s vlastními tvary vodorovného příčného kmitání.

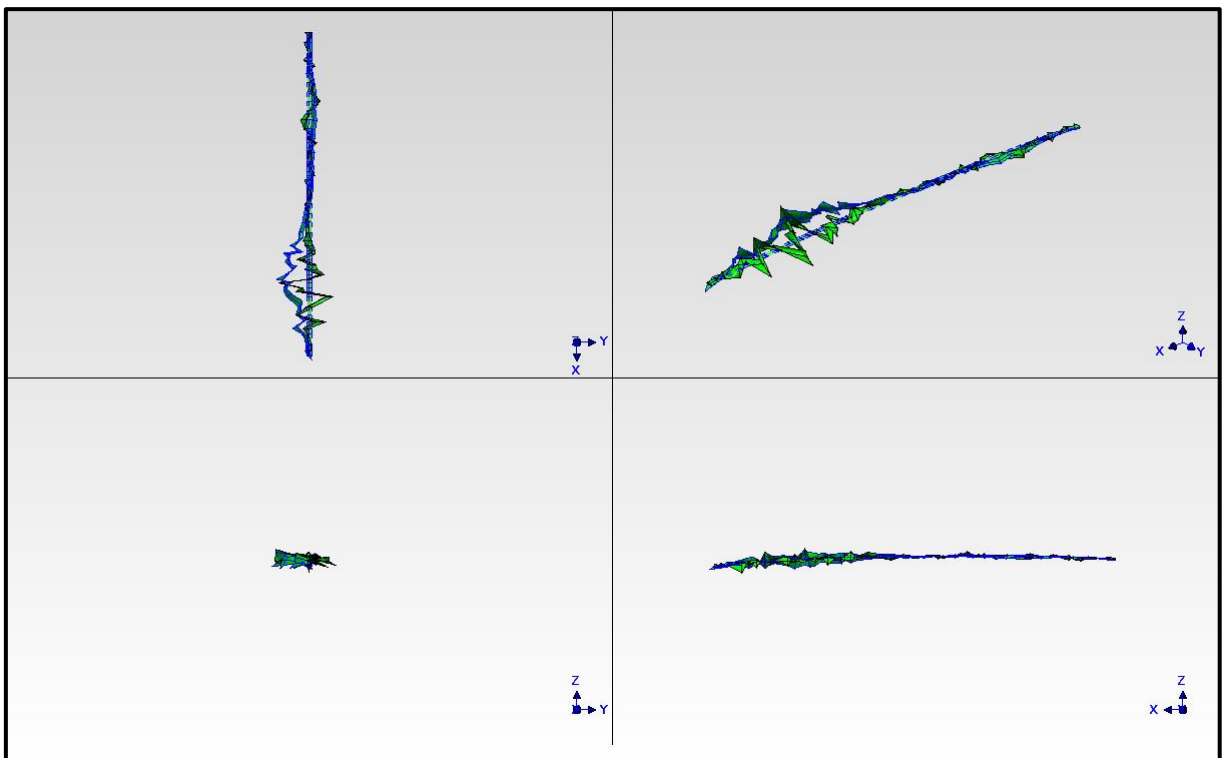
Důvodů, proč je možné, že tyto vlastní tvary nebyly zaznamenány, může být více. Jedním z hlavních důvodů je to, že byly použity starší akcelerometry s horší citlivostí, a to zejména při nižších frekvencích, a fakt, že experiment byl v té době zaměřen zejména na vlastní tvary svislého ohybového kmitání. Chybějící vlastní tvary vodorovného příčného kmitání zřejmě nebyly dostatečně vybudeny a horší citlivost snímačů je nedokázala zaznamenat.

Porovnání vlastních tvarů z roku 2023 a 2002 je na následujících obrázcích (Obr. 50 až 54). Jako příklad jsou zde uvedeny 3 naměřené tvary vodorovného příčného kmitání, 1. vlastní tvar svislého ohybového kmitání a 1. vlastní tvar kroutivého kmitání. Modře jsou vykresleny vlastní tvary naměřené v roce 2023 a černě ty z roku 2002.

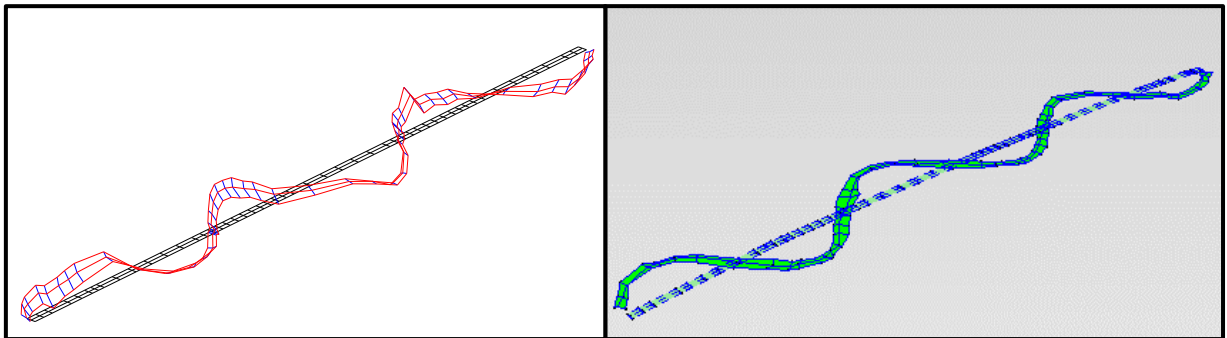




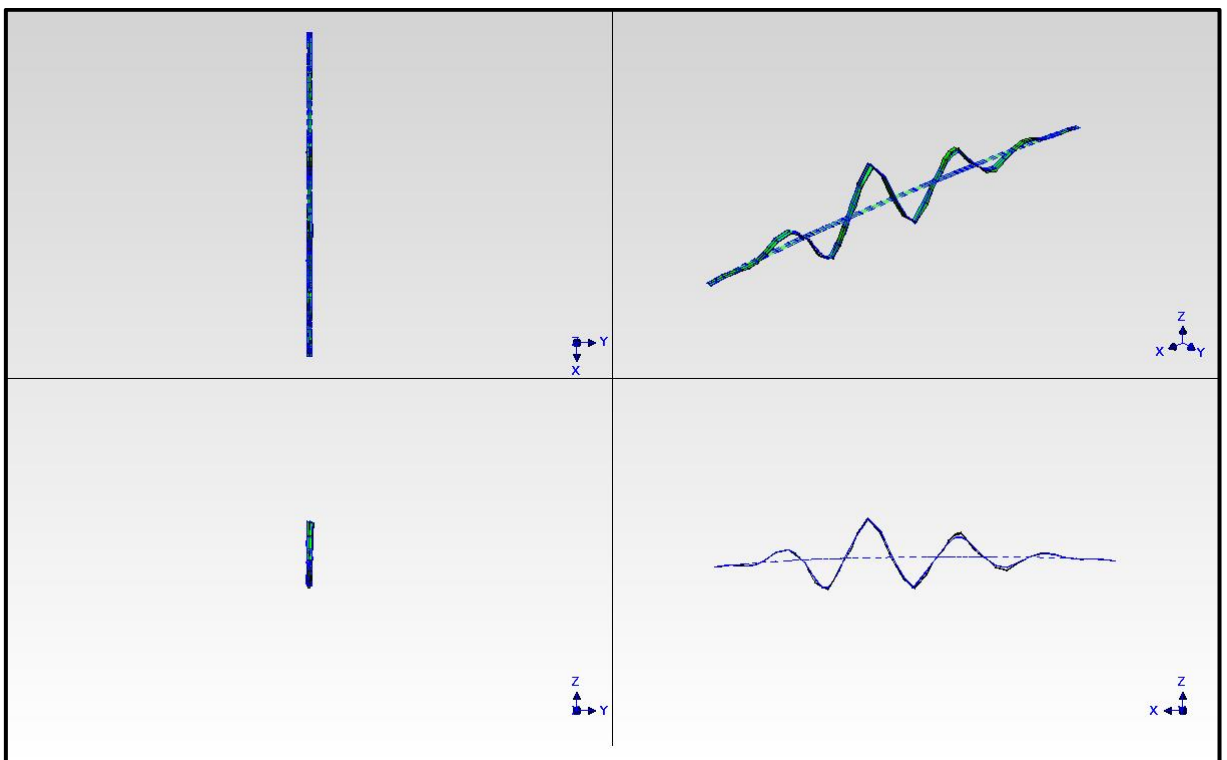
Obr. 50: Porovnání 1. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (1.04 Hz) a 2023 (0.89 Hz).



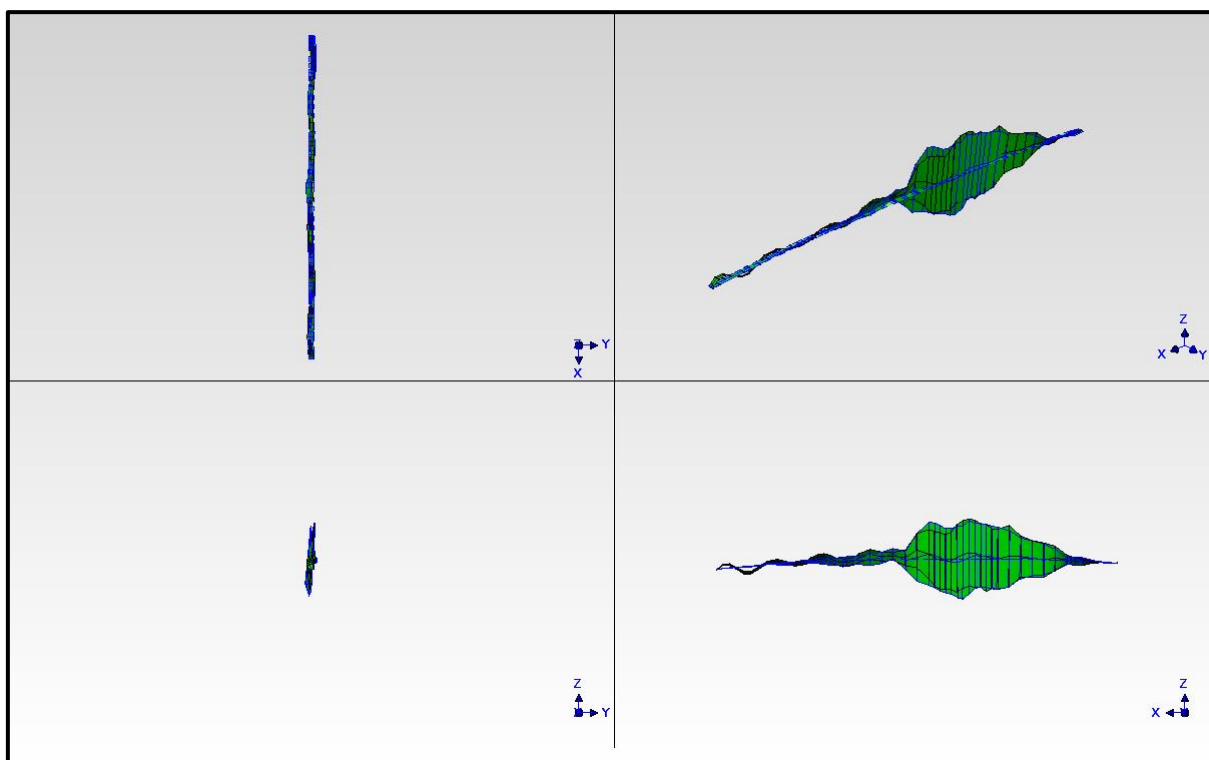
Obr. 51: Porovnání 2. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (1.39 Hz) a 2023 (1.13 Hz).



Obr. 52: Porovnání 6. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (5.44 Hz, nalevo) a 2023 (4.59 Hz, napravo). Datový soubor z roku 2002 nebyl k dispozici, porovnání je tedy pouze vizuální.



Obr. 53: Porovnání 1. vl. tvaru svislého ohybového kmitání mezi roky 2002 (2.55 Hz) a 2023 (2.32 Hz).



Obr. 54: Porovnání 1. vl. tvaru krouživého kmitání mezi roky 2002 (2.55 Hz) a 2023 (2.32 Hz).

U vlastních tvarů spjatých s vodorovným příčným kmitáním mostovky, ke kterým přísluší nízké vlastní frekvence, je dobře viditelný rozdíl mezi tvary naměřenými roku 2002 a 2023 (Obr. 50 a 51). Nepřesnost vykreslení vlastních tvarů vodorovného příčného kmitání z roku 2002 je způsobena použitím principu FVT. Naměřené kmitání mostu je u tohoto principu normované k měřené budící síle. Vzhledem k tomu, že budič rozkmitává konstrukci zejména ve svislém směru, jsou naměřená zrychlení pomocí snímačů orientovaných ve směru osy Y malá, a tedy zatížená větší relativní chybou měření a jejich normování k svislé budící síle je tedy zatíženo velkou chybou. Tato chyba byla v dalších experimentech podstatně snížena tím, že bylo kmitání konstrukce normováno vzhledem k hodnotám naměřeným referenčními snímači. Navíc měly snímače použité při experimentu v roce 2002 horší citlivost při nižších frekvencích. Šestému tvaru vodorovného příčného kmitání odpovídá již vyšší vlastní frekvence, což vede i k přesnějšímu vyhodnocení tohoto vlastního tvaru (Obr. 52).

Na svislé ohybové kmitání byl v roce 2002 experiment více zaměřen a z obrázku je patrné, že naměřený vlastní tvar z roku 2002 je prakticky totožný s tím naměřeným v roce 2023 (Obr. 53). Toto platí pro všechny tvary svislého ohybového kmitání. Stejný trend je patrný i u krouživého vlastního tvaru (Obr. 54).

### 6.3.2.1 Pokles vlastních frekvencí

Hlavním bodem, který vyžaduje zvýšenou pozornost, je pokles vlastních frekvencí nosné konstrukce lávky mezi roky 2002 a 2023 a to zejména výrazný pokles vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného kmitání mostovky (v pořadí 1., 2. a 11. vlastní tvar, viz Tab. 8).

Vysvětlení tohoto poklesu může mít různé důvody. První z možných příčin může být skutečnost, že při experimentu v roce 2002 byla teplota pod bodem mrazu a že byla výrazně nižší než při dalších dvou provedených experimentech. Jak je popsáno v kapitole 3.2, zvýšení vlastních frekvencí s klesající teplotou bylo naměřeno u jiných konstrukcí, které byly dlouhodobě monitorovány. Je tedy možné, že se tento fenomén projevil i u této konstrukce. Další faktor, který mohla nízká teplota ovlivnit, je zkrácení konstrukce. Vzhledem k tomu, že je konstrukce zkoumané lávky staticky neurčitá, mohla být vlivem omezení zkrácení mostovky tuhostí pilířů vnášena do konstrukce normálová síla. Tato normálová síla je při zkrácení mostovky tahová a ze strunového chování je známé, že s narůstající tahovou normálovou silou ve struně rostou také její vlastní frekvence [1, 57]. Toto závisí na velikosti normálové síly, která byla tímto způsobem do konstrukce vnášena.

Nižší teplota ovlivňuje modul pružnosti betonu [47] a v některých případech také tuhost založení [43]. Vzhledem k tomu, že jsou pilíře lávky založené na jedné velkopřůměrové pilotě, je možné, že vyšší tuhost promrzlé základové půdy mohla mít vliv na celkovou tuhost a tím pádem i na vlastní frekvence konstrukce.

Jako další důvod poklesu vlastních frekvencí se nabízí vznik trhlin v tažené části průřezu mostovky, která je železobetonová. Při návrhu železobetonových konstrukcí se počítá s tím, že v tažené části průřezu beton nepůsobí a uvažuje se pouze vliv betonářské výztuže. Na rozdíl od konstrukcí, které jsou z předpjatého betonu, není u železobetonových konstrukcí vyžadována dekomprese a rozvoj trhlin je umožněn. Při vizuální kontrole konstrukce lávky nebyly na mostovce žádné trhliny viditelné, ale v některých částech mohly vzniknout mikrotrhliny, a i to mohlo snížit celkovou tuhost.

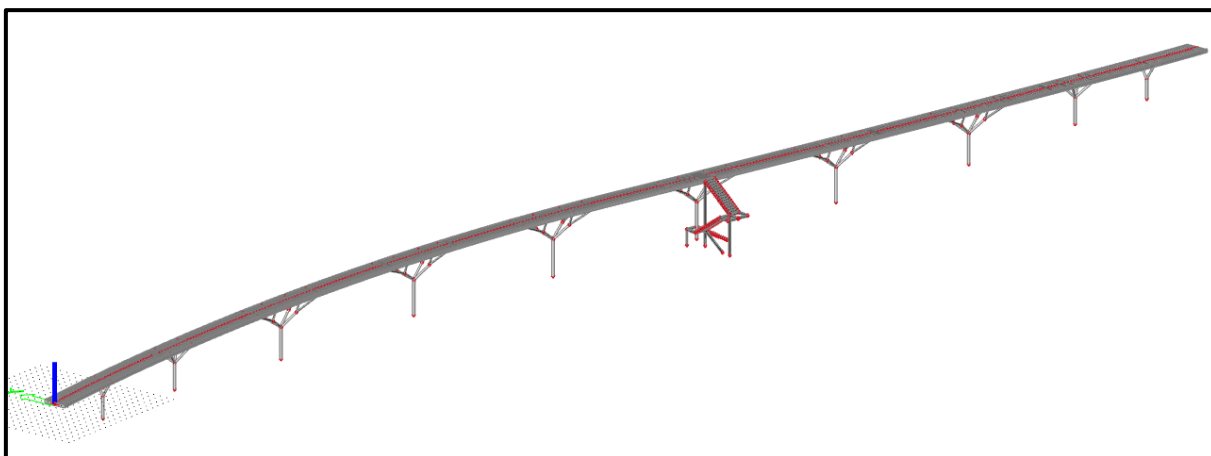
První experiment v roce 2002 byl na konstrukci realizován ještě před uvedením lávky do provozu. Je možné, že rozvoj mikrotrhlin v mostovce byl způsoben proměnným zatížením chodci, kterému byla konstrukce vystavena dlouhodobě až po provedení experimentu v roce 2002. Dalším faktorem může být smršťování betonu.

Jinou možnou příčinou naměřených rozdílných vlastních frekvencí může být chyba měření, která se mohla vyskytnout i přes to, že u všech tří experimentů byla snaha takovou chybu minimalizovat.

Za účelem zkoumání vlivů jednotlivých faktorů, které mohly změnu vlastních frekvencí ovlivnit, byl vytvořen teoretický model konstrukce. Teoretický model byl naladěn na data naměřená a vyhodnocená v roce 2002 a následně byl vystaven jednotlivým vlivům, které mohly vlastní frekvence ovlivnit. Dále byla zkoumána míra ovlivnění chování modelu jednotlivými faktory.

## 6.4 TEORETICKÁ ANALÝZA ZMĚNY DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ LÁVKY V AREÁLU ŠKODA – MLADÁ BOLESLAV

Za účelem analýzy změny dynamického chování lávky v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi byl vytvořen 3D výpočetní model konstrukce. Tento model byl verifikován, byla tedy ověřena jeho výstižnost. Při verifikaci modelu výpočet odpovídá experimentu in situ a výsledky experimentu a z výpočtu se následně porovnávají a posuzuje se míra shody [7]. V zadání této diplomové práce v pokynech pro vypracování je mimo jiné uvedeno, že součástí práce bude ověření 3D modelu předmětné lávky na základě výsledků dynamického experimentu provedeného v dubnu 2023. Avšak v průběhu rozboru a prvních kroků řešení problematiky bylo zjištěno, že pro analýzu vlivu změn parametrů nosné konstrukce lávky na její dynamické chování je výhodnější, když bude model ověřen a identifikován především na základě výsledků zkoušky z prosince 2002.



Obr. 55: Teoretický 3D model konstrukce vytvořený v programu SCIA Engineer 22.0 32 bit.

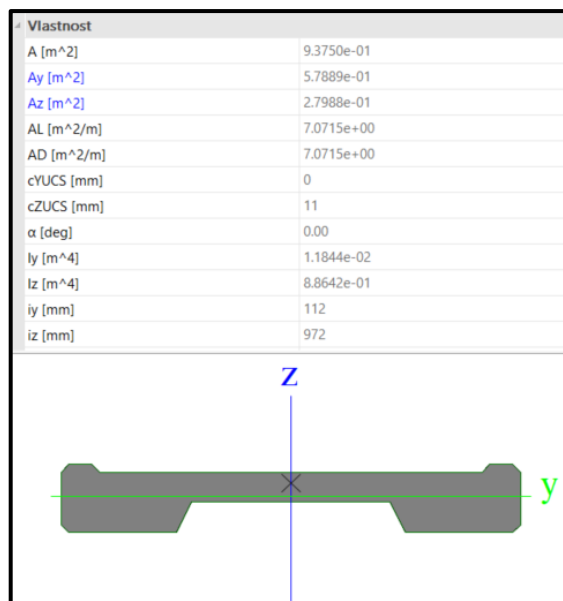
### 6.4.1 Tvorba výpočetního modelu konstrukce

Výpočetní model konstrukce byl vytvořen v programu SCIA Engineer 22.0 32 bit s využitím studentské licence. K jeho sestavení byly využity podklady od společnosti Valbek s.r.o., která je autorem realizační dokumentace. Geometrie byla převzata z přehledných výkresů, následně upravena v programu AutoCAD 2019 a z něj importována do programu SCIA Engineer 22.0 32 bit. Celá geometrie konstrukce tedy byla zachována, včetně dvou směrových a jednoho výškového oblouku, schodiště a vylehčení průřezu v oblasti polí.

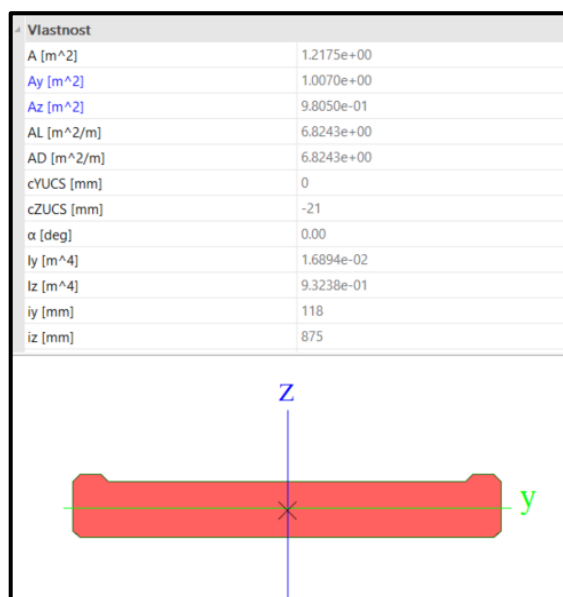
Konstrukce byla modelována prutovými prvky, excentricity u změny těžiště průřezu v oblasti pole a podpory a v místech napojení pilířů a schodiště na mostovku byla modelována pomocí fiktivních prutů, mající nulovou hmotnost a o několik řádů vyšší tuhost než zbytek prvků na konstrukci.

### 6.4.1.1 Vodorovná nosná konstrukce

Vodorovná nosná konstrukce lávky je tvořena železobetonovou deskou, která je v oblasti polí vylehčená. Vzhledem k tomu, že je šířka příčného řezu mostovky poměrně malá, byla deska modelována jako prutový prvek, a ne jako deskostěnový prvek. Geometrie prutového prvku desky mostovky byla převzata z projektové dokumentace, byla tedy respektována její plocha a její ohybová tuhost. V místech polí byl průřez rozdílný, deska je v těchto místech vylehčená. Rozdíl polohy těžiště prvků v oblasti polí a podpor byl modelován pomocí fiktivních prutů tak, aby horní hrana mostovky byla zachována rovinná. Průřezy použité na vodorovnou nosnou konstrukci lávky jsou zobrazeny na Obr. 56 a Obr. 57.



Obr. 56: Příčný řez v místě pole a jeho základní průřezové charakteristiky.



Obr. 57: Příčný řez v místě podpory a jeho základní průřezové charakteristiky.

Na desku mostovky byl použit beton C30/37. Vytvářený teoretický model konstrukce byl dělán tak, aby respektoval uspořádání experimentu v roce 2002. Modul pružnosti betonu byl tedy upraven pomocí vzorce (27) vzhledem k teplotě, která byla při realizaci experimentu. Pro připomenutí je tento vzorec [47]:

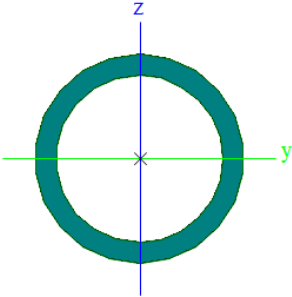
$$E_T = E_{20^\circ\text{C}}[1 - \theta_E(T - 20)] \quad (29)$$

Modul pružnosti při 20 °C  $E_{20^\circ\text{C}}$  byl uvažován 33 GPa podle Eurokódu 2. Teplota konstrukce  $T$ , kterou měl beton při průběhu experimentu byla brána -13 °C. V modelu byl tedy používán modul pružnosti betonových prvků z betonu C30/37 při teplotě -13 °C  $E_T = 36.27$  GPa.

#### 6.4.1.2 Pilíře

Pilíře použité ve výpočetním modelu byly modelovány pomocí prutových prvků. Byla respektována jejich geometrie, která byla převzata z výkresu ocelových částí. Jednotlivé části pilíře respektovaly prvky definované v projektové dokumentaci. Hlavní dřík pilíře byl modelován jako trubka průměru 323.9 mm a tloušťce stěny 32 mm, tato část se větví do dalších trubek průměru 219.1 mm a tloušťce stěny 14.2 mm a tato část se následně větví u pilířů P030 až P080 do trubek průměru 152.4 mm a tloušťce stěny 8 mm. Výška pilířů byla modelována v souladu s projektovou dokumentací. Na Obr. 58 je uveden příklad průřezu použitého na hlavní dřík pilíře. Na pilíře byla použita ocel S355.

Vlastnost	
A [m <sup>2</sup> ]	2.9300e-02
A <sub>y</sub> [m <sup>2</sup> ]	1.8682e-02
A <sub>z</sub> [m <sup>2</sup> ]	1.8682e-02
AL [m <sup>2</sup> /m]	1.0151e+00
AD [m <sup>2</sup> /m]	1.8340e+00
cYUCS [mm]	162
cZUCS [mm]	162
α [deg]	0.00
I <sub>y</sub> [m <sup>4</sup> ]	3.1630e-04
I <sub>z</sub> [m <sup>4</sup> ]	3.1630e-04
i <sub>y</sub> [mm]	104
i <sub>z</sub> [mm]	104



Obr. 58: Průřez použitý na hlavní dřík pilíře RO323.9X32.

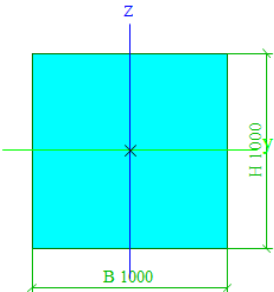


Byla také modelována prostorová geometrie pilířů. Připojení pilířů na mostovku bylo realizováno pomocí fiktivních prutů. Vzhledem k tomu, že byla mostovka modelována jako prutový prvek, byly fiktivní pruty napojeny na těžišťovou osu mostovky.

### 6.4.1.3 Fiktivní pruty

Fiktivní pruty byly tvořeny pomocí prutů čtvercového průřezu rozměrů 1000x1000 mm. Pro fiktivní pruty byl vytvořen fiktivní materiál mající nulovou objemovou hmotnost a modul pružnosti  $E=9 \cdot 10^{10}$  MPa. U těchto prvků je tedy zajištěno, že nepředstavují pro konstrukci žádné zatížení a mají vzhledem k ostatním prvkům použitým v modelu několikanásobně vyšší normálovou i ohybovou tuhost. Tyto prvky byly používány při modelování excentricit. Průřez použitý v modelu je na Obr. 59 a fiktivní materiál používaný na tento prvek na Obr. 60.

Vlastnost	
A [m <sup>2</sup> ]	1.0000e+00
Ay [m <sup>2</sup> ]	8.3366e-01
Az [m <sup>2</sup> ]	8.3366e-01
AL [m <sup>2</sup> /m]	4.0000e+00
AD [m <sup>2</sup> /m]	4.0000e+00
cYUCS [mm]	500
cZUCS [mm]	500
α [deg]	0.00
Iy [m <sup>4</sup> ]	8.3333e-02
Iz [m <sup>4</sup> ]	8.3333e-02
iy [mm]	289
iz [mm]	289

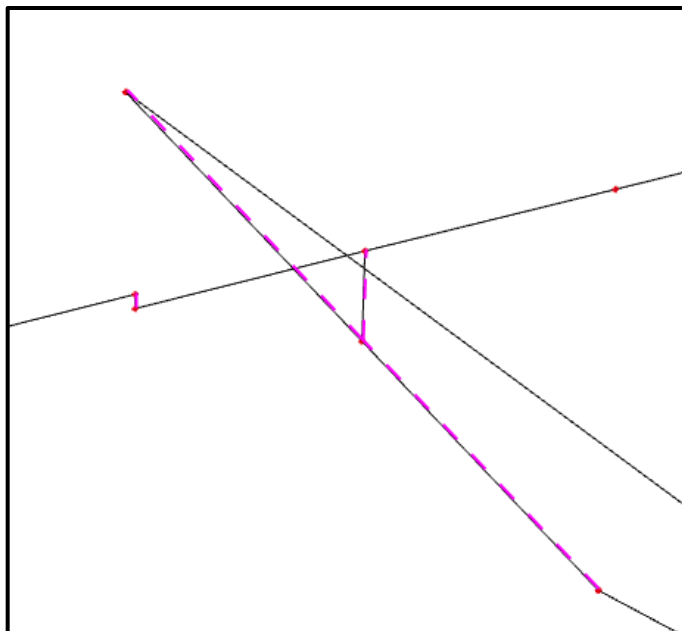


Obr. 59: Průřezové charakteristiky fiktivního prutu.

Jméno	Fiktivní materiál
<b>Nezávislé na normě</b>	
Typ materiálu	Ocel
Tepelná roztažnost [m/mK]	0.01e-003
Jednotková hmotnost [kg/m <sup>3</sup> ]	0.00
Modul E [MPa]	9.0000e+10

Obr. 60: Fiktivní materiál a jeho objemová hmotnost a modul pružnosti.

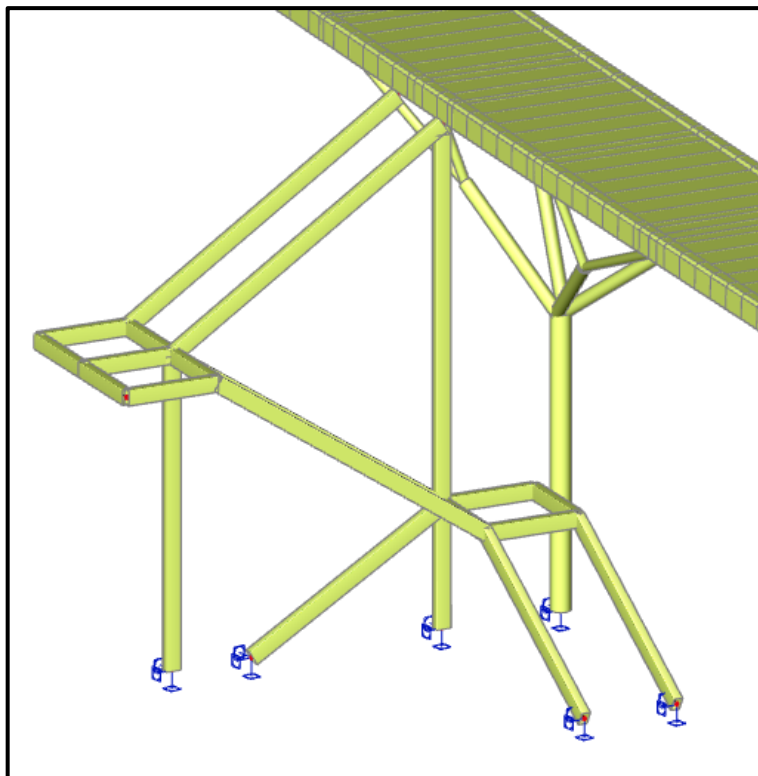
Napojení pilířů na těžišťovou osu mostovky bylo realizováno pomocí fiktivních prutů, které simulovaly excentricitu napojení ve svislém i vodorovném směru. Na Obr. 61 je zobrazeno napojení pilířů a změna polohy těžišťové osy průřezu v poli a nad podporou. Růžově jsou zde označeny fiktivní pruty.



Obr. 61: Detail napojení pilířů na mostovky a změna polohy těžišťové osy mostovky.

#### 6.4.1.4 Schodiště

Schodiště bylo modelováno podle projektové dokumentace a v modelu byly zohledněny pouze schodnice a sloupy podpírající schodiště. Průřez schodnic byl modelován pomocí obdélníkové trubky rozměrů 250x150 mm tloušťky stěny 6 mm a sloupy podpírající schodiště pomocí obdélníkových trubek rozměrů 250x150 mm tloušťky stěny 8 mm. Schodiště je do vodorovné nosné konstrukce lávky vetknuté, napojení tedy bylo realizováno pomocí dvojice fiktivních prutů s tuhými vazbami na obou koncích. Vyrendrovaná část 3D modelu v oblasti schodiště je na Obr. 62.



Obr. 62: Vyrendrovaná část 3D modelu konstrukce lávky v oblasti schodiště.

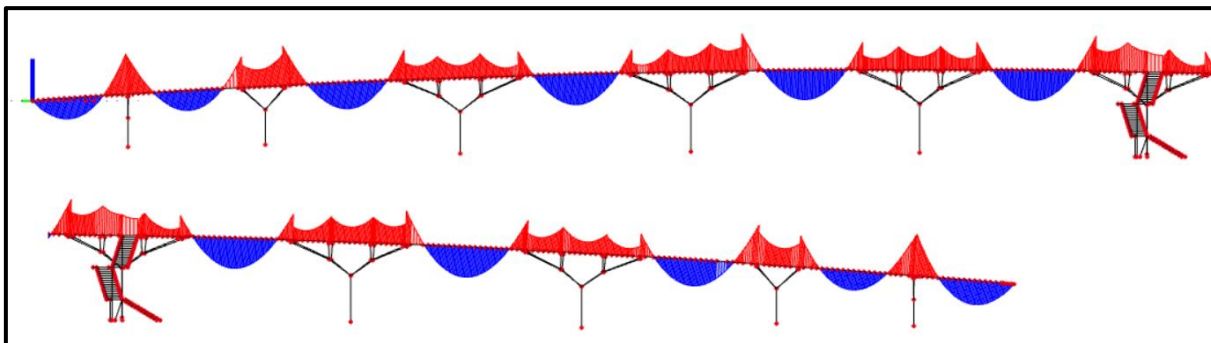
#### 6.4.1.5 Podepření konstrukce

Napojení pilířů lávky na základovou konstrukci bylo modelováno pomocí vetknutí. Vzhledem k tomu, že byl model vytvářen na základě dat naměřených v roce 2002, kdy panovaly teploty hluboko pod bodem mrazu, byl učiněn předpoklad, že svrchní část základové půdy byla promrzlá, což velmi zvyšuje její tuhost a je tedy bráněno natočení vrchní části pilot, čemuž odpovídá podepření stylem vetknutí pilířů v místě napojení na piloty.

V místě opěr jsou kyvné pruty umožňující pohyb konstrukce v podélném směru, ale jsou tam také dynamické tlumiče, které právě při dynamickém zatížení do značné míry zamezují pohybu v podélném směru. V místě opěr bylo tedy rozhodnuto použít podepření, které brání posunutí ve všech směrech. Vzhledem k tomu, že je konstrukce modelována prutově, tak použitá podpora také neumožňuje pootočení kolem podélné osy lávky (osy X).

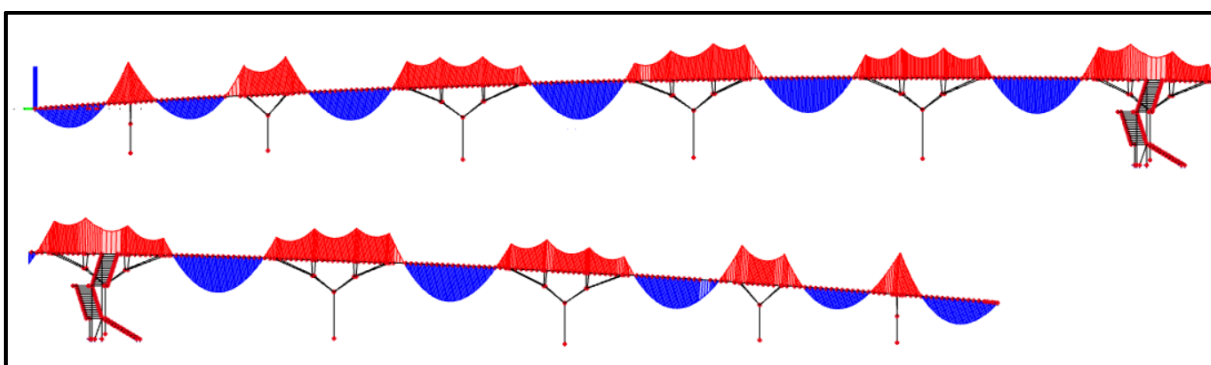
#### 6.4.1.6 Kontrola výpočetního modelu

Výpočetní model byl následně prověřen pomocí kontroly průběhu vnitřních sil, a to zejména ohybových momentů  $M_y$ . Průběh ohybových momentů  $M_y$  na mostovce lávky je vykreslen na Obr. 63.



*Obr. 63: Průběh ohybových momentů  $M_y$ . Lávka je rozdělena na 2 části, které odděluje schodiště.*

Z Obr. 63 je patrné, že v místě napojení pilířů na mostovku je určitá nespojitost v záporných ohybových momentech. Skoky, které v ohybovém momentu jsou, by se neměly na konstrukci vyskytovat a poukazuje to na to, že v prověřovaném modelu je chyba. Po následné analýze bylo zjištěno, že tuto chybu do modelu vnášejí fiktivní pruty simulující svislou excentricitu napojení podpor na mostovku, a následně byla tato chyba opravena. Chyba byla způsobena tím, že tyto fiktivní pruty nebyly v modelu dokonale svislé a jejich excentricita vnášela do mostovky přídavný ohybový moment. Průběh ohybových momentů na opraveném výpočetním modelu je na Obr. 64.

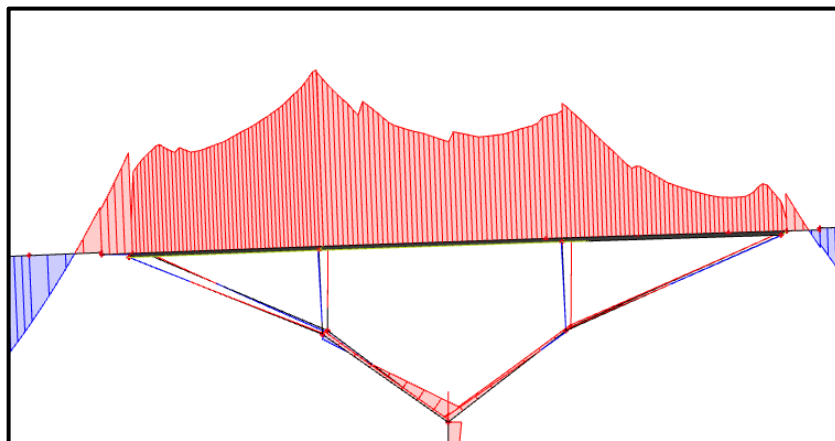


*Obr. 64: Průběh ohybových momentů po opravě modelu. Lávka je rozdělena na 2 části, které odděluje schodiště.*

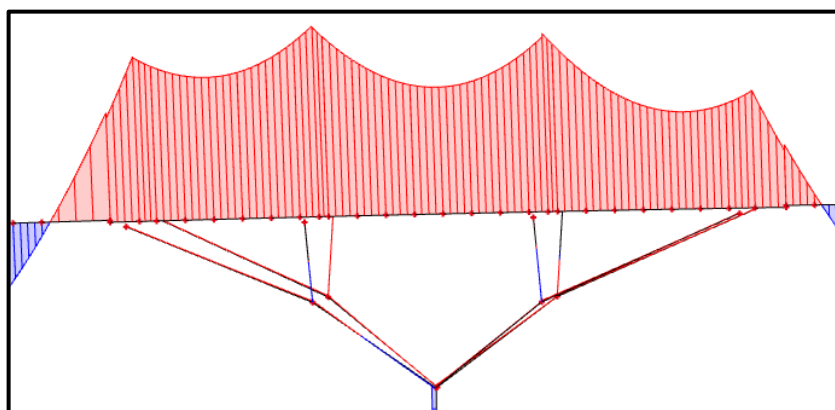
Po opravě výpočetního modelu byl průběh ohybových momentů podle předpokladu. V místě podepření nejsou žádné skoky v hodnotách ohybového momentu.

Dále bylo kontrolováno i simulování napojení podpor na mostovku pomocí fiktivních prutů ve vodorovném směru kolmém na osu lávky. Za tímto účelem byl vytvořen v místě podpory deskostěnový prvek a na něm tuhé vazby v místě napojení pilíře. Na tomto prvku byl v jeho těžišti modelován integrační pás, na kterém se zobrazují vnitřní síly integrované z celé šířky prvku. Takto byl kontrolován ohybový moment  $M_y$  a bylo porovnáno, zdali jeho průběh na deskostěnovém prvku odpovídá průběhu vykreslenému na prutovém prvku. Průběh

ohybového momentu  $M_y$  v místě podpory na deskostěnovém prvku je zobrazen na Obr. 65 a moment z prutového modelu je pro porovnání na Obr. 66.



Obr. 65: Ohybový moment  $M_y$  nad podporou na deskostěnovém prvku.



Obr. 66: Ohybový moment  $M_y$  nad podporou na prutovém prvku.

Z Obr. 65 a Obr. 66 je patrné, že charakter průběhu momentu  $M_y$  na prutovém a deskostěnovém prvku je stejný. Tímto bylo ověřeno, že fiktivní pruty simulující excentricitu napojení podpor na mostovku nevnášejí do prutového modelu výraznou chybu, a v další části práce byl využíván pouze prutový model.

#### 6.4.1.7 Zatěžovací stavy

Při výpočtu modální analýzy se uvažuje pouze hmotnost odpovídající stálému zatížení vyskytujícímu se na mostě v charakteristické hodnotě. V tomto případě se jedná pouze o hmotnost odpovídající vlastní tíze konstrukce, která je generovaná programem, a ostatnímu stálému zatížení, kterým je v případě předmětné lávky pouze zábradlí. Zábradlí bylo ve výpočtu definované jako liniové zatížení. Liniové zatížení uvažované v původním statickém výpočtu bohužel v podkladech nebylo uvedeno, bylo tedy odhadnuto hodnotou 0.5 kN/m v místě zábradlí výšky 1.1 m a 0.9 kN/m v místě zábradlí výšky 2 m.

### 6.4.2 Verifikace výpočetního 3D modelu konstrukce

Verifikace, tedy ověření výstižnosti 3D modelu konstrukce, byla provedena následujícím způsobem: vypočtené vlastní frekvence byly s naměřenými vlastními frekvencemi porovnány podle vzorce (18), který je definovaný v normě ČSN 73 6209 a popsáný v kapitole 4.1.5., a v případě vlastních tvarů byla provedena vizuální kontrola. Pro větší přehlednost je vzorec (18), který definuje míru shody změřených a vypočtených vlastních frekvencí pomocí hodnoty odchylky  $\Delta_{(j)}$ , uveden znovu zde:

$$\Delta_{(j)} = \frac{f_{(j)CAL} - f_{(k)OBS}}{f_{(j)CAL}} * 100, \quad (30)$$

kde  $f_{(j)CAL}$  je vypočtená  $j$ -tá vlastní frekvence konstrukce a  $f_{(k)OBS}$  je změřená  $k$ -tá vlastní frekvence konstrukce.

Vypočtené hodnoty odchylek byly posouzeny podle kritérií uvedených v Tab. 4. Norma ČSN 73 6209 definuje, že takto posouzený má být základní soubor vlastních frekvencí, který je detailněji popsáný v kapitole 4.1.5. V této práci bylo takto ze studijních důvodů posouzeno prvních patnáct vypočtených vlastních frekvencí.

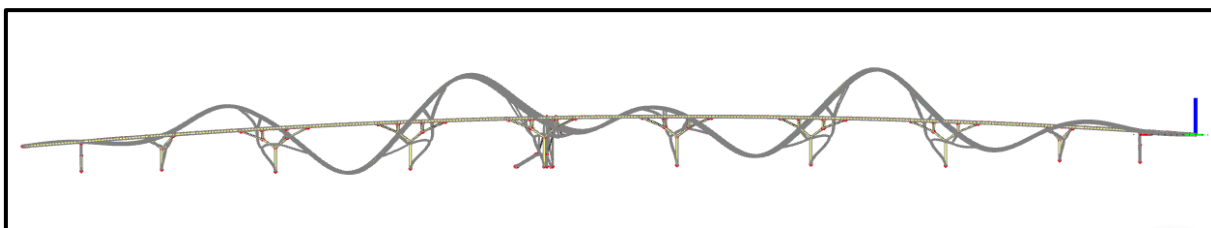
V Tab. 9 jsou uvedeny vypočtené vlastní frekvence, odpovídající vlastní frekvence naměřené při experimentu v roce 2002 a posouzení jejich odchylek  $\Delta_{(j)}$  na základě mezních odchylek (viz kapitola 4.1.5). Při experimentu v roce 2002 se nepodařilo některé vlastní frekvence lávky najít. Jednalo se o vlastní frekvence spjaté s vodorovnými vlastními tvary, a to konkrétně o vlastní frekvence spjaté s 3., 4. a 5. tvarem vodorovného příčného kmitání mostovky. Pro vlastní frekvence svázané s tvary vodorovného příčného kmitání, které se podařilo v roce 2002 najít, byl vytvořen poměr s daty z experimentu z roku 2023. Tento poměr byl následně pro všechny tyto frekvence zprůměrován a vlastní frekvence, které se v roce 2002 nepodařilo vyhodnotit, byly dopočteny vynásobením vlastních frekvencí z roku 2023 tímto průměrným poměrem. Z tohoto postupu vyšlo, že vlastní frekvence spjaté s vlastními tvary příčného vodorovného kmitání mostovky z roku 2002 jsou průměrně 1.19krát vyšší než ty naměřené v roce 2023. Takto dopočtené vlastní frekvence jsou v Tab. 9 zvýrazněny žlutě.

Tab. 9: Vypočtené vlastní frekvence konstrukce – verifikace 3D modelu

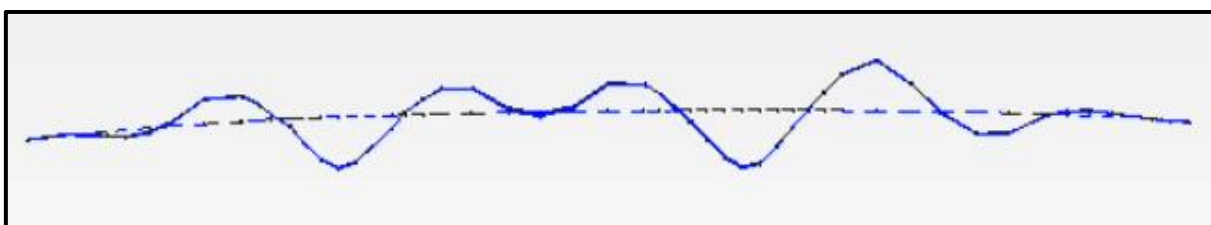
Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.06	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	1.9	-15.0	10.0	✓
2	1.47	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	5.4	-15.0	10.0	✓
3	2.04	1. svislý	4	2.55	1. svislý	-25.0	-15.0	10.0	✗
4	2.07	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	-3.9	-15.1	15.1	✓
5	2.41	2. svislý	6	3.01	2. svislý	-24.9	-15.5	15.5	✗
6	2.87	3. svislý	7	3.54	3. svislý	-23.3	-15.7	15.7	✗
7	2.90	4. vodorovný	5	2.91	4. vod.	-0.5	-15.4	15.4	✓
8	3.44	4. svislý	9	4.19	4. svislý	-21.8	-16.1	16.1	✗
9	3.90	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	-2.3	-16.0	16.0	✓
10	4.08	5. svislý	10	4.93	5. svislý	-20.8	-16.4	16.4	✗
11	4.68	6. svislý	12	5.59	6. svislý	-19.4	-16.7	16.7	✗
12	5.31	7. svislý	13	6.24	7. svislý	-17.5	-17.1	17.1	✗
13	5.53	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	1.6	-16.7	16.7	✓
14	6.07	8. svislý	14	7.63	8. svislý	-25.7	-17.7	17.7	✗
15	7.09	1. kroutivý	15	6.37	1. kroutivý	10.2	-17.1	17.1	✓

V Tab. 9 je jasně viditelné, že nevyhovují všechny vlastní frekvence spjaté se svislým ohybovým kmitáním mostovky. Tyto vlastní frekvence vypočtené na ověřovaném modelu jsou zhruba o 20 % nižší než ty, které byly na konstrukci naměřeny v roce 2002. V tabulce jsou porovnávány navzájem vypočtené a změřené vlastní frekvence, jejichž příslušející vlastní tvar má stejný charakter. V tabulce je dále patrné, že pořadová čísla vlastních frekvencí nejsou u sloupce z experimentu z roku 2002 popořadě. Vlastní frekvence z experimentu jsou tedy v jiném pořadí než ty, které byly spočítané na teoretickém 3D modelu.

Byla provedena také vizuální kontrola vlastních tvarů. Nejvyšší odlišnost byla patrná u 2. vlastního tvaru svislého ohybového kmitání, kterému přísluší modelem spočítaná vlastní frekvence  $f_{(3)} = 2.05$  Hz a při experimentu v roce 2002 změřená frekvence  $f_{(4)} = 2.55$  Hz. Vlastní tvar vypočtený z 3D modelu je vykreslen na Obr. 67 a ten změřený v roce 2002 na Obr. 68.



Obr. 67: Spočítaný vlastní tvar z 3D modelu konstrukce příslušející vlastní frekvenci  $f_{(5)} = 2.41 \text{ Hz}$ . Opěra O000 je vpravo.



Obr. 68: Naměřený vlastní tvar z experimentu v roce 2002 příslušející vlastní frekvenci  $f_{(5)} = 3.01 \text{ Hz}$ . Opěra O000 je vpravo.

Z obrázků 2. vlastního tvaru svislého ohybového kmitání je patrné, že naměřený vlastní tvar není stejný, jako ten vypočtený. Model tedy nevyhovuje z hlediska vlastních frekvencí ani z hlediska podobnosti vlastních tvarů a musí se dále upravit. Bylo tedy přistoupeno k identifikaci výpočetního 3D modelu, to znamená, že byly měněny jednotlivé parametry modelu tak, aby bylo dosaženo co nejvyšší míry shody vypočtených výsledků s experimentem [7].

### 6.4.3 Jednotlivé kroky identifikace výpočetního 3D modelu konstrukce

Při identifikaci bylo postupováno v jednotlivých krocích. Vždy byla upravena jedna skutečnost a následně byla posuzována míra ovlivnění výsledných vlastních frekvencí touto změnou. Míra shody mezi výsledky z experimentu a z výpočetního modelu byla opět posuzována podle hodnot odchylek  $\Delta_{(j)}$ .



### 6.4.3.1 Změna modulu pružnosti betonu

Modul pružnosti betonu, který udává eurokód, je určitá hodnota stanovená pomocí statistických postupů. Je ale možné, že konkrétní beton použitý na konstrukci lávky měl modul pružnosti vyšší. Modul pružnosti ovlivňuje celkovou tuhost konstrukce, má tedy vliv i na vlastní frekvence. Modul pružnosti betonu byl upraven na maximální naměřenou hodnotu modulu pružnosti betonu C30/37, kterou uvádí výrobce betonu ZAPA beton. Ten udává maximální naměřenou hodnotu modulu pružnosti 36.3 GPa při teplotě 20 °C [58]. Tato hodnota byla následně přepočtena pomocí vzorce (29) na hodnotu  $E_T = 39.89$  GPa [47], která byla použita v modelu. Ovlivnění touto změnou je shrnuto v Tab. 10 a 11.

Tab. 10: Vypočtené vlastní frekvence konstrukce – první krok identifikace modelu

Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.09	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	4.6	-15.0	10.0	✓
2	1.53	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	9.2	-15.0	10.0	✓
3	2.10	1. svislý	4	2.55	1. svislý	-21.4	-15.0	10.0	✗
4	2.14	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	-0.5	-15.0	15.0	✓
5	2.48	2. svislý	6	3.01	2. svislý	-21.4	-15.4	15.4	✗
6	2.96	3. svislý	7	3.54	3. svislý	-19.6	-15.7	15.7	✗
7	2.99	4. vodorovný	5	2.91	4. vodorovný	2.5	-15.4	15.4	✓
8	3.55	4. svislý	9	4.19	4. svislý	-18.0	-16.0	16.0	✗
9	4.06	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	1.7	-15.9	15.9	✓
10	4.22	5. svislý	10	4.93	5. svislý	-16.8	-16.3	16.3	✗
11	4.85	6. svislý	12	5.59	6. svislý	-15.3	-16.7	16.7	✓
12	5.50	7. svislý	13	6.24	7. svislý	-13.5	-17.0	17.0	✓
13	5.76	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	5.6	-16.6	16.6	✓
14	6.34	8. svislý	14	7.63	8. svislý	-20.3	-17.6	17.6	✗
15	7.10	1. kroutivý	15	6.37	1. kroutivý	10.3	-17.0	17.0	✓

Tab. 11: Změna výsledků po prvním kroku identifikace výpočetního modelu

Pořad. č. j	Experiment 2002 podle tvarů $f_{(k),OBS}$ [Hz]	Předchozí krok identifikace $f_{(j),CAL,0}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,0} / f_{(k),OBS}$ [%]	Současný krok identifikace $f_{(j),CAL,1}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,1} / f_{(k),OBS}$ [%]	Rozdíl poměrů frekvencí [%]
1	1.04	1.06	101.9	1.09	104.8	2.88
2	1.39	1.47	105.8	1.53	110.1	4.32
3	2.55	2.04	80.0	2.10	82.4	2.35
4	2.15	2.07	96.3	2.14	99.5	3.26
5	3.01	2.41	80.1	2.48	82.4	2.33
6	3.54	2.87	81.1	2.96	83.6	2.54
7	2.91	2.90	99.5	2.99	102.6	3.09
8	4.19	3.44	82.1	3.55	84.7	2.63
9	3.99	3.90	97.7	4.06	101.8	4.01
10	4.93	4.08	82.8	4.22	85.6	2.84
11	5.59	4.68	83.7	4.85	86.8	3.04
12	6.24	5.31	85.1	5.50	88.1	3.04
13	5.44	5.53	101.7	5.76	105.9	4.23
14	7.63	6.07	79.6	6.34	83.1	3.54
15	6.37	7.09	111.3	7.10	111.5	0.16

Tab. 12: Legenda k barevnému značení u tabulek změny výsledků

Barva	Charakter změny
	Zlepšení výsledků oproti předchozímu výpočetnímu modelu
	Zhoršení výsledků oproti předchozímu výpočetnímu modelu
	Změna výsledků malého významu oproti ostatním změnám
	Změna výsledků příliš velká, ale správného charakteru (zmenšení/zvětšení)

V Tab. 10 a 11 je patrné, že zvýšení modulu pružnosti betonu ovlivnilo výsledky poměrně málo. Navíc jsou zvýšením modulu pružnosti betonu lávky ovlivněny i vlastní frekvence spjaté s vlastními tvary vodorovného příčného kmitání mostovky lávky, které nebylo třeba identifikací modelu ovlivnit. Původní hypotéza byla, že změna modulu pružnosti betonu ovlivní zejména svislé vodorovné kmitání, protože na vodorovné příčné kmitání bude mít spíše vliv tuhost pilířů. Toto však vyvrací data z

Tab. 11, v které je vidět, že tato změna ovlivňuje všechny vlastní frekvence podobně nezávisle na charakteru jim příslušných vlastních tvarů.

Vzhledem k tomu, že tato změna ovlivnila všechny vlastní frekvence, a tedy i ty, které nemusely být zvýšeny, nebylo dále s touto změnou modulu pružnosti uvažováno a bylo dále počítáno s původním modulem pružnosti  $E = 36.27$  GPa.

#### 6.4.3.2 Zvětšení výšky průřezu

Ve výpočtu jsou méně přesné zejména vlastní frekvence spjaté s vlastními tvary svislého ohybového kmitání. Jako další možnost identifikace modelu by se mohlo nabízet zvýšení výšky průřezu mostovky a ponechání jeho šířky. Tímto by se zvyšovala zejména jeho svislá ohybová tuhost, vodorovná tuhost by se zvyšovala také, ale to by mohlo být vyrovnáno zvyšující se hmotností, která také hodnotu vlastních frekvencí ovlivňuje.

Iteračně bylo zkoušeno, o kolik by se musel průřez zvýšit, aby bylo dosaženo optimální shody, a k dosažení vlastních frekvencí naměřených v roce 2002 by se musel průřez nad podporou i v střední části polí zvýšit o 18 cm. Toto je hodnota, která daleko přesahuje objektivní odchylky při betonáži, a není tedy možné, aby se realita takto výrazně lišila od výšky předpokládané v projektu.

Zvyšování průřezu měnilo podle předpokladu zejména vlastní frekvence spjaté se svislým ohybovým kmitáním, ostatní vlastní frekvence byly touto změnou ovlivněny méně.

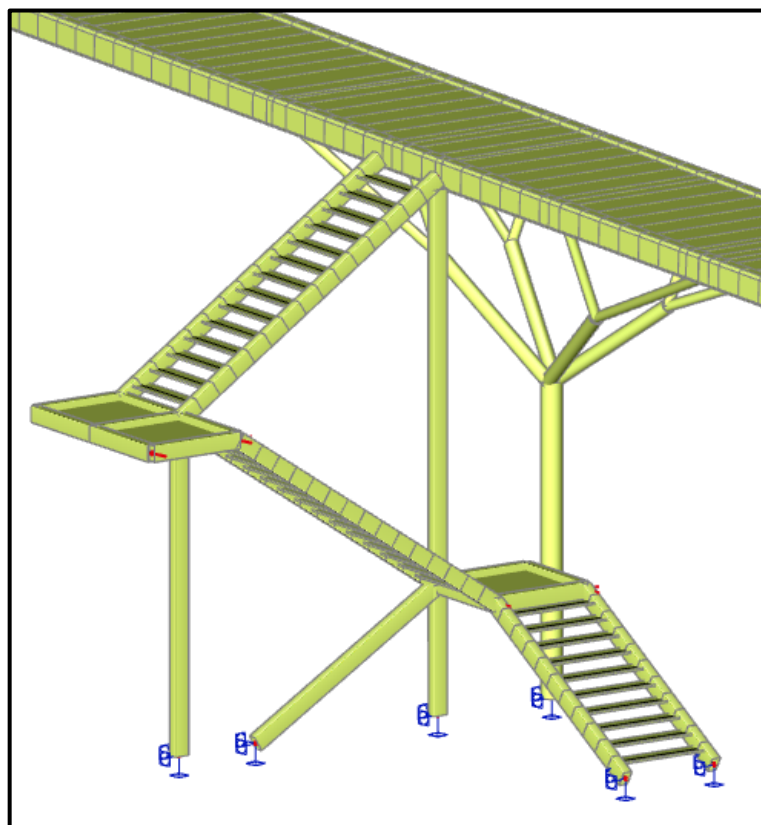
Zásadní je ale fakt, že ani zvýšení modulu pružnosti ani změna geometrie průřezu neovlivnily chování problematického 2. vlastního tvaru svislého ohybového kmitání. Tyto změny měly účinek na celkovou tuhost průřezu po celé délce lávky a ovlivňovaly tedy hodnoty vlastních frekvencí, ale charakterů vlastních tvarů zůstávaly stále stejné.

Po pečlivější analýze zmíněného vlastního tvaru bylo odhadnuto, že rozdílnost v dynamickém chování skutečné lávky oproti modelu by mohla být způsobena schodištěm. Změřený vlastní tvar má totiž nulové natočení právě v místě schodiště. Proto byl na schodiště zaměřený další krok identifikace.

### 6.4.3.3 Úprava schodiště připojeného k lávce

Schodiště je do mostovky lávky vetknuté, jsou jím tedy vlastní tvary ovlivněny. Hypotéza, proč se 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání spočítaný v modelu a naměřený ve skutečnosti liší, byla, že schodiště v aktuální verzi modelu je nedostatečně tuhé. Bylo tedy zkoumáno, zda je možné, že konstrukce schodiště je natolik tuhá, že podstatně ovlivňovala pootočení mostovky lávky kolem osy Y, tedy vodorovné osy kolmé na podélnou osu lávky. Právě to mohlo mít dopad na nulové pootočení problematického vlastního tvaru v místě napojení schodiště.

Na základě této úvahy bylo tedy schodiště v modelu upraveno tak, aby lépe odpovídalo skutečnosti. Za účelem zvýšení jeho celkové tuhosti byly přidány schodišťové stupně a konstrukce podest.



Obr. 69: Upravené schodiště v 3D modelu. Přidání podest a schodišťových stupňů.

V Tab. 13 je opět uvedeno posouzení, jestli model z hlediska normy ČSN 73 6209 vyhovuje, a dále v Tab. 14 je shrnuta míra ovlivnění vlastních frekvencí touto změnou.

Tab. 13: Změna výsledků po druhém kroku identifikace výpočetního modelu

Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.07	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	2.8	-15.0	10.0	✓
2	1.48	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	6.1	-15.0	10.0	✓
3	2.05	1. svislý	4	2.55	1. svislý	-24.4	-15.0	10.0	✗
4	2.08	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	-3.4	-15.0	15.0	✓
5	2.41	2. svislý	6	3.01	2. svislý	-24.9	-15.5	15.5	✗
6	2.87	3. svislý	7	3.54	3. svislý	-23.3	-15.7	15.7	✗
7	2.9	4. vodorovný	5	2.91	4. vodorovný	-0.5	-15.4	15.4	✓
8	3.44	4. svislý	9	4.19	4. svislý	-21.8	-16.0	16.0	✗
9	3.87	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	-3.1	-15.9	15.9	✓
10	4.09	5. svislý	10	4.93	5. svislý	-20.5	-16.4	16.4	✗
11	4.64	6. svislý	12	5.59	6. svislý	-20.5	-16.7	16.7	✗
12	5.33	7. svislý	13	6.24	7. svislý	-17.1	-17.0	17.0	✗
13	5.53	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	1.6	-16.7	16.7	✓
14	6.09	8. svislý	14	7.63	8. svislý	-25.3	-17.7	17.7	✗
15	7.1	1. krouživý	15	6.37	1. krouživý	10.3	-17.1	17.1	✓

Tab. 14: Změna výsledků oproti původním po druhém kroku identifikace výpočetního modelu

Pořad. č. j	Experiment 2002 podle tvarů $f_{(k),OBS}$ [Hz]	Předchozí krok identifikace $f_{(j),CAL,0}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,0}/f_{(k),OBS}$ [%]	Současný krok identifikace $f_{(j),CAL,2}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,1}/f_{(k),OBS}$ [%]	Rozdíl poměrů frekvencí [%]
1	1.04	1.06	101.9	1.07	102.9	0.96
2	1.39	1.47	105.8	1.48	106.5	0.72
3	2.55	2.04	80.0	2.05	80.4	0.39
4	2.15	2.07	96.3	2.08	96.7	0.47
5	3.01	2.41	80.1	2.41	80.1	0.00
6	3.54	2.87	81.1	2.87	81.1	0.00
7	2.91	2.90	99.5	2.90	99.5	0.00
8	4.19	3.44	82.1	3.44	82.1	0.00
9	3.99	3.90	97.7	3.87	97.0	-0.75
10	4.93	4.08	82.8	4.09	83.0	0.20
11	5.59	4.68	83.7	4.64	83.0	-0.72
12	6.24	5.31	85.1	5.33	85.4	0.32
13	5.44	5.53	101.7	5.53	101.7	0.00
14	7.63	6.07	79.6	6.09	79.8	0.26
15	6.37	7.09	111.3	7.10	111.5	0.16

Z výše uvedených výsledků vyplývá, že zpřesnění modelu schodiště a zvýšení jeho tuhosti nemělo na vlastní frekvence lávky prakticky žádný dopad, a navíc také neovlivnilo vlastní tvary. V modelu byly zkoušeny i různé způsoby napojení schodiště na konstrukci mostovky, jako je napojení, které nebylo tvořeno pomocí fiktivních prutů, ale pomocí deskostěnového prvku z betonu C30/37 tloušťky 400 mm, aby model co nejlépe respektoval realitu. Dále pak bylo použito kloubové připojení, kterým bylo simulováno, že schodiště ve skutečnosti není vetknuté do konstrukce mostovky a že je mostovce kolem něj umožněno natočení, ale žádné tyto změny nevedly ke zvýšení vlastních frekvencí spjatých s tvary svislého ohybového kmitání a nedocházelo k žádné změně charakteru vlastních tvarů. Celkové oddílování schodiště od mostovky také nepomohlo. V tomto případě to mělo navíc velký nežádoucí vliv na charakter vlastních tvarů vodorovného příčného kmitání, u kterých schodiště tvoří uzel, jelikož má oproti pilířům poměrně velkou tuhost na posunutí ve směru osy Y (vodorovné osy kolmé na podélnou osu lávky).

Úprava modelování schodiště tedy také nevedla ke zlepšení chování výpočetního modelu v porovnání se skutečností. Před realizací lávky vznikly výpočetní modely, které měly simulovat dynamické chování konstrukce. Tento model byl s těmito modely porovnán, za účelem zjištění rozdílností a k případnému nalezení chyby ve výpočetním 3D modelu, který popisuje tato práce.

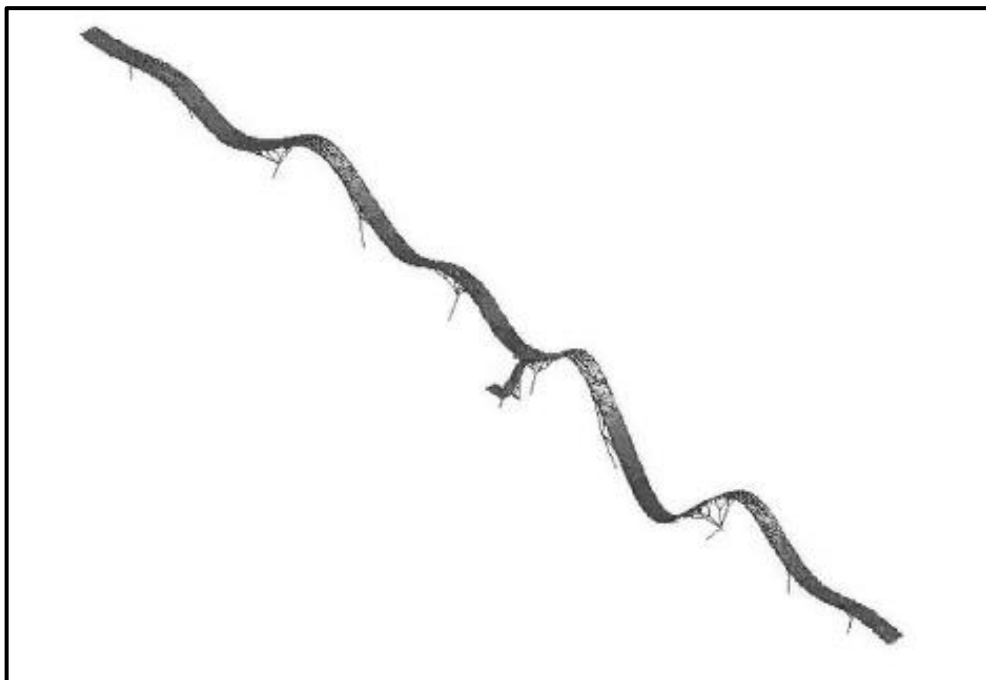
#### **6.4.4 Porovnání s ostatními výpočetními modely simulujícími dynamické chování konstrukce lávky**

Před realizací lávky vzniklo více výpočetních modelů, které měly simulovat dynamické chování konstrukce. Porovnání výsledků výpočetních modelů z Fakulty stavební ČVUT a od společnosti Valbek s.r.o. s výsledky experimentu před uvedením do provozu v roce 2002 bylo publikováno v článku [59] zveřejněném v časopise Stavební obzor. V Tab. 15 jsou výsledky uvedené v tomto článku doplněné o vlastní frekvence z modelu vytvořeného v této práci.

Tab. 15: Porovnání vypočtených a změřených vlastních frekvencí z článku zveřejněného v časopisu *Stavební obzor* doplněné o vlastní frekvence vypočtené v rámci této práce

Pořadí j (pro model VALBEK)	Vlastní frekvence $f(j)$ [Hz]				Vlastní tvar kmitání pro model VALBEK
	Výpočet			Experiment	
	VALBEK	FSv	Šach		
1	0.80	0.89	1.07	1.04	1. tvar vodorov. příčného kmitání lávky
2	1.00	1.72	xx	xx	1. tvar vodorov. podélného kmitání lávky
3	1.10	1.25	1.48	1.39	2. tvar vodorov. příčného kmitání lávky
4	1.70	2.08	2.05	2.55	1. svislého ohybového kmitání lávky
5	2.00	2.24	2.08	xx	3. tvar vodorov. příčného kmitání lávky
6	2.00	2.33	2.41	3.01	2. svislého ohybového kmitání lávky
7	2.50	2.77	2.87	3.54	3. svislého ohybového kmitání lávky
8	2.70	3.25	2.90	xx	4. tvar vodorov. příčného kmitání lávky
9	3.00	3.82	3.44	4.19	4. svislého ohybového kmitání lávky
10	3.60	4.41	4.09	4.93	5. svislého ohybového kmitání lávky

Z tabulky lze vidět, že vlastní frekvence vypočtené na modelech sestavených před uvedením lávky do provozu se také odchylují od těch naměřených při experimentu zhruba ve stejné míře jako vlastní frekvence vypočtené na modelu sestavovaném v rámci této práce. Zejména se jedná o vlastní frekvence spjaté s vlastními tvary vodorovného příčného kmitání mostovky lávky. Na Obr. 70 je navíc uveden 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání vypočtený Fakultou stavební ČVUT, který má stejný charakter, jako ten uvedený v této práci.

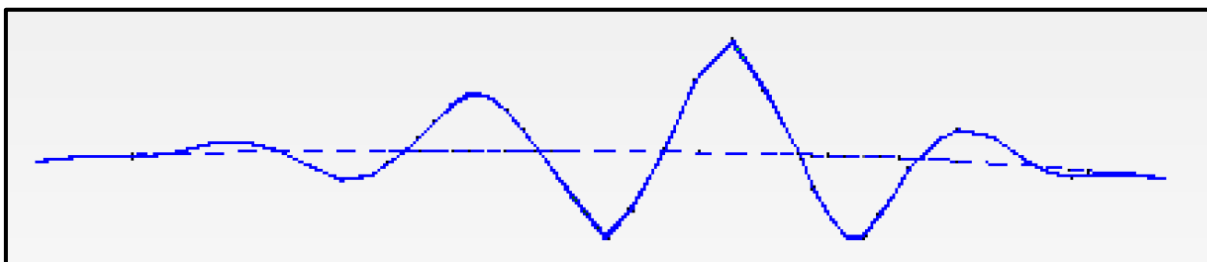


Obr. 70: 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání vypočtený na Fakultě stavební ČVUT  $f_{(5)}=1.93$  Hz. Opěra O000 je v levém horním rohu.

Ve výpočetním modelu, který je popisován v této práci, tedy není žádná zjevná chyba oproti výpočetním modelům, které byly sestaveny před uvedením konstrukce lávky do provozu. Proto tedy byly výsledky experimentu detailněji analyzovány za účelem zjištění příčiny tohoto chování skutečné konstrukce.

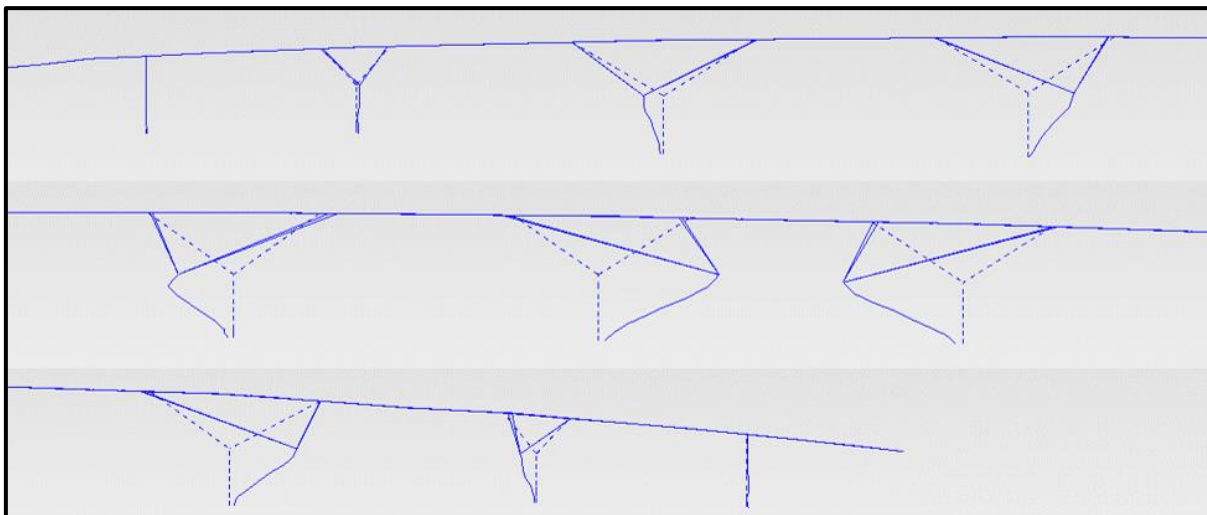
#### 6.4.5 Detailnější analýza výsledků dynamické zkoušky

Detailněji byly prověřeny první dva vlastní tvary svislého ohybového kmitání, a to jak kmitání mostovky lávky, tak kmitání pilířů. Vzhledem k tomu, že se vlastní tvary svislého ohybového kmitání mezi roky 2002 a 2023 prakticky nezměnily, byly podrobněji prověřovány vlastní tvary vyhodnocené ze zkoušky z roku 2023. První svislý ohybový vlastní tvar mostovky je připomenut na Obr. 71 a vlastní tvar kmitání pilířů na Obr. 72. To stejné je připomenuté pro druhý svislý ohybový vlastní tvar na Obr. 73 a Obr. 74.

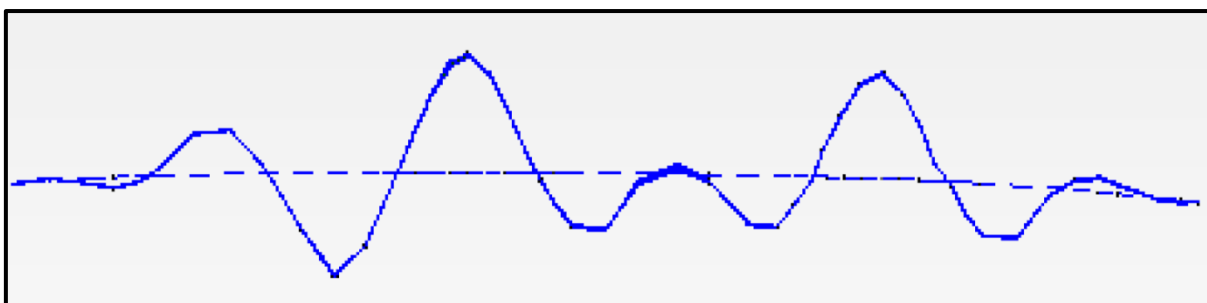


Obr. 71: 1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}= 2.55$  Hz). Opěra O000 je nalevo.

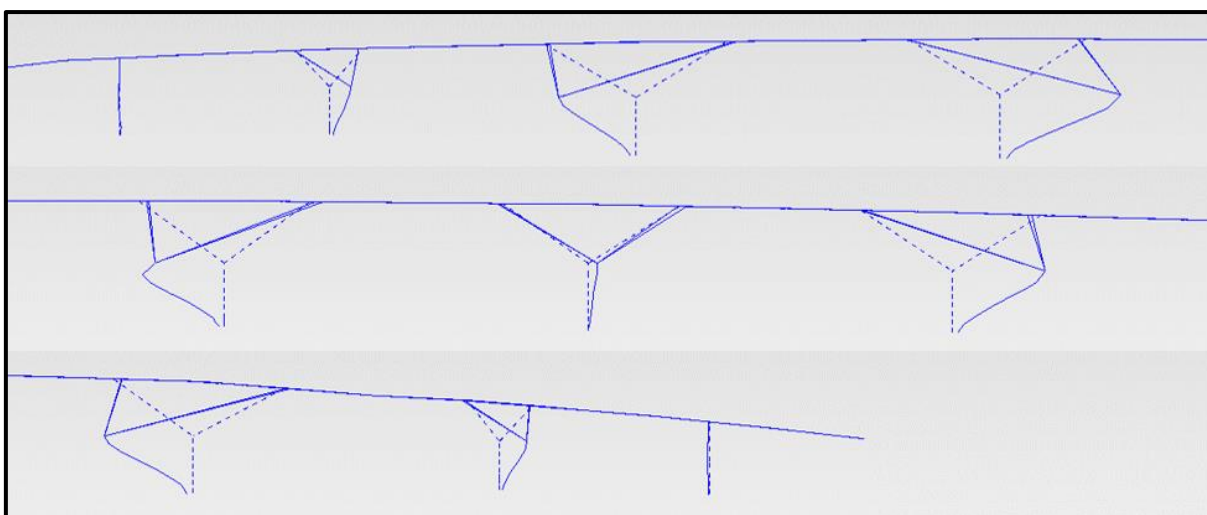




*Obr. 72: 1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=2.55$  Hz) - pořadnice vlastní tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře.*



*Obr. 73: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(5)} = 3.01$  Hz). Opěra O000 je nalevo.*



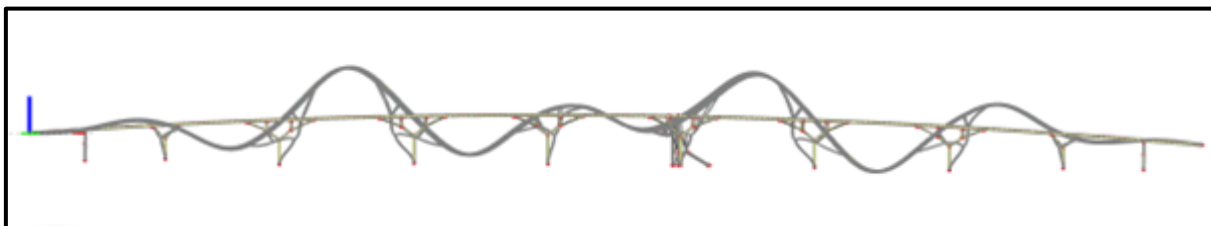
*Obr. 74: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=3.01$  Hz)- pořadnice vlastní tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře.*

Výše uvedené vlastní tvary se nechovají podle očekávání vycházejících z výsledků dynamických výpočtů. Pro přehlednost bude popis lávky dále rozdělen na 2 části. Tyto 2 části

jsou odděleny schodištěm. Část lávky obsahující opěru O000 bude nazývána levá část lávky a část obsahující opěru O110 bude pojmenována pravá část lávky.

Očekávání byla taková, že lávka se bude chovat symetricky, případně bude lehce poddajnější levá část lávky, protože zde jsou o trochu vyšší pilíře. Z Obr. 71 je však patrné, že zde vyobrazený vlastní tvar není symetrický. Toho si jde všimnout i na Obr. 72, kdy druhý pilíř od kraje v levé části téměř nekmitá (pilíř P020) a druhý pilíř od kraje v pravé části lávky kmitá podstatně výrazněji (pilíř P090). Toto chování naznačuje to, že kmitání by mohlo být ovlivněno schodištěm, které není v polovině lávky, a že by schodiště mohlo působit nepříznivě na symetrii dynamického chování lávky. Proti tomu jde ale fakt, že levá část má 6 polí a pravá pouze 5, bylo tedy očekáváno, že poddajnější bude levá (delší) část lávky. Schodiště tedy svislé ohybové kmitání pravděpodobně neovlivňuje, a to je v souladu se závěry popsány v kap. 6.4.3.3. Vzhledem k tomu, že při nižších vlastních frekvencích kmitá zejména pravá část lávky, je tato část zřejmě poddajnější.

U spojitého nosníku o lichém počtu polí, který je vzhledem ke středu symetrický, je druhý vlastní tvar svislého ohybového kmitání antisymetrický, což je i výsledek z numerického modelu analyzovaného v této práci (Obr. 75).



Obr. 75: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky vypočtený na modelu ( $f_{(5)} = 2.41 \text{ Hz}$ ).  
Opěra O000 je nalevo.

Naměřený druhý vlastní tvar svislého ohybového kmitání se takto ale nechová, neboť se chová více méně symetricky, což je charakteristické pro druhý vlastní tvar svislého ohybového kmitání u spojitého nosníku, který je ke středu symetrický a má sudý počet polí. Naměřený vlastní tvar navíc není přibližně symetrický ke středu lávky, ale ke schodišti.

Levá část lávky, i přes to, že je delší a má lehce vyšší pilíře, má tedy vyšší svislou ohybovou tuhost než pravá část. Části s vyšší a nižší svislou ohybovou tuhostí jsou rozděleny právě schodištěm. Jediné vysvětlení, které by takové chování podporovalo, je zohlednit zábradlí, které bylo doposud v 3D modelu zavedeno pouze pomocí hmoty, včetně jeho tuhosti. Zábradlí v levé části lávky má totiž výšku 2 m a v pravé části jen 1.1 m. Na základě této úvahy byla tedy do modelu zahrnuta i tuhost zábradlí.

### 6.4.6 Identifikace výpočetního 3D modelu pomocí zahrnutí tuhosti zábradlí

K zábradlí bohužel nebyla k dispozici konkrétní dokumentace, jeho rozměry a parametry jeho jednotlivých částí byly odhadnuty z přehledných výkresů a fotografií. Zábradlí bylo modelováno pomocí ocelových sloupků z T průřezu, konkrétně průřezu T80, madlo pomocí trubky o průměru 70 mm a tloušťce 3.6 mm a horní lišta u části zábradlí vysokého 2 m plechem výšky 60 mm a tloušťky 15 mm. U všech těchto prvků byla jako materiál zahrnuta ocel. Zábradlí bylo vůči těžišťové ose mostovky uvažováno na vodorovné excentricitě modelované pomocí fiktivních prutů.

#### 6.4.6.1 První krok identifikace výpočetního modelu se zahrnutím zábradlí

V prvním kroku bylo zábradlí modelováno jen pomocí sloupků, madla a horní lišty. Vypočtené vlastní frekvence a jejich posouzení je popsáno v Tab. 16 a srovnání s předchozím krokem identifikace, kdy bylo zpřesněno modelování schodiště, v Tab. 17.

Tab. 16: Změna výsledků (vlastních frekvencí) po třetím kroku identifikace výpočetního modelu

Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.10	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	5.5	-15.0	10.0	✓
2	1.51	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	7.9	-15.0	10.0	✓
3	2.12	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	-1.4	-15.0	10.0	✓
4	2.15	1. svislý	4	2.55	1. svislý	-18.6	-15.0	10.0	✗
5	2.46	2. svislý	6	3.01	2. svislý	-22.4	-15.4	15.4	✗
6	2.92	3. svislý	7	3.54	3. svislý	-21.2	-15.6	15.6	✗
7	2.95	4. vodorovný	5	2.91	4. vodorovný	1.2	-15.4	15.4	✓
8	3.47	4. svislý	9	4.19	4. svislý	-20.7	-15.9	15.9	✗
9	3.95	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	-1.0	-15.9	15.9	✓
10	4.09	5. svislý	10	4.93	5. svislý	-20.5	-16.3	16.3	✗
11	4.66	6. svislý	12	5.59	6. svislý	-20.0	-16.6	16.6	✗
12	5.22	7. svislý	13	6.24	7. svislý	-19.5	-16.9	16.9	✗
13	5.48	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	0.7	-16.5	16.5	✓
14	6.06	8. svislý	14	7.63	8. svislý	-25.9	-17.5	17.5	✗
15	6.30	1. krouživý	15	6.37	1. krouživý	-1.1	-17.0	17.0	✓

Tab. 17: Změna výsledků oproti minulému kroku identifikace

Pořad. č. j	Experiment 2002 podle tvarů $f_{(k),OBS}$ [Hz]	Předchozí krok identifikace $f_{(j),CAL,2}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,2} / f_{(k),OBS}$ [%]	Současný krok identifikace $f_{(j),CAL,3}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,3} / f_{(k),OBS}$ [%]	Rozdíl poměrů frekvencí [%]
1	1.04	1.07	102.9	1.10	105.8	2.88
2	1.39	1.48	106.5	1.51	108.6	2.16
3	2.15	2.05	95.3	2.12	98.6	3.26
4	2.55	2.08	81.6	2.15	84.3	2.75
5	3.01	2.41	80.1	2.46	81.7	1.66
6	3.54	2.87	81.1	2.92	82.5	1.41
7	2.91	2.90	99.5	2.95	101.2	1.72
8	4.19	3.44	82.1	3.47	82.8	0.72
9	3.99	3.87	97.0	3.95	99.0	2.01
10	4.93	4.09	83.0	4.09	83.0	0.00
11	5.59	4.64	83.0	4.66	83.4	0.36
12	6.24	5.33	85.4	5.22	83.7	-1.76
13	5.44	5.53	101.7	5.48	100.7	-0.92
14	7.63	6.09	79.8	6.06	79.4	-0.39
15	6.37	7.10	111.5	6.30	98.9	-12.56

Přidání zábradlí do výpočetního modelu v prvním kroku nemělo významný dopad na přiblížení se vlastními frekvencemi z modelu k hodnotám naměřeným při experimentu v roce 2002. Výrazné zlepšení nastalo pouze u vlastní frekvence svázané s krouživým vlastním tvarem, což je pravděpodobně způsobené tím, že původně bylo zábradlí modelované pouze jako hmota v těžišťové ose lávky, ale tímto krokem byla hmotnost zábradlí přesunuta na okraje příčného řezu, což mělo na krouživé kmitání značný dopad.

V prvním kroku výplň zábradlí nebyla vůbec zahrnuta. Na zkoumané lávce je výplň zábradlí vyrobena z ocelového tahokovu. Je možné, že se tato výplň při dynamickém namáhání chová jako tuhá v podélném směru lávky, čímž zajišťuje lepší přenos sil mezi mostovkou lávky a madlem (případně horní lištou). Zábradlí se možná chová spíše jako nosník s velmi tenkou stojinou než jako dva pruty propojené poddajnými ocelovými sloupky. Na první mezní stav (mezní stav únosnosti) zábradlí nemusí mít žádný vliv, ale je možné, že při kmitání spolupůsobí s vodorovnou nosnou konstrukcí lávky.

#### 6.4.6.2 Druhý krok identifikace výpočetního modelu se zahrnutím zábradlí

Výplň zábradlí nešla modelovat pomocí deskostěnnových prvků, protože v případě, kdy byla výplň modelována jako deska s tloušťkou menší než 10 mm, vznikaly v modelu singularity.

Plechý s tloušťkou větší než 10 mm by měly vysokou tuhost a hmotnost a takovéto modelování výplně zábradlí by neodpovídalo skutečnosti. Bylo tedy učiněno zjednodušení, že sloupky zábradlí byly modelovány pomocí nového fiktivního materiálu, který měl objemovou hmotnost jako ocel, ale několikanásobně vyšší modul pružnosti, než má ocel. Tímto byla zvýšena míra spolupůsobení modelovaných prvků zábradlí. Vodorovná tuhost mostovky takto nebude tolik ovlivněna, protože zábradlí je na stejné excentricitě jako hrany příčného řezu mostovky a ve srovnání s betonovou deskou mají madla a horní lišta minimální vodorovnou tuhost. Svislá tuhost mostovky je však tímto způsobem zahrnutí efektu výplně zábradlí ovlivněna výrazně, protože ocelové prvky zábradlí jsou na významné svislé excentricitě vzhledem k těžišťové ose lávky.

Vypočtené vlastní frekvence a jejich posouzení je shrnuto v Tab. 18 a srovnání s předchozím krokem identifikace, kdy bylo do modelu poprvé zahrnuto zábradlí, v Tab. 19.

Tab. 18: Změna výsledků po čtvrtém kroku identifikace výpočetního modelu

Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.11	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	6.3	-15.0	10.0	✓
2	1.52	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	8.6	-15.0	10.0	✓
3	2.15	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	0.0	-15.0	10.0	✓
4	2.92	1. svislý	4	2.55	1. svislý	12.7	-15.0	10.0	x
5	2.96	4. vodorovný	5	2.91	4. vodorovný	1.5	-15.0	15.0	✓
6	3.87	2. svislý	6	3.01	2. svislý	22.2	-15.0	15.0	x
7	4.01	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	0.5	-15.4	15.4	✓
8	4.46	3. svislý	7	3.54	3. svislý	20.6	-15.2	15.2	x
9	5.39	4. svislý	9	4.19	4. svislý	22.3	-15.4	15.4	x
10	5.54	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	1.8	-15.9	15.9	✓
11	6.07	5. svislý	10	4.93	5. svislý	18.8	-15.7	15.7	x
12	6.47	6. svislý	12	5.59	6. svislý	13.6	-15.9	15.9	✓
13	6.61	1. kroutivý	15	6.37	1. kroutivý	3.6	-16.2	16.2	✓
14	7.23	7. svislý	13	6.24	7. svislý	13.7	-16.1	16.1	✓
15	9.80	8. svislý	14	7.63	8. svislý	22.1	-16.6	16.6	x

Tab. 19: Změna vlastních frekvencí oproti minulému kroku identifikace

Pořad. č. j	Experiment 2002 podle tvarů $f_{(k),OBS}$ [Hz]	Předchozí krok identifikace $f_{(j),CAL,3}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,3} / f_{(k),OBS}$ [%]	Současný krok identifikace $f_{(j),CAL,4}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,4} / f_{(k),OBS}$ [%]	Rozdíl poměrů frekvencí [%]
1	1.04	1.10	105.8	1.11	106.7	0.96
2	1.39	1.51	108.6	1.52	109.4	0.72
3	2.15	2.12	98.6	2.15	100.0	1.40
4	2.55	2.15	84.3	2.92	114.5	30.20
5	2.91	2.95	101.2	2.96	101.5	0.34
6	3.01	2.46	81.7	3.87	128.6	46.84
7	3.99	3.95	99.0	4.01	100.5	1.50
8	3.54	2.92	82.5	4.46	126.0	43.50
9	4.19	3.47	82.8	5.39	128.6	45.82
10	5.44	5.48	100.7	5.54	101.8	1.10
11	4.93	4.09	83.0	6.07	123.1	40.16
12	5.59	4.66	83.4	6.47	115.7	32.38
13	6.37	6.30	98.9	6.61	103.8	4.87
14	6.24	5.22	83.7	7.23	115.9	32.21
15	7.63	6.06	79.4	9.80	109.8	49.02

Zavedení sloupků zábradlí v modelu pomocí fiktivního materiálu s vysokou tuhostí podle předpokladu nemělo velký vliv na vlastní frekvence spjaté s vodorovným příčným kmitáním mostovky lávky. Zato však mělo velký vliv na vlastní frekvence spjaté se svislým ohybovým kmitáním. Tyto frekvence se zvýšily o 30 až 40 % oproti předchozímu kroku identifikace výpočetního modelu. Zvýšení těchto frekvencí bylo tak vysoké, že nastal problém v překročení horního limitu mezní odchylky, kterou definuje norma.

#### 6.4.6.3 Třetí krok identifikace výpočetního modelu se zahrnutím zábradlí

Ve třetím kroku identifikace výpočetního modelu se zahrnutím zábradlí, který byl celkově pátý, byly parametry zábradlí iteračně upravovány tak, aby bylo dosaženo co největší shody změřených a vypočtených vlastních frekvencí a také aby byl správný charakter odpovídajících vlastních tvarů. Průřezy sloupků zábradlí nebyly měněné a sloupky byly dále z fiktivního materiálu. Upravován byl rozměr madla zábradlí a horní lišty.

Rozměry těchto dvou prvků zábradlí byly nakonec upraveny na průměr 60 mm a tloušťku stěny 2.3 mm u trubkového profilu madla a horní lišta byla upravena na plech výšky 21 mm a šířky 8 mm. Výsledky po tomto kroku identifikace jsou shrnuty a posouzeny v Tab. 20 a jejich změna oproti předchozímu kroku identifikace je popsána v Tab. 21.

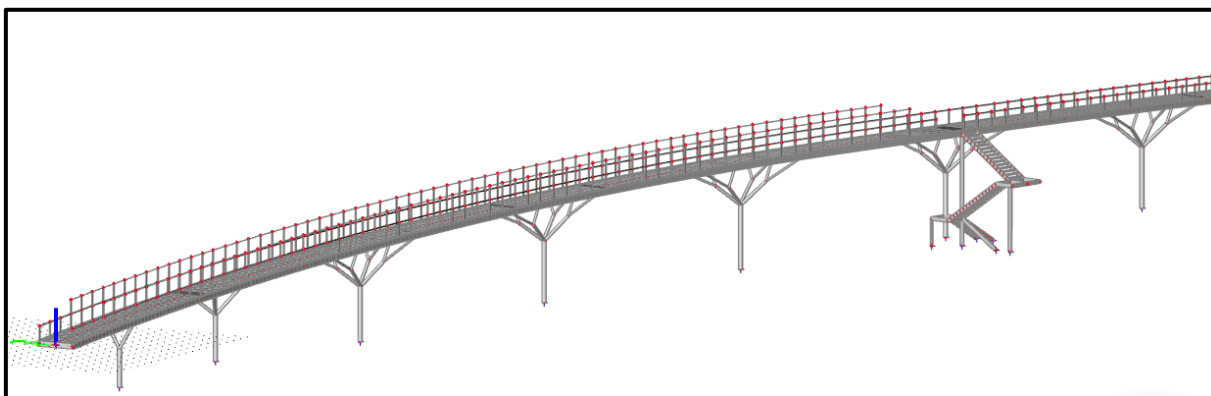
Tab. 20: Posouzení vlastních frekvencí po pátém kroku identifikace výpočetního modelu

Výpočet			Experiment 2002			Posouzení			
Poř. č. j	$f_{(j)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	Poř. č. k	$f_{(k)}$ [Hz]	Charakter vl. tvaru	$\Delta_{(j)}$ [%]	Příp. interval $\Delta_{(j)}$ [%]		Vyhovuje?
							min	max	
1	1.10	1. vodorovný	1	1.04	1. vodorovný	5.5	-15.0	10.0	✓
2	1.52	2. vodorovný	2	1.39	2. vodorovný	8.6	-15.0	10.0	✓
3	2.14	3. vodorovný	3	2.15	3. vodorovný	-0.5	-15.0	10.0	✓
4	2.57	1. svislý	4	2.55	1. svislý	0.8	-15.0	10.0	✓
5	2.94	4. vodorovný	5	2.91	4. vodorovný	0.9	-15.1	15.1	✓
6	2.99	2. svislý	6	3.01	2. svislý	-0.7	-15.2	15.2	✓
7	3.62	3. svislý	7	3.54	3. svislý	2.2	-15.6	15.6	✓
8	4.00	5. vodorovný	8	3.99	5. vodorovný	0.3	-15.4	15.4	✓
9	4.27	4. svislý	9	4.19	4. svislý	1.9	-15.6	15.6	✓
10	5.11	5. svislý	10	4.93	5. svislý	3.5	-16.1	16.1	✓
11	5.51	6. vodorovný	11	5.44	6. vodorovný	1.3	-15.9	15.9	✓
12	5.78	6. svislý	12	5.59	6. svislý	3.3	-16.2	16.2	✓
13	6.34	7. svislý	13	6.24	7. svislý	1.6	-16.5	16.5	✓
14	6.65	1. kroutivý	14	6.37	1. kroutivý	4.2	-16.4	16.4	✓
15	8.42	8. svislý	15	7.63	8. svislý	9.4	-17.0	17.0	✓

Tab. 21: Změna vlastních frekvencí oproti minulému kroku identifikace

Pořad. č. j	Experiment 2002 podle tvarů $f_{(k),OBS}$ [Hz]	Předchozí krok identifikace $f_{(j),CAL,4}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,3} / f_{(k),OBS}$ [%]	Současný krok identifikace $f_{(j),CAL,5}$ [Hz]	$f_{(j),CAL,5} / f_{(k),OBS}$ [%]	Rozdíl poměrů frekvencí [%]
1	1.04	1.11	106.7	1.10	105.8	-0.96
2	1.39	1.52	109.4	1.52	109.4	0.00
3	2.15	2.15	100.0	2.14	99.5	-0.47
4	2.55	2.92	114.5	2.57	100.8	-13.73
5	2.91	2.96	101.5	2.94	100.9	-0.69
6	3.01	3.87	128.6	2.99	99.3	-29.24
7	3.99	4.46	111.8	3.62	90.7	-21.05
8	3.54	4.01	113.3	4.00	113.0	-0.28
9	4.19	5.39	128.6	4.27	101.9	-26.73
10	5.44	6.07	111.6	5.11	93.9	-17.65
11	4.93	5.54	112.4	5.51	111.8	-0.61
12	5.59	6.47	115.7	5.78	103.4	-12.34
13	6.37	7.23	113.5	6.34	99.5	-13.97
14	6.24	6.61	105.9	6.65	106.6	0.64
15	7.63	8.38	109.8	8.42	100.5	-18.09

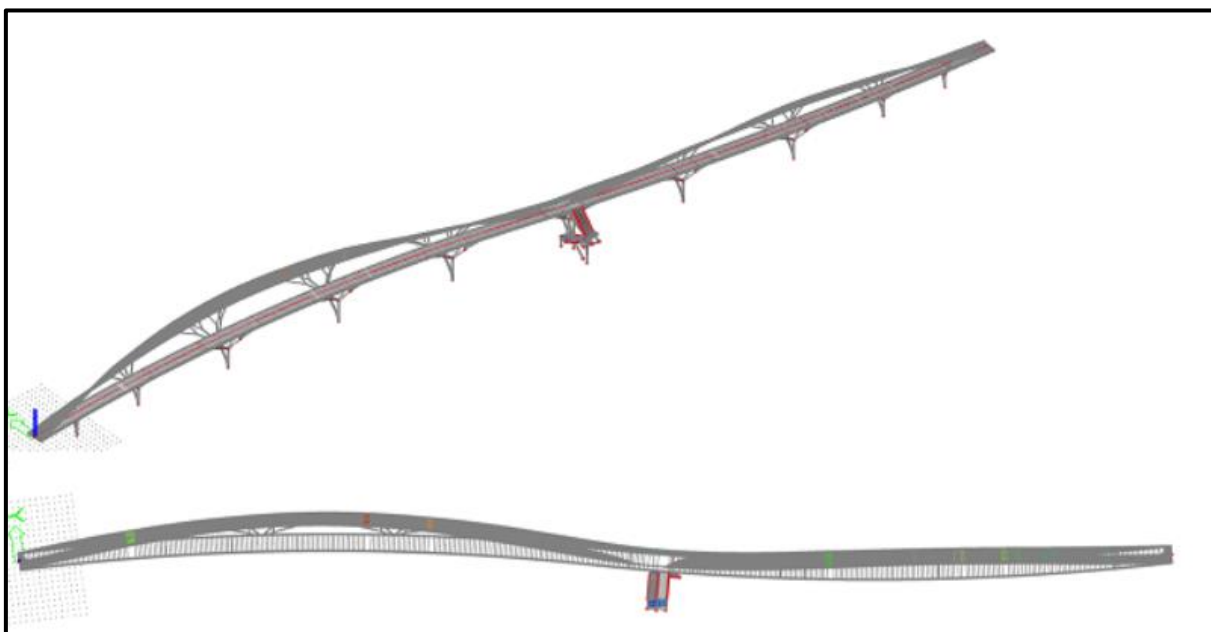
Model se pomocí úpravy zábradlí podařilo poměrně dobře identifikovat. Všechny vlastní frekvence po této úpravě modelu vyhovují z hlediska mezní odchylky  $\Delta_j$  (viz 20). Část 3D modelu i se zahrnutím zábradlí je vykreslena na Obr. 76.



Obr. 76: 3D model lávky se zábradlím. Opěra O000 je nalevo.

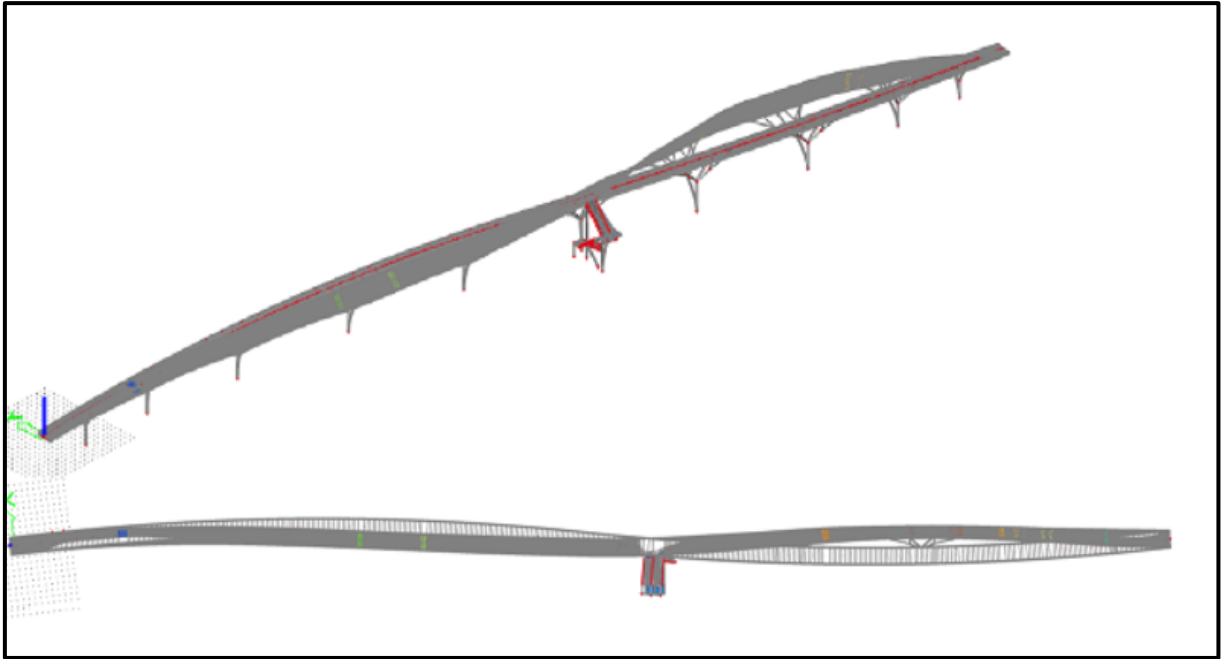
#### 6.4.7 Vypočtené vlastní tvary kmitání konstrukce

Pro výpočetní model lávky, který byl získán v pátém kroku identifikace, jsou vybrané vypočtené vlastní tvary lávky, které přísluší k patnácti nejnižším vlastním frekvencím uvedeným v Tab. 20, vykresleny na Obr. 77 až Obr. 91. Z důvodu zlepšení přehlednosti podoby těchto vlastních tvarů není v těchto obrázcích vykreslováno zábradlí.

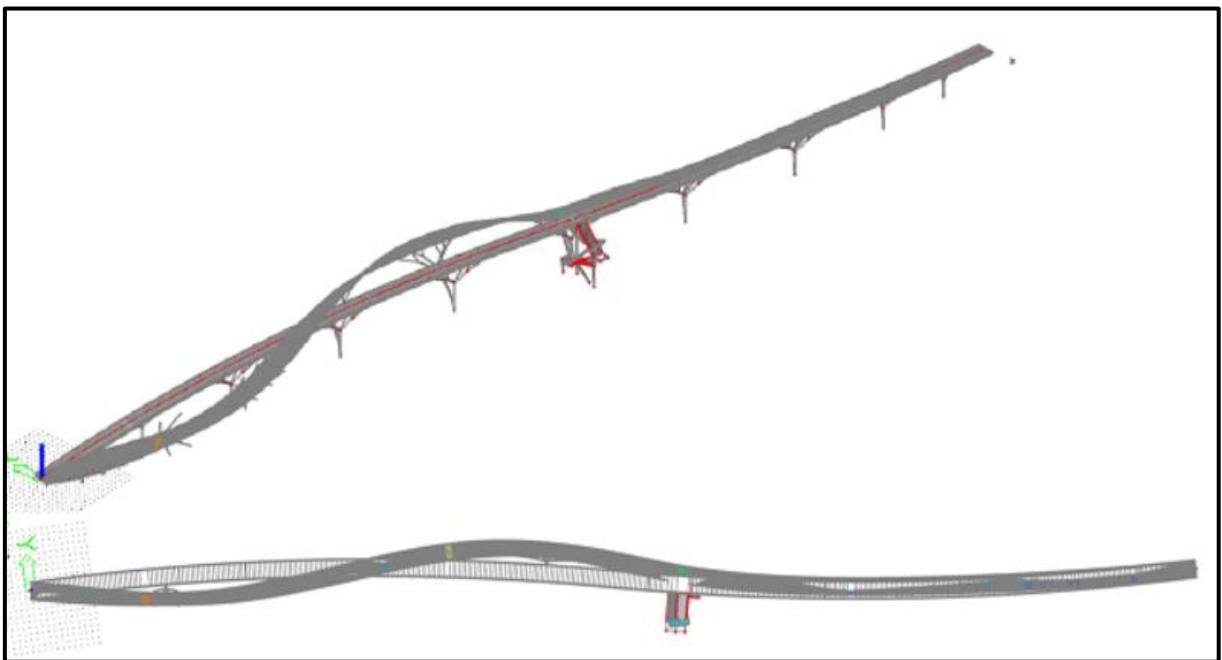


Obr. 77: Vypočtený 1. tvar vl. kmitání,  $f_{(1)} = 1.10$  Hz (1. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).

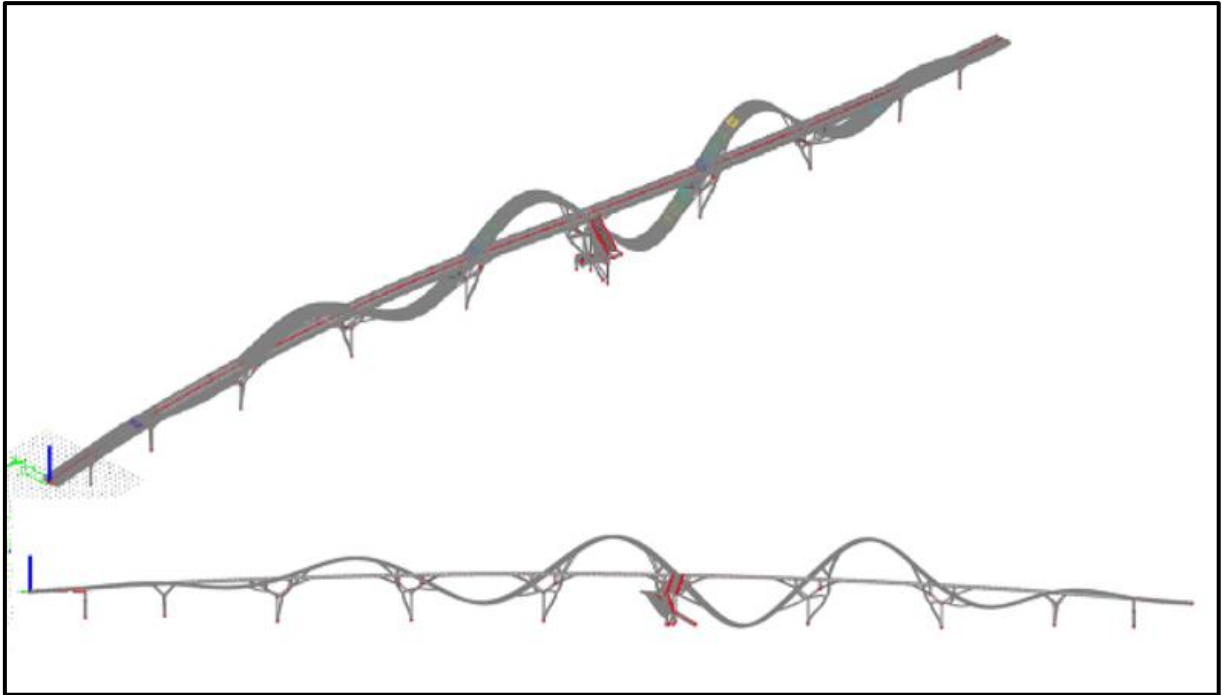




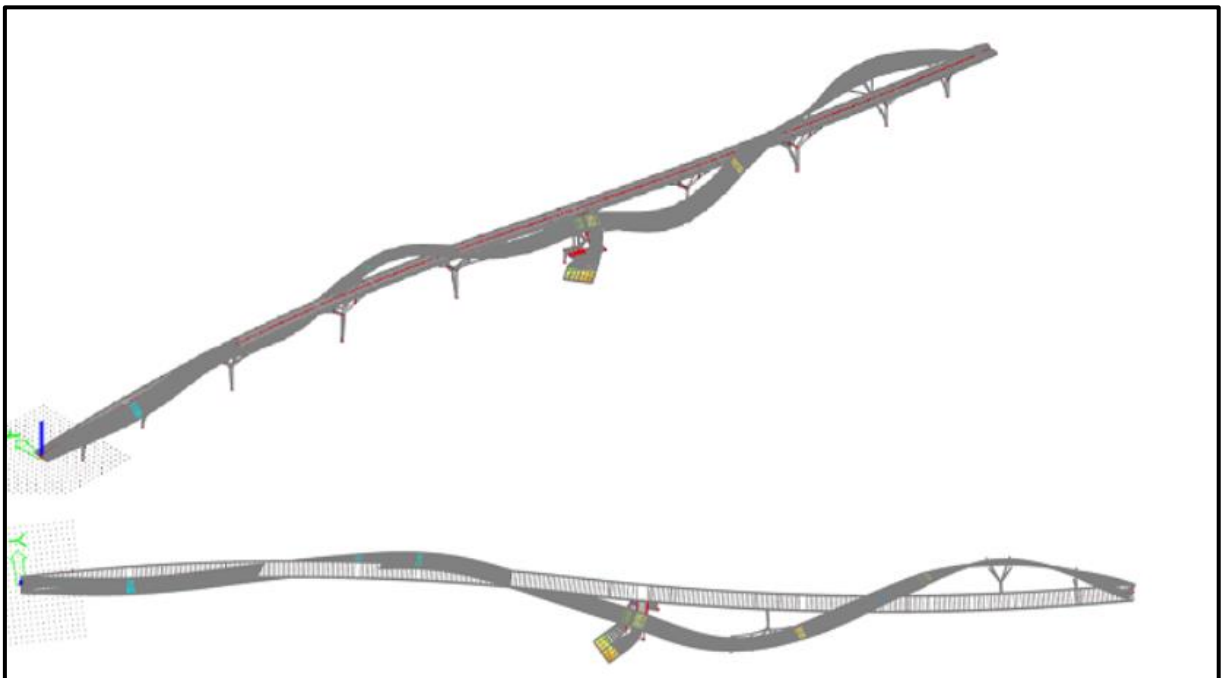
Obr. 78: Vypočtený 2. tvar vl. kmitání,  $f_{(2)} = 1.52 \text{ Hz}$  (2. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



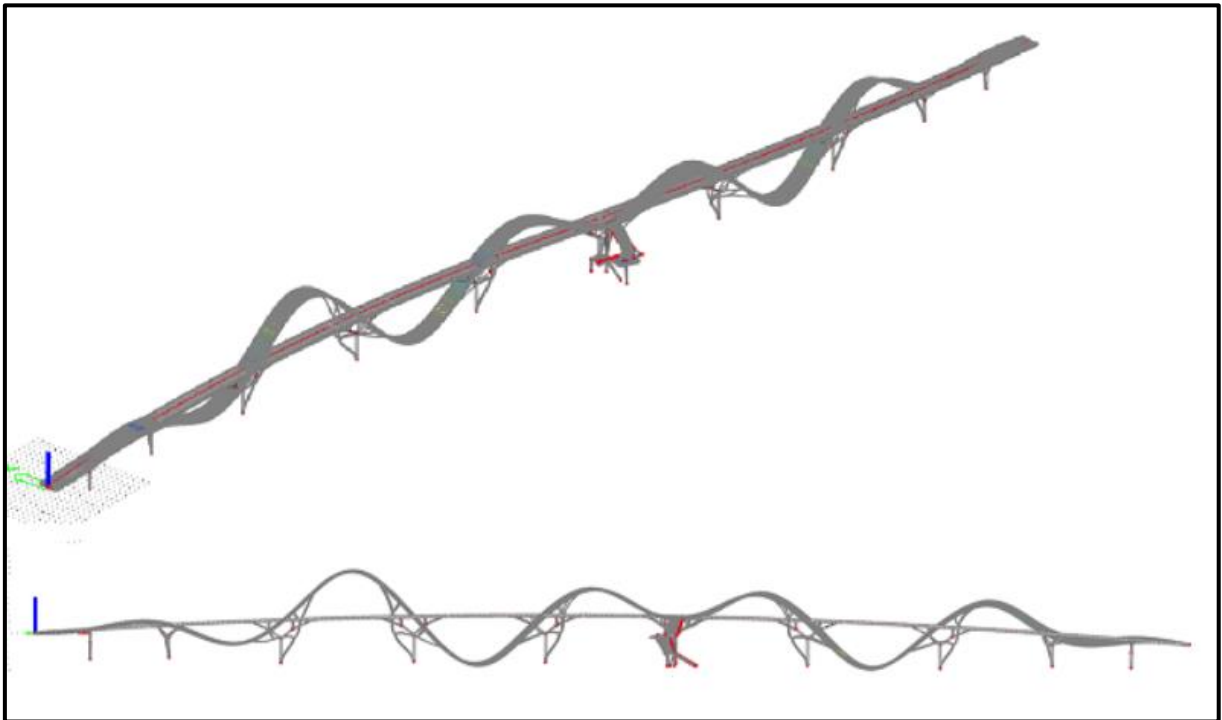
Obr. 79: Vypočtený 3. tvar vl. kmitání,  $f_{(3)} = 2.15 \text{ Hz}$  (3. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



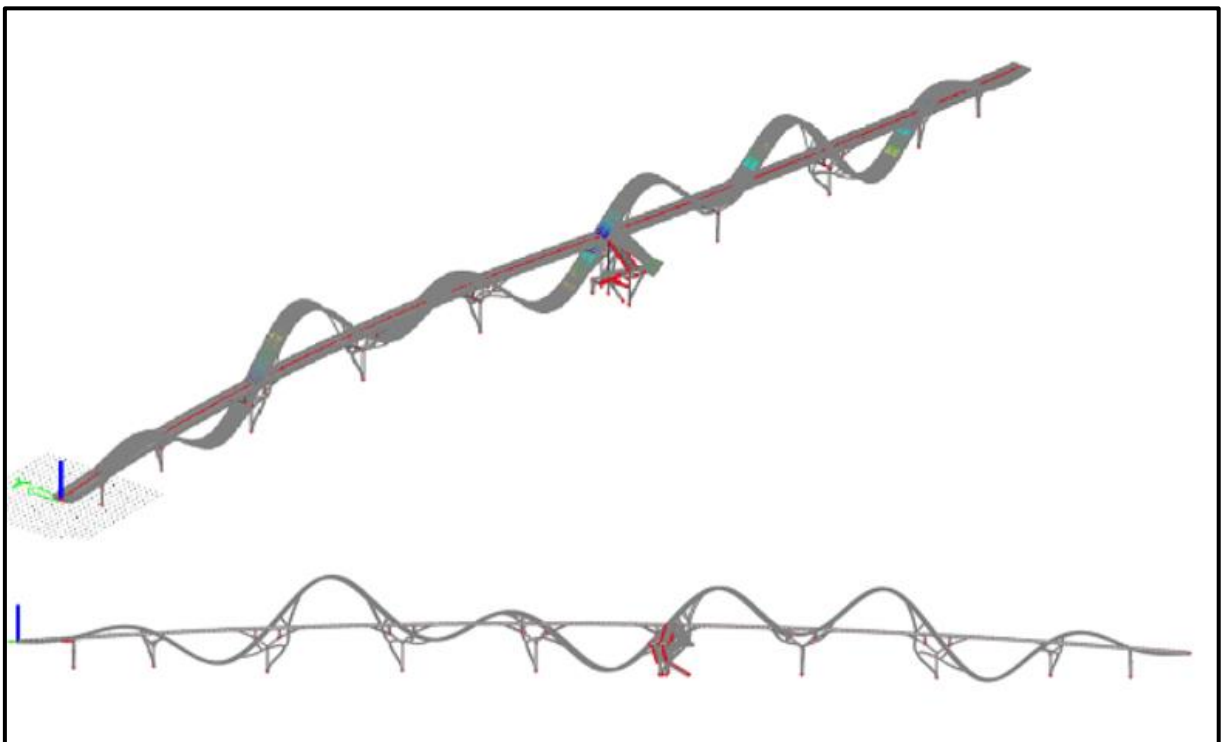
Obr. 80: Vypočtený 4. tvar vl. kmitání,  $f_{(4)} = 2.57$  Hz (1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



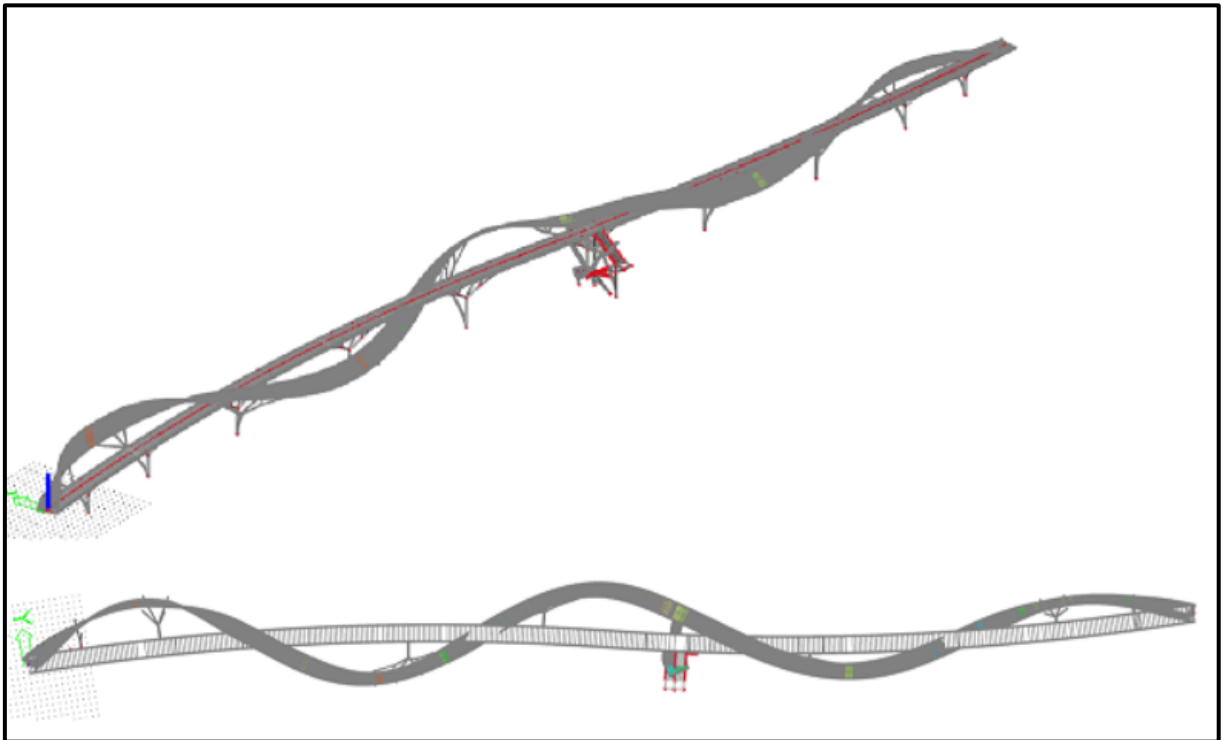
Obr. 81: Vypočtený 5. tvar vl. kmitání,  $f_{(5)} = 2.94$  Hz (4. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



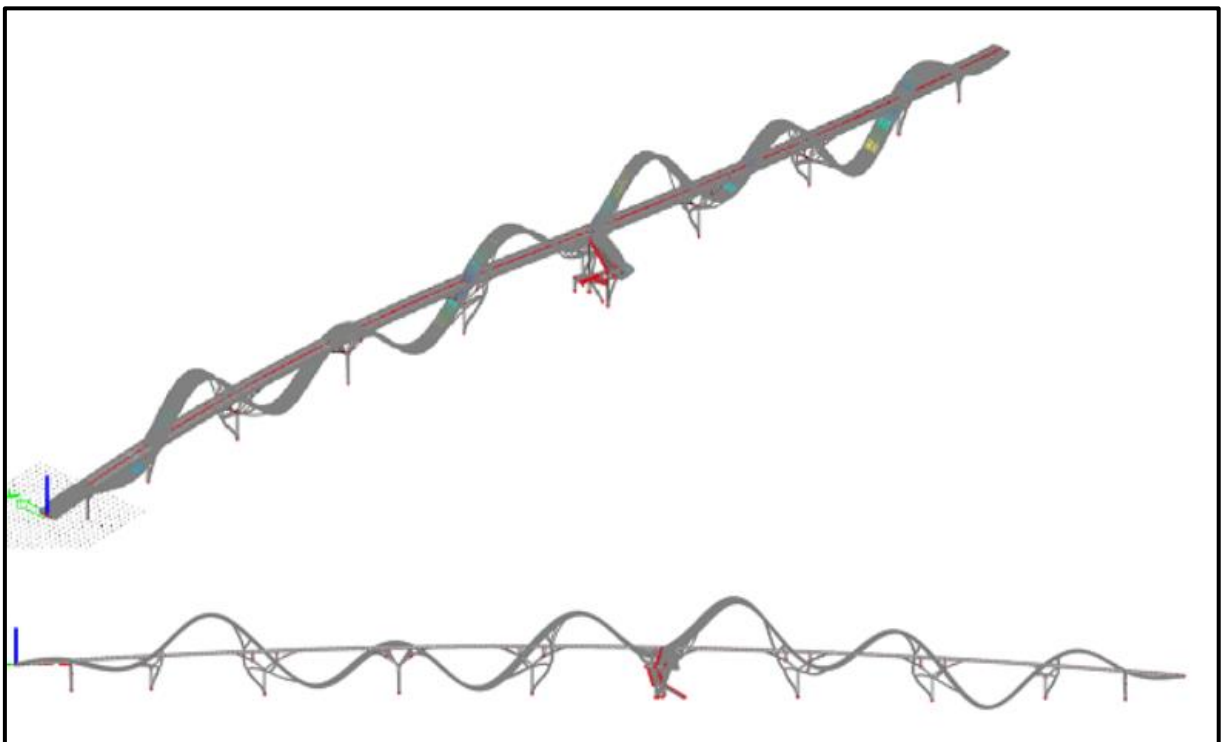
Obr. 82: Vypočtený 6. tvar vl. kmitání,  $f_{(6)} = 2.99 \text{ Hz}$  (2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



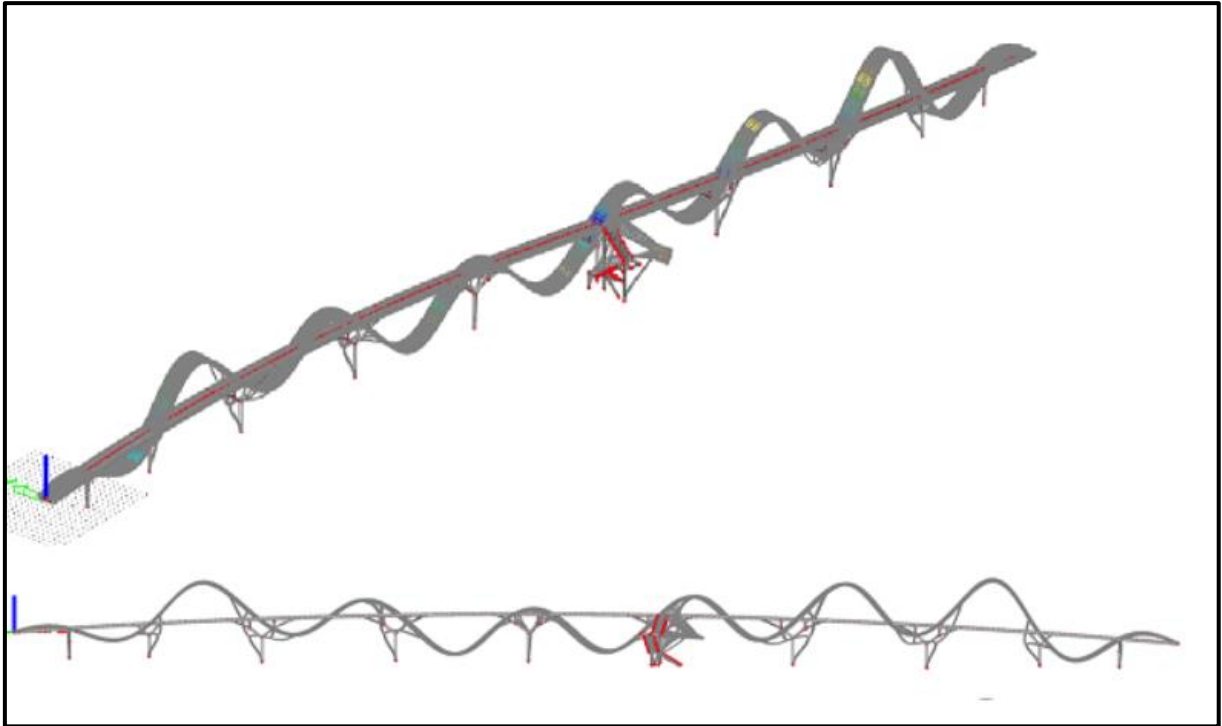
Obr. 83: Vypočtený 7. tvar vl. kmitání,  $f_{(7)} = 3.62 \text{ Hz}$  (3. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



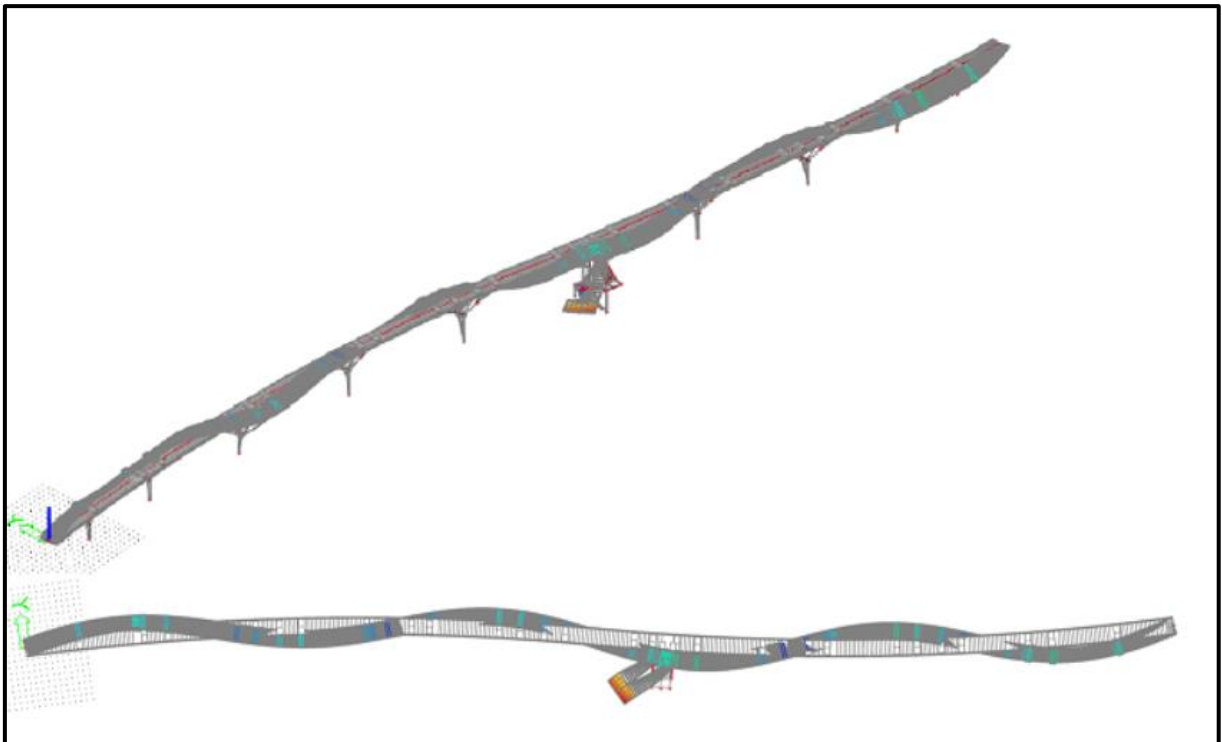
Obr. 84: Vypočtený 8. tvar vl. kmitání,  $f_{(8)} = 4.00$  Hz (5. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



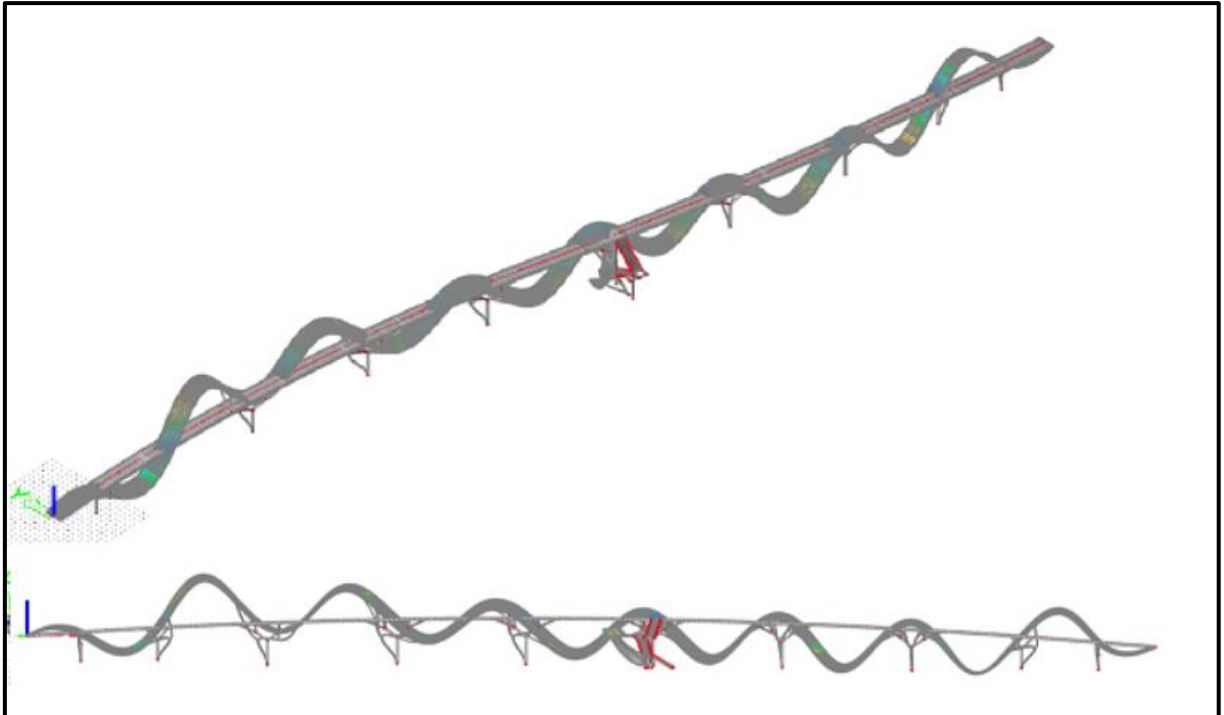
Obr. 85: Vypočtený 9. tvar vl. kmitání,  $f_{(9)} = 4.27$  Hz (4. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



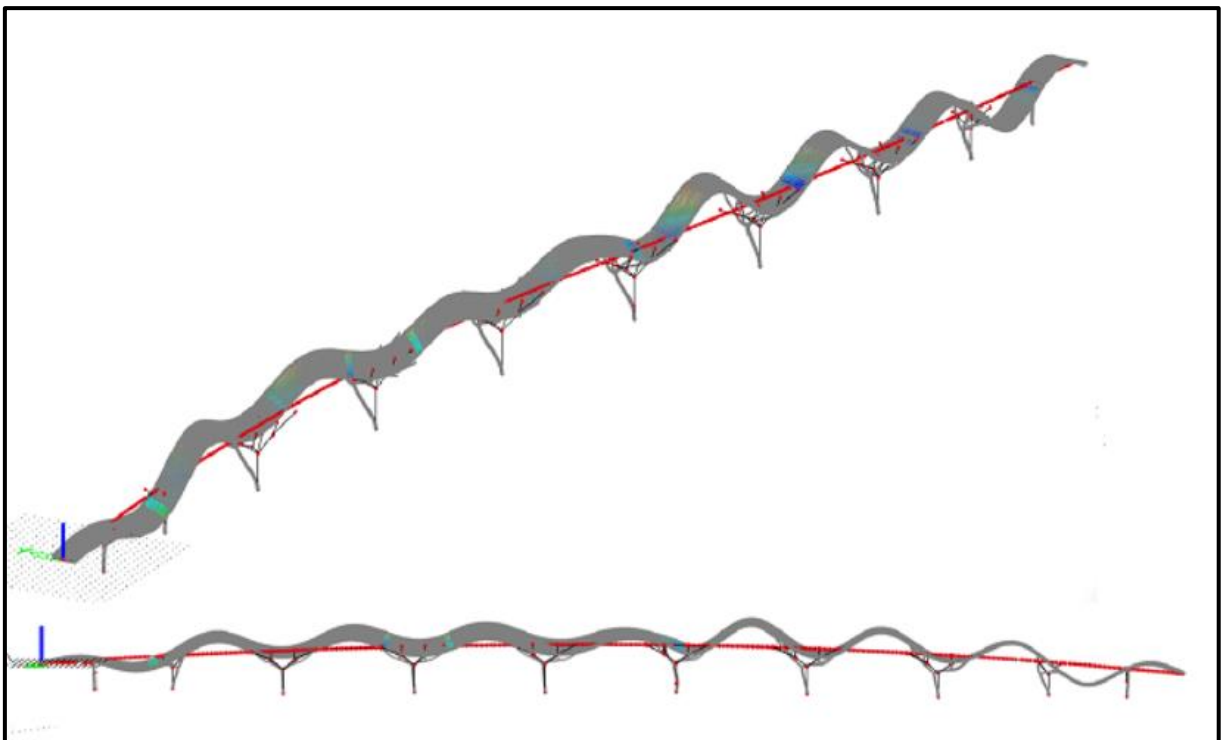
Obr. 86: Vypočtený 10. tvar vl. kmitání,  $f_{(10)} = 5.11$  Hz (5. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



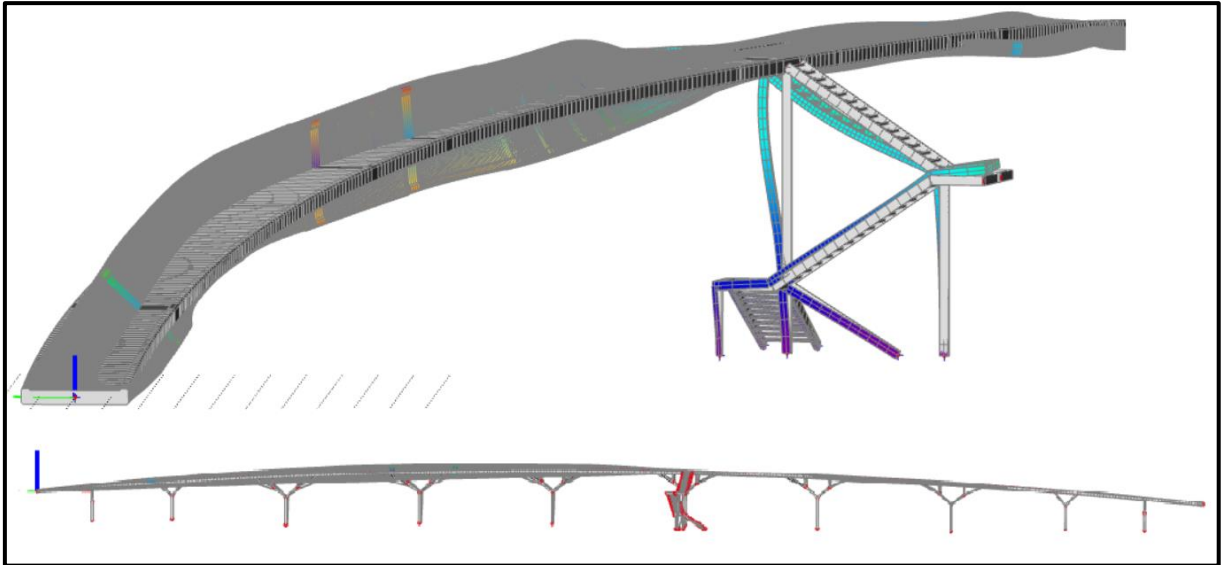
Obr. 87: Vypočtený 11. tvar vl. kmitání,  $f_{(11)} = 5.51$  Hz (6. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).



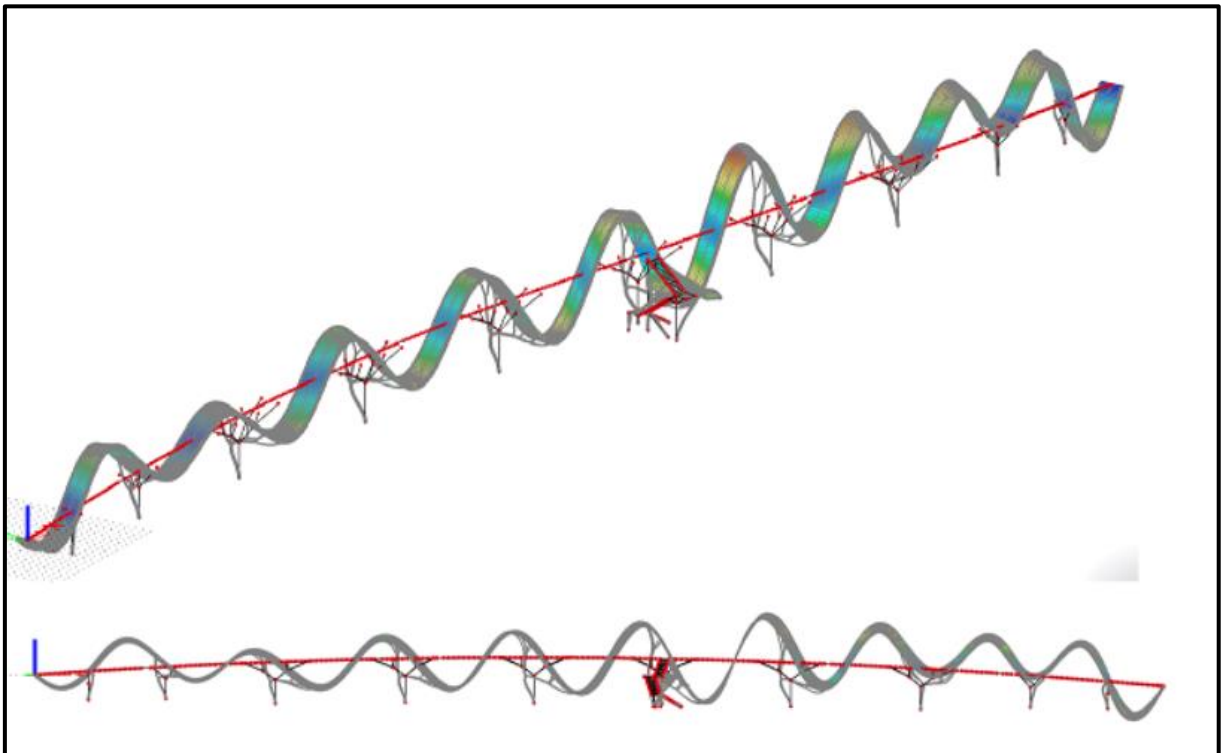
Obr. 88: Vypočtený 12. tvar vl. kmitání,  $f_{(12)} = 5.78 \text{ Hz}$  (6. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



Obr. 89: Vypočtený 13. tvar vl. kmitání,  $f_{(13)} = 6.34 \text{ Hz}$  (7. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).



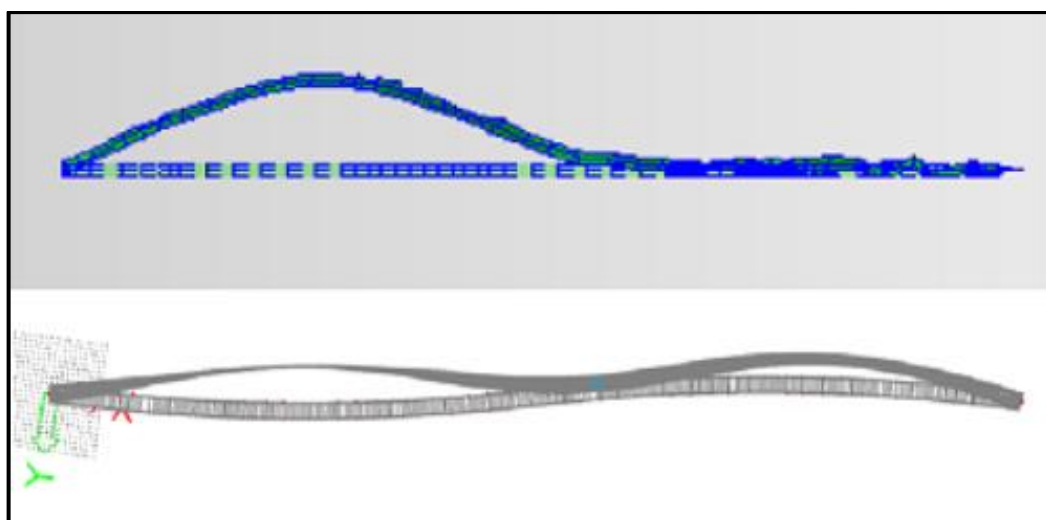
Obr. 90: Vypočtený 14. tvar vl. kmitání  $f_{(14)} = 6.65 \text{ Hz}$  (1. tvar krouživého kmitání mostovky. Ke kroucení dochází v levé části lávky (nalevo od schodiště)).



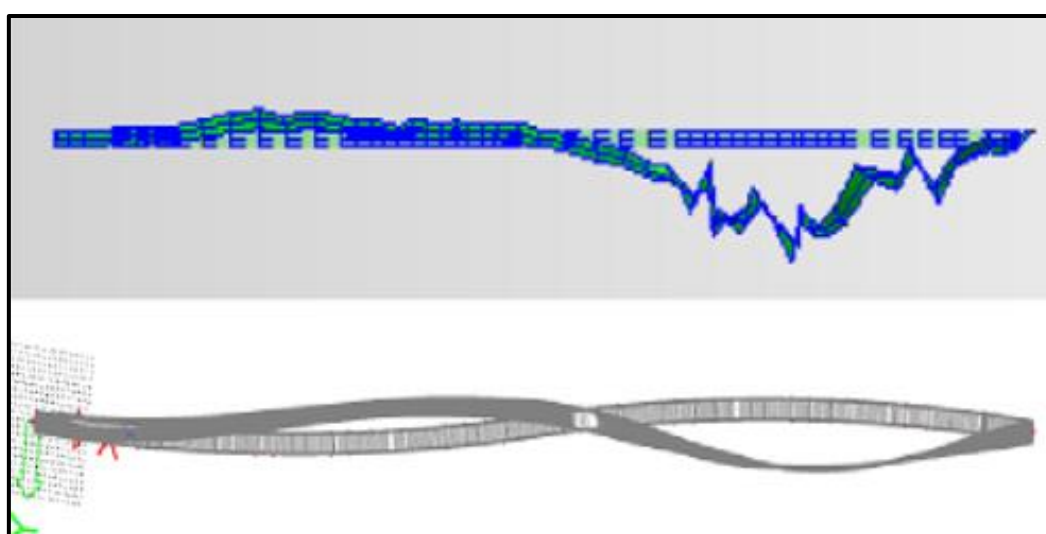
Obr. 91: Vypočtený 15. tvar vl. kmitání,  $f_{(15)} = 8.42 \text{ Hz}$  (8. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).

Vypočtené vlastní tvary byly vizuálně porovnány s odpovídajícími změřenými vlastními tvary, na Obr. 92 až Obr. 97 je ukázáno vizuální porovnání prvních 6 vlastních tvarů. Pro vizuální kontrolu byly použity vlastní tvary změřené při experimentu v roce 2023, protože zejména vlastní tvary vodorovného příčného kmitání lávky byly z této zkoušky lépe vyhodnoceny a vykresleny.

Problematické byly při identifikaci modelu zejména vlastní tvary svislého ohybového kmitání. Tyto vlastní tvary se podařilo pomocí zohlednění vlivu zábradlí a jeho následné úpravy poměrně dobře přiblížit změřeným vlastním tvarům, jak je dobře patrné z Obr. 95 a Obr. 97.

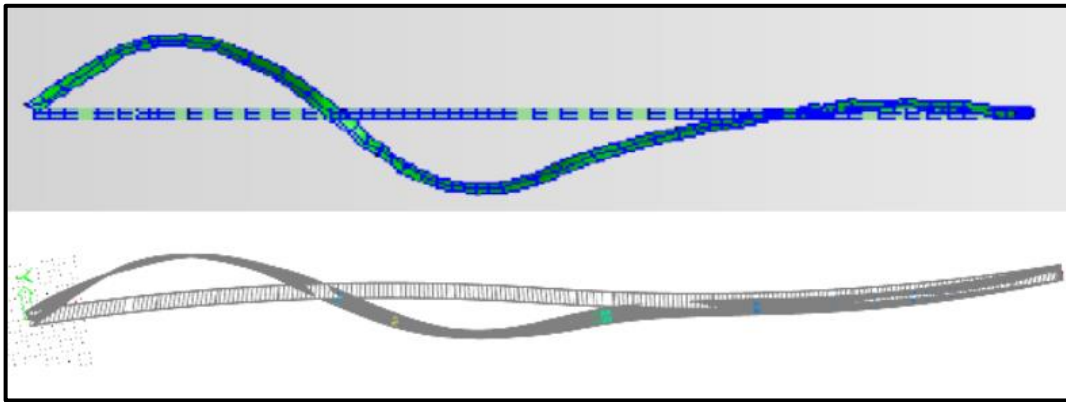


Obr. 92: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 1. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(1),OBS} = 1.04 \text{ Hz}$ ,  $f_{(1),CAL} = 1.10 \text{ Hz}$ ).

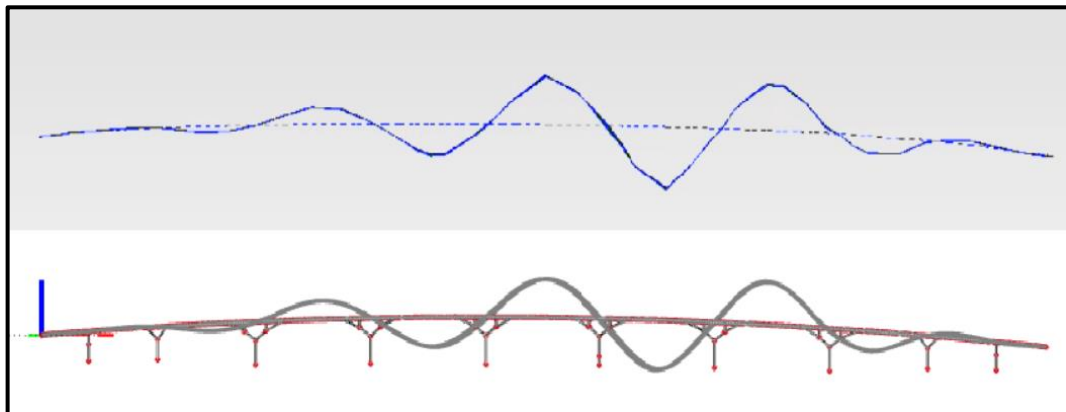


Obr. 93: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 2. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(2),OBS} = 1.39 \text{ Hz}$ ,  $f_{(2),CAL} = 1.52 \text{ Hz}$ ).

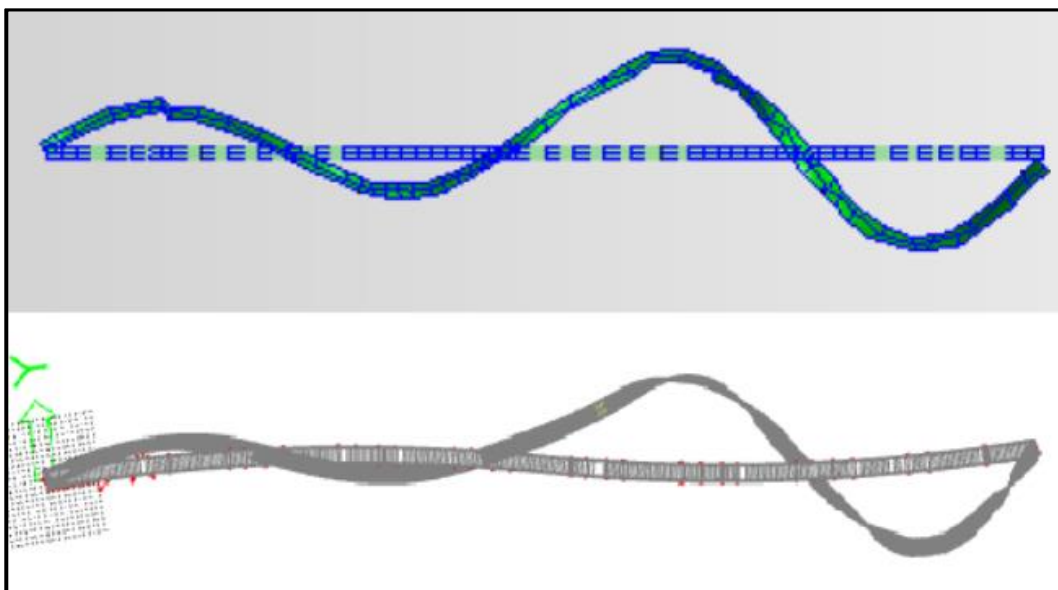




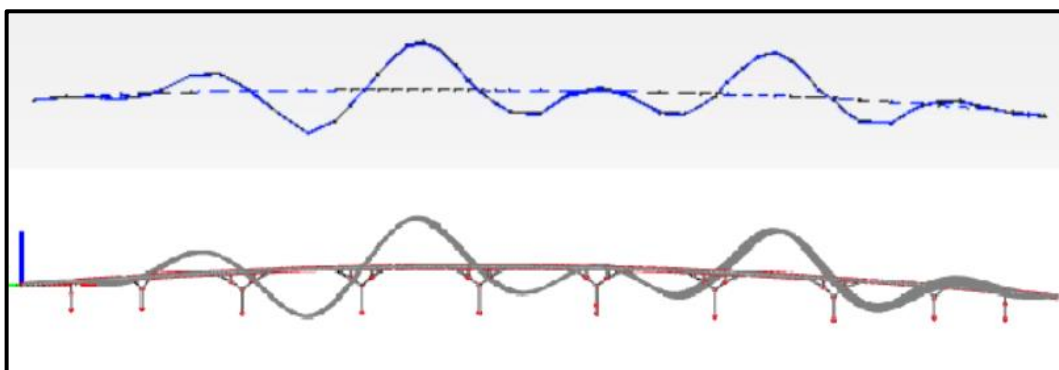
Obr. 94: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 3. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(3),OBS} = 2.14 \text{ Hz}$ ,  $f_{(3),CAL} = 2.15 \text{ Hz}$ ).



Obr. 95: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 1. vlastní tvar svislého ohybového kmitání ( $f_{(4),OBS} = 2.55 \text{ Hz}$ ,  $f_{(3),CAL} = 2.57 \text{ Hz}$ ).



Obr. 96: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 4. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(5),OBS} = 2.91 \text{ Hz}$ ,  $f_{(5),CAL} = 2.94 \text{ Hz}$ ).



Obr. 97: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání ( $f_{(6),OBS} = 3.01 \text{ Hz}$ ,  $f_{(3),CAL} = 2.99 \text{ Hz}$ ).

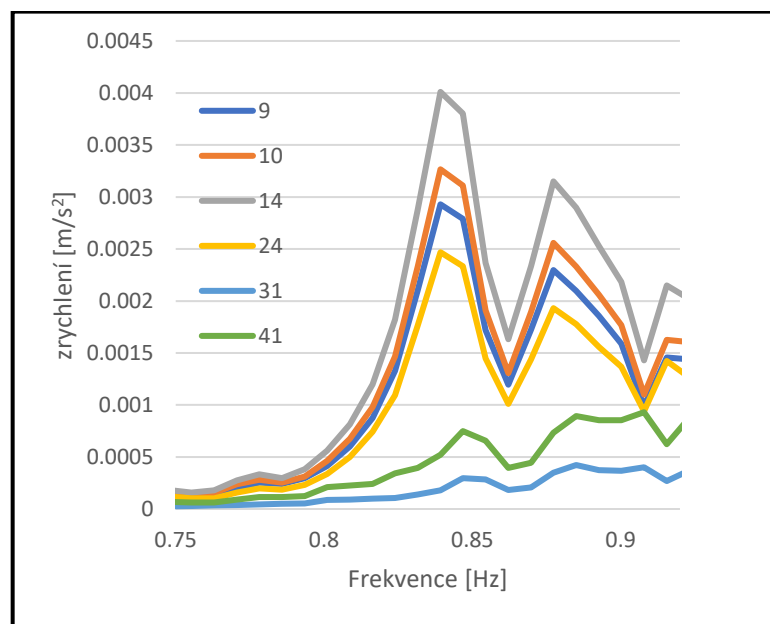
Z obrázků Obr. 95 a Obr. 97 je vidět, že charakter tvarů svislého ohybového kmitání, které byly vyhodnoceny z dat naměřených při experimentu v roce 2002, se dobře shoduje s charakterem těch, které byly vypočítané na 3D modelu konstrukce, který byl získán v pátém kroku identifikace.

Největší rozdíl v uvedených vlastních tvarech je u 1. vlastního tvaru vodorovného příčného kmitání. Z výsledků experimentu vyplývá, že při frekvenci  $f_{(1),OBS} = 1.04 \text{ Hz}$  kmitá levá část lávky, tedy ta, která je blíže k opěře O000, a pravé polovina prakticky vůbec nekmitá. Z výpočtu ovšem vyšlo, že pravá polovina lávky kmitá také, i když to je s menší amplitudou. V místě schodiště je uzlový bod a u vypočteného vlastního tvaru je zde také nulové natočení mostovky lávky kolem svislé osy.

Takové chování naznačuje, že naměřený vlastní tvar je zatížen chybou. Na lávce při provádění modální analýzy nebyl žádný provoz a lávka byla rozkmitávána budičem umístěným v levé polovině lávky. Je tedy možné, že se vzhledem k nulovému natočení v uzlovém bodu, nepodařilo pravé pole lávky při experimentu v tomto vlastním tvaru rozkmitat.

Charakter tohoto vlastního tvaru byl naměřen stejný i v roce 2002 a na levé polovině lávky měl vlastní tvar také nulové pořadnice. V roce 2002 byl budič umístěn na stejném místě. Zpětně tedy byla zaměřena pozornost na kmitání lávky při zatížení běžným provozem. Pracovalo se s daty, která byla naměřena v dubnu 2023.

Při zatížení běžným provozem chodců při výměně směn je lávka buzena po celé délce mostovky a dá se tím prověřit, zda při vlastní frekvenci příslušející tomuto vlastnímu tvaru kmitá i pravá strana lávky. Při tomto experimentu bylo vodorovné kmitání lávky měřeno v šesti bodech X3, jehož poloha v příčném řezu mostovky je zřejmá z Obr. 25, a to v řezech 9, 10, 14, 24, 31 a 41. Řezy 31 a 41 se nacházejí v pravé polovině lávky. Ze záznamu kmitání mostovky snímači měřícími ve vodorovném směru Y byla stanovena FFT a byla zkoumána její magnituda na snímačích v řezech 31 a 41. Graf provedené FFT je vykreslen na Obr. 98.



Obr. 98: Graf po provedení FFT ze záznamu zrychlení pořízeného při běžném provozu na lávce při výměně ranní a odpolední směny.

V grafu jsou vidět 2 špičky okolo vyhodnocené vlastní frekvence 0.89 Hz. Jedna špička zřejmě náleží vlastní frekvenci konstrukce a druhá budící frekvenci lidské chůze. Z grafu je vidět, že nenulové pořadnice jsou u obou špiček i na snímačích v 31. a 41. řezu, což naznačuje, že u tohoto vlastního tvaru ve skutečnosti kmitá i pravá polovina konstrukce.

Toto však nelze s jistotou ze zpracovávaného záznamu zjistit, protože měření bylo provedeno pouze v omezeném počtu bodů mostovky a získaná data jsou výrazně ovlivněna provozem na lávce. Nejlepší ověření by bylo opakované měření, při kterém by se budičem budilo v pravé i v levé polovině lávky.

Na základě výše uvedených skutečností byl tento model uvažován jako model, který dostatečně přesně popisuje dynamické vlastnosti nosné konstrukce lávky ve stavu před jejím uvedením do provozu v prosinci 2002.

## 6.5 MODELOVÁNÍ ZMĚNY VLASTNÍCH FREKVENCÍ

Na lávce v Mladé Boleslavi proběhlo více experimentů zaměřených na sledování vlastních frekvencí konstrukce. Mezi prvním experimentem provedeným v roce 2002 a posledním experimentem z roku 2023 byla zaznamenána změna vlastních frekvencí, která je detailněji popsána v kapitole 6.3.2.

V následujících kapitolách budou prováděny změny na numerickém 3D modelu konstrukce, které simulují příčinu těchto změn. Jedná se o změnu vlastních frekvencí se změnou teploty konstrukce a o změnu vlastních frekvencí vlivem vzniku a rozvoje trhlin v železobetonové konstrukci mostovky.

### 6.5.1 Změna vlastních frekvencí vlivem změny teploty

Při tvorbě numerického modelu a jeho následné identifikaci byl model porovnáván s výsledky z experimentu v roce 2002. Na tomto modelu byl používán vyšší modul pružnosti betonu kvůli nízké teplotě a podpory pilířů byly modelovány jako vetknutí, protože horní část půdy byla promrzlá, a proto neumožňovala natočení horní části pilot.

#### 6.5.1.1 Změna modulu pružnosti

Ve výpočetním modelu, na kterém probíhala identifikace, byly vlastní frekvence porovnávány s těmi, které byly naměřeny v prosinci 2002. Byl použit modul pružnosti betonu, který byl upraven s ohledem na nízkou teplotu při provádění experimentu, která byla předpokládána hodnotou  $-13\text{ °C}$ .

Při simulaci vlivu změny teploty železobetonové mostovky byl použit modul pružnosti betonu C30/37 při  $20\text{ °C}$ , který definuje eurokód, tedy  $E = 33\text{ GPa}$ . V Tab. 22 jsou shrnuty vlastní frekvence změřené při experimentu z roku 2002 a 2023. Dále tam jsou uvedené vlastní frekvence vypočtené ve finálním výpočetním modelu popsaném v kapitole 6.4.6.3. a ty, které byly vypočtené v tomto kroku po snížení modulu pružnosti betonu.

Tab. 22: Porovnání vlastních frekvencí oproti finálnímu kroku identifikace po snížení modulu pružnosti betonu mostovky vlivem teploty

Pořad. č. j	Charakter vl. tvaru	Experiment 2002 [Hz]	Experiment 2023 [Hz]	Finální identifikace modelu [Hz]	Zohlednění změny E [Hz]	Pokles vlastních frekvencí [%]
1	1. vodorovný	1.04	0.89	1.10	1.07	-2.80
2	2. vodorovný	1.39	1.13	1.52	1.46	-4.11
3	3. vodorovný	2.15	1.8	2.14	2.07	-3.38
4	1. svislý	2.55	2.32	2.57	2.50	-2.80
5	4. vodorovný	2.91	2.44	2.94	2.85	-3.16
6	2. svislý	3.01	2.76	2.99	2.89	-3.46
7	3. svislý	3.54	3.25	3.62	3.49	-3.72
8	5. vodorovný	3.99	3.34	4.00	3.85	-3.90
9	4. svislý	4.19	3.8	4.27	4.12	-3.64
10	5. svislý	5.44	4.42	5.11	4.93	-3.65
11	6. vodorovný	4.93	4.59	5.51	5.31	-3.77
12	6. svislý	5.59	5.03	5.78	5.58	-3.58
13	7. svislý	6.37	5.54	6.34	6.24	-1.60
14	1. kroutivý	6.37	6.2	6.65	6.64	-0.15
15	8. svislý	7.63	6.65	8.42	8.13	-3.57

Došlo ke snížení vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného a svislého ohybového kmitání oproti finálnímu kroku identifikace průměrně o 3.37 %. Vlastní frekvence spjatá s tvarem kroutivého kmitání se prakticky nezměnila.

#### 6.5.1.2 Modelování založení

Další faktor, který může ovlivnit změnu vlastních frekvencí vlivem teploty je změna základových poměrů. Při teplotách pod bodem mrazu může svrchní část zeminy promrznout, což může vést k zvýšení tuhosti této části zeminy a k znemožnění natočení horní části pilot. Výpočetní model porovnávaný s výsledky experimentální modální analýzy z roku 2002 respektoval nízkou teplotu při provádění experimentu a podepření pilířů bylo modelováno jako vetknutí. Při vyšších teplotách nemusí podepření pilířů pomocí vetknutí respektovat skutečné vlastnosti uložení pilířů na hlavách pilot, a proto bylo v tomto kroku upraveno v 3D výpočetním modelu podepření pilířů tak, aby napodobovalo vlastnosti skutečného založení.

Lávka je založena na betonových pilotách z betonu C25/30 průměru 1,2 m. Tyto piloty mají délku 5 m a procházejí vrstvou navážek o celková mocnosti 3,2 m. Následně procházejí vrstvou rozpukané horniny o mocnosti 1,8 m a v patě jsou opřené o skalní podloží.

Geologický průzkum ukázal, že vrstva navážek se skládá nejprve ze zeminy zatříděné jako typ F7 s tuhou konzistencí a o mocnosti 2,8 m, následuje vrstva zeminy třídy S4 o mocnosti 0,4 m a dále pak hornina třídy R4.

Založení uvažované v teoretickém modelu respektuje geometrii skutečného provedení. Vodorovná tuhost okolního prostředí je simulována pomocí pružin. Tuhost těchto pružin byla vypočtena na základě typu okolního prostředí pomocí vzorců popsaných v [60, 61]. Vodorovná tuhost pružin se vypočte z modulu vodorovné reakce podloží  $k_h$ , který se určí u soudržných zemín pomocí vzorce:

$$k_h = \frac{2E_{def}}{3D}, \quad (31)$$

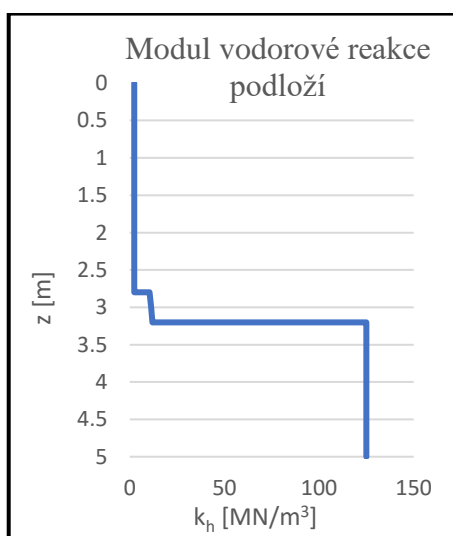
kde  $E_{def}$  je modul přetvárnosti zeminy a  $D$  je průměr piloty. U zemín nesoudržných se modul vodorovné reakce podloží spočte pomocí vzorce:

$$k_h = \frac{z}{D} n_h, \quad (32)$$

kde  $z$  je hloubka pod terénem a  $n_h$  konstanta závislá na indexu relativní ulehlosti. U soudržných zemín je tedy průběh modulu reakce podloží po výšce konstantní a u zemín nesoudržných lineární. Modul reakce podloží u hornin byl vypočten pomocí vzorce definovaného v DIN 4014 [62]:

$$k_h = \frac{E_{def}}{D}. \quad (33)$$

Zemina třídy F7 je soudržná a byl pro ni použit modul přetvárnosti  $E_{def} = 3\text{MPa}$ . Zemina třídy S4 je nesoudržná a byla použita hodnota  $n_h = 4.5\text{ MN/m}^3$ , za předpokladu, že se jedná o vlhký středně ulehlý písek. U horniny třídy R4 byl použit modul přetvárnosti  $E_{def} = 150\text{ MPa}$ . Uvažovaný průběh modulu vodorovné reakce podloží po výšce piloty je vykreslen na Obr. 99.



Obr. 99: Uvažovaný průběh modulu vodorovné reakce podloží po výšce piloty.

Z modulu vodorovné reakce podloží se následně dopočte tuhost pružiny použité v modelu. Pružiny v modelu byly na pilotě umístěny po 0,5 m. Tuhost pružin byla spočtena pomocí vzorce [61]:

$$k_{pruž} = k_{hi} z_{vi} b_i, \quad (34)$$

kde  $k_{hi}$  je modul vodorovné reakce podloží v místě dané pružiny,  $z_{vi}$  je výška vzdorujícího prostředí a  $b_i$  je šířka piloty, která se v tomto případě rovná průměru piloty  $D$ .

V Tab. 23 jsou shrnuty vlastní frekvence změřené při experimentu z roku 2002 a 2023. Dále tam jsou uvedené vlastní frekvence vypočtené ve finálním výpočetním modelu popsaném v kapitole 6.4.6.3., vlastní frekvence vypočtené po snížení modulu pružnosti vlivem zvýšení teploty a ty, které byly vypočtené v tomto kroku po zahrnutí snížení modulu pružnosti betonu a zohlednění tuhosti hlubinného založení. V pravém sloupci je porovnání výsledků mezi finálním krokem identifikace a modelem, který zohledňuje snížení modulu pružnosti betonu a vliv tuhosti založení.

Tab. 23: Porovnání výsledků oproti finálnímu kroku identifikace po snížení modulu pružnosti betonu vlivem teploty a zohlednění vlivu tuhosti založení

Poř. č.	Charakter vl. tvaru	Experiment 2002 [Hz]	Experiment 2023 [Hz]	Finální identifikace modelu [Hz]	Zohlednění změny E [Hz]	Zohlednění změny E a založení [Hz]	Pokles vlastních frekvencí [%]
1	1. vod.	1.04	0.89	1.10	1.07	1.01	-8.91
2	2. vod.	1.39	1.13	1.52	1.46	1.41	-7.80
3	3. vod.	2.15	1.8	2.14	2.07	2.01	-6.47
4	1. svislý	2.55	2.32	2.57	2.50	2.37	-8.44
5	4. vod.	2.91	2.44	2.94	2.85	2.79	-5.38
6	2. svislý	3.01	2.76	2.99	2.89	2.71	-10.33
7	3. svislý	3.54	3.25	3.62	3.49	3.35	-8.06
8	5. vod.	3.99	3.34	4.00	3.85	3.78	-5.82
9	4. svislý	4.19	3.8	4.27	4.12	3.97	-7.56
10	5. svislý	5.44	4.42	5.11	4.93	4.79	-6.68
11	6. vod.	4.93	4.59	5.51	5.31	5.25	-4.95
12	6. svislý	5.59	5.03	5.78	5.58	5.46	-5.86
13	7. svislý	6.37	5.54	6.34	6.24	6.16	-2.92
14	1. krout.	6.37	6.2	6.65	6.64	5.23	-27.15
15	8. svislý	7.63	6.65	8.42	8.13	8.03	-4.86

Z tabulky je zřejmé, že došlo ke snížení všech vlastních frekvencí. Předpoklad byl, že zohlednění založení bude mít vliv zejména na vlastní frekvence spjaté s tvary vodorovného příčného kmitání. U těchto frekvencí byl sice pokles zaznamenán, není však výraznější než u frekvencí příslušných k tvarům svislého ohybového kmitání. Snížení vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného a svislého ohybového kmitání oproti finálnímu kroku identifikace je průměrně o 6.72 %.

Nejvyšší pokles byl zaznamenán u frekvence svázané s tvarem kroutivého kmitání. Podobný pokles byl i u ostatních frekvencí spjatých s tvary kroutivého kmitání, které se nepodařilo při experimentu vybudit, ale které byly prověřeny ve výpočetním modelu.

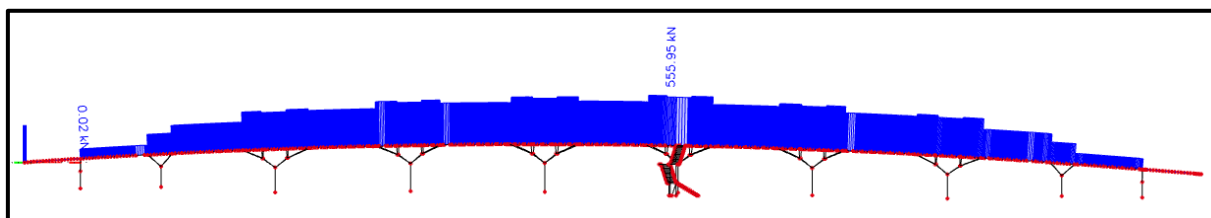
Při porovnání výsledků z experimentů z roku 2002 a 2023 navíc vyplývá, že změna této vlastní frekvence mezi jednotlivými experimenty je minimální (pokles z 6.37 Hz na 6.20 Hz). Lépe chování konstrukce v 3D výpočetním modelu popisovalo spíše podepření pilířů pomocí vetknutí a při simulaci dynamického chování konstrukce vnáší zahrnutí vlivu založení do výpočetního modelu zřejmě větší míru nepřesnosti.

Je možné, že rozdíl naměřených vlastních frekvencí nebyl primárně způsobený nízkou teplotou při provádění experimentu v prosinci 2002, ale že je způsoben jiným faktorem, jako je například rozvoj trhlin v betonu mostovky.

### 6.5.1.3 Prověření vlivu osově síly vnesené do konstrukce vlivem ochlazení

Vlivem ochlazení se má konstrukce tendenci zkracovat. Nosná konstrukce lávky je staticky neurčitá, pilíře u této lávky jsou do mostovky vetknuté, neumožňují tedy volné zkrácení mostovky, protože jejímu zkrácování brání tuhost těchto pilířů.

Minimální teplota ve stínu po odečtu z mapy dle ČSN EN 1991-1-5 [63] je u této konstrukce  $-32\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Maximální rozsah rovnoměrné složky teploty při výpočtu zkrácení je po výpočtu dle normy  $T_{n,con} = -34\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Touto rovnoměrnou teplotou byl model zatížen a byla zkoumána normálová síla v mostovce. Průběh výsledné normálové síly v konstrukci mostovky je vykreslen na Obr. 100.



Obr. 100: Průběh normálové síly v mostovce lávky při ochlazení konstrukce.



Maximální normálová síla, která vznikne na konstrukci vlivem ochlazení, je 555 kN (tah). Zatížení tahovou osovou silou má vliv na kmitání prutu. U taženého prutu dochází ke zvýšení jeho vlastních frekvencí [57] oproti stavu, kdy je normálová síla v tomto prutu nulová. Změna vlastní frekvence na kloubově uloženém prutu zatíženém tahovou osovou (normálovou) silou se podle [57] vypočte jako:

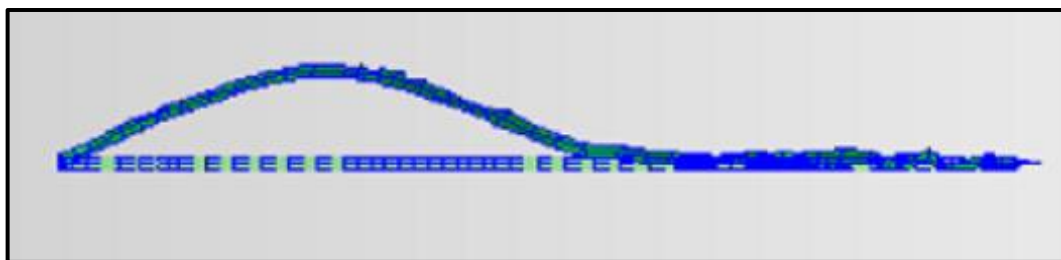
$$\bar{f}_{(j)} = f_{(j)} \sqrt{1 + \frac{N_{st} l^2}{j^2 \pi^2 EI}}, \quad (35)$$

kde  $\bar{f}_{(j)}$  je  $j$ -tá vlastní frekvence ovlivněná osovou silou,  $f_{(j)}$  vlastní frekvence nezatíženého prutu,  $N_{st}$  je osová síla,  $l$  je délka prutu a  $EI$  jeho ohybová tuhost.

Pro orientační posouzení, zda normálová síla vzniklá od ochlazení konstrukce ovlivňuje vlastní frekvence lávky, bylo učiněno několik významných zjednodušení. Zkoumání ovlivnění probíhalo na prvním vlastním tvaru vodorovného příčného kmitání mostovky. Zjednodušení byla zvolena tak, aby ovlivnění normálovou silou vycházelo větší, než kdyby nebyla učiněna. Jednalo se o tato zjednodušení:

1. Konstrukce je tvořena dvěma prostými nosníky, které jsou rozděleny schody (vede ke snížení tuhosti oproti spojitému nosníku).
2. Podepření je provedeno pouze klouby na konci těchto nosníků (zanedbání vlivu pilířů vede ke snížení tuhosti fiktivního prostého nosníku oproti reálnějšímu modelu lávky).
3. Po celé délce nosníku byl uvažován průřez v poli (nižší moment setrvačnosti  $I$ ).

Zkoumání probíhalo na delším fiktivním prostém nosníku a zkoumalo se ovlivnění frekvence příslušné 1. tvaru vodorovného příčného kmitání mostovky. Z charakteru naměřeného vlastního tvaru totiž vyplývá, že v tomto vlastním tvaru kmitá celá část lávky až po schodiště (viz Obr. 101).



Obr. 101: Charakter 1. vlastního tvaru příčného ohybového kmitání (pohled shora).

Po dosazení do vzorce (35), při kterém byla použita normálová síla  $N_{st} = 555$  kN, rozpětí prostého nosníku  $l = 106.5$  m,  $j = 1$ ,  $E = 33$  GPa a  $I_z = 0.8864$  m<sup>4</sup>, vyšla odmocnina ve vzorci (35) 1.011. I po všech těchto zjednodušeních se vlastní frekvence vlivem normálové síly od ochlazení konstrukce zvýšila jen o 1.1 %.

Podobně bylo prověřeno ovlivnění silou vznikající od ochlazení konstrukce i na svislém ohybovém kmitání. Byly použity stejné zjednodušující předpoklady, v tomto případě se však při výpočtu změnila délka a moment setrvačnosti. Délka byla uvažována, jako největší vzdálenost inflexních bodů u 1. tvaru svislého ohybového kmitání, tedy jako délka nejdelšího pole lávky. Oproti posouzení u frekvence příslušející tvaru vodorovného příčného kmitání byla v tomto případě uvažována délka  $l = 22$  m a moment setrvačnosti  $I_y = 0.01844$  m<sup>4</sup>. V tomto případě vyšla odmocnina ve vzorci (35) 1.022, což i po všech zjednodušeních je zvýšení pouze o 2.2 %.

Toto bylo ověřeno i na 3D modelu lávky ve výpočetním programu, kdy se při použití počátečního napětí od zatěžovacího stavu vyvolaného ochlazením, hodnoty vlastních frekvencí změni pouze nepatrně, v řádu jednotek setin Hz.

## 6.5.2 Změna vlastních frekvencí vlivem trhlin v betonu mostovky

Důvodem, proč mohlo dojít k snížení vlastních frekvencí lávky, může být vznik a rozvoj mikrotrhlin v betonu. Konstrukce mostovky je železobetonová, není zde žádné předpětí. Při návrhu železobetonu se počítá s tím, že beton v tahu nepůsobí a tahové síly jsou přenášeny betonářskou výztuží [64].

V identifikovaném 3D výpočetním modelu je zadána skutečná geometrie průřezu mostovky a také momenty setrvačnosti tohoto průřezu. Tyto momenty setrvačnosti jsou uvažovány pro celý nijak neoslabený průřez mostovky. Ve skutečnosti však beton všude nepůsobí, při přenosu vnitřních sil může být překročena tahová pevnost betonu a vznikne v něm trhlina. Průřez je trhlinou oslaben, což má vliv na jeho ohybovou tuhost a tím pádem také na průhyby a vlastní frekvence. Toto oslabení bylo v této práci zjednodušeně simulováno.

### 6.5.2.1 Efektivní průřez

Za účelem simulování vzniku trhlin v betonu byl vytvořen soubor v programu Microsoft Excel. Zde bylo analyzováno napětí na úrovni průřezu. Byly využívány základní principy stavební mechaniky a pružnosti a pevnosti. Souvislost mezi napětím v průřezu a vnitřními silami je zobrazena ve vzorcích (36) a (37). V rovnici (36) je vyjádřena souvislost mezi normálovou silou a normálovým napětím v průřezu [65]:

$$N = \iint \sigma_x dA, \quad (36)$$

kde  $N$  je normálová síla,  $\sigma_x$  je normálové napětí a  $A$  je plocha průřezu.

Souvislost mezi napětím v průřezu a ohybovým momentem je:

$$M_y = \iint z \cdot \sigma_x dA, \quad (37)$$

kde  $z$  je vzdálenost od neutrální osy (osy, kde je nulové napětí od momentu). Dále pak byl využit předpoklad, že je při přenosu vnitřních sil splněna Navier – Bernoulliho hypotéza (hypotéza o zachování rovinnosti průřezu [65]), že v tlačené části betonu jsou malá napětí, u kterých platí Hookův zákon a že Hookův zákon platí také u betonářské výztuže, který je popsán v rovnici (38):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (38)$$

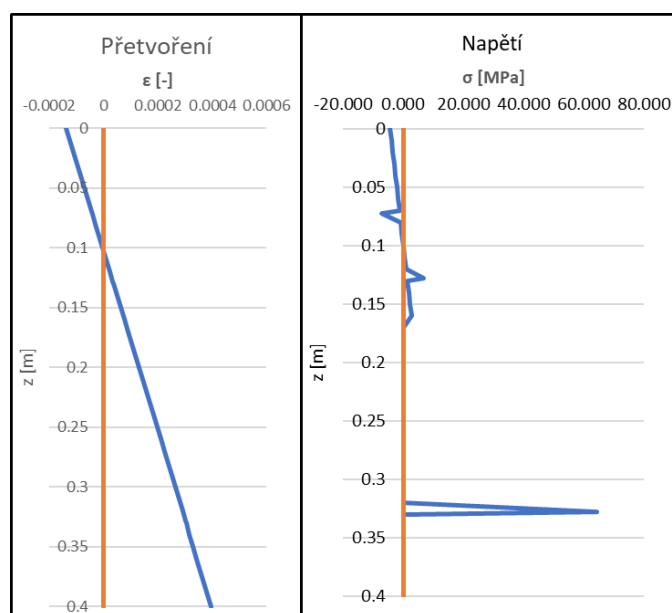
kde  $\sigma$  je napětí,  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\varepsilon$  je poměrná deformace [65]. V tažené části betonu byl učiněn zjednodušující předpoklad, že u něj platí Hookův zákon až do porušení a beton v tahu přestane působit ve chvíli, kdy je překročena pevnost betonu v tahu  $f_{ctm}$  (v tomto případě uvažována hodnotou 2.9 MPa).

Z výpočetního 3D modelu konstrukce byly získány vnitřní síly. Na výpočetním modelu bylo simulováno zatížení vlastní tíhou, teplotou, smrštěním betonu a běžným provozem chodců na lávce. Model byl zatížen vlastní tíhou, změnou teploty střednice, která byla odhadnuta jako  $\Delta T = -25$  °C, dále smrštěním po 21 letech provozu konstrukce  $\varepsilon_s = -0.000218$ , které bylo vypočítáno pomocí modelu B3 (poskytnutým katedrou betonových konstrukcí Fakulty stavební ČVUT), a liniovým zatížením 2.5 kN/m, které simuluje běžný provoz na lávce. Poloha tohoto zatížení byla určena tak, aby vyvolala největší vnitřní síly.

Následně byla z výpočetního modelu získána hodnota normálové síly a ohybového momentu. V tomto případě bylo provedeno velké zjednodušení, protože průběh těchto vnitřních sil není jednoduchý a výpočet napětí v průřezu by musel být proveden pro velké množství průřezů. Z modelu byly převzaty maximální vnitřní síly, které byly následně sníženy na 80 % jejich původní velikosti. Jednalo se o hodnotu ohybového momentu nad podporou, v poli a o normálovou sílu. Následně byla konstrukce rozdělena na oblasti polí a podpor a v oblasti všech polí byly zjednodušeně určeny stejné vnitřní síly a v oblasti všech podpor také.

V oblasti polí byl uvažován ohybový moment  $M_{y,pole} = 160$  kNm a normálová síla  $N_{pole} = 245$  kN a v oblasti podpor ohybový moment  $M_{y,podpora} = -200$  kNm a normálová síla  $N_{podpora} = 774$  kN.

U průřezu byla měněna jeho deformace tak, aby byla zachována jeho rovinnost a aby platila rovnováha vnitřních sil. Průběh poměrných deformací a normálového napětí je zobrazen na Obr. 102.



Obr. 102: Přetvoření a napětí na průřezu v oblasti pole.

Z obrázku je vidět, že v betonu mostovky je překročena tahová pevnost v oblasti vysoké 23 cm. Stejně bylo vypočteno napětí i pro průřez v oblasti nad podporou, kde byla tahová pevnost překročena v oblasti vysoké 26 cm.

Tento nový průřez mostovky se tedy skládá z oblasti, kde je beton neporušený a celý působí a z výztuže. Výztuž byla pomocí pracovního součinitele převedena na beton a byly vypočteny efektivní momenty setrvačnosti. Pro průřez nad podporou byly vypočteny efektivní momenty setrvačnosti  $I_{y,podpora} = 0.004393 \text{ m}^4$ ,  $I_{z,podpora} = 0.3985 \text{ m}^4$  a pro průřez v poli  $I_{y,pole} = 0.003571 \text{ m}^4$  a  $I_{z,pole} = 0.4089 \text{ m}^4$ . Následně byly určeny obdélníkové průřezy mající stejné momenty setrvačnosti. Tyto průřezy byly uvažovány 2, jeden pro oblasti nad podporou a druhý pro oblasti v poli.

### 6.5.2.2 Výpočet vlastních frekvencí na konstrukci poškozené trhlinami

Efektivní průřezy popsány v předchozí kapitole byly použity ve výpočetním 3D modelu. Těmto průřezům byl přiřazen materiál, mající modul pružnosti betonu C30/37 při teplotě 20 °C  $E_{cm} = 33 \text{ GPa}$  a nulovou objemovou hmotnost. Ve výpočetním modelu byl zachován původní průřez, kterému byl přiřazen materiál mající modul pružnosti  $E = 1 \text{ kPa}$  a objemovou hmotnost  $2500 \text{ kg/m}^3$ . Takto bylo zajištěno rozdělení hmoty respektující skutečnost a pokles tuhosti průřezu. Na takto upravené konstrukci byly vypočteny vlastní frekvence, které jsou shrnuty v Tab. 24.

Tab. 24: Shrnutí výsledků experimentů, vypočtených vlastních frekvencí na modelu bez trhlin a na modelu s nasimulovanými trhlinami

Poř. č.	Charakter vl. tvaru	Experiment 2002 [Hz]	Experiment 2023 [Hz]	Finální identifikace modelu (bez trhlin) [Hz]	Zohledně-ní trhlin [Hz]	Pokles vlastních frekvencí oproti bez trhlin [%]	Rozdíl vl. frekvencí oproti experim. 2023 [%]
1	1. vod.	1.04	0.89	1.10	<b>0.86</b>	-27.91	-3.49
2	2. vod.	1.39	1.13	1.52	<b>1.16</b>	-31.03	2.59
3	3. vod.	<b>2.15</b>	1.8	2.14	<b>1.55</b>	-38.06	-16.13
4	1. svislý	2.55	2.32	2.57	<b>2.15</b>	-19.53	-7.91
5	4. vod.	<b>2.91</b>	2.44	2.94	<b>2.20</b>	-33.64	-10.91
6	2. svislý	3.01	2.76	2.99	<b>2.45</b>	-22.04	-12.65
7	3. svislý	3.54	3.25	3.62	<b>2.93</b>	-23.55	-10.92
8	5. vod.	<b>3.99</b>	3.34	4.00	<b>2.82</b>	-41.84	-18.44
9	4. svislý	4.19	3.8	4.27	<b>3.40</b>	-25.59	-11.76
10	5. svislý	4.93	4.42	5.11	<b>4.05</b>	-26.17	-9.14
11	6. vod.	5.44	4.59	5.51	<b>3.94</b>	-39.85	-16.50
12	6. svislý	5.59	5.03	5.78	<b>4.54</b>	-27.31	-10.79
13	7. svislý	6.24	5.54	6.34	<b>5.21</b>	-21.69	-6.33
14	1. krout.	6.37	6.2	6.65	<b>6.11</b>	-8.84	-1.47
15	8. svislý	7.63	6.65	8.42	<b>6.95</b>	-21.15	4.32

V tabulce jsou ve žlutě zvýrazněném sloupci vlastní frekvence vypočtené na výpočetním modelu, v kterém byly použity efektivní průřezy zohledňující beton mostovky porušený trhlinami. U všech vlastních frekvencí došlo dle předpokladu k poklesu. U vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného kmitání to byl pokles průměrně o 35.39 %, u vlastních frekvencí spjatých s tvary svislého ohybového kmitání o 23.38 % a u frekvence kroutivého kmitání byl pokles nejmenší, o 8.84 %.

Tento výsledek se shoduje s chováním, které bylo zaznamenáno po porovnání výsledků z experimentu z roku 2002 a 2023. Výraznější pokles je zde také zaznamenán u vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného kmitání než u vlastních frekvencí spjatých s tvary svislého ohybového kmitání a nejmenší pokles nastal u vlastní frekvence spjaté s kroutivým kmitáním. Charakter vlastních tvarů se nezměnil.

Vlastní frekvence, které byly vypočteny na konstrukci se zohledněním trhlin, jsou převážně nižší než ty, které byly naměřeny při experimentu v roce 2023. Zjednodušení, že je efektivní průřez v oblasti všech polí a všech podpor stejný, je konzervativní. Přesnější by bylo počítat

výšku nepotrhaného betonu pro části o menší délce, které by lépe respektovaly průběh vnitřních sil. Toto by však bylo velmi složité a náplní této kapitoly bylo pouze odhadnout chování konstrukce, u které je betonový průřez oslaben trhlinami.

Z výsledků této kapitoly lze usuzovat, že pokles vlastních frekvencí, které byly změřené v letech 2022 a 2023, oproti frekvencím zjištěným v roce 2002 před uvedením lávky do provozu, je způsobený vznikem a rozvojem trhlin v železobetonové mostovce. Výsledky této zjednodušené analýzy v souladu s výsledky experimentální analýzy ukazují na vyšší pokles u frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného kmitání než u frekvencí spjatých s tvary svislého ohybového kmitání a na nejnižší pokles u frekvence krouživého kmitání.

## 7 ZÁVĚR

V první části práce jsou shrnuty informace týkající se dynamické analýzy lávek pro chodce se zaměřením především na experimentální analýzu. Součástí je také souhrn norem, předpisů a doporučení, které se této problematice týkají. V této části práce byly dále uvedeny příklady konstrukcí, u kterých byla zaznamenána změna základních dynamických charakteristik, a popsány faktory, které na takovou změnu mohly mít vliv.

V rámci této diplomové práce byl proveden dynamický experiment na lávce pro chodce v areálu ŠKODA Auto a.s. v Mladé Boleslavi. Cílem experimentu bylo provedení experimentální modální analýzy, a to nejen mostovky lávky, ale také pilířů.

Experiment se uskutečnil 22. a 23. 4. 2023 a byla při něm využita metoda FVT (Forced Vibration Testing). Následně byly vyhodnoceny vlastní tvary a vlastní frekvence konstrukce. Celkem bylo vyhodnoceno 15 vlastních frekvencí a jim příslušných vlastních tvarů. Změřené vlastní frekvence i vlastní tvary byly dále porovnávány s výsledky ze dvou starších experimentů, které byly na lávce realizovány v září 2022 a v prosinci 2002. Měření z roku 2002 bylo prováděno ještě před uvedením lávky do provozu. Změřené vlastní frekvence se mezi roky 2022 a 2023 téměř nezměnily, zatímco při porovnání naměřených vlastních frekvencí z roku 2002 s rokem 2023 byl zaznamenán jednoznačný pokles všech vlastních frekvencí nosné konstrukce lávky. Pokles byl výraznější zejména u vlastních frekvencí spjatých s tvary vodorovného příčného kmitání mostovky.

Součástí práce je teoretická analýza dynamického chování lávky. Za tímto účelem byl v programu SCIA Engineer 22.0 32 bit sestaven teoretický 3D model konstrukce. Na teoretickém modelu byly vypočteny vlastní frekvence a vlastní tvary. V rámci verifikace modelu byla posouzena shoda mezi zkouškou zjištěnými a výpočtem stanovenými vlastními frekvencemi na základě mezní odchylky  $\Delta_j$  stanovené v [13]. Mezní odchylka nebyla splněna pro vybrané vlastní frekvence svázané s tvary svislého ohybového kmitání, a proto bylo dále přistoupeno k identifikaci modelu. Problém navíc byl také u podoby některých vypočtených vlastních tvarů svislého ohybového kmitání, která se zcela neshodovala s charakterem odpovídajících naměřených vlastních tvarů. Po provedení dvou kroků identifikace modelu bylo přistoupeno k porovnání vypočtených vlastních frekvencí a vlastních tvarů s těmi, které byly vypočteny v roce 2002 před uvedením lávky do provozu. Tyto výsledky se shodovaly s těmi vypočtenými v rámci této práce a byly zatíženy zhruba stejnou chybou. Po hlubší analýze naměřených výsledků a zejména výsledků zaměřených na kmitání pilířů bylo zjištěno,

že základní příčinou odlišného dynamického chování teoretického modelu a skutečné konstrukce lávky je zábradlí, které bylo ve výpočetním modelu původně zohledněno pouze pomocí hmoty. Po zahrnutí tuhosti zábradlí do teoretického 3D modelu a dalších souvisejících úpravách, se po pátém kroku identifikace podařilo výpočetní model upravit tak, že podmínka mezní odchylky podle [13] vyhověla u všech 15 porovnávaných vlastních frekvencí. U vybraných vlastních tvarů byla provedena vizuální kontrola.

Na takto identifikovaném výpočetním modelu byly simulovány faktory, které mohly způsobit rozdílné hodnoty naměřených vlastních frekvencí mezi roky 2002 a 2023. Nejprve bylo simulováno ovlivnění vlastních frekvencí změnou teploty. Při experimentu v roce 2002 totiž panovaly teploty hluboko pod bodem mrazu, zatímco při experimentu v roce 2023 byla teplota okolo 15 °C. V tomto kroku bylo do výpočetního modelu přidáno založení pilířů respektující realitu, jelikož promrznutí horní části základové půdy v prosinci 2002 mohlo vést k rozdílnému chování podepření pilířů oproti experimentu, který byl proveden v dubnu 2023. Bylo také prověřeno, zda vlastní frekvence nemohou být ovlivňovány tahovou silou, která v konstrukci lávky vzniká vlivem jejího ochlazení. Bylo zjištěno, že tato tahová síla vlastní frekvence lávky ovlivňuje pouze nepatrně a že při zohlednění změn parametrů založení se výrazně změnila hodnota vlastní frekvence krouživého kmitání, což neodpovídá výsledkům měření provedených na skutečné konstrukci. Při výpočtu dynamického namáhání bylo přesnější podepření konstrukce modelovat vždy jako vetknutí. Pokles vlastních frekvencí tedy zřejmě nebyl způsoben primárně rozdílnou teplotou při provádění jednotlivých experimentů.

Dalším faktorem, který byl prověřen, byl vznik a rozvoj trhlin v železobetonové mostovce. První experiment byl na konstrukci proveden před uvedením konstrukce do provozu a vlivem užívání konstrukce mezi jednotlivými experimenty mohlo dojít k rozvoji trhlin v betonu, což mohlo vést ke snížení tuhosti mostovky a tím pádem také ke snížení vlastních frekvencí. V tomto kroku bylo prověřováno napětí v betonu získané z výpočetního modelu, který byl vystaven zatížení, která se mohou na lávce běžně vyskytovat. Část mostovky, ve které byla překročena tahová pevnost betonu, byla vyloučena, byl zaveden efektivní průřez skládající se z neporušeného betonu a z výztuže a následně byly vlastní frekvence spočítány s takto upraveným efektivním průřezem. Tento výpočet byl proveden ve zjednodušené formě, ale i přesto jeho výsledky odpovídaly charakteristikám naměřeným ve skutečnosti. Naměřený pokles vlastních frekvencí mezi prosincem 2002 a dubnem 2023 byl tedy pravděpodobně způsoben trhlinami v betonu.



Změna vlastních frekvencí konstrukce na základě přirozené příčiny je něco, co není nikde v normách zmíněno. Obzvlášť u železobetonové konstrukce může vlivem rozvoje trhlin docházet k nezanedbatelnému poklesu vlastních frekvencí, což může mít následně vliv na změnu jejího dynamického chování, jako je například problém s rezonančním kmitáním na konstrukci, na které tento nežádoucí jev dříve nenastával.

## 8 SEZNAM LITERATURY

- [1] Pirner, M. a kolektiv, *Dynamika stavebních konstrukcí TP33*. 1989, Praha: Nakladatelství techn. lit.
- [2] Máca, J. *přednášky Dynamika stavebních konstrukcí 1*. Praha: ČVUT, 2021 [citováno 2021 28.5.]; [online]  
Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/student>.
- [3] Máca, J. *přednášky Dynamika stavebních konstrukcí 2*. Praha: ČVUT v Praze, 2022 [citováno 2023 5.9.]; [online]  
Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/student>.
- [4] Máca, J., *Dynamika stavebních konstrukcí : řešené příklady*, ed. J. Kruis and T. Krejčí. 2015, V Praze: České vysoké učení technické.
- [5] Ryjáček, P., *přednášky Ocelové mosty 2*: Praha: ČVUT v Praze. 2023.
- [6] Polák, M., *přednášky Dynamika dopravních staveb*: Praha: ČVUT v Praze. 2022.
- [7] Polák, M. *přednášky Experimentální analýza a diagnostika K*. Praha: ČVUT v Praze, 2023 [citováno 2023 17.5.2023]; [online]  
Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/student>.
- [8] *The Fourier Transform*. [online]. *Thefouriertransform.com*, 2010 [citováno 2022 3.2.]; [online]  
Dostupné z: <https://www.thefouriertransform.com>.
- [9] *Fourier transform*. [online]. AAVOS, 2014 [citováno 2022 3.2.]; [online]  
Dostupné z: <https://aavos.eu/glossary/fourier-transform/>.
- [10] *(Diskrétní) Fourierova transformace*. Olomouc: UPOL, 2003 [citováno 2023 6.9.]; [online]  
Dostupné z: <http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/>.
- [11] Pírko, Z., *Fourierova transformace*. 1966, Praha: České vysoké učení technické.
- [12] ČSN 73 2044. *Dynamické zkoušky stavebních konstrukcí*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2019.
- [13] ČSN 73 6209. *Zatěžovací zkoušky mostních objektů*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví 2019.
- [14] TP 215. *Využití modální analýzy pro návrh, posouzení, opravy, kontrolu a monitorování mostů pozemních komunikací*. Praha: Stavební fakulta ČVUT v Praze, 2010.
- [15] Pirner, M. a Fischer, O., *Dynamika ve stavební praxi*. 2010, Praha: ČKAIT.
- [16] SÉTRA, *Footbridges*. Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading. 2006, Paris: Ministry of Transport and Infrastructure, Technical Department of Transport, Roads and Bridges Engineering and Road Safety.

- [17] ČSN EN 1991-2 ed. 2. *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí- Část 2: Zatížení mostů dopravou*. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví 2019.
- [18] ČSN EN 1991-2 NA ed. 2. *Národní příloha- Eurokód 1: Zatížení konstrukcí- Část 2: Zatížení mostů dopravou*. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví 2019.
- [19] Máca, J. a Štěpánek, J., *Pedestrian load models of footbridges*. MATEC Web of Conferences, 2017. **107**: p. 00009.
- [20] ČSN EN 1990 ed. 2. *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví 2021.
- [21] Dallard, P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Smith, R.R., Willford, M. a Roche, M., *London Millennium Bridge: Pedestrian-Induced Lateral Vibration*. Journal of Bridge Engineering, 2001. **6**(6): p. 412-417.
- [22] ISO 10137 (2007). *Bases for design of structures- Serviceability of buildings and walkways against vibrations*. International Organization for Standardization, 2007.
- [23] Steel, R.F.f.C.a., *Human-induced vibration of steel structures (Hivoss)*. 2010.
- [24] Heinemeyer C, B.C., Keil A, Schlaich M, Goldbeck A, Trometor S, Lukic M, Chabrolin B, Lemaire A, Martin P, Cunha A, Caetano E, authors Sedlacek G, Heinemeyer C, Butz C, Geradin M, *Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations*. JRC53442. 2009, Luxembourg: European Commission.
- [25] European, C., Directorate-General for, R., Innovation, Feldmann, M., Heinemeyer, C. a Butz, C., *Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimised design guidelines for steel footbridges*. 2008: Publications Office.
- [26] Polák, M., *Stanovení základních charakteristik vlastního kmitání věže románského kostela svatého Jakuba v Církvici*. 2017, Praha: Fakulta stavební ČVUT Praha.
- [27] Miroš Pirner, U.S. *Degradace železobetonu a dynamická odezva*. Praha: časopis stavebnictví, 2018 [citováno 2023 10.10.]; [online]  
Dostupné z: <https://www.casopisstavebnictvi.cz/clanky-degradace-zelezobetonu-a-dynamicka-odezva.html>.
- [28] Lehký, D., Novák, D. a Frantík, P., *Identifikace poškození dynamicky namáhaných konstrukcí: Metodologie a studie modálních vlastností*. 2007, Svratka, Česká republika: CD sborník konference Inženýrská mechanika 2007.
- [29] Salawu, O.S., *Detection of structural damage through changes in frequency: a review*. Engineering Structures, 1997. **19**(9): p. 718-723.
- [30] Askegaard, V. a Mossing, P., *Long term observation of rc-bridge using changes in natural frequency. nordic concrete research. publication no 7*. Publication of: NORDIC CONCRETE FEDERATION, 1988.

- 
- [31] Pirner, M., Fischer, O. a Urushadze, S., *Long-term observation of old RC structures using dynamic response*. Proceedings of the IMAC-XXVII, 2009: p. 9-12.
- [32] Zhou, Y., *Concrete creep and thermal effects on the dynamic behavior of a concrete-filled steel tube arch bridge*. Journal of Vibroengineering, 2014. **16**(4): p. 1735-1744.
- [33] Sapountzakis, E.J. a Katsikadelis, J.T., *Creep and shrinkage effect on the dynamic analysis of reinforced concrete slab-and-beam structures*. Journal of Sound and Vibration, 2003. **260**(3): p. 403-416.
- [34] Nichols, G.A., *I-15 bridge C-846: Correlations in natural frequencies due to temperature*. 2017: Utah State University.
- [35] Peeters, B. a De Roeck, G., *One year monitoring of the Z24 bridge: environmental influences versus damage effects*. Proc. IMAC-XVIII San Antonio, TX, 2001: p. 1570-1579.
- [36] Moser, P. a Moaveni, B., *Environmental effects on the identified natural frequencies of the Dowling Hall Footbridge*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011. **25**(7): p. 2336-2357.
- [37] Gomez, H.C., Fanning, P.J., Feng, M.Q. a Lee, S., *Testing and long-term monitoring of a curved concrete box girder bridge*. Engineering Structures, 2011. **33**(10): p. 2861-2869.
- [38] Soyoz, S. a Feng, M.Q., *Long-term monitoring and identification of bridge structural parameters*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2009. **24**(2): p. 82-92.
- [39] Fischer, O., Pirner, M. a Urushadze, S. *Long-time observation of a RC chimneys stiffness with the use of wind-excited vibration*. in *Proceedings of the 4th international ASRANet colloquium atny: ASRANet (3)*. 2008.
- [40] Polák, M., *Utilization of Experimentally Obtained Modal Characteristics at Analyses of Bridges, Habilitation*. 2001, Prague: CTU Prague.
- [41] Farrar, C.R., Doebling, S.W., Cornwell, P.J. a Straser, E.G., *Variability of modal parameters measured on the Alamosa Canyon Bridge*: Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States). 1996.
- [42] Liu, C. a DeWolf, J.T., *Effect of temperature on modal variability of a curved concrete bridge under ambient loads*. Journal of structural engineering, 2007. **133**(12): p. 1742-1751.
- [43] Nguyen, V.H., Mahowald, J., Schommer, S. a Maas, S., *A study of temperature and aging effects on eigenfrequencies of concrete bridges for health monitoring*. Engineering, 2017. **9**: p. 396-411.
- [44] Shook, J., Kallas, B., McLeod, N., Finn, F., Pell, P., Krchma, L., Haas, R. a Anderson, K. *Factors influencing dynamic modulus of asphalt concrete*. in *Association of Asphalt Paving Technologists Proc.* 1969.
- [45] Weber, B., *Dynamic Properties of Footbridges: Influence of Asphalt Pavement and Support Conditions*. MATEC Web of Conferences, 2015. **24**: p. 01004.

- [46] Cai, Y., Zhang, K., Ye, Z., Liu, C., Lu, K. a Wang, L., *Influence of temperature on the natural vibration characteristics of simply supported reinforced concrete beam*. Sensors, 2021. **21**(12): p. 4242.
- [47] Model Code. *FIB. Special Activity Group 5*. CEB and FIB, 2010.
- [48] Corbally, R. a Malekjafarian, A., *Examining changes in bridge frequency due to damage using the contact-point response of a passing vehicle*. Journal of Structural Integrity and Maintenance, 2021. **6**(3): p. 148-158.
- [49] Yang, Y.B., Zhang, B., Qian, Y. a Wu, Y., *Contact-Point Response for Modal Identification of Bridges by a Moving Test Vehicle*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2018. **18**(05): p. 1850073.
- [50] Yang, Y.B., Xu, H., Zhang, B., Xiong, F. a Wang, Z.L., *Measuring bridge frequencies by a test vehicle in non-moving and moving states*. Engineering Structures, 2020. **203**: p. 109859.
- [51] Kim, C.-W., Morita, T., Wang, Z. a Sugiura, K. *Long-term bridge health monitoring focusing on the Mahalanobis Distance of modal parameters*. in *Journal of Physics: Conference Series*. 2015. IOP Publishing.
- [52] Šach, M., *Experimentální dynamická analýza historické věže kostela*. Bakalářská práce. 2022, Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra mechaniky.
- [53] Brüel&Kjær. *Product data: Accelerometer Types 8344, 8344-B-001 and 8344-B-002*. Nærum, Denmark: 2022 [citováno 2022 1.4.]; [online]  
Dostupné z: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2262.ashx>.
- [54] DEWESoft. *SIRIUS Tech specs*. Slovenia: 2022 [citováno 2022 1.4.]; [online]  
Dostupné z: <https://dewesoft.com/products/daq-systems/sirius/tech-specs>.
- [55] Polák, M. a Plachý, T., *Zpráva o zkoušce: Dynamická zkouška lávky pro chodce v Mladé Boleslavi v areálu ŠKODA auto, A.S.* 2023, Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební.
- [56] Studnička, J., Rotter, T. a Polák, M., *Zpráva o experimentálním ověření lávky pro chodce v závodě Škoda v Mladé Boleslavi*. 2003, Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební.
- [57] Koloušek, V., *Dynamika stavebních konstrukcí: Obecná část*. 1954, Praha: Státní nakladatelství technické literatury.
- [58] *Modul pružnosti*. Praha Kačerov: Společnost ZAPA beton a.s., 2016; [online]  
Dostupné z: <https://www.zapa.cz/sites/default/files/migration/files/MP%20Modul%20elasticity.pdf>.
- [59] Lenner, R., Jachan, J., Ehrenberger, J., Polák, M., Rotter, T. a Studnička, J., *Lávka v Mladé Boleslavi*. Stavební obzor, 2003. **12**: p. 105-112.
- [60] Masopust, J., *Vrtané piloty*. 1994, Praha: Čeněk a Ježek.
- [61] Pěňčík, J. a Foglar, M., *Idealizace hlubinného založení na vrtaných pilotách*. 2009.

- [62] *DIN 4014: Bored Cast-in-place Piles : Formation, Design and Bearing Capacity : Deutsche Norm.* 1990: Beuth Verlag.
- [63] ČSN EN 1991-1-5. *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí- část 1-5: Obecná zatížení- Zatížení teplotou.* ČNÍ, 2005.
- [64] Štefan, R., *přednášky Navrhování nosných konstrukcí- beton.* 2020, Praha: ČVUT v Praze.
- [65] Jirásek, M., *přednášky Pružnost a pevnost.* 2020, Praha: ČVUT v Praze.

## 9 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Fourierova transformace (obrázek byl převzat z publikace [9]). Naměřený signál v čase, z kterého můžeme získat pomocí Fourierovi transformace jeho frekvenční složení. ....	7
Obr. 2: Dokmitání konstrukce – průběh výchylky v čase při volném tlumeném kmitání [3]....	9
Obr. 3: Dynamická síla na mostovku způsobená chůzí jedné osoby [3]. Frekvence kroku 2 Hz [16] .....	11
Obr. 4: Rozsahy hodnot zrychlení [ $m/s^2$ ] pro vertikální kmitání mostovky.....	15
Obr. 5: Rozsahy hodnot zrychlení [ $m/s^2$ ] pro horizontální kmitání mostovky.....	15
Obr. 6: Přípustné vážené RMS hodnoty zrychlení pro vertikální kmitání v závislosti na frekvenci .....	16
Obr. 7: Přípustné vážené RMS hodnoty zrychlení pro horizontální kmitání v závislosti na frekvenci .....	16
Obr. 8: Graf poklesu první vlastní frekvence mostu Jamboree v USA. Data rozděleny na letní a zimní období. Na ose x je čas [roky], na ose y frekvence [Hz][38]. ....	20
Obr. 9: Graf závislosti první vlastní frekvence mostu v lucemburském Useldange na teplotě. Na ose x je teplota [ $^{\circ}C$ ] a na ose y frekvence [Hz]. [43] .....	23
Obr. 10: Graf závislosti první vlastní frekvence švýcarského mostu Z24 na teplotě. Na ose x je teplota [ $^{\circ}C$ ] a na ose y frekvence [Hz]. [35].....	23
Obr. 11: Na levém obrázku je zobrazena naměřená základní vlastní frekvence v průběhu roku a na pravém obrázku naměřená teplota [51]......	27
Obr. 12: Zavedení regresního koeficientu. Červená čára jsou naměřené hodnoty základní vlastní frekvence v závislosti na teplotě. Modrá čára jsou vlastní frekvence po vyrovnání vlivu teploty [51]. ....	27
Obr. 13: Umístění objektu na mapě, zdroj Mapy.cz.....	28
Obr. 14: Spodní pohled proti směru staničení na nosnou konstrukci lávky a na schodišťovou rampu. ....	29
Obr. 15: Vzorový příčný řez [52]. ....	30
Obr. 16: Pohled na mostovku lávky od opěry O000 po směru staničení. ....	30

Obr. 17: Tvar pilíře P030 až 080 [52]. .....	31
Obr. 18: Detailní pohled na spojení mostovky lávky a pilíře.....	31
Obr. 19: Spodní pohled na nosnou konstrukci lávky a na opěru O110.....	32
Obr. 20: Podélný řez lávkou rozdělený na 2 části [52]. .....	33
Obr. 21: Tři akcelerometry od firmy Brüel & Kjær typu 8344 připevněné k přenosnému ocelovému závaží. ....	35
Obr. 22: Měřicí ústředny SIRIUS a řídicí počítač. ....	35
Obr. 23: Průběh teplot vzduchu a horního povrchu mostovky dne 22.4. 2023.....	36
Obr. 24: Obecné schéma uspořádání měření použité při experimentu. Upraveno z [14].....	37
Obr. 25: Rozmístění bodů v příčném řezu s označením orientace příslušných snímačů. ....	38
Obr. 26: Pohled proti směru staničení na snímače zrychlení umístěné ve sledovaném řezu. ...	38
Obr. 27: Funkce CMIF (Complex Mode Indicator Function) s vyznačenými vlastními frekvencemi příslušnými ke globálním vlastním tvarům lávky. ....	41
Obr. 28: 1. tvar vl. kmitání, $f_{(1)} = 0.89$ Hz (1. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	42
Obr. 29: 2. tvar vl. kmitání, $f_{(2)} = 1.13$ Hz (2. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	42
Obr. 30: 3. tvar vl. kmitání, $f_{(3)} = 1.80$ Hz (3. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	43
Obr. 31: 4. tvar vl. kmitání, $f_{(4)} = 2.32$ Hz (1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). ..	43
Obr. 32: 5. tvar vl. kmitání, $f_{(5)} = 2.44$ Hz (4. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	44
Obr. 33: 6. tvar vl. kmitání, $f_{(6)} = 2.76$ Hz (2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). ..	44
Obr. 34: 7. tvar vl. kmitání, $f_{(7)} = 3.25$ Hz (3. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). ..	45
Obr. 35: 8. tvar vl. kmitání, $f_{(8)} = 3.34$ Hz (5. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	45
Obr. 36: 9. tvar vl. kmitání, $f_{(9)} = 3.80$ Hz (4. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). ..	46



Obr. 37: 10. tvar vl. kmitání, $f_{(10)} = 4.42$ Hz (5. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). .....	46
Obr. 38: 11. tvar vl. kmitání, $f_{(11)} = 4.59$ Hz (6. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky). .....	47
Obr. 39: 12. tvar vl. kmitání, $f_{(12)} = 5.03$ Hz (6. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). .....	47
Obr. 40: 13. tvar vl. kmitání, $f_{(13)} = 5.53$ Hz (7. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). .....	48
Obr. 41: 14. tvar vl. kmitání, $f_{(14)} = 6.20$ Hz (1. tvar kroutivého kmitání mostovky). .....	48
Obr. 42: 15. tvar vl. kmitání, $f_{(15)} = 6.65$ Hz (8. tvar svislého ohybového kmitání mostovky). .....	49
Obr. 43: 1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=2.32$ Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře. ....	50
Obr. 44: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(5)}=2.76$ Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře. ....	50
Obr. 45: Průběh teplot vzduchu a povrchu mostovky 22. 9. 2022. ....	51
Obr. 46: Porovnání teplot mostovky při experimentu z roku 2022 a 2023 .....	52
Obr. 47: Porovnání 1. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2022 (0.87 Hz) a 2023 (0.89 Hz).....	53
Obr. 48: Porovnání 1. vl. tvaru svislého ohybového kmitání mezi roky 2022 (2.32 Hz) a 2023 (2.32 Hz).....	54
Obr. 49: Porovnání 1. vl. tvaru kroutivého kmitání mezi roky 2022 (6.21 Hz) a 2023 (6.20 Hz). .....	54
Obr. 50: Porovnání 1. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (1.04 Hz) a 2023 (0.89 Hz).....	57
Obr. 51: Porovnání 2. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (1.39 Hz) a 2023 (1.13 Hz).....	57

Obr. 52: Porovnání 6. vl. tvaru vodorovného příčného kmitání mezi roky 2002 (5.44 Hz, nalevo) a 2023 (4.59 Hz, napravo). Datový soubor z roku 2002 nebyl k dispozici, porovnání je tedy pouze vizuální.....	58
Obr. 53: Porovnání 1. vl. tvaru svislého ohybového kmitání mezi roky 2002 (2.55 Hz) a 2023 (2.32 Hz).....	58
Obr. 54: Porovnání 1. vl. tvaru kroutivého kmitání mezi roky 2002 (2.55 Hz) a 2023 (2.32 Hz). .....	59
Obr. 55: Teoretický 3D model konstrukce vytvořený v programu SCIA Engineer 22.0 32 bit. .....	62
Obr. 56: Příčný řez v místě pole a jeho základní průřezové charakteristiky.....	63
Obr. 57: Příčný řez v místě podpory a jeho základní průřezové charakteristiky.....	63
Obr. 58: Průřez použitý na hlavní dřík pilíře RO323.9X32. ....	64
Obr. 59: Průřezové charakteristiky fiktivního prutu.....	65
Obr. 60: Fiktivní materiál a jeho objemová hmotnost a modul pružnosti.....	65
Obr. 61: Detail napojení pilířů na mostovky a změna polohy těžišťové osy mostovky.....	66
Obr. 62: Vyrendrovaná část 3D modelu konstrukce lávky v oblasti schodiště.....	67
Obr. 63: Průběh ohybových momentů $M_y$ . Lávka je rozdělena na 2 části, které odděluje schodiště. ....	68
Obr. 64: Průběh ohybových momentů po opravě modelu. Lávka je rozdělena na 2 části, které odděluje schodiště. ....	68
Obr. 65: Ohybový moment $M_y$ nad podporou na deskostěnovém prvku. ....	69
Obr. 66: Ohybový moment $M_y$ nad podporou na prutovém prvku.....	69
Obr. 67: Spočítaný vlastní tvar z 3D modelu konstrukce příslušející vlastní frekvenci $f_{(5)} = 2.41$ Hz. Opěra O000 je vpravo.....	72
Obr. 68: Naměřený vlastní tvar z experimentu v roce 2002 příslušející vlastní frekvenci $f_{(5)} = 3.01$ Hz. Opěra O000 je vpravo. ....	72
Obr. 69: Upravené schodiště v 3D modelu. Přidání podest a schodišťových stupňů.....	76

Obr. 70: 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání vypočtený na Fakultě stavební ČVUT $f_{(5)}=1.93$ Hz. Opěra O000 je v levém horním rohu.....	80
Obr. 71: 1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}= 2.55$ Hz). Opěra O000 je nalevo. .....	80
Obr. 72:1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=2.55$ Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře. ....	81
Obr. 73: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(5)} = 3.01$ Hz). Opěra O000 je nalevo. .....	81
Obr. 74: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky ( $f_{(4)}=3.01$ Hz)- pořadnice vlastního tvaru na pilířích. Opěra O000 je vlevo nahoře. ....	81
Obr. 75: 2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky vypočtený na modelu ( $f_{(5)} = 2.41$ Hz). Opěra O000 je nalevo.....	82
Obr. 76: 3D model lávky se zábradlím. Opěra O000 je nalevo. ....	88
Obr. 77: Vypočtený 1. tvar vl. kmitání, $f_{(1)} = 1.10$ Hz (1. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	88
Obr. 78: Vypočtený 2. tvar vl. kmitání, $f_{(2)} = 1.52$ Hz (2. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	89
Obr. 79: Vypočtený 3. tvar vl. kmitání, $f_{(3)} = 2.15$ Hz (3. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	89
Obr. 80: Vypočtený 4. tvar vl. kmitání, $f_{(4)} = 2.57$ Hz (1. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	90
Obr. 81: Vypočtený 5. tvar vl. kmitání, $f_{(5)} = 2.94$ Hz (4. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	90
Obr. 82: Vypočtený 6. tvar vl. kmitání, $f_{(6)} = 2.99$ Hz (2. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	91
Obr. 83: Vypočtený 7. tvar vl. kmitání, $f_{(7)} = 3.62$ Hz (3. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	91
Obr. 84: Vypočtený 8. tvar vl. kmitání, $f_{(8)} = 4.00$ Hz (5. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	92

Obr. 85: Vypočtený 9. tvar vl. kmitání, $f_{(9)} = 4.27$ Hz (4. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	92
Obr. 86: Vypočtený 10. tvar vl. kmitání, $f_{(10)} = 5.11$ Hz (5. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	93
Obr. 87: Vypočtený 11. tvar vl. kmitání, $f_{(11)} = 5.51$ Hz (6. tvar vodorovného příčného kmitání mostovky).....	93
Obr. 88: Vypočtený 12. tvar vl. kmitání, $f_{(12)} = 5.78$ Hz (6. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	94
Obr. 89: Vypočtený 13. tvar vl. kmitání, $f_{(13)} = 6.34$ Hz (7. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	94
Obr. 90: Vypočtený 14. tvar vl. kmitání $f_{(14)} = 6.65$ Hz (1. tvar kroutivého kmitání mostovky. Ke kroucení dochází v levé části lávky (nalevo od schodiště).....	95
Obr. 91: Vypočtený 15. tvar vl. kmitání, $f_{(15)} = 8.42$ Hz (8. tvar svislého ohybového kmitání mostovky).....	95
Obr. 92: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 1. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(1),OBS} = 1.04$ Hz, $f_{(1),CAL} = 1.10$ Hz).....	96
Obr. 93: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 2. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(2),OBS} = 1.39$ Hz, $f_{(2),CAL} = 1.52$ Hz).....	96
Obr. 94: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 3. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(3),OBS} = 2.14$ Hz, $f_{(3),CAL} = 2.15$ Hz).....	97
Obr. 95: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 1. vlastní tvar svislého ohybového kmitání ( $f_{(4),OBS} = 2.55$ Hz, $f_{(3),CAL} = 2.57$ Hz).....	97
Obr. 96: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 4. vlastní tvar vodorovného příčného kmitání ( $f_{(5),OBS} = 2.91$ Hz, $f_{(5),CAL} = 2.94$ Hz).....	98
Obr. 97: Porovnání výpočtu s výsledky experimentu. 2. vlastní tvar svislého ohybového kmitání ( $f_{(6),OBS} = 3.01$ Hz, $f_{(3),CAL} = 2.99$ Hz).....	98
Obr. 98: Graf po provedení FFT ze záznamu zrychlení pořízeného při běžném provozu na lávce při výměně ranní a odpolední směny.....	99
Obr. 99: Uvažovaný průběh modulu vodorovné reakce podloží po výšce piloty.....	102

---

Obr. 100: Průběh normálové síly v mostovce lávky při ochlazení konstrukce. ....	104
Obr. 101: Charakter 1. vlastního tvaru příčného ohybového kmitání (pohled shora). ....	105
Obr. 102: Přetvoření a napětí na průřezu v oblasti pole. ....	108

## 10 SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Rychlosti a frekvence různých lidských pohybů [19].....	12
Tab. 2: Úrovně pohodlí chodců na lávkách stanovené v [18] .....	13
Tab. 3: Mezní hodnoty vážených efektivních hodnot zrychlení podle normy [13] .....	14
Tab. 4: Hodnoty mezních odchylek pro porovnání vypočtených a naměřených vlastních frekvencí [13] .....	17
Tab. 5: Výpis řezů na konstrukci lávky, v kterých bylo prováděno měření.....	39
Tab. 6: Přehled vyhodnocených vlastních frekvencí a charakter jim příslušných vl. tvarů .....	41
Tab. 7: Porovnání vlastních frekvencí vyhodnocených při modální analýze z roku 2022 a 2023 .....	52
Tab. 8: Porovnání vlastních frekvencí vyhodnocených při experimentální modální analýze v roce 2002 a 2023 s popsáním charakterem vlastního tvaru.....	56
Tab. 9: Vypočtené vlastní frekvence konstrukce – verifikace 3D modelu.....	71
Tab. 10: Vypočtené vlastní frekvence konstrukce – první krok identifikace modelu.....	73
Tab. 11: Změna výsledků po prvním kroku identifikace výpočetního modelu.....	74
Tab. 12: Legenda k barevnému značení u tabulek změny výsledků .....	74
Tab. 13: Změna výsledků po druhém kroku identifikace výpočetního modelu .....	77
Tab. 14: Změna výsledků oproti původním po druhém kroku identifikace výpočetního modelu. ....	77
Tab. 15: Porovnání vypočtených a změřených vlastních frekvencí z článku zveřejněného v časopisu Stavební obzor doplněné o vlastní frekvence vypočtené v rámci této práce. ....	79
Tab. 16: Změna výsledků (vlastních frekvencí) po třetím kroku identifikace výpočetního modelu .....	83
Tab. 17: Změna výsledků oproti minulému kroku identifikace. ....	84
Tab. 18: Změna výsledků po čtvrtém kroku identifikace výpočetního modelu .....	85
Tab. 19: Změna vlastních frekvencí oproti minulému kroku identifikace. ....	86
Tab. 20: Posouzení vlastních frekvencí po pátém kroku identifikace výpočetního modelu ....	87

---

Tab. 21: Změna vlastních frekvencí oproti minulému kroku identifikace. ....	87
Tab. 22: Porovnání vlastních frekvencí oproti finálnímu kroku identifikace po snížení modulu pružnosti betonu mostovky vlivem teploty. ....	101
Tab. 23: Porovnání výsledků oproti finálnímu kroku identifikace po snížení modulu pružnosti betonu vlivem teploty a zohlednění vlivu tuhosti založení .....	103
Tab. 24: Shrnutí výsledků experimentů, vypočtených vlastních frekvencí na modelu bez trhlin a na modelu s nasimulovanými trhlinami.....	109