

Symetrie faktorových jazyků a bohatost na palindromy

Práce se věnuje dvěma otázkám souvisejícím s nekonečnými slovy, jejichž jazyk je invariantní na jistý involutivní antimorfismus nebo na zadanou grupu generovanou několika antimorfizmy. V odborné literatuře je nejčastěji uvažovaným involutivním antimorfizmem zrcadlení, které konečné slovo $a_1 a_2 \cdots a_n$ zobrazí na $a_n a_{n-1} \cdots a_1$. Slovo, které se shoduje se svým zrcadlovým obrazem, se nazývá palindrom. V přirozeném jazyce jsou to např. slova “krk” nebo “madam”.

Viola Hadjikyriacou se ve své práci nejdříve zaměřuje na slova nad čtyřprvkovou abecedou $\mathcal{A} = \{A, T, C, G\}$ a antimorfismus $D : \mathcal{A}^* \mapsto \mathcal{A}^*$ indukovaný vzájemnou výměnou A a T a výměnou C a G. Tato výměna odpovídá vazbě v DNA sekvencích, u kterých genetici studují přítomnost dlouhých DNA-palindromů, tedy konečných slov $w \in \mathcal{A}^*$ vyhovujících podmínce $H(w) = w$. Příkladem DNA-palindromu je slovo ACTAGT. DNA-palindromy (pod názvem Watson-Crick palindromes) jsou v literatuře hojně zkoumány v souvislosti s tzv. DNA computing, kterému je věnována motivační kapitola diplomové práce.

První teoretická otázka studovaná v předložené práci se týká tvaru primitivních morfizmů nad \mathcal{A} , které generují pevné body obsahující nekonečně mnoho DNA-palindromů. Připomeňme, že tuto otázku pro klasické palindromy (tedy slova invariantní na zrcadlení) začali studovat fyzici Hof, Knill a Simon v roce 1996. Ti definovali třídu morfizmů, tzv. Class \mathcal{P} a vyslovili domněnku (dnes označovanou HKS conjecture), že jazyk pevného bodu nějakého morfizmu obsahuje nekonečně mnoho palindromů tehdy a jenom tehdy, pokud to je jazyk pevného bodu nějakého morfizmu z Class \mathcal{P} . Tato domněnka byla dokázána Bo Tanem pro morfizmy nad binární abecedou. Nad většími abecedami se jí podařilo dokázat pouze pro některé typy morfizmů, a tak HKS-conjecture zůstává velkou výzvou kombinatoriky na slovech.

Viola Hadjikyriacou v práci zavedla třídu primitivních morfizmů Class \mathcal{D} . O pevných bodech těchto morfizmů nejdříve dokázala, že jejich jazyk je invariantní vůči antimorfizmu D a poté odvodila nutnou a postačující podmínku k tomu, aby pevný bod takového morfizmu obsahoval nekonečně mnoho DNA-palindromů. Tato podmínka je formulovaná v řeči teorie grafů a je snadno ověřitelná. Podobně jako v případě HKS conjecture, není zatím jasné, zda pevný bod morfizmu, který nepatří do Class \mathcal{D} , může obsahovat nekonečně mnoho DNA-palindromů. Výsledky získané pro antimorfismus D jsou zobecněné na libovolný involutivní antimorfismus na obecné konečné abecedě. Posléze se Viola věnovala dalšímu zobecnění: studovala pevné body morfizmů, jejichž jazyk je invariantní na každý prvek konečné grupy G generované několika antimorfizmy. K zadané grupě G Viola našla vhodnou třídu morfizmů a ukázala, že její pevné body mají požadované symetrie. Rovněž odvodila nutnou a postačující podmínku pro testování jejich G -palindromicity. Netriviální úlohou, kterou Viola musela řešit, byla charakterizace morfizmů patřících do průniku Class \mathcal{P} a Class \mathcal{D} . Za tímto účelem bylo třeba zkoumat nový typ rovnic na slovech (ve 4. kapitole práce). Odvození jejich řešení bylo technicky dost náročné a je zajímavým výsledkem samo o sobě.

Další pojem zkoumaný v práci je bohatost na palindromy. V klasické definici, jak ji zavedli Droubay, Justin a Pirillo, se slovo délky n nazývá bohaté na palindromy pokud počet různých palindromických faktorů obsažených ve slově je maximálně možný, tj. $n+1$. Obdobnou horní mez na výskyt G -palindromů ve slově délky n jsme odvodili se Š. Starostou. Slova bohatých

na G -palindromy pro jinou grupu G , než je grupa \tilde{G} generovaná zrcadlením, lze v literatuře nalézt jen málo. Úkolem Violy bylo rozšířit seznam známých příkladů G -bohatých slov pro některé grupy $G \neq \tilde{G}$. Takové příklady Viola našla mezi pevnými body morfizmů ve třídách, které zaručují, že jazyk pevného bodu je invariantní na grupové symetrii. Viola navrhla a implementovala algoritmus, který testoval na dlouhých prefixech nekonečného slova, zda defekt zůstává nulový. Pro dvě různé grupy se ji podařilo vytipovat třídu morfizmů, jejichž pevné body nebyly zamítnuty v testu G -bohatosti. Zůstává tedy úkolem - snad pro dalšího diplomanta - v práci formulované domněnky dokázat.

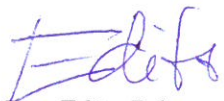
Závěrem chci zdůraznit, že

- Diplomová práce splnila všechny body zadání.
- Hlavní přínos teoretických výsledků odvozených Violou Hadjikyriacou vidím v tom, že prohlubují naše porozumění vztahu mezi tvarem morfizmu a symetriemi jazyka jeho pevného bodu.
- Spolupráce s Violou byla velice usnadněná její schopností porozumět přečteným článkům do všech detailů, včetně odhalování nepřesností, které se občas v doporučené literatuře vyskytly.
- V hlubokém pochopení známých výsledků pak pramenila i Violina úspěšnost v jejich zobecňování.
- Diplomantka prokázala schopnost vytvořit a vhodným způsobem využít počítačový program pro testování svých domněnek.
- Kromě důležitých teoretických výsledků vysoce oceňuji způsob, jak je práce napsaná. Je dobře logicky strukturovaná, známé výsledky jsou správně citovány. Text má všechny vlastnosti článku vytvořeného zkušeným vědcem, každý detail je vysvětlený. Navíc angličtina je na vysoké úrovni, s citem pro odborný styl.

Proto navrhuji klasifikovat diplomovou práci známkou

A výborně

V Praze 17. ledna 2024


Prof. Ing. Edita Pelantová, CSc.
školitelka
katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
Trojanova 13, Praha 2

