

Diplomová práce

GLOBÁLNÍ
OPTIMALIZACE
PŘÍHRADOVÝCH
KONSTRUKCÍ
S VYUŽITÍM
RÁMOVÝCH PRVKŮ

Šimon Glanc

Fakulta stavební ČVUT v Praze

Katedra mechaniky

Vedoucí: doc. Ing. Matěj Lepš, Ph.D.

8. ledna 2024

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Glanc Jméno: Šimon Osobní číslo: 484471
 Zadávající katedra: K132 - katedra mechaniky
 Studijní program: N3607 - Stavební inženýrství
 Studijní obor/specializace: 3607T009 - Konstrukce a dopravní stavby

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Globální optimalizace příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků

Název diplomové práce anglicky: Global optimization of truss structures using frame elements

Pokyny pro vypracování:

Rešerše dostupné literatury globální optimalizace příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků, implementace metody větví a mezí na globální optimalizaci příhradových konstrukcí, porovnání výsledků s optimalizací pomocí simulovaného žihání, globální stabilitní posudek.

Seznam doporučené literatury:

William McGuire, Richard H. Gallagher, Ronald D. Ziemian - Matrix Structural Analysis, John Wiley & Sons (1999)
 Torii, A.J., Lopez, R.H. & Miguel, L.F.F. Modeling of global and local stability in optimization of truss-like structures using frame elements. Struct Multidisc Optim 51, 1187–1198 (2015).
 Burke, Edmund K., and Graham Kendall. Search methodologies. Springer Science+ Business Media, Incorporated, 2005

Jméno vedoucího diplomové práce: Doc. Ing. Matěj Lepš, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 14.9.2023 Termín odevzdání DP v IS KOS: 8.1.2024

Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

14.9.2023

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební

© 2023 Šimon Glanc. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě stavební. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bez uplatněných zákonných licencí nad rámec oprávnění uvedených v Prohlášení je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci: Šimon Glanc. *Globální optimalizace příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků*. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, 2023.

Obsah

Poděkování	ix
Prohlášení	x
Abstrakt	xi
Úvod	1
1 Globální optimalizace konstrukcí	5
1.1 Typy optimalizací	5
1.2 Stav poznání (<i>State of the Art</i>)	6
1.3 Optimalizaci příhradových konstrukcí se zahrnutím stability	8
2 Optimalizované konstrukce	11
2.1 Testovací konstrukce	11
2.2 Zadaná konstrukce	12
3 Posouzení stability dle Eurokódu	17
3.1 Úvod	17
3.2 Stabilita a únosnost prutu	17
3.2.1 Způsob vybočení	18
3.2.2 Imperfekce	18
3.3 Interakce tlaku a ohybu	20
3.3.1 Únosnost průřezu	21
3.3.2 Interakce N+M dle EN 1993-1-1	22
3.3.3 Stanovení interakčních součinitelů metodou 1	22
3.3.4 Stanovení interakčních součinitelů metodou 2	22
3.4 Stabilita prutových konstrukcí	23
3.4.1 Lineární stabilitní výpočet	24
3.4.2 Nelineární pružná analýza	24
3.4.3 Stabilita konstrukcí dle druhého řádu	25

3.4.4	Způsoby řešení prutových konstrukcí dle EN	26
3.4.5	Vhodnost jednotlivých metod	27
3.4.6	Shrnutí globální analýzy	27
4	Globální stabilitní analýza	29
4.1	Lineární analýza konstrukce	29
4.2	Nelineární analýza konstrukce	30
5	Metoda větví a mezí	31
5.1	Úvod	31
5.2	Metoda BnB s diskrétními proměnnými	32
5.3	Metoda BnB s relaxací	34
5.3.1	Relaxace proměnných	34
5.3.2	Postup výpočtu	35
5.4	Srovnání metody BnB	36
6	Optimalizace příhrad metodou BnB	37
6.1	Úvod	37
6.2	Rozměrová optimalizace	37
6.3	Standardní implementace metody BnB	38
6.4	Relaxace problému	39
6.5	Zavedení modularity	43
6.6	Smíšené celočíselné lineární programování - MILP	44
6.6.1	Zavedení podmínek modularity do MILP	45
6.7	Omezení napětí tlačného prutu	46
7	Optimalizace příhrad metodou SA	49
7.1	Simulované žíhání	49
7.1.1	Omezující podmínky	49
7.1.2	Algoritmus optimalizační metody	50
7.1.3	Účelová funkce	51
7.1.4	Penalizační funkce	51
8	Výsledky optimalizace BnB	53
8.1	Otestování implementace	53
8.2	Výsledek optimalizace věže	55
8.3	Implementace metody BnB	56

8.3.1	Výsledky	57
9	Výsledky optimalizace SA	59
9.1	Nastavení parametrů pro stabilitní posudek	59
9.2	Nastavení parametrů pro optimalizaci	60
9.3	Výsledky optimalizace	60
10	Srovnání výsledků	63
10.1	Porovnání přístupů k optimalizaci příhrad	63
10.2	Porovnání výsledků optimalizace	64
10.3	Posouzení optimalizovaných konstrukcí	64
11	Snížení modularity	67
11.1	Výsledky - <i>Metoda I</i>	68
11.2	Výsledky - <i>Metoda II</i>	69
11.3	Posouzení optimalizovaných konstrukcí	69
12	Závěr	71
A	Appendix	73
A.1	Kroneckerův a Hadamardův součin	73
A.2	Stabilita příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků	74
A.3	Stanovení tuhosti fiktivních prutů	79
A.3.1	Posun na rámové konstrukci	79
A.3.2	Posun na příhradové konstrukci	80
A.3.3	Výsledná tuhost fiktivního prutu	81
A.4	Výstupní soubor z knihovny Gurobi	82
A.5	Stabilitní posudek optimalizované konstrukce	84
	Obsah přiloženého média	103

Seznam obrázků

1	Průmyslová věž se silem	1
2.1	5-prutová 2D příhrada	11
2.2	Příhradová věž	13
2.3	Zatížení vrcholu věže ve směru x - síly v kN	14
2.4	Zatížení vrcholu věže ve směru z - síly v kN	14
2.5	Zatížení věže ve směru y - síly v N	15
3.1	Princip Eulerovy metody: síla F způsobuje druhotný moment na průhybu $w(x)$.	18
3.2	Obecné způsoby vybočení, převzato z (Jandera, 2023)	18
3.3	Zavedení ekvivalentního zatížení, převzato z (Jandera, 2023)	19
3.4	Imperfekce konstrukčního systému, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)	20
4.1	Bisymetrický rámový element	29
5.1	Diagram metody větví a mezí s diskrétními proměnnými	33
5.2	Relaxace proměnné a rozdělení problému	34
5.3	Diagram metody větví a mezí s relaxací - větvení od x_2	35
5.4	Diagram metody větví a mezí s relaxací - větvení od x_1	36
6.1	Rozměrová optimalizace	38
8.1	První tvar vybočení věže bez ztužení jednotlivých pater - půdorysný pohled . . .	56
9.1	Vlastní tvary vybočení konstrukce	62
9.2	Vlastní tvary vybočení konstrukce - pokračování	62
10.1	Porovnání průřezové plochy na prutech u nalezeného optima	65
11.1	Modularita věže	68
A.1	Stanovení tuhosti fiktivního prutu	79

A.2 Průběh momentů - princip virtuálních prací	80
--	----

Seznam tabulek

2.1 Sada profilů	12
3.1 Návrhové hodnoty imperfekcí, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)	20
3.2 Imperfekce konstrukčního systému, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)	22
6.1 Vzpěrné délky pro různé způsoby uložení	47
8.1 Nalezené optimum pomocí metody BnB	57
9.1 Vstupní parametry optimalizační metody SA	60
9.2 Nalezené optimum pomocí metody SA	60
9.3 Srovnání prvních šesti kritických břemen λ	60
9.4 Srovnání MAC koeficientů	61
10.1 Srovnání použitých přístupů k optimalizaci příhrad	63
10.2 Porovnání nalezených optim	64
10.3 Posouzení konstrukce optimalizované <i>Metodou I</i>	66
10.4 Posouzení konstrukce optimalizované <i>Metodou II</i>	66
11.1 Porovnání výsledků pro různou modularitu - <i>Metoda I</i>	69
11.2 Porovnání výsledků pro různou modularitu - <i>Metoda II</i>	69
11.3 Posouzení konstrukce optimalizované <i>Metodou I</i>	70
11.4 Posouzení konstrukce optimalizované <i>Metodou II</i>	70

Rád bych velice poděkoval především vedoucímu této práce, doc. Ing. Matěji Lepšovi, Ph.D., za jeho cenné rady, vstřícnost a pohotovou odbornou pomoc nejen při vytváření této práce, ale i po celou dobu mého studia. Nesmírné díky patří také mé rodině, především rodičům, za jejich podporu v průběhu celého studia. Tato práce vznikla za finanční podpory projektu TAČR FW04020163 (Rozšíření systému HiStruct o možnosti optimalizace na globální stabilitu a analýzy kombinací návrhů).

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 2373 odst. 2 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, ve znění pozdějších předpisů, tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či zpracováním Díla (včetně překladu) licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 4. prosince 2023

.....

Abstrakt

Tato diplomová práce zkoumá globální optimalizaci příhradových konstrukcí s využitím dvou hlavních formulací: Simultánní analýzou a návrhem (SAND) a Vnořenou analýzou a návrhem (NAND). Cílem bylo porovnat výsledky obou formulací a posoudit jejich efektivitu v optimalizaci konstrukcí s použitím příhradových a rámových prvků.

Experimenty byly provedeny na konkrétní příhradové konstrukci, která byla posuzována dle Eurokódu na stabilitní posudek. Metoda větví a mezí (BnB) byla využita pro formulaci SAND, zatímco metoda simulovaného žíhání (SA) byla použita pro formulaci NAND. Metoda BnB vedla k nalezení globálního optima, ale nedostatečně zohledňovala globální stabilitní omezení, což vedlo k nevyhovujícím výsledkům ve stabilitním posudku dle Eurokódu. Naopak metoda SA přinesla konstrukce s vyšším materiálovým objemem a zachováním stability, ale bez nalezení globálního optima.

Dále byl zkoumán vliv modularity konstrukce na dosažené výsledky, a to s různými úrovněmi modularity. Snížením modularity se dosáhlo menšího materiálového objemu, avšak s nárůstem výpočetního času.

Klíčová slova: Příhradové konstrukce, Simultánní analýza a návrh, Vnořená analýza a návrh, Metoda větví a mezí, Metoda simulovaného žíhání, Optimalizace, Globální optimalizace, Globální stabilita

Abstract

This master's thesis explores the global optimization of truss structures using two main formulations: Simultaneous Analysis and Design (SAND) and Nested Analysis and Design (NAND). The objective was to compare the results of both formulations and assess their effectiveness in optimizing structures employing truss and frame elements.

Experiments were conducted on a specific truss structure, evaluated according to Eurocode for stability assessment. The Branch-and-Bound method (BnB) was utilized for the SAND formulation, while the Simulated Annealing method (SA) was employed for NAND formulation. The BnB method led to the discovery of the global optimum but inadequately considered global stability constraints, evaluated according to Eurocode for stability assessment afterwards. Conversely, the SA method yielded structures with a higher material volume while maintaining stability, although without finding the global optimum.

Furthermore, the impact of the structure's modularity on the achieved results was examined, considering various levels of modularity. Reducing modularity resulted in a smaller material volume but with an increase in computational time.

Keywords: Truss structures, Simultaneous analysis and design, Nested analysis and design, Branch and bound method, Simulated annealing method, Optimization, Global optimization, Global stability

Seznam použitých symbolů

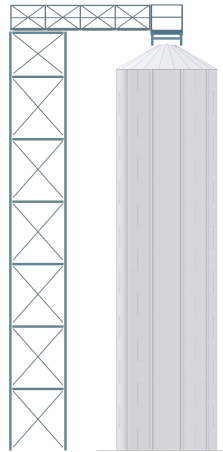
α	Parametr pro uvážení účinků šikmého ohybu
β	Parametr pro uvážení účinků šikmého ohybu
π	Ludolfovo číslo = 3,14159...
α_{cr}	Součinitel kritického zatížení - norma EN1993-1-1
λ	Součinitel kritického zatížení - stabilitní analýza
Δ	Vlastní tvary deformované konstrukce
χ_i	Součinitel vzpěrnosti
ϵ	Poměrné přetvoření
ν	Poissonův součinitel
σ	Napětí
θ	Pootočení
N	Normálová osová síla
H	Vodorovné zatížení
M_y	Návrhový ohybový moment k ose y-y
M_z	Návrhový ohybový moment k ose z-z
N_{cr}	Kritická síla
k_{ij}	Interakční součinitele
L_{cr}	Vzpěrná délka
L	Délka prutu
E	Youngův modul pružnosti
G	Modul pružnosti ve smyku
I	Moment setrvačnosti
I_p	Moment setrvačnosti v kroucení
<i>itter, count</i>	celkový počet itterací
A	Plocha průřezu
MAC	koeficient korelace modální analýzy
\mathbf{f}	Vektor koncových sil
\mathbf{r}	Vektor neznámých přemístění
\mathbf{K}	Matice tuhosti
\mathbf{K}_σ	Matice počátečních napětí

Seznam použitých zkratek

N+M	Interakce tlaku a ohybu
LA	Lineární pružná analýza
LBA	Lineární stabilita
GNA	Geometricky nelineární pružná analýza ideální konstrukce
GNIA	Geometricky nelineární pružná analýza imperfektní konstrukce
MNA	Materiálově nelineární analýza
GMNA	Geometricky i materiálově nelineární analýza
GMNIA	Geometricky i materiálově nelineární analýza imperfektní konstrukce
BnB	Metoda mezí a větví
SA	Metoda simulovaného žíhání
MSÚ	Mezní stav únosnosti
MSP	Mezní stav použitelnosti
LP	Lineární programování
QP	Kvadratické programování
SOCP	Konvexní programování druhého řádu
SLP	Sekvenční lineární programování
SQP	Sekvenční kvadratické programování
SSP	Semidefinitní programování
NLP	Nelineární programování
MMA	Metoda posuvných asymptot
OC	Kritéria optimality
MILP	Smíšené celočíselné lineární programování
MISOCP	Celočíselné kónické programování druhého řádu
NAND	Vnořená analýza a návrh
SAND	Simultánní analýza a návrh

Úvod

Nejen v oblasti stavebnictví se setkáváme s neustále rostoucími nároky na efektivitu a udržitelnost konstrukcí. Jednou z klíčových disciplín, která nám umožňuje dosáhnout takových výsledků, je optimalizace konstrukcí. Optimalizace představuje hledání nejlepšího možného řešení při zachování stanovených omezujících podmínek. Cílem práce bude optimalizace příhradové věže zobrazené na obrázku 1 z hlediska množství použitého materiálu. Tento typ věže bývá často využíván v průmyslových objektech jako podpůrná konstrukce pro lávky, technologie nebo dopravníky. Navrzení optimální konstrukce dává v tomto případě smysl především díky její opakovatelnosti. Nejen, že se tato konstrukce objevuje zpravidla vícekrát v jednom průmyslovém objektu, ale bývá stejná i napříč různými stavbami.



■ **Obrázek 1** Průmyslová věž se sílem

Příhradové konstrukce jsou často využívaným typem nosné konstrukce, kde se předpokládá, že obsahuje pruty, které jsou vzájemně spojeny pomocí styčníků. V mechanické analýze se obecně předpokládá, že tyto styčnický lze idealizovat jako klouby. Takový přístup předpokládá, že vliv

ohybových a kroutících momentů na únosnost celé nosné konstrukce je zanedbatelný s ohledem na velikost normálových sil na jednotlivých prutech. Tento způsob umožňuje nejen posoudit globální stabilitu, ale zároveň přibližuje model reálné konstrukci. Problém ovšem nastává, pokud chceme posoudit globální stabilitu takové konstrukce. Pokud by byly pruty skutečně spojeny klouby a konstrukce byla staticky určitá, stabilita příhradové konstrukce by závisela pouze na vybočení jednoho z prutů této příhrady. V případě ztráty globální stability může dojít ke kolapsu konstrukce jako celku, tedy příspěvky deformací od jednotlivých prutů vedou ke ztrátě stability celé konstrukce. Jedním ze způsobů zavedení globální stability do příhradových konstrukcí je využití rámových prvků. Tato formulace navíc zahrnuje i vlivy ohybových a kroutících momentů, které mohou přispívat ke ztrátě stability.

Formulace optimalizace konstrukcí

V optimalizaci konstrukcí existují tři možné způsoby formulace těchto úloh (J. S. Arora et al., 2005). Prvním přístupem je *vnořená analýza a návrh* (NAND), ve které jsou optimalizační proměnné pouze návrhové proměnné, například zvolený profil prutu. Princip fungování spočívá ve dvou cyklech, vnějším a vnitřním. Na vnějším cyklu běží optimalizační algoritmus, zatímco na vnitřním cyklu jsou řešeny například podmínky rovnováhy daného systému. Druhou možnou formulací optimalizace konstrukcí je *simultánní analýza a návrh* (SAND). S prvními myšlenkami převést omezení optimalizační úlohy na optimalizační proměnné bez omezení přišli autoři článku (SCHMIT et al., 1965). Výhoda SAND spočívá především v převedení obecných omezujících podmínek na optimalizační proměnné a konvexní omezující podmínky. Třetí způsob, který je znám jako *dvoufázová formulace založená na posunech* (the displacement-based two-phase), uvažuje neznámé posuny jako optimalizační proměnné na vnějším cyklu a návrhové proměnné na vnitřním cyklu optimalizace.

Cílem této práce je porovnání dvou formulací optimalizace konstrukcí, SAND a NAND. Optimalizace pomocí formulace SAND je provedena pomocí metody větví a mezí s uvažováním příhradových prvků. Formulace NAND využívá metodu simulovaného žíhání a rámové prvky pro optimalizaci příhrady.

Obsah této práce

Diplomová práce navazuje na mou bakalářskou práci (Glanc, 2022), kde byla příhradová konstrukce optimalizována pomocí formulace NAND metodou simulovaného žíhání s využitím rámových prvků. V této diplomové práci jsem se zaměřil na formulaci SAND metodou mezí a větví

a orovnání s formulací NAND z mé bakalářské práce. Cílem práce je nalezení optimální konstrukce z hlediska minimálního množství použitého materiálu s ohledem na globální stabilitu. Kapitola (2) představuje základní konstrukce, které byly následně optimalizovány. Kapitola (3) se věnuje posouzení stability konstrukcí dle Eurokódu. Kapitola (4) podrobně zkoumá lineární stabilitu konstrukcí. Následuje kapitola (5), která se zaměřuje na metodu větví a mezí, zatímco kapitola (6) prezentuje aplikaci této metody na optimalizaci příhradových konstrukcí. Kapitola (7) se věnuje simulovanému žíhání a jeho aplikaci na optimalizaci s využitím rámových prvků. Kapitola (8) shrnuje výsledky optimalizace metodou větví a mezí. Kapitola (9) prezentuje výsledky optimalizace pomocí simulovaného žíhání. Kapitola (10) se zabývá srovnáním výsledků z obou přístupů a posouzením stability konstrukcí dle Eurokódu. V kapitole (11) je optimalizována konstrukce s nižší modularitou a porovnána s předchozími výpočty. Celkový přehled poskytuje ucelený pohled na výzkum provedený v rámci této diplomové práce.

Kapitola 1

Globální optimalizace konstrukcí

Optimalizace konstrukcí představuje úlohu hledání efektivního návrhu. V praxi se mnohé konstrukce realizují pouze jednou, a v takových případech je často dostačující dosažení lokálního optima. Ovšem existují situace, zejména u univerzálních konstrukcí určených pro opakované použití, kde hledání globálního optima nabývá na významu, jak je to popsáno na příkladu věže v úvodu této práce.

Formulace problému optimalizace konstrukcí má dva možné přístupy - minimalizaci hmotnosti nebo minimalizaci poddajnosti, respektive maximalizaci tuhosti při zachování objemu. V některých případech jsou tyto dva přístupy vůči sobě duální, ale rozhodně to není pravidlem. Domnívám se, že pro praktické využití optimalizace v návrhu staveb je vhodnější přístup s minimalizací hmotnosti, jelikož konstrukční, prostorové či prostě praktické podmínky kladené na stavební konstrukce často znemožňují využití výsledků minimalizace poddajnosti, proto je v této práci využita formulace pomocí minimalizace hmotnosti.

1.1 Typy optimalizací

Při optimalizaci konstrukcí lze podle (Steven, 2003) rozpoznat následující druhy optimalizací:

Topologická optimalizace

z angl. *Topology optimization* hledá optimální tvar konstrukce, který není předem definován, ale závisí na umístění podpěr a zatížení. Cílem této úlohy je nalézt optimální topologii konstrukce (M.P. Bendsøe et al., 2003).

Optimalizace tvaru

z angl. *Shape optimization* pracuje s předem definovaným tvarem konstrukce. Cílem je nalézt tvar konstrukce, který zajistí nejlepší distribuci napětí (M. P. Bendsøe, 1995).

Rozměrová optimalizace

z angl. *Size optimization* se zabývá konstrukcí, kde jsou zadány veškeré okrajové podmínky, včetně tvaru, použitého materiálu, prostředí, zatížení a podpěr. Jedná se o podkategorii topologické optimalizace, kdy v případě topologické optimalizace dochází k odstranění prutů při průřezové ploše blížící se nule. Úkolem je najít kombinaci průřezů profilů jednotlivých prutů za účelem minimalizace hmotnosti při zachování omezujících podmínek. Rozměrová optimalizace může být spojitá nebo diskrétní. Ve spojité variantě jsou průřezové plochy profilů omezeny horní a dolní hranicí. Diskrétní varianta vybírá průřezy ze sady profilů.

Optimalizace skladby

z angl. *Layout optimization* představuje speciální variantu topologické optimalizace (Rozvany et al., 1995). Předpokládá, že pokud se průřezová plocha jednoho z prutů blíží nule, lze tento prvek z konstrukce odstranit. Navíc je možné měnit polohu jednotlivých uzlů pro nalezení optimálního tvaru konstrukce.

Poznamenejme, že tato práce se zaměřuje na rozměrovou optimalizaci příhradových konstrukcí.

1.2 Stav poznání (*State of the Art*)

První průkopník, autor (Michell, 1904), představil příhradovou konstrukci zatíženou jedním zatěžovacím stavem. V konstrukci s minimální hmotností se optimální trajektorie prutů shodují se směry hlavních napětí. To může vést k optimálním návrhům obsahujícím nekonečno takových prutů, což může ztížit výrobu konstrukce. První realizovatelný přístup představil autor (Dorn et al., 1964), který do problému zavedl diskretizaci prostoru do uzlů propojených konečnými prvky. Tento přístup, známý jako diskrétní topologická optimalizace, zkoumá přítomnost a velikost každého prvku.

Autoři (Dorn et al., 1964) využívali formulaci lineárního programování (LP) pro jeden zatěžovací stav, Od té doby však došlo k rozvoji optimalizace příhradových konstrukcí. Autoři (Martin Bendsøe et al., 1991; W. Achziger et al., 1992) představili formulaci, která díky kvadra-

tickému programování (QP) umožňuje více zatěžovacích stavů. Tato formulace využívá konvexního návrhu na základě posunů. Duální problém této formulace byl poprvé ukázán (Lobo et al., 1998; Ben-Tal et al., 2001), což umožnilo použití průřezových charakteristik jako návrhových proměnných. Řešení této formulace spočívalo v použití konvexních optimalizačních metod, například kvadratického programování (QP) nebo konvexního programování druhého řádu (SOCP) (M. Tyburec et al., 2019; Wolfgang Achtziger et al., 2008).

Pro rámové prvky, kde pruty mají ohybovou tuhost, je situace podstatně složitější. Ve stávajících materiálech nebyla nalezena formulace s konvexními omezujícími podmínkami, která by zajišťovala nalezení globálního optima. Všechny dostupné formulace se zaměřují na nalezení lokálních optim, ať už pomocí Sekvenčního lineárního programování (SLP), jak navrhuje autor (Saka, 1980) pro minimalizaci hmotnosti rámové konstrukce, nebo s využitím Sekvenčního kvadratického programování (SQP) podle formulace autorů (Wang et al., 2006). Pro volné kmitání byla vyvinuta metoda autory (Yamada et al., 2016), která ke hledání optimálního řešení využívá sekvenčního Semidefinitního programování (SSP). V posledních letech jsou také využívány alternativy, jako jsou Nelineární programování (NLP) (Fredricson et al., 2003), Kritéria optimality (OC) (Khan, 1984; Chan et al., 1995), Metoda posuvných asymptot (MMA) (Fredricson, 2005; Svanberg, 1987), nebo metaheuristiky, jak je popsáno v (An et al., 2017). Je důležité podotknout, že tyto přístupy nezaručují teoretické nalezení globálního optima.

Možným přístupem ke globální optimalizaci rámových konstrukcí je formulace problému uvedená v práci (Murota et al., 2010). Tato formulace využívá hierarchii relaxace Semidefinitního programování pro optimalizaci rámových konstrukcí. Je však důležité zdůraznit, že konvergence účelové funkce je zaručena pouze teoreticky (Kojima; Muramatsu, 2007; Marek Tyburec; Zeman et al., 2021) a v případě více globálních optim můžou být některá řešení neznámá.

Existuje řada jiných formulací, které se snaží najít globální optimum v problému optimalizace rámových konstrukcí. Pro diskrétní problém optimalizace rámu, což zahrnuje výběr návrhových proměnných ze sady průřezů, lze využít metodu větví a mezí. Tento přístup je například použit v pracích (Kureta et al., 2014; Hirota et al., 2015; Van Mellaert et al., 2018), kde je formulace této metody vyjádřena jako celočíselné lineární programování (MILP). Další možná formulace spočívá v řešení celočíselného kónického programování druhého řádu (MISOCP), které představil autor (Kanno, 2016). Tato formulace se však zaměřuje na maximalizaci tuhosti rovinného rámu a nepředstavuje rozměrovou optimalizaci.

V případě spojitě optimalizace rámových konstrukcí bylo možné najít pouze tři možné přístupy. První přístup řeší minimalizaci hmotnosti s omezujícími podmínkami ve formě posunů tím, že autor (Toragay et al., 2022) převede problém na celočíselné programování s kvadratickými omezeními. Tato formulace má ovšem značná omezení, což omezuje použitelnost této metody.

Druhým přístupem ve spojitě optimalizaci rámových konstrukcí je řada relaxací pro formulaci problému využívající sumu čtverců (SOS) pro specifické polynomiální semidefinitní programování (Kojima, 2003; Murota et al., 2010). Ovšem tento způsob v případě více globálních optim nezaručuje nalezení všech. Třetí možná formulace je představena autory (Marek Tyburec; Kočvara et al., 2023). Tento přístup využívá relaxaci Lasserrovou hierarchií k výpočtu globálních minimalizátorů. Tímto vytváří dolní a horní mez hledaného řešení pomocí polynomiálního programování. Autoři v práci ukazují, že toto řešení vede k hledanému globálnímu optimu, ale výpočetní náročnost limituje tento přístup pouze na malé úlohy.

V závěru lze tedy konstatovat, že v oblasti rozměrové optimalizace rámových konstrukcí, podle aktuálního poznání, neexistuje dosud známá formulace vhodná pro konstrukce reálných velikostí. Tento nedostatek znamená, že pro dosažení optimálních rozměrů je třeba momentálně přijmout přístup hledání lokálních optim pomocí heuristických metod. Vzhledem k neustálému rozvoji v oblasti optimalizace konstrukcí je možné očekávat, že budoucí práce mohou přinést nové formulace a metody pro rozměrovou optimalizaci rámových konstrukcí.

1.3 Optimalizaci příhradových konstrukcí se zahrnutím stability

Při optimalizaci příhradových konstrukcí hraje významnou roli pevnost jednotlivých prutů. V případě tažených prutů je situace jednoduchá, jelikož únosnost takového prutu závisí pouze na normálovém napětí. U tlačných prutů však hraje významnou roli vzpěr, tedy stabilita, jednotlivých prutů. Proto by mělo být do formulace optimalizace zaveden vliv stability. U příhradových konstrukcí bývá často jako návrhová proměnná uvažována plocha průřezu, ale vzpěr prutu závisí také na tvaru průřezu, proto je potřeba tuto informaci zavést do formulace problému. V případě vzpěru je důležitou průřezovou charakteristikou moment setrvačnosti průřezu. U jednoduchých symetrických průřezů, například kruhových, lze vyjádřit moment setrvačnosti pomocí plochy průřezu. U složitějších průřezů se moment setrvačnosti musí aproximovat, nebo se do formulace musí zavést více proměnných, aby bylo možné určit správnou pevnost ve vzpěru.

Existuje i elementární způsob, jak lze vliv vzpěru zavést do optimalizace příhradových konstrukcí pomocí konstantní redukce pevnosti v tlaku. Nicméně volba této redukce je velice obtížná, protože příliš nízká redukce nezabrání ztrátě pevnosti vlivem vzpěru a naopak příliš velká redukce povede k masivním průřezům na tlačných prutech.

V případě konvenční formulace optimalizace NAND zavedení takových omezení může vést k nekonvexnímu omezení problému (Cheng et al., 1992). Navíc se kvůli vzpěrným omezujícím podmínkám stává proveditelná množina ještě nesouvislejší. Tento problém může být vyřešen rela-

xací ϵ (Guo et al., 2001), ale stále zde zůstává problém s nekonvexními omezujícími podmínkami, které znemožňují nalezení globálního optima (Stolpe et al., 2001).

Zajímavý přístup k vlivu vzpěru na optimalizaci příhradových konstrukcí představuje autor (Mela, 2014), který využívá simultánní formulaci optimalizace SAND, která vede ke smíšenému celočíselnému lineárnímu programování (MILP). Tato formulace problému obsahuje pouze lineární výrazy a formulace umožňuje nalezení globálního optima deterministickými metodami (Floudas, 2013). Zpravidla bývá vzpěr zaveden pomocí Eulerova kritického břemena, ale autor (Mela, 2014) navíc ukazuje přístup, jakým je možné zavést do optimalizace vliv vzpěru převzatý z norem AISC nebo Eurokódu.

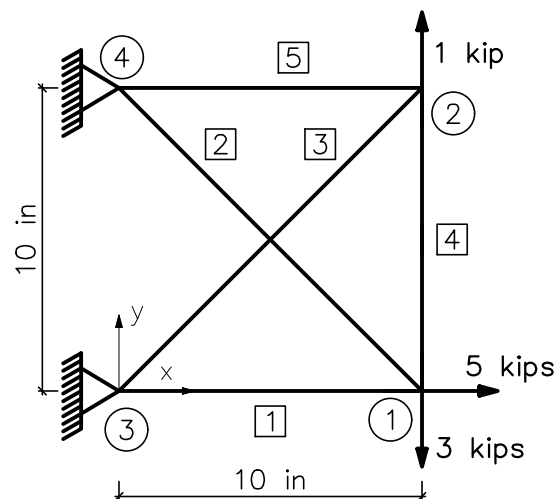
Zavedení globální stability do optimalizace příhradových konstrukcí představilo již několik autorů (Rozvany, 1996; Kočvara, 2002), kde bylo ukázáno, že vliv globální stability na optimalizaci příhradových konstrukcí je významný. Problém ovšem nastává, pokud chceme globální stabilitou zachytit lokální vybočení prutu. Navrhované řešení prezentují autoři (Torii et al., 2014). Hlavní výhoda tohoto přístupu spočívá v zajištění globální i lokální stability bez použití Eulerovy rovnice, čímž se formulace vyhýbá mnohými obtížím způsobených právě tímto přístupem. Myšlenka tohoto přístupu spočívá ve využití rámových prvků, tedy prvků přenášející ohybové a kroticí momenty společně s osovými silami. Rozsáhlá diskuze v díle (McGuire et al., 2000) představuje způsob využití rámových prvků při návrhu příhradových konstrukcí. Způsob stanovení stability příhradových konstrukcí pomocí rámových prvků je vysvětlen v kapitole 4. Předchozí práce (Evgrafov, 2005; Kočvara, 2002) zabývající se optimalizací s omezeními na zachování stability navrhuje použití semidefinitního programování pro řešení globální stability. V rámci této práce zvolím pro optimalizaci příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků metodu simulovaného žíhání (Lepš, 2000), která je jednou z heuristických optimalizačních metod.

Kapitola 2

Optimalizované konstrukce

Tato kapitola je zaměřena na představení dvou konstrukcí. První část kapitoly se věnuje podrobnému popisu testovací konstrukce, která byla použita k ověření správnosti zvolených postupů. Následně se zaměřuji na konkrétní zadanou věž, která tvoří hlavní část mé práce. Tato kapitola představuje výchozí bod pro následující analýzy a optimalizační postupy provedené v rámci diplomové práce.

2.1 Testovací konstrukce



■ Obrázek 2.1 5-prutová 2D příhrada

■ **Tabulka 2.1** Sada profilů

Jméno	Typ	A [m ²]	I_y [m ⁴]	I_z [m ⁴]	I_t [m ⁴]
CS1	SHS 25/25/2,0	1,740E-04	1,480E-08	1,480E-08	2,530E-08
CS2	SHS 40/40/2,0	2,940E-04	6,940E-08	6,940E-08	1,130E-07
CS3	SHS 50/50/2,0	3,740E-04	1,410E-07	1,410E-07	2,260E-07
CS4	SHS 50/50/2,5	4,590E-04	1,690E-07	1,690E-07	2,750E-07
CS5	SHS 50/50/3,0	5,410E-04	1,950E-07	1,950E-07	3,210E-07
CS6	SHS 100/100/3,0	1,140E-03	1,770E-06	1,770E-06	2,790E-06
CS7	SHS 100/100/4,0	1,490E-03	2,260E-06	2,260E-06	3,620E-06
CS8	SHS 100/100/5,0	1,840E-03	2,710E-06	2,710E-06	4,410E-06
CS9	SHS 100/100/6,0	2,160E-03	3,110E-06	3,110E-06	5,140E-06

Při ověřování a vytváření optimalizačních metod je klíčové zajistit správnou implementaci těchto postupů. K tomuto účelu slouží testovací konstrukce, u kterých již známe nalezené optimum. Většina těchto konstrukcí zahrnuje různé modifikace; přehled některých z nich je uveden v (Adéla Pospíšilová, 2012).

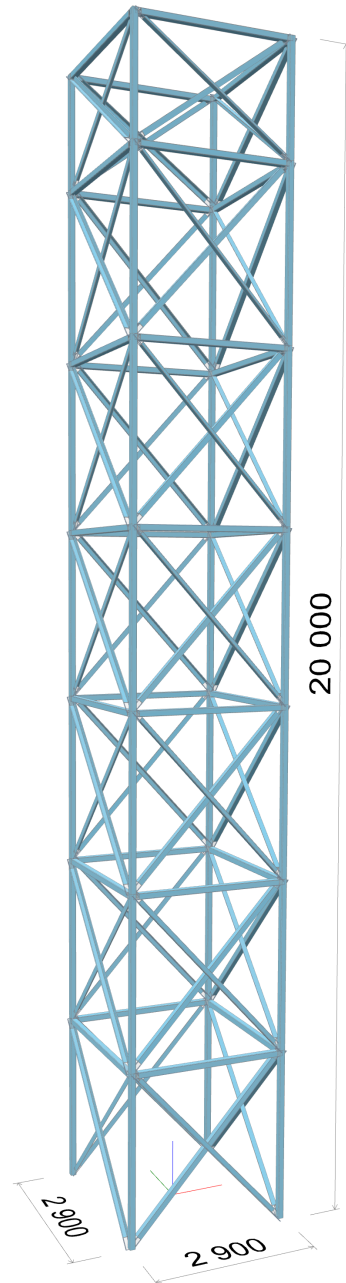
Některé testovací konstrukce nejsou pro svou velikost vhodné pro počáteční implementaci, a proto byla zvolena jednodušší konstrukce převzatá z (Adéla Pospíšilová, 2012; A. Pospíšilová et al., 2013). Tato konstrukce je zobrazena na obrázku 2.1 a obsahuje čtyři uzly a pět prutů, příčměž křížící pruty jsou uvažovány jako mimoběžné. Materiál konstrukce je hliník s hustotou 0,1 lb/in³ a s Youngovým modulem pružnosti 10⁴ ksi. V úloze jsou omezující podmínky ve formě omezení maximálních napětí ±60 ksi a posunů uzlů v obou směrech ±0,06 in. Sada profilů pro diskrétní optimalizaci obsahuje profily od 0,01 až 0,1 in² s inkrementem 0,01 in². Na této konstrukci bude testována optimalizace s využitím příhradových prvků.

Implementaci optimalizace a stability s využitím rámových prvků jsem již otestoval a srovnal na několika příkladech v (Glanc, 2022; Glanc, 2023)

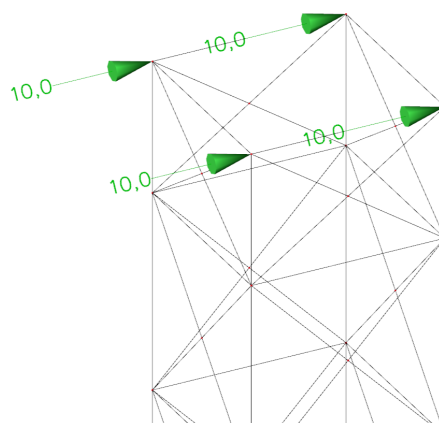
2.2 Zadaná konstrukce

Po otestování mé implementace optimalizace na testovacích konstrukci je provedena optimalizace na zadané konstrukci, kterou představuje ocelová věž. Typické využití věže je jako nosné konstrukce lávek, schodišť a technologických zařízení pro zemědělské stavby, například sila. Věž je 20 metrů vysoká a je složena z šesti modulů o rozměrech 2,9 × 2,9 × 3,0 m a jednom modulu o velikosti 2,9 × 2,9 × 2,0 m. Pruty na konstrukci jsou rozděleny do tří skupin - sloupy, příčle a diagonály, příčměž průřezy jsou vybírány ze sady čtvercových trubek z tabulky 2.1.

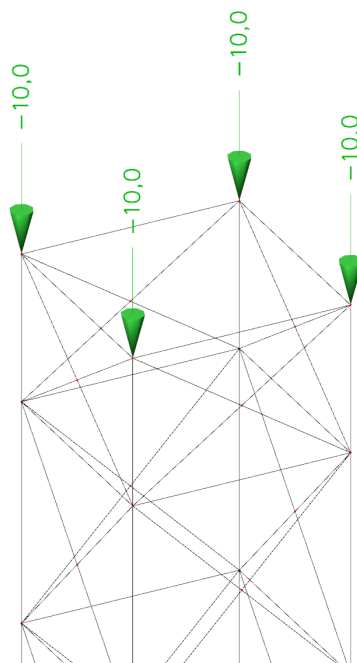
Materiál je pro všechny skupiny společný, ocel S235 s mezí kluzu $f_y = 235$ MPa, Youngovým modulem pružnosti $E = 210$ GPa a s Poissonovým součinitelem $\nu = 0,3$. Zatížení konstrukce je v podobě osamělých sil na všech čtyřech styčnicích na vrcholu věže ve směru z $F_z = -10$ kN a ve



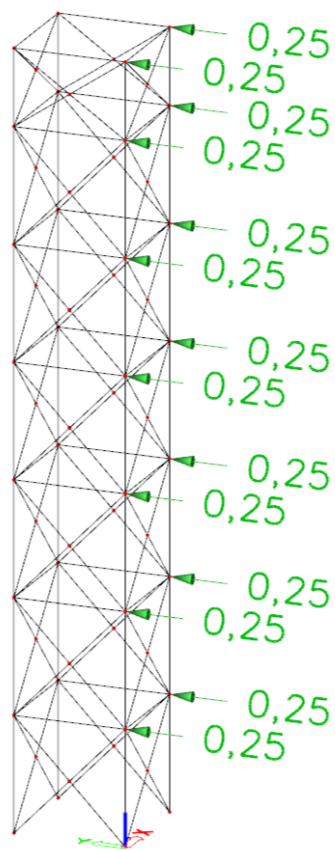
■ Obrázek 2.2 Příhradová věž



■ Obrázek 2.3 Zatížení vrcholu věže ve směru x - síly v kN



■ Obrázek 2.4 Zatížení vrcholu věže ve směru z - síly v kN



■ Obrázek 2.5 Zatížení věže ve směru y - síly v N

směru x $F_x = 10$ kN zobrazené na obrázku 2.3 a 2.4. Zároveň je konstrukce zatížena ve směru y na boku věže ve všech styčnicích silami $F_y = 0,00025$ kN, které simulují zatížení od větru na obrázku 2.5. Je uvažován pouze jeden zatěžovací stav, který obsahuje všechno zmíněné zatížení. Konstrukce obsahuje 32 styčníků, 112 prutů a ve spodních styčnicích je věž uložena na 4 pevné klouby.

Kapitola 3

Posouzení stability dle Eurokódu

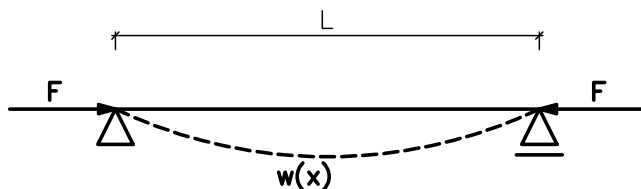
Druhá kapitola se zaměřuje na detailní posouzení stability konstrukcí v souladu s Eurokódem. Představuje postupy založené na normách a podrobně vysvětluje různé přístupy, včetně elastické a plastické analýzy a teorií I. a II. řádu. Tato kapitola slouží jako referenční základ pro následné posouzení stability specifikované věže v rámci diplomové práce.

3.1 Úvod

Vliv stability na návrh ocelové prutové konstrukce narůstá se štíhlostí jednotlivých prutů a množstvím imperfekcí zavedených do konstrukce. Pro posouzení stability a modelování prutových ocelových konstrukcí tato práce vychází z Eurokódu EN 1993-1-1, ve kterém jsou popsány základní principy pro prutové soustavy. V této kapitole nejprve představím problematiku stability na jednotlivých prutech a poté nastíním, jak by se řešily celé prutové soustavy.

3.2 Stabilita a únosnost prutu

Štíhlý prut namáhaný tlakovou silou může selhat vlivem ztráty stability. Nejjednodušší případem je ideální prut bez imperfekcí, dokonale přímý, zatížený centricky. V takovém případě by při lineární analýze nedošlo ke ztrátě stability a prut by přenášel pouze tlak. Ve skutečnosti vždy k nějaké odchylce ve tvaru či umístění zatížení dochází, proto je nutné stabilitu posuzovat. Řešení stability prutu je možné hned dvěma způsoby. Známější postup je *Geometrická metoda*, známá také jako *Eulerova metoda*. Metoda využívá k výpočtu kritické síly potřebné pro vybočení prutu řešení diferenciální rovnice ohybové čáry, která je zobrazena na obr. 3.1, a aproximaci této čáry sinovou funkcí. Kompletní způsob výpočtu pomocí této metody je uveden v mé bakalářské práci

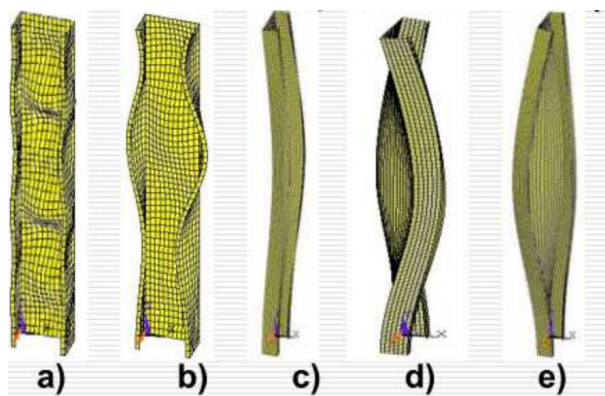


■ **Obrázek 3.1** Princip Eulerovy metody: síla F způsobuje druhotný moment na průhybu $w(x)$

(Glanc, 2022). Druhým způsobem řešení stability prutu je *Ritzova metoda*, která je založená na porovnání energie vnitřních a vnějších sil (Šejnoha, 1998).

3.2.1 Způsob vybočení

Způsobů vybočení v důsledku ztráty stability je hned několik. Lze je rozdělit na dvě skupiny, na lokální a globální vybočení. Mezi lokální vybočení patří lokální boulení (a) a distorzní vybočení (b) viz obr.3.2. Jako globální způsob vybočení prutu lze označit rovinný vzpěr (obrázek c), vzpěr kroucením (obrázek d) a prostorový vzpěr (obrázek e). V případě uzavřených průřezů dochází k redukci způsobu vybočení o prostorový vzpěr a vzpěr kroucením.



■ **Obrázek 3.2** Obecné způsoby vybočení, převzato z (Jandera, 2023)

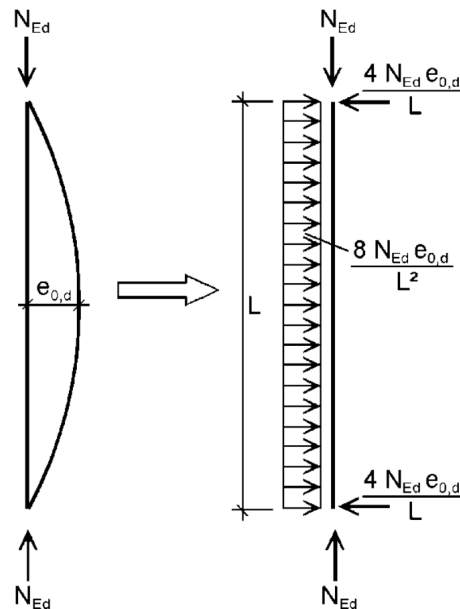
3.2.2 Imperfekce

Postup dle Eurokódu zavádí dva druhy imperfekcí. Prvním typem jsou imperfekce konstrukční, které představuje především reziduální pnutí. Druhým typem jsou geometrické imperfekce, kde

se vyskytují jak imperfekce jednotlivých prutů, tak i imperfekce celé soustavy. Příkladem geometrických imperfekcí je například počáteční prohnutí prutu či počáteční náklon sloupů.

Zavedení imperfekcí jednotlivých prutů do výpočtu

Existuje několik způsobů jak zohlednit imperfekce prutů. Nejpřesnějším způsobem, jakým lze imperfekce zavést, je vymodelování jednotlivých prutů s již počáteční deformací danou poměrem ke vzpěrné délce. Druhým způsobem zavedení imperfekcí je převedení počátečního zakřivení na náhradní spojité zatížení, které způsobí stejnou počáteční deformaci. Nicméně abychom do modelu nepřidávali zatížení, které by mělo vliv na vnitřní síly, je nutné toto zatížení eliminovat příslušnými reakcemi na koncích imperfektního prutu. Princip zavedení tohoto zatížení je zobrazen na obr. 3.3, kde N_{Ed} je návrhová normálová síla, $e_{0,d}$ je návrhová hodnota imperfekce a L je délka prutu. Třetí způsob, který je možné použít v případě nepřímého řešení stability, je



■ **Obrázek 3.3** Zavedení ekvivalentního zatížení, převzato z (Jandera, 2023)

zohlednění imperfekcí pomocí součinitelů vzpěrnosti použitých při posouzení. Stanovení velikosti počáteční imperfekce je v EN 1993-1-1 pomocí tabulky 3.1, kde velikost imperfekce e_o závisí na typu analýzy a dané křivce vzpěrnosti, která je ovlivněna průřezem prutu.

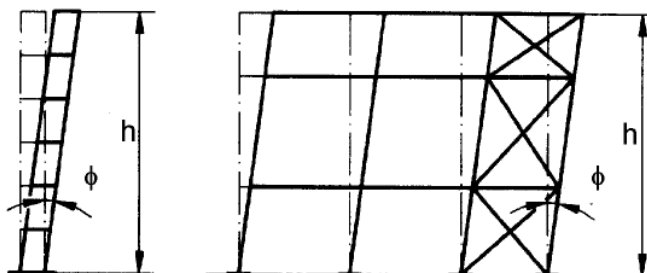
Zavedení imperfekcí konstrukčního systému do výpočtu

Imperfekce celé soustavy jsou zavedeny jako počáteční náklon konstrukce viz obr. 3.4. Náklon je ovlivněn základní hodnotou náklonu, která je stanovena normou na hodnotu $\phi_0 = \frac{1}{200}$. Tato

■ **Tabulka 3.1** Návrhové hodnoty imperfekcí, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)

Křivka vzpěrné pevnosti podle EN1993-1-1 tab. 6.2	pružnostní analýza e_0/L	plasticitní analýza e_0/L
a_0	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

hodnota je poté redukována v závislosti na počtu sloupů v řadě α_m a výšce jednotlivých sloupů součinitelem α_h . Redukce se pak provede pomocí rovnice $\phi = \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$. Zavedení do globální



■ **Obrázek 3.4** Imperfekce konstrukčního systému, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)

analýzy se pak provede například pomocí vymodelování konstrukce s náklonem. Případně obdobně jako u prutů lze tento náklon převést na ekvivalentní zatížení pomocí vodorovných sil. Tento způsob je pro zatěžovací stavy s tlakem v sloupech bezpečný a konzervativní. Navíc norma udává podmínku, která při splnění umožňuje zanedbat tento počáteční náklon. Tato podmínka je ve tvaru $H_{Ed} \geq 0,15 \cdot V_{Ed}$, kde H_{Ed} představuje celkové vodorovné návrhové zatížení - tzv. patrový smyk, V_{Ed} představuje celkové svislé zatížení rámu přenesené patrem - tzv. patrový tlak.

3.3 Interakce tlaku a ohybu

V předchozí části této kapitoly jsme uvažovali zatížení jednotlivých prutů pouze tlakem. Jelikož uvažujeme příhradovou konstrukci jako konstrukci složenou z rámových prvků, je nutné uvažovat, že je prut zatížen kombinací ohybu a osové tlakové síly. Míru interakce těchto vnitřních sil ovlivňuje nejen štíhlost prutu, ale i tvar ohybového momentu. V této části kapitoly nejprve představím základní formulace a postupy pro stanovení únosnosti průřezu a poté představím formulaci interakce N+M a její řešení normou EN 1993-1-1.

3.3.1 Únosnost průřezu

Průřezy třídy 1 a 2

Pro šikmý ohyb lze použít rovnici 6.41 z EN 1993-1-1, která je ve tvaru

$$\left[\frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Ed}} \right]^\alpha + \left[\frac{M_{z,Ed}}{M_{N,z,Ed}} \right]^\beta \leq 1 \quad , \quad (3.1)$$

kde α a β jsou konstanty, které lze konzervativně uvažovat rovné hodnotě 1, nebo je lze stanovit pomocí rovnic:

- pro I a H průřezy: $\alpha = 2; \beta = 5 \cdot n$
- pro kruhové duté průřezy: $\alpha = 2; \beta = 2$
- pro pravoúhlé duté průřezy: $\alpha = \beta = \frac{1,66}{1-1,13 \cdot n^2}$, ale $\alpha = \beta \leq 6$

kde $n = N_{Ed}/N_{pl,Rd}$ a $M_{N,y,Rd} = M_{N,z,Rd} = M_{pl,Rd} \cdot (1 - n^{1,7})$.

Průřezy třídy 3

Když nepůsobí smyková síla, pro průřezy třetí třídy platí rovnice pro největší podélné normálové napětí

$$\sigma_{x,Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad , \quad (3.2)$$

kde $\sigma_{x,Ed}$ je návrhová hodnota místního podélného napětí od momentu a osově síly, kterou lze určit pomocí EN 1993-1-1. Výsledná rovnice s uvažováním těchto vnitřních sil je poté ve tvaru

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{el,y,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{el,z,Rd}} \leq 1 \quad . \quad (3.3)$$

Průřezy třídy 4

Obdobně jako pro průřezy třetí třídy je v případě průřezu třídy čtyři nutné splnit podmínku pro největší podélné normálové napětí pomocí rovnice 3.2. Výsledná rovnice je poté ve tvaru

$$\frac{N_{Ed}}{A_{eff} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}} + \frac{M_{y,Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Ny}}{W_{eff,y,min} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}} + \frac{M_{z,Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Nz}}{W_{eff,z,min} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}} \leq 1 \quad (3.4)$$

3.3.2 Interakce N+M dle EN 1993-1-1

Pro posouzení interakce N+M je nutné splnit dvě rovnice dané normou EN 1993-1-1, které zavádějí vliv vzpěrnosti a klopení na celkovou únosnost prutu. Tyto rovnice jsou ve tvaru

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad , \quad (3.5)$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad . \quad (3.6)$$

Kde N_{Rk} , $M_{y,Rk}$ a $M_{z,Rk}$ se vypočte pomocí tabulky 3.2 převzaté z normy EN 1993-1-1. Tato tabulka zobrazuje rozdíly výpočtu pro různé třídy průřezu. Pro kompletní posouzení je ovšem nutné, aby byla splněna i únosnost průřezu definovaná v předchozí části této kapitoly.

■ **Tabulka 3.2** Imperfekce konstrukčního systému, převzato z (EN-1993-1-1, 2005)

Třída průřezu	1	2	3	4
A_i	A	A	A	A_{eff}
W_y	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$
W_z	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$
$\Delta M_{y,Ed}$	0	0	0	$e_{N,y} N_{Ed}$
$\Delta M_{z,Ed}$	0	0	0	$e_{N,z} N_{Ed}$

Pro výpočet interakčních součinitelů k_{yy} , k_{zy} , k_{yz} a k_{zz} připouští Eurokód dvě různé metody. Tyto součinitele zavádějí vliv druhého řádu a jsou stanoveny pomocí součinitelů ekvivalentního momentu. Označení těchto součinitelů $k_{i,j}$ je pomocí dvou indexů, kde i představuje osu ke které dojde k vybočení a j představuje osu ohybu momentu.

3.3.3 Stanovení interakčních součinitelů metodou 1

Tato metoda je založená na základních rovnicích, kvůli tomu je obecná a přesná. Poprvé byla představena v článku (Boissonnade et al., 2004) a následně použita v Eurokódu. Kompletní způsob stanovení interakčních součinitelů a součinitelů potřebných pro jejich výpočet je uveden v EN 1993-1-1 v příloze A.

3.3.4 Stanovení interakčních součinitelů metodou 2

Hlavní přínos této metody je především v jednoduchosti výpočtu, navíc pro běžné případy je dostatečně přesná a proto je preferována u většiny výpočtů. Metoda je založená na řadě experimentů a empirických vzorců, které vedou k výpočtu těchto součinitelů. Kompletní způsob stanovení je také uveden v EN 1993-1-1 v příloze B.

3.4 Stabilita prutových konstrukcí

Prvním krokem v stabilitě konstrukcí je výpočet vnitřních sil. Existuje hned několik analýz, které slouží k výpočtu těchto sil. Tyto analýzy se dají rozdělit na dvě skupiny, pružnou a plastickou. Zároveň je možné tyto skupiny rozdělit na výpočet podle teorie I. nebo II. řádu.

První řád

První řád představuje nejjednodušší způsob výpočtu, kde rovnice rovnováhy jsou sestaveny na nedeformované konstrukci. Vliv druhého řádu, tedy deformace konstrukce a následná změna vnitřních sil, je zanedbatelná, nebo je zavedena jiným způsobem. Možné zavedení tohoto vlivu je například pomocí zvětšeného vodorovného zatížení, součinitele vzpěrnosti a nebo pomocí interakčního součinitele.

Druhý řád

U druhého řádu neplatí princip superpozice a navíc je nutné sestavit podmínky rovnováhy na zdeformované konstrukci. Například u rámu dochází jednak k náklonu konstrukce, který zpravidla způsobí snížení tuhosti rámu. Zároveň může docházet k vybočení jednotlivých štíhlých sloupů, což může také ovlivnit tuhost jednotlivých prutů.

Pružná globální analýza

Pružnostní analýzou lze stanovit vnitřní síly bez požadavků na tažnost a rotační kapacitu. Další výhodou je univerzálnost této metody, která zajišťuje použitelnost pro všechny konstrukce z běžné konstrukční oceli. Proto se jedná o nejpoužívanější a nejběžnější postup v současné i minulé době.

Typy pružnostní analýzy:

- LA - lineární pružná analýza
- LBA - lineární stabilita
- GNA - geometricky nelineární pružná analýza ideální konstrukce
- GNIA - geometricky nelineární pružná analýza imperfektní konstrukce

Plastická globální analýza

Plastická analýza má hned několik omezení, ať už v požadavcích na tažnost, nebo v nutnosti posouzení parametrů materiálu, jednotlivých přípojků, či tvaru a třídy průřezu. Ovšem tato značná

omezení přinášejí možnost většího využití konstrukce v případech, kdy rozhodujícím faktorem je mezní stav únosnost (MSÚ). Typy plasticitní analýzy:

- MNA - materiálově nelineární analýza
- GMNA - geometricky i materiálově nelineární analýza
- GMNIA - geometricky i materiálově nelineární analýza imperfektní konstrukce

3.4.1 Lineární stabilitní výpočet

Pro použití této metody je nutné dodržení několika počátečních podmínek. Veškeré pruty musí být přímé a s konstantním průřezem a tuhostí. Zároveň musí být dodrženo, že veškeré průběhy normálových sil jsou konstantní a jsou uvažovány pouze osově síly. Vnější zatížení je jednoparametrické a je zavedeno pouze ve styčnicích. Postup výpočtu spočívá nejprve v lineární výpočtu vnitřních sil a následně sestavení stabilitní podmínky. Výsledkem tohoto výpočtu je poté tvar vybočení konstrukce, stanovení kritického zatížení a dopočetní kritické délky L_{cr} pro celou konstrukci. Tato proměnná závisí na jediném parametru $\alpha_{cr} = N_{cr}/N_{Ed}$, který je konstantní pro celou konstrukci a představuje nejmenší absolutní hodnotu součinitelů kritického zatížení λ , tedy $\alpha_{cr} = \min |\lambda|$. Určení vzpěrné délky je poté možné stanovit pomocí rovnice

$$L_{cr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} \quad , \quad (3.7)$$

kde $N_{cr} = \alpha_{cr} \cdot N_d$, α_{cr} je součinitel kritického zatížení, E je Youngův modul pružnosti a I je moment setrvačnosti. Tyto výsledky lze zároveň využít pro jiné způsoby analýzy konstrukce. Vlastní tvar vybočení lze použít pro stanovení počáteční deformace. Zároveň tento výpočet slouží k určení míry vlivu druhého řádu. Ovšem platnost řešení pomocí této analýzy je omezena nutností řešit jednotlivé kombinace zatížení zvlášť. Další podstatným omezením je skutečnost, že vybočení je iniciováno u nejkritičtějšího prutu.

3.4.2 Nelineární pružná analýza

Tento způsob analýzy je řešen podle teorie II. řádu, tedy zavádí vliv malých přetvoření do výpočtu. Výhody této analýzy spočívají především v hledání přímého řešení pružné stability. Ovšem jak již bylo zmíněno, u výpočtu druhého řádu již neplatí princip superpozice, proto je zpravidla nutné použít pro výpočet software, který je potenciálně schopný provést analýzu pro velké množství kombinací zatížení.

3.4.3 Stabilita konstrukcí dle druhého řádu

Pro přímé řešení prutové soustavy je dle normy EN 1991-1-3 nutné zavést vliv druhého řádu, pokud je jejich vliv na vnitřní síly nezanedbatelný. Pro posouzení vlivu na vnitřní síly je využíván parametr α_{cr} , pro který jsou v normě stanoveny dvě limitní hodnoty. Pro pružnostní analýzu platí, že lze zanedbat vliv druhého řádu pokud je $\alpha_{cr} \geq 10$. Pro analýzu plasticitní je hodnota stanovena na $\alpha_{cr} \geq 15$. V případě, že $\alpha_{cr} < 10$, resp. $\alpha_{cr} < 15$, je nutné výpočet vnitřních sil provést podle teorie druhého řádu. Pokud dojde ke splnění těchto podmínek, je možné uvažovat, že nedojde k vybočení konstrukce. Ovšem posudek jednotlivých izolovaných prutů na stabilitu se konzervativně uvažuje pro systémové délky. Pokud je $\alpha_{cr} \leq 25$, je výpočet ještě více zjednodušen, protože je možné pro rovinu vybočení příslušného vlastního tvaru provést posudek pouze pro prostý tlak. Pokud $\alpha_{cr} \leq 1$, pak je konstrukce pro zadané zatížení nestabilní.

Pokud tato podmínka splněna není, je nutné tyto vlivy uvažovat. Obecně jsou známé tři možné způsoby řešení.

Geometricky nelineární řešení imperfektní konstrukce

V této analýze jsou zavedeny jednak imperfekce jednotlivých prutů, tak imperfekce celé konstrukce. Účinky druhého řádu jsou zohledněny ve vnitřních silách. Posudek je proveden na prostý tlak a prostý ohyb. Zpravidla se tato analýza provádí pouze pro rovinné modely, kde je ovšem zahrnut vliv klopení a vybočení z roviny. Prostorové modely nejsou v EC3 řešeny, protože nejsou běžně využívány.

Geometricky nelineární řešení s pouze globální imperfekcí

Zavedené imperfekce v modelu jsou pouze imperfekcemi celé soustavy a nejsou proto zohledněny imperfekce jednotlivých prutů. Výpočet vnitřních sil se provede s vlivem druhého řádu, ovšem norma zavádí i alternativní přístup pro $\alpha_{cr} \geq 3$, kdy lze přibližně stanovit účinek druhého řádu zvětšením účinku vodorovných sil poměrem daným rovnicí

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}} \quad (3.8)$$

Při posouzení jednotlivých prutů se využije systémových délek prutů a součinitelů vzpěrnosti, čímž se zohlední imperfekce jednotlivých prutů, které nejsou zahrnuty v samotném modelu konstrukce.

Soustava prutů bez imperfekcí řešená lineárním výpočtem

V tomto způsobu řešení stability nejsou zavedené žádné imperfekce. Výpočet je proveden bez ohledu na α_{cr} a vnitřní síly jsou řešeny prvním řádem. Vzpěrné délky posuzovaného prutu jsou stanoveny s ohledem na globální vybočení a stanoví se pomocí α_{cr} pro posuzovaný prut a pro rozhodující kombinaci zatížení pomocí rovnice

$$L_{cr} = \pi * \sqrt{\frac{E \cdot I}{\alpha_{cr,i} \cdot N_{Ed}}} \quad . \quad (3.9)$$

3.4.4 Způsoby řešení prutových konstrukcí dle EN

Dle Eurokódu lze konstrukce posuzovat třemi způsoby, kde každý způsob má určitá omezení pro použití na různé konstrukce.

Metoda 1 - s imperfekcemi soustavy

Imperfekce soustavy jsou stanoveny podle EN1993-1-1 5.2.2(3)b). Posouzení vzpěru a klopení se provede ručně dle EN1993-1-1 5.2.2(7)b) s využitím redukčních součinitelů χ . Výpočet vnitřních sil je nutné podle teorie druhého řádu při nesplnění podmínky $\alpha_{cr} \geq 10$.

Metoda 2 - metoda ekvivalentních prutů

Imperfekce a účinky druhého řádu jsou stanoveny dle EN1993-1-1 5.2.2(3)c). Vzpěr a klopení se posoudí ručně dle EN1993-1-1 5.2.2(8) s využitím tvaru globálního vybočení. Vnitřní síly jsou stanoveny bez ohledu na α_{cr} .

Metoda 3 - Přímé řešení II. řádem

Imperfekce a účinky druhého řádu jsou řešeny dle EN1993-1-1 5.2.2(3)a). Posouzení jednotlivých prutů je možné zanedbat pokud splňuje EN1993-1-1 5.2.2(7)a). V této metodě jsou zavedeny imperfekce soustavy i jednotlivých prutů. Vzpěr je řešen přímým řešením a klopení zpravidla ručně. V této metodě neplatí princip superpozice, proto je nutné řešit různé kombinace zatížení. Ovšem tato metoda má hned několik omezení. Neexistuje obecný algoritmus pro stanovení imperfektního tvaru potřebného pro výpočet. Zároveň tento tvar je zpravidla různý pro různé kombinace zatížení. Mimo jiné je komplikací klopení prutů, jelikož běžný model postihne pouze vzpěr a klopení je nutné posoudit ručně.

3.4.5 Vhodnost jednotlivých metod

Metoda 1

Tato metoda je především vhodná pro rámové konstrukce. Pro obloukové konstrukce je ovšem nevhodná.

Metoda 2

Tuto metodu je vhodné použít, pokud jde o konstrukci s kloubovými vazníky. Pro rámové konstrukce nezavádí vliv II. řádu pro příčel.

Metoda 3

Tato metoda je vhodná pro většinu druhů konstrukcí, ovšem kvůli náročnosti výpočtu nemusí být vždy nejvhodnějším řešením u jednoduchých konstrukcí.

3.4.6 Shrnutí globální analýzy

Pružná analýza

Výpočet vnitřních sil podle teorie prvního řádu lze provést, pokud je vliv druhého řádu zanedbatelný nebo pokud je tento vliv zaveden jiným způsobem. V opačném případě je vždy nutné provést výpočet vnitřních sil podle teorie druhého řádu.

Plastická analýza

Pro komplikovanost této analýzy je její použití zpravidla omezené na jednoduché konstrukce nebo sofistikovanější modely (Jandera, 2023).

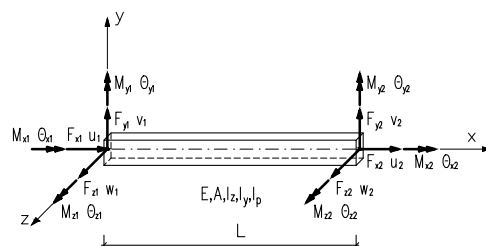
Globální stabilitní analýza

V této kapitole se zaměřujeme na lineární stabilitu příhradových konstrukcí, kde klíčovým cílem je identifikovat kritické břemeno, při kterém dojde k selhání konstrukce z hlediska stability. Postupně je provedena statická analýza pomocí rámových prvků a následně je stanoveno toto kritické břemeno.

Postup této analýzy, včetně odvození jednotlivých částí, byl komplexně zpracován v mé bakalářské práci (Glanc, 2022) a je zkráceně prezentován v dodatku A.2. Tato kapitola představuje nezbytný krok v celkovém posouzení stability specifikované věže v rámci diplomové práce.

4.1 Lineární analýza konstrukce

Pro posouzení stability konstrukce je nejprve nutné provést standardní lineární statickou analýzu. Jelikož stabilitu příhradové konstrukce budu posuzovat s využitím rámových prvků, je nutné provést také statickou analýzu pomocí rámových prvků. Rámový prvek má oproti příhradovému prvku na každém konci 6 koncových sil, jejich orientace a použité názvosloví je zobrazeno na obrázku 4.1.



■ **Obrázek 4.1** Bisymetrický rámový element

Výsledkem statické lineární analýzy je výpočet vnitřních sil a přemístění na konstrukci. Nejprve je nutné vypočítat neznámé posuny a pootočení na konstrukci, pro tento výpočet slouží známá rovnice, která je základem deformační metody

$$[K] \cdot \{r\} = \{f\} \quad , \quad (4.1)$$

kde $[K]$ je matice tuhosti, $\{f\}$ je vektor zatížení a $\{r\}$ je vektor neznámých přemístění.

Následnou transformací a lokalizací lze získat neznámá přemístění jednotlivých prutů a dopočítat koncové síly na všech elementech, které následně využijeme pro nelineární analýzu konstrukce.

4.2 Nelineární analýza konstrukce

Tato část stabilitní analýzy využívá vnitřní síly vypočtené na konstrukci a pomocí nich stanovuje součinitel kritického zatížení λ , který představuje násobek zadaného zatížení, při kterém dojde ke ztrátě stability. Způsob nalezení kritického břemene spočívá v řešení rovnice

$$[K + \lambda K_{\sigma}^{ref}] \{\Delta\} = \{0\} \quad , \quad (4.2)$$

kde $[K_{\sigma}]$ je matice geometrické tuhosti, nebo také matice počátečních napětí, vypočtená pro zadané zatížení, λ součinitel kritického zatížení a vektor $\{\Delta\}$ vyjadřuje deformovaný tvar konstrukce pro jednotlivé součinitele kritického zatížení. Tato rovnice vede na problém vlastních čísel, kde součinitel kritického zatížení představuje vlastní čísla soustavy a vektor $\{\Delta\}$ představuje vlastní vektory. Způsoby řešení tohoto matematického problému je uveden v (Glanc, 2022). Výsledkem této části analýzy je tedy nejen kritické břemeno ale i tvar zdeformované konstrukce, který lze využít jako počáteční tvar konstrukce při analýze II. řádem.

Pokud je součinitel $\lambda > 1$ znamená to, že konstrukce je stabilní a nedojde tedy ke ztrátě stability. Z kapitoly 3 víme, že přestože je konstrukce stabilní, může selhat vlivem druhého řádu, pokud $\lambda = \alpha_{cr} < 10$, proto je v této práci optimalizovaná konstrukce na hodnotu $\lambda > 10$. Tento předpoklad nám zajistí, že je možné konstrukci dále posuzovat pouze na účinky I. řádu.

Kapitola 5

Metoda větví a mezí

Čtvrtá kapitola se zaměřuje na optimalizační metodu větví a mezí. Obecně představuje a detailně rozebírá principy této metody na jednoduchém příkladu. Zároveň jsou v této části práce představeny a vysvětleny jednotlivé modifikace této optimalizační metody. Kapitola poskytuje čtenáři vhled do fungování metody větví a mezí a připravuje základ pro její následné použití v optimalizaci příhradových konstrukcí v rámci diplomové práce.

5.1 Úvod

Metoda mezí a větví (BnB) je účinným nástrojem pro řešení optimalizačních problémů, a byla poprvé představena v (Land et al., 1960). Základní myšlenkou této metody je rozdělení původního problému na jednotlivé sub-problémy, či větve, a následné využití mezí k eliminaci těch větví, které nevedou k optimálnímu řešení. Úspěch algoritmu je značně závislý na volbě horních a dolních mezí. Umístění těchto mezí blíže ke globálnímu optimu zvyšuje rychlost konvergence algoritmu a vede k dosažení správného řešení. Od svého představení se stala nejpoužívanější metodou pro řešení kombinatorických optimalizačních problémů (Clausen, 1999). Během této doby došlo k řadě modifikací původní metody, které vedou v některých případech k rychlejšímu algoritmu.

$$\text{Minimalizovaná účelová funkce: } f = -20x_1 - 10x_2 \quad . \quad (5.1)$$

$$\text{Omezující podmínky: } g_1 : -20x_1 - 10x_2 + 75 \leq 0 \quad , \quad (5.2)$$

$$g_2 : 12x_1 + 7x_2 - 55 \leq 0 \quad , \quad (5.3)$$

$$g_3 : 25x_1 + 10x_2 - 90 \leq 0 \quad . \quad (5.4)$$

$$\text{Sady hodnot proměnných: } x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad . \quad (5.5)$$

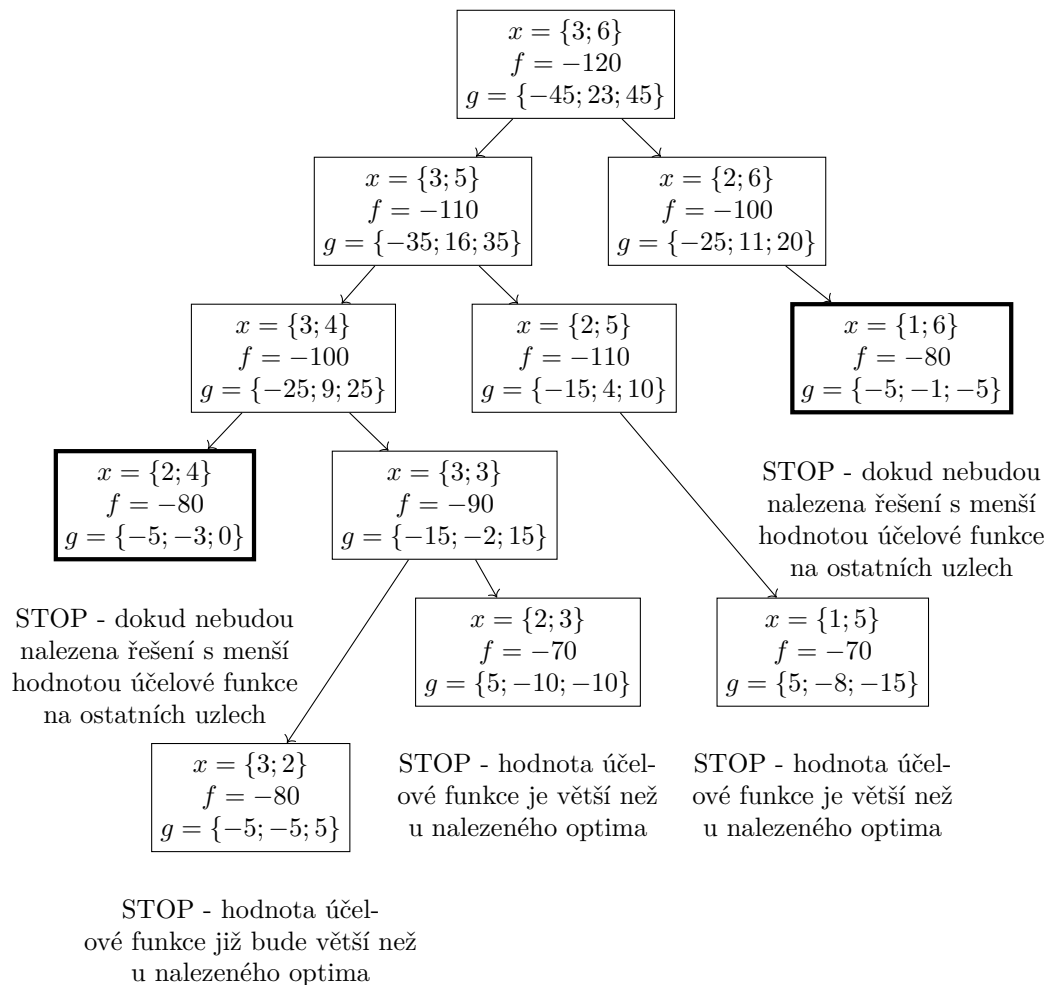
$$(5.6)$$

5.2 Metoda BnB s diskretními proměnnými

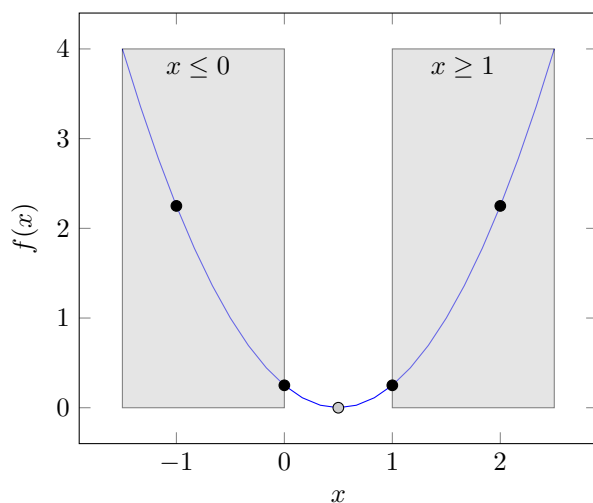
Vysvětlení tohoto algoritmu lze ilustrovat na následující úloze, kterou její autor podrobně rozebírá v (Jasbir S Arora, 2000). Úloha je formulována v rovnicích 5.1-5.5, s účelovou funkcí $f(x_1, x_2)$ a omezujícími podmínkami g_1 , g_2 a g_3 , vyjádřenými jako nerovnice. Tato úloha zahrnuje také sadu diskretních proměnných x_1 a x_2 . Hlavním cílem této úlohy je minimalizace účelové funkce. Úmyslně je zvolena jednoduchá úloha a zcela jistě by šla snadno vyřešit hrubou silou, která postupně počítá všechna možná řešení. Ovšem díky velikosti úlohy bude snadné demonstrovat výhody BnB metody a porovnat množství vypočtených kombinací oproti metodě hrubé síly.

Z podoby účelové funkce je patrné, že její parciální derivace jsou obě záporné, což značí, že se jedná o klesající účelovou funkci. Zároveň je cílem této úlohy minimalizace účelové funkce. Tuto informaci využijeme při volbě počátečních hodnot x_1 a x_2 , kdy je vhodné zvolit maximální možné hodnoty těchto proměnných. Na obrázku 5.1 je graficky zobrazen postup metody. Jednotlivé obdélníky představují uzly, ve kterých jsou zobrazeny zvolené proměnné ze sad, hodnota účelové funkce a hodnoty omezujících podmínek. Při každém větvení uzlu dochází ke snížení pouze jedné proměnné a zbylé proměnné, v našem případě pouze jedna, zůstávají na stejné hodnotě. Jsou vypočítány hodnoty účelové funkce a omezujících podmínek. K zastavení větvení dochází ve dvou případech - pokud hodnota účelové funkce překročí horní mez, která představuje hodnotu dosud nejlepšího nalezeného řešení, nebo pokud dojde ke splnění omezujících podmínek, pak hodnota účelové funkce představuje nalezené dosavadní optimum.

Ve třetí úrovni větvení dochází k zastavení větve v uzlu $x = \{1; 6\}$, protože byly splněny omezující podmínky, a algoritmus začíná prohledávat zbývající uzly. Podobná situace nastává i v případě uzlu $x = \{2; 4\}$. V obou případech není v daném okamžiku vhodné větvit dále, protože se prozatím jedná o nejlepší řešení. Zastavení větvení v uzlech $x = \{2; 3\}$ a $x = \{1; 5\}$ nastává z jiných důvodů. Účelová funkce již překročila hodnotu dosud nalezeného optima a navíc



■ **Obrázek 5.1** Diagram metody větvi a mezí s diskretními proměnnými



■ **Obrázek 5.2** Relaxace proměnné a rozdělení problému

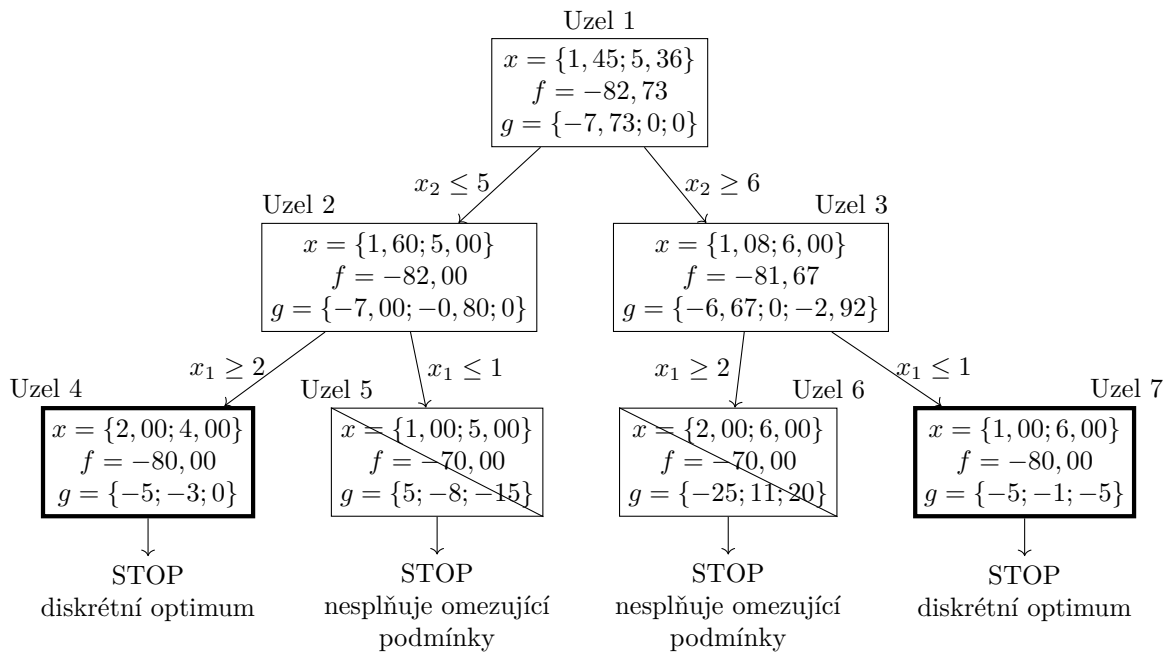
nejsou splněny omezující podmínky. Je tedy jasné, že v těchto větvích již globální optimum není dosažitelné. Poslední omezená větev vede k uzlu $x = \{3; 2\}$, kde je hodnota účelové funkce rovna dosud nalezenému optimu, avšak omezující podmínky nejsou splněny. Tedy i v této větvi není globální optimum dosažitelné.

5.3 Metoda BnB s relaxací

Pokud mohou diskrétní proměnné z fyzikálního hlediska nabývat spojitéch hodnot, lze využít modifikaci metody BnB s relaxací proměnných. Výhodou této modifikace je možnost využít pro lokální minimalizaci lineární programování, například pomocí simplexové metody. Myšlenka spočívá v nahrazení diskrétních proměnných spojitými. Postup bude demonstrován na stejném příkladu jako v předešlé kapitole od stejného autora (Jasbir S Arora, 2000).

5.3.1 Relaxace proměnných

Tato modifikace metody BnB využívá skutečnosti, že pokud lze diskrétní hodnoty nahradit spojitým řešením, pak diskrétní optimum leží poblíž optima se spojitými hodnotami. Lze si to snadno představit na jedné proměnné a účelové funkci ve tvaru paraboly, jak je znázorněno na obrázku 5.2. Zde parabola reprezentuje spojitě proměnné, zatímco černé body symbolizují diskrétní proměnné. Minimalizace této spojitě funkce by jistě vedla k nalezení minima v bodě $x = 0,5$, který ovšem není diskrétním bodem. V takovém případě metoda BnB s relaxací rozdělí problém na dva podproblémy, jak je znázorněno šedivými obdélníky. Následně, prostřednictvím lokální minimalizace, je možné nalézt hledaná globální optima.

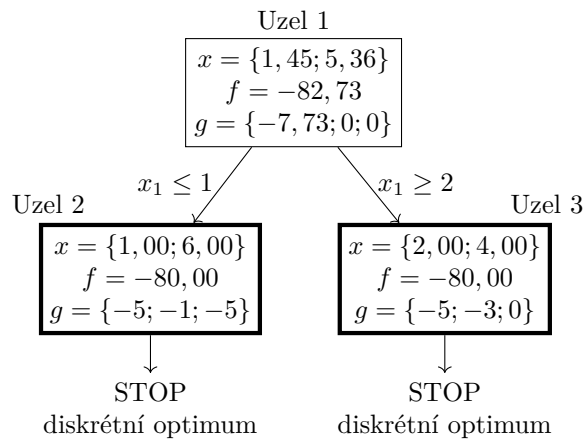


■ **Obrázek 5.3** Diagram metody větvi a mezí s relaxací - větvení od x_2

5.3.2 Postup výpočtu

Postup výpočtu je zobrazen na obr. 5.3. Lze si všimnout, že diagram se mírně liší od původního uvedeného v (Jasbir S Arora, 2000), jelikož je druhá proměnná rozšířena na interval $x \in (0; 7)$, přestože v původním zadání byla omezena na maximální hodnotu 6. Zároveň jsem pro lepší vysvětlení metody začínal dělit podproblémy od proměnné x_2 . Dělení dle proměnné x_1 je zobrazeno na obrázku 5.4.

Prvním krokem je nahrazení diskretních proměnných spojitými. Následně se metodou matematického programování vypočte spojitě řešení. Pokud jsou všechny získané hodnoty diskretní, algoritmus je ukončen. Ovšem většinou dochází k nalezení hodnot spojitých. V takovém případě vybereme jednu z nalezených hodnot proměnných x_i . Tato proměnná x_i musí ležet mezi dvojicí diskretních proměnných $d_{i,j} < x_i < d_{i,j+1}$. Tato skutečnost nám umožní rozdělit problém na dva podproblémy. První, kdy $d_{i,j} \geq x_i$, a druhý podproblém, kdy $x_i \geq d_{i,j+1}$. Tímto způsobem je v uzlu 1 prostor spojitě řešení rozdělen, ale není vynecháno jediné řešení. Nyní se vyřeší na obou podproblémech v uzlech 2 a 3 lokální minimalizace. Obdobným způsobem se provede rozvětvení pro další proměnnou. Tímto způsobem se pokračuje obdobně jako u předchozí kapitoly, a větvení je opět zastaveno, pokud hodnota účelové funkce překročí dosud nejlepší nalezené řešení. Druhým důvodem pro ukončení větve je nemožnost nalezení řešení, které by splňovalo omezující podmínky na zvoleném podprostoru. K tomuto zastavení došlo v případě uzlu 5 a 6.



■ **Obrázek 5.4** Diagram metody větví a mezí s relaxací - větvení od x_1

Zároveň můžeme na tomto příkladu snadno demonstrovat nevýhodu metody BnB. Problém spočívá ve volbě proměnné, na které začneme větvit. V prvním příkladě jsem záměrně zvolil proměnnou s větší sadou hodnot, aby bylo lépe vidět, jak probíhá větvení. Pokud se nyní podíváme na obrázek 5.4, kde probíhá větvení od proměnné x_1 , lze jasně pozorovat, jakým způsobem jsme urychlili konvergenci tím, že jsme správně vybrali, kde začít větvit. Tato nevýhoda se s narůstajícími dimenzemi může stát značným zpomalujícím faktorem pro algoritmus BnB.

5.4 Srovnání metody BnB

Pro řešení kombinatorických optimalizačních problémů představuje největší překážku obrovské množství možných řešení, což u větších úloh znesnadňuje nalezení optima. V předchozím příkladě existuje $4 \cdot 7 = 28$ kombinací, které by bylo nutné projít při použití metody hrubé síly. Metoda BnB s diskrétními proměnnými dramaticky snižuje počet nutných výpočtů na 11 kombinací, což představuje výrazné zrychlení výpočtu. Ještě rychlejšího výpočtu lze dosáhnout pomocí relaxace proměnných, kde při správném zvolení mezí a počátku větvení může být optimální řešení dosaženo vyřešením pouze 3 kombinací.

Optimalizace příhrad metodou BnB

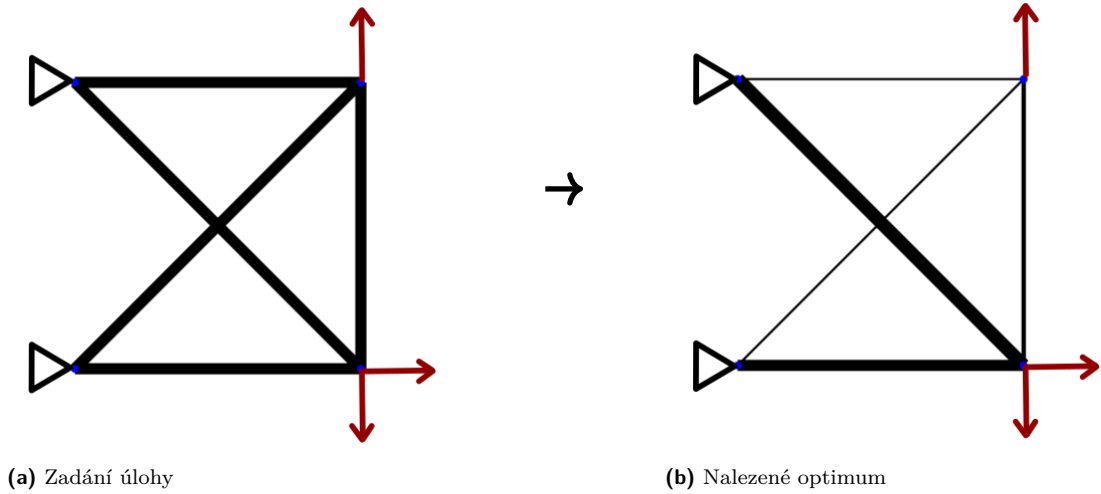
Pátá kapitola se věnuje konkrétní aplikaci optimalizační metody větví a mezí na úlohu optimalizace příhradových konstrukcí. V první části kapitoly je představena standardní implementace této metody, následně jsou provedeny úpravy vedoucí k vytvoření formy metody pro celočíselné lineární programování (MILP). Tato modifikace vede k linearizaci systému a zároveň umožňuje urychlení optimalizačního procesu. Kapitola detailně vysvětluje postup aplikace metody větví a mezí na optimalizaci příhradových konstrukcí.

6.1 Úvod

V této kapitole se budu věnovat diskrétní rozměrové optimalizaci příhradových konstrukcí s využitím *metody větví a mezí*. Existuje mnoho různých modifikací metody BnB (Jasbir S Arora, 2000). V této práci je využita formulace uvedena v (A. Pospíšilová et al., 2013), která využívá relaxaci některých proměnných k získání konvexního problému.

6.2 Rozměrová optimalizace

Rozměrová optimalizace patří mezi nejpoužívanější typy optimalizací příhradových konstrukcí. Při této optimalizaci zůstává známý tvar konstrukce, materiál a prostředí konstrukce. Cílem je nalézt takovou skladbu profilů pro jednotlivé pruty, aby při zachování omezujících podmínek došlo k minimalizaci hmotnosti konstrukce. Snáze si to lze představit na obrázku 6.1.



■ **Obrázek 6.1** Rozměrová optimalizace

Rozměrovou optimalizaci lze rozdělit na dva základní druhy: diskretní rozměrovou optimalizaci a spojitou rozměrovou optimalizaci. První zmíněná vybírá průřezy z předem dané sady profilů, zatímco druhá vybírá libovolný profil mezi zadanými mezemi. Spojité úlohy rozměrové optimalizace přinášejí zejména výhodu možnosti využití metod matematického programování. Avšak častěji jsou profily definovány sadou profilů, například pomocí ocelářských tabulek, a zde je nutné využít diskretní úlohy. Diskretní úlohy spadají do kombinatorických optimalizačních problémů, na které, jak už bylo zmíněno, lze využít například metodu BnB.

6.3 Standardní implementace metody BnB

Optimalizační úloha pro příhradové konstrukce může být ve tvaru

$$\min_{\mathcal{A} \in \mathbb{B}^{nr}} \rho \sum_{j=1}^{nr} \mathcal{A}_j L_j \quad (6.1)$$

$$\text{tak, aby } u^{\min} \leq u_d \leq u^{\max}, \quad (6.2)$$

$$\sigma^{\min} \leq \sigma_j \leq \sigma^{\max}, \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

kde \mathcal{A} je vektor průřezových ploch vybraných ze sady profilů, a \mathcal{A}_j představuje průřezovou plochu j -tého prutu. Index j nabývá hodnot od 1 do nr , kde nr je celkový počet prutů v konstrukci. Hustota materiálu je ρ , L_j vyjadřuje délku j -tého prutu. Neznámé posuny jsou u_d , kde d nabývá hodnot od 1 do nd , přičemž nd představuje počet neznámých posunů. Tyto posuny

jsou omezeny u_{\min} a u_{\max} , což představuje minimální a maximální možné posuny konstrukce. σ_j představuje napětí na j -tém prutu, omezené hodnotami maximálního a minimálního napětí, σ^{\max} a σ^{\min} .

6.4 Relaxace problému

Optimalizace příhradových konstrukcí lze také zapsat (Rasmussen et al., 2008; A. Pospíšilová et al., 2013)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{B}^{na \cdot nr}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nd}} \rho \sum_{j=1}^{nr} \ell_j \sum_{i=1}^{na} a_i x_{i,j} \quad (\text{hmotnost}) \quad (6.5)$$

$$\text{tak, aby} \quad \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (\text{podmínky rovnováhy}), \quad (6.6)$$

$$\sum_{j=1}^{na} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \quad (\text{jeden profil na prut}), \quad (6.7)$$

$$\mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{\max} \quad (\text{omezení posunů}), \quad (6.8)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j). \quad (6.9)$$

Rovnice 6.5 představuje účelovou funkci, která minimalizuje hmotnost konstrukce. V této rovnici ρ představuje hustotu materiálu, ℓ_j vyjadřuje délku j -tého prutu, a_i je i -tá průřezová plocha, a $x_{i,j}$ je binární návrhová proměnná uspořádaná ve sloupcovém vektoru. Index i může nabývat hodnot od 1 do na , což představuje počet průřezových ploch v sadě profilů. Proměnná j nabývá hodnot od 1 do nr , kde nr je celkový počet prutů v konstrukci. $x_{i,j}$ je rovna 1, pokud je plocha a_i přiřazena j -tému prutu. V opačném případě je $x_{i,j}$ rovna 0. Rovnice 6.6 představují podmínky rovnováhy, kde $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ je matice tuhosti o dimenzi $nd \times nd$, \mathbf{u} je vektor posunů o délce nd , a vektor \mathbf{f} představuje vektor koncových sil o délce nd , kde nd je počet stupňů volnosti. Rovnice 6.7 zajišťují, že je ke každému prutu přiřazena pouze jedna plocha. Rovnice 6.8 zajišťují, že jsou posuny v přijatelné oblasti. Poslední rovnice 6.9 zajistí, že proměnná $x_{i,j}$ nabývá hodnoty 0 nebo 1. Optimalizační úloha popsána výše je označována jako celočíselný binární problém. Podmínky rovnováhy 6.6 jsou nekonvexní, což nezaručuje nalezení optimálního řešení. Abychom se zbavili nekonvexních omezujících podmínek, můžeme úlohu formulovat následovně.

Vnitřní síly mohou být definovány jako

$$s_{i,j} = x_{i,j} \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} \quad \forall (i, j) \quad , \quad (6.10)$$

kde E_j představuje Youngův modul pružnosti pro j -tý prvek. Vektor \mathbf{b} představuje směrové kosinové vektory pro jednotlivé neznámé posuny a \mathbf{u} je vektor neznámých posunů. Pomocí tohoto

vztahu můžeme zapsat rovnici 6.6 takto

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{nr} \sum_{i=1}^{na} s_{i,j} \mathbf{b}_j = \mathbf{f} \quad . \quad (6.11)$$

Tuto rovnici můžeme nazvat rovnici uzlové rovnováhy. Výhoda tohoto zápisu spočívá především v lineárním charakteru systému. Tuto rovnici lze zapsat v maticovém zápisu, ovšem pro provedení tohoto kroku je nutné definovat matici \mathbf{B} jako

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \dots b_1 & b_2 \dots b_2 & b_{nr} \dots b_{nr} \end{bmatrix} \quad , \quad (6.12)$$

kde \mathbf{b}_j je sloupcový vektor o délce nd a je opakován na -krát za sebou. Matice \mathbf{B} je tedy obdélníková matice o dimenzi $nd \times na \cdot nr$. Maticový zápis je poté ve tvaru

$$\mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{f} \quad . \quad (6.13)$$

Problém ovšem je, že rovnice 6.10 je bi-lineární. Pokud je $x_{i,j}$ binární proměnnou, může nabývat dvou hodnot, proto je možné rovnici rozdělit na dva podproblémy, které jsou lineární.

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{potom } s_{i,j} = \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} \\ 0 & \text{potom } s_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Omezení optimalizační úlohy je v podobě maximálních možných posunů a napětí. Omezení napětí lze zapsat pomocí omezení vnitřních sil následovně:

$$x_{i,j} a_i \sigma^{\min} \leq s_{i,j} \leq x_{i,j} a_i \sigma^{\max} \quad \forall(i,j). \quad (6.15)$$

Podobně lze zapsat omezení na minimální a maximální posuny rovnicemi:

$$s_{i,j} \geq c_{i,j}^{\min} = \frac{E_j a_i}{\ell_j} \min_{\mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{\max}} \left\{ \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} \right\} \quad \forall(i,j) \quad , \quad (6.16)$$

$$s_{i,j} \leq c_{i,j}^{\max} = \frac{E_j a_i}{\ell_j} \max_{\mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{\max}} \left\{ \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} \right\} \quad \forall(i,j) \quad . \quad (6.17)$$

Zde představují proměnné $c_{i,j}^{\min}$ a $c_{i,j}^{\max}$ minimální a maximální vnitřní síly vyjádřené pomocí omezujících posunů. Tyto vztahy je možné vyjádřit

$$c_{i,j}^{\min} = \frac{E_j a_i}{\ell_j} \left(\sum_{k: b_{j,k} > 0} b_{j,k} u_k^{\min} + \sum_{k: b_{j,k} < 0} b_{j,k} u_k^{\max} \right) \quad \forall(i,j) \quad , \quad (6.18)$$

$$c_{i,j}^{\max} = \frac{E_j a_i}{\ell_j} \left(\sum_{k:b_{j,k}>0} b_{j,k} u_k^{\max} + \sum_{k:b_{j,k}<0} b_{j,k} u_k^{\min} \right) \quad \forall(i,j) \quad . \quad (6.19)$$

Minimální vnitřní síly $c_{i,j}^{\min}$ lze vyjádřit jako sumu kladných minimálních posunů a záporných maximálních posunů vynásobenou tuhostí daného prutu. Obdobně pro maximální možné vnitřní síly $c_{i,j}^{\max}$, kde se sčítají maximální kladné posuny a minimální záporné posuny opět vynásobené tuhostí prutu. Aby byly zavedeny obě podmínky z rovnice 6.14, je nutné hodnoty $c_{i,j}$ vynásobit proměnnou $x_{i,j}$. Tedy pokud $x_{i,j}$ je rovno 0, musí být vnitřní síla $s_{i,j}$ také rovna nule, a pokud je $x_{i,j}$ rovno 1, pak musí být vnitřní síla $s_{i,j}$ v rozmezí $c_{i,j}^{\min}$ a $c_{i,j}^{\max}$. Tedy

$$x_{i,j} c_{i,j}^{\min} \leq s_{i,j} \leq x_{i,j} c_{i,j}^{\max} \quad (6.20)$$

Proměnná $s_{i,j}$ je také návrhová proměnná. Pro omezení proměnné $s_{i,j}$ a \mathbf{u} je možné rovnici 6.20 zapsat jako

$$(1 - x_{i,j}) c_{i,j}^{\min} \leq \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} - s_{i,j} \leq (1 - x_{i,j}) c_{i,j}^{\max} \quad . \quad (6.21)$$

Pokud je $x_{i,j}$ rovno 1, pak vnitřní síla $s_{i,j}$ musí odpovídat vnitřní síle vypočtené ze vztahu $\frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u}$, protože omezení ze shora i zezdola je rovno nule. Pokud je $x_{i,j}$ je rovno 0, pak je rovnice 6.21 ve tvaru

$$c_{i,j}^{\min} \leq \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} - s_{i,j} \leq c_{i,j}^{\max} \quad . \quad (6.22)$$

Z rovnice 6.20 je možné, aby proměnné $s_{i,j}$ a $x_{i,j}$ byly rovné 0. V takovém případě je rovnice ve tvaru

$$c_{i,j}^{\min} \leq \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} \leq c_{i,j}^{\max} \quad . \quad (6.23)$$

Proměnná \mathbf{u} poté nabývá hodnot mezi dvěma velkými čísly (nazýváno také jako problém big-M (Rasmussen et al., 2008)). Díky tomu je problém redukován na návrhový prostor omezený proměnnými $c_{i,j}^{\min}$ a $c_{i,j}^{\max}$. Díky těmto úpravám jsme z původně nelineárního systému získali systém lineární.

Relaxovanou optimalizační úlohu lze poté shrnout dle (A. Pospíšilová et al., 2013) takto

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{B}^{na \cdot nr}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nd}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{na \cdot nr}} \rho \sum_{j=1}^{nr} \ell_j \sum_{i=1}^{na} a_i x_{i,j} \quad (\text{hmotnost}) \quad (6.24)$$

$$\text{tak, aby} \quad \mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{f} \quad (\text{podmínky rovnováhy}), \quad (6.25)$$

$$\frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} - s_{i,j} \geq (1 - x_{i,j}) c_{i,j}^{\min} \quad \forall (i, j) \quad (\text{kompatibilita}), \quad (6.26)$$

$$\frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} - s_{i,j} \leq (1 - x_{i,j}) c_{i,j}^{\max} \quad \forall (i, j) \quad (\text{kompatibilita}), \quad (6.27)$$

$$\sum_{j=1}^{na} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \quad (\text{jeden profil na prut}), \quad (6.28)$$

$$\mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{\max} \quad (\text{omezení posunů}), \quad (6.29)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j). \quad (6.30)$$

Poznamenejme, že je zde patrné, že se jedná o SAND formulaci optimalizace, protože optimalizačními proměnnými jsou nejen průřezové plochy vyjádřené binárními proměnnými ve vektoru \mathbf{x} , ale také posuny ve vektoru \mathbf{u} a síly ve vektoru \mathbf{s} .

Maticově lze zapsat tyto rovnice následovně dle (A. Pospíšilová et al., 2013)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{B}^{na \cdot nr}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nd}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{na \cdot nr}} \rho \left((\ell \otimes \mathbf{1}_{[na]})^T \odot (\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a})^T \right) \mathbf{x} \quad (6.31)$$

$$\text{tak, aby} \quad \mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{f} \quad , \quad (6.32)$$

$$\sigma^{\min} \text{diag}(\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{x} \leq \mathbf{s} \leq \sigma^{\max} \text{diag}(\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{x} \quad , \quad (6.33)$$

$$\left((\xi \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}_{[nd]}^T) \odot \mathbf{B}^T \right) \mathbf{u} - \mathbf{s} \geq (\mathbf{1}_{[na \cdot nr]} - \mathbf{x}) \odot \mathbf{C}^{\min} \quad , \quad (6.34)$$

$$\left((\xi \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}_{[nd]}^T) \odot \mathbf{B}^T \right) \mathbf{u} - \mathbf{s} \leq (\mathbf{1}_{[na \cdot nr]} - \mathbf{x}) \odot \mathbf{C}^{\max} \quad , \quad (6.35)$$

$$\mathbf{I}_{[nr]} \otimes \mathbf{1}_{[na]}^T \cdot = \mathbf{1}_{[nr]} \quad , \quad (6.36)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}. \quad (6.37)$$

Vektor ℓ obsahuje délky jednotlivých prutů, sada průřezových ploch je obsažena ve vektoru \mathbf{a} a vektor \mathbf{x} obsahuje všechny proměnné $x_{i,j}$. ξ je poměr modulu pružnosti a délky jednotlivých prutů, tedy pro j -tý prut platí, že $\xi_j = \frac{E_j}{\ell_j}$. Vektor \mathbf{s} představuje vnitřní síly, diagonální matice \mathbf{C}^{\min} a \mathbf{C}^{\max} obsahují maximální a minimální možné vnitřní síly, \mathbf{I} je jednotková matice, $\mathbf{1}$ je vektor obsahující pouze hodnoty 1. Definice operátorů \otimes a \odot je vysvětlena v dodatku A.1.

6.5 Zavedení modularity

Důležitost a výhody modulárních konstrukcí jsou kompletně shrnuty v (Glanc, 2022), ovšem přesto zmíním některé z nich. Modularita konstrukcí zajišťuje především lepší proveditelnost optimalizované konstrukce díky opakovatelnosti jednotlivých prvků. Čím více prvků je v konstrukci shodných, tím lépe proveditelná konstrukce následně je, ovšem za cenu toho, že dochází k navýšení množství materiálu na prvcích, který zcela tento materiál nevyužijí.

Princip zavedení modularity do metody BnB spočívá pouze v redukcí vektoru $\mathbf{x}_{ng \cdot na}$, kde ng představuje počet skupin prutů, a následnému rozšíření v rovnicích pomocí rovnice $\mathbf{G}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{G}_{[nr \cdot na \times ng \cdot na]}$ je rozšířená lokalizační matice. Součinem $\mathbf{G}\mathbf{x}$ získáme vektor o původní velikosti $[na \cdot nr]$.

Rozšířenou lokalizační matici získáme Kroneckerovým součinem lokalizační matice $\mathbf{Q}_{[nr \times ng]}$ a jednotkové matice $\mathbf{I}_{[na]}$, tedy rozšířená lokalizační matice je poté ve tvaru $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_{[na]}$. Kompletní způsob sestavení lokalizační matice je vysvětlen v (Glanc, 2022), ale tato matice obsahuje pouze 1 a 0. Prvek matice $q_{p,r}$ je roven 1, pokud je prut na pozici p přiřazen skupině r . Například prvek $q_{3,2} = 1$, tedy třetí prut je přiřazen do druhé skupiny prutů a zbytek třetího řádku proto musí obsahovat již pouze 0, kvůli podmínce, že každý prut může mít přiřazen pouze jeden průřez.

Optimalizační úloha je poté dle (A. Pospíšilová et al., 2013) ve tvaru,

$$\min_{\mathbf{G}\mathbf{x} \in \mathbb{B}^{na \cdot nr}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nd}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{na \cdot nr}} \rho \left((\ell \otimes \mathbf{1}_{[na]})^T \odot (\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a})^T \right) \mathbf{G}\mathbf{x} \quad (6.38)$$

$$\text{tak, aby} \quad \mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{f} \quad , \quad (6.39)$$

$$\sigma^{\min} \text{diag} (\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{G}\mathbf{x} \leq \mathbf{s} \leq \sigma^{\max} \text{diag} (\mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{G}\mathbf{x} \quad , \quad (6.40)$$

$$\left((\xi \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}_{[nd]}^T) \odot \mathbf{B}^T \right) \mathbf{u} - \mathbf{s} \geq (\mathbf{1}_{[na \cdot nr]} - \mathbf{G}\mathbf{x}) \odot \mathbf{C}^{\min} \quad , \quad (6.41)$$

$$\left((\xi \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}_{[nd]}^T) \odot \mathbf{B}^T \right) \mathbf{u} - \mathbf{s} \leq (\mathbf{1}_{[na \cdot nr]} - \mathbf{G}\mathbf{x}) \odot \mathbf{C}^{\max} \quad , \quad (6.42)$$

$$\mathbf{I}_{[nr]} \otimes \mathbf{1}_{[na]}^T \cdot = \mathbf{1}_{[nr]} \quad , \quad (6.43)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}. \quad (6.44)$$

6.6 Smíšené celočíselné lineární programování - MILP

Standardní forma celočíselného lineárního programování je ve tvaru

$$\min_y, \quad f^T y \quad (6.45)$$

$$\text{tak, aby} \quad A_{ineq} y \leq b_{ineq} \quad (6.46)$$

$$A_{eq} y = b_{eq} \quad , \quad (6.47)$$

$$lb \leq y \leq ub \quad . \quad (6.48)$$

$$(6.49)$$

Proměnné představuje vektor y , ve kterém jsou seřazeny vektor proměnných \mathbf{x} , vektor neznámých posunů \mathbf{u} a vektor sil \mathbf{s} . Cílovou funkci tvoří součin váhové funkce f^T a vektoru proměnných y . Omezení jsou ve formě nerovností 6.46 a rovností 6.47, kde A_{ineq} a A_{Eq} jsou matice koeficientů a b_{ineq} a b_{eq} jsou vektory koeficientů. Tvar naší účelové funkce 6.45 je poté

$$1 \left\{ \left[\begin{array}{ccc} \overbrace{\mathbf{m}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nr-na}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{array} \right\} \right\} , \quad (6.50)$$

kde \mathbf{m} je vektor obsahující hmotnost všech kombinací prutů a průřezových ploch. Nerovnice 6.33 - 6.35 jsou vyjádřeny pomocí nerovnice 6.46. V nerovnici 6.33 jsou neznámé proměnné $x_{i,j}$ a $s_{i,j}$, proto musí být umístěny na jedné straně nerovnice. Těmito úpravami dostaneme nerovnice ve tvaru

$$x_{i,j} a_i \sigma^{\min} - s_{i,j} \leq 0 \quad , \quad (6.51)$$

$$-x_{i,j} a_i \sigma^{\max} + s_{i,j} \leq 0 \quad . \quad (6.52)$$

Podobné úpravy je nutné provést v nerovnicích 6.34 - 6.35 a získáme nerovnice

$$-c_{ij}^{\min} x_{i,j} - \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} + s_{i,j} \leq -c_{ij}^{\min} \quad , \quad (6.53)$$

$$c_{ij}^{\max} x_{i,j} + \frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T \mathbf{u} - s_{i,j} \leq c_{ij}^{\max} \quad . \quad (6.54)$$

Nerovnice 6.51-6.54 jsou pomocí maticového zápisu spojeny do jedné nerovnice

$$\begin{array}{l}
na \cdot nr \{ \\
na \cdot nr \{ \\
na \cdot nr \{ \\
na \cdot nr \{
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
\overbrace{\mathbf{F}^{\min}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{0}}^{nd} & \overbrace{-\mathbf{I}}^{nr \cdot na} \\
-\overbrace{\mathbf{F}^{\max}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{0}}^{nd} & \overbrace{\mathbf{I}}^{nr \cdot na} \\
-\overbrace{\mathbf{C}^{\min}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{K}}^{nd} & \overbrace{\mathbf{I}}^{nr \cdot na} \\
\overbrace{\mathbf{C}^{\max}}^{nr \cdot na} & \overbrace{-\mathbf{K}}^{nd} & \overbrace{-\mathbf{I}}^{nr \cdot na}
\end{array} \right] \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^{\min} \\ \mathbf{c}^{\max} \end{array} \right\} , \end{array} \quad (6.55)$$

kde vektor \mathbf{x} je složen z prvků $x_{i,j}$, který jsou seřazeny následujícím způsobem: $x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{na,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{na,2}, \dots, x_{na,nr}$. Stejným způsobem jsou seřazeny i prvky $s_{i,j}$ ve vektoru \mathbf{s} . Se-stavení matice \mathbf{F}^{\min} se provede nakopírováním vektoru $a_i \sigma^{\min}$ j -krát za sebou a umístěním na diagonálu matice, na ostatních pozicích mimo diagonálu jsou hodnoty 0. Obdobně se vytvoří matice \mathbf{F}^{\max} . \mathbf{I} je jednotková matice. \mathbf{C}^{\min} a \mathbf{C}^{\max} jsou diagonální matice, které mají na hlavní diagonále prvky $c_{i,j}^{\min}$ a $c_{i,j}^{\max}$. \mathbf{K} je čtvercová matice tuhosti s prvky $\frac{E_j a_i}{\ell_j} \mathbf{b}_j^T$.

Rovnice 6.32 a 6.36 lze spojit pomocí maticového zápisu do rovnice 6.47

$$\begin{array}{l}
nd \{ \\
nr \{
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
\overbrace{\mathbf{0}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{0}}^{nd} & \overbrace{\mathbf{B}}^{nr \cdot na} \\
\overbrace{\mathbf{I}_M}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{0}}^{nd} & \overbrace{\mathbf{0}}^{nr \cdot na}
\end{array} \right] \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \mathbf{1} \end{array} \right\} , \end{array} \quad (6.56)$$

kde \mathbf{B} je matice směrových kosinů popsaná v rovnici 6.12. \mathbf{I}_M je čtvercová matice, která je vytvořena pomocí vektoru s hodnotami 1 a délce na , umístěném na j -tém řádku a na sloupcích od $((j-1) \cdot i + 1)$ do $((j-1) \cdot i + 1) + na$. \mathbf{f} je vektor koncových sil a $\mathbf{1}$ je vektor vytvořený hodnotami 1 a délkou nr .

Dolní a horní mez pro vektor proměnných je ve tvaru

$$\mathbf{lb} = \left[\begin{array}{ccc}
\overbrace{\mathbf{0}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{u}^{\min}}^{nd} & \overbrace{\mathcal{F}^{\min}}^{nr \cdot na}
\end{array} \right] , \quad (6.57)$$

$$\mathbf{ub} = \left[\begin{array}{ccc}
\overbrace{\mathbf{1}}^{nr \cdot na} & \overbrace{\mathbf{u}^{\max}}^{nd} & \overbrace{\mathcal{F}^{\max}}^{nr \cdot na}
\end{array} \right] , \quad (6.58)$$

kde \mathcal{F}^{\min} představuje minimální napětí na prutu a je rovna $\sigma^{\min} \cdot \mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}$. Obdobně pro maximální napětí je \mathcal{F}^{\max} rovno $\sigma^{\max} \cdot \mathbf{1}_{[nr]} \otimes \mathbf{a}$.

6.6.1 Zavedení podmínek modularity do MILP

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, pro lepší použitelnost optimalizovaných konstrukcí je možné použít modularitu. Zavedení se provede pomocí rozšířené lokalizační matice \mathbf{G} definované

v kapitole 6.5. Rovnice 6.50, 6.55-6.58 jsou poté ve tvaru

$$1 \left\{ \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{m}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nr-na}} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{Gx} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix}, \quad (6.59)$$

$$\begin{matrix} \text{na} \cdot \text{nr} \{ \\ \text{na} \cdot \text{nr} \{ \\ \text{na} \cdot \text{nr} \{ \\ \text{na} \cdot \text{nr} \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{F}^{\min}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{-\mathbf{I}}^{\text{nr-na}} \\ \overbrace{-\mathbf{F}^{\max}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{I}}^{\text{nr-na}} \\ \overbrace{-\mathbf{C}^{\min}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{K}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{I}}^{\text{nr-na}} \\ \overbrace{\mathbf{C}^{\max}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{-\mathbf{K}}^{\text{nd}} & \overbrace{-\mathbf{I}}^{\text{nr-na}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Gx} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^{\min} \\ \mathbf{c}^{\max} \end{Bmatrix}, \quad (6.60)$$

$$\begin{matrix} \text{nd} \{ \\ \text{nr} \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{B}}^{\text{nr-na}} \\ \overbrace{\mathbf{I}_M}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nr-na}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Gx} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}, \quad (6.61)$$

$$\mathbf{lb} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{0}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{u}^{\min}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathcal{F}^{\min}}^{\text{nr-na}} \end{bmatrix}, \quad (6.62)$$

$$\mathbf{ub} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{1}}^{\text{nr-na}} & \overbrace{\mathbf{u}^{\max}}^{\text{nd}} & \overbrace{\mathcal{F}^{\max}}^{\text{nr-na}} \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

6.7 Omezení napětí tlačného prutu

V případě štíhlých tlačných prutů často o únosnosti rozhoduje vzpěr a proto není vhodné omezit napětí tlačného prutu pouze mezí kluzu daného materiálu. Jedním ze základních způsobů jakým lze tento vliv zavést je Eulerovo kritické břemeno (Glanc, 2022):

$$F_{crit} = \frac{EI\pi^2}{L_{crit}^2}, \quad (6.64)$$

kde E je Youngův modul pružnosti, I je moment setrvačnosti a L_{crit} je kritická délka, která závisí na způsobu uložení. Pro kloubové uložení je délka prutu rovna délce kritické, jiné způsoby uložení jsou zobrazeny v tabulce 6.1.

Způsob uložení	kloub-kloub	vetknutí	vetknutí-kloub	vetknutí-vetknutí
Vzpěrné délky	$L_{cr} = L$	$L_{cr} = 2L$	$L_{cr} = 0,7L$	$L_{cr} = 0,5L$

■ **Tabulka 6.1** Vzpěrné délky pro různé způsoby uložení

Maximální napětí na tlačném prutu je poté

$$\sigma^{min} = - \min \left(f_y, \frac{F_{crit}}{A} \right) , \quad (6.65)$$

kde f_y je mez kluzu materiálu, F_{crit} je Eulerovská kritická síla a A plocha průřezu.

Optimalizace příhrad metodou SA

Šestá kapitola se zaměřuje na optimalizační metodu *simulovaného žíhání* a její přístup k optimalizaci příhradových konstrukcí, s důrazem na využití rámových prvků pro posouzení stability. V úvodu je krátce představena tato optimalizační metoda, a následně je podrobně rozebrána konkrétní forma této metody. Kapitola zahrnuje detailní popis omezujících podmínek a cílové funkce v rámci použité implementace metody simulovaného žíhání. Tato část práce poskytuje hlubší pochopení aplikace této metody na optimalizaci příhradových konstrukcí a zároveň zdůrazňuje význam využití rámových prvků při posuzování stability.

7.1 Simulované žíhání

Metoda *simulovaného žíhání* je jednou ze stochastických optimalizačních metod vyvinutou počátkem 80. let paralelně v (Kirkpatrick et al., 1983) a (Černý, 1985). Tato metoda využívá analogii mezi žíháním v metalurgii a optimalizačním problémem. Podrobnější shrnutí této metody je uvedeno v (Glanc, 2022; Lepš, 2000). Proces žíhání kovů spočívá v umístění tělesa do vyhřáté pece a následným řízeným ochlazováním dochází k uspořádání krystalů v tělese takovým způsobem, aby došly krystaly na energeticky nejnižší hodnotu. Analogie v optimalizační metodě je ve vyhledávání náhodných řešení a řízeným snižováním teploty dosahujeme nižší pravděpodobnosti přijatého řešení.

7.1.1 Omezující podmínky

Rámové prvky mají výhodu v jednoduchosti stanovení omezujících stabilitních podmínek pro optimalizaci příhradových konstrukcí, ovšem za cenu obtížnosti omezení na napětí na jednotlivých

prvcích. V případě příhradových prvků lze snadno vypočíst napětí na prutu pomocí průřezové plochy a normálové síly. Nicméně v případě rámových prvků je stanovení napětí výrazně složitější a by bylo nutné uvažovat kombinaci momentů a sil na daném prutu. Proto jsou jako omezující podmínky stanoveny pouze zachování stability konstrukce.

7.1.2 Algoritmus optimalizační metody

Algoritmus 1: Simulované žíhání

```

1      T = Tmax,
2      P
3      F(P)
4      while iter < iterMax
5          count = 0
6          succ = 0
7          while count < countMax && succ < succMax
8              iter = iter + 1
9              count = count + 1
10             N = P - randi([-difL, difL])
11             p = exp((F(N) - F(P))/T)
12             if rand < p
13                 succ = succ + 1
14                 P = N
15             end
16         end
17     end
18     T = T * Tmult

```

Krok 1 Experimentování s volbou počáteční teploty T_{max} je nezbytné; optimální počáteční teplota by měla být vybrána tak, aby procento přijatých řešení přibližně dosahovalo 50%.

Krok 2-3 Zvolení počáteční proměnné a její ohodnocení. Symbol F reprezentuje optimalizovanou funkci.

Krok 4 Zastavovací podmínka algoritmu bývá obvykle stanovena jako maximální počet celkových iterací.

Krok 5-7 Symbol $count_{max}$ označuje maximální počet iterací, a $succ_{max}$ maximální počet úspěšných iterací na dané teplotní hladině.

Krok 10 Vytvoření nového řešení N vzniká přičtením náhodného celého čísla. $difL$ představuje rozsah náhodných čísel. Tento rozsah je závislý na aktuální teplotě, kde při maximální teplotě je roven cca 10% velikosti sady profilů a při minimální teplotě je roven 1.

Krok 11-12 Stanovení pravděpodobnosti přijetí nového řešení.

Krok 18 Ochlazení, tj. snížení teploty pomocí proměnné T_{mult} , je provedeno podle (Lepš, 2000). Parametr pro snížení teploty je definován vztahem:

$$T_{mult} = \left(\frac{T_{min}}{T_{max}} \right)^{succ_{max}/iter_{max}} ,$$

kde $iter_{max}$ je maximální počet iterací, $succ_{max}$ je maximální počet úspěšných iterací v daném kroku, T_{min} je minimální teplota a T_{max} je maximální teplota. Tento vztah zajistí, že při dosažení maximálního počtu iterací bude teplota dosahovat minimální hodnoty. Je vhodné zvolit hodnotu minimální teploty jako $T_{min} = 0,01 \cdot T_{max}$.

7.1.3 Účelová funkce

Při optimalizaci je nutné porovnávat jednotlivá nalezená řešení, aby bylo možné určit optimum. Úlohu budeme optimalizovat s ohledem na množství použitého materiálu, tedy celkový objem. Účelová funkce je poté ve tvaru

$$f(X) = \frac{V}{V_{min}} , \quad (7.1)$$

kde V je objem materiálu konstrukce a V_{min} je minimální objem. Tento tvar účelové funkce minimalizuje relativní objem použitého materiálu, aby bylo možné zavést penalizační funkci.

7.1.4 Penalizační funkce

Podmínku pro kritický součinitel $\lambda \geq 10$ lze nejlépe zohlednit pomocí penalizační funkce. Tato funkce slouží k eliminaci řešení, která nesplňují daný požadavek. Princip aplikace penalizační funkce spočívá v upravení cílové funkce (7.1) o tzv. penaltu, která reflektuje splnění či nesplnění předepsaných kritérií. Penalizační funkci lze formulovat následovně:

$$pf_i(X) = \frac{10}{|\lambda|} . \quad (7.2)$$

Účelová funkce s rozšířením penalizační funkce získává následující tvar:

$$f(X) = \frac{V}{V_{min}} + \frac{10}{|\lambda|} . \quad (7.3)$$

Výsledky optimalizace BnB

V kapitole 2 byly představeny konstrukce, které v této kapitole budou optimalizovány prostřednictvím *metody větví a mezí*, při níž budou využity příhradové prvky. Nejprve je ukázáno ověření správné implementace této metody na testovací konstrukci a poté jsou představeny výsledky optimalizace zadané věže.

8.1 Otestování implementace

■ Výpis kódu 8.1 Výsledek optimalizace BnB

```

1  Variable types: 54 continuous, 50 integer (50 binary)
2
3  Root relaxation: objective 1.574755e-01, 147 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)
4
5  Nodes | Current Node | Objective Bounds | Work
6  Expl Unexpl | Obj Depth IntInf | Incumbent BestBd Gap | It/Node Time
7
8  0 0 0.15748 0 8 - 0.15748 - - 0s
9  0 0 0.15748 0 8 - 0.15748 - - 0s
10 0 2 0.15748 0 8 - 0.15748 - - 0s
11 * 82 52 14 0.2272792 0.16113 29.1% 7.2 0s
12 * 145 73 24 0.2072792 0.16113 22.3% 5.3 0s
13 * 223 72 19 0.2031371 0.17117 15.7% 4.8 0s
14 * 238 76 11 0.1789949 0.17117 4.37% 5.0 0s
15
16 Explored 335 nodes (1514 simplex iterations) in 0.06 seconds (0.02 work units)
17 Thread count was 8 (of 8 available processors)
18
19 Solution count 4: 0.178995 0.203137 0.207279 0.227279
20
21 Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)

```

```

22 Best objective 1.789949493661e-01, best bound 1.789949493661e-01, gap 0.0000%
23 Optimized objective: 0.178995
24 Optimal solution: 5 1 6 2 1

```

Pro ověření správnosti implementace metody větví a mezí byla provedena kontrolní analýza na testovací pětiprutevé konstrukci viz kapitola 2. Díky velikosti této úlohy je možné snadno zjistit globální optimum metodou hrubé síly (Adéla Pospíšilová, 2012). Globální optimum má skladbu profilů $A_i = 0,05; 0,01; 0,06; 0,02; 0,01$ s pořadovými čísly 5 1 6 2 1. Pokud $n = 10$ je velikost sady profilů a $k = 5$ je počet proměnných, tedy počet neznámých profilů, pak tato úloha má $n^k = 10^5$ možných řešení. Knihovna Gurobi nabízí řadu nástrojů pro urychlení hledání optimálního řešení metodou BnB. V tomto příkladě byla nejprve použita čistá forma metody BnB bez těchto nástrojů pro předřešení problému. Výstupní soubor včetně zobrazeného řešení je v 8.1. Lze si všimnout, že ze 10^5 možných řešení algoritmus prozkoumal pouze 335 uzlů.

■ Výpis kódu 8.2 Výsledek optimalizace BnB

```

1 Presolve removed 208 rows and 0 columns
2 Presolve time: 0.00s
3 Presolved: 209 rows, 104 columns, 690 nonzeros
4 Variable types: 54 continuous, 50 integer (50 binary)
5 Found heuristic solution: objective 0.5828427
6
7 Root relaxation: objective 1.574755e-01, 135 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)
8
9 Nodes | Current Node | Objective Bounds | Work
10 Expl Unexpl | Obj Depth IntInf | Incumbent BestBd Gap | It/Node Time
11
12 0 0 0.15748 0 8 0.58284 0.15748 73.0% - 0s
13 H 0 0 0.3655635 0.15748 56.9% - 0s
14 0 0 0.15748 0 5 0.36556 0.15748 56.9% - 0s
15 H 0 0 0.2955635 0.15748 46.7% - 0s
16 H 0 0 0.2431371 0.15748 35.2% - 0s
17 H 0 0 0.2089949 0.15748 24.7% - 0s
18 0 0 0.15766 0 9 0.20899 0.15766 24.6% - 0s
19 H 0 0 0.1931371 0.15839 18.0% - 0s
20 0 0 0.15839 0 8 0.19314 0.15839 18.0% - 0s
21 0 0 0.16060 0 9 0.19314 0.16060 16.8% - 0s
22 0 0 0.16060 0 8 0.19314 0.16060 16.8% - 0s
23 H 0 0 0.1789949 0.16060 10.3% - 0s
24 0 0 0.16060 0 11 0.17899 0.16060 10.3% - 0s
25 0 0 0.16077 0 7 0.17899 0.16077 10.2% - 0s
26 0 0 0.16131 0 7 0.17899 0.16131 9.88% - 0s
27 0 0 0.16337 0 9 0.17899 0.16337 8.73% - 0s
28 0 0 0.16342 0 12 0.17899 0.16342 8.70% - 0s
29 0 0 0.17148 0 10 0.17899 0.17148 4.20% - 0s
30 0 0 0.17411 0 10 0.17899 0.17411 2.73% - 0s
31
32 Cutting planes:
33 Gomory: 2

```

```

34   Implied bound: 3
35   MIR: 1
36   StrongCG: 1
37   GUB cover: 3
38
39   Explored 1 nodes (403 simplex iterations) in 0.13 seconds (0.02 work units)
40   Thread count was 8 (of 8 available processors)
41
42   Solution count 7: 0.178995 0.193137 0.208995 ... 0.582843
43
44   Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
45   Best objective 1.789949493661e-01, best bound 1.789949493661e-01, gap 0.0000%
46
47   Optimized objective: 0.178995
48   Optimal solution: 5 1 6 2 1

```

Pro složitější konstrukce je výhodné využít tyto nástroje k předřešení problému. Proto byla na stejnou konstrukci aplikována modifikace BnB spolu s využitím všech dostupných nástrojů, které Gurobi nabízí. Výsledek této optimalizace je zobrazen ve výstupním souboru 8.2. Lze si všimnout, že s pomocí kompletní knihovny Gurobi bylo nutné prozkoumat pouze jeden uzel metody BnB.

8.2 Výsledek optimalizace věže

Při optimalizaci věže s příhradovými prvky je nemožné diskretizovat jednotlivé pruty, neboť každý uzel představuje kloub na konstrukci, čímž by konstrukce byla staticky přeuročitá (Kočvara, 2002). Proto celkově konstrukce zahrnuje 112 prutů, které jsou navzájem propojeny 32 kloubovými styčníky. V případě příhradové konstrukce je nejprve vhodné posoudit statickou určitost konstrukce rovnicí

$$s = 3 \cdot n - p - r = 3 \cdot 32 - 112 - 12 = -28 \quad , \quad (8.1)$$

kde s je stupeň statické určitosti, n je počet styčníků, p je počet prutů a r je počet odebraných stupňů volnosti vnějšími vazbami. Jelikož je stupeň statické určitosti $s < 1$, je konstrukce staticky neurčitá a s vyjadřuje stupeň statické neurčitosti (SN), tedy 28krát staticky neurčitá.

Je důležité poznamenat, že v případě realizace této věže by pravděpodobně byly příčle v každém patře spojeny do tuhého rámu ve vodorovné rovině. Toto opatření se provádí, jelikož se příhradová konstrukce bez tohoto ztužení blíží výjimkovému případu podepření a první vlastní tvar takové konstrukce by se nejspíš podobal deformaci na obrázku 8.1.

Zohlednění této skutečnosti pro příhradové prvky představuje výzvu, kterou lze obtížně zavést přímo do metody konečných prvků. Proto bylo nezbytné vytvořit fiktivní pruty, které by diagonálně ztužily příčle, podobně jako v případě rámového spoje příčlí. Stanovení tuhosti fiktivních



■ **Obrázek 8.1** První tvar vybočení věže bez ztužení jednotlivých pater - půdorysný pohled

prutů je uvedeno v dodatku A.3

8.3 Implementace metody BnB

Jak již bylo uvedeno v předešlých kapitolách, správná implementace *metody větví a mezí* je klíčem k úspěchu optimalizačního algoritmu. Pro jednoduché příklady je vhodné si naimplementovat vlastní algoritmus pro metodu BnB, ovšem pokud je úloha velkého rozsahu, jako v našem případě, je vhodnějším způsobem využít dostupnou knihovnu pro řešení metody BnB. Pro svůj příklad jsem zvolil toolbox YALMIP (Löfberg, 2004) s knihovnou Gurobi (Gurobi Optimization, LLC, 2023), která slouží k řešení optimalizačních problémů pomocí *metody větví a mezí*. Tato knihovna umožňuje efektivně řešit i relaxovanou *metodu větví a mezí*.

8.3.1 Výsledky

Metoda větví a mezí teoreticky zaručuje nalezení globálního optima. Přesto byl algoritmus spuštěn několikrát pro ověření nalezeného optima, jelikož se mohou vyskytovat numerické chyby v řešení relaxace. Jednotlivé průřezy pro skupiny prutů jsou uvedeny v tab. 8.1. Kompletní výstupní soubor z programu Gurobi je k dispozici v appendixu A.4. Nalezené optimum obsahuje $0,2565 \text{ m}^3$ použitého materiálu a hodnotu prvního kladného kritického břemene, vypočteného pomocí globálního stabilitního posudku, $\lambda_1 = 5,021$.

■ **Tabulka 8.1** Nalezené optimum pomocí metody BnB

	Průřez
Sloupy	SHS 100/100/4,0
Příčle	SHS 40/40/2,0
Diagonály	SHS 50/50/2,0

Výsledky optimalizace SA

V této kapitole jsou stručně shrnuty výsledky dosažené pomocí metody *simulovaného žihání*, kdy byly využity rámové prvky. Kapitola detailně prezentuje zvolené parametry této optimalizační metody, odhaluje nalezené optimum a následně provádí srovnání tohoto řešení s výsledky získanými pomocí komerčních programů.

9.1 Nastavení parametrů pro stabilitní posudek

Zadaná věž v kapitole 2 byla optimalizována metodou simulovaného žihání s využitím rámových prvků. Nejprve bylo nutné nastavit parametry pro stabilitní analýzu, což představuje důležitou část celé optimalizace. Jak bylo zmíněno, všechny prvky na konstrukci byly idealizovány jako rámové prvky, kde každý jednotlivý prut byl diskretizován pomocí sedmi rámových elementů. Důležitost a vliv této diskretizace je vysvětlena v (Glanc, 2022), ale je určitě vhodné krátce zmínit, že diskretizace prutů slouží především k napodobení vlastního tvaru při ztrátě stability.

Je doporučeno, aby byl každý prut rozdělen na minimálně 4 elementy pro dosažení uspokojivých výsledků při posuzování stability (Jandera, 2023). Matematický problém vlastních čísel hledá hodnoty blízké nule, a proto mohou být spočtené hodnoty kladné i záporné. Tento předpoklad je smysluplný v případě, kdy referenční zatížení představuje například zatížení větrem, protože je logické, že vítr může zatěžovat konstrukci i v opačném směru. Ovšem moje kombinace zatížení na zadané konstrukci, především ve svislém směru z , představuje zatížení vlastní tíhou. Záporná vlastní čísla, která by otáčela směr zatížení, v tomto případě nemají smysl, a proto jsou uvažována pouze kladná vlastní čísla.

■ **Tabulka 9.1** Vstupní parametry optimalizační metody SA

Maximální teplota T_{max}	3
Minimální teplota T_{min}	0,03
Maximální počet přijatých řešení na dané teplotě $succ_{max}$	5
Maximální počet iterací na dané teplotě $count_{max}$	10
Maximální počet iterací	1000

9.2 Nastavení parametrů pro optimalizaci

Druhým klíčovým krokem pro provedení optimalizace je vhodné nastavení parametrů optimalizační metody *simulovaného žhání*. Experimentováním s algoritmem byla stanovena počáteční teplota, maximální počet iterací a další parametry, které jsou shrnuty v tabulce 9.1. Hlavním parametrem je maximální teplota T_{max} , která byla nastavena tak, aby byla přijata přibližně polovina řešení. Dle (Lepš, 2000) je vhodné zvolit $T_{min} = 0,01 \cdot T_{max}$ a doporučený poměr maximálního počtu všech iterací a počtu úspěšných iterací na dané teplotní hladině zvolit $count_{max} = 10succ_{max}$.

9.3 Výsledky optimalizace

Metoda *simulovaného žhání* z definice nezaručuje nalezení globálního optima. Proto byl algoritmus spuštěn několikrát za sebou a algoritmus pokaždé došel ke stejnému výsledku zobrazeném v tabulce 9.2. Toto nalezené optimum obsahuje $0,4722 \text{ m}^3$ použitého materiálu a hodnotu prvního kladného kritického břemene $\lambda_1 = 11,3273$.

■ **Tabulka 9.2** Nalezené optimum pomocí metody SA

	Průřez
Sloupy	SHS 100/100/4,0
Příčle	SHS 100/100/3,0
Diagonály	SHS 100/100/3,0

■ **Tabulka 9.3** Srovnání prvních šesti kritických břemen λ

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
DP	11,3237	12,1030	12,2372	12,4420	16,0008	16,4447
OOFEM	11,3209	12,0989	12,2331	12,4378	15,9937	16,4367
SCIA	11,0800	11,8100	11,9400	12,1400	15,5590	16,0000

Toto nalezené optimum obsahuje prvních šest kritických břemen, jak je shrnuto v tabulce 9.3. V této tabulce jsou také zahrnuty výsledky stabilitní analýzy provedené v softwaru SCIA Engineer (Nemetschek, 2019) a OOFEM (Patzák, 2009). Z tabulky je patrné, že odchylky mezi progra-

mem OOFEM a mou implementací jsou zanedbatelné a pravděpodobně způsobené numerickými chybami. Tato přesná shoda je především dána použitím stejného tvaru matice počátečních napětí pro rámový prvek. Odchyly od programu SCIA Engineer jsou výraznější, ale mohou být způsobeny odlišnou implementací matice počátečních napětí. Bohužel je způsob sestavení této matice v programu SCIA Engineer v dostupných materiálech nedohledatelný.

Pro porovnání jednotlivých vlastních tvarů lze využít metodu, která je obvyklá při srovnávání vlastních tvarů v modální analýze (Pohlídalová, 2014). Tato metoda využívá koeficienty korelace modální analýzy (MAC). Pro srovnání jednotlivých vlastních tvarů vypočtených různými přístupy může být použit následující vzorec:

$$\text{MAC}_j = \frac{|\{r_j^{teor}\}^T \{r_j^{obs}\}|^2}{(\{r_j^{teor}\}^T \{r_j^{teor}\})(\{r_j^{obs}\}^T \{r_j^{obs}\})} \quad , \quad (9.1)$$

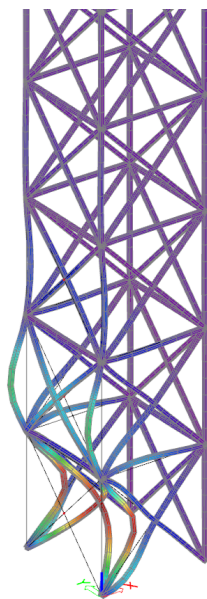
kde r_j^{obs} je vektor odpovídající vlastnímu tvaru vypočtenému pomocí mé stabilitní analýzy a r_j^{teor} je vektor vlastního tvaru vypočtený pomocí jiného softwaru. Tento koeficient může nabývat hodnot $\text{MAC} = \langle 0; 1 \rangle$.

Pokud je hodnota koeficientu rovna 1, dochází k absolutní shodě mezi porovnávanými vektory; pokud je naopak rovna 0, jsou vektory naprosto odlišné. Limitní hodnoty koeficientů MAC pro shodu vlastních tvarů v modální analýze dle (Plachý, 2003) jsou $\text{MAC} = \langle 0, 95; 1 \rangle$. V tabulce 9.4 je shrnutí MAC koeficientů. Z těchto hodnot tedy vyplývá, že shoda mezi vlastními tvary vypočtenými mou stabilitní analýzou a stabilitní analýzou naimplementovanou v těchto programech je téměř dokonalá.

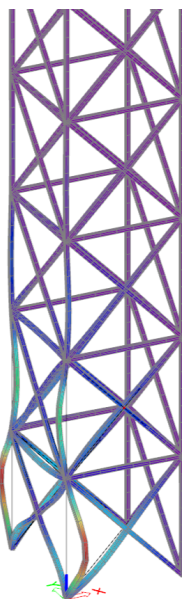
■ **Tabulka 9.4** Srovnání MAC koeficientů

	MAC ₁	MAC ₂	MAC ₃	MAC ₄	MAC ₅	MAC ₆
OOFEM	0,999932	1,000000	1,000000	1,000000	0,999443	0,999748
SCIA	0,999932	0,999994	0,999987	0,999988	0,999443	0,999748

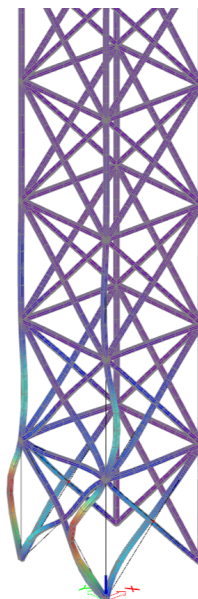
Obrázky 9.1 a 9.2 zobrazují vlastní tvary konstrukce pro vypočtená kritická břemena z tabulky 9.3. Vlastní tvary jsou normované, a červená barva reprezentuje maximální posun v daném vykresleném tvaru.



(a) První vlastní tvar

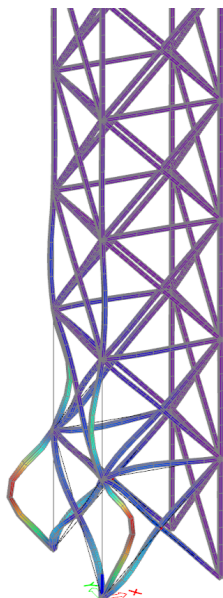


(b) Druhý vlastní tvar

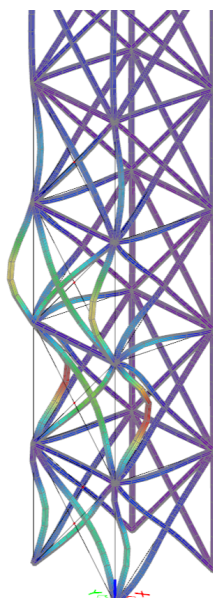


(c) Třetí vlastní tvar

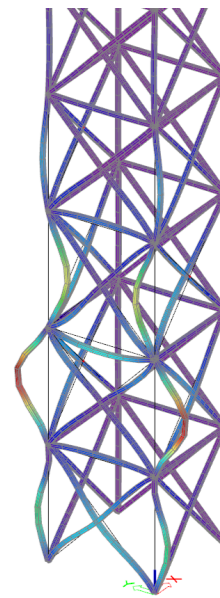
■ **Obrázek 9.1** Vlastní tvary vybočení konstrukce



(a) Čtvrtý vlastní tvar



(b) Pátý vlastní tvar



(c) Šestý vlastní tvar

■ **Obrázek 9.2** Vlastní tvary vybočení konstrukce - pokračování

Kapitola 10

Srovnání výsledků

Devátá kapitola se zaměřuje na srovnání výsledků dosažených oběma přístupy. První část kapitoly se věnuje porovnání nalezených optim. Zároveň je porovnána stabilita konstrukce v obou optimalizačních přístupech. Druhá část této kapitoly se zaměřuje na posouzení stability obou optimalizovaných konstrukcí v souladu s Eurokódem. Tímto porovnáním kapitola dává celkový přehled o výsledcích a bezpečnosti dosažené pomocí obou metod v rámci diplomové práce.

10.1 Porovnání přístupů k optimalizaci příhrad

V této práci byly představeny dva přístupy k optimalizaci příhradových konstrukcí. První přístup představuje běžný náhled na příhradovou konstrukci pomocí příhradových prvků. Pro optimalizaci pomocí tohoto přístupu byla využita *metoda větví a mezí*, tento přístup bude dále označován jako (*Metoda I*). Druhý přístup, vysvětlený a použitý v této práci, je využití rámových prvků

■ **Tabulka 10.1** Srovnání použitých přístupů k optimalizaci příhrad

Pracovní označení	Metoda optimalizace	typ FEM analýzy	typ FEM prvků	omezení napětí a posunů	vliv stability	nalezené optimum
<i>Metoda I</i>	Metoda větví a mezí	statická analýza	příhradové prvky	ANO	pouze lokální	globální optimum
<i>Metoda II</i>	Simulované žíhání	stabilitní analýza	rámové prvky	NE	globální i lokální	lokální optimum

pro optimalizaci příhradových konstrukcí. Pro optimalizaci pomocí tohoto přístupu byla využita *metoda simulovaného žíhání*, dále označován jako (*Metoda II*). Smyslem porovnání těchto metod spočívá především v poukázání na výhody a nedostatky jednotlivých přístupů. Souhrnně jsou tyto výhody a nevýhody uvedeny v tabulce 10.1.

Zatímco *Metoda I* z své podstaty vede ke globálnímu optimu, u *Metody II* to zaručené není. Ovšem z hlediska následného stabilitního posouzení věže je možné předepsat okrajové podmínky v podobě zachování stability, zatímco u *Metody I* jsou omezení pouze ve formě maximálních posunů a napětí na jednotlivých prutech.

Z těchto skutečností vyplývá, že vhodnost zvolené metody úzce závisí na typu konstrukce. Pokud je zřejmé, jako u mé zadané konstrukce, že o únosnosti bude rozhodovat nejspíš globální stabilita, je vhodné zvolit *Metodu II* i za cenu rizika nalezení pouze lokálního optima. Naopak, pokud o únosnosti celé konstrukce bude rozhodovat vzpěr jednotlivých prutů, je lepší volbou *Metoda I*. Ta nejenže zaručuje nalezení globálního optima, ale díky formulaci problému lze zajistit konvexní okrajové podmínky, což vede k výrazně rychlejšímu nalezení hledaného optima.

10.2 Porovnání výsledků optimalizace

Jak již bylo naznačeno v předchozí části této kapitoly, *Metoda I* našla optimální řešení z hlediska množství použitého materiálu. Ovšem bez zachování podmínek globální stability konstrukce, jelikož toto omezení nebylo žádným způsobem u této metody zavedeno. Zatímco *Metoda II* našla optimální řešení se zachováním podmínky $\alpha_{cr} \geq 10$, což nejen že zajišťuje lineární stabilitu konstrukce, ale především umožňuje posuzovat konstrukci pouze na účinky prvního řádu. Shrnutí těchto výsledků je uvedeno v tabulce 10.2.

■ **Tabulka 10.2** Porovnání nalezených optim

	Metoda I	Metoda II
Průřez sloupu	SHS 100/100/4,0	SHS 100/100/4,0
Průřez příčle	SHS 40/40/2,0	SHS 100/100/3,0
Průřez diagonály	SHS 50/50/2,0	SHS 100/100/3,0
Součinitel α_{cr}	5,021	11,324
Objem materiálu	0,2565 [m ³]	0,4722 [m ³]

10.3 Posouzení optimalizovaných konstrukcí

Dvojice optimalizovaných konstrukcí byly posouzeny dle kapitoly 3 s využitím Eurokódu ČSN EN 1993-1-1. Detailní stabilitní posudek pro *Metodu II* je uveden v apendixu A.5. Ale obdobným



(a) Průřezová plocha konstrukce z *Metody I* (b) Průřezová plocha konstrukce z *Metody II*

■ **Obrázek 10.1** Porovnání průřezové plochy na prutech u nalezeného optima

způsobem bylo provedeno posouzení i pro *Metodu I*. Výsledky těchto posudků jsou stručně zobrazeny v tabulkách 10.3 a 10.4.

Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou I*

Pro posouzení globálního stabilitního posudku bylo nezbytné příhradovou konstrukci převést na konstrukci s rámovými prvky. Výsledky posuzované konstrukce ukazují, že optimalizovaná věž nevyhoví ve stabilitním posudku. Podmínka $\alpha_{cr} < 10$ stanovuje, že je nutné provést výpočet vnitřních sil podle teorie druhého řádu. V tabulce 10.3 je zobrazen výsledek rovinného vzpěru, který je, jak si lze všimnout, rozhodujícím faktorem pro nevyhovující posudek. Konstrukce nevyhověla především kvůli absenci omezení na stabilitu během optimalizace této konstrukce, což vedlo k příliš štíhlému návrhu.

Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou II*

Z výsledků lze pozorovat, že věž optimalizovaná pomocí *Metody II* splňuje požadavky na namáhání jednotlivých prutů, i když nebylo zavedeno omezení napětí při samotné optimalizaci. Tato skutečnost však nemůže být považována za automatickou. Konstrukce vyhovuje především díky dodržení podmínky $\alpha_{cr} > 10$, která nevyžaduje výpočet vnitřních sil podle teorie druhého řádu. Nicméně nelze plně garantovat, že konstrukce splní tyto požadavky pouze na základě této podmínky.

Vnitřní síly byly vypočítány podle teorie prvního řádu se zavedením počátečních imperfekcí soustavy. Posouzení nejvíce namáhaných částí konstrukce bylo provedeno pomocí interakčních podmínek N+M.

■ **Tabulka 10.3** Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou I*

Posudek sloupu	
Posudek rovinného vzpěru	1,26
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	1,26
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE
Posudek diagonály	
Posudek rovinného vzpěru	2,57
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	2,57
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE
Posudek příčle	
Posudek rovinného vzpěru	5,48
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	5,51
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE

■ **Tabulka 10.4** Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou II*

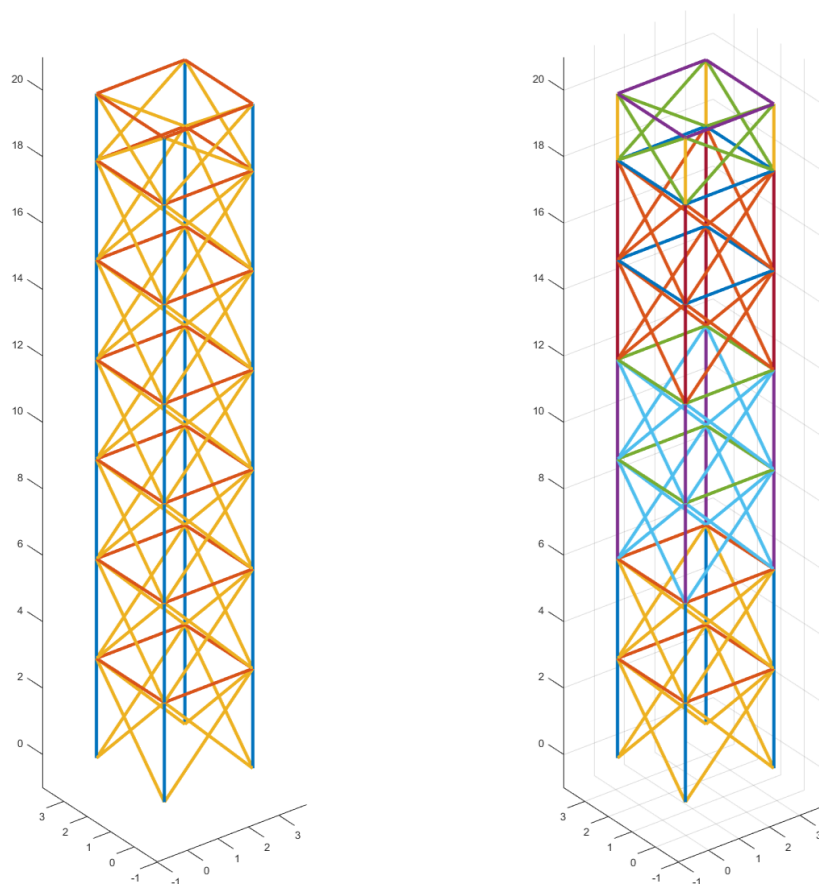
Posudek sloupu	
Posudek rovinného vzpěru	0,96
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	0,97
Závěrečný posudek	VYHOVUJE
Posudek diagonály	
Posudek rovinného vzpěru	0,18
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	0,21
Závěrečný posudek	VYHOVUJE
Posudek příčle	
Posudek rovinného vzpěru	0,60
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	0,60
Závěrečný posudek	VYHOVUJE

Kapitola 11

Snížení modularity

V předchozí kapitole byla záměrně zvolena vysoká modularita struktury věže, která však měla významný vliv na nalezené optimální řešení. Tato kapitola si klade za cíl porovnat výsledky této optimalizace s předchozími přístupy, přičemž struktura věže, popsaná v kapitole 2.2, byla mírně upravena. Jedinou provedenou úpravou na věži bylo rozdělení prutů do více skupin. Pruty jsou stále rozčleněny do sloupů, příčel a diagonál, ale navíc jsou tyto skupiny dále rozděleny na různá patra. To znamená, že sloupy, příčle a diagonály v prvních dvou patrech tvoří jednu skupinu. Stejně tak jsou prvky v 3. a 4. patře opět rozděleny na sloupy, příčle a diagonály. Další skupinu tvoří prvky v 5. a 6. patře, opět rozdělené do skupin. Poslední skupiny představují prvky v 7. patře. Rozdělení těchto prutů je zobrazeno na obrázku 11.1b, kde jednotlivé barvy představují skupiny prutů.

Navýšení skupin prutů vedlo k nalezení lepšího řešení v obou zvolených přístupech optimalizace (*Metoda I* a *Metoda II*). Rozdíl mezi zvolenými modularitami je zřejmý. Navýšením počtu modulů exponenciálně narůstá počet řešení, ovšem za cenu nalezení lepšího řešení.



(a) Původní modularita věže

(b) Snížená modularita věže

■ **Obrázek 11.1** Modularita věže

11.1 Výsledky - *Metoda I*

Optimalizační metoda BnB našla řešení obsahující o 13.26% méně materiálu, ale výpočetní čas je více než 760krát delší, než u původního zadání věže. Na tomhle příkladu je možné demonstrovat, jak výrazně může modularita konstrukcí ovlivnit použitelnost optimalizace. Dalším důležitým výsledkem této optimalizace je demonstrace předností metody BnB, jelikož úloha obsahuje 9^{12} možných řešení, ale optimalizační metoda prohledala pouze 321815 uzlů se zaručením nalezení globálního optima. Srovnání těchto parametrů je shrnuto v tabulce 11.1.

■ **Tabulka 11.1** Porovnání výsledků pro různou modularitu - Metoda I

	Původní modularita	Snížená modularita
Objem [m³]	0,2565	0,2225
Součinitel λ	5,021	5,4418
Počet možných řešení	9 ³	9 ¹²
Prohledaných uzlů	224	321815
Výpočetní čas	5,21 s	3963,72 s

11.2 Výsledky - Metoda II

Metoda simulovaného žíhání, jak již bylo zmíněno, je optimalizační metoda formulovaná jako NAND. Výpočetní doba jednoho vnitřního cyklu je shodná pro obě varianty modularity. To platí především proto, že přidáním modulů pouze zvyšujeme počet možných řešení, avšak optimalizovaná konstrukce zůstává stejná, tedy výpočetní čas pro stabilitní analýzu zůstává konstantní. Ale samozřejmě nárůst možných řešení výrazně ztěžuje nalezení optima.

V této práci bylo zmíněno, že metoda SA sama o sobě nezajišťuje nalezení globálního optima. Avšak opakovaným spuštěním algoritmu této metody lze získat informaci o tom, zda se lokální optimum alespoň shoduje. Omezení výpočetního výkonu počítače a časového rámce vedly k nedostatečné shodě lokálního optima při opakovaných bězích. Pro získání spolehlivějších výsledků by bylo nutné spustit tuto metodu s výrazně vyšším maximálním počtem iterací. Přestože algoritmus metody SA neposkytl jistotu nalezení kvalitního lokálního optima, dosáhl téměř 25% snížení množství použitého materiálu ve srovnání s původní konstrukcí. Srovnání těchto parametrů je v tabulce 11.2.

■ **Tabulka 11.2** Porovnání výsledků pro různou modularitu - Metoda II

	Původní modularita	Snížená modularita
Objem [m³]	0,4722	0,3548
Součinitel λ	11,324	10,039
Výpočetní čas jedné iterace	6,68 s	6,68 s
Maximální počet iterací	1000	2000
Možných řešení	9 ³	9 ¹²
Výpočetní čas	6680 s	13360 s

11.3 Posouzení optimalizovaných konstrukcí

Optimalizované konstrukce byly posouzeny dle kapitoly 3 s využitím Eurokódu ČSN EN 1993-1-1. Z tabulek 11.3 a 11.4 je možné si všimnout, že ani jedna z optimalizovaných konstrukcí nevyhověla ve stabilitním posudku. Hodnoty posudků v tabulkách jsou pro maxima z posuzovaných prutů v rámci skupiny. Jak již bylo naznačeno v předchozí kapitole, splnění stabilitního

■ **Tabulka 11.3** Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou I*

Posudek sloupu	
Posudek rovinného vzpěru	1,13
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	1,14
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE
Posudek diagonály	
Posudek rovinného vzpěru	0,95
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	0,97
Závěrečný posudek	VYHOVUJE
Posudek příčle	
Posudek rovinného vzpěru	5,27
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	5,27
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE

■ **Tabulka 11.4** Posouzení konstrukce optimalizované *Metodou II*

Posudek sloupu	
Posudek rovinného vzpěru	1,05
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	1,06
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE
Posudek diagonály	
Posudek rovinného vzpěru	1,16
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	1,16
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE
Posudek příčle	
Posudek rovinného vzpěru	1,70
Posudek na kombinaci ohybu a osového tlaku	1,70
Závěrečný posudek	NEVYHOVUJE

omezení *Metody II* nezaručuje vyhovující stabilitní posudek dle ČSN EN 1993-1-1. Pro zaručení tohoto posudku by bylo nutné zavést penalizační funkci, která by omezovala řešení ve smyslu této normy, ale to nebylo předmětem této práce.

Kapitola 12

Závěr

V rámci této práce byla provedena rozsáhlá rešerše literatury v oblasti globální optimalizace konstrukcí. Hlavním cílem bylo porovnat výsledky dvou různých formulací optimalizace: metody větví a mezí s využitím příhradových prvků s simultánní analýzou a návrhem (formulace SAND) a metody simulovaného žíhání s vnořenou analýzou a návrhem (formulace NAND). Zjištění z rešerše naznačila, že vhodná formulace pro nalezení globálního optima u příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků zatím neexistuje.

Obě metody byly implementovány a aplikovány na optimalizaci příhradové konstrukce. Zvláštní důraz byl kladen na posouzení stability optimalizovaných konstrukcí. Metoda SAND vedla ke globálnímu optimu, ale nedostatečné zohlednění stabilitních omezení vedlo k neuspokojivým výsledkům v následné stabilitní analýze. Naopak metoda NAND přinesla konstrukce, které sice vykazovaly vyšší množství použitého materiálu, ale zachovaly si stabilitu ovšem bez jistoty nalezení globálního optima.

Dalším prvkem analýzy bylo zkoumání vlivu modularity konstrukce na dosažené výsledky. Snížením míry modularity došlo k nalezení řešení s menším objemem materiálu, ovšem za cenu nárůstu výpočetního času.

Výsledky této práce poukazují na nutnost dalšího výzkumu a vývoje nových formulací a metod pro rozměrovou optimalizaci konstrukcí se zohledněním stability, s cílem zajistit nalezení globálního optima i pro reálně velké konstrukce.

Appendix

A.1 Kroneckerův a Hadamardův součin

Tato část je převzata z (A. Pospíšilová et al., 2013).

Hadamardův součin (také známý jako prvkový součin nebo skalární součin) matic $\mathbf{A}_{[n \times p]} = (a_{i,j})$ a $\mathbf{B}_{[n \times p]} = (b_{i,j})$ je matice $\mathbf{C}_{[n \times p]} = c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$. Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} musí mít stejnou velikost. Označení je $\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (a_{i,j}b_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}b_{n,p} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Kroneckerův součin (také známý jako tenzorový součin) matic $\mathbf{A}_{[n \times p]} = (a_{i,j})$ a $\mathbf{D}_{[m \times q]} = (d_{k,l})$ je matice \mathbf{E} o velikosti $mn \times pq$ a definována jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} = (a_{i,j}\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{D} & \cdots & a_{1,p}\mathbf{D} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathbf{D} & \cdots & a_{n,p}\mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Stabilita příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků

Tato část je převzata a poupravena z (Glanc, 2022).

Lineární analýza

Hlavní část lineární analýzy spočívá ve vytvoření matice tuhosti. Sestavení této matice je demonstrováno na prvku s 12 stupni volnosti, přičemž uvažujeme, že prut je přímý s konstantním průřezem po celé délce prvku a průřez je bisymetrický vůči hlavním osám průřezu. Díky těmto předpokladům je možné uvažovat, že střed smyku se shoduje s těžištěm průřezu. Budeme uvažovat posuny od osově deformace, ohybové deformace a torzní deformace. Posuny vyvolené příčnou smykovou deformací a vybočení mimo rovinu od torzního zatížení zanedbáváme. Tyto předpoklady nám sice omezí použitelnost prezentovaných vztahů, ale pro analýzu většiny ráků ve stavebnictví jsou dostačující. Orientace koncových sil k lokálnímu souřadnému systému daného elementu a použité názvosloví je zobrazeno v obrázku 4.1. Pro orientaci sil je používán pravoúhlý pravotočivý souřadný systém. Díky dříve zmíněným předpokladům je složení matice tuhosti výrazně jednodušší, jelikož je část vlivů oddělena. Například normálové síly F_x jsou vyvolané jen posuny u ; stejně tak torzní moment M_x je způsoben pouze pootočením θ_x . Díky těmto předpokladům jsou některé členy matice tuhosti nulové. Další zjednodušení nastává díky předpokladu, že ohybové momenty a smykové síly v jedné rovině nezpůsobují deformace v rovině druhé, což přinese další nulové členy v matici tuhosti. V důsledku toho vznikne matice tuhosti 12×12 , kterou lze rozdělit na čtyři samostatné případy:

1. Prut s normálovými silami
2. Prut pouze s torzními momenty
3. Ohýbaný prut kolem osy y
4. Ohýbaný prut kolem osy z

Spojením těchto čtyř případů získáme kompletní matici tuhosti 12×12 pro prut znázorněný na obrázku 4.1 ve tvaru

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \right\} = E \left[\begin{array}{cccccccccccc} \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & -\frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{4I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L} & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{4I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{L} & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \tau_{x1} \\ \tau_{y1} \\ \tau_{z1} \\ u_{x2} \\ v_{y2} \\ w_{z2} \\ \tau_{x2} \\ \tau_{y2} \\ \tau_{z2} \end{array} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Výpočet vnitřních sil na konstrukci

Kvůli nelinearitě výpočtu globální stabilitní analýzy je nejprve nutné vypočítat vnitřní síly na jednotlivých elementech od zadaného zatížení. S využitím globální matice tuhosti a vektoru vnějšího zatížení, který představuje velikost zatížení v jednotlivých styčnicích, jsme schopni snadno vypočítat vnitřní síly. Pro výpočet sil nejprve použijeme následující rovnici, která je základem deformační metody:

$$[K] \cdot \{r\} = \{f\} \quad , \quad (\text{A.4})$$

kde $[K]$ představuje matici tuhosti, $\{f\}$ je vektor zatížení a $\{r\}$ vyjadřuje vektor neznámých přemístění.

Pomocí výše zmíněné rovnice jsme schopni vypočítat neznámá přemístění styčniců celé konstrukce. Tyto přemístění v globálním souřadném systému je nutné zpět přiřadit jednotlivým elementům a poté pomocí jednotlivých transformačních matic elementů zpátky přetransformovat do lokálních souřadných systémů elementů. Koncové síly v jednotlivých elementech lze pak vypočítat pomocí lokálních matic tuhosti a vektorech s přiřazenými neznámými přemístěními v lokálním souřadném systému.

Nelineární analýza

V nelineární analýze je i nadále lineárně pružná analýza nepostradatelná. Jejím základním prvkem je matice tuhosti $[K]$, v případě globální analýzy pak rovnice

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad . \quad (\text{A.5})$$

Předpokládáme-li, že při metodách nelineární analýzy byly základní nelineární rovnice redukovány na množinu, pro kterou je možné využít řešení simultánních algebraických rovnic. Pak lze chování sledovat iterativně a každou metodu lze symbolicky zapsat

$$[K_t]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad . \quad (\text{A.6})$$

V rovnici (A.6) představuje $[K_t]$ obecnou nelineární tečnou matici tuhosti, která se skládá z lineární pružné matice tuhosti a jeden nebo více komponentů zohledňující zatížení nebo deformace na začátku přírůstku. Různé úrovně nelineární analýzy se poté liší v $[K_t]$, která zahrnuje dané nelinearity. Způsob, jak jsou rovnice formulovány, či způsob řešení rovnic může vyžadovat jistou diskretizaci prutu, tedy rozdělení jednotlivých prutů na menší části, např. pro efektivnější vystižení tvaru deformace konstrukce. V našem případě, tedy analýze druhého řádu, se při for-

mulaci rovnic zohledňují konečné deformace a posuny, čímž rovnice (A.6) nabývá tvaru

$$[K + K_\sigma]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad , \quad (\text{A.7})$$

kde $[K_\sigma]$ představuje matici počátečních napětí (známou také jako matici geometrické tuhosti). Tato matice vyjadřuje změnu tuhosti v závislosti na aktuální napjatosti. Způsob vytvoření matice $[K_\sigma]$ lze provést několika způsoby, které si ukážeme v další části této práce. Nicméně, tento způsob analýzy vyžaduje diskretizaci prutů pro dosažení uspokojivých výsledků.

Pro výpočet velikosti kritické břemena se rovnice (A.7) převede do zobecněné úlohy vlastních čísel, ve kterém je rovnice rovnováhy v kritickém stavu v následujícím tvaru

$$[K + \lambda K_\sigma^{ref}]\{\Delta\} = \{0\} \quad , \quad (\text{A.8})$$

kde $[K_\sigma]$ je matice geometrické tuhosti vypočtená pro referenční zatížení $\{P_{ref}\}$, λ (vlastní číslo) součinitel kritického zatížení pro zatížení $\{P_{ref}\}$ a vektor $\{\Delta\}$ (vlastní vektor) vyjadřuje deformovaný tvar konstrukce pro jednotlivá vlastní čísla. Tato rovnice vede tedy k řešení úlohy vlastních čísel, která lze pomocí výpočetních programů vcelku snadno vyřešit.

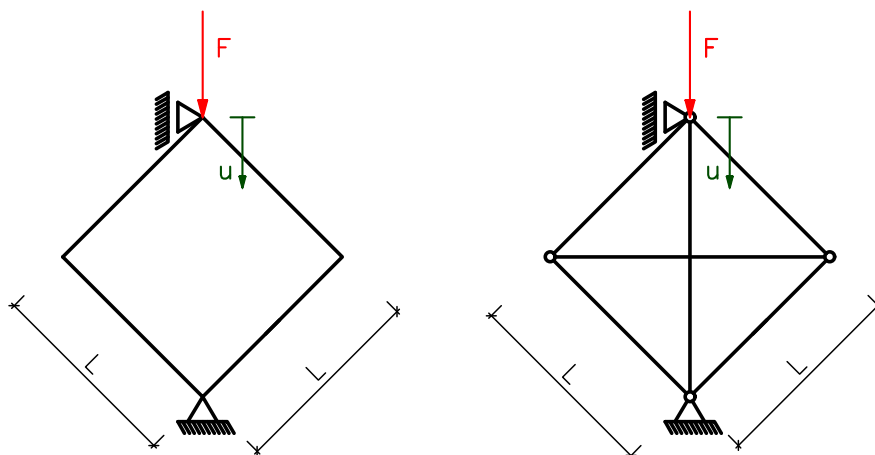
Matice počátečních napětí

Pro snadnější pochopení sestavení matice počátečních je možné sestavení opět rozdělit na dílčí podproblémy a následně spojením těchto částí sestavit kompletní matici počátečních napětí. Nejprve je nutné sestavit K_σ pro rovinný prvek s osovou silou, poté rovinný prvek zatížen osovou silou a ohybem kolem jedné osy. Dalším prvkem bude rovinný prvek s osovou silou a torzním momentem. Dosazením matic těchto podproblémů do matice kompletní matice počátečních napětí, získáme matici ve tvaru

$$[K_\sigma] = \begin{bmatrix}
 u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\
 \frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{M_{y1}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & 0 & -\frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{M_{y2}}{L} & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{L} \\
 & & \frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z1}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & 0 & 0 & -\frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z2}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{x2}}{L} \\
 & & & \frac{F_{x2}I_p}{AL} & -\frac{2M_{z1}-M_{z2}}{6} & \frac{2M_{y1}-M_{y2}}{6} & 0 & -\frac{M_{y1}}{L} & -\frac{M_{z1}}{L} & -\frac{F_{x2}I_p}{AL} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{6} & \frac{M_{y1}+M_{y2}}{6} \\
 & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & 0 & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{6} & -\frac{F_{x2}L}{30} & \frac{M_{x2}}{2} \\
 & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & -\frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{M_{y1}+M_{y2}}{6} & -\frac{M_{x2}}{2} & -\frac{F_{x2}L}{30} \\
 & & & & & & \frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & -\frac{M_{y2}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} \\
 & & & & & & & & \frac{6F_{x2}}{5L} & -\frac{M_{z2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} \\
 & & & & & & & & & \frac{F_{x2}I_p}{AL} & \frac{M_{z1}-2M_{z2}}{6} & -\frac{M_{y1}-2M_{y2}}{6} \\
 & & & & & & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15}
 \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

Sym.

A.3 Stanovení tuhosti fiktivních prutů



■ **Obrázek A.1** Stanovení tuhosti fiktivního prutu

Zavedené diagonální fiktivní pruty musí mít tuhost odpovídající tuhosti tohoto rámu. Zjednodušeně to lze zavést pomocí plochy fiktivního průřezu vyjádřeného pomocí momentu setrvačnosti I_z příčle. Způsob, jakým lze tento vztah stanovit, je vytvoření dvou konstrukcí reprezentující rám. První s využitím rámových prutů a druhá s využitím příhradových prvků. Tyto konstrukce jsou zobrazeny na obrázku A.1. Myšlenka je taková, že pokud bude tuhost těchto rámu stejná, posuny u se budou rovnat.

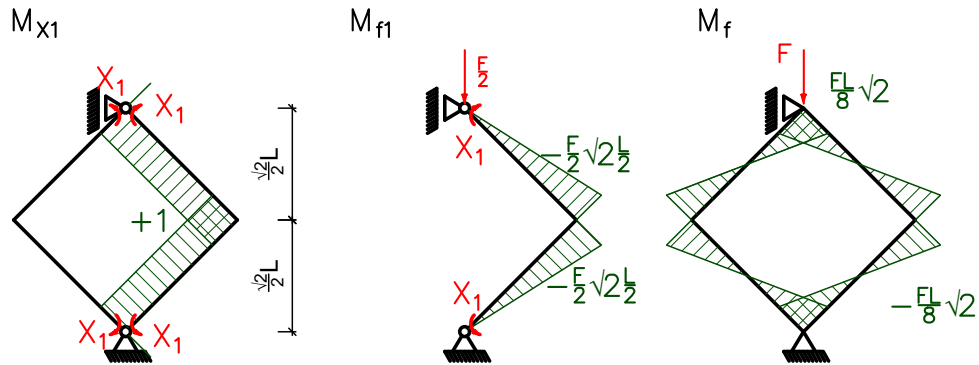
A.3.1 Posun na rámové konstrukci

Tato rámová konstrukce je vnitřně 3krát staticky neurčitá. Pro výpočet posunu u musíme nejprve stanovit průběh momentů na rámové konstrukci od zatížení F . Stanovení těchto momentů se provede pomocí principu virtuálních prací. Nejprve přidáme dva vnitřní klouby v horním a dolním styčnicku, jelikož nás zajímá moment v tomto místě. Následně vypočteme

$$\delta_{11} = \int M_{x1} M_{x1} dx = 2L \quad (\text{A.10})$$

$$\delta_{1f} = \int M_{f1} M_{x1} dx = -2 \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{F}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L \cdot L \cdot 1 \right] = -\frac{FL^2}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A.11})$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1f} = 0 \quad (\text{A.12})$$



■ Obrázek A.2 Průběh momentů - princip virtuálních prací

$$X_1 = \frac{FL}{4\sqrt{2}} \quad (\text{A.13})$$

Posun rámu je poté s využitím principu superpozice a principu virtuálních prací

$$u_{frame} = \frac{1}{EI_z} \left[4 \cdot \left[\frac{1}{3} \frac{FL\sqrt{2}}{8} \frac{1}{4} \sqrt{2}L \right] - 4 \cdot \left[\frac{1}{6} \frac{FL\sqrt{2}}{8} \frac{1}{4} \sqrt{2}L \right] \right] = \frac{1}{24} \frac{FL^3}{EI_z} \quad , \quad (\text{A.14})$$

kde F je jednotková síla, I_z je moment setrvačnosti příčle okolo osy z , E je Youngův modul pružnosti a L je délka strany rámu.

A.3.2 Posun na příhradové konstrukci

Pro stanovení posunu v příhradové variantě tohoto rámu se postupuje obdobně jako u rámové konstrukce s využitím principu virtuálních prací. Tato konstrukce je vnitřně 1krát staticky neurčitá, proto je nejprve nutné přerušit jednu z diagonál. Nyní vypočteme

$$\delta_{11} = \int N_1 N_1 dx = 4 \cdot L \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \sqrt{2} = 2L + 2L\sqrt{2} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta_{1f} = 2L + L\sqrt{2} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{1f} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$X_1 = - \left[\frac{2L + L\sqrt{2}}{2L + 2L\sqrt{2}} \right] = - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A.18})$$

Posun příhrady poté vychází

$$u_{truss} = \frac{1}{EA} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \cdot L \cdot 4 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot L \cdot \sqrt{2} \right] = \frac{L}{EA} \quad , \quad (\text{A.19})$$

kde L je délka strany rámu, E je Youngův modul pružnosti a A je plocha jedné diagonály.

A.3.3 Výsledná tuhost fiktivního prutu

Pokud se tyto posuny mají rovnat, pak pro plochu A diagonály musí platit

$$u_{truss} = u_{frame} \quad , \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{L}{EA} = \frac{1}{24} \frac{FL^3}{EI_z} \quad , \quad (\text{A.21})$$

$$A = \frac{I_z \cdot 24}{L^2} \quad . \quad (\text{A.22})$$

A.4 Výstupní soubor z knihovny Gurobi

■ Výpis kódu A.1 Výsledek optimalizace BnB

```

1  Set parameter Username
2  Set parameter Method to value 2
3  Set parameter NodefileDir to value ""
4  Academic license - for non-commercial use only - expires 2024-11-07
5  Gurobi Optimizer version 10.0.3 build v10.0.3rc0 (win64)
6
7  CPU model: Intel(R) Core(TM) i5-8300H CPU @ 2.30GHz, instruction set [SSE2|AVX|AVX2]
8  Thread count: 4 physical cores, 8 logical processors, using up to 8 threads
9
10 Optimize a model with 16506 rows, 2463 columns and 41970 nonzeros
11 Model fingerprint: 0xaa29f346
12 Variable types: 2436 continuous, 27 integer (27 binary)
13 Coefficient statistics:
14 Matrix range      [6e-01, 2e+09]
15 Objective range   [1e+02, 4e+03]
16 Bounds range      [1e+00, 1e+00]
17 RHS range         [4e-02, 5e+11]
18 Warning: Model contains large matrix coefficients
19 Warning: Model contains large rhs
20     Consider reformulating model or setting NumericFocus parameter
21     to avoid numerical issues.
22 Presolve removed 11883 rows and 1218 columns
23 Presolve time: 0.06s
24 Presolved: 4623 rows, 1245 columns, 23815 nonzeros
25 Variable types: 1218 continuous, 27 integer (27 binary)
26 Found heuristic solution: objective 7580.7009696
27 Root barrier log...
28 Ordering time: 0.00s
29
30 Barrier statistics:
31 Dense cols : 111
32 AA' NZ      : 3.651e+04
33 Factor NZ   : 6.786e+04 (roughly 3 MB of memory)
34 Factor Ops  : 1.966e+06 (less than 1 second per iteration)
35 Threads    : 4
36
37          Objective          Residual
38 Iter      Primal      Dual      Primal      Dual      Compl      Time
39 0   6.04639457e+06 -1.62991792e+07  3.03e+06  0.00e+00  2.02e+04  0s
40 1   6.04639457e+06 -1.62991792e+07  3.03e+06  0.00e+00  2.02e+04  0s
41 2   6.04639457e+06 -9.90031465e+10  3.03e+06  0.00e+00  1.18e+08  0s
42 3   6.38430430e+05 -7.16450522e+10  3.05e+05  1.26e+02  2.82e+07  0s
43 4   3.89248311e+04 -8.80713178e+09  1.46e+04  2.83e+01  1.95e+06  0s
44 5   1.37511168e+04 -7.73373531e+09  5.62e+03  2.47e+01  1.37e+06  0s
45 6   9.09903163e+03 -4.25000978e+09  3.57e+03  1.41e+01  7.83e+05  0s
46 7   4.91880864e+03 -2.37770711e+09  1.56e+03  8.03e+00  4.22e+05  0s
47 8   2.92458704e+03 -3.88950742e+08  4.67e+00  6.45e-01  5.55e+04  0s
48 9   2.91752129e+03 -3.88789173e+05  1.35e-07  4.26e-04  5.58e+01  0s

```



```

48 10 2.84272966e+03 -1.15520002e+04 4.66e-10 1.41e-05 2.05e+00 0s
49 11 1.64960068e+03 -1.30655749e+03 4.66e-10 5.39e-06 4.21e-01 0s
50 12 1.17778790e+03 -1.58658191e+02 4.66e-10 2.39e-06 1.90e-01 0s
51 13 9.90881334e+02 4.32432151e+02 3.49e-10 9.98e-07 7.95e-02 0s
52 14 8.83101633e+02 6.72513479e+02 4.66e-10 3.78e-07 3.00e-02 0s
53 15 8.58779391e+02 8.03389322e+02 4.66e-10 8.33e-08 7.88e-03 0s
54 16 8.49379548e+02 8.37522757e+02 3.49e-10 1.53e-08 1.69e-03 0s
55 17 8.46753140e+02 8.45759747e+02 3.49e-10 1.05e-09 1.41e-04 0s
56 18 8.46442135e+02 8.46400868e+02 4.07e-10 1.36e-10 5.87e-06 0s
57 19 8.46424737e+02 8.46413380e+02 4.66e-10 2.98e-11 1.62e-06 0s
58 20 8.46418109e+02 8.46417212e+02 4.66e-10 1.52e-11 1.28e-07 0s
59 21 8.46417521e+02 8.46417380e+02 2.10e-09 1.19e-11 2.14e-08 0s
60 22 8.46417393e+02 8.46417393e+02 3.49e-10 2.27e-13 1.43e-13 0s
61
62 Barrier solved model in 22 iterations and 0.33 seconds (0.25 work units)
63 Optimal objective 8.46417393e+02
64
65 Root relaxation: objective 8.464174e+02, 844 iterations, 0.19 seconds (0.11 work units)
66
67 Nodes | Current Node | Objective Bounds | Work
68 Expl Unexpl | Obj Depth IntInf | Incumbent BestBd Gap | It/Node Time
69 0 0 846.41739 0 4 7580.70097 846.41739 88.8% - 0s
70 0 0 1185.03128 0 4 7580.70097 1185.03128 84.4% - 0s
71 0 0 1346.39212 0 6 7580.70097 1346.39212 82.2% - 0s
72 0 0 1346.39212 0 6 7580.70097 1346.39212 82.2% - 1s
73 0 0 1346.39214 0 6 7580.70097 1346.39214 82.2% - 1s
74 0 2 1346.39214 0 6 7580.70097 1346.39214 82.2% - 1s
75 * 80 46 15 5830.2340851 1434.62309 75.4% 512 3s
76 * 97 44 15 5476.1333562 1434.62309 73.8% 518 3s
77 * 129 54 14 4862.4150488 1458.76960 70.0% 575 4s
78 * 131 54 7 3420.1530231 1458.76960 57.3% 578 4s
79 * 143 53 6 3267.7106420 1604.94486 50.9% 588 4s
80 * 152 53 17 2714.4568262 1604.94486 40.9% 575 4s
81 * 154 50 16 2146.1808142 1605.48143 25.2% 577 4s
82 186 17 1839.65391 15 4 2146.18081 1680.90977 21.7% 552 5s
83
84 Cutting planes:
85 Gomory: 1
86 Cover: 1
87 MIR: 2
88 Inf proof: 2
89 Explored 224 nodes (110064 simplex iterations) in 5.21 seconds (8.85 work units)
90 Thread count was 8 (of 8 available processors)
91 Solution count 8: 2146.18 2714.46 3267.71 ... 7580.7
92 Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
93 Best objective 2.146180814199e+03, best bound 2.146180814199e+03, gap 0.0000%

```

A.5 Stabilitní posudek optimalizované konstrukce

Určení imperfekcí soustavy

$$h = 20000 \text{ mm} \quad (\text{výška věže})$$

$$m_{sl} = 4 \quad (\text{počet sloupů na příčel})$$

$$\phi_0 = \frac{1}{200} \quad (\text{základní hodnota náklonu})$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = 0,447 \quad \wedge \quad \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0$$

$$\alpha_h = 0,667 \quad (\text{redukční součinitel výšky sloupu})$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = 0,791 \quad (\text{redukční součinitel počtu sloupů})$$

$$\phi = \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m = 2,63 \frac{\text{mm}}{\text{m}} \quad (\text{celkové počáteční naklonění konstrukce})$$

Lineární stabilita

$$\alpha_{cr} = 11,08 \geq 10 \quad (\text{součinitel kritického zatížení})$$

⇒ Není nutné posuzovat II. řádem

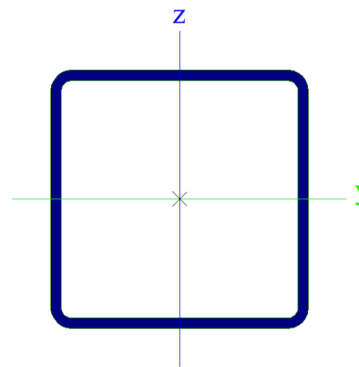
Vnitřní síly I. řád

Vypsány jsou maximální hodnoty vnitřních sil na zvolených průřezech.

ID	Průřez	N [kN]	My [kNm]	Mz [kNm]
1	CS7 - SHS 100/100/4,0	-110,9	0,1	0,1
8	CS6 - SHS 100/100/3,0	-34,3	0,3	0
ID	Průřez	Vy [kN]	Vz [kN]	T [kNm]
1	CS7 - SHS 100/100/4,0	0,0	0,0	0,0
8	CS6 - SHS 100/100/3,0	0,0	0,1	0,0

Průřezové charakteristiky

Jméno	CS6	CS7
Typ	100/100/3,0	100/100/4,0
Vzpěr y-y	a	a
Vzpěr z-z	a	a
A [m ²]	1,14E-03	1,49E-03
A_z [m ²]	5,70E-04	7,47E-04
A_y [m ²]	5,70E-04	7,47E-04
I_y [m ⁴]	1,77E-06	2,26E-06
I_z [m ⁴]	1,77E-06	2,26E-06
i_y [mm]	3,90E+01	3,90E+01
i_z [mm]	3,90E+01	3,90E+01
$W_{el,y}$ [m ³]	3,54E-05	4,53E-05
$W_{el,z}$ [m ³]	3,54E-05	4,53E-05
$W_{pl,y}$ [m ³]	4,12E-05	5,33E-05
$W_{pl,z}$ [m ³]	4,12E-05	5,33E-05
I_t [m ⁴]	2,79E-06	3,62E-06
I_w [m ⁶]	2,50E-09	3,33E-09



Materiál a bezpečnostní součinitele

Ocel **S235**

(materiál konstrukce)

$$f_{yk} = 235\text{MPa}$$

(charakteristická mez kluzu)

$$E = 210\text{GPa}$$

(Youngův modul pružnosti)

$$G = 81\text{GPa}$$

(modul pružnosti ve smyku)

$$\gamma_{M0} = 1,0$$

(díleční součinitel - únosnost průřezu)

$$\gamma_{M1} = 1,0$$

(díleční součinitel - únosnost průřezu - stabilita)

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_0} = 235\text{MPa}$$

(návrhová mez kluzu)

Posouzení sloupu

Posouzení je provedeno metodu uvedenou v kapitole 3.4.4.

Návrhové vnitřní síly

$N_{Ed} = 110,9 \text{ kN}$	(normálová síla)
$M_{y,Ed} = 0,1 \text{ kNm}$	(ohybový moment)
$M_{z,Ed} = 0,1 \text{ kNm}$	(ohybový moment)
$V_{y,Ed} = 0,0 \text{ kN}$	(posouvající síla)
$V_{z,Ed} = 0,0 \text{ kN}$	(posouvající síla)
$T_{Ed} = 0,0 \text{ kN}$	(krouťící moment)

Zatřídění průřezu

Zatřídění provedeno pomocí softwaru SCIA Engineer.

Klasifikace pro návrh průřezu

Klasifikace podle EN 1993-1-1 článku 5.5.2

Klasifikace vnitřních a vyčnívajících částí podle EN 1993-1-1 tabulky 5.2 listu 1 & 2

Id	Typ	c [mm]	t [mm]	σ_1 [kN/m ²]	σ_2 [kN/m ²]	Ψ [-]	k_{σ} [-]	α [-]	c/t [-]	Třída 1 limit [-]	Třída 2 limit [-]	Třída 3 limit [-]	Třída
1	I	88	4	70157,876	73458,868	1,0		1,0	22,0	28,0	34,0	38,6	1
3	I	88	4	73808,594	78201,587	0,9		1,0	22,0	28,0	34,0	38,8	1
5	I	88	4	78251,223	74950,231	1,0		1,0	22,0	28,0	34,0	38,6	1
7	I	88	4	74600,505	70207,512	0,9		1,0	22,0	28,0	34,0	38,8	1

Poznámka: Limity klasifikace byly nastaveny podle Semi-Comp+.
Průřez je klasifikován třídou 1

Vzpěrné délky a součinitele vzpěrnosti

$$L_{cr,y} = 5892 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$L_{cr,z} = 2286 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = 151,08 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = 58,62 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y k}} = 1$$

$$\lambda_l = 93,9 \cdot \epsilon$$

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\lambda_l} = 1,61 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\lambda_l} = 0,62 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\alpha_a = 0,21 \quad (\text{součinitel imperfekce})$$

$$\phi_y = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,y} - 0,2) + \lambda_{rel,y}^2) = 1,94$$

$$\phi_z = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,z} - 0,2) + \lambda_{rel,z}^2) = 0,74$$

$$\chi_y = \min \left(\frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}}, 1,0 \right) = 0,33 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - y})$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1,0 \right) = 0,88 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - z})$$

Součinitel vzpěrnosti při klopení

Jedná se o obdélníkovou trubku, která není náchylná na klopení.

$$\Rightarrow \chi_{LT} = 1 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti})$$

Posouzení MSÚ

Tlak s vlivem vzpěru

$$N_{b,Rd} = \frac{\min(\chi_y, \chi_z) A f_{yk}}{\gamma_{M1}} = 115,55 \text{ kN}$$

Interakce tlaku a ohybu

$$\psi = 0,73 \Rightarrow C_{my} = 0,90 \quad C_{mz} = 0,40 \quad C_{mLT} = 0,91$$

$$N_{Rk} = A f_{yk} = 350,15 \text{ kN} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{y,Rk} = W_{pl,y} f_{yk} = 12,526 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{z,Rk} = W_{pl,z} f_{yk} = 12,526 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$k_{yy} = 1,59 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{yz} = 0,28 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zy} = 0,96 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zz} = 0,46 \quad (\text{interakční součinitel})$$

Posudek 6.61:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,975 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Posudek 6.62:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,371 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Smyková únosnost

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vz} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,000 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vy} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,000 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

Posouzení diagonály

Návrhové vnitřní síly

$$N_{Ed} = 34,3 \text{ kN} \quad (\text{normálová síla})$$

$$M_{y,Ed} = 0,3 \text{ kNm} \quad (\text{ohybový moment})$$

$$M_{z,Ed} = 0,0 \text{ kNm} \quad (\text{ohybový moment})$$

$$V_{y,Ed} = 0,0 \text{ kN} \quad (\text{posouvající síla})$$

$$V_{z,Ed} = 0,1 \text{ kN} \quad (\text{posouvající síla})$$

$$T_{Ed} = 0,0 \text{ kN} \quad (\text{krouťící moment})$$

Zatřídění průřezu

Zatřídění provedeno pomocí softwaru SCIA Engineer.

Klasifikace pro návrh průřezu

Klasifikace podle EN 1993-1-1 článku 5.5.2

Klasifikace vnitřních a vyčnívajících částí podle EN 1993-1-1 tabulky 5.2 listu 1 & 2

Id	Typ	c [mm]	t [mm]	σ_1 [kN/m ²]	σ_2 [kN/m ²]	Ψ [-]	k_{σ} [-]	α [-]	c/t [-]	Třída 1 limit [-]	Třída 2 limit [-]	Třída 3 limit [-]	Třída limit [-]
1	I	91	3	20494,701	18205,378	0,9		1,0	30,3	28,0	34,0	39,5	2
3	I	91	3	17837,800	8977,258	0,5		1,0	30,3	28,0	34,0	45,9	2
5	I	91	3	8760,625	11049,948	0,8		1,0	30,3	28,0	34,0	40,9	2
7	I	91	3	11417,526	20278,068	0,6		1,0	30,3	28,0	34,0	44,8	2

Poznámka: Limity klasifikace byly nastaveny podle Semi-Comp+.

Průřez je klasifikován třídou 2

Vzpěrné délky a součinitele vzpěrnosti

$$L_{cr,y} = 3475 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$L_{cr,z} = 2939 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = 89,10 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = 75,36 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y k}} = 1$$

$$\lambda_l = 93,9 \cdot \epsilon$$

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\lambda_l} = 0,95 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\lambda_l} = 0,80 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\alpha_a = 0,21 \quad (\text{součinitel imperfekce})$$

$$\phi_y = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,y} - 0,2) + \lambda_{rel,y}^2) = 1,03$$

$$\phi_z = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,z} - 0,2) + \lambda_{rel,z}^2) = 0,89$$

$$\chi_y = \min \left(\frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}}, 1, 0 \right) = 0,70 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - y})$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1, 0 \right) = 0,79 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - z})$$

Součinitel vzpěrnosti při klopení

Jedná se o obdélníkovou trubku, která není náchylná na klopení.

$$\Rightarrow \chi_{LT} = 1 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti})$$

Posouzení MSÚ

Tlak s vlivem vzpěru

$$N_{b,Rd} = \frac{\min(\chi_y, \chi_z) A f_{yk}}{\gamma_{M1}} = 187,806 \text{ kN}$$

Interakce tlaku a ohybu

$$\psi = 0,15 \Rightarrow C_{my} = 0,90 \quad C_{mz} = 0,65 \quad C_{mLT} = 0,89$$

$$N_{Rk} = A f_{yk} = 267,9 \text{ kN} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{y,Rk} = W_{pl,y} f_{yk} = 9,682 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{z,Rk} = W_{pl,z} f_{yk} = 9,682 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$k_{yy} = 1,02 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{yz} = 0,43 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zy} = 0,61 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zz} = 0,72 \quad (\text{interakční součinitel})$$

Posudek 6.61:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,214 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Posudek 6.62:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,180 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Smyková únosnost

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vz} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,000 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vy} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,001 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

Posouzení příčle metodou A

Návrhové vnitřní síly

$$N_{Ed} = 33,8 \text{ kN} \quad (\text{normálová síla})$$

$$M_{y,Ed} = 0,0 \text{ kNm} \quad (\text{ohybový moment})$$

$$M_{z,Ed} = 0,0 \text{ kNm} \quad (\text{ohybový moment})$$

$$V_{y,Ed} = 0,0 \text{ kN} \quad (\text{posouvající síla})$$

$$V_{z,Ed} = 0,0 \text{ kN} \quad (\text{posouvající síla})$$

$$T_{Ed} = 0,0 \text{ kN} \quad (\text{krouťící moment})$$

Zatřídění průřezu

Zatřídění provedeno pomocí softwaru SCIA Engineer.

Klasifikace pro návrh průřezu

Klasifikace podle EN 1993-1-1 článku 5.5.2

Klasifikace vnitřních a vyčnívajících částí podle EN 1993-1-1 tabulky 5.2 listu 1 & 2

Id	Typ	c [mm]	t [mm]	σ_1 [kN/m ²]	σ_2 [kN/m ²]	Ψ [-]	k_{σ} [-]	a [-]	c/t [-]	Třída 1 limit [-]	Třída 2 limit [-]	Třída 3 limit [-]	Třída
1	I	91	3	30225,554	28624,890	0,9	1,0	30,3	28,0	34,0	38,7	2	
3	I	91	3	28585,721	28998,255	1,0	1,0	30,3	28,0	34,0	38,2	2	
5	I	91	3	29064,624	30665,289	0,9	1,0	30,3	28,0	34,0	38,7	2	
7	I	91	3	30704,458	30291,923	1,0	1,0	30,3	28,0	34,0	38,2	2	

Poznámka: Limity klasifikace byly nastaveny podle Semi-Comp+.

Průřez je klasifikován třídou 2

Vzpěrné délky a součinitele vzpěrnosti

$$L_{cr,y} = 3475 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$L_{cr,z} = 3939 \text{ mm} \quad (\text{vybočení bez posunu styčnicku})$$

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = 193,85 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = 44,46 \quad (\text{štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y k}} = 1$$

$$\lambda_l = 93,9 \cdot \epsilon$$

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\lambda_l} = 2,06 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru y})$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\lambda_l} = 0,47 \quad (\text{poměrná štíhlost sloupu ve směru z})$$

$$\alpha_a = 0,21 \quad (\text{součinitel imperfekce})$$

$$\phi_y = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,y} - 0,2) + \lambda_{rel,y}^2) = 2,83$$

$$\phi_z = 0,5 \cdot (1 + \alpha_a \cdot (\lambda_{rel,z} - 0,2) + \lambda_{rel,z}^2) = 0,64$$

$$\chi_y = \min \left(\frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}}, 1, 0 \right) = 0,21 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - y})$$

$$\chi_z = \min \left(\frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, 1, 0 \right) = 0,93 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti v tlaku - z})$$

Součinitel vzpěrnosti při klopení

Jedná se o obdélníkovou trubku, která není náchylná na klopení.

$$\Rightarrow \chi_{LT} = 1 \quad (\text{součinitel vzpěrnosti})$$

Posouzení MSÚ

Tlak s vlivem vzpěru

$$N_{b,Rd} = \frac{\min(\chi_y, \chi_z) A f_{yk}}{\gamma_{M1}} = 56,31 \text{ kN}$$

Interakce tlaku a ohybu

$$\psi = 1,00 \Rightarrow C_{my} = 0,90 \quad C_{mz} = 1,00 \quad C_{mLT} = 0,89$$

$$N_{Rk} = A f_{yk} = 267,9 \text{ kN} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{y,Rk} = W_{pl,y} f_{yk} = 9,682 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$M_{z,Rk} = W_{pl,z} f_{yk} = 9,682 \text{ kNm} \quad (\text{charakteristická únosnost})$$

$$k_{yy} = 1,32 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{yz} = 0,62 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zy} = 0,79 \quad (\text{interakční součinitel})$$

$$k_{zz} = 1,04 \quad (\text{interakční součinitel})$$

Posudek 6.61:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,600 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Posudek 6.62:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0,135 \leq 1,0 \quad \text{VYHOVUJE}$$

Smyková únosnost

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vz} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,000 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

$$\frac{V_{Ed}}{\frac{A_{vy} f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}} = 0,000 \leq 1,0$$

VYHOVUJE

Bibliografie

- EN-1993-1-1, 2005. *Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*.
- ACHTZIGER, W.; BENDSØE, M.; BEN-TAL, A.; ZOWE, J., 1992. Equivalent displacement based formulations for maximum strength truss topology design. *IMPACT of Computing in Science and Engineering*. Roč. 4, č. 4, s. 315–345. ISSN 0899-8248. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/0899-8248\(92\)90005-S](https://doi.org/10.1016/0899-8248(92)90005-S).
- ACHTZIGER, Wolfgang; KOČVARA, Michal, 2008. Structural Topology Optimization with Eigenvalues. *SIAM Journal on Optimization*. Roč. 18, č. 4, s. 1129–1164. Dostupné z DOI: [10.1137/060651446](https://doi.org/10.1137/060651446).
- AN, Haichao; HUANG, Hai, 2017. Topology and Sizing Optimization for Frame Structures with a Two-Level Approximation Method. *AIAA Journal*. Roč. 55, č. 3, s. 1044–1057. Dostupné z DOI: [10.2514/1.J055020](https://doi.org/10.2514/1.J055020).
- ARORA, J. S.; WANG, Q., 2005. Review of formulations for structural and mechanical system optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 30, č. 4, s. 251–272. Dostupné z DOI: [10.1007/s00158-004-0509-6](https://doi.org/10.1007/s00158-004-0509-6).
- ARORA, Jasbir S, 2000. Methods for discrete variable structural optimization. In: *Advanced Technology in Structural Engineering*, s. 1–8.
- BEN-TAL, Aharon; NEMIROVSKI, Arkadi, 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Dostupné z DOI: [10.1137/1.9780898718829](https://doi.org/10.1137/1.9780898718829).
- BENDSØE, M.P.; SIGMUND, O., 2003. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer Berlin Heidelberg. Engineering online library. ISBN 9783540429920. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=NGmtmMhVe2sC>.

- BENDSØE, Martin; BEN-TAL, Aharon; HAFTKA, Raphael, 1991. New displacement-based methods for optimal truss topology design. In: *32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Dostupné z DOI: 10.2514/6.1991-1215.
- BENDSØE, Martin P, 1995. *Optimization of structural topology, shape, and material*. Sv. 414. Springer.
- BOISSONNADE, Nicolas; JASPART, Jean-Pierre; MUZEAU, Jean-Pierre; VILLETTE, Marc, 2004. New interaction formulae for beam-columns in Eurocode 3: The French Belgian approach. *Journal of Constructional Steel Research*. Roč. 60, č. 3, s. 421–431. ISSN 0143-974X. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0143-974X\(03\)00121-4](https://doi.org/10.1016/S0143-974X(03)00121-4). Eurosteel 2002 Third European Conference on Steel Structures.
- CLAUSEN, Jens, 1999. Branch and bound algorithms-principles and examples. *Department of Computer Science, University of Copenhagen*, s. 1–30.
- ČERNÝ, Vladimír, 1985. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*. Roč. 45.
- DORN, William S.; GOMORY, Ralph E.; GREENBERG, Harvey J., 1964. Automatic design of optimal structures. In: dostupné také z: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116265402>.
- EVGRAFOV, Anton, 2005. On globally stable singular topologies. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 29, s. 170–177. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-004-0428-6.
- FLOUDAS, C.A., 2013. *Deterministic Global Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer US. Nonconvex Optimization and Its Applications. ISBN 9781475749496. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=ravTBwAAQBAJ>.
- FREDRICSON, H., 2005. Topology optimization of frame structures—joint penalty and material selection. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 30, č. 3, s. 193–200. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-005-0515-3.
- FREDRICSON, H.; JOHANSEN, T.; KLARBRING, A.; PETERSSON, J., 2003. Topology optimization of frame structures with flexible joints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 25, č. 3, s. 199–214. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-003-0281-z.
- GLANC, Šimon, 2022. *Optimalizace globální stability příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků*. Bakalářská práce. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- GLANC, Šimon, 2023. Implementace stabilitní analýzy příhradových konstrukcí s využitím rámových prvků, optimalizace a porovnání s jinými metodami. *SVOČ*.

- GUO, Xu; CHENG, G.; YAMAZAKI, Koetsu, 2001. A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 22, s. 364–373. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-001-0156-0.
- GUROBI OPTIMIZATION, LLC, 2023. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. Dostupné také z: <https://www.gurobi.com>.
- HIROTA, Masayuki; KANNO, Yoshihiro, 2015. Optimal design of periodic frame structures with negative thermal expansion via mixed integer programming. *Optimization and Engineering*. Roč. 16, č. 4, s. 767–809. ISSN 1573-2924. Dostupné z DOI: 10.1007/s11081-015-9276-z.
- CHAN, Chun-Man; GRIERSON, Donald E.; SHERBOURNE, Archibald N., 1995. Automatic Optimal Design of Tall Steel Building Frameworks. *Journal of Structural Engineering*. Roč. 121, č. 5, s. 838–847. Dostupné z DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:5(838).
- CHENG, Gengdong; JIANG, Zheng, 1992. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*. Roč. 20, č. 2, s. 129–148.
- JANDERA, Michal, 2023. Stabilita a modelování konstrukcí [přednáška]. In: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra ocelových konstrukcí.
- KANNO, Yoshihiro, 2016. Mixed-integer second-order cone programming for global optimization of compliance of frame structure with discrete design variables. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 54, č. 2, s. 301–316. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-016-1406-5.
- KHAN, Mohsin R., 1984. Optimality criterion techniques applied to frames having general cross-sectional relationships. *AIAA Journal*. Roč. 22, č. 5, s. 669–676. Dostupné z DOI: 10.2514/3.8653.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P., 1983. Optimization by Simulated Annealing. *Science*. Roč. 220, č. 4598. Dostupné také z: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.220.4598.671>.
- KOČVARA, Michal, 2002. On the modelling and solving of the truss design problem with global stability constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 23, s. 189–203. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-002-0177-3.
- KOJIMA, Masakazu, 2003. Sums of Squares Relaxations of Polynomial Semidefinite Programs.

- KOJIMA, Masakazu; MURAMATSU, Masakazu, 2007. An Extension of Sums of Squares Relaxations to Polynomial Optimization Problems Over Symmetric Cones. *Mathematical Programming*. Roč. 110, č. 2, s. 315–336. ISSN 1436-4646. Dostupné z DOI: 10.1007/s10107-006-0004-5.
- KURETA, Rui; KANNO, Yoshihiro, 2014. A mixed integer programming approach to designing periodic frame structures with negative Poisson's ratio. *Optimization and Engineering*. Roč. 15, č. 3, s. 773–800. ISSN 1573-2924. Dostupné z DOI: 10.1007/s11081-013-9225-7.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G., 1960. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica* [online]. Roč. 28, č. 3, s. 497–520 [cit. 2023-11-28]. ISSN 00129682, ISSN 14680262. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/1910129>.
- LEPŠ, Matěj, 2000. *Optimalizace železobetonového spojitého nosníku*. Dipl. pr. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- LOBO, Miguel Sousa; VANDENBERGHE, Lieven; BOYD, Stephen; LEBRET, Hervé, 1998. Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications*. Roč. 284, č. 1, s. 193–228. ISSN 0024-3795. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(98\)10032-0](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10032-0). International Linear Algebra Society (ILAS) Symposium on Fast Algorithms for Control, Signals and Image Processing.
- LÖFBERG, J., 2004. *In Proceedings of the CACSD Conference*. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. Taipei, Taiwan. Dostupné také z: <https://yalmip.github.io>.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R.H.; ZIEMIAN, R.D., 2000. *Matrix Structural Analysis*. 2. vyd. Wiley. ISBN 9781507585139. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=r6QcrgEACAAJ>.
- MELA, Kristo, 2014. Resolving issues with member buckling in truss topology optimization using a mixed variable approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 50, s. 1037–1049. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-014-1095-x.
- MICHELL, A.G.M., 1904. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Roč. 8, č. 47, s. 589–597. Dostupné z DOI: 10.1080/14786440409463229.
- MUROTA, Kazuo; KANNO, Yoshihiro; KOJIMA, Masakazu; KOJIMA, Sadayoshi, 2010. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix -algebras with application to semidefinite programming. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. Roč. 27, č. 1, s. 125–160. ISSN 1868-937X. Dostupné z DOI: 10.1007/s13160-010-0006-9.

- NEMETSCHKEK, 2019. *Scia Engineer*. Dostupné také z: <https://www.scia.net/cs/software/scia-engineer>. Software, Studentská verze - 19.1.4034.
- PATZÁK, Bořek, 2009. *OOFEM project home page*. Dostupné také z: <http://www.oofem.org>.
- PLACHÝ, Tomáš, 2003. *Dynamická studie železobetonového trámu poškozeného trhlinami*. PhD thesis. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- POHLÍDALOVÁ, Eva, 2014. *Identifikace dynamických parametrů předpjatého mostu v Mělníku*. Dipl. pr. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- POSPÍŠILOVÁ, A.; LEPŠ, M., 2013. Parallel Branch and bound method for size optimization benchmarks. *Proceedings of the Third International Conference on Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing for Engineering*. Dostupné z DOI: 10.4203/ccp.101.20.
- POSPÍŠILOVÁ, Adéla, 2012. *Hledání globálních optim příkladů rozměrové optimalizace*. Diplomová práce. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- RASMUSSEN, M.H.; STOLPE, M., 2008. Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method. ISSN 0045-7949. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.019>.
- ROZVANY, G. I. N., 1996. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. *Structural optimization*. Roč. 11, č. 3, s. 213–217. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/BF01197036.
- ROZVANY, G. I. N.; BENDSØE, M. P.; KIRSCH, U., 1995. Layout Optimization of Structures. *Applied Mechanics Reviews*. Roč. 48, č. 2, s. 41–119. ISSN 0003-6900. Dostupné z DOI: 10.1115/1.3005097.
- SAKA, M.P., 1980. Optimum design of rigidly jointed frames. *Computers & Structures*. Dostupné z DOI: 10.1016/0045-7949(80)90107-8.
- SCHMIT, LUCIEN A.; FOX, RICHARD L., 1965. An integrated approach to structural synthesis and analysis. *AIAA Journal*. Roč. 3, č. 6, s. 1104–1112. Dostupné z DOI: 10.2514/3.3062.
- STEVEN, G., 2003. Product and system optimization in engineering simulation. *FENet Newsletter*.
- STOLPE, M.; SVANBERG, Krister, 2001. On trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress constrained truss topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 21, s. 140–151. Dostupné z DOI: 10.1007/s001580050178.
- SVANBERG, Krister, 1987. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Roč. 24, č. 2, s. 359–373. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>.

- ŠEJNOHA, Jiří, 1998. *Pružnost a pevnost 20*. České vysoké učení technické. ISBN 8001-0180.
- TORAGAY, Oguz; SILVA, Daniel F.; VINEL, Alexander; SHAMSAEI, Nima, 2022. Exact global optimization of frame structures for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 65, č. 3, s. 97. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-022-03178-0.
- TORII, André; LOPEZ, Rafael; MIGUEL, Leandro, 2014. Modeling of global and local stability in optimization of truss-like structures using frame elements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 51. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-014-1203-y.
- TYBUREC, M.; ZEMAN, J.; NOVÁK, J.; LEPŠ, M.; PLACHÝ, T.; POUL, R., 2019. Designing modular 3D printed reinforcement of wound composite hollow beams with semidefinite programming. *Materials & Design*. Dostupné z DOI: 10.1016/j.matdes.2019.108131.
- TYBUREC, Marek; KOČVARA, Michal; KRUŽÍK, Martin, 2023. Global weight optimization of frame structures with polynomial programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 66, č. 12, s. 257. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-023-03715-5.
- TYBUREC, Marek; ZEMAN, Jan; KRUŽÍK, Martin; HENRION, Didier, 2021. Global optimality in minimum compliance topology optimization of frames and shells by moment-sum-of-squares hierarchy. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 64, č. 4, s. 1963–1981. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-021-02957-5.
- VAN MELLAERT, R.; MELA, K.; TIAINEN, T.; HEINISUO, M.; LOMBAERT, G.; SCHEVENELS, M., 2018. Mixed-integer linear programming approach for global discrete sizing optimization of frame structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 57, č. 2, s. 579–593. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-017-1770-9.
- WANG, Qian; ARORA, Jasbir S., 2006. Alternative Formulations for Structural Optimization: An Evaluation Using Frames. *Journal of Structural Engineering*. Roč. 132, č. 12, s. 1880–1889. Dostupné z DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:12(1880).
- YAMADA, Shinji; KANNO, Yoshihiro, 2016. Relaxation approach to topology optimization of frame structure under frequency constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Roč. 53, č. 4, s. 731–744. ISSN 1615-1488. Dostupné z DOI: 10.1007/s00158-015-1353-6.

Obsah přiloženého média

	readme.txt.....	stručný popis obsahu média
	src.....	adresář se zdrojovými kódy
	thesis.....	zdrojová forma práce ve formátu L ^A T _E X
	text.....	text práce
	thesis.pdf.....	text práce ve formátu PDF