České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra radioelektroniky

2D lokalizace BLE modulů založená na měření úhlu příchodu signálu

Bakalářská práce

Matěj Vtípil
Praha, Leden 2024

Studijní program: BPEK_2018 – Elektronika a komunikace
Vedoucí práce: Ing. Václav Navrátil, Ph.D.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vtípil** Jméno: **Matěj** Osobní číslo: **499000**

Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**

Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**

Studijní program: **Elektronika a komunikace**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

2D lokalizace BLE modulů založená na měření úhlu příchodu signálu

Název bakalářské práce anglicky:

Angle-of-Arrival-based 2D Positioning of BLE Modules

Pokyny pro vypracování:

Navrhněte a implementujte metodu výpočtu 2D polohy na základě sady úhlů měřených několika BLE (Bluetooth low energy) moduly. Analyzujte přesnost určení polohy teoreticky, simulací i reálným měřením. Ověřte vliv korekcí měření úhlu na přesnost výpočtu polohy. Zabývejte se využitím Kalmanovy filtrace pro zlepšení parametrů odhadu polohy.

Seznam doporučené literatury:

[1] D. Simon, Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. John Wiley & Sons, 2006, ISBN: 0471708585.
[2] V. Sesma and V. Egorov, Improved Accuracy for Indoor Positioning with Bluetooth 5.1: From Theory to Measurements, Online <https://lup.lub.lu.se/student-papers/search/publication/9027829>
[3] G. Pau, F. Arena, Y.E. Gebremariam, I. You, Bluetooth 5.1: An Analysis of Direction Finding Capability for High-Precision Location Services. Sensors, 2021. doi: 10.3390/s21113589

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Václav Navrátil, Ph.D. katedra radioelektroniky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **15.09.2023** Termín odevzdání bakalářské práce: **09.01.2024**

Platnost zadání bakalářské práce: **16.02.2025**

Ing. Václav Navrátil, Ph.D.	doc. Ing. Stanislav Vítek, Ph.D.	prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

. | Datum převzetí zadání

Podpis studenta

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

Upozornění na autorská práva:

Toto dílo je chráněno autorským zákonem. Výpisy, kopie a opisy práce jsou povoleny pouze pro osobní potřebu a na vlastní náklady. Použití práce by mělo být v souladu s autorským zákonem[1] a citační etikou.

[1] https://www.mkcr.cz/doc/cms_library/az-uz-11404.rtf

Abstrakt

Práce se zabývá metodikou lokalizace v rovině (2D) založené na měření úhlů příchodu signálu (AoA) pomocí technologie Bluetooth 5.1. Pro odhad polohy jsou implementovány iterativní algoritmy (Newton-Raphson, Steepest descent a Levenberg-Marquardt) a rekurzivní rozšířený Kalmanův filtr.

Pro dlouhodobé efektivní získávání a zpracování měřených dat byly vyvinuty nástroje pro zpracování, záznam a synchronizaci měřených dat. Dílčím cílem bylo vyvinout nástroj, který umožní ověření teoreticky měřitelných úhlů v dané konstelaci.

Experimenty byly prováděny s vývojovým kitem u-blox XPLR-AOA-2. Na základě předešlých znalostí byl proveden experiment v bezodrazové komoře pro získání korekčních vztahů měřených úhlů pro lokalizaci. Dále byla provedena řada experimentů ověřujících přesnost lokalizace pomocí vyvinutých algoritmů.

Pro zhodnocení lokalizace jsou vypočteny kvantitativní ukazatele přesnosti lokalizačního systému, mimo jiné i RMSE.

Klíčová slova

Bluetooth, lokalizace, Direction Finding, AoA, Newton-Raphson, Steepest descent, Levenberg-Marquardt, Extended Kalman filter

Abstract

The work deals with the methodology of localisation in the plane (2D) based on the measurement of angles of arrival of the signal (AoA) using Bluetooth 5.1 technology. Iterative algorithms (Newton-Raphson, Steepest descent and Levenberg-Marquardt) and a recursive extended Kalman filter are implemented for position estimation.

Tools for processing, recording, and synchronising measured data have been developed for long-term efficient acquisition and processing of measured data. A partial goal was to develop a tool to verify theoretically measurable angles in a given constellation.

Experiments were performed with the u-blox XPLR-AOA-2 development kit. Based on previous knowledge, an experiment was performed in an anechoic chamber to obtain correction relations of measured angles for localisation. In addition, several experiments were carried out to verify localisation accuracy using the developed algorithms.

Quantitative indicators of the accuracy of the localisation system, including the RMSE, are calculated to evaluate the localisation.

Klíčová slova

Bluetooth, localisation, Direction Finding, AoA, Newton-Raphson, Steepest descent, Levenberg-Marquardt, Extended Kalman filter

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval Ing. Václavu Navrátilovi, Ph.D. za všestrannou pomoc při zpracování bakalářské práce, množství cenných připomínek, doporučených materiálů a postupů. Rád bych také poděkoval panu Ing. Václavu Kabourkovi, Ph.D. za umožnění měření v bezodrazové komoře a za praktické zaučení při zajištění optimálních vlastností pro měření. Poděkování také patří panu Ing. Josefu Krškovi za praktické připomínky k implementaci algoritmů a panu prof. Ing. Františku Vejražkovi, CSc za přátelské přijetí do týmu RSRDC v roce 2021 a za jeho prestižní studijní materiály. Také bych rád poděkoval kolegovi Bc. Petru Šimkovi za skvělou spolupráci při jednotlivých měřeních.

V neposlední řadě bych rád vyjádřil vděčnost mé rodině za podporu a také Míše za její nepostradatelnou přítomnost, motivaci a skvělou oporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 9. ledna 2024

. . . . . .
podpis autora práce

Obsah

1 Úvod **1**

2 Metody pro určování polohy ve vnitřních prostorách pomocí úhloměrných metod **3**
2.1 Stručný úvod do problematiky lokalizace pomocí úhloměrných metod 3
2.1.1 Angle of Arrival 4
2.1.2 Angle of Departure 5
2.2 Možnosti určení polohy 6
2.3 Anténní pole 7

3 Lokalizační principy a mechanismy protokolu Bluetooth **9**
3.1 Specifikace BLE v5.1 Direction of Finding 9
3.1.1 Základní řetězec systému zpracující signál 9
3.1.2 BT direction finding signál 11
3.1.3 Constant Tone Extension 11
3.1.4 IQ vzorky 12
3.1.5 Algoritmy 13
3.2 Stručný popis kitu XPLR-AOA-2 14

4 Metody vyhodnocení přesnosti a zpracování dat **17**
4.1 Statisticko-pravděpodobnostní charakteristiky 17
4.1.1 Základní charakteristiky 17
4.1.2 Mean Squared Error 19
4.2 Zpracování dat z kotev a časová synchronizace 20
4.2.1 Motivace a nový formát zpráv 20
4.2.2 Popis nástroje 20
4.2.3 Spouštění a ukončování 22
4.2.4 Budoucí práce 23
4.3 Scéna pro BLE lokalizaci 23

5 Algoritmy pro odhad polohy **27**
5.1 Iterativní metody pro odhad polohy 27
5.1.1 Newton-Raphsonova metoda 28
5.1.2 Metoda největšího spádu 32
5.1.3 Levenberg-Marquardtova metoda 32
5.1.4 Ukončovací podmínky 33
5.2 Kalmanův filtr 34
5.2.1 Úvod do problematiky Kalmanova filtru a terminologie 34
5.2.2 Rozšířený Kalmanův filtr 35

6 Limity přesnosti lokalizačního systému XPLR-AOA-2 **41**
6.1 Souhrn závěrů z předchozího výzkumu 41

6.2 Výsledky z přesnějšího měření v bezodrazové komoře . . . 43
6.2.1 Metodika měření . . . 43
6.2.2 Zpracování naměřených dat . . . 44
6.2.3 Naměřené závislosti . . . 44
6.2.4 Korekční vztahy pro měření úhlu . . . 45
6.2.5 Predikce chyb . . . 51
6.2.6 Intervaly využití korekcí . . . 51
6.2.7 Srovnání koeficientu determinace . . . 52
6.2.8 Příklad korekce . . . 52
6.3 Měřený výkon . . . 54
6.4 Diskuze výsledků korekce . . . 54

7 Výsledky lokalizace a přesnost systému XPLR-AOA-2 **57**
7.1 Metodika lokalizace . . . 57
7.1.1 Měření v laboratoři . . . 58
7.1.2 Měření v halových laboratořích . . . 59
7.2 Parsování dat . . . 62
7.2.1 Problémy s naměřenými daty . . . 62
7.2.2 Popis algoritmu . . . 63
7.3 Statistické vlastnosti měřených dat . . . 64
7.4 Výsledky měření lokalizace . . . 65
7.4.1 Metodika zpracování . . . 65
7.4.2 Lokalizace v laboratoři . . . 66
7.4.3 Lokalizace v halových laboratořích . . . 69
7.5 Diskuze výsledků lokalizace . . . 76
7.5.1 Budoucí práce . . . 76
7.5.2 Porovnání výsledků . . . 77

8 Závěr **79**

Seznam zkratek **81**

Seznam symbolů **83**

Seznam obrázků **86**

Seznam tabulek **88**

Literatura **89**

1 Úvod

Obecné techniky určování polohy jsou závislé na mnoha parametrech. Určování polohy lze rozdělit na dva případy, a to určení polohy ve venkovních a ve vnitřních prostorách IPS (Indoor Positioning System). Techniky vnitřního polohování neposkytují stejnou úroveň přesnosti jako globální systémy družicové navigace GNSS (Global Navigation Satellite System) používané venku [1]. Naproti tomu GNSS nedokážou být dostatečně přesné a spolehlivé pro aplikace vnitřní navigace, resp. lokalizace (dle [2] řádově desítky metrů). Jednou z možností, jak určit polohu ve vnitřních prostorách je využití metod specifikovaných rádiovou části BLE (Bluetooth Low Energy).

Základní ukazatel hodnocení metod určování polohy je přesnost rádiového systému. Dalšími aspekty pro zhodnocení takového systému jsou kromě přesnosti i spolehlivost systému, energetická náročnost, dosah rádiové části, složitost a v neposlední řadě i celková finanční stránka dané technologie [1].

Je-li potřeba určit polohu bodu v prostoru, je možné jej určit několika způsoby, buďto z principu měření několika vzdáleností mezi vysílačem a příjímačem nebo určením několika úhlů. Specifikace BT (Bluetooth) umožňuje kromě měření vzdálenosti pomocí RSSI (Recieved Signal Stength Indication) i metody založené na měření úhlu, a to často využívanou AoA (Angle of Arrival), případně metodou AoD (Angle of Departure) [3].

Problémy IPS Každé měření je zatíženo chybou, což má zásadní vliv na přesnost odhadované polohy uživatele. Metoda AoA trpí několika význačnými problémy ovlivňující přesnost odhadu polohy. Těmito problémy může být citlivost na vícecestné šíření signálu, odrazy vysílaného signálu od okolních objektů, dále má vliv na přesnost také šum, kolísání přijatého signálu a frekvenční nebo fázové posuny.

Hlavním faktorem snižujícím přesnost získaní přesné pozice je šíření NLoS (Non Line of Sight). Jedná se šíření signálu prostředím s různými překážkami mezi vysílačem a přijímači. Toto může mít za následek, že signál k některým přijímačům je přenášen převážně odrazem nebo lomem, což negativně ovlivňuje přesnost měření [4, 5].

Příklady využití IPS Aplikacemi může být např. ve veřejných prostorách, muzeích, kde by detekce u bodů zájmu PoI (Point of Interest) měla za následek možné přijímání různorodých informací. Základem by byly majáky (beacony), které by vysílaly signál s daným typem datového obsahu. BT specifikace umožňovala lokalizaci před verzí 5.1 RSSI detekovat vzdálenost k vysílacím majákům. K RSSI metodě byla přidána funkce úhloměrných metod, pomocí kterých lze namířit uživatelské zařízení určitým směrem pro získání přesných údajů.

Pro další využití si představme veřejnou dopravu, kde by vnitřní lokalizace pomohla cestujícímu s nalezením místa odjezdu spoje. Dalším využitím může být v nemocnicích, kancelářích, skladech, ale také pro kontrolu vstupu osob do nebezpečných oblastí. Takové detekce lze dosáhnout pokrytím areálu či budovy danou technologií pro účel sledování personálu, pacientů, věcí, zařízení atd. Lze nalézt mnoho dalších aplikací, ve kterých by tato technologie nalezla uplatnění. [6]

V této práci byla měření polohy prováděna úhloměrnou metodou AoA a navazuje na práci [7]. Využitím vývojového kitu XPLR-AOA-2 od firmy u-blox byly měřeny úhly mezi tzv. *kotvami* (přijímači) a jedním pohyblivým tzv. *tagem* (vysílačem) a na těchto datech pak provedena lokalizace ve 2D.

Tato bakalářská práce seznamuje čtenáře s možnými metodami a algoritmy určení polohy pro lokalizaci ve vnitřních prostorách. Popisuje negativní vlivy na určování polohy rádiovým systémem a případné možné zlepšení vlastností tohoto systému. Následné měření pomocí vývojového kitu od firmy u-blox zobrazuje statistické vyhodnocení výsledků a porovnání s teorií.

Kapitola 2 se bude zabývat úvodem do problematiky metod určování polohy ve vnitřních prostorách a kapitola 3 stručně popíše základní principy implementace DoA metod do technologie Bluetooth. Také je v této kapitole stručně popsán vývojový kit u-blox XPLR-AOA-2. Práce se zabývá škálou statistických výpočtu na základě naměřených dat, proto kapitola 4 popíše základní využívané charakteristiky. Kapitola 5 popisuje později implementované algoritmy pro odhad polohy ve vnitřních prostorách metodou AoA. Přesné měřené vyhodnocení přesnosti vývojového kitu je popsáno v kapitole 6 a na závěr v kapitole 7 jsou popsána výsledky lokalizace ve 2D.

2 Metody pro určování polohy ve vnitřních prostorách pomocí úhloměrných metod

Metody pro určování polohy (lokalizaci) ve vnitřních prostorách je možné rozdělit do skupin určující směr příchozího signálu a určující vzdálenost. Pro metody určující směr příchozího signálu je měřen úhel příchozí elektromagnetické vlny od určené referenční roviny. Tyto metody se nazývají DoA (Direction of Finding) a mezi ně patří metody AoA (Angle of Arrival) a AoD (Angle of Departure). Mezi lokalizační metody založené na měření vzdálenosti patří zejména RSSI (Recieved Signal Strength Indication), ToA (Time of Arrival), TDoA (Time Difference of Arrival). [8]

Pro různé aplikace je běžné, že je potřeba odhadnout vzdálenost mezi uživatelem (přijímačem, tagem) a základovou stanicí (maják, vysílač, kotva). V takových aplikacích má vysílač ve svých zprávách referenční hodnotu, která nese informaci o výkonu signálu očekávaného v určité vzdálenosti od vysílače. Základem pro odhad vzdálenosti od jednoho majáku je pak provést výpočet pomocí referenční síly (výkon) signálu a síly přijímaného signálu, známé jako RSSI. Takový přístup je zřejmě využívaný v mnoha aplikací (iBeacon, Eddystone), ale i při snaze pečlivé kalibrace, může být síla signálu značně ovlivněna podmínkami okolního prostředí. Pro případ lokalizace lze využít vícero majáků, což přináší složitější algoritmy založené na geometrických výpočtech (trilaterace apod.), vedoucí k přesnějšímu určení polohy. Tento přístup má však své limity, které v této práci nebudou rozebírány. S touto problematikou se čtenář může seznámit například v [9]. [3, 10]

Se zavedením standardu Bluetooth (BT) verze 5.1 z roku 2019, také známým jako Bluetooth Low Energy (BLE)[2], byly implementovány metody DoA, které přidávají možnost určení příchozího signálu. Principem DoA je výpočet fázových posunů signálu, ke kterým dochází mezi přijímacími anténami při dopadu vysokofrekvenčního signálu [3]. Verze BT 5.1 tedy přináší možnost zlepšení lokalizace ve vnitřních prostorách [3], což bude později v této práci prozkoumáno.

V sekci 2.1 uvedeme základní metody pro lokalizaci úhloměrnými metodami (AoA, AoD). Dále v sekci 2.2 představíme základní geometrii pro odhad měřeného úhlu metodou AoA a uvedeme typy uspořádání anténních prvků pro kotvy 2.3.

2.1 Stručný úvod do problematiky lokalizace pomocí úhloměrných metod

Chceme-li zjistit polohu pomocí úhloměrných metod DoA (Direction of Arrival), máme k dispozici v zásadě dvě metody, AoA (Angle of Arrival) a AoD (Angle of Departure), které fungují na velmi podobném principu.

V soustavě jednoho pohyblivého zařízení (tagu) a několika stacionárních tzv. kotev (anchor points) záleží, které ze zařízení bude vyhodnocovat přijímaný signál [3]. Jednotlivé metody budou popsány v následujících kapitolách.

V našem případě je odhadování samotných úhlů příchozího signálu prováděno uzavřeným systémem výrobce vývojového kitu u-blox, více viz [11].

[2]BLE je bezdrátový standard pro komunikace na krátké vzdálenosti a poskytuje příležitost používat chytré telefony/mobilní zařízení k přenosu signálů bez nutnosti používat další externí štítky nebo karty.

2.1.1 Angle of Arrival

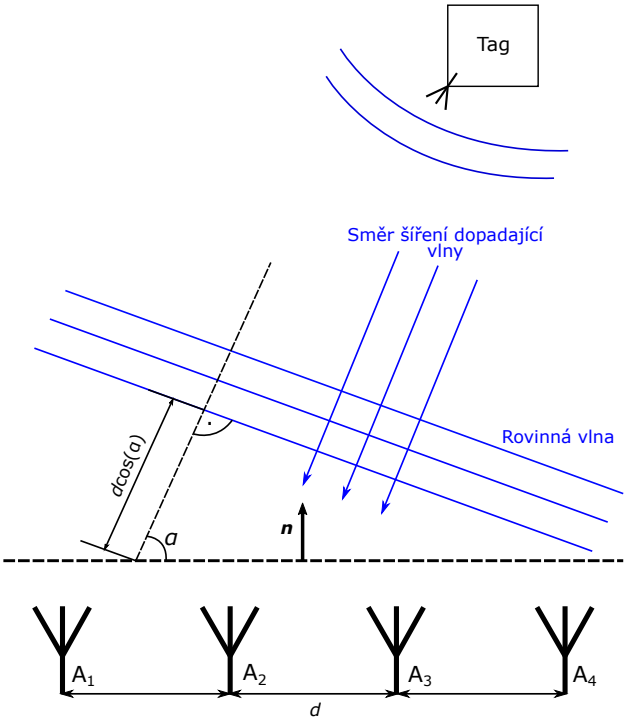
Celý lokalizační systém obsahuje zařízení se známou stacionární polohou (kotvy) a zařízení pohyblivá uživatelská (tagy), pro která je poloha neznámá. Pro případ AoA obsahuje kotva (přijímač) *anténní pole* (viz sekce 2.3). Pohyblivý tag s jednou anténou vysílá signál, který kotva detekuje a vyhodnotí úhel přicházejícího signálu. Fáze zachycená na každé z antén se bude lišit, tj. vznikne fázový rozdíl mezi přijímaným signálem. Detekováním signálu jednou kotvou lze zjistit úhel, tedy směr příchozího signálu a v případě více kotev lze zjistit pomocí metody triangulace i pozice tagu [3], které se budeme věnovat dále.

Úhel dopadu závisí na fázi signálu naměřeného na jednotlivých anténách. Budeme-li předpokládat scénář dle obrázku 2.1, tedy dopadající vlnu budeme považovat za rovinnou, pak ze známé vzdálenosti antén a z naměřených fází signálu lze určit fázový rozdíl podle následující rovnice

$$\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos(\alpha), \tag{2.1}$$

kde φ je fázový rozdíl mezi signály přijímanými na každém páru sousedních antén, d je vzdálenost mezi sousedními anténami, λ je vlnová délka signálu a α hledaný úhel, tedy podle [3] po vyjádření

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\varphi\lambda}{2\pi d}\right). \tag{2.2}$$



Obrázek 2.1: Metoda AoA

Na obrázku 2.1 je také krom jiného vyznačená normála kotvy $\boldsymbol{n}$, která bude později podstatná pro simulace v programu MATLAB.

Pro výpočet byla uvažována dopadající vlna jako rovinná, pro takovou aproximaci se tag musí nacházet v dostatečné vzdálenosti od kotvy [12]. Tato vzdálenost se vypočte podle následujícího

$$R \geq \frac{2D^2}{\lambda}, \tag{2.3}$$

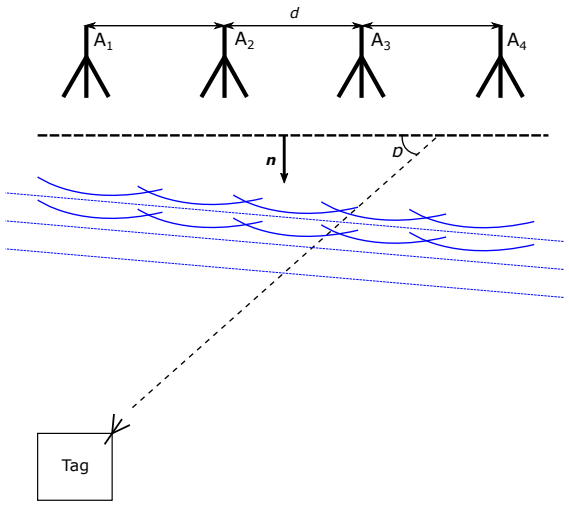
kde R je počítaná nejmenší vzdálenost mezi tagem a kotvou a D je největší rozměr struktury antény a musí platit, že $d > \lambda$. Elektromagnetické pole je již v této vzdálenosti příčné (transverzální), tedy jeho složky jsou kolmé na směr šíření vlny a vyzařovací charakteristika se v této zóně nemění se vzdáleností. Tato zóna se nazývá vzdálená nebo též Fraunhoferova zóna [12]. Z tohoto předpokladu vychází, že vzdálenost mezi vysílačem a přijímačem musí být mnohem větší než vlnová délka detekovaného signálu. Pro tuto podmínku lze napsat aproximační vztah[3]

$$10\lambda \approx R_{\mathrm{TX,\,RX}} \gg \lambda. \tag{2.4}$$

2.1.2 Angle of Departure

Při použití metody AoD se naopak přijímacím zařízením stává tag, znázorněno na obrázku 2.2. Kotvy obsahující více antén vysílají signál a tzv. tracker (složitější zařízení, než je tag) detekuje signál a vypočítá úhel, pod kterým signál dopadá na anténu. Vyhodnocení zajišťuje přímo tracker, popř. jsou data zasílána dále pro další zpracování (např. na hlavní server). Přijímač tedy určuje směr pomocí fázových rozdílů od příchozího signálu. Úhel lze spočíst podle [3] z rovnice (2.5), kde veličiny zůstávají stejné jako u metody AoA. Zjišťovaný úhel tedy podle [3] je

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\varphi\lambda}{2\pi d}\right). \tag{2.5}$$



Obrázek 2.2: Metoda AoD

[3] Např. je-li $f = 2.4$ GHz, pak $\lambda = 12.3$ cm, můžeme poté předpokládat, že ve vzdálenosti $R = 123$ cm bude vysílaná vlna (signál) rovinná. Pro vzdálenosti menší již vlnění považovat za rovinné v principu nelze a při vyhodnocování mohou vycházet chybné výsledky.
Čtenář se může dozvědět více např. v [13].

2.2 Možnosti určení polohy

Máme-li určitý počet kotev, pak můžeme určit polohu s jistou přesnost, která závisí na mnoha parametrech. Obecně platí, že čím větší počet kotev máme, tím přesnějšího výsledku můžeme dosáhnout[4]. Pro určení úhlu příchodu signálu (1D problém) postačuje pouze jedna přijímací kotva. Chceme-li však určit polohu tagu, musíme mít v dané konstelaci umístěny kotvy minimálně dvě. Schopnost lokalizace takového systému (2D, 3D) pak závisí na typu využívaných anténních prvků, viz sekce 2.3.

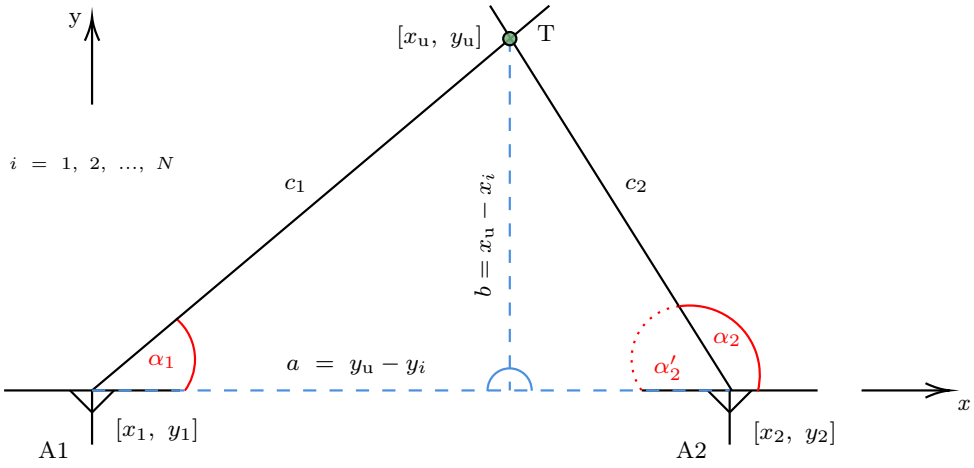
Obecně existuje řada způsobů, jak určit pozici uživatele (tagu), závisí však na využité metodě měřené veličiny (úhel, čas příchodu vyslaného či odrazeného signálu, atd.). Můžeme tak rozlišit hlavní tři způsoby lokalizace [7]:

trilaterace (např. RSSI, TDoA) metoda pro určení polohy ze změřených vzdáleností,

triangulace (např. AoA, AoD) metoda pro určení polohy ze změřených úhlů,

kombinace metod (např. AoA + RSSI) metoda určující polohu ze změřeného úhlu a vzdálenosti.

Pro naše účely využíváme metodu *triangulace*, při které v dané konstelaci získáme polopřímky pod úhlem α_i, kde $i = 1, \ldots, N$ od $N \geq 2$ kotev pro úspěšnou triangulaci. Máme-li N přímek, na kterých musí v nějaké vzdálenosti od kotev ležet tag, pak dojde k protnutí jednotlivých polopřímek ideálně v jednom bodě. Reálná měření jsou však ovlivněna konstrukčními nedokonalostmi, všudypřítomným šumem, vícecestným šířením signálu, atd., a výsledkem bude určitá vymezená plocha, ve které se tag nachází.



Obrázek 2.3: Určení polohy ve 2D ze dvou změřených úhlů triangulační metodou

Měřený a odhadovaný úhel, který je dále v algoritmech pro lokalizaci využit, lze dle geometrie z obrázku 2.3 odvodit následovně

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{x_u - x_i}{y_u - y_i},$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_u - x_i}{y_u - y_i}\right). \tag{2.6}$$

[4]Uspořádání a distribuce umístění aktivních prvků, které jsou součástí lokalizačního systému.

Při implementaci algoritmů v nástrojích MATLAB budeme využívat funkci atan2(·), která řeší potíže s výpočty velmi malých úhlů (dělení nulou) a vrátí úhly se správným znaménkem poloroviny.

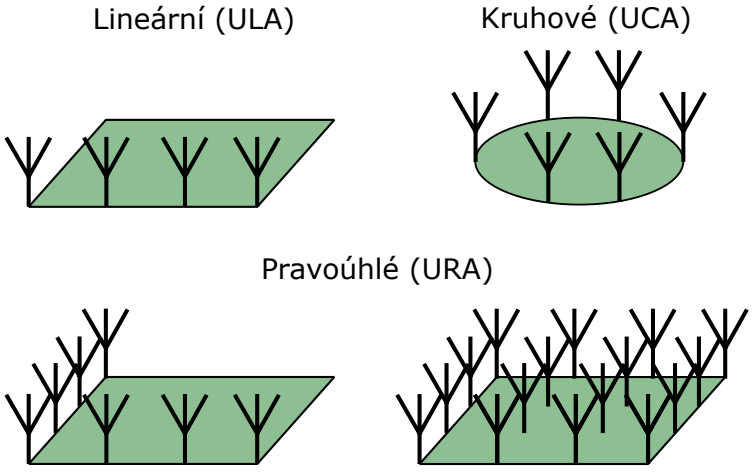
Na obrázku 2.3 jsou úhly α_1 a α_2 vyznačeny od osy x (pro nás referenční rovina), α_2' je pak úhlem doplňkovým. Jak bude uvedeno v sekci 3.2, resp. dle obrázku 3.5, je úhel α měřen od osy normály kotvy. Při zpracování tento měřený úhel převedeme zpět na reprezentaci měřeného úhlu od osy x, tj. přetransformujeme referenční rovinu kotvy dle později odvozeného vztahu (3.1).

2.3 Anténní pole

Anténní pole můžou mít různé konstrukce a počty antén. V tomto textu si popíšeme tři základní typy anténních polí, které jsou zobrazeny na obrázku 2.4.

Nejjednodušším typem anténního pole je lineární (jednodimenzionální) konstrukce ULA (Uniform Linear Array). Pomocí ULA lze získat informaci v závislosti na natočení anténní řady pouze o azimutu nebo elevaci příchozího signálu. Chceme-li využít tento typ anténního pole, je vhodný pro scénáře, ve kterých se sledované zařízení pohybuje konzistentně jedním směrem rovině. Měřený azimut je limitován na 180° široký rozsah z důvodu symetrie [7]. K současnému určení azimutu Θ a zároveň elevace Φ již 1D anténní pole není dostačujícím řešením. Pro tento problém se využívají dvoudimenzionální anténní pole URA (Uniform Rectangular Array) a UCA (Uniform Circular Array).

Dle uvedeného je zřejmé, že mobilní telefony nebudou vybaveny anténním polem pro pohodlí a praktičnost. V důsledku toho budou mobilní telefony využívány buď jako *tag* pomocí metody AoA nebo jako *tracker* pomocí metody AoD.



Obrázek 2.4: Typy anténních polí

3 Lokalizační principy a mechanismy protokolu Bluetooth

V předchozí kapitole 2 byly naznačeny úhloměrné metody pro určení směru signálu. Specifikace Bluetooth v5.1 přidala možnost určení příchodu směru signálu a tím možnost lokalizace pomocí metod AoA a AoD. V sekci 3.1 se nejprve podíváme na stručný popis specifikace BT a na obsažené základní mechanismy, které jsou potřeba pro úspěšnou lokalizaci. Také se podíváme na kompletní řetězec systému odhadující úhly příchozího signálu a odhad polohy. V druhé části 3.2 stručně připomeneme a rozvedeme základní vlastnosti využívaného vývojového kitu u-blox XPLR-AOA-2.

3.1 Specifikace BLE v5.1 Direction of Finding

V roce 2016 byla oficiálně představena verze Bluetooth v5.0, která přinesla novinky zejména ve vylepšení vlastností pro významné rozšíření možností této technologie. V roce 2019 skupina BT SIG (Special Interest Group) vydala verzi Bluetooth v5.1, která mimo jiné zavedla novou přesnější techniku lokalizace a to tzv. „direction finding“ (DF), čímž bylo umožněno určit *určit směr příchozího signálu*, jenž umožňuje *odhad polohy* vysílače (uživatele).

Nová verze Bluetooth (BT) v5.1 přinesla metody pro přesnější lokalizaci a zejména pro detekci směru příchozích signálů AoA a AoD, viz sekce 2.1. Dříve používané metody pro určení polohy byly založeny na technologii RSSI (Received Signal Strength Indicator), což je základní princip měření síly přijatého signálu a následného využití trilaterace k určení polohy na základě poklesu signálu při známém vysílacím výkonu. Tato metoda však není ani při využití různých promyšlených algoritmů tak přesná jako umožňuje právě verze BT v5.1 [14]. Různé studie [15, 16] udávají průměrnou přesnost 1,5 až 2 m. Jednou z jasných výhod starších verzí Bluetooth je jejich rozsáhlá podpora v různých zařízeních [3].

Pro tuto sekci je rovněž důležité vyjasnit terminologii, konkrétně rozlišit mezi směrovým určováním signálu (direction finding) a získáváním polohy (positioning, locating). Pro určení směru signálu pomocí metod probíraných v sekci 2 postačuje využít pouze jedno *anténní pole* (tzn. jedna kotva). Pro určení polohy (lokalizace) tagu nebo mobilního zařízení je potřeba z výše uvedeného více anténních polí (kotev). Dále je pak potřeba v mikrokontroléru (MCU) nebo jiném zařízení vypočíst pomocí dalších algoritmů odhad polohy.

3.1.1 Základní řetězec systému zpracující signál

Základní funkce tohoto systému je získání *odhadu úhlu* směru příchozího rádiového signálu. Z tohoto výstupu systému lze již výsledek zpracovat např. pro určení polohy v případě komplexní aplikace RTLS (Real Time Location System).

Řetězec se skládá z následujících částí [17], jež jsou zobrazeny na obrázku 3.1. Jednotlivé části řetězce jsou umožněny buďto přímo výrobcem čipu, nebo algoritmy musí implementovat sám vývojář.

Rádio Daný BT čip musí podporovat připojení antén či anténního pole a zpracování přijímaného BT signálu.

BT specifikace Prvním krokem k úspěšnému řešení DF problému je schopnost parametrů čipu nebo SoC (System on Chip) přímé podpory volitelné funkcionality DF dle BT specifikace v5.1. Pokud tuto možnost daný čip umožňuje, pak je samotné řešení implementace dáno již jako řešení od vydavatele čipu nebo jako programovatelná funkcionalita dle daného SDK (Software Development Kit)[5]. Čip pak také musí zařizovat schéma pro přepínání antén v anténním poli. BT specifikace v5.1 umožňuje tzv. Constant Tone Extension (CTE), což je aditivní část paketu BT umožňující právě DF (více viz sekce 3.1.3). Dále čip musí umět získat IQ vzorky (In-phase and Quatrature samples), ze kterých lze pak odhadnou hledaný úhel.

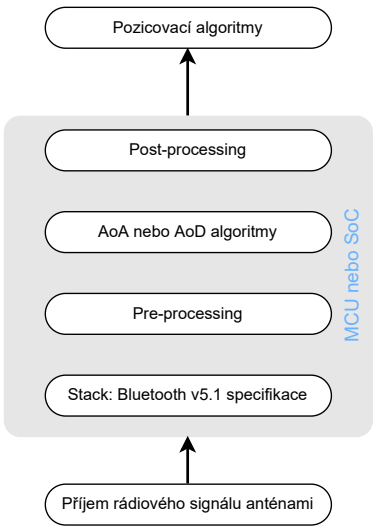
Pre-processing Po získání IQ vzorků je potřeba vzorky vyfiltrovat a upravit tak, aby vyhovovaly následnému zpracování. Také je potřeba v případě 2D anténního pole určit, které vzorky jsou relevantní k azimutu a které k elevaci. Dále je také nutné řešit nežádoucí faktory při přenosu signálu volným prostředím (vícecestné šíření, útlum, atd.).

Odhad úhlu V této části je nutné odhadnout aplikováním různých algoritmů úhel příchozího signálu. Metodou může být určení výkonového spektra přes všechny antény a frekvence.

Post-processing Zpracovávání spektra a RSSI k určení relevantních dat.

Pozicovací/lokalizační algoritmy Tuto část většinou již neobstarává samotný BT čip, ale hlavní mikroprocesor nebo zařízení disponující vyšším výpočetním výkonem. Další možností je, že IQ vzorky nebo již odhadnuté úhly jsou zaslány na server a zde cloudově zpracovávané pro další potřeby aplikace.

Jak již bylo psáno, výstupem řetězce BT nebo MCU čipu je odhad úhlu příchozího signálu. Ten lze dále zpracovávat v závislosti na dané aplikaci.



Obrázek 3.1: Blokové schéma pro určení úhlu příchozího signálu

[5]Příkladem může být řada čipů od společnosti Nordic Semiconductor označené jako nRF528xx a nRF Connect SDK.

3.1.2 BT direction finding signál

Základním odhadovaným parametrem je směr příchozího signálu. Tento signál je již dobře známou *elektromagnetickou vlnou* šířící se volným prostředím, v nejjednodušším případě prostředím bez odrazu LoS (Line of Sight).

V daném prostoru, kde uvažujeme rozložení jednoho či vícero vysílačů nebo přijímačů, tzv. *konstelaci*, analyzujeme fázový rozdíl mezi každým párem antén přijímající vyslanou elektromagnetickou vlnu dle sekce 2.1.

V DoA metodách uvedených v předchozí sekci 2.1 jsou využity anténní pole. Jejich vlastností je, že s nimi lze s využitím různých postupů zjistit fázový rozdíl příchozího signálu a tím vyhodnotit úhel příchozího signálu od referenční roviny, viz sekce 2.3.

Pro využití BT signálu se využívají nejčastěji tzv. patch antény, které jsou integrované přímo v desce plošného spoje (DPS). Pro další signálové zpracování se využívá trigonometrie a je nutné znát přesný model antény – rozměry, vzdálenosti mezi anténami atd.

Nejdůležitější souhrn Bluetooth v5.1 parametrů dle [18] lze nalézt v následující tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Nejdůležitější parametry BLE v5.1

Parametry Bluetooth v5.1	
Frekvenční pásmo	2,40 GHZ ÷ 2,48 GHz (ISM pásmo)
Vlnová délka (ve vakuu)	12,50 ÷ 12,10 cm
Celková šířka pásma	80 MHz
Počet kanálů	40
Kanály využívané BT DF	37, 38 a 39
Šířka pásma na jeden kanál	2 MHz
Vzorkovací rychlosti	1 MS/s (výchozí) nebo 2 MS/s
Modulační možnosti	Binární FM (povinné) p/4-DQPSK (volitelné) 8-DPSK (volitelné)
Rychlosti přenosu dat	1 Mbps (B-FM) 2 Mbps (p/4-DQPSK) 3 Mbps (8-DPSK)

3.1.3 Constant Tone Extension

Specifikace BT v5.1 přidala do klasického BT paketu novou volitelnou část a to tzv. *Constant Tone Extension* (CTE). Struktura paketu je dle [3] následující (dále viz obrázek 3.2):

- rozsah délky CTE v BT paketu je 16-160 µs
- maximální počet připojených antén je omezen tzv. počtem přepínacích (switch) a měřicích (sample) slotů v CTE části (pro vzorkování 1 µs je maximální počet 75 antén); switch/sample sloty jsou dlouhé 1-2 µs
- paket obsahuje 4µs tzv. „guard“ (bezpečnostní) periodu proti vzájemnému rušení mezi pakety
- paket dále obsahuje 8µs referenční periodu, při které se vždy odebírá 8 referenčních IQ vzorů a dle kterých se pak sestaví základní linie pro referenční rovinu pro fázi; následně se zahájí procesem připínání antén a získávání IQ vzorků (opakovaně)

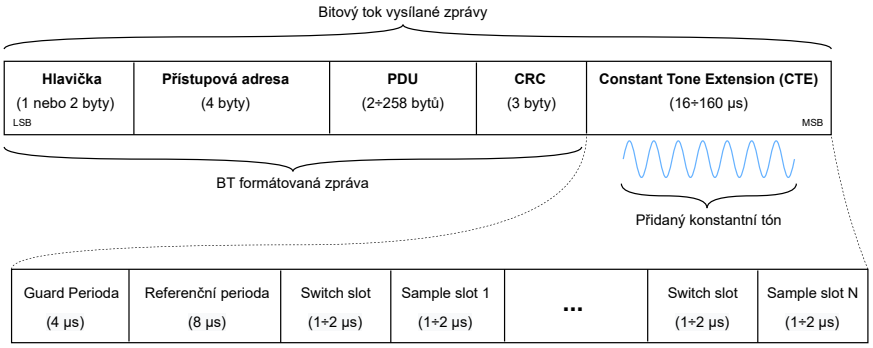
Vysílač CTE je čistý sinusový signál s konstantní frekvencí (tzv. kontinuální tón). Tím je zajištěno to, že přijímací anténa přijímá konstantní frekvenci. Navíc je signál dekorelovaný vzhledem k zbytku signálu[6]. Vhodně definované rádio pak během období CTE části paketu (přijímač) odebírá vzorky IQ.

Přijímač Detekuje klasickou část BT paketu a poté začne analyzovat CTE část. Časový diagram začíná s tzv. *guard periodou*, jejímž úkolem je stabilizovat přijímaný signál (stabilizace fáze a frekvence) z modulované části signálu. Dále je tato perioda využita k přepínání antén na správnou v daný moment.

Referenční perioda se používá k vyrovnání časových změn vysílaných rovinných vln. Důvodem je, že fázový rozdíl není pouze závislý na pozici antény, ale také na časovém vývoji signálu. Proto je potřeba nalézt pro referenční anténu referenční rovinu signálu.

Dále již dochází k cyklickému střídání slotů – slot přepínající antény a slot odebírání IQ vzorku (2 µs + 2 µs). Přijímač přepíná antény v závislosti na CTE konfiguraci. Maximální počet přepínaných antén závisí na době slotů a celkově na době trvání CTE části paketu. Při maximální podpoře 160 µs může být přepínáno až 75 antén. [3]

Samotné systematické přepínání antén[7] zajišťuje externí obvod RF přepínače, který je zapojen v RF části obvodu mezi anténami a BT SoC. Příkladem takového obvodu může být Quorvo QPC6044.



Obrázek 3.2: BLE v5.1 paket včetně CTE

3.1.4 IQ vzorky

Část CTE v BT paketu specifikuje zvláštní typ signálu BT, který slouží k DF. Zařízení mající schopnost zpracovávat tento typ signálu (viz níže), jsou základním předpokladem pro použití jednotlivých zařízení v aplikacích s DF. Zařízení zpracovává tento signál v procesu tzv. *in-phase and quadrature sampling* (zkráceně IQ vzorkování). Při tomto procesu zařízení (resp. BT/bezdrátový čip) provádí v přesně definovaných časových oknech měření *amplitudy* a *fáze*.

IQ vzorek je zjištěn ze signálu, který se vytvoří po promixování přijímaného signálu se signálem vnitřního oscilátoru v IQ modulátoru. I a Q signály jsou s 90° fázovým posuvem a lze je zakreslit v IQ rovině na obrázku 3.3. Tyto vzorky lze zapsat v kartézské souřadnicové soustavě a po převedení bodu do polární soustavy souřadnic určené fází a amplitudou získáme amplitudu a fázi signálu.

[6]Tato dekorelace je důležitá, protože zajišťuje, že CTE signál je odlišný a snadno identifikovatelný v rámci celého signálu.

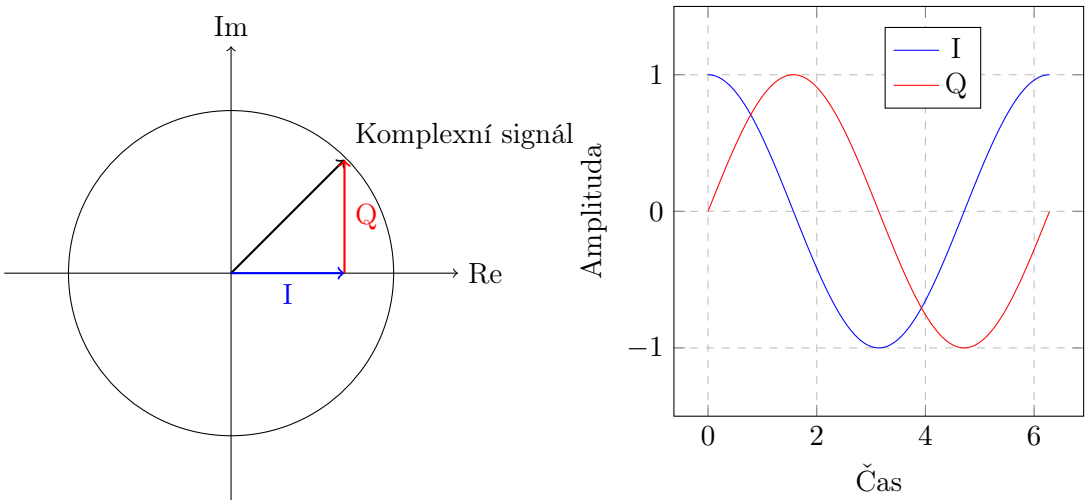
[7]Proces přepínání antén pro odhad úhlu příchozího BT signálu je možné nalézt např. v článku [4].

Odhad fáze lze tedy zjistit měřením amplitudy I a Q komponent. Komplexní signál je popsán amplitudou (černá šipka) a fází značící úhel od reálné osy.

Jak již bylo zmíněno, pro DoA metody je nutné využít anténního pole. Zároveň tak pro vyhodnocení vzorků je nutno měření svázat se specifickou anténou v anténním poli. [3]

AoA Kotva přijímá pomocí antén rádiový signál vyslaný tagem a vyhodnocuje pomocí složitějších algoritmů IQ vzorky a potažmo i úhel.

AoD Kotva sice obsahuje anténní pole, ale přijímač (tracker) je zařízení využívané pro IQ vzorkování. Přijímač musí znát parametry anténního pole pro správnou funkci IQ vzorkování.



(a) IQ Diagram (b) Simulované IQ vzorky

Obrázek 3.3: Fáze a amplituda určující I, Q soustavu

3.1.5 Algoritmy

Kompletní řetězec na obrázku 3.1 využívá více algoritmů nutných pro 1) získání IQ vzorků, 2) odhad úhlu a 3) odhad polohy nebo jiných aplikačních nároků:

IQ vzorkování Nutnou podporou vysílacího, resp. přijímacího BT čipu je podpora CTE v rámci protokolu a schopnost jeho zpracování. Pro úspěšnou funkčnost systému je vyžadováno přesné nastavení přepínání antén a vzorkování. Správné časování je kritické pro odhad úhlu, resp. polohy. [3]

Získání IQ vzorků je však jen první krok v tomto komplexním řetězci. Při psaní těchto algoritmů je nutný návrh *optimálního anténního designu*, znalost modelu antén pro kotvy i tagy a poté je možné navrhnout i optimální algoritmy dané aplikace.

Při provádění IQ vzorkování s anténním polem každý vzorek musí být opatřen značkou, ke které anténě patří. Použití vzoru specifikovaného v konfiguračních příkazech HCI (Host Controller Interface) a dodržování přísných pravidel časování napomáhá tomuto systematickému přístupu [19].

DoA algoritmy Tato část ucelených algoritmů má za úkol odhad úhlu příchozího signálu. Hlavní myšlenkou vývoje algoritmů je nalézt kompromis mezi přesností a výpočetní náročností. Tyto

algoritmy mají rovněž za úkol co nejlépe řešit nežádoucí faktory jako jsou např. vícecestné šíření signálu atd.

Příklady standardních DoA algoritmů jsou spektrálně založené MUSIC [20], Capon [21] atd. Dále algoritmy mohou být parametrické založené na maximální věrohodnosti (Maximum Likelihood – ML) [22]. Dále jsou také často využívané algoritmy ESPRIT [23] a PDDA [24]. Podrobnější přehled algoritmů je k dispozici např. v [6]. Vývojový kit XPLR-AOA-2 využívá algoritmus PDDA [17].

Algoritmy dané aplikací V případě aplikací vyžadující pouze určení směru příchodu signálu je nutné po odhadu úhlu aplikovat funkce dané aplikace. Touto aplikací mohou být např. tzv. body zájmu – namířením telefonu na zajímavé místo (socha, obraz, budova, ...) se na telefonu ukáží informace, mapa atd. [3]

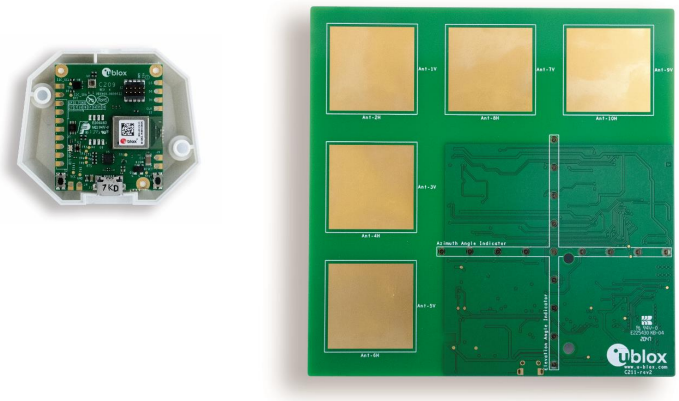
Pro lokalizační aplikace je potřeba využít algoritmy umožňující triangulaci. Tyto algoritmy mohou být založeny na metodě nejmenších čtverců LS (Least Squares), metodách maximální věrohodnosti MLE (Maximum Likelihood Estimation), metodách Kalmanova (KF) nebo částicového (PF) filtru atd. Na některé z nich se zaměříme v kapitole 5.

3.2 Stručný popis kitu XPLR-AOA-2

Vývojový kit XPLR-AOA-2 byl podrobně popsán v práci [7], resp. v technických dokumentacích [11] a [25]. V této části uvedeme pouze potřebné informace pro návaznosti na další sekce.

Hardware

Na obrázku 3.4 lze pozorovat základní prvky vývojového kitu, tj. tag C209 a kotvu C211. Kotvy obsahují jako hlavní modul u-blox B411 z rodiny NINA-B41 [26] a tagy modul u-blox B406 z rodiny NINA-B40 [27]. Hlavní rozdíl mezi nimi je „pre-flashed“ firmware u-connectXpress pro rodinu NINA-B41, zatímco NINA-B40 je architektury typu open CPU[8].



Obrázek 3.4: Vývojový kit XPLR-AOA-2 – vlevo tag C209 a vpravo kotva C211 [25]

Pro naše experimenty využíváme sériové USB-UART rozhraní pro připojení kotev skrze USB HUB do PC. Tag je pak napájen baterií CR2023. Podstatnou charakteristikou tagu je jeho vyzařo-

[8]Možnost integrátorům plný vývoj vlastních aplikací na základě SDK od Nordic Semiconductor. u-connectXpress je software pro ovládání různých dílčích funkcionalit modulu pomocí AT příkazů.

vací charakteristika, která je lineární [27]. Pro úplnost lze využít připojení kotev k bezdrátové IoT bráně EVK-ODIN-W2 [25].

Přesnost měření úhlů vývojovým kitem XPLR-AOA-2 je výrobcem stanovena dle [28] jako střední hodnota chyby 5°. Přesnost určení polohy pak 1 m, avšak velmi záleží na dané konstelaci. Maximální počet zároveň sledovatelných tagů závisející na vysílací periodě je 50. U-blox vyvinul ucelený uzavřený nástroj *Local Positioning Engine* (aktuální verze 2.0), který umožňuje získat polohu tagu ve 2D. Tato webová aplikace byla v průběhu času zkoušena, avšak pro náš výzkum nejsou zdrojové kódy, včetně metodiky lokalizace veřejnosti zpřístupněny. Dále je pak možnost využití komerčního systému Traxmate, více viz [11].

Firmware

Před prvním spuštěním je dle [25] nutno provést flash kotev i tagu firmwarem od výrobce. Firmware kotev je zcela uzavřený (podobně jako schéma kotvy) a je dodáván jako binární soubor pod názvem *u-connectLocate*. Nyní využíváme nejnovější verzi 2.1.0. Samotné flashování kotev a tagů je možné skrze nástroj u-blox s-center.

V prvotní fázi testování vývojového kitu byl využit firmware kotev verze 1.2.0. Původní firmware vracel měřená data v rozsahu 0 až +180° a v novějších verzích firmwaru byl upraven na rozsah ±90°. Některé nástroje a algoritmy byly vyvíjeny na starý rozsah, proto lze nalézt ve zdrojových kódech přepočet na původní referenční rovinu a uvedený rozsah[9]. Firmware pro tagy je open-source a je možné jej nalézt v [25] odkazem na GitHub. Mimo jiné obsahuje tag senzory teploty, vlhkosti a tlaku BME-280 a akcelerometr LIS2DW12, které lze v případě potřeby využít po úpravě kódu.

Geometrie kotev

Je-li kotva umístěna v dané konstelaci v kartézské soustavě x a y, pak při pohledu shora jsou úhly měřeny od normály kotvy v rozsahu ±90, jak bylo uvedeno výše. Na obrázku 3.5 lze pozorovat příklad konstelace. Úhel azimutu θ je definován jako odchylka od normály $\boldsymbol{n}$ kotvy. Kladný úhel je dán pravou polorovinou kotvy z pohledu shora. Např. kotva `A2` dává kladný úhel θ, ostatní pak $\theta = 0$. Úhly α a β jsou pak úhly doplňkovými – α značí úhel od referenční vodorovné roviny (x-ové osy) ke směrové spojnici kotva-tag[10] a β značí úhel od referenční roviny k normále kotvy. Pro elevaci jsou úhly vyjádřeny podobným způsobem v prostorové kartézské soustavě souřadnic, více viz [25]. Podobná geometrie platí i pro rovinu elevace.

Z uvedené geometrie vyplývá, že transformace roviny je prováděna následovně

$$\alpha = \beta - \theta. \tag{3.1}$$

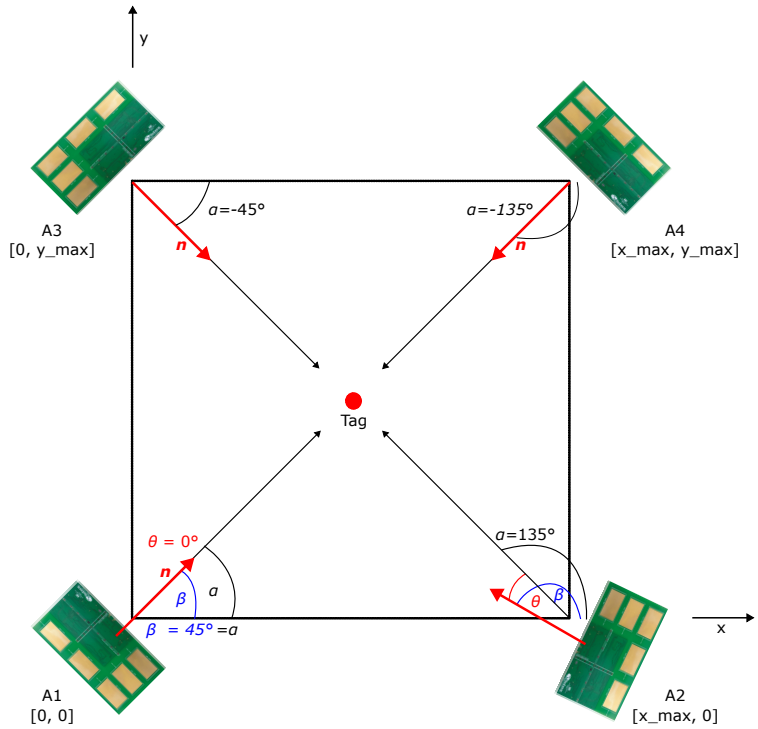
V žádné části technické dokumentace ke kotvám nebyla nalezena informace o geometrickém středu vyzařovací charakteristiky. Experimentálně bylo ověřeno, že nulový úhel azimutu i elevace je při nasměrování vysílacího tagu na střed rohové patch antény URA kotvy. Pro tento účel byl navrhnut držák pro měření, který je uveden v sekci 6.2.1.

Vyzařovaný výkon

Vyzařovací výkon antény modulu NINA-B406 na tagu je možné přenastavit pomocí AT příkazů v rozsahu -40 až 8 dBm. Pro naše experimenty bylo nastaveno 0 dBm, tj. 1 mW.

[9] Příkladem může být přepočet ve vztazích 7.1 a 7.2.

[10] V textu se označení α překrývá s obecným pojetím úhlu. Pro předejití možného zmatení bude v místech, kde by taková záměna mohla nastat, význam připomenut.



Obrázek 3.5: Příklad scény s rozpoložením jednotlivých prvků

Formát zpráv

Dle [25] je formát zpráv AT příkazu `UUDF` následující

$$+\text{UUDF} : \overset{1.}{\text{6C1DEBA5F60C}}, \overset{2.}{-68}, \overset{3.}{-30}, \overset{4.}{42}, \overset{5.}{0}, \overset{6.}{37}, \overset{7.}{\text{„6C1DEBA09862“}}, \overset{8.}{\text{„“}}, \overset{9.}{1606101}, \overset{10.}{25} \quad \text{(UUDF)}$$

1. **ID tagu** (6C1DEBA5F60C) Eddystone UID (MAC adresa),
2. **RSSI** (-68) RSSI v první polarizaci (horizontální) v dBm,
3. **azimut** (-30) hodnota θ ve stupních,
4. **elevace** (42) hodnota ϕ ve stupních,
5. **RFU** (0) původně RSSI v druhé polarizaci, nyní však RFU (Reserved for Future Purpose),
6. **BLE kanál** (0) BLE vysílací/přijímací kanál,
7. **ID kotvy** (6C1DEBA09862) unikátní označení kotvy (MAC adresa),
8. **string** („-“) uživatelsky definovaný řetězec,
9. **doba od startu** (1606101) časová známka od spuštění kotvy v ms,
10. **číslo zprávy** (25) periodické číslo zprávy (pouze v nejnovějším firmwaru).

Tyto zprávy je nutné sloučit ze všech kotev a následně získat hodnotu azimutu, resp. elevace, čímž se zabývá sekce 4.2.

4 Metody vyhodnocení přesnosti a zpracování dat

Chceme-li se zabývat vyhodnocením přesnosti měření úhlů a přesnosti lokalizace systému, je potřebné zavést určité kvalitatvní ukazatele. Pro vyhodnocení měřených dat pro účely vypočtení korekčních vztahů v kapitole 6 a později pro lokalizaci, zavedeme v sekci 4.1 využívané vztahy pro statistická zpracování. Dále pak v sekci 4.2 bude představen nástroj pro časovou synchronizaci zpráv od jednotlivých kotev. Jako poslední představíme v sekci 4.3 nástroj, který byl vyvinut pro ověření měřených úhlů v libovolné konstelaci.

4.1 Statisticko-pravděpodobnostní charakteristiky

4.1.1 Základní charakteristiky

Statistické charakteristiky budou využívány k vyhodnocení naměřených dat a přesnosti odhadů lokalizace. V předcházející práci [7] byly podrobně zavedeny základní charakteristiky, proto dále uvedeme pouze stručný přehled využívaných vztahů.

Měřené úhly jsou náhodnou proměnnou X se spojitým rozložením hustoty pravděpodobnosti, která nabývá různých hodnot $x_1, \ldots, x_n$, každá z těchto hodnot nabývá s příslušnou pravděpodobností $p_1, \ldots, p_n$. Množina realizací náhodné proměnné a příslušné charakteristiky závisí na mnoha faktorech, jako jsou tvar konstelace a vlastnosti prostředí.

Střední hodnota, rozptyl a směrodatná odchylka

Střední hodnota vyjadřuje průměrnou hodnotu všech realizací a rozptyl je mírou odchylky realizací od této střední hodnoty. Pro spojitou náhodnou veličinu X dle [29] platí

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

kde operátor $\mathbb{E}[-]$ je označení pro střední hodnotu (expected value). Rozptyl $\mathrm{var}[X]$ (variance) lze spočíst jako

$$\mathrm{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 p(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Vyšší hodnota rozptylu značí, že náhodná proměnná má tendenci se více vzdalovat od střední hodnoty.

Pro reprezentaci míry odchýlení od střední hodnoty je vhodnější využít veličinu v původních jednotkách. Směrodatná odchylka σ (standard deviation) vyjadřuje míru variability nebo rozptylu odhadů kolem průměrné hodnoty a je dle [29]

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}[X]}. \tag{4.3}$$

Chceme-li však zpracovat naměřené hodnoty, které představují realizace náhodné proměnné X, budeme pracovat s omezeným množstvím diskrétních hodnot. Proto uvedeme následující vztahy, které jsou využívány při vyhodnocování charakteristik v MATLABu. Charakteristiky budou nyní přeznačeny dle dokumentace funkcí v MATLABu.

Střední hodnota μ (funkce `mean()`)

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.4}$$

kde n je počet realizací (měřených úhlů) a x_i je daná realizace náhodné proměnné. Chceme-li spočíst střední hodnotu v kartézské souřadné soustavě reprezentované souřadnicemi x a y, pak můžeme využít vztahu

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - \mu_x)^2 + (y_i - \mu_y)^2}, \tag{4.5}$$

kde by mohly v našem případě x_i a y_i být odhadnuté polohy a μ_x, resp. μ_y pak střední hodnota z odhadnutých souřadnic x a y spočítané pomocí předešlého vztahu.

Rozptyl V (funkce `var()`)

$$V = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|^2. \tag{4.6}$$

Směrodatná odchylka S (funkce `std()`)

$$S = \sqrt{V}. \tag{4.7}$$

Distribuční funkce

Distribuční funkce CDF (Comulative Distribution Function) náhodné veličiny X je pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší než argument funkce x [29], tj.

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.8}$$

CDF má následující základní vlastnosti:

- nabývá hodnot v rozsahu $[0, 1]$ pro všechny hodnoty argumentu,
- je neklesající,
- v koncových bodech platí $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{n\to\infty} F(x) = 1$.

Hustota pravděpodobnosti, histogram, boxploty

Hustota pravděpodobnosti PDF (Probability Density Function) $p(x)$ po integrování vyjadřuje, s jakou pravděpodobností se hodnota náhodné veličiny X nachází v daném intervalu hodnot $[a, b)$ [29]

$$P(a \leq x < b) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

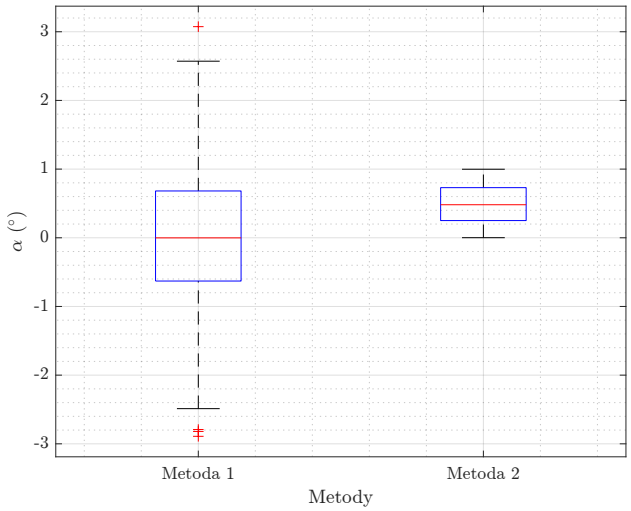
PDF má následující základní vlastnosti:

- je nezáporná funkce,
- integrál z hustoty přes celý reálný obor je jednotkový,
- PDF je derivace CDF podle x.

Rozdělíme-li interval $[a, b)$ na N stejně širokých podintervalů, pak lze hustota pravděpodobnosti popsat četností realizací náhodné proměnné v jednotlivých podintervalech. Vznikne tak sloupcový graf, tzv. *histogram*, kde výška sloupců vyjadřuje četnost realizací v daném podintervalu, více viz [7].

V poslední řade se podíváme na znázornění statistik formou tzv. *boxplotů*. Boxplot je grafický způsob vizualizace distribuce dat, jehož popis by měl zahrnovat střední hodnotu nebo medián, dále pak samotná tzv. krabice svou spodní hranou označuje 25. percentil a hranou horní 75. percentil. Tento rozsah se nazývá interkvartilový rozsah a obsahuje 50 % dat. „Vousy“ (whiskery) jsou kratší čáry vycházející z obou konců krabice, reprezentují rozsah dat mimo interkvartilový rozsah. Dále grafické znázornění obsahuje odlehlé body (outliers), které jsou výrazně odlišné od většiny dat. V MATLABu jsou tyto odlehlé hodnoty definovány jako body ležící mimo interkvartilový rozsah, včetně „vousů“. Jsou tedy vzdáleny od kvartilů o určitý násobek interkvartilového rozsahu (ve výchozím nastavení o více než 1,5 násobku tohoto rozsahu, tj. délka whiskerů). [30]

Příklad boxplotů lze pozorovat na obrázku 4.1. Lze pozorovat, že levý boxplot má nulovou střední hodnotu, větší rozsah hodnot značené „vousy“ a několik odlehlých dat označených červenými křížky. Pravý boxplot má pak výrazně nižší proměnnost v datech.



Obrázek 4.1: Příklad porovnání dvou boxplotů

4.1.2 Mean Squared Error

Často používanou metrikou pro zhodnocení přesnosti regresních modelů, tj. měření rozdílu mezi skutečnými či předpovídanými hodnotami a naměřenými či odhadnutými hodnotami, je MSE (Mean Squared Error). Máme-li n odhadů, pak lze z každého odhadu spočíst chybu $x_i - \hat{x}_i$ [31] a průměr vzorku se minimalizuje

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2, \tag{4.10}$$

kde x_i je skutečná hodnota (např. známá poloha tagu) a $\hat{x}_i$ je předpovězená hodnota (např. odhad polohy z dané iterace).

Celkově vzorec říká, že MSE je průměrná hodnota ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$) čtverců rozdílů $(x_i - \hat{x}_i)^2$ mezi skutečnými hodnotami x_i a předpovězenými hodnotami $\hat{x}_i$[11]. Čím menší hodnota MSE, tím lepší je předpověď modelu.

Častěji využívaným měřítkem je RMSE (Root Mean Squared Error), které je pouze odmocninou vztahu pro MSE

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\mathrm{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}. \tag{4.11}$$

Výhoda RMSE oproti MSE je, že poskytuje lépe interpretovatelný výsledek ve stejných jednotkách jako původní data a zároveň umožňuje odlišení velikosti chyb mezi modely. Je však citlivější na větší odchylky. V našem případě budeme počítat MSE_x a MSE_y, resp. RMSE_x, RMSE_y a RMSE_{xy}.

4.2 Zpracování dat z kotev a časová synchronizace

Dle sekce 3.2 máme určitý formát zpráv, který je dán uzavřeným systémem u-connectLocate od u-bloxu. Pro náš účel lokalizace potřebujeme vymyslet způsob, jak synchronizovat jednotlivá data od konkrétních kotev, abychom získali n-tici zpráv v konkrétním čase. Pro tento účel byly v průběhu času vyvinuty verze nástroje pojmenovaného jako `serialSynch`. V této sekci se budeme úzce věnovat popisu vyvinutého nástroje a jeho spuštění.

4.2.1 Motivace a nový formát zpráv

Problém lokalizace je obecně spjat s časovou synchronizací. V naší lokalizační úloze budeme využívat zdroj hardwarových hodin v příslušném PC[12].

Systémový čas bude ve formátu časové známky `yyyy-MM-dd HH:mm:ss.SSS`, který přidáme před danou datovou zprávu. Také přidáme informaci o konkrétním COM portu (Communication port), ke kterému je daná kotva připojena. Výsledná zpráva je pak ve formátu

$$\overset{1.}{\text{2023-12-12 9:50:26.643}}, \overset{2.}{\text{COM8}}, +\text{UUDF: } \overset{3.}{\text{konkrétní zpráva}}. \tag{UUDF-time}$$

1. timestamp (2023-12-12 9:50:26.643) časová značka přijaté zprávy,

2. COM port (COM8) označení, ke kterému COM portu byla kotva připojena,

3. data formát dat na stránce 16.

4.2.2 Popis nástroje

Aktuálně jsou vyvinuty dvě hlavní verze nástroje pro časové značkování. S nástrojem `serialSynch` lze vyčítat data pouze z jedné kotvy, tím získáme časové značky ve výstupním souboru. Nástroj

[11] Také lze říci jak moc se estimátor spletl vůči skutečné hodnotě.

[12] Každý počítač má svůj vlastní obvod reálného času RTC (Real Time Clock), který je zálohován nějakým bateriovým zdrojem. V případě vypnutí počítače je v registrech RTC čipu uložena a postupně navyšována hodnota času. Po opětovném zapnutí počítače se hodnota hardwarových hodin uloží do softwarových hodin a odtud je využívána jakožto systémový čas. Po připojení k internetové síti se pak SW a potažmo HW hodnota zkoriguje.

je vhodný např. pro měření přesnosti v 1D[13]. Pro časovou synchronizaci pro problém lokalizace je možné využít čtyři spuštěné nástroje, každý pro jednu kotvu. Další možností je využít verzi nástroje `serialSynchThreads`, který umožní paralelní zpracování dat od jednotlivých kotev a uloží vše do jednoho výstupního `csv` souboru[14].

Tyto dva nástroje jsou konzolové aplikace. Pro vylepšení práce s nástroji byly přidány konfigurační soubory, také ve formátu `csv`, které umožňují nastavit:

COM port (např. 8, popř [8, 9, 10, 11] pro více kotev) v číselném formátu,

část názvu výstupního souboru (např. „_no3“) tento řetězec se přidá k výchozímu názvu souboru, který je formátu `yyy-MM-dd`,

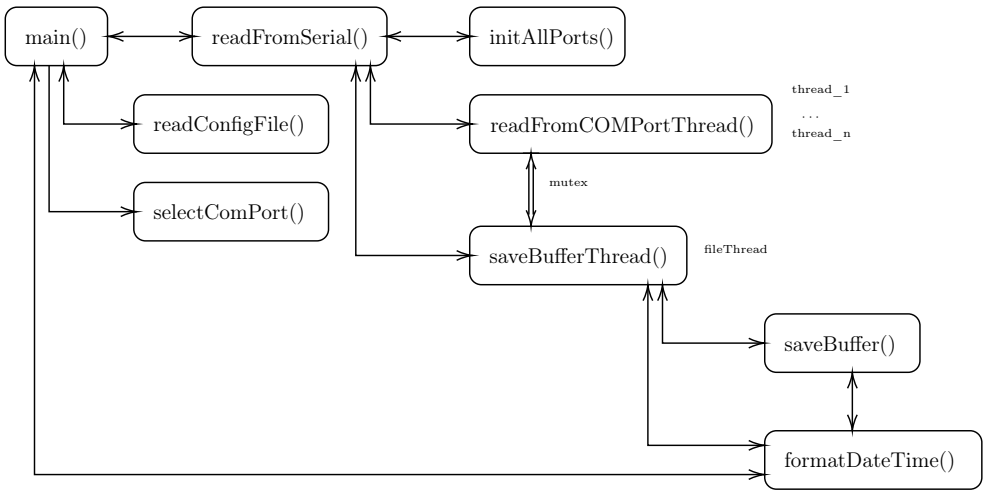
uživatelsky definovaný řetězec (např. „Měření v BK“) umožňující přidat poznámku k měření na první řádek výstupního souboru,

log (např. 0) možnost zapnutí/vypnutí loggování do konzole[15].

Při práci s jedinou kotvou je efektivnější zvolit nástroj, který nepotřebuje vícevláknovou logiku. Je to proto, že je zbytečné využívat složité procesy, které jsou využity pro případ, kdy chceme využít připojení více kotev.

Dále je uvedena struktura hlavních souborů pro nástroj `serialSynch`.

```
/serialSynch
├── serialSynch.cpp ..... KONFIGURACE A ZÍSKÁNÍ DAT Z JEDNÉ KOTVY
├── serialSynch.exe
├── serialSynchThreads_v2.3.cpp ..... SYNCHRONIZACE DAT OD VÍCE KOTEV
├── serialSynchThreads_v2.3.exe
└── config
    ├── config_solo_cpp.csv ..... KONFIGURACE PRO JEDNU KOTVU
    └── config_multi_cpp.csv ..... KONFIGURACE PRO VÍCE KOTEV
```



Obrázek 4.2: Struktura funkcí nástroje `serialSynch` pro zpracování dat z více kotev

[13] Využito viz kapitola 6.
[14] Využito viz kapitola 7.
[15] Doporučeno nechat vypnuté, vykreslování do konzole stojí velké množství výpočetního času. Tato možnost je vhodná pro vývoj a debuggování.

Samotný nástroj byl vyvinut nejprve v jazyce C pro práci s jednou kotvou. Poté pro jednodušší práci byl nástroj vyvinut v jazyce C++. Hlavní knihovna pro umožnění čtení ze sériového portu byla využita `windows.h`, resp. `winbase.h` [32]. Knihovna pro více vláknovou aplikaci byla pak využita `pthread.h` [33] a `mutex.h`. Samotný popis funkcí je stručně uveden níže, avšak vše je podrobně okomentované ve zdrojovém kódu. Na obrázku 4.2 jsou uvedeny spojení reprezentující komunikaci mezi funkcemi dále popisované[16].

`main()` ve spouštěcí funkci (hlavním vlákně) proběhne veškeré prvotní deklarování potřebných proměnných, kontrola a vyhodnocení parametrů při spouštění nástroje, vyčtení a kontrola dat z konfiguračního souboru a předání získaných dat hlavní řídící funkci `readFromSerial()`

- `readConfigFile()` získání návratové hodnoty ze zpracovaného konfiguračního souboru do `main()` funkce
- `selectComPort()` výpis aktuálně dostupných COM portů, více viz sekce 4.2.3

`readFromSerial()` hlavní řídící funkce pro vícevláknové zpracování – řídí korektní spuštění a ukončení vláken, zajišťuje také zpětnou komunikaci s `main()` při ukončování nástroje

- `initAllPorts()` inicializace a nastavení všech COM portů s využitím funkcí z knihovny `winbase.h`
- `readCOMPortThread()` funkce vykonávána jednotlivými vlákny pro získání zpráv od kotev přiřazené k jednotlivým COM portům
- `saveBufferThread()` funkce pro samostatné zapisovací vlákno, které ukládá získané řetězce od ostatních čtecích vláken do výstupního souboru, dochází zde také k vytvoření jednotlivých časových známek
  - `saveBuffer()` zajistí uložení řádku od dané kotvy v daný moment do výstupního souboru

`formatDateTime()` funkce formátující časovou značku do příslušného výstupního formátu

V implementaci v C++ využíváme více vláken pro čtení z COM portů. Každé z těchto dílčích čtecích vláken je zaměřeno na zpracování dat ze svého příslušného COM portu. Dále je implementováno paralelní vlákno starající se o koordinaci a shromáždění jednotlivých dat z těchto čtecích vláken. Koncept mutexů zajišťuje korektní přístup ke sdíleným zdrojům jako jsou čtecí vlákna a soubor pro ukládání dat. Tímto způsobem je zajištěna synchronizace a bezpečný přístup k datům v rámci více vláken, aby se předešlo potenciálním konfliktům a byla zajištěna integrita dat.

4.2.3 Spouštění a ukončování

Nástroj `serialSych` spustíme z příkazové řádky následujícími příkazem. Spuštění nástroje bez zadání parametru není možné.

```
./serialSynch -f "./config/config_solo.csv"
```

Pro více kotev využijeme podobného příkazu pro nástroj `serialSynchThreads` následovně.

```
./serialSynchThreads_v2.3 -f "./config/config_multi_cpp.csv"
```

Pro zobrazení seznamu dostupných COM portů lze využít následujících příkazů.

```
./serialSynch -c
./serialSynchThreads_v2.3 -c
```

[16] Diagram přiblíží strukturu kódu věnující se vícevláknovému zpracování. Pro jednodušší verzi nástroje by se jednalo o podobnou strukturu.

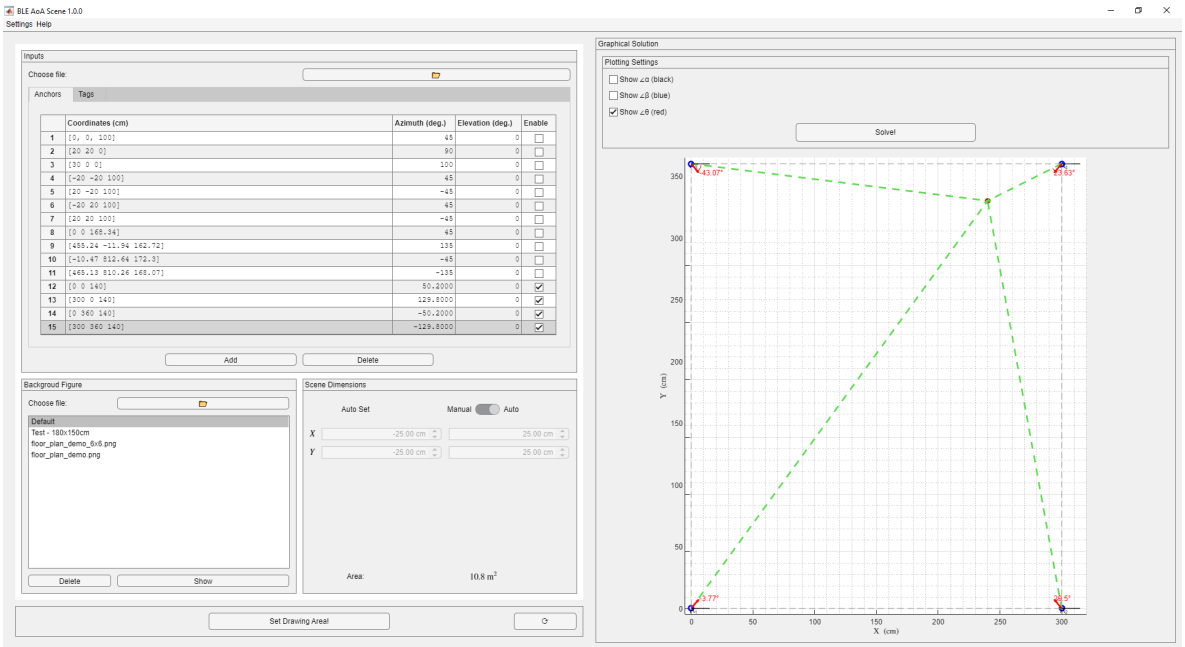
4.2.4 Budoucí práce

Vyvinuté nástroje jsou dostačující pro naše aplikace, avšak v průběhu času byly zjištěny možné další vylepšení a nápady, bodově se jedná o následující:

- zaobalit nástroj do nějaké aplikace s GUI (Graphical User Interface),
- vyladění a optimalizace celého kódu,
- `json` struktura pro konfigurační soubory,
- zpřehlednění kódu a modularita funkcí,
- důležitým cílem je multiplatformní možnost spouštění (dílčí částí bylo využití knihovny `pthread.h`, která je podporována i na unixových OS).

4.3 Scéna pro BLE lokalizaci

Pro ověření získání správných teoretických úhlů byl vyvinut nástroj umožňující pro danou konstelaci získat přesnou informaci o úhlech, které mají být reálně naměřeny konkrétními kotvami. Grafické rozhraní je na obrázku 4.3. Nyní stručně popíšeme funkcionality nástroje:



Obrázek 4.3: Grafické rozhraní nástroje pro ověřování úhlů

Nastavení konstelace Konstelace lze nastavit souřadnicemi v tabulce, která obsahuje dva listy, tj. zvlášť pro kotvy a zvlášť pro tagy. U kotev je možnost nastavení natočení v rovině azimutu a příprava pro prostorové natočení v rovině elevace.

Konstelace lze vytvořit pouze z jedné kotvy a jednoho tagu nebo z N kotev a jednoho tagu. Nástroj je však připraven do budoucna pro výpočet úhlů pro více tagů. Možnosti `enable` nám umožňují libovolný výběr jednotlivých kotev nebo tagů. Pro zefektivnění práce lze souřadnice pro body v konstelaci také nastavit ze vstupního `csv` souboru.

Popis konstelace Levá spodní spodní sekce aplikace umožňuje uložení obrázku konstelace. Po výběru a kliknutí tlačítek `Show` otevře druhé okno, ve kterém lze vytvořit popis dané konstelace či měření, viz obrázek 4.4b.

Rozšíření by dále mohlo spočívat vložením obrázku rozmístění různých objektů uvnitř konstelace a dále využití jako pozadí výstupního grafu.

Výstupní úhly Výstupní úhly jsou značeny α, β a θ. Jejich význam je dle obrázku 4.4a následující:

- α (označen černě) je úhel od referenční roviny označené jako $0°$ ke spojnici kotva-tag,
- β (označen modře) je úhel od referenční roviny k normále kotvy (červená šipka),
- θ (označen červeně) je úhel mezi normálou kotvy a spojnicí kotva-tag; tento úhel je výstupem využívaného vývojového kitu u-blox XPLR-AOA-2.

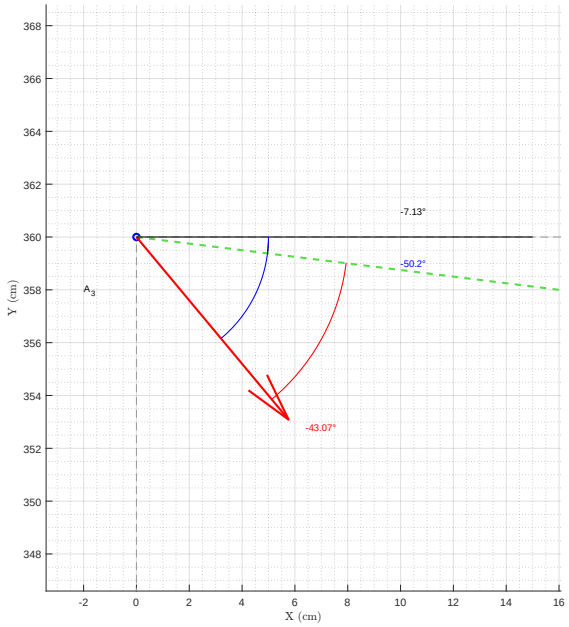
Rozměry scény Přepínač umožňuje automatické nebo manuální nastavení rozměrů scény. Sekce obsahuje také informaci o ploše dané konstelace.

Výstup Pravá část nástroje obsahuje možnost vypnutí zobrazování některého z uvedených úhlů a poté výstupní graf obsahující informace o jednotlivých úhlech a rozměrech konstelace.

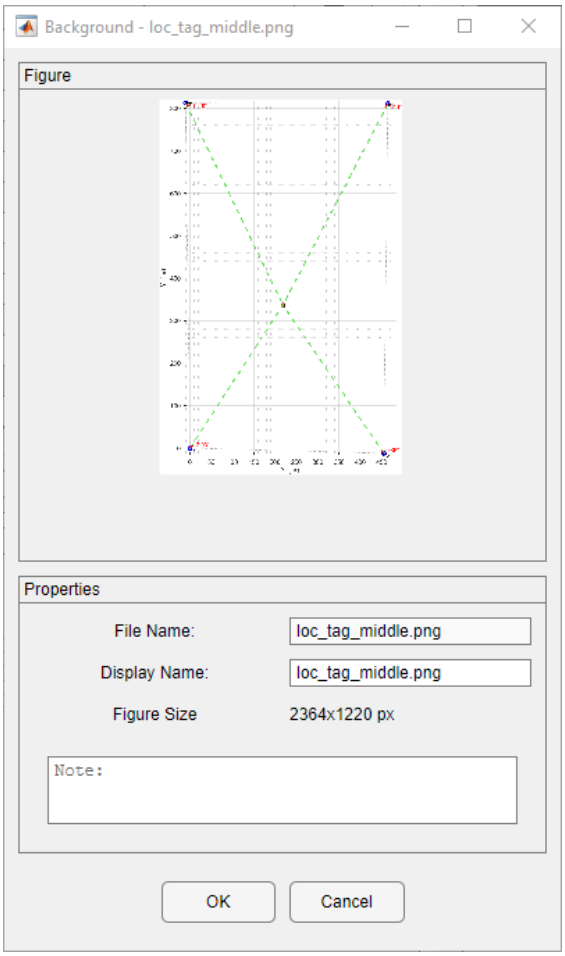
Automatické ukládání konfigurace V nastavení lze vypnout automatické ukládaní aktuálního nastavení aplikace. Po restartu zůstanou jednotlivé konfigurace uloženy.

V příloze je poskytnut nástroj s měřenými konstelacemi v kapitole 7. Jednotlivé zdrojové kódy v MATLABu jsou okomentované a také jsou poskytnuty vzorové `csv` soubory pro možnost importu konstelací. Také jsou k dispozici testovací obrázky.

V další práci by bylo možné aplikaci rozšířit primárně o vizualizaci lokalizace a ověření měřených úhlů v prostoru. Dále pak zajistit pohodlnější výčet výstupních úhlů ve formě exportu např. do `csv` a do GUI umístit přehlednou výstupní tabulku. V závislosti na geometrii konstelace je možné určit koeficient DoP (Dilution of Precision) představující chybu měření uživatele (tagu). Teorii lze využít pro zjištění optimálního rozmístění kotev tak, aby se minimalizovala chyba měření. My bychom mohli do nástroje zabudovat vizuální přehled, která místa lze předpokládat s vyšší mírou nepřesnosti lokalizace



(a) Detail výstupu jednotlivých úhlů



(b) Okno umožňující popis dané konstelace

Obrázek 4.4: Detaily nástroje ověřující úhly BLE scény

5 Algoritmy pro odhad polohy

V kapitole 2 byly představeny techniky, které získávají informace o příchozím signálu, avšak samy o sobě nedokáží zajistit informaci o poloze tagu. Měřené veličiny (pro úhloměrné metody úhly příchozího signálu) lze získat pomocí řešení sady rovnic popisující vztah polohy a pozorovaných veličin. Jak uvádí [34], jsou tyto rovnice nelineární a jejich analytická řešení jsou často netriviální, nepraktická nebo nedostupná. Uvedené algoritmy jsou matematické nástroje (tzv. estimátory), které se snaží odhadnout v našem případě polohu tagu.

V sekci 5.1 budou popsány některé z iterativních metod vycházející z LSM (Least Squares Method), pomocí kterých lze nalézt řešení nelineárních rovnic pro určování polohy ve smyslu nejmenších čtverců. V sekci 5.2 bude popsána rekurzivní metoda pro získání polohy – rozšířený Kalmanův filtr. Ukážeme aplikovaný popis na úhloměrné metody, má-li čtenář zájem o obecný popis, pak jej lze nalézt v [34].

5.1 Iterativní metody pro odhad polohy

Pro mnohé praktické problémy se lze dostat k soustavám, které nemají dokonalá analytická řešení z důvodu chyb a soustava může být předeterminovaná. Je-li potřeba tyto nelineární rovnice vyřešit, pak se dostáváme do teorie tzv. lineární regrese. Jedna z velmi často využívaných metod, která řeší tento problém, se nazývá *metodou nejmenších čtverců* LSM (Least Squares Method). [35]

LSM a metody odvozené jsou velmi často využívanými estimátory, jejichž smysl dává v řadě problémů, avšak se jedná o metody, které nejsou optimální z žádného hlediska. Nevyužívají žádné pravděpodobnostní statistiky. Avšak jejich velká výhoda spočívá, že vstupním předpokladem LSM je pouze znalost závislosti, jak se odhadovaný parametr projevuje na venek. Obecně platí, že čím více informací o daném systému víme, tím můžeme „sáhnout“ po optimálnějším estimátoru[17] (např. informace o uniformním rozdělení hustoty parametru atd.). [36]

Tento základ můžeme poté využít pro co nejlepší proložení naměřených bodů, v našem případě úhlů, obecně nelineární křivkou (také označováno modelem). Tím získáme minimalizaci odchylky mezi naměřenými hodnotami úhlů a hodnotami predikovanými touto křivkou[18], z čehož je poté možné dopočítat polohu.

V této sekci se budeme zabývat iterativními, tzv. gradientními metodami [34], které jsou založeny na principu LSM. Tyto metody mají společnou vlastnost, máme-li vstupní vektorový parametr $\boldsymbol{x}$, pak jej lze rozdělit na předpovídanou hodnotu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a její korekci $\check{\boldsymbol{x}}$, tedy

$$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} + \check{\boldsymbol{x}}, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}} + \check{\boldsymbol{y}}. \tag{5.2}$$

Vztah mezi měřenou hodnotou $\boldsymbol{y}$ a parametrem je $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, kde $f(\cdot)$ je obecně nelineární funkce regresního modelu. V následujících sekcích budou rozepsány tři metody pro odhad parametru $\boldsymbol{x}$ na základě měřených hodnot $\boldsymbol{y}$, tj. dále měřené úhly pomocí kotev.

[17] Např. Bayesovské estimátory, ML (Maximum Likelihood) estimátory atd.

[18] Tj. minimalizace sumy čtverců odchylek mezi naměřenými a predikovanými hodnotami, resp. minimalizace rozdílu mezi měřením a předpokládanou hodnotou.

Vstup algoritmu tvoří sady naměřených dat, např. naměřené úhly od čtyř kotev a informace o maximálním počtu iterací. V prvním kroku algoritmus vybere počáteční sadu dat, na které se bude snažit iterovat ke konvergujícímu výsledku. Nepodaří-li se mu to, pak dle ukončovacích podmínek 5.1.4 iterativní cyklus ukončí s nejlepším možným odhadem a přejde na novou sadu měření. Počet kroků bude charakterizován velikostí počtů naměřených datasetů.

5.1.1 Newton-Raphsonova metoda

Newton-Raphsonova nebo též Gauss-Newtonova metoda (dále jen NR) je nejrychlejším iterativním algoritmem využívajícím pouze první derivace měřené funkce. Vychází z nelineární metody nejmenších čtverců NLS (Non-linear Least Squares). Metoda NLS je oproti LSM rozdílná v tom, že křivka, kterou se snažíme sestavit, nemá lineární závislost hledaných parametrů $x_1, \ldots, x_n$. Odhad $\hat{\boldsymbol{x}}$ získaný touto metodou minimalizuje podmínku LSM, resp. reziduály funkce (5.3).

Aplikováním obecného přístupu z [34] lze popsat problém určení polohy úhloměrnými metodami v závislosti na následujících vstupních parametrech:

- měřená veličina $\boldsymbol{y}$ je úhel,
- známé nastavené souřadnice přijímačů, tj. kotev.

Problém minimalizace je aplikován na funkci typu

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\rho_i(\boldsymbol{x})^2, \tag{5.3}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor hledaných parametrů a $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ jsou reziduály (odchylky) funkce, tj. minimalizační problém se snažíme aplikovat na minimalizaci odchylky naměřené hodnoty funkce a vypočtené hodnoty. [37]

Po přepsání vztahu (5.3) pomocí reziduálů je pak vztah

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - f(t_i)\right)^2, \tag{5.4}$$

kde soubor (y_i, t_i) jsou známé hodnoty (tedy např. naměřené úhly y_i a poloha kotev t_i) a $f(\cdot)$ je funkcí, která *nemá* lineárně závislé hledané parametry (tedy např. v našem případě poloha tagu). Můžeme tedy přepsat problém minimalizace na minimalizaci vztahu pro reziduály

$$\rho_i(\boldsymbol{x}) = \rho_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i - f(t_i). \tag{5.5}$$

Pro odhad hledaného parametru $\hat{\boldsymbol{x}}$ budeme minimalizovat ve smyslu nejmenších čtverců podmínku

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} ||\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})||^2, \tag{5.6}$$

kde pro náš případ odhad polohy pomocí metody AoA je $\boldsymbol{y}$ vektor měřených úhlů, $\boldsymbol{x}$ je vektor vstupních parametrů funkce, která modeluje situaci triangulace dle vztahu (2.6). Vstupem této funkce jsou známé polohy kotev a aktuální odhad polohy tagu. LSM problém pak minimalizuje odchylku mezi měřenými úhly a úhly modelovanými funkcí $f(\cdot)$.

Newton-Raphsonova metoda využívá první derivace funkce $g(\boldsymbol{x})$ podle neznámých parametrů, tj. hledaných proměnných formulovaných jako vektor $\boldsymbol{x}$. První derivace proto může být reprezentována

Jacobiho maticí (dále také Jacobián). Její vlastností je, že definuje lineární zobrazení, které je nejlepší aproximací funkce v hledaném bodě [37], tj. v daném bodě je provedena linearizace problému. Jacobiho matice je definovaná následujícím vztahem

$$\mathbf{J}_f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}, \tag{5.7}$$

kde m označuje počet reziduálů, tj. soubor počtů známých (měřených) hodnot a n je počet neznámých (hledaných) hodnot, výsledná Jacobiho matice $\mathbf{J}$ má rozměr $m \times n$. Derivace jsou počítány v odhadovaném bodě $\tilde{\boldsymbol{x}}$[19].

Po linearizaci korekční části lze měřenou veličinu vyjádřit aproximačním vztahem

$$\boldsymbol{y} \approx f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \mathbf{J}_f|_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\check{\boldsymbol{x}}, \tag{5.8}$$

kde se korekční část měření spočte právě dle vztahu pro reziduály (5.5), tj.

$$\check{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \approx \mathbf{J}_f\check{\boldsymbol{x}}. \tag{5.9}$$

Tento zápis je ekvivalentním pro vztah (5.5), který je rigoróznějším matematickým popisem téhož.

Obecně není Jacobiho matice čtvercová, proto nelze snadno inverzi matice použít pro vyjádření korekční části hledaného parametru $\check{\boldsymbol{x}}$ (korekční část měření). Pro Jacobián musí být splněna podmínka plné hodnosti, aby výsledná matice $\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f$ byla regulární, což je nezbytné pro provedení inverze matice, tzv. *proces pseudoinverze*. Tato podmínka zajišťuje, že Jacobián má dostatečný počet nezávislých řádků a sloupců, což umožňuje vytvoření regulární matice nezbytné pro možnost inverze. Následuje odvození pro výpočet korekční části [34].

$$\mathbf{J}_f\check{\boldsymbol{x}} = \check{\boldsymbol{y}} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f\check{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{y}} \tag{5.11}$$

$$\check{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f\right)^{-1}\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{y}} \tag{5.12}$$

Newton-Raphsonův nový odhad pro další iteraci $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ proto bude ze vztahu (5.1) následující

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \left(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}}\mathbf{J}_f\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}}\right)^{-1}\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}}\check{\boldsymbol{y}}, \tag{5.13}$$

kde $k = 0, \dots, k_{\max}$ je hodnota daného parametru v aktuální iteraci, která je využita pro výpočet nového odhadu parametru $\boldsymbol{x}$. Hodnota $k_{\max}$ určuje maximální počet iterací pro daný dataset. Je-li splněna kombinace ukončovacích podmínek, pak algoritmus uloží aktuální odhad parametru $\boldsymbol{x}$. Aktuální odhad je pak využit jako inicializační hodnota parametru pro další krok, ve kterém je využito nové sady měření. Dále je také uveden pseudokód algoritmu[20].

V následující části si přiblížíme aplikaci Newton-Raphsonovy iterační metody na lokalizaci polohy tagu pomocí AoA.

[19] Odhadovaný bod pro první iteraci, tzv. inicializační bod, může být např. náhodně zvolený bod v prostoru či rovině.
[20] Pro metodu gradientní a Levenberg-Marquardtovu by byl algoritmus velmi podobný, proto jej dále neuvádíme.

Aplikace Newton-Raphsonovy metody

Pro nalezení nejlepšího odhadu polohy tagu (uživatele) $\boldsymbol{r}_\mathrm{u} = (x_\mathrm{u}, y_\mathrm{u})$ v dané iteraci k ve 2D se snažíme minimalizovat reziduál dle vztahu (5.5), tedy

$$\rho_i(\boldsymbol{r}_\mathrm{u}) = \alpha_i - f(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A},i}) = \alpha_i - \operatorname{atan2}\left(x_u - x_{\mathrm{A},i}, y_u - y_{\mathrm{A},i}\right),$$

kde $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A},i} = (x_{\mathrm{A},i}, y_{\mathrm{A},i})$ je poloha i-té kotvy (anchor) a α_i je měřený úhel od i-té kotvy. Funkce $\operatorname{atan2}(\cdot)$ reprezentuje nelineární funkci $f(\cdot)$ a vychází z geometrické reprezentace rozmístění kotev a tagu dle obrázku 2.3 a vztahu (2.6).

Počáteční odhad polohy tagu $\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(0)}$ je libovolně zvolen, nejlépe však obecně v prostoru mezi kotvami. Pro další kroky $l = 1, \ldots, l_\mathrm{max}$ bude počáteční odhad roven odhadu z předchozího kroku $l - 1$.

Pro následující iteraci se nejlepší odhad polohy tagu $\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k+1)}$ spočte dle (5.1) jako

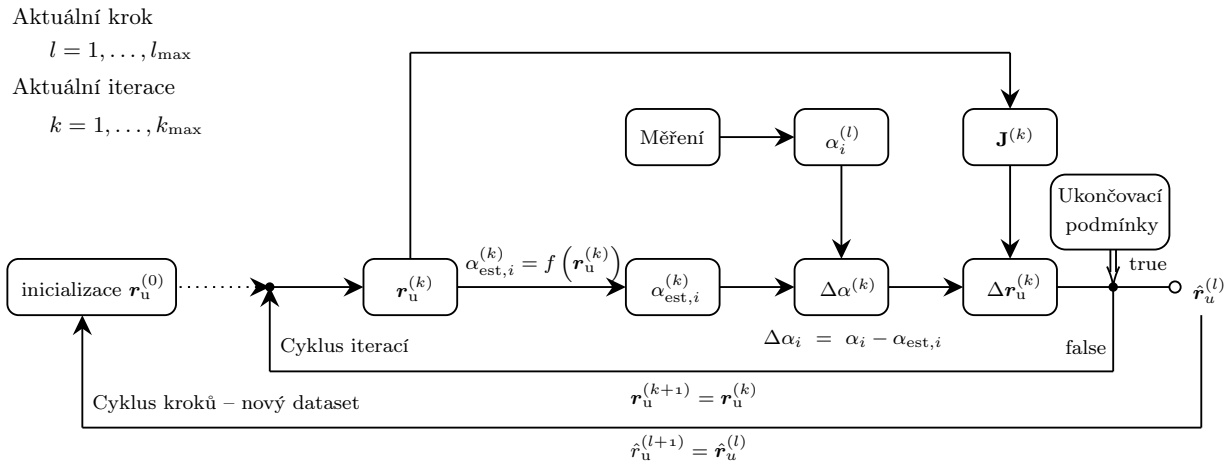
$$\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k)} + \left(\mathbf{J}_f^\mathrm{T}\big|_{\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k)}} \mathbf{J}_f\big|_{\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k)}}\right)^{-1} \mathbf{J}_f^\mathrm{T}\big|_{\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k)}} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r}_\mathrm{u}^{(k)}).$$

Rozměr Jacobiho matice bude záviset na počtu složek polohového vektoru $\boldsymbol{r}_\mathrm{u}$ a počtu kotev m, tj. v 2D případě bude velikosti $\mathbf{J}_{m\times 2}$. Proto i-tý řádek Jacobiho matice bude

$$\mathbf{J}_{i,:} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_\mathrm{u}}, \frac{\partial f}{\partial y_\mathrm{u}}\right] = \left[-\frac{y_\mathrm{u} - y_{\mathrm{A},i}}{\left(x_\mathrm{u} - x_{\mathrm{A},i}\right)^2 + \left(y_\mathrm{u} - y_{\mathrm{A},i}\right)^2}, \frac{x_\mathrm{u} - x_{\mathrm{A},i}}{\left(x_\mathrm{u} - x_{\mathrm{A},i}\right)^2 + \left(y_\mathrm{u} - y_{\mathrm{A},i}\right)^2}\right].$$

Dalšími iteracemi získáme v případě konvergence stále přesnější výsledky. Na obrázku 5.2 je znázorněna simulace odhadu polohy tagu v jednom kroku pomocí Newton-Raphsonovy metody v MATLABu při znalosti přesných úhlů a bez vstupu šumu. Lze pozorovat, že poloha byla nalezena po třech iteracích, v případě zatížené chybou měření výsledek bude s vyšší hodnotou reziduálu a bude potřeba vyššího počtu iterací.

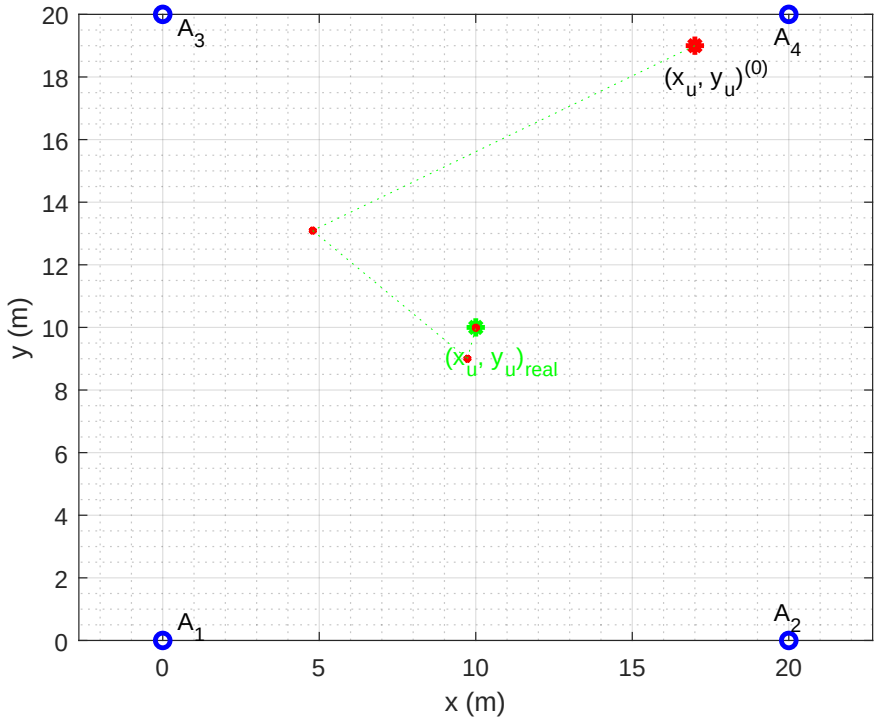
Na obrázku 5.1 lze pozorovat blokový diagram pro tuto aplikaci Newton-Raphsonovy metody. Blokové diagramy by byly velmi podobné i pro další dvě uváděné metody.



Obrázek 5.1: Blokový diagram pro Newton-Raphsonovu metodu

Algoritmus 1 Newton-Raphsonova metoda

Inicializace $\boldsymbol{x}^{(0)}$
Definuj počet opakování $k_{\max}$ ▷ maximální počet iterací
for l od 1 do $l_{\max}$ **do** ▷ opakování přes množinu datasetů
    for k od 1 do $k_{\max}$ **do** ▷ iterační cyklus metody
        Vypočti odhad úhlů dle (2.6) ▷ na základě aktuálního odhadu polohy a souřadnic kotev
        Vypočti reziduál úhlů dle (5.9) ▷ využij aktuální měření
        Vypočti nový odhad dle (5.13)
        if Ukončovací podmínka **then** ▷ viz sekce 5.1.4
            break
        end if
    end for
    Inicializace $\boldsymbol{x}^{(0)}$ pro další krok s novým datasetem
end for
Vyhodnocení výsledných odhadů



Obrázek 5.2: Praktická ukázka iterací pomocí Newton-Raphsonovy metody s jedním datasetem

5.1.2 Metoda největšího spádu

Gradientní, také metoda největšího spádu (Steepest descent method), je podstatně pomalejší nežli Newton-Raphsonova metoda, avšak má tendenci méně divergovat. Název je odvozen od principu této metody, která upravuje parametr v opačném směru gradientu cílové funkce $||\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})||^2$, tj. ve směru největšího spádu. Lze ukázat, že korekce $\check{\boldsymbol{x}}$ [34, 38] je možné spočíst z reziduálů pomocí

$$\check{\boldsymbol{x}} = \alpha \mathbf{J}_f^T\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}} \check{\boldsymbol{y}}, \tag{5.14}$$

kde $\alpha > 0$ je koeficient velikost kroku v dané iteraci. Čím větší α je, tím se možnost divergence algoritmu zvyšuje. Výsledný iterační krok je velmi podobný pro NR (5.13)

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{J}_f^T\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}} \check{\boldsymbol{y}}. \tag{5.15}$$

Přesná hodnota koeficientu α záleží na daném problému. Jak uvidíme dále, je pro náš lokalizační problém využívána velmi malá hodnota, tj. desetiny až jednotky.

5.1.3 Levenberg-Marquardtova metoda

Levenberg-Marquardtova metoda (LM) kombinuje dva dříve uvedené numerické minimalizační algoritmy. Metodu největšího spádu, ve které je suma čtverců chyb redukována aktualizací parametrů ve směru nejstrmějšího klesání. Dále pak Newton-Raphsonovu metodu, kde suma čtverců chyb je redukována představou, že cílová funkce je lokálně kvadratická v parametrech a hledá se minimum kvadratické funkce. LM metoda se chová více jako gradientní, je-li hodnota parametrů vzdálená od odhadovaných a více jako Newton-Raphsonova, při přiblížení k optimální hodnotě [38].

Podobně jako v předchozí gradientní metodě je v samotném algoritmu změna pouze v korekčním kroku $\check{\boldsymbol{x}}$ [34], [38]

$$\check{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f + \lambda \mathbb{I}\right)^{-1} \mathbf{J}_f^{\mathrm{T}} \check{\boldsymbol{y}}, \tag{5.16}$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice dle velikosti vektoru měření a λ je adaptivní parametr *tlumení* určující charakter odhadu – více do NR nebo gradientní metody. Část $\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f$ reprezentuje NR aktualizační krok a $\mathbb{I}$ gradientní. Pro přístup nezávislý na měřítku je možné využít upravenou rovnici pro korekce, kde λ je škálována diagonálními prvky matice $\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f$ a rozměr měření nemusí být normalizován, navíc pak diagonální vztah představuje regularizaci [34]

$$\check{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f + \lambda \mathrm{Diag}(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_f)\right)^{-1} \mathbf{J}_f^{\mathrm{T}} \check{\boldsymbol{y}}. \tag{5.17}$$

LM nový odhad pro další iteraci vycházející z korekční rovnice (5.17) je

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \left(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}}\mathbf{J}_f\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}} + \lambda \mathrm{Diag}(\mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}}\mathbf{J}_f\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}})\right)^{-1} \mathbf{J}_f^{\mathrm{T}}\big|_{\boldsymbol{x}^{(k)}} \check{\boldsymbol{y}}. \tag{5.18}$$

Parametr λ

Označován jako parametr tlumení (dumping parameter) [38], který v případě malé hodnoty λ nastaví korekční (aktualizační) krok spíše do NR metody a pro velké hodnoty λ odpovídá metodě gradientní. V extrémním případě $\lambda = 0$ je rovnice identická s NR (5.12).

Prvotní inicializace λ je prováděna vysokou hodnotou tak, aby se uplatnil vliv bezpečnější gradientní metody. Pokud kterákoli iterace dojde ke špatné aproximaci, tzn. součet kvadrátů odchylek se v následující iteraci zvýšil, pak se pokles λ pozastaví. V tomto případě se upravená hodnota λ

zruší a nahradí se hodnou z předchozí iterace. Je-li však aproximace vylepšována, pak se postupně λ snižuje, LM metoda se naklání spíše k NR metodě a řešení se typicky urychlí k lokálnímu minimu.

Parametr λ by měl být tedy dostatečně vysoký, aby se zamezilo divergenci a dostatečně malý tak, aby se dosáhlo co nejvyšší rychlosti konvergence. Zvolení optimálního parametru je složité. Jeden z běžných přístupů pro volbu parametru je snížení λ pro další iteraci, pokud aktuální odhad konverguje (suma čtverců se snižuje). Naopak zvýšení λ, není-li snížení reziduálů dosaženo:

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \lambda_k / c_\lambda^- \text{ pro} ||\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})||^2 < ||\boldsymbol{y} - f(\tilde{\boldsymbol{x}})||^2, \\ \lambda_k \cdot c_\lambda^+ \text{ pro} ||\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})||^2 \geq ||\boldsymbol{y} - f(\tilde{\boldsymbol{x}})||^2. \end{cases} \tag{5.19}$$

Existuje řada přístupů, jak zvolit optimální parametr, avšak často se jedná o relativně složité výpočty. Hraniční hodnoty parametru mohou být např. $\lambda \in \langle 10^{-10}; 10^5 \rangle$. Dle průzkumu v [34] je jedna z vhodných voleb $c_\lambda = c_\lambda^- = c_\lambda^+$ a konkrétně hodnoty

- $c_\lambda = 10$ nebo
- $c_\lambda = 5$ nebo
- $c_\lambda^- = 9$ a $c_\lambda^+ = 11$ nebo
- $c_\lambda = 5$ nebo 4 s mírně horšími výsledky, dle [39].

Dle [39] je vhodná úprava parametru následující

$$\lambda^{(0)} = 1, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{\lambda}{c_\lambda}, \quad k \ = 0, \ldots, k_{\max}. \tag{5.20}$$

Jak bylo ukázáno, je-li hodnota součtu kvadrátů odchylek v nové iteraci navýšena, pak se obnoví předchozí hodnota (první násobení c_λ) λ a posílí se vliv gradientní metody (druhé násobení c_λ) [39].

Algoritmus 2 Úprava parametru λ

1: **if** $k > 0$ **a** $g(\boldsymbol{x})^{(k)} \geq \underset{l=0}{\overset{k-1}{\operatorname{argmin}}}\, g(\boldsymbol{x})^{(l)}$ **then**
2: $\quad \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k-1)}$
3: $\quad \lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} c_\lambda^2$
4: **end if**

5.1.4 Ukončovací podmínky

Uvedené lokalizační algoritmy nezajišťují konvergenci ve všech případech. Hlavní důvod tzv. ukončovacích podmínek je zastavení iterací, je-li některá z kombinací ukončovacích podmínek splněna [34]. Uvedeme nyní pár obvyklých podmínek pro podmíněné ukončení algoritmu:

Pevně stanovený počet iterací Víme-li, že stačí pouze prvních k iterací k zajištění konvergence algoritmu, můžeme pak stanovit pevný počet iterací; také můžeme tuto podmínku využít, pohybujeme-li se v nekonečném cyklu a pokud žádná z ostatních podmínek není splněna.

Dostatečně malé residuály Odhad je dostatečně přesný vzhledem k měření a algoritmus zkonvergoval k minimu funkce, v našem značení z kapitoly 5 pro metody značeno ρ.

Velká hodnota korekce Je-li reziduál či korekční krok v iteraci vyšší, nežli pevně stanovená prahová hodnota ϵ, pak to značí tendenci kroku divergovat; proto překročením této prahové hodnoty algoritmus ukončíme s divergujícím výsledkem.

5.2 Kalmanův filtr

Linární Kalmanův filtr (KF) je *optimální* estimátor, který minimalizuje kvadratickou chybu MSE (Mean Squared Error) mezi signálem a jeho odhadem. KF nachází uplatnění v různých oblastech, včetně teorie zpracování signálu, autonomního řízení a ekonomie pro předpověď různých stavů [40]. KF se využívá pro odhad stavu systému. Mluvíme-li o estimátoru, máme na mysli matematický nástroj či algoritmus, který z naměřených dat (ovlivněná všudypřítomným šumem) odhaduje hodnotu měřené veličiny nebo stavu.

V sekci 5.2.1 bude přiblížena problematika stavového popisu společně s nastíněním problematiky zabývající se lineárními aplikacemi a úvodem do lineárního Kalmanova filtru a v sekci 5.2.2 bude popsán kompletní rekurentní algoritmus rozšířeného Kalmanova filtru aplikovatelný na náš nelineární problém. V závěru kapitoly uvedeme implementaci pro lokalizaci polohy na základě DoA metody AoA pro využití na vývojový kit u-blox XPLR-AOA-2.

5.2.1 Úvod do problematiky Kalmanova filtru a terminologie

Kalmanův filtr byl původně odvozen pro diskrétní aplikace. Rudolf E. Kalman poprvé prezentoval svou metodu v roce 1960 jako diskrétní lineární kvadratický estimátor pro časově proměnné systémy, viz přepracovaný článek [41]. KF byl navržen pro účely sledování a odhadu stavu dynamických systémů, zejména v kontextu řízení a navigace. Postupem času byly vyvinuty i varianty pro spojitý čas. V našem případě budeme využívat filtr diskrétní. [40]

Existuje mnoho přístupů k výpočtu neznámého (odhadovaného) stavu na základě měření procesu. Termín *proces* odkazuje na dynamiku systému, kterým se filtr snaží sledovat nebo modelovat. Proces lze chápat jako evoluci nebo změnu stavu systému v čase. V rámci KF sledujeme, jak se stav (například poloha tagu) vyvíjí v čase v porovnání s modelem procesu. Mnoho existujících přístupů k odhadu stavu nepřihlíží k šumové povaze měření [42]. Tento šum je obvykle stochastický (náhodný) a proto vyvíjíme *stochastické metody* (algoritmy), které umožňují modelovat takový systém.

V našem případě budeme uvažovat náhodný šum bílý s gaussovským rozložením WGN (White Gaussian Noise)[21]. Dále předpokládáme, že šum je statisticky nezávislý na procesu, který odhadujeme.

Odhad stavu je složen ze dvou částí – *predikce* a *korekce* (viz dále). V tomto textu budeme využívat pro značení odhadu stavového vektoru v predikčním kroku $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$. Jedná se o využití tzv. *a priori* informace odhadu stavu z předchozích kroků bez využití informace z měření. V korekčním kroku budeme pak využívat pro zkorigovaný stavový vektor označení $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$, tzn. je využito *a posteriori* informace z naměřených dat $\boldsymbol{z}_k$ v kroku k. Podobné značení platí i pro kovarianční matici odhadovaného stavu $\mathbf{P}$. Značka stříšky „$\hat{}$“ nám podobně jako v sekci 5.1 dává informaci o tom, že daná hodnota $\hat{\boldsymbol{x}}$ je odhadem $\boldsymbol{x}$.

V rovnicích je obecně využíváno „$^{\mathrm{H}}$“ značící hermitovské sdružení, v naší aplikaci očekáváme výsledky v reálném oboru, proto postačí transpozice „$^{\mathrm{T}}$“.

Klasický *Kalmanův filtr* je představen stavovým popisem rovnic lineárního systému v diskrétním čase k [42]

$$\boldsymbol{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{w}_k, \tag{5.21}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \mathbf{H}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \tag{5.22}$$

[21] Bílý znamená, že má pro všechny frekvence stejný výkon (konstantní Power Spectral Density Function – PSD), Gaussovský znamená ověření normálního rozdělení pravděpodobnosti. Šum je signál, který se projevuje na pozorovaném signálu, i když není přímo v našem zájmu.

kde vektor $\boldsymbol{x}$ je stavový vektor o n odhadovaných veličinách, např. $\boldsymbol{x} = \big(x, v\big)$ pro polohu a rychlost v 1D, $\mathbf{A}$ je matice přechodu mezi stavy z kroku $k-1$ do kroku k. Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ je vektor řídicích vstupů ovlivňující dané odhadované veličiny. V našem případě nebudeme z důvodu neexistence žádného řídicího vstupu tento vstup uvažovat, tj. matice $\mathbf{B}$, modelující vztah řídícího vstupu k odhadovanému stavu, je nulová. Vektor $\boldsymbol{w} \sim N(0, \mathbf{Q})$ je aditivním gaussovským šumem procesu s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí $\mathbf{Q}$. Tento šum zahrnuje nepřesnost toho, jak kvalitně daný model procesu modeluje reálnou situaci měření. V rovnici (5.22) je $\boldsymbol{z}$ vektor měření a $\mathbf{H}$ je matice pozorování (observace) vyjadřující, jak jsou systémové proměnné $\boldsymbol{x}$ měřeny (měříme-li např. pouze polohu, pak matice může vypadat $\mathbf{H}_k = \big(1, 0\big)$). Vektor $\boldsymbol{v} \sim N(0, \mathbf{R})$ je náhodný gaussovský šum měření s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí $\mathbf{R}$.

Vztah (5.21) nám vyjadřuje, jak získáme hodnotu nového stavu v následujícím časovém kroku k. Nový stav je modelován lineární kombinací předchozího stavu, řídicího vstupu a šumu = MODEL PROCESU. Dále vztah (5.22) nám popisuje, jak je proces měření (pozorování) odvozen z vnitřního stavu = MODEL MĚŘENÍ.

Lineární KF předpokládá zatížení měření bílým gaussovským šumem WGN a předpokládá, že časový vývoj měřené veličiny je lineární. Tyto dva předpoklady pak zajišťují optimalitu KF k danému problému [42]. Obecně veškeré matice uvedené výše mohou být v každém kroku proměnné, my je však budeme uvažovat časově neproměnné.

Jak bylo zmíněno, lineární KF je využitelný a zároveň optimální pro lineární problémy. Náš problém, zejména časový popis vývoje stavu systému (polohy) není popsán lineárním vztahem, konkrétně (2.6). Zároveň tak v reálném prostředí není zaručena normalita rozložení šumu. V další následující sekci 5.2.2 se proto podíváme na jednu z možných modifikací KF pro nelineární problémy, tzv. rozšířený Kalmanův filtr.

5.2.2 Rozšířený Kalmanův filtr

Nejdříve uvedeme obecný popis EKF (Extended Kalman Filter) a poté jej aplikujeme na náš problém lokalizace DoA pomocí metody AoA.

Stavová rovnice a rovnice měření ekvivalentní (5.21) a (5.22) jsou dány následujícími vztahy

$$\boldsymbol{x}_k = f\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k\right) + \boldsymbol{w}_k, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{z}_k = h\left(\boldsymbol{x}_k\right) + \boldsymbol{v}_k, \tag{5.24}$$

kde jednotlivé vztahy nyní popíšeme:

- stavová rovnice (5.23)
  - $f(\cdot)$ je funkce, která modeluje obecně nelineární vztah, jak se mění stav $\boldsymbol{x}_{k-1}$ do stavu $\boldsymbol{x}_k$; jedná se o vztah pro výpočet predikovaného stavu z předchozího odhadu,
  - $\boldsymbol{u}_k$ je řídicí vstup (opět jej nebudeme uvažovat),
  - $\boldsymbol{w}_k$ je šum procesu s kovarianční maticí $\mathbf{Q}_k$,
- rovnice měření (5.24)
  - $h(\cdot)$ je obecně nelineární funkce pro popis problému jak probíhá měření; jedná se o vztah pro výpočet predikované hodnoty měření vycházející z predikovaného stavu,
  - $\boldsymbol{v}$ je šum měření s kovarianční maticí $\mathbf{R}_k$.

Základním principem EKF je, že se filtr snaží nelineární problém linearizovat v okolí bodu předchozího odhadu stavu $\boldsymbol{x}_{k-1}$. Pro výpočet kovariancí nelze přímo využít funkce $f(\cdot)$ a $h(\cdot)$, ale je

potřeba spočíst matice parciálních derivací, tj. nám již známá matice Jacobiánu. V každém kroku je vypočten Jacobián s aktuálními predikovanými stavy a tyto matice se poté využijí v EKF rovnicích.

Samotný rekurzivní cyklus lze rozdělit na dva kroky, a to krok predikce a korekce. Mimo odhad skutečné hodnoty stavu KF také odhaduje kovarianci samotného odhadu reprezentující chybu maticí $\mathbf{P}$. [42]

Predikce Pro predikční krok jsou vztahy následující

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = f\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}\right), \tag{5.25}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_{k-1}. \tag{5.26}$$

Jak jsme již zmínili, řídicí vstup $\boldsymbol{u}_k$ můžeme vynechat a vztah zlinerizujeme pomocí Jacobinánu do tvaru $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}$. Matice $\mathbf{F}$ je tzv. matice přechodu stavu, formulovaná jako Jacobián linearizující model procesu $\mathbf{F}_k = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)\Big|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, \boldsymbol{u}_k}$.

Korekce Pro korekční krok jsou vztahy následující

$$\hat{\boldsymbol{z}}_k = \boldsymbol{z}_k - h\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right), \tag{5.27}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k, \tag{5.28}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_k^{-1}, \tag{5.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \hat{\boldsymbol{z}}_k, \tag{5.30}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \left(\mathbb{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k\right) \mathbf{P}_{k|k-1}. \tag{5.31}$$

Podobně jako v predikčním kroku, ve vztahu (5.28) označovaném jako *inovační kovariance* (innovation nebo residual covariance), se vyskytuje matice pozorování $\mathbf{H}_k$, formulovaná jako Jacobián, linearizující model měření $\mathbf{H}_k = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)\Big|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}}$.

Ve vztahu pro kovarianci stavu $\mathbf{P}_{k|k-1}$ (5.26) se přičítá kovarianční matice $\mathbf{Q}$ reprezentující nepřesnost modelu z predikčního kroku (také procesní šum). Důležitou poznámkou je, že při každém kroku dojde přičtením $\mathbf{Q}$ k navýšení nejistoty v predikovaném stavu. Navíc již neuvažujeme normálně distribuovaná data.

Podíváme-li se na korekční krok, pro korekci je využito naměřených dat $\boldsymbol{z}_k$ při získání tzv. vektoru residuálů (také inovací) $\hat{\boldsymbol{z}}$ (5.27). Vektor residuálů je *a posterori* informací pro výpočet ve vztahu (5.29) tzv. *Kalmanova zisku* (Kalman gain) $\mathbf{K}_k$, který ovlivňuje dynamické zesílení korekce odhadu v (5.30). Kalmanův zisk je matice rozhodující, jaké množství inovace bude použito při odhadu nového stavu [34].

Kovarianční matice $\mathbf{S}$ může být více či méně ovlivněna maticí $\mathbf{R}$ vyjadřující míru nepřesnosti měření. Jsou-li prvky matice $\mathbf{R}$ velmi nízké či nulové, znamená to, že považujeme měření za velmi přesná. Důsledkem limitního případu je

$$\lim_{\mathbf{R}\to 0} \mathbf{K} = \lim_{\mathbf{R}\to \mathbf{0}} \left(\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}\right) = \mathbf{H}^{-1}.$$

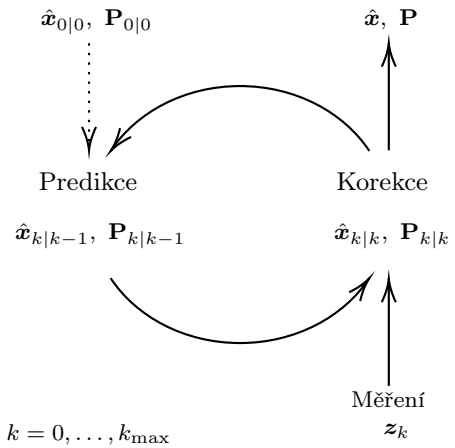
Proto se při výpočtu odhadu nového stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ více přihlíží na hodnoty měření. Naopak pro případ, kdy kovarianční matice $\mathbf{R}$ je deklarována s vysokými hodnotami, dojde k poklesu výsledné hodnoty $\mathbf{K}$ a pro výpočet nového stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ je více přihlíženo na *a priori* odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ v rovnici (5.30). Posledním krokem je pak výpočet kovarianční matice nového odhadu $\mathbf{P}_{k|k}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice dimenze n.

Pro aktualizaci kovarianční matice v kroku korekce se často využívá Josephova forma[22]. Josephova matice je část derivace korekčního výrazu podle odhadu stavu. Použitím Josephovy formy se dosahuje numerická stabilita, zejména v případech, kdy je maticový odhad chyby malý nebo blízký singulárnímu stavu. Proto je z těchto hledisek bezpečnější vypočítávat $\mathbf{P}$ následujícím tvarem

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbb{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\,\mathbf{P}_{k|k-1}\,(\mathbb{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}_k\mathbf{R}\mathbf{K}_k^{\mathrm{T}}. \tag{5.32}$$

Celkově vzato, Josephova forma se uplatňuje v EKF, aby se minimalizovaly potenciální numerické nestability a zajistila robustní aktualizace kovarianční matice stavu v přítomnosti nelinearit a odhadovaných parametrů. Vztah (5.31) je zjednodušené vyjádření *a posteriori* kovariance stavu pro optimální hodnotu Kalmanova zesílení $\mathbf{K}_k$. [43, 44]

S novou iterací algoritmu se rovnice (5.23) až (5.31) opakují z času k do $k{+}1$ s novými počátečními hodnotami získanými (5.30) a (5.31). Cyklus je znázorněn na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Symbolické znázornění cyklu predikce a korekce Kalmanova filtru

Inicializace algoritmu je provedena dle následujících vztahů

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{x}_0\right], \tag{5.33}$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\right]. \tag{5.34}$$

Inicializací stavu dle (5.33) nastavíme očekávanou hodnotu stavu. Pro určení chyby odhadu (predikce) definujeme tzv. kovarianční matici chyb (confidence matrix) $\mathbf{P}$ dle vztahu (5.34). Přesnost inicializace vzhledem k reálnému stavu nám ovlivní rychlost konvergence k odhadovanému stavu.

EKF pro AoA lokalizaci

Náš problém se věnuje lokalizaci polohy tagu v rovině (2D) z čehož vyplývá, že se snažíme odhadnout souřadnice tagu (uživatele, user) x_{u} a y_{u}. Budeme uvažovat konstelaci o čtyřech kotvách a v jednom momentu získáváme čtveřici měřených úhlů reprezentující azimut, tzn. jeden dataset. Nelinearita problému je daná funkcí měření dle rovnice (2.6). Vstupní stavový popis bude:

- stavový vektor $\boldsymbol{x} = \left(x_{\mathrm{u}}, y_{\mathrm{u}}\right)$,
- vektor měření $\boldsymbol{y} = \left(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right)$.

[22] Josephova forma je známá rekurzivní operace kovarianční matice.

Aplikace rozšířeného Kalmanova filtru (EKF)

Stavový vektor reprezentující nejlepší odhad polohy tagu označíme $\boldsymbol{x} = (x_\mathrm{u}, y_\mathrm{u})$, složky vektoru jsou x-ová a y-ová souřadnice tagu (uživatele).

Budeme-li uvažovat EKF jako implementovanou funkci, pak by jejím vstupem byly souřadnice kotev $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A},i} = (x_{\mathrm{A},i}, y_{\mathrm{A},i})$ je poloha i-té kotvy, sady naměřených úhlů $\boldsymbol{z}_k = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ a počáteční odhad polohy tagu $\boldsymbol{x}_{0|0}$.

Popišme si nyní stavovou rovnici (5.23). Stavový model $f(\cdot)$ je v našem případě $f(\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1})$, tj. vezmeme zkorigovanou hodnotu z předchozího kroku. Pro Jacobián funkce f platí $\mathbf{F} = \mathbb{I}$, tj. jednotková matice (identita) o rozměrech 2×2.

Rovnice měření (5.24) je reprezentována nelineární funkcí $h(\cdot)$ dle (2.6). Jacobián $\mathbf{H}_k$ je pak ekvivalentní vztahu u NR metody a má rozměr 4×2.

$$\mathbf{H}_k = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)\Big|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_\mathrm{u}} & \frac{\partial h_i}{\partial y_\mathrm{u}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_\mathrm{u}} & \frac{\partial h_2}{\partial y_\mathrm{u}} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_\mathrm{u}} & \frac{\partial h_3}{\partial y_\mathrm{u}} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x_\mathrm{u}} & \frac{\partial h_4}{\partial y_\mathrm{u}} \end{bmatrix}\Bigg|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},1}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},1}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},1}\right)^2} & \frac{x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},1}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},1}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},1}\right)^2} \\ -\frac{y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},2}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},2}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},2}\right)^2} & \frac{x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},2}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},2}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},2}\right)^2} \\ -\frac{y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},3}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},3}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},3}\right)^2} & \frac{x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},3}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},3}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},3}\right)^2} \\ -\frac{y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},4}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},4}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},4}\right)^2} & \frac{x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},4}}{\left(x_\mathrm{u}-x_{\mathrm{A},4}\right)^2+\left(y_\mathrm{u}-y_{\mathrm{A},4}\right)^2} \end{bmatrix}.$$

Dále je nutné inicializovat kovarianční matici procesu $\mathbf{Q}_k$ o rozměrech 2×2 a kovarianční matici měření $\mathbf{R}_k$ o rozměrech 4×4. Kovariance předpokládáme nulové a proto obě matice mají nenulové hodnoty pouze na diagonálách. V poslední řadě provedeme inicializaci kovarianční matice stavu $\mathbf{P}_{0|0}$.

Kovarianční matice procesu $\mathbf{R}$ nám představuje vývoj stavu systému v čase (reprezentuje dynamiku systému), tzn. my ji nadefinujeme dle rychlosti běžné chůze 5 km/h, tj. přibližně 1,5 m/s. Čím vyšší tato hodnota je, tím bude matice reprezentovat vyšší míru možné variability stavu. Pro naše měření máme časový rozdíl mezi datasety přibližně 100 ms. Abychom patřičně přizpůsobili vliv nejistoty procesu, bude matice $\mathbf{Q}_k$ násobena 0,1 s, tj. $\mathbf{Q_k} = 0,1 \cdot \mathbf{Q_k}$. Platí, že čím delší časový interval mezi měřeními, tím se nejistota procesu zvýší.

Predikce *A priorní* hodnota stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ bude nastavena v počáteční fázi hodnotou inicializační $\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0}$, v následujících iteracích se pak bude rovnat předchozímu *a posteriornímu* odhadu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ dle vztahu (5.25). Dále se vypočte nová hodnota kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k-1}$ dle (5.26).

Korekce *A posteriorní* hodnota stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ je spočtena dle vztahu (5.30). Vezmeme predikovanou hodnotu stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ a zkorigujeme ji o reziduál měřených hodnot $\hat{\boldsymbol{z}}_k$ dle (5.27) patřičně zesíleným či zeslabeným Kalmanovým ziskem $\mathbf{K}_k$ dle (5.29).

Na Kalmanův zisk $\mathbf{K}_k$ má také zásadní vliv kovarianční matice měření $\mathbf{Q}$ ze vztahu kovarianční matice inovací dle (5.28). Je vhodné $\mathbf{Q}_k$ definovat nenulovými hodnotami, tím zesílíme regulárnost matice $\mathbf{S}_k$, což je vhodné při provádění její inverze.

Jako poslední v kroku k je proveden *a posteriorní* výpočet kovarianční matice stavu $\mathbf{P}_k$ dle (5.31).

V průběhu nových iterací se do filtru zaznamenávají nová měření, což nám umožňuje sledovat vývoj polohy v čase. Lze předpokládat, že v prvních několika krocích se bude hodnota odhadovaného stavu výrazně měnit, než se ustálí kolem statického bodu nebo začne pozorovat časový vývoj dynamického pohybu.

6 Limity přesnosti lokalizačního systému XPLR-AOA-2

Tato kapitola navazuje na práci [7], ve které bylo experimentálně zjištěno chování BLE modulů XPLR-AOA-2 od společnosti u-blox v závislosti na podmínkách prostředí v 1D. Byly prováděny experimenty, které zjistily přesnosti systému o jednom tagu a jedné kotvě. V sekci 6.1 budou sepsány nejdůležitější závěry zjištěné předchozími experimenty.

Nově provedená měření v bezodrazové komoře na katedře elektromagnetického pole byla opakována s větší přesností a rozsahem úhlů. Podrobnosti těchto výsledků budou prezentovány v sekci 6.2.

V rámci této práce, podobně jako v předchozí [7], byly navrženy a aplikovány korekční vztahy s cílem zlepšit přesnost lokalizace ve 2D. Detaily těchto korekčních postupů a výsledky jejich implementace jsou prezentovány v sekci 6.2.

Veškeré statistické zpracování dat a tvorba nástrojů pro univerzální využití byly vytvořeny pro nástroj MATLAB a jsou uvedeny v přílohách.

6.1 Souhrn závěrů z předchozího výzkumu

V práci [7] bylo provedeno několik měření úhlů pomocí metody AoA. Byl měřen azimut i elevace pouze jednou rovinou kotvy (nově jsme provedli měření v obou rovinách kotvy) a z měřených sad spočteny střední hodnoty, rozptyly, hustoty pravděpodobnosti PDF (Probability Density Function) a distribuční funkce CDF (Cumulative Distribution Function).

V následujících tabulkách bude stručně sepsán závěr měření s kitem XPLR-AOA-2. Tabulka 6.1 popisuje provedená měření a k číselná označení. Tabulka 6.2 obsahuje soupis vstupních parametrů měření, kde R značí vzdálenost mezi kotvou a tagem v metrech, P nastavený vysílací výkon tagu v dBm a Θ, resp. Φ nastavené úhly ve stupních. V tabulce 6.3 jsou sepsány výsledky, které byly v [7] zjištěny, θ a ϕ značí naměřené úhly azimutu, resp. elevace.

Tabulka 6.1: Typy měření

ID	Typ měření	Poznámka
1.	Měření úhlu v bezodrazové komoře	Měřeno v bezodrazové komoře
2.	Vliv vzdálenosti na změřené hodnoty	Měřeno ve venkovním prostředí
3.	Vliv odrazů na změřené hodnoty úhlu	Měřeno v laboratoři a bezodrazové komoře
4.	Závislost přijatého výkonu na úhlu natočení	Měřeno v bezodrazové komoře
5.	Rozdíl mezi skutečnými a naměřenými úhly	Měřeno v bezodrazové komoře

Tabulka 6.2: Podmínky měření

Typ měření	R (m)	P (dBm)	Θ | Φ (°)	Měřeno
1.	3	0	0 | 0	Azimut i elevace
2.	7 30	8	0 | 0 (přibližně)	Azimut
3.	3	0	-10 | 0	Azimut
4.	3	0	-60 až +60 po krocích 10° | 0	Přijatý výkon kotvou
5.	3	0	-60 až +60 po krocích 10° | 0	Azimut

Tabulka 6.3: Výsledky měření

Typ měření	$\mathbb{E}[\theta]$ | $\mathbb{E}[\phi]$ (°)	σ_θ | σ_ϕ (°)	Hodnocení
1.	-0,29 | 1,22	0,63 | 0,87	Dle rozptylu, velmi přesná měření
2.	0,28 | - 1,19 | -	0,92 | - 1.59 | -	Kit je vhodnější pro kratší vzdálenosti
3.	-13,11 | - -10,04 | -	2.34 | - 1.07 | –	Laboratoř Bezodrazová komora
4.	Je-li měřeno pro menší hodnoty úhlu, je zapotřebí vyšší vysílací výkon, než kdyby se měřily úhly větší.		
5.	Hodnota pro nastavené a změřené hodnoty úhlu v závislosti na natočení antény je velmi odlišná.		

Z tabulky 6.3 lze vyčíst následující:

- Měření azimutu je přesnější než měření elevace.
- Měření na menší vzdálenost bylo přesnější. Měříme-li azimut na delší vzdálenosti, pak můžeme očekávat sníženou přesnost. To se odrazí hlavně na přesnosti lokalizace ve větších konstelacích, jak uvidíme v kapitole 7.
- Vývojový kit pracuje lépe v prostředí bez odrazů, podobně jako v [45, 46].
- Závislost přijatého výkonu záleží na směrové charakteristice antén použitých v kotvě. Zhodnocením výsledků lze obecně říci, že je-li měřeno pro menší hodnoty úhlů, je zapotřebí vyšší vysílací výkon, než kdyby se měřily úhly větší. Jak uvidíme v sekci 6.3, příjem závisí na kompatibilitě polarizací.
- Bylo zjištěno, že pro větší nastavené úhly je měřená hodnota velmi odlišná. Je-li potřeba dosáhnout přesnějších hodnot, je vhodnější kit používat k měření menších úhlů (zhruba do 45°). V [7] byl zjištěn vztah pomocí metody nejmenších čtverců a bylo provedeno proložení naměřených dat parabolou pro vhodnou korekci měření větších úhlů. Úhly menší není potřeba korigovat.

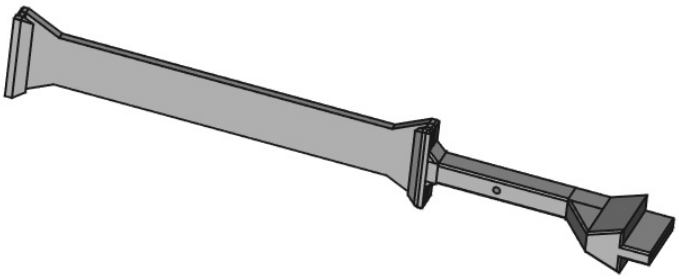
6.2 Výsledky z přesnějšího měření v bezodrazové komoře

Dle úvodní kapitoly, resp. v sekce 6.1, první měření u-blox kitu XPLR-AOA-2 bylo provedeno v roce 2022 v práci [7]. Měření v bezodrazové komoře (BK) bylo provedeno s krokem 10° v rovině azimutu. Krokování pro rovinu elevace nebylo prováděno. Tyto zjištěné výsledky nám tedy mohou pomoci pro určování polohy ve 2D prostoru avšak byly zjištěny některá možná vylepšení pro další výzkum.

Naším novým požadavkem bylo zpřesnění měření z kroku 10° na krok po 5° a navíc zjistit maximální měřitelné rozsahy úhlů. Druhým cílem bylo experimentálně změřit hodnoty pro určení přesnosti lokalizačního systému v obou rovinách – jak pro azimut, tak pro elevaci. Výsledky uvedené v této sekci nám pomohou ověřit limity systému XPLR-AOA-2 a zpřesnit za pomoci numericky spočtených korekčních vztahů lokalizaci tagu ve 2D rovině, potažmo i v 3D prostoru. Tato práce se zabývá zhodnocením a lokalizací v rovině 2D, proto dále zhodnocení výsledků pro elevaci nebude přesněji vyhodnocováno a bude prostorem pro další možný výzkum.

6.2.1 Metodika měření

Měření probíhalo v BK na katedře elektromagnetického pole ČVUT FEL v Praze. Princip spočíval v co nejpreciznějším nastavení kotvy proti tagu tak, aby hodnoty azimutu a elevace byly v počátku měření nulové. Tag byl umístěn staticky na stativu a kotva byla umístěna na rotátoru (ve vzdálenost přibližně 3 m), který se ovládal skrze program vně komory. Kotva byla otáčena s krokem 5° v rozsahu -90° až +90°. Nutno poznamenat, že tento rozsah dle výsledků 6.1 byl zvolen výrazně vyšší než by bylo vhodné v praxi využít. Cílem bylo zjištění chování měření příchozího signálu z extrémních úhlů. Původní měření bylo prováděno v rozsahu -60° až +60° [7]. Pro měření byl vytvořen držák, který umožní vystředit kotvu na rohovou anténu, která je pak v ose rotace kotvy, viz obrázek 6.1. Pro měření elevace byla kotva pouze pootočena o 90° a uchopena stejným způsobem do držáku.

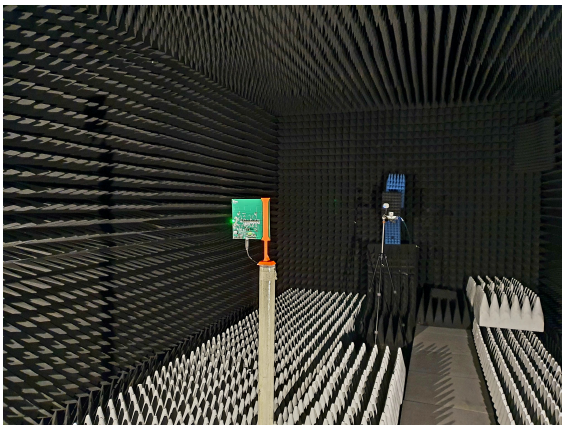


Obrázek 6.1: Model držáku pro kotvu pro měření v bezodrazové komoře

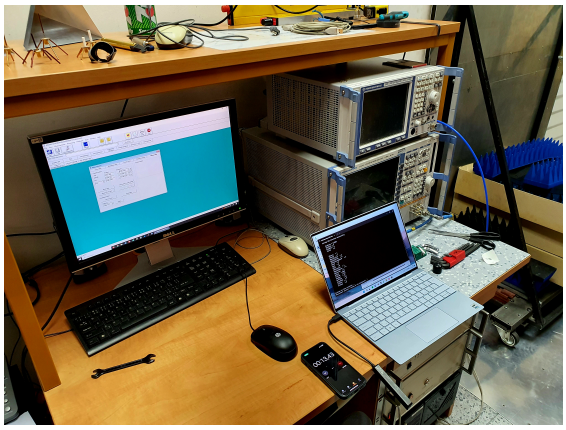
Jednotlivá měření probíhala přibližně 30 sekund a z každého měření bylo získáno přibližně 1200 hodnot naměřených úhlů. Tento počet je již dostatečný pro statistické zpracování.

Na obrázku 6.2a lze pozorovat samotné rozestavění kotvy a tagu v BK a na obrázku 6.2b lze pozorovat pracoviště se spuštěným programem pro rotaci kotvy (monitor) a vlastním nástrojem pro čtení dat ze sériového portu s přidáním časových značek (notebook), viz sekce 4.2.

Samotný držák na kotvu byl vytvořen v programu FreeCad a vytisknut v rámci katederní 3D tiskárny (Průša). Příslušné modely včetně technických výkresů jsou v přílohách.



(a) Měření v bezodrazové komoře



(b) Venkovní pracoviště

Obrázek 6.2: Měření v bezodrazové komoře pro získání přesných dat

6.2.2 Zpracování naměřených dat

Naměřená data byla zpracována na základě poznatků z kapitoly 4. Pro určení rozptylu, resp. směrodatné odchylky a jiných statistik, bylo využito charakteristiky střední hodnoty $\mathbb{E}[\alpha]$. Tedy v případě azimutu $\mathbb{E}[\Theta] = \theta$ a v případě elevace $\mathbb{E}[\Phi] = \phi$. Uvedené značení budeme využívat i v následujících kapitolách, tj. Θ, Φ značí nastavené reálné úhly, zatímco θ a ϕ představují úhly naměřené. V případě uváděných grafů, α pak bude značit obecný nastavený úhel (azimut nebo elevaci).

Důležitým poznatkem z průběhu vývoje nástrojů pro vyčítání a ukládání dat je, že po spuštění měření je formát prvních několika hodnot (řádků) pravděpodobně poškozen. Jedná se patrně o jakousi předem načtenou nebo nabufferovanou datovou sérii. Předzpracování dat proto zahrnuje odstranění těchto hodnot v prvních několika desítkách řádků.

6.2.3 Naměřené závislosti

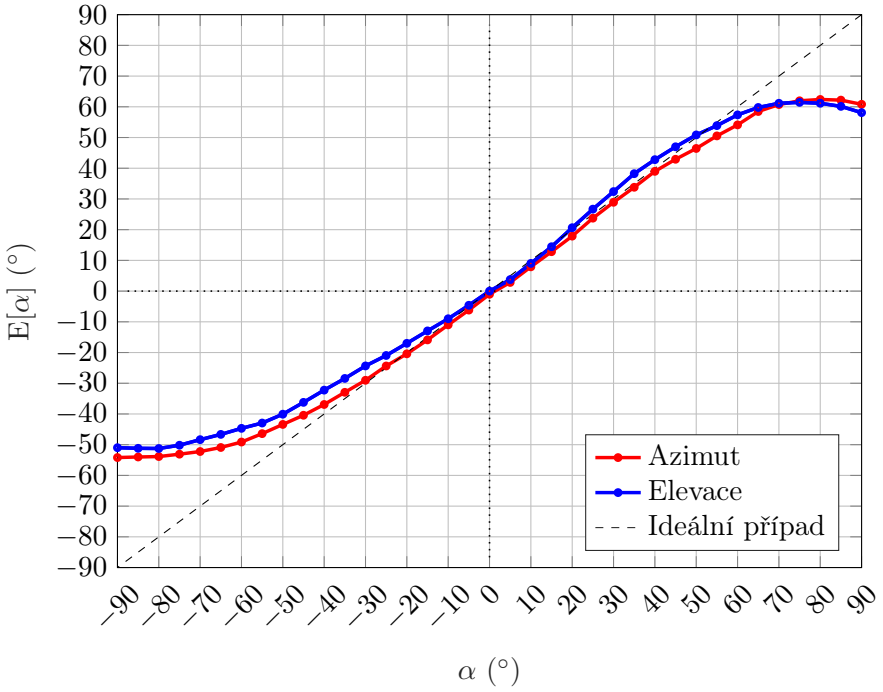
V práci [7] bylo využito pro určení korekčních vztahů primárně znázornění závislosti rozdílu měřeného a nastaveného úhlu na skutečné hodnotě úhlu $|\alpha - \mathbb{E}[\alpha]|$. Z grafického znázornění vychází přibližně parabolická závislost. Po zanalyzování různých možností bylo dosaženo závěru, že korigování spočteným vztahem není nejlepší cestou vzhledem k výsledkům uvedeným níže.

Na obrázku 6.3 lze pozorovat závislost naměřených hodnot úhlů azimutu a elevace, kde vodorovná osa je reálně nastavený úhel na rotátoru a y-ová osa je střední hodnota naměřených úhlů z jednotlivých kroků $\mathbb{E}[\alpha]$. Na obrázku 6.4 lze pozorovat zpřesněné výchozí křivky pro korekční vztahy v práci [7].

Přejdeme-li k analyzování uvedených grafů, můžeme jednoznačně říci, že měření nad $\pm 60°$ je již zatíženo silnou chybou. Tato chyba je nad 10°, což lze pozorovat z obrázku 6.4. Chybu bude pravděpodobně nejvíce ovlivňovat konstrukční uspořádání URA patch antén na kotvách. Je znatelné, že křivky nejsou zcela symetrické:

- pro kladné úhly je chyba pod 5° až do naměřených 55° pro azimut a do 65° pro elevaci,
- pro záporné úhly je chyba pod 5° pouze do -45° pro azimut a do přibližně -35° pro elevaci.

Z této nesymetrie lze usuzovat, že uspořádání antén kotvy C211 dle obrázku 3.4 není optimální z hlediska symetričnosti výsledků[23], tj. vždy bude jedna polorovina měřených úhlů zatížena vyšší chybou, nežli druhá. Již z práce [7] bylo usuzováno, že měření úhlů nad ±60° nedává smysl z důvodu *zatížení měření velkou chybou*. Provedené přesnější měření ověřilo skutečnost maximálního měřitelného rozsahu úhlů.



Obrázek 6.3: Závislost střední hodnoty naměřeného azimutu a elevace na skutečné hodnotě úhlů

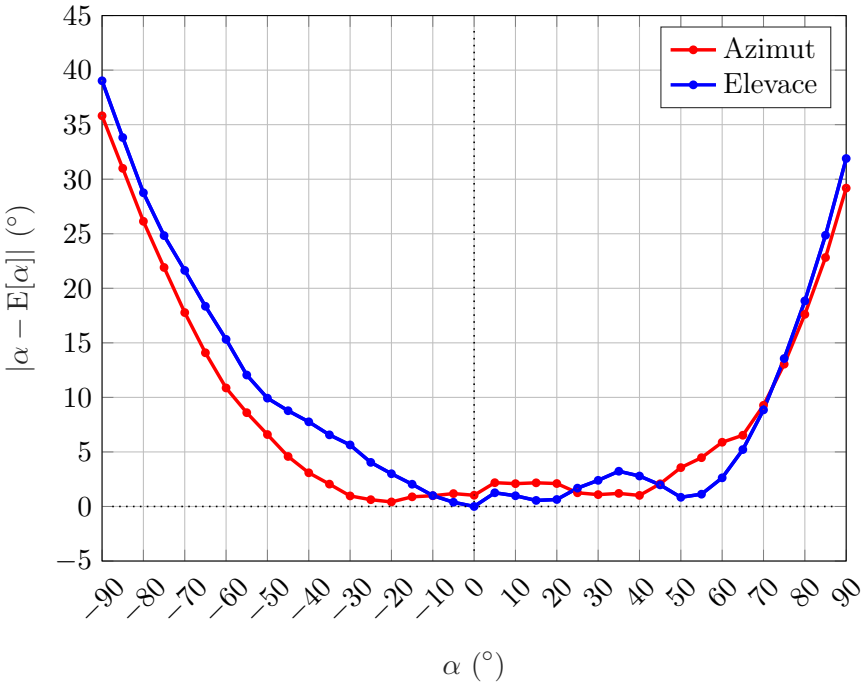
V rámci zpracování dat byly vytvořeny univerzální parametrizovatelné nástroje pro další statistické vyhodnocování. Tyto nástroje, včetně ukázkových spouštěcích souborů, jsou uvedeny v přílohách.

6.2.4 Korekční vztahy pro měření úhlu

Hlavním účelem této sekce je popsání metodiky pro numerickou aproximaci křivek uvedených v sekci 6.2.3 a získání vztahů pro korekce měřených úhlů. Aproximace je provedena na základě metody nejmenších čtverců.

Jak bylo uvedeno v předchozí části 6.2.3, nebudeme více využívat pro korekce grafické znázornění 6.4 i přesto, že by to bylo možné proložit např. dvěma parabolami pro kladné a záporné úhly. Toto znázornění je vhodné pro představu o měřené chybě systému. Proložení křivek 6.3 je možné lineárním polynomem $p(1)$ v určitém menším rozsahu úhlů, dvojité kvadratické $p(2)$ pro zápornou a kladnou polorovinu a kubické $p(3)$ pro celý rozsah úhlů.

[23] V roce 2022 byla společností u-blox vyvinuta nová generace kitu XPLR-AOA-3, která obsahuje kotvy ANT-B10 mající již uspořádání URA s osmi patch anténami. Kompletní kit umožňuje mnohem více možností a využívané algoritmy by měly být robustnější i z hlediska vícecestného šíření signálu. Podrobný popis lze nalézt v dokumentaci [47]. Výsledky v [6] mimo jiné ukázaly při větším počtu patch antén je přesnost měření úhlů vyšší a vliv odrazů by se měl snížit.



Obrázek 6.4: Závislost rozdílu měřených a nastavených úhlů azimutu a elevace na skutečné hodnotě úhlů.

Z numerického hlediska má smysl prokládat křivky maximálně polynomem druhého nebo třetího stupně, provedeme-li zaokrouhlení získaných koeficientů polynomu. Vyšší stupně pak pro vyhodnocení dávají absurdní výsledky z hlediska numerické náročnosti a zanesení chyb z daných vztahů. Proto budeme brát v úvahu pouze stupně nižší i přesto, že polynomy $p(5)$ prokládají danou křivku přesněji.

Pro proložení byly použity MATLAB funkce `polyfit()`, resp. `polyval()`. Pro naše úvahy budeme využívat aproximační křivky protínající počátek, zanedbáme proto posun (více viz další podsekce). Pro proložení s nulovým posuvem je využita MATLAB funkce `lsqcurvefit()`. Uvedené korekční vztahy byly pak zjištěny pomocí numerického nástroje Wolfram Alpha.

Lineární aproximace

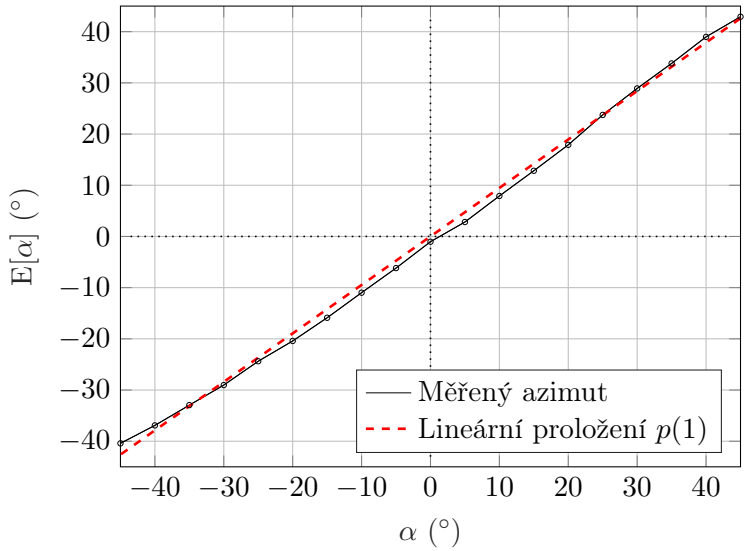
Jak bylo poznamenáno, proložení polynomem prvního stupně $p(1)$ dává rozumné výsledky pouze pro určitý omezený interval hodnot, je však variantou nejschůdnější pro implementaci.

Jak lze pozorovat v obrázku 6.5, byl určen rozsah hodnot -45° až +45°, v tomto rozsahu se chyba pohybuje pod 3°.

Prokládaný polynom je tvaru $y = w_1x_1 + w_2x_2$, kde poslední člen (intercept) $x_2 = 1$. Jak bylo již poznamenáno, po korekční křivce požadujeme průchod počátkem souřadného systému, proto $w_2 = 0$. Rovnice polynomu, po převedení proměnných na naši úlohu, má pak tvar $\theta = 0.9470\Theta$. Vyjádříme-li korekční vztah pro azimut, získáme výsledek

$$\Theta = \frac{1}{0.9470}\theta, \text{ pro } \theta \in [-45; 45]\,, \tag{6.1}$$

kde θ je měřený úhel a Θ je korigovaný výsledný úhel.



Obrázek 6.5: Lineární proložení naměřené křivky pro azimut

Kvadratická aproximace

Kvadratická aproximace naměřeného azimutu pomocí dvou polynomů $p(2)$ je znázorněna na obrázku 6.7. Znázornili jsme pouze křivku s vynuceným (v anglické literatuře často označováno constrained) protnutím počátku (bod [0,0]).

Předpis pro constained variantu polynomu $p(2)$ lze získat z následujícího odvození založeného na principu zanedbání absolutního členu. Klasický předpis pro polynom druhého stupně

$$y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3, \tag{6.2}$$

kde $x_3 = 1$ (intercept) a x se nazývá obecně regresor, tento zápis je ekvivalentní klasickému vztahu pro parabolu $y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou koeficienty (váhy) křivky. Předpis paraboly může být také v tzv. vrcholovém tvaru, což dle obrázku 6.6 lze rozvést následovně:

$$y = -k\,(x - l)^2 + m, \tag{6.3}$$

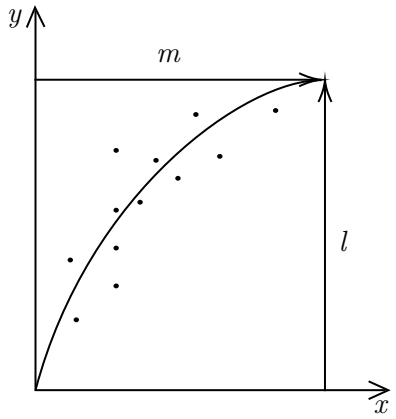
kde k je parametr ovlivňující směr a tvar paraboly, l je horizontální posunutí a m je vertikální posunutí. Vynulujeme-li členy $x = 0$ a $y = 0$, pak získáme

$$\begin{aligned} 0 &= -k\left(0 - l\right)^2\big) + m, \\ kl^2 &= m. \end{aligned}$$

Předešlý výsledek dosadíme do rovnice (6.3) za proměnnou m a získáme:

$$\begin{aligned} y &= -k\,(x - l)^2 + kl^2, \\ y &= -kx^2 + 2klx \overbrace{-kl^2 + kl^2}^{=0}, \\ y &= -kx^2 + 2klx. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dle výsledku 6.4 nám postačuje z předpisu pro parabolu uvažovat člen kvadratický a lineární, posun o konstantu zanedbáme. Druhá možná úvaha, jak pochopit zanedbání absolutního členu je dosazení



Obrázek 6.6: Znázornění odvození constained varianty paraboly

souřadnic [0,0] do kvadratického předpisu a získáme $0 = c$, z čehož je triviálně přiřazena nulová hodnota.

Dále uvedeme výsledné předpisy pro polynomy $p(2)$ a výsledné analyticky spočtené vztahy pro numerické korigování hodnot naměřených úhlů. Lze pozorovat, že vztahy se liší pouze v konstantách.

Klasická varianta Polynom $p(2)$ je pro záporné úhly $\theta = 0,0066\Theta^2 + 1,2138\Theta + 0,7787$ a pro kladné úhly je tvaru $\theta = -0,0065\Theta^2 + 1,3482\Theta - 4,4218$, z čehož plynou výsledné korekční vztahy (při zanedbání vždy druhého kvadratického řešení, nedávající smysluplné výsledky při dosazení některých z úhlů):

$$\Theta = \frac{1}{66}(\sqrt{660000\theta + 36318819} - 6069), \qquad \text{pro } \theta < 0, \tag{6.5}$$

$$\Theta = \frac{1}{65}(6741 - \sqrt{42566911 - 650000\theta}), \qquad \text{pro } \theta \geq 0. \tag{6.6}$$

V `MATLAB` notaci pomocí lambda funkcí:

```
kvadratic_az_pos = @(angle_measured) (1/65)*(6741-sqrt
   (42566911-650000*angle_measured))
kvadratic_az_neg = @(angle_measured) (1/66)*(sqrt(660000*
   angle_measured+36318819)-6069)
```

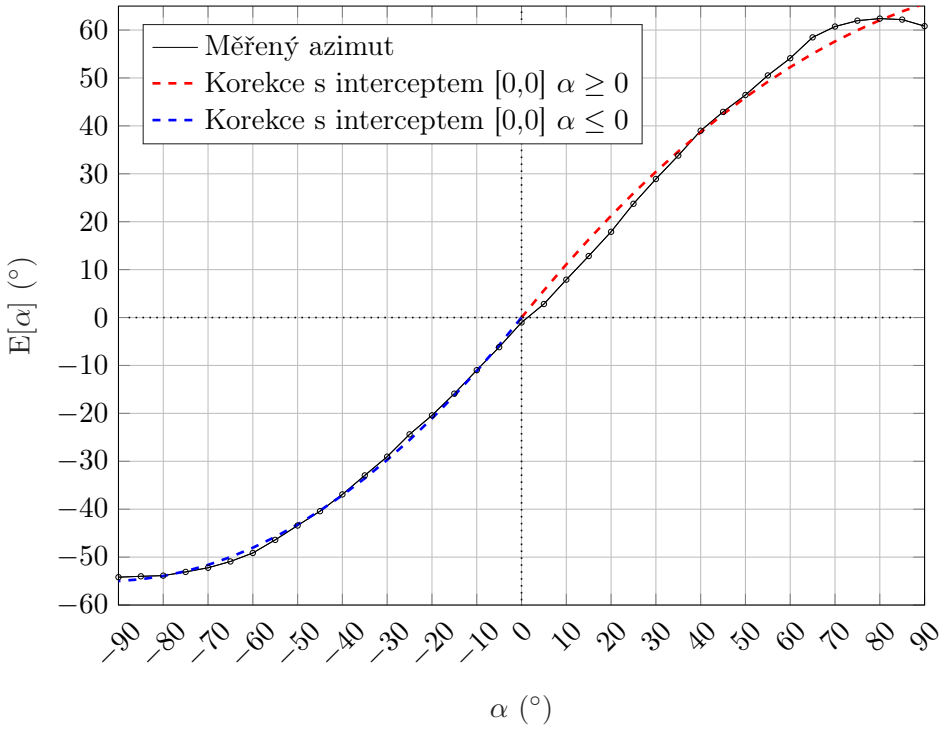
Constrained varianta Výsledné korekční vztahy jsou:

$$\Theta = \frac{1}{21}(\sqrt{70000\theta + 3869089} - 1967), \qquad \text{pro } \theta < 0, \tag{6.7}$$

$$\Theta = \frac{1}{24}(2893 - \sqrt{8369449 - 120000\theta}), \qquad \text{pro } \theta \geq 0. \tag{6.8}$$

Přepsáním do `MATLAB` notace získáme lambda funkce:

```
kvadratic_az_constrained_pos = @(angle_measured) 1/24*(2893
   - sqrt(8369449 - 120000*angle_measured))
kvadratic_az_constrained_neg = @(angle_measured) 1/21*(sqrt
   (70000*angle_measured + 3869089) - 1967)
```



Obrázek 6.7: Kvadratické proložení naměřené křivky a bodem [0,0]

Kubická aproximace

Podobně jako v sekci 6.2.4 lze proložit naměřenou závislost polynomem třetího stupně $p(3)$, viz obrázek 6.8. Vypočtené koeficienty mají velmi mnoho desetinných hodnot, které vytvoří velmi komplikovaný zápis řešení (z hlediska implementace, z hlediska numerických výpočtů a zanesení chyb). Proto jsme se rozhodli o malé znepřesnění proložení tím, že koeficienty zaokrouhlujeme. Tímto však získáme již rozumně spočitatelné řešení. Pro azimut vycházejí dvě ze tří řešení s nenulovou imaginární částí, tyto vtahy jsou i tak poměrně komplikované (pro elevaci vychází velmi podobné vztahy).

Proložený polynom pro azimut $p(3)$ má pro ukázku vztah

$$\theta = -0,00004580348\Theta^3 + 0,00078092976\Theta^2 + 1,01884\Theta - 0,81960749, \tag{6.9}$$

po zaokrouhlení koeficientů získáme

$$\theta = -0,000046\Theta^3 + 0,0008x^2 + x - 0,8. \tag{6.10}$$

Výsledný vztah pro korekci má následující tvar

$$\begin{aligned}\Theta = \frac{5}{69} \cdot \Bigg(& \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot (1 + i\sqrt{3}) \\ & \cdot \sqrt[3]{69 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{357075 \cdot \theta^2 - 3581480 \cdot \theta - 1157093712} - 71415 \cdot \theta + 358148} \Bigg) \\ & + \frac{5}{69} \cdot \left(\frac{34660i \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot (\sqrt{3} + i)}{\sqrt[3]{69 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{357075 \cdot \theta^2 - 3581480 \cdot \theta - 1157093712} - 71415 \cdot \theta + 358148}} + 80 \right).\end{aligned} \tag{6.11}$$

V MATLAB formátu je lambda funkce pro korekci v následujícím tvaru:

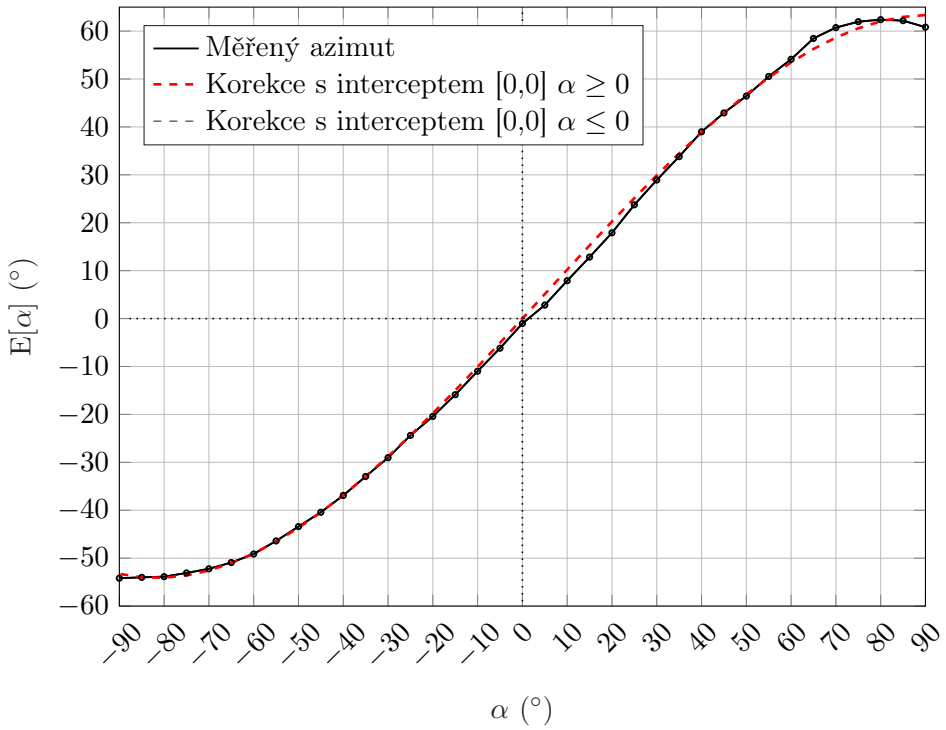
```
fun_kubic_az = @(angle_measured)  5/69*(-2^(1/3)*5^(2/3)*(1+1i*sqrt
    (3))*(69*sqrt(3)*sqrt(357075*angle_measured.^2-3581480*
    angle_measured-1157093712)-71415*angle_measured+358148).^(1/3)
    +(34660*1i*2^(2/3)*5^(1/3)*(sqrt(3)+1i))./(69*sqrt(3)*sqrt
    (357075*angle_measured.^2-3581480*angle_measured-1157093712)
    -71415*angle_measured+358148).^(1/3)+80)
```

Pro případ omezené funkce na protnutí počátku [0,0] je vztah ve tvaru

$$\Theta = \frac{25}{69} \cdot \left(\sqrt[3]{-6} \cdot (1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{23 \cdot \sqrt{42849 \cdot \theta^2 - 373248 \cdot \theta - 138270000} - 4761 \cdot \theta + 20736)} \right) + \frac{25}{69} \left(\frac{2306i \cdot \sqrt[3]{6^2} \cdot (\sqrt{3} + i)}{\sqrt[3]{23 \cdot \sqrt{42849 \cdot \theta^2 - 373248 \cdot \theta - 138270000} - 4761 \cdot \theta + 20736}} + 12 \right) \tag{6.12}$$

Opět v MATLAB notaci:

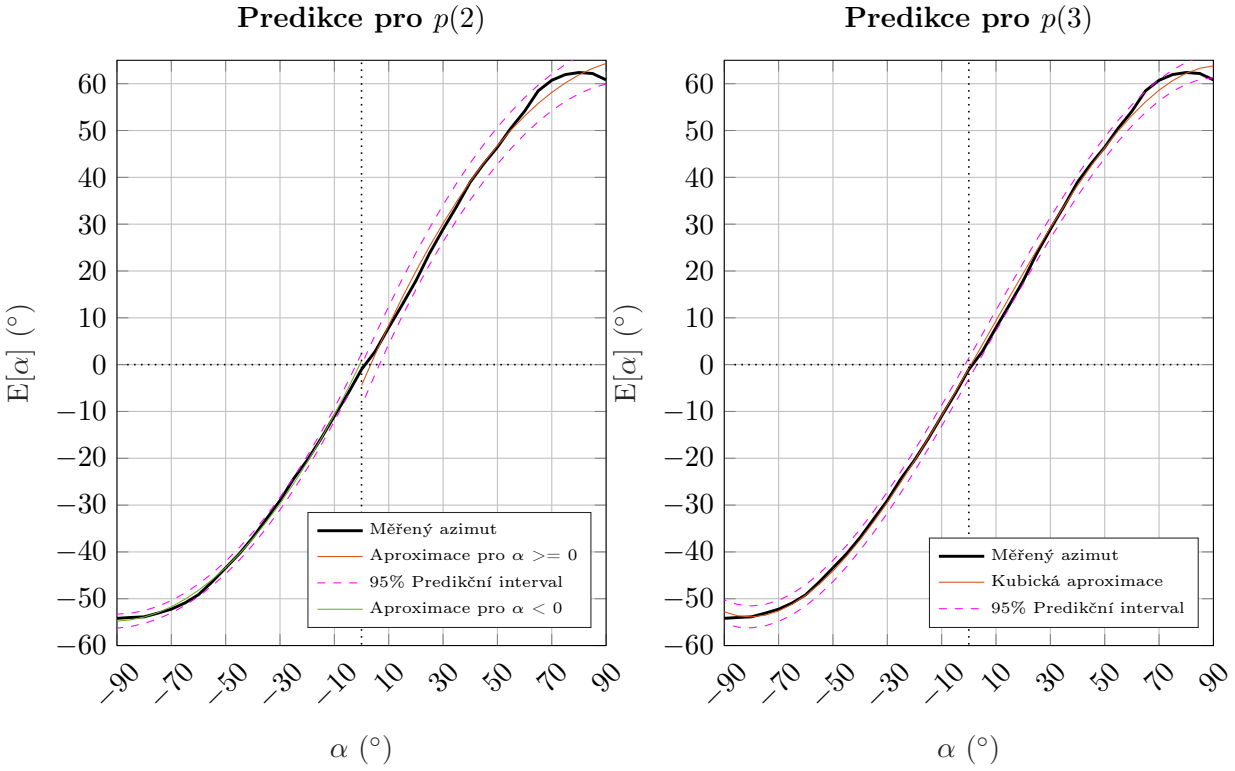
```
fun_kubic_az_constrained = @(angle_measured) 25/69*(-6^(1/3)*(1+1i*
    sqrt(3))*(23*sqrt(42849*angle_measured.^2-373248*angle_measured
    -138270000)-4761*angle_measured+20736).^(1/3)+(2306*1i*6^(2/3)*(
    sqrt(3)+1i))./(23*sqrt(42849*angle_measured.^2-373248*
    angle_measured-138270000)-4761*angle_measured+20736).^(1/3)+12)
```



Obrázek 6.8: Kubické proložení naměřené křivky a bodem [0,0]

6.2.5 Predikce chyb

Již uvedené MATLAB funkce nám umožňují při proložení (regresi) odhadnout chybu. Kvadratické modely byly přizpůsobeny sadě dat (naměřených hodnot), lze vykreslit 95% predikčních intervaly, kde se měřené body nachází. Toto lze pozorovat na obrázku 6.9.



Obrázek 6.9: Zobrazení 95% predikce chyb na základě měřené sady dat

6.2.6 Intervaly využití korekcí

Uvedené vztahy nám dávají omezené použití z hlediska intervalů, kde jsou korigované hodnoty úhlů reálné. Toto omezení je z důvodu množství odmocnin, kdy se výsledky z daných vztahů transformují do komplexní roviny. Uvedeme si tabulku minimálních a maximálních korigovatelných úhlů v 6.4.

Tabulka 6.4: Intervaly použitelnosti korekčních vztahů

Typ korekce	**Azimut (°)**	
	Min	**Max**
$p(1)$	-45	45
$p(2) + p(2)$	-55,0	65,4
$p(2) + p(2)$, constrained	-55,2	69,7
$p(3)$, rounded	-52,1	62,1
$p(3)$, rounded, constrained	-52,6	61,3

6.2.7 Srovnání koeficientu determinace

Pro rozumnou kvantifikaci kvality proložení křivek na naměřená data lze využít tzv. koeficient determinace (také regresní koeficient) R^2. Koeficient determinace lze spočíst podle následujícího vztahu [48]

$$R^2 = 100 \cdot \left(1 - \frac{\text{unexplained variance}}{\text{total variance}}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - m_i)^2}{n-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})}{n-1}}\right), \tag{6.13}$$

kde d_i přestavují naměřená data (v našem případě střední hodnota ze sady měření), m_i jsou proložená data (model), $\bar{d}$ je střední hodnota ze všech naměřených dat a n je počet dat. *Unexplained variance* značí hodnoty s nejlepším proložením (variance, kterou nedokážeme vysvětlit) a *total variance* maximální odchylku od střední hodnoty.

Z hodnot v tabulce 6.5 lze pozorovat, že regresní modely pokrývají téměř vždy 99% variabilitu dat a nejlepší aproximace je polynomem pátého stupně. Také lze pozorovat, že pro naše účely by teoreticky nemělo záležet na volbě křivek – všechny splňují vysokou hodnotu R^2.

Tabulka 6.5: Koeficienty determinace pro jednotlivé křivky

Typ korekce	R^2_θ
$p(1)$	99.7794
$p(2) + p(2)$, $>= 0$	99,3611
$p(2) + p(2)$, <0	99,8592
$p(2) + p(2)$, constrained, $>=0$	98,7815
$p(2) + p(2)$, constrained, <0	99,8589
$p(3)$, rounded	99,878
$p(3)$, rounded, constrained	99,9246
$p(5)$	99,9899

6.2.8 Příklad korekce

V tabulce 6.6 a další stránce lze pozorovat korigované úhly po krocích 5°. Intervaly použitelnosti korekčních vztahů budeme uvažovat ty, které se ještě netransformují do komplexní roviny. První sloupec značí příklad úhlů měřených a ostatní sloupce pak značí, jak se úhly zkorigují. Červeně značené hodnoty jsou již mimo využitelný interval dle tabulky 6.4.

Tabulka 6.6: Příklad korigovaných úhlů

Úhel (°)	Lineární	Kvadratické		Kvadratické, constrainded		Kubické, rounded		Kubické, rounded, constrained	
	Real (°)	Real (°)	Imag (°)	Real (°)	Imag (°)	Real (°)	Imag (°)	Real (°)	Imag (°)
90,0	-	103,7	-61,4	120,5	-65,0	95,4	47,6	94,0	48,3
85,0	-	103,7	-54,8	120,5	-56,4	94,7	43,3	93,3	44,1
80,0	-	103,7	-47,3	120,5	-46,2	94,0	38,4	92,5	39,3
75,0	-	103,7	-38,3	120,5	-33,1	93,2	32,7	91,8	33,7
70,0	-	103,7	-26,3	120,5	-7,3	92,4	25,6	91,0	27,0
65,0	-	95,0	0,0	89,1	0,0	91,6	15,5	90,2	17,6
60,0	-	74,7	0,0	75,5	0,0	77,2	0,0	78,7	0,0
55,0	-	63,5	0,0	65,1	0,0	65,1	0,0	65,2	0,0
50,0	-	54,9	0,0	56,4	0,0	56,6	0,0	56,3	0,0
45,0	47,5	47,6	0,0	48,7	0,0	49,4	0,0	49,0	0,0
40,0	42,2	28,0	0,0	29,3	0,0	43,0	0,0	42,4	0,0
35,0	37,0	24,8	0,0	26,0	0,0	37,0	0,0	36,4	0,0
30,0	31,7	21,5	0,0	22,7	0,0	31,4	0,0	30,8	0,0
25,0	26,4	18,2	0,0	19,2	0,0	26,1	0,0	25,4	0,0
20,0	21,1	14,7	0,0	15,6	0,0	20,9	0,0	20,1	0,0
15,0	15,8	11,1	0,0	11,9	0,0	15,8	0,0	15,0	0,0
10,0	10,6	7,3	0,0	8,1	0,0	10,8	0,0	10,0	0,0
5,0	5,3	3,4	0,0	4,1	0,0	5,8	0,0	5,0	0,0
0,0	0,0	-0,6	0,0	0,0	0,0	0,8	0,0	0,0	0,0
-5,0	-5,3	-4,9	0,0	-4,3	0,0	-4,2	0,0	-5,0	0,0
-10,0	-10,6	-9,4	0,0	-8,9	0,0	-9,3	0,0	-10,1	0,0
-15,0	-15,8	-14,1	0,0	-13,7	0,0	-14,5	0,0	-15,3	0,0
-20,0	-21,1	-19,1	0,0	-18,8	0,0	-19,9	0,0	-20,7	0,0
-25,0	-26,4	-24,5	0,0	-24,3	0,0	-25,5	0,0	-26,2	0,0
-30,0	-31,7	-30,4	0,0	-30,3	0,0	-31,4	0,0	-32,1	0,0
-35,0	-37,0	-36,9	0,0	-36,9	0,0	-37,8	0,0	-38,5	0,0
-40,0	-42,2	-44,2	0,0	-44,4	0,0	-45,0	0,0	-45,6	0,0
-45,0	-47,5	-53,0	0,0	-53,3	0,0	-53,6	0,0	-54,0	0,0
-50,0	-	-64,4	0,0	-64,7	0,0	-65,7	0,0	-65,5	0,0
-55,0	-	-89,9	0,0	-87,1	0,0	-80,0	-15,6	-81,3	-14,2
-60,0	-	-92,0	27,4	-93,7	27,4	-80,8	-25,7	-82,1	-24,9
-65,0	-	-92,0	38,9	-93,7	39,3	-81,6	-32,7	-82,9	-32,1
-70,0	-	-92,0	47,6	-93,7	48,3	-82,4	-38,4	-83,7	-37,9
-75,0	-	-92,0	55,0	-93,7	56,0	-83,1	-43,3	-84,4	-42,9
-80,0	-	-92,0	61,5	-93,7	62,6	-83,9	-47,7	-85,2	-47,3
-85,0	-	-92,0	67,4	-93,7	68,7	-84,6	-51,6	-85,9	-51,2
-90,0	-	-92,0	72,8	-93,7	74,2	-85,3	-55,2	-86,6	-54,9

6.3 Měřený výkon

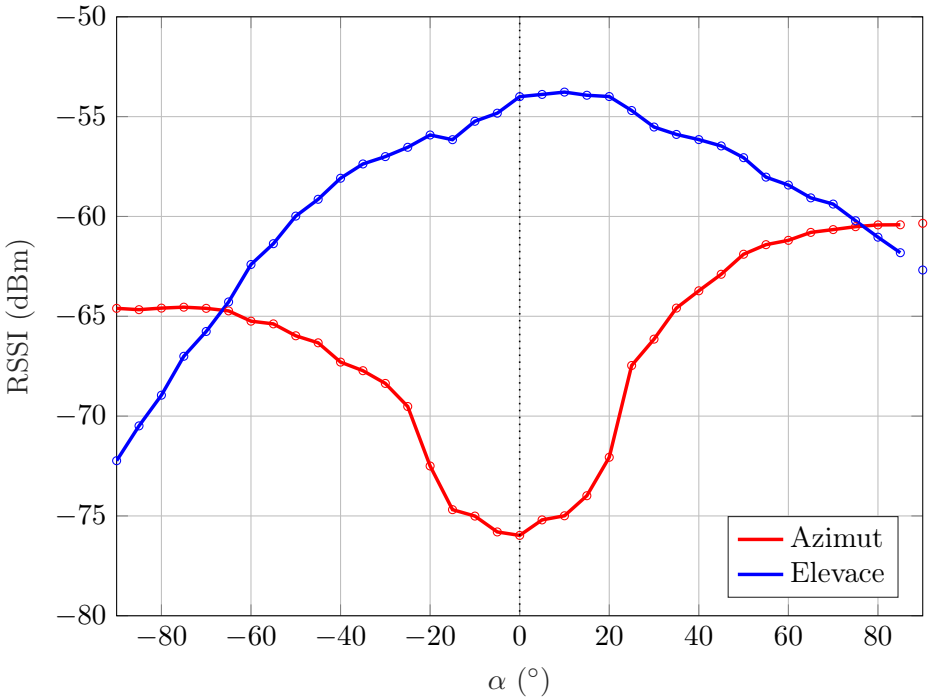
Zprávy z vývojového kitu mají informaci o hodnotě RSSI v dBm. Z naměřených dat byla výsledná hodnota pro daný úhel spočtena následovně

$$\mathrm{RSSI} = \mathbb{E}[P(\alpha)], \tag{6.14}$$

kde α je nastavený úhel na rotátoru a P je přijatý výkon v dBm.

Na obrázku 6.10 lze pozorovat měřenou závislost střední hodnoty přijatého výkonu na azimutu a elevaci v intervalu $-90°$ až $90°$. Lze očekávat, že pro malé natočení kotvy je přijímaný výkon nejvyšší a poté se se snižuje. Pro rovinu elevace taková křivka byla měřena. Také lze pozorovat, že maximum je mírně posunuté ke kladným úhlům, to by značilo, že anténní střed je na rohové patch anténě. Propad měřené křivky při malých úhlech azimutu značí nekompatibilitu polarizace antén tagu s polarizací antén na kotvě. Vysílací anténa je evidentně lineárně polarizovaná, viz sekce 3.2. Nekompatibilita polarizací může vést k degradaci výkonu, včetně údolí při určitých úhlech natočení antény [12].

V práci [7] byla naměřena podobná závislost pro azimut s rozdílem, že minimum přijatého výkonu bylo na 20°.



Obrázek 6.10: Naměřené závislosti RSSI pro azimut a elevaci

6.4 Diskuze výsledků korekce

Nejdůležitější statistika v porovnávání daných křivek je koeficient determinace. Dle kapitoly 6.2.7 je jasné, že příliš nezáleží na výběru korekcí z hlediska kvality proložení. Avšak z hlediska implementace a zanesení numerických chyb jsou vztahy pro kvadratické proložení mnohem jednodušší.

Z kapitoly 6.2.6 lze pozorovat, že intervaly použitelnosti jsou větší pro kvadratické proložení nežli pro kubické. Avšak v obou případech jsou limity v záporných úhlech na nižších hodnotách úhlů než pro úhly kladné. To může vycházet z geometrického uspořádání patch antén na kotvách (částečné URA).

Pro proložení naměřené křivky by teoreticky bylo také možné využít část funkce $\sin(\alpha)$, popř. některou z sigmoid funkcí (čtenář může více nalézt např. v textu [49]).

Lze předpokládat, že při aplikaci korekčních vztahů není 100% zajištěno, že vždy výslednou lokalizaci vylepší, tj. ne vždy vylepší odchylku od reálné polohy.

7 Výsledky lokalizace a přesnost systému XPLR-AOA-2

Druhou dílčí částí této práce je ověření přesnosti lokalizace vývojového kitu XPLR-AOA-2 na bázi BLE DF. Dle práce [7] máme vyhodnocené určování přesnosti pro 1D s jednou kotvou a jedním tagem. Nyní byl náš výzkum posunut dále a umíme již zpracovávat data od více kotev najednou. Prozatím však budeme uvažovat pouze jeden uživatelský tag[24] a odhad polohy v rovině (2D).

V sekci 7.1 se nejdříve podíváme na používané způsoby pro zaměření jednotlivých konstelací a na popis jednotlivých měření. Dále v sekci 7.2 bude popsán způsob vyhodnocení naměřených dat z nástroje `serialSynch`, pro který byl vyvinut algoritmus, který naměřená data zpracuje, vyfiltruje a získá informace o úhlech a časech. V sekci 7.3 pak zhodnotíme vlastnosti naměřených úhlů. Máme-li již předzpracovaná naměřená data, můžeme je využít pro odhad polohy. V sekci 7.4 porovnáme výsledky odhadů získaných pomocí estimátorů z kapitoly 2. Na závěr pak výsledky shrneme a prodiskutujeme možná vylepšení pro zpřesnění lokalizace.

7.1 Metodika lokalizace

Pro lokalizaci a zjištění přesnosti systému je nutné přesné zaměření konstelace. Pro účely této práce se zaměříme na hlavní dvě měřené konstelace. Budeme opět využívat kartézský souřadný systém x a y.

Chceme-li se věnovat problému lokalizace, je nutné provést přesné zaměření konstelace. V následujících sekcích 7.1.1 a 7.1.2 poskytneme podrobný popis konstelací a příslušných měření. Nejnáročnějším aspektem je správné nastavení natočení kotvy. Toto nastavení bylo provedeno tak, aby se na sebe protější kotvy „dívaly“[25].

Máme-li pak zaměřené konstelace, je nutné zavést souřadný systém pro lokalizační algoritmy. Pro další zpracování byl zaveden systém, dle obrázku 3.5. V další sekci 7.4 se pak podíváme na výsledky odhadů polohy tagu dle daného scénáře.

Výstupy z vývojového kitu u-blox XPLR-AOA-2 poskytují úhly v jednotkách stupňů. Z tohoto důvodu jsou veškeré uživatelské vstupy ve vyvinutých nástrojích vyjádřeny ve stupních a nástroje je převádí do radiánů.

[24] Vývojový kit má ve svém příslušenství čtyři tagy, které lze zpracovávat najednou. Proto je v dané zprávě, získané z kotev, označení ID tagu.

[25] Při pozdějším zpracování dat byly vymyšleny dvě metody pro dosažení co nejpřesnějšího nastavení roviny natočení kotvy pro další měření. První metoda je s použitím laserového zaměřování, které by bylo umístěno na jedné z protilehlých kotev a pomocí paprsku vyrovnat rovinu druhé kotvy. Druhá metoda je složitější a zahrnuje sledování signálu AoA pouze na jedné z protilehlých kotev, přičemž tag je umístěn přesně před druhou kotvou. Tímto způsobem bylo dosaženo relativně přesných úhlů v souladu s geometrií konstelace. Alternativně bylo možné umístit tag do předem definovaného místa v prostoru a opětovně využít geometrii konstelace k sledování úhlů, které by odpovídaly teoretickým výpočtům.

7.1.1 Měření v laboratoři

V prvé řadě se podíváme na přesný popis konstelace v naší laboratoři. Konstelace lze pozorovat na obrázku 7.3a a na fotografiích 7.1 včetně detailu tagu. V místnosti je velké množství objektů, které podporují vícecestné šíření signálu z důvodu množství odrazů. Konstelace je v tomto případě svou plochou menší, nežli měření v sekci 7.1.2.

(a) Ukázka části konstelace v laboratoři

(b) Detail tagu

Obrázek 7.1: Měření v laboratoři

Konstelace byla zaměřena na základě přístupu se svinovacím metrem a kotvy byly nastaveny co nejpreciznějí. Informace o konstelaci:

- rozměry konstelace: 3,0 × 3,6 m (11 m^2),
- souřadnice jednotlivých prvků jsou uvedeny v tabulce 7.1,
- doba měření: 1 min,
- prováděná měření:
  1. statické měření s tagem v bodě `T1`,
  2. statické měření s tagem v bodě `T2`,
  3. statické měření s tagem v bodě `T2` a pohybem osob uvnitř konstelace.

Tabulka 7.1: Souřadnice kotev a bodů reálných pozic tagů v laboratoři

Označení	x (m)	y (m)	z (m)
`A1` (`3C`)	0,0	0,0	1,4
`A2` (`5B`)	3,0	0,0	1,4
`A3` (`5D`)	0,0	3,6	1,4
`A4` (`62`)	3,0	3,6	1,4
`T1`	1,5	1,8	1,4
`T2`	2,4	3,3	1,4

Korekce natočení kotev od x-vé osy je následující pro vstup algoritmů:

$$\boldsymbol{\alpha} = [50{,}2;\ 129{,}8;\ -50{,}2;\ -129{,}8] - \boldsymbol{\theta}, \tag{7.1}$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor úhlů reprezentující azimut od referenční roviny osy x ve stupních (°) a $\boldsymbol{\theta}$ je vektor naměřených úhlů také ve stupních, tj. jeden dataset.

7.1.2 Měření v halových laboratořích

Pro měření v halových laboratořích na ČVUT FEL v Praze byl vybrán relativně čistý prostor konstelace, podobně jako v 7.1.1 typu LoS (Line of Sight). Konstelace lze pozorovat na obrázku 7.3b a na fotografii 7.2. Tento prostor laboratoří byl vybrán zejména z důvodu srovnání dvou konstelací z hlediska plochy, kde halové laboratoře disponují větším množstvím vhodných lokací pro naše experimenty. Dále uvedeme informace o konstelaci:

- rozměry konstelace: 4,552 x 8,126 m (37 m^2) ,
- souřadnice jednotlivých prvků jsou uvedeny v tabulce 7.2,
- doba měření: 2 min pro statická a 1 min pro dynamická měření,
- prováděná měření:
  1. statické měření s tagem v bodě `T1`,
  2. statické měření s tagem v bodě `T4`,
  3. statické měření s tagem v bodě `T5`,
  4. statické měření s tagem v bodě `T5` a anomálií (vkročení osoby s jízdním kolem do konstelace),
  5. statické měření s tagem v bodě `T2`,
  6. statické měření s tagem v bodě `T3`,
  7. statické měření s tagem v bodě `T1` a pohybem osob uvnitř konstelace,
  8. dynamické měření s lineárním pohybem tagu od `T5` do `T3` 2x tam a zpět (jedna cesta z bodu do bodu přibližně 15 s),
  9. dynamické měření s lineárním pohybem tagu od `T4` do `T2` 2x tam a zpět (6 s z bodu do bodu, poté vždy pauza 5 s),
  10. dynamické měření s pomalejším pohybem tagu od `T5`, 2x proti směru hodinových ručiček (body `T5, T2, T3, T4`),
  11. dynamické měření s rychlejším pohybem tagu od `T5`, 3x proti směru hodinových ručiček (body `T5, T4, T3, T2`),
  12. dynamické měření s rychlejším pohybem tagu od `T5`, 3x po směru hodinových ručiček (body `T5, T4, T3, T2`),
  13. dynamické měření s pohybem tagu od `T5` 2x po směru hodinových ručiček (8s pauza v každém bodě).

Jak lze pozorovat z tabulky 7.2, je přesnost konstelace dle desetinných míst mnohem vyšší, nežli v měření ze sekce 7.1.1. V tomto případě bylo využito zaměření pomocí laserového dálkoměru Leica Disto S910. Vlastnosti konstelace proto zobrazují reálné podmínky zaměření v praxi. Jak lze také pozorovat ze souřadnic, či z obrázku 7.3b, není konstelace dokonale pravoúhlá.

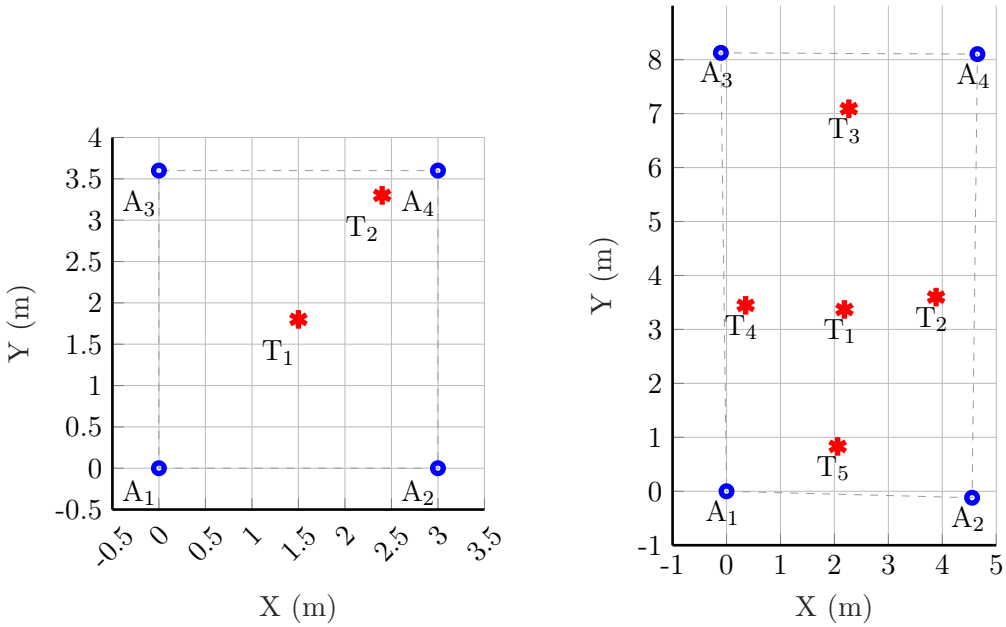
Natočení kotev od x-vé osy je podobně jako v (7.1) následující:

$$\boldsymbol{\alpha} = [60.73;\ 119{,}27;\ -60.73;\ -119{,}27] - \boldsymbol{\theta}. \tag{7.2}$$

Tabulka 7.2: Souřadnice kotev a bodů reálných pozic tagů pro konstelaci v halových laboratořích

Označení (ID)	x (m)	y (m)	z (m)
A1 (3C)	0,000	0,000	1,683
A2 (5D)	4,552	-0,119	1,627
A3 (5B)	-0,105	8,126	1,723
A4 (62)	4,651	8,103	1,681
T1	2,186	3,369	1,528
T2	3,884	3,599	0,012
T3	2,267	7,090	0,036
T4	0,355	3,446	0,028
T5	2,060	0,831	-0,009

Obrázek 7.2: Konstelace v halových laboratořích



(a) Konstelace pro laboratoř

(b) Konstelace pro halové laboratoře

Obrázek 7.3: 2D konstelace pro jednotlivá měření (A: Anchors, T: Tags)

7.2 Parsování dat

Data s časovou značkou nám umožní časovou synchronizaci zpráv od jednotlivých kotev, jak bylo uvedeno v sekci 4.2.1, resp. označení UUDF-time. Výstupem nástroje `serialSynch`, viz sekce 4.2, jsou kompletní řádky zpráv od jednotlivých kotev. Chceme-li získaná data využít pro datové zpracování, je nutné jednotlivé řádky zpracovat tak, abychom získali pro nás relevantní data, tj. timestamp, RSSI, azimut a elevaci. Byl vyvinut algoritmus `parseAoAData`, který nám vrátí matici $N \times M$, tj. matici o N řádcích a M sloupcích reprezentující počet kotev v konstelaci[26].

7.2.1 Problémy s naměřenými daty

Jak bylo již uvedeno v sekci 4.2, je možné nástroj `serialSynch` dále optimalizovat. Při zpracování dat se setkáme s problémy, které toto zpracování stěžují. Základními nedostatky celého systému jsou:

Chybná počáteční data Několik prvních dat jsou ve velké části případů neobvykle formátována či jejich část zcela chybí. Proto několik prvních desítek řádků zahodíme a začneme využívat až data pozdější. Tato chyba je pravděpodobně způsobena zaplněním vstupních bufferů v nástroji. Tento problém nás však při velkém počtu měřených dat nijak neomezuje.

Ztracená data V nemalém množství se stává, že nám může některý měřený úhel v konkrétním momentu chybět. Proto pak získáme dataset, který má některé ze svých hodnot definován hodnotou `NaN`.

Časově posunutá data Je-li na kotvě detekován signál, je zpracován a zaslán po sériovém rozhraní do PC. Přijde-li na vstupní buffer nástroje `serialSynch` tato zpráva, pak je označkována a uložena. A tento proces je opakován. Jelikož jsme omezeni časovým zpožděním příchodu DoA signálu, šířením signálu daným elektrickým obvodem a datovým zpracováním v PC, timestampy daného datasetu mohou být časově posunuty. Z experimentů vyplývá, že tento časový posuv může být až 25 ms.

Dalším vlivem na časově posunutá data je problém vícecestného šíření signálu. Antény kotvy detekují i odražené elektromagnetické vlny a poté je mohou vyhodnotit jako přijímaný DoA signál. Odrazy absolvující časově delší cestu elektromagnetické vlny nám mohou:

1. s daným časovým zpožděním odraženého signálu narušit jednotlivé měřené datasety (např. na místo čtyř úhlů od různých kotev máme v jednom časovém okamžiku naměřeno úhlů šest), což musíme adekvátně zpracovat,
2. detekovaný signál ve formě elektromagnetické vlny, který se šířil odrazem, má obvykle jiný směr příchodu, nežli vlna detekovaná na přímo, tj. toto nám může velmi znepřesnit daný odhad polohy.

Z experimentů vyplývá, že detekované odražené vlny jsou pro vývojový kit u-blox XPLR-AOA-2 velkým problémem, jejich vliv je potřeba nějakým způsobem eliminovat. V našem experimentu využíváme 100ms interval pro vysílání jednotlivých signálů tagem.

BT kanály Některé řádky mají téměř duplicitní hodnoty, resp. hodnoty RSSI se mění. Je to způsobeno přeskakováním BT kanálů v jeden určitý moment.

[26] Pro naše naše účely se počítá se čtyřmi kotvami (maximálně námi dostupný počet). Lze předpokládat, na základě teorie z kapitoly 2, že využití menšího počtu kotev přesnost lokalizačního systému sníží.

7.2.2 Popis algoritmu

Vstupními parametry je cesta k `csv` souboru s naměřenými daty `filename`, který je výstupem `serialSynch` nástroje, dále matice správného pořadí ID kotev `anchOrder` (viz obrázek 3.5) a typ výstupního úhlu `angleType` ve formátu „`azimuth`“ nebo „`elevation`“. Algoritmus nyní popíšeme:

- Smazání prvních `nRows2Delete` řádků
- Přeformátování jednotlivých řádků z `csv` do tabulky
- Smazání řádků, které nemají platné identifikátory kotvy
- Smazání duplicitních řádků
- Alokace výstupní matice jako matice `NaN`
- Alokace výstupní struktury s časovými značkami a intervaly mezi jednotlivými zprávami
- Výpočet jednotlivých intervalů mezi zprávami a uvažování pouze unikátních časových značek
- Pevně stanovené maximální hodnoty intervalu mezi datasety; mimo tento interval nebudeme považovat zprávu za součást nového datasetu
- Následuje cyklus zpracování jednotlivých datasetů v daném časovém intervalu, který se provádí přes všechny unikátní časové značky
  - Vezmeme data (v intervalu ± maxaximální rozlišovací hodnota) z konkrétního časového okamžiku
  - Zkontrolujeme, že se nejedná již o uvažovaná data z předchozího kroku, která se vešla do maximálního rozdílu časového intervalu
  - Srovnáme řádky podle pořadí identifikátorů kotvy
  - Zkontrolujeme, zda-li některá kotva nemá v daném časovém okamžiku více hodnot (částečné řešení vícecestného šíření) – pokud ano, pak vezmeme ten úhel, kde původní signál má nižší úroveň RSSI
  - Uložíme hodnoty do výstupní matice
- Po ukončení iterací realokujeme výstupní matici a časovou strukturu
- Smazání řádků z výstupní matice, které byly přeskočeny v iteracích z důvodu míchání datasetů, a sečteme příslušné časové intervaly pro získání přesnější časové informace

Tímto máme data připravená pro aplikaci lokalizačních algoritmů. V samotném algoritmu by také bylo možné zajistit, má-li daná iterace osmici řádků, pak jej rozdělit na další dva datasety. Tyto datasety by si byly časově velmi blízké, ale získali bychom tak další sadu měření. Tato úprava však není nutná, jelikož takových případů je statisticky nevýznamné množství.

7.3 Statistické vlastnosti měřených dat

V předchozích sekcích jsme zmínili problémy spojené s nestálostí hodnot pro úhly v běžném odrazivém prostředí. Na obrázcích 7.4 jsou vykresleny distribuční funkce CDF a boxploty (a dále popsány) pro případ měření statické polohy tagu ve středu konstelace v halových laboratořích:

- bez pohybu osob uvnitř konstelace,
- s pohybem osob uvnitř konstelace.

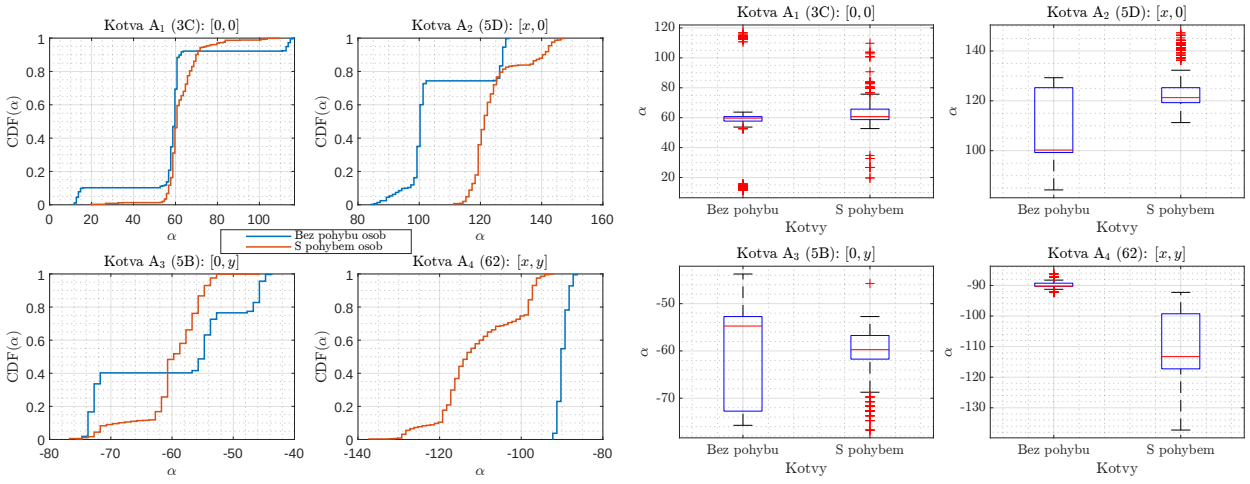
Střední hodnota Pro kotvy `A2` a `A4` můžeme pozorovat nestálost středních hodnot). To může být způsobeno umístěním kotev, tj. přímo u stěny haly.

Pravděpodobnostní rozsah V práci [7] byly vyobrazeny CDF z bezodrazové komory. Zásadní odlišnost lze pozorovat ve sklonu CDF, jež představuje pravděpodobnost výskytu jednotlivých hodnot náhodné proměnné (v našem případě úhly). Menší náběh CDF nám vyznačuje nepřesnost měření jednoho úhlu. Pro měření kotvou `A1` máme pravděpodobnost dosažení jedné výsledné hodnoty úhlů relativně vysokou.

Symetrie Lze také pozorovat, že CDF nejsou symetrická. Nesymetričnost CDF může ukazovat, že data mají tendenci více se rozprostírat k vyšším či nižším úhlům. Z CDF lze pozorovat, že úhly mají tendenci mít větší hodnotu úhlů, což by vysvětlovala nesymetričnost URA.

Konstantní úseky Struktura naměřených dat má určitou distribuci úhlů, jak lze pozorovat z CDF, konstantní úseky značí vyšší počet naměřených dat s podobnou hodnotou, tj. jedná se o skupiny opakujících se hodnot s danými pravděpodobnostmi.

Porovnání dvou měření Měření s pohybem osob, jak uvidíme v následující sekci, má tendenci zpřesnit chování lokalizačního systému. To vychází pravděpodobně ze změny, resp. snížení vlivu odrazů. Pohyb osob dle zobrazovaných CDF a boxplotů odstraňuje konstantní úseky zvyšuje jejich sklon.



(a) CDF naměřených úhlů

(b) Boxploty naměřených úhlů

Obrázek 7.4: Porovnání naměřených úhlů ve středu konstelace `T1` v halových laboratořích pro případ bez pohybu a s pohybem osob

7.4 Výsledky měření lokalizace

V této sekci se podíváme na výsledky lokalizačního systému s využitím implementace estimátorů polohy z kapitoly 5. Nejprve se v sekci 7.4.1 podíváme na vstupní nastavení algoritmů, dále pak v sekcích 7.4.2 a 7.4.3 se podíváme na výsledky lokalizace z naší laboratoře, resp. z halových laboratoří.

7.4.1 Metodika zpracování

Máme naměřená data reprezentující statické polohy či dynamické pozicování v jednotlivých konstelacích. Pro odhad polohy na základě naměřených úhlů azimutu θ byly implementovány estimátory z kapitoly, které nám zajistí více či méně přesný odhad. Některé z těchto algoritmů lze nastavit, aby lépe zobrazovaly naší aplikaci, např. pohyb pouze směrem x-ové osy.

Z naměřených dat získaných nástrojem ze sekce 7.2 máme velkou matici $N \times 4$ naměřených úhlů a časovou strukturu s informacemi o intervalech mezi měřenými úhly. Jak již bylo zmíněno, měření není dokonalé, proto některé řádky datasetů mají menší počet úhlů a zbytek je nahrazen hodnotami `NaN`.

Naměřené úhly je nejprve třeba zkorigovat podle rovnic (7.1) a (7.2). Poté je možné spustit jednotlivé lokalizační nástroje s informacemi o konstelaci a inicializační hodnotě polohy.

Vstupní parametry estimátorů jsou následující:

Inicializační odhad Pro testování byl zvolen bod v rovině $\boldsymbol{X}^{(0)} = [1,5; 1,8]$. Bylo by také možné nalézt optimální inicializační bod, to však není zásadním bodem této práce.

Ukončovací podmínka Pro iterativní metody je nutné implementovat ukončovací podmínku pro případ konvergence či divergence. Byly implementovány následující ukončovací podmínky:

- maximální počet iterací: 100,
- hodnota reziduálu, resp. korekční hodnoty: pro konvergenci 0,03 m divergenci 100 m,
- v případě vysoké hodnoty λ pro LM byla nastavena ukončovací podmínka $\lambda = 10^5$.
- Je také nutné nastavit vstupní inicializační parametry pro některé z algoritmů:

  Metoda největšího spádu Koeficient $\lambda = 1$,

  Levenberg-Marquardtova metoda Koeficient $\lambda = 1$ a $c_\lambda = 5$,

  Rozšířený Kalmanův filtr Hodnoty kovariančních matic procesu $\mathbf{Q}$ a měření $\mathbf{R}$ byly natrénovány na dynamických měřeních. Tyto hodnoty pak byly využity pro měření statická:

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}\left(1, 2^2;\ 1, 2^2\right).$$
$$\mathbf{R} = \operatorname{diag}\left(5^2;\ 5^2;\ 5^2;\ 5^2\right),$$

  kde rozměry variancí v matici $\mathbf{Q}$ jsou m^2/s a rozměry v matici $\mathbf{R}$ jsou deg^2, resp. jsou implementovány v algoritmech v jednotkách rad^2.

  Kovarianční matice stavu byla inicializována hodnotou $S = 3$ m, je však často výhodnější inicializovat hodnotou vyšší, tj.

$$\mathbf{P} = \operatorname{diag}\left(3^2;\ 3^2\right).$$

7.4.2 Lokalizace v laboratoři

Na obrázcích 7.6 lze pozorovat výsledky lokalizace pro měření v laboratoři se staticky umístěnými tagy. Jednotlivé obrázky ukazují odhad polohy pro body `T1` (bod ve středu konstelace) a `T2`. Dále jsou také v obrázku vykresleny elipsy značící 95% predikční interval, ve kterém se odhadované hodnoty budou vyskytovat.

Lze pozorovat, že výsledky mají velmi podobný charakter pro všechny čtyři využité algoritmy:

Odchylka Jednotlivé odhady mají jistou odchylku od reálných poloh, která je způsobena nedokonalým zaměřením natočení kotev. Tato systematická chyba více či méně ovlivní odhad polohy v daném bodě a tím je odhad posunut určitým směrem mimo reálnou polohu tagu.

Shluky bodů Při pozorování obrázků je zjevné, že pro odhady polohy ve středu konstelace dochází u všech lokalizačních metod k rozdělení shluku bodů na dva. Tento jev vzniká v důsledku specifické povahy měřených úhlů. Když je pravděpodobnost měření úhlů ovlivněna převážně odrazy, některé odhady polohy mohou být narušeny a odchýleny od správných odhadů.

Příkladem je odhad polohy pro bod `T1`, dle tabulky 7.4, označen žlutě.

V tabulce 7.3 jsou vypsány statistiky odhadů jednotlivými metodami. Střední hodnoty μ se ustálí na velmi podobných hodnotách pro všechny metody. Kvalitativním ukazatelem pro porovnání přesnosti odhadů jednotlivých metod jsou hodnoty RMSE. Lze pozorovat, že hodnoty jsou velmi podobné, avšak nejnižší hodnoty má metoda největšího spádu a EKF. Také lze pozorovat, že hodnoty RMSE v jednotlivých osách se poměrně razantně liší.

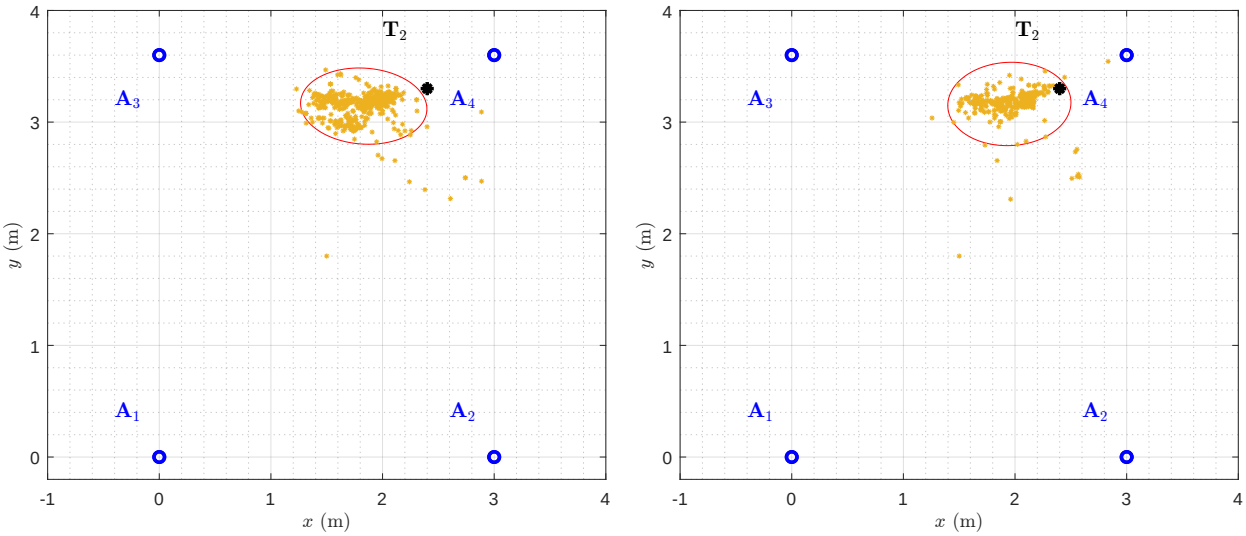
Při porovnání výsledků pro statická měření, ve kterých se měřilo s pohybem osob uvnitř konstelace při statickém umístění tagu, bylo zjištěno, že pohyb osob výsledky lokalizace pravděpodobně zpřesňuje. Toto tvrzení je podloženo obrázky 7.5 a výsledky hodnot RMSE pro poslední dva sloupce v tabulce 7.3. Podobně tak v měření v halových laboratořích.

Vyhodnocením výsledků tabulky 7.3 můžeme říci, že bezpečná **přesnost lokalizace** v laboratoři je pod 1 m. Podaří-li se však v budoucí práci zaměření natočení kotvy zdokonalit, pak by se přesnost lokalizace mohla teoreticky pohybovat pod 0,5 m.

Tabulka 7.3: Statistické výsledky z měření v laboratoři

	T1				T2				
Char. (m)	NR	G	LM	EKF	NR	G	LM	EKF-1	EKF-2[2]
μ_x	1,272	1,234	1,328	1,241	1,827	1,823	1,826	1,829	1,944
μ_y	1,003	0,990	1,110	0,989	3,141	3,145	3,138	3,141	3,175
μ_{xy}	0,898	0,898	0,874	0,8755	0,699	0,618	0,632	0,611	0,498
S_x	0,291	0,200	0,373	0,207	0,258	0,231	0,268	0,233	0,221
S_y	0,312	0,177	0,485	0,182	0,145	0,130	0,167	0,142	0,139
RMSE_x	0,370	0,333	0,410	0,331	0,629	0,621	0,633	0,617	0,507
RMSE_y	0,856	0,829	0,843	0,831	0,215	0,202	0,232	0,214	0,187
RMSE_{xy}	0,932	0,893	0,937	0,894	0,665	0,653	0,674	0,653	0,540

[1] Odhad s pohybem osob uvnitř konstelace



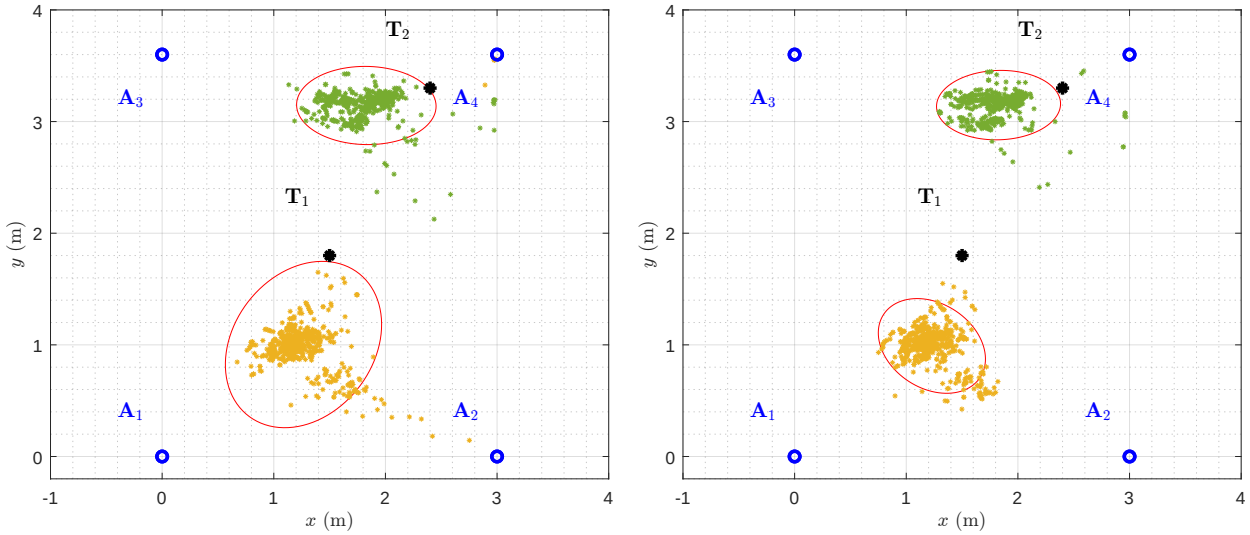
(a) Výsledky bez pohybu osob uvnitř konstelace

(b) Výsledky s pohybem osob uvnitř konstelace

Obrázek 7.5: Porovnání chození osob uvnitř konstelace v laboratoři, poloha odhadnuta pomocí EKF

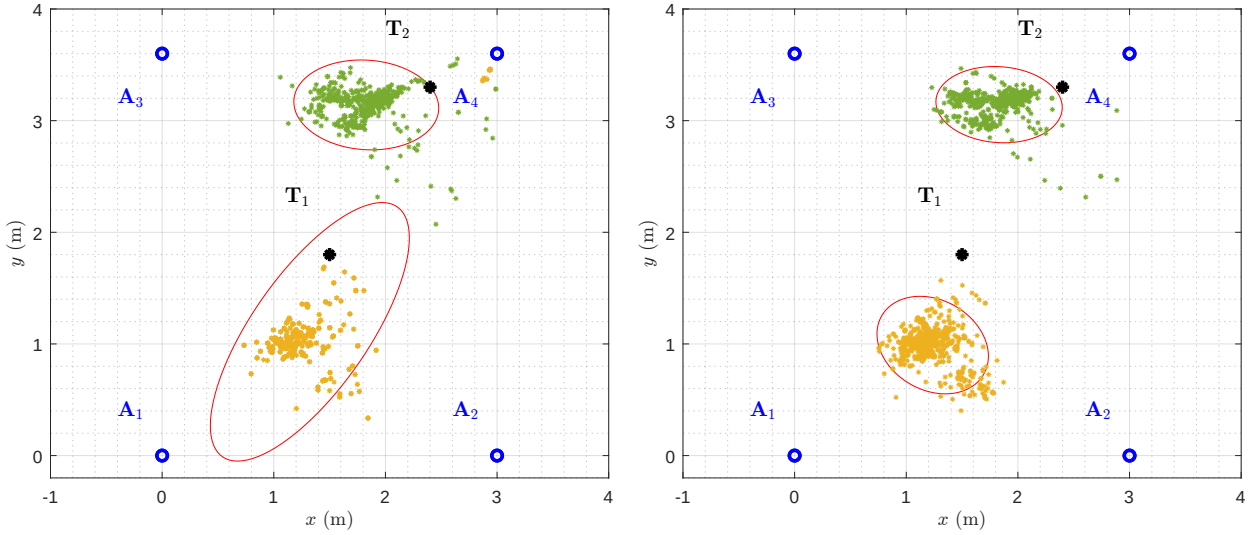
Tabulka 7.4: Legenda k odhadům polohy pro body T1 a T2 v laboratoři

*	Odhad polohy pro bod `T1`
*	Odhad polohy pro bod `T2`
⬭	95% predikční interval (2σ)



(a) Výsledky statického měření pro Newton-Raphsonovu metodu

(b) Výsledky statického měření pro metodu největšího spádu



(c) Výsledky statického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu

(d) Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr

Obrázek 7.6: Výsledky odhadů polohy pro statická měření v laboratoři s vyznačeným 95% predikčním intervalem výskytu hodnot

7.4.3 Lokalizace v halových laboratořích

Vzhledem k větším rozměrům konstelace lze předpokládat vyšší míru nepřesnosti lokalizace. Podíváme se nejdříve na měření statická a poté dynamická.

Statická měření

Na obrázcích 7.7 lze pozorovat odhadnuté polohy pro statické body `T1` (střed konstelace) až `T5` (spodní bod). Podobně jako ve výsledcích z měření v laboratoři ze sekce 7.4.2 jsou v obrázcích vyznačeny jednotlivé reálné polohy tagu jejich odhady, označení je popsáno v tabulce 7.6. Podobně jako pro měření v laboratoři i zde se objevují negativní vlastnosti celého lokalizačního systému:

Odchylka Systematická chyba zaměření natočení kotev má vliv i na druhé měření. Způsobuje proto chybu odhadu jedním směrem.

Shluky bodů Prostor halových laboratoří pravděpodobně způsobil vyšší míru vícecestného šíření signálu a jejich příjem kotvami. Shluky bodů jsou nyní pozorovatelné na všech odhadovaných polohách a jsou v zásadě rozděleny na dvě skupiny.

Odlehlé body Také lze oproti měření v laboratoři pozorovat nárůst odlehlých bodů odhadů polohy.

Pohyb osob v konstelaci Porovnáme-li rozdíl měření statického tagu s pohybem osob uvnitř konstelace ze sekce 7.4.2 s měřením v halových laboratořích a pohybem osob uvnitř konstelace, zjistíme, že zpřesnění se vyskytuje i v tomto případě. Z měření vyplývá, že pohyb osob zpřesní lokalizaci z hlediska RMSE až o 0,5 m. Tento jev může mít následující vysvětlení:

- **Dynamika prostředí** Pohyb osob může přinášet dynamiku do prostředí, což může ovlivňovat šíření signálu a vnímané signálové podmínky. Lidské tělo může elektromagnetickou vlnu odrazit, stejně jako absorbovat [50].
- **Jiné faktory** Přesnost lokalizace závisí na mnoha faktorech, a proto může být obtížné jednoznačně identifikovat příčiny pozorovaných výsledků.

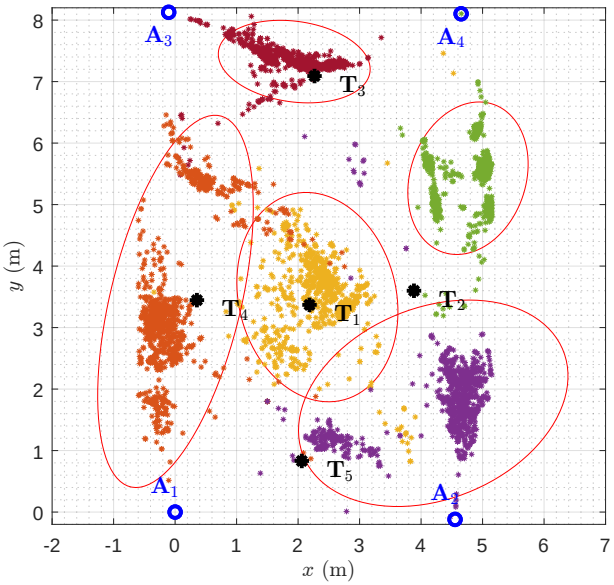
V tabulce 7.5 jsou vypsány statistické výsledky. Lze pozorovat, že ukazatel RMSE_x je téměř vždy nižší nežli RMSE_y. Výjimkou je spodní bod `T5`, ve kterém je naopak hodnota RMSE_y nižší. Pravděpodobně z charakteristiky okolního prostoru v halových laboratoří lze předpokládat nesymetričnost výsledků, např. bod `T2` má nižší hodnotu směrodatná odchylka S nežli bod `T4`, který byl umístěn v podstatě u stěny. Ukazatel RMSE_{xy} se pak liší pro různé body, odhad bodů `T1` a `T3` mají výrazně lepší výsledky nežli zbylé tři body, u kterých je pozorovatelná vyšší hodnota odchylky od reálné polohy.

Z analýzy výsledků uvedených v tabulce 7.5 vyplývá, že přesnost lokalizace v terénních podmínkách je výrazně nižší než v prostředí naší laboratoře. **Přesnost** lokalizace je vyšší pro x-ovou souřadnici, kde se pohybuje pod 1 m, až na výjimku pro bod `T5`. Přesnost x-ové souřadnice je pak v průměru pod 1,5 m a téměř bezpečně pod hodnotu 2 m. Průměrná odchylka se pohybuje od 0,5 m do přibližně 1 m. Je důležité zdůraznit, že systematická chyba způsobená nedokonalým zaměřením natočení kotvy má výrazný vliv na výsledky. Pokud by se v budoucí práci podařilo tuto chybu minimalizovat, například optimalizací procesu zaměření, lze očekávat dosažení přesnosti srovnatelné s výsledky měření v laboratoři (viz sekce 7.4.2), tj. přesnost kolem 0,5 m až 1 m.

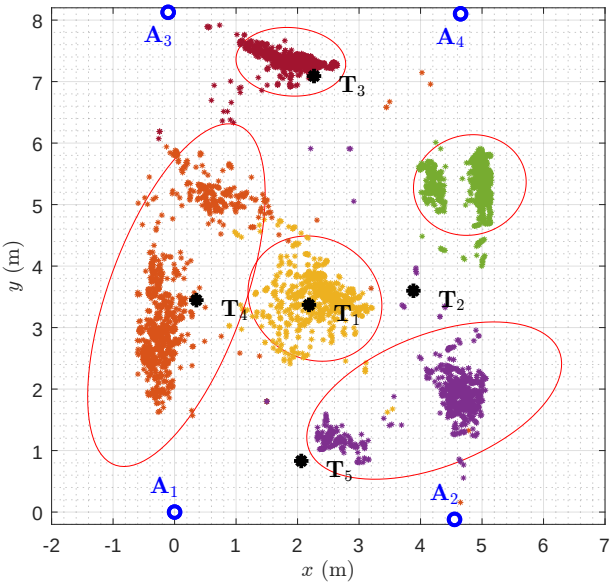
Tabulka 7.5: Statistické výsledky z měření v halových laboratořích

	T1				T2				T3			
Char. (m)	NR	G	LM	EKF	NR	G	LM	EKF	NR	G	LM	EKF
μ_x	2,302	2,271	2,354	2,283	4,823	4,689	4,781	4,828	1,912	2,093	1,590	1,939
μ_y	3,491	3,781	3,555	3,511	5,388	4,551	5,382	5,354	7,336	7,143	7,432	7,317
μ_{xy}	0,746	0,543	0,816	0,634	2,065	1,992	2,058	2,026	0,588	0,504	0,917	0,515
S_x	0,539	0,380	0,556	0,468	0,399	0,412	0,443	0,377	0,563	0,416	0,693	0,450
S_y	0,708	0,388	0,820	0,518	0,502	0,408	0,494	0,425	0,446	0,394	0,699	0,244
RMSE_x	0.551	0,389	0,581	0,478	1,020	0,904	1,000	1,017	0,665	0,451	0,969	0,557
RMSE_y	0,717	0,566	0,840	0,537	1,859	1,036	1,850	1,805	0,509	0,398	0,778	0,333
RMSE_{xy}	0,904	0,687	1,021	0,719	2,120	1,375	2,103	2,072	0,838	0,601	1,242	0,649

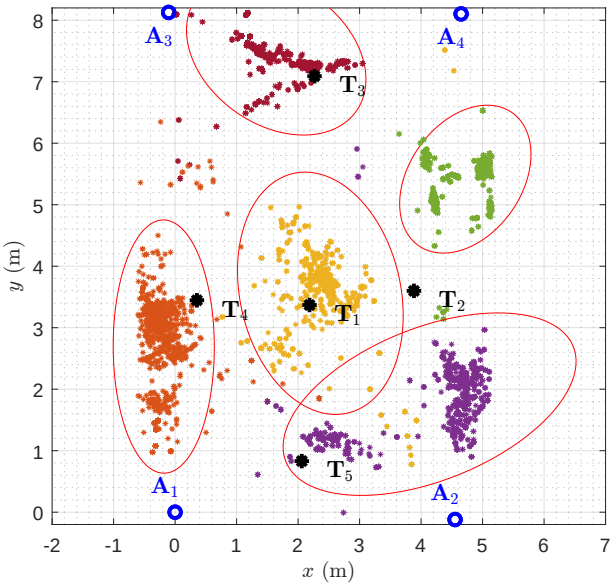
	T4				T5			
Char. (m)	NR	G	LM	EKF	NR	G	LM	EKF
μ_x	-0,066	0,164	-0,240	-0,068	4,181	4,083	4,142	4,179
μ_y	3,364	3,747	2,711	3,539	1,764	2,465	1,771	1,809
μ_{xy}	1,283	1,193	1,170	1,267	2,419	2,411	2,380	2,413
S_x	0,568	0,723	0,377	0,514	0,901	0,922	0,983	0,857
S_y	1,357	0,843	0,871	1,283	0,695	0,852	0,627	0,575
RMSE_x	0,706	0,748	0,704	0,665	2,304	2,222	2,302	2,285
RMSE_y	1,358	0,895	1,139	1,286	1,163	1,842	1,130	1,135
RMSE_{xy}	1,531	1,166	1,339	1,448	2,581	2,886	2,564	2,552



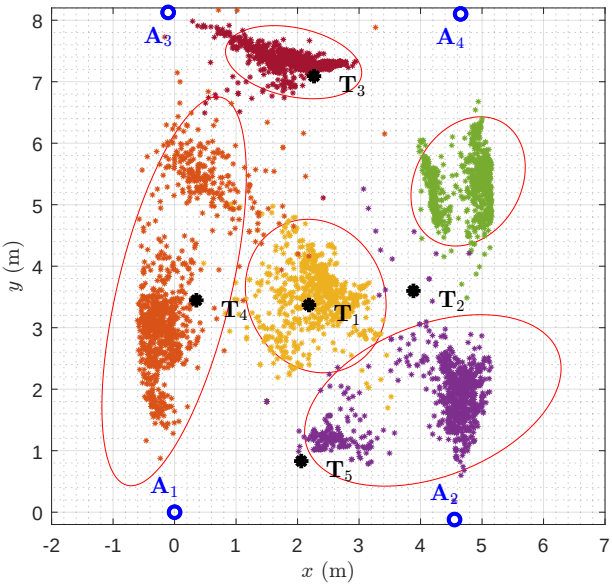
(a) Výsledky statického měření pro Newton-Raphsonovu metodu



(b) Výsledky statického měření pro metodu největšího spádu



(c) Výsledky statického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu

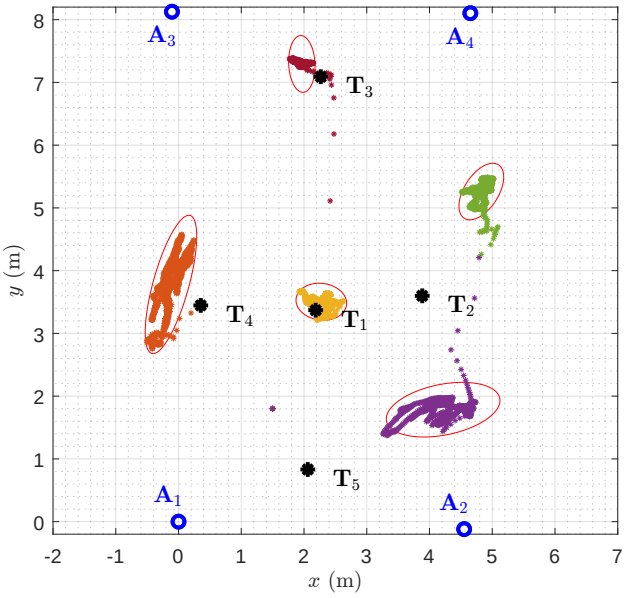


(d) Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr

Obrázek 7.7: Výsledky odhadů polohy pro statická měření v halových laboratořích s vyznačeným 95% predikčním intervalem výskytu hodnot

Tabulka 7.6: Legenda k odhadům polohy pro body T1 a T2 v halových laboratořích

*	Odhad polohy pro bod `T1`
*	Odhad polohy pro bod `T2`
*	Odhad polohy pro bod `T3`
*	Odhad polohy pro bod `T4`
*	Odhad polohy pro bod `T5`
⬭	95% predikční interval (2σ)



Obrázek 7.8: Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr s nízkými hodnotami **Q**

Dynamická měření

Výsledky uvedené níže, označené ze sekce 7.1.2 jako měření č. 11, budou podrobněji rozebrány. Toto měření zahrnuje rychlejší pohyb tagů třikrát proti směru hodinových ručiček v dané konstelaci s krátkými pauzami v každém bodě.

Na obrázcích 7.9 lze sledovat odhadnuté polohy po celý časový interval. Časový vývoj jednotlivých souřadnic je znázorněn na obrázcích 7.10, kde je patrný nárůst x-ové souřadnice od času $t = 0$ spolu s nárůstem souřadnice y-ové. Interpretací tohoto pohybu lze vyvodit trasu z bodu `T5` do bodu `T2`. Dále je možné pozorovat, že se cyklus opakuje celkem třikrát. Z výsledků lze vyvodit následující závěry:

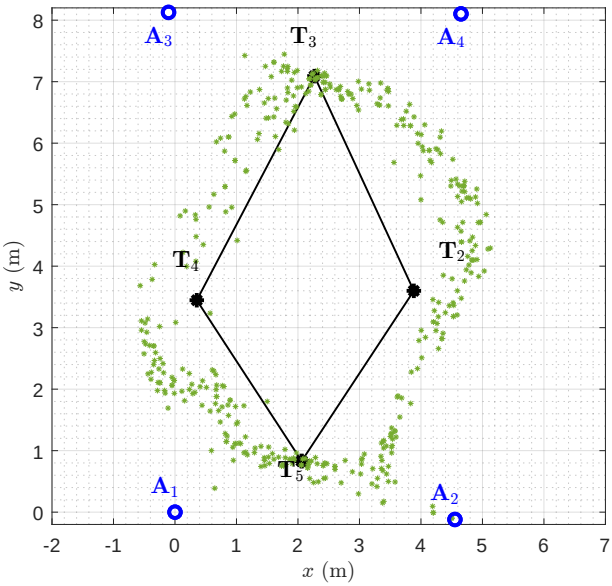
Podobnost Podobný charakter odhadovaných pozic všech čtyř metod lze identifikovat na obrázcích 7.9. Odhady mají tendenci ležet spíše vně označeného kosočtverce. Toto chování může být způsobeno neúplností nebo nelinearitou pohybu mezi jednotlivými body měření. Během průběhu pohybu s tagem byl krokován spíše oválný charakter průchodu mezi body, což by mohlo vysvětlit výsledky pozorované na obrázcích.

Pauzy V odhadech lze též vysledovat výraznější grafické zvýraznění odhadovaných poloh v reálných bodech $\mathtt{T}_i$. Tento jev je vizuálně nejlépe pozorovatelný z výsledků metody největšího spádu.

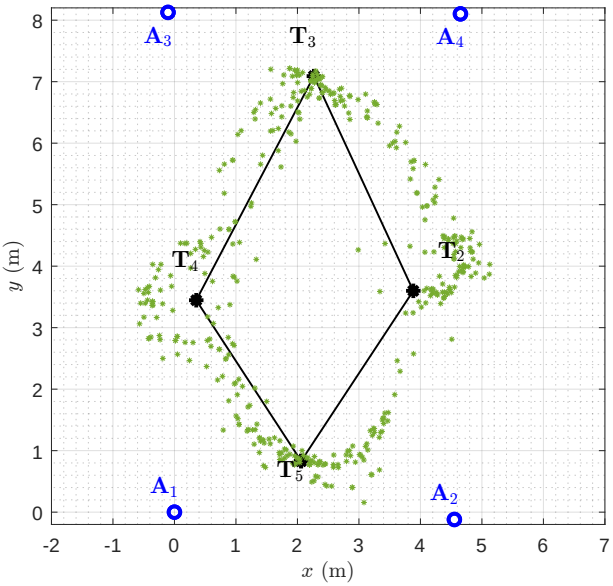
Charakter průběhů v čase Z obrázků 7.10 lze pozorovat relativně přesný časový průběh jednotlivých souřadnic v souladu s modelovaným pohybem. Tyto výsledky představují autentický charakter měření a naznačují možné využití v reálných situacích, například jako součást RTLS (Real Time Location System) nebo lokalizačního systému.

Porovnání výsledků odhadů souřadnic Iterativní metody, hlavně poté NR a LM, vykazují v některých případech nestabilitu, kdy dochází k odchylkám od očekávané hodnoty nebo dokonce k úplné divergenci. Tato nestálost je především způsobena problémy s odrazy, zejména pak s úhly, které jsou výrazně vzdáleny (outliers) od očekávaných úhlů. Metoda největšího spádu má vzhledem k povaze svých kroků tendenci způsobovat stálou konvergenci na odhadovanou polohu, a to i pokud je daný dataset zatížen odlehlými hodnotami. Podíváme-li se pak na výsledky průběhů EKF v obrázku 7.10d, lze pozorovat, že výsledky jsou mnohem hladší a odhady nemají tendenci náhle odskočit na vzdálenou hodnotu.

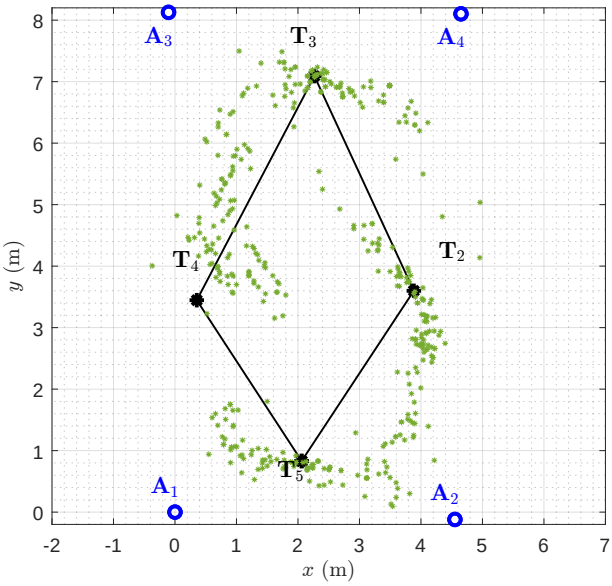
Z hlediska přesnosti lokalizačního systému při dynamických pohybech lze s jistotou prohlásit, že dosahujeme přesnosti lepší než 1 m. I když modelové křivky, které zobrazují reálný pohyb, nejsou naprosto přesně vykresleny, tato nepřesnost nemá zásadní vliv na výsledky prezentované v této části.



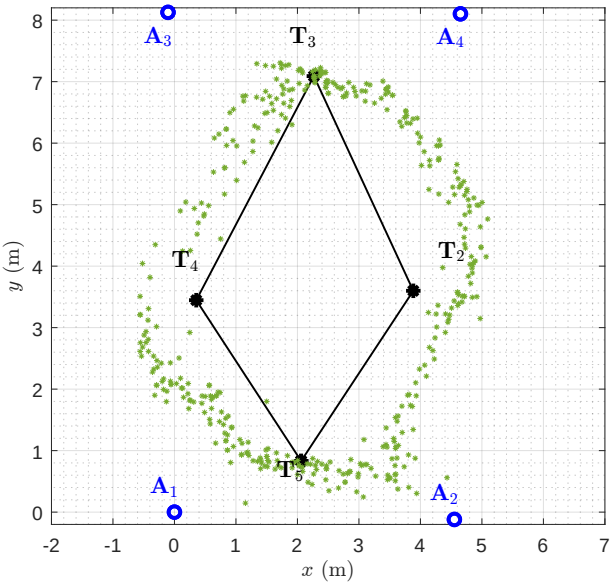
(a) Výsledky dynamického měření pro Newton-Raphsonovu metodu



(b) Výsledky dynamického měření pro metodu největšího spádu

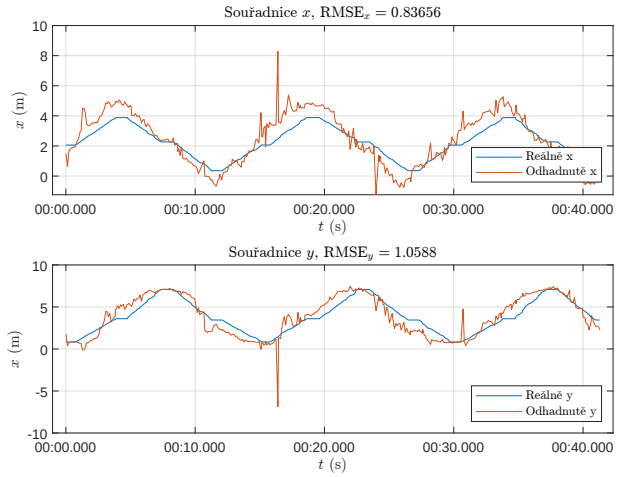


(c) Výsledky dynamického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu

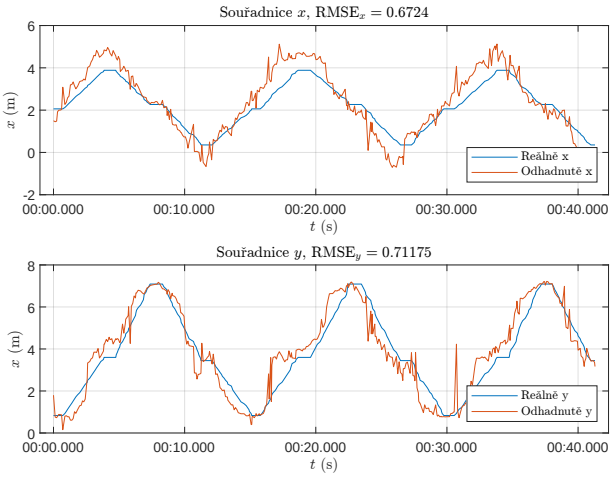


(d) Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr

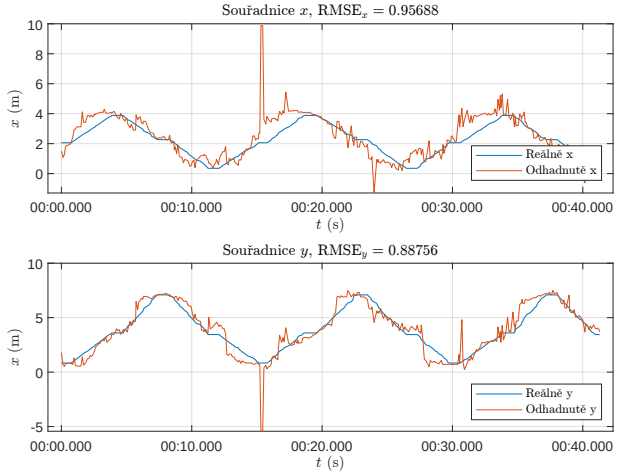
Obrázek 7.9: Výsledky odhadů polohy pro dynamická měření č. 11 proti směru hodinových ručiček v halových laboratořích



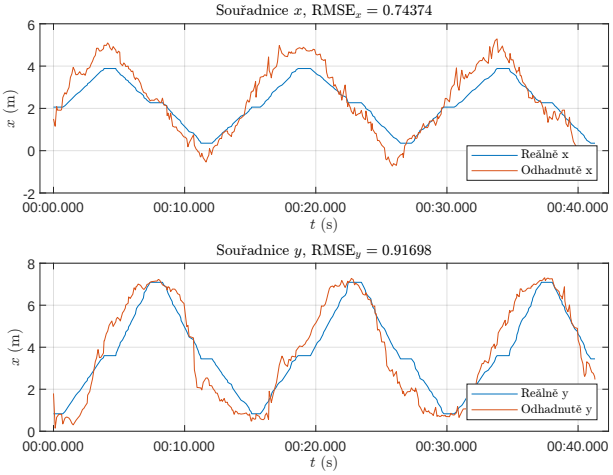
(a) Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro Newton-Raphsonovu metodu



(b) Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro metodu největšího spádu



(c) Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu



(d) Odhad souřadnic v čase statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr

Obrázek 7.10: Výsledky odhadů x-ové a y-ové souřadnice v čase pro dynamická měření č. 11 proti směru hodinových ručiček v halových laboratořích

7.5 Diskuze výsledků lokalizace

Jak bylo pozorováno v praxi, vliv odrazů je problematický, protože může způsobit odchylky od korektních odhadů polohy. Měření úhlů může být náchylné na různé chyby a nejistoty, což může ovlivnit výsledné odhady polohy. Pro snížení vlivu odrazů by bylo možné:

Filtrování dat Bylo by možné provést předzpracování naměřených dat a zjistit, které úhly by s jistou mírou pravděpodobnosti mohly být odrazy či odlehlé hodnoty. Tímto bychom mohli odstranit některé nežádoucí vlivy v naměřených úhlech.

Kalibrace Bylo by možné vypočíst určitý interval teoretických měřitelných hodnot v dané konstelaci, je-li hodnota měřeného úhlu mimo tento interval, byla by přidána informace o vyšší míře nepřesnosti v daném datasetu. Částečně známá nepřesnost by mohla mýt využíta v sofistikovanějších adaptivních algoritmech pro odhad polohy.

Velký vliv na přesnost měření vykazuje nedokonalé zaměření natočení kotvy směrem do konstelace. Jak lze vyčíst z dosavadních výsledků, tato systematická chyba může způsobit snížení přesnosti lokalizačního systému až o 1 metr. V budoucích pracích bude kladen důraz na precizní nastavení roviny natočení kotvy pro úhly azimutu a elevace. K dosažení této přesnosti byly navrženy metody, včetně využití laserového zaměřovače.

Korekční vztahy z kapitoly 6 byly vyzkoušeny. Z důvodu velké systematické chyby však nemají zásadní vliv pro zpřesnění systému. V další práci se proto budeme věnovat jejich využitími a ověření vlivu na přesnost lokalizace.

7.5.1 Budoucí práce

Lokalizace statických bodů poskytla vhled do problému nepřesného zaměření pootočení kotvy a zároveň zdůraznila výzvu spočívající ve správném měření úhlů přijatého signálu, který se šíří odrazem. V následující práci bude nezbytné minimalizovat vliv signálu, který bude mít nižší pravděpodobnost správného určení úhlu. Určení správného úhlu nebo úhlu jemu blízkého, by poté mohlo systém opět zpřesnit a stabilizovat.

Pro možnou další kvantitativní reprezentaci přesnosti lokalizace se můžeme zabývat parametry DoP (Dilution of Precision) nebo DRMS (Distance Root Mean Square) či CEP (Circular Error Probable). [7]

Bylo by také možné implementovat **další lokalizační algoritmy**, které by opět mohly více sledovat chování dynamického systému. Pro zvýšení robustnosti z hlediska velkého šumu a nelinearity, můžeme implementovat *UKF* (Unscented Kalman filter), který již problém nelinearity neřeší linearizováním v okolí bodu. Dále bychom se mohli zabývat *PF* (Particle filters), které využívají k aproximaci stavového vektoru metodu Monte Carlo. V neposlední řadě bychom se mohli zaměřit na tzv. *adaptivní metody*, které umožňují změnu svého chování v čase nebo v reakci na podmínky problému. Z adaptivních metod bychom mohli využít např. adaptivní EKF či adaptivní PF, dále pak adaptivní Bayesovské filtry či metody strojového učení [51]. Budeme-li však implementovat tyto složitější algoritmy, zvýšíme tím nároky na výpočetní zdroje.

Bylo by také možné Kalmanův filtr omezit, provést tzv. constrained KF. Bylo by možné pomocí KF eliminovat nebo omezit některé nepravděpodobné nebo nerealistické hodnoty měření, což by mohlo vést k robustnějším odhadům. Také bychom mohli KF využít pro identifikaci odlehlých hodnot, popř. KF nastavit omezujícími podmínkami v dynamickém lokalizování. [34] Bylo by rovněž možné modelovat mimo stav polohy také stav rychlosti.

Pro vyhlazení odhadů by bylo možné využít průměrovací filtry typu MA (Moving Average) či s exponenciálním zapomínáním EMA (Exponential Moving Average). Filtr typu EMA by byl vhodný pro využití při dynamickém pohybu uživatele.

Další možností pro zvýšení přesnosti lokalizačního systému založeného na BT DoA je **fúze**. Fúze s jinými lokalizačními systémy představuje efektivní přístup k zvýšení přesnosti lokalizačního systému. Tato metoda spočívá v kombinaci výstupů z různých lokalizačních zdrojů nebo technologií, což umožňuje vytvoření robustnějšího a přesnějšího odhadu polohy. V budoucí práci by proto bylo možné zkombinovat lokalizační systémy založené na technologiích *Wi-Fi fingerprinting*, *INS* (Inertial Navigation Systems) či např. *UWB* (Ultra-Wideband). Zejména v případě UWB by bylo možné snížit vliv odrazů. Také by UWB mohla snížit interferenci signálů ve stísněných frekvenčních pásmech.

Dalším potenciálním cílem je rozšíření lokalizace v prostoru, pro kterou již byly vyvinuty v rámci této práce některé nástroje, položeny základy ve 2D a byla naměřeny data pro osu elevace. Tento vývoj by mohl posunout celý koncept směrem k lokalizaci v reálném čase (RTLS - Real Time Location Systems). Při takovém rozšíření vznikají nové výzvy, jako optimalizace algoritmů a chování systému v situacích, kdy dojde k ztrátě polohy sledovaného zařízení (tagu). Příkladem optimalizace konvergence KF může být počáteční inicializace polohy některým z iterativních metod.

Implementované algoritmy pro získávání a zpracování dat jsou již s drobnými úpravami připraveny na lokalizaci více tagů současně. Zásadní výzvou bude vytvoření vhodného časového plánu pro efektivní odhad jednotlivých identifikátorů tagů. Tento krok bude klíčový pro dosažení přesné a spolehlivé lokalizace v prostoru offline a v později v reálném čase.

7.5.2 Porovnání výsledků

Sesma a Egorov v práci [6] došli k výsledku přesnosti systému v průměru 0,89 m s využitím hybridního lokalizačního algoritmu založeného na AoA a RSSI. Anténní pole přitom využili URA s patch anténami 4×4. Jak lze také pozorovat z jejich práce, vyšší počet anténních elementů razantně zvyšuje přesnost měření úhlů.

S využitím dvou kotev Cominelli, Patras a Gringoli v práci [15] dosáhli v průměru přesnosti 0,85 m. Dále pak Pau, Arena a et al. [14] získali spolehlivý výsledek přesnosti lokalizace pod 0,70 m s využitím 4×4 URA.

Uvedené práce jsou především zaměřeny na samotné algoritmy pro získání úhlů, kterými jsme se v této práci téměř nezabývali. Poloha tagu je v uvedených pracích získávána pomocí trilateračních technik. Pokud porovnáme dosažené výsledky s výsledky této práce, lze konstatovat, že při minimalizaci problémů spojených s příjmem odražených signálů a eliminaci systematické chyby měření natočení kotev, můžeme relativně snadno dosáhnout přesnosti pod 0,5 metru. Využívané algoritmy, převážně pak EKF, umožňují lépe popsat dynamiku systému, což je výhodné oproti jiným technikám.

8 Závěr

Tato práce se zabývala úvodem do problematiky metod určování polohy ve vnitřních prostorách. Byly shrnuty metody založené na odhadu vzdálenosti a podrobněji popsány metody úhloměrné. Seznámili jsme se také se základními typy anténních polí, které jsou využité v následných experimentech. Byl také popsán úvod do specifikace Bluetooth v5.1, který umožňuje implementovat lokalizační systémy na základě metod AoA a AoD.

Důležitým krokem bylo sepsání formátu získávaných dat z vývojového kitu u-blox XPLR-AOA-2, který byl využíván při experimentech. Pro zprávy vystupující z vývojového kitu obsahující informaci o přijatém úhlu azimutu a elevace bylo nutné efektivně zpracovat a časově synchronizovat ze všech využívaných kotev. Výsledkem je nástroj `serialSynch`, který s využitím vícevláknové logiky poskytl možnost sloučení měřených dat z více kotev do jednoho souboru. Jednotlivé zprávy jsou přitom označkovány časovou známkou, která je nezbytná pro sladění jednotlivých datasetů pro dynamická měření. V jedné ze sekcí byly také popsány základní využívané statistické charakteristiky.

Nástroj `serialSynch` umožňuje efektivní získání měřených dat. Pro statistické zpracování a využití naměřených dat pro implementované lokalizační algoritmy byl vyvinut nástroj `parseAoAData`, který si z naměřených zpráv vybere patřičné informace o úhlech a RSSI do MATLAB prostředí. Mimo jiné se algoritmus zabývá problémy ztráty některých dat, časovým zpožděním mezi vzorky datasetů a vhodným filtrováním zpráv. Pro ověření teoreticky měřitelných úhlů byl vytvořena zapouzdřená aplikace s GUI v MATLABu.

Z hlediska některých nedokonalostí vyvinutých nástrojů, uvedených v dílčích sekcích textu, je vhodné se v budoucí práci zabývat jejich zdokonalením a rozšířením. Primárně je pak cílem zabývat se vhodnou filtrací a minimalizací ztrát měřených dat. Zejména pak nástroj `serialSynch` optimalizovat pro menší časové intervaly mezi jednotlivými zprávami.

Pro odhad polohy z naměřených úhlů byla představena kapitola zabývající se algoritmy pro odhad polohy. Uvedené estimátory byly popsány nejdříve obecně a následně aplikovány na náš problém lokalizace pomocí metody AoA.

Jedním z hlavních cílů práce bylo provést přesnější měření v bezodrazové komoře a vypočíst korekční vztahy umožňující zkorigování měření na chování samotných kotev. Z důvodu systematické chyby při měření způsobené nepřesným zaměřením roviny natočení kotev tyto vztahy však nebyly v této práci využity.

Na závěr byly ověřeny dříve uvedené algoritmy pro odhad polohy ve dvou konstelacích – menší v naší laboratoři a větší v halových laboratořích. Přesnost systému byla výrazně ovlivněna dvěma hlavními problémy. Chybělo přesné zaměření natočení referenční roviny kotvy, což způsobilo systematickou chybu v odhadované poloze. Druhým složitějším problémem byl vliv vícecestného šíření vysílaného signálu, což vedlo k většímu množství shluků odhadovaných poloh při statických měřeních.

Výsledky lokalizace ve 2D pomocí metody AoA implementované v technologii Bluetooth nám dávají představu směřování budoucí práce. Můžeme konstatovat, že přesnost lokalizačního systému je pod 1 m, avšak při vyřešení jistých problémů je možné se dostat až pod 0,5 m. Mimo jiné se budoucí práce bude zaměřovat lokalizací v prostoru (3D) a možnou fúzí s jinými lokalizačními systémy (např. UWB).

Seznam zkratek

Zkratka	Význam
AoA	Angle of Arrival
AoD	Angle of Departure
BK	Bezodrazová komora
BLE	Bluetooth Low Energy
BT	Bluetooth
CDF	Comulative Distribution Function
CTE	Constant Tone Extension
DF	Direction Finding
DoA	Direction of Arrival
DoP	Dilution of Precision
DPS	Deska plošných spojů
EKF	Extended Kalman filter
GNSS	Global Navigation Satellite System
GUI	Graphical User Interface
HCI	Host Controller Interface
IPS	Indoor Positioning System
IQ	In-phase and Quatrature samples
ISM pásmo	Industrial, scientific and medical – bezlicenční pásmo
KF	Kalman filter
LM	Levenberg-Marquardtova metoda
LoS	Line of Sight
LS	Least Squares
LSM	Least Squares Method
MCU	Microcontroller
ML	Maximum Likelihood
MLE	Maximum Likelihood Estimation
MSE	Mean Squared Error
NLoS	Non Line of Sight
NLS	Non-linear Least Squares
NR	Newton-Raphsonova metoda
PDF	Probability Density Function
PF	Particle filter
PSD	Power Spectral Density
RMSE	Root Mean Squared Error
RSSI	Recieved Signal Strength Indication
RTLS	Real Time Location System
SDK	Software Development Kit
SoC	System on Chip
TDoA	Time Difference of Arrival

Symbol	**Význam**
ToA	Time of Arrival
UCA	Uniform Circular Array
UKF	Unscented Kalman filter
ULA	Uniform Linear Array
URA	Uniform Rectangular Array
UWB	Ultra-Wideband
WGN	White Gaussian Noise
XPLR-AOA	vývojový kit od společnosti u-blox

Seznam symbolů

Symbol	Význam
a	Přepona pravoúhlého trojúhelníka
α	Obecný hledaný úhel pro úhloměrné metody
	Úhel od referenční roviny x ke spojnici kotva-tag
	Měřený úhel aplikovaný na metodu AoA
	Koeficient velikosti koroku pro metodu největšího spádu
α'	Doplňkový úhel ($180° = \alpha + \alpha'$)
b	Přepona pravoúhlého trojúhelníka
β	Úhel od referenční roviny x k normále kotvy $\boldsymbol{n}$
c_λ	Koeficient úpravy parametru tlumení λ
$\cos(\cdot)$	Funkce kosinus, inverzní funkcí je $\arccos(\cdot)$
d	Vzdálenost mezi sousedními anténami
D	Největší rozměr struktury antény
$\mathrm{Diag}(\cdot)$	Diagonální matice; mimo diagonálu jsou prvky nulové
$\mathbb{E}[\cdot]$	Střední hodnota náhodné proměnné X
$\mathbf{F}$	Matice přechodu stavu; Jacobiho matice linearizující model procesu v daném bodě
$\mathbf{H}$	Matice měření; Jacobiho matice linearizující model měření
i	Obecný index
	Imaginární jednotka; $i = \sqrt{-1}$
$\mathbb{I}$	Jednotková matice
$\mathbf{J}_f$	Jacobiho matice funkce f
k	Aktuální iterace
$k_{\max}$	Maximální počet iterací
$\mathbf{K}$	Kalmanův zisk
l	Aktuální krok, ve které se prování $k_{\max}$ iterací nad daným datasetem
$l_{\max}$	Maximální počet kroků daná velikostí množiny měřených datasetů
λ	Vlnová délka
	Koeficient tlumení v Levenberg-Marquardtově iterativní metodě
$\lim_{n->\infty} \cdot$	Limita funkce jdoucí do nekonečna
m	maximální hodnota dané množiny
μ	Numericky spočtená střední hodnota
n	Maximální počet realizací náhodné proměnné X
	Maximální hodnota dané množiny
$\boldsymbol{n}$	Normála kotvy
N	Největší počet kotev
p	Pravděpodobnost realizace náhodné proměnné
$p(t)$	Polynom stupně t
P	Výkon

Symbol	Význam
$\mathbf{P}$	Kovarianční matice stavu
Φ	Nastavený (reálný) úhel elevace
ϕ	Naměřený úhel elevace
φ	Fázový rozdíl mezi přijímanými signály
$\mathbf{Q}$	Kovarianční matice stavu
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{u}}$	Poloha uživatele (tagu)
R	Vzdálenost mezi vysílačem a přijímačem
R^2	Koeficient determinace
$\mathbf{R}$	Kovarianční matice měření
ρ	Hodnoty reziduálů (odchylek)
$\mathbb{R}^{n,k}$	prostor reálných proměnných o n rovnicích a k proměnných
S	Numericky spočtená směrodatná odchylka
$\mathbf{S}$	Kovariance inovací
σ	Směrodatná odchylka
$\sin(\cdot)$	Funkce sinus, inverzní funkcí je $\arccos(\cdot)$
$^{\mathrm{T}}$	Transpozice
$\tan(\cdot)$	Funkce tangens, inverzní funkcí je $\arctan(\cdot)$, popř. využívaná $\mathrm{atan2}(\cdot)$
Θ	Nastavený (reálný) úhel azimutu
θ	Měřený úhel azimutu
	Úhel od normály kotvy k spojnici kotva-tag (měřený úhel vývojovým kitem XPLR-AOA-2)
$\boldsymbol{v}$	Vektor šumu měření
V	Numericky spočtený rozptyl
$\mathrm{Var}[\cdot]$	Rozptyl (variance); $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\right]$
$\boldsymbol{w}$	Vektor šumu procesu
$\boldsymbol{x}$	Odhad parametru
	Realizace náhodné proměnné náhodné proměnné X s příslušnými pravděpodobnostmi p
x_{u}	x-ová souřadnice uživatele (tagu)
x_i	x-ová souřadnice kotvy
$\boldsymbol{x}$	Vektor parametrů
	Stav systému
$\boldsymbol{x}^{(k)}$	Hodnota parametru v aktuálním kroku k
$\tilde{\boldsymbol{x}}$	Předpovídaná hodnota parametru $\boldsymbol{x}$
$\check{\boldsymbol{x}}$	Korekční hodnota parametru $\boldsymbol{x}$
$\hat{\boldsymbol{x}}$	Odhad parametrů
$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\|k-1}$	*A priori* hodnota stavu v predikčním kroku
$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\|k}$	*A posteriori* hodnota stavu v korekčním kroku
X	Náhodná proměnná
y_{u}	y-ová souřadnice uživatele (tagu)
y_i	y-ová souřadnice kotvy
$\boldsymbol{y}$	Vektor měření (např. měřené úhly)
$\tilde{\boldsymbol{y}}$	Předpovídaná měření $\boldsymbol{y}$
$\check{\boldsymbol{y}}$	Korekční hodnota měření $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{z}$	Vektor měření

Symbol	Význam
$\hat{\boldsymbol{z}}$	Vektor reziduálů
(a, b)	Otevřený interval; pro všechna $x \in (a, b)$ znamená $a < x < b$
$[a, b]$	Uzavřený interval; pro všechna $x \in [a, b]$ znamená $a \leq x \leq b$

Seznam obrázků

2.1 Metoda AoA 4
2.2 Metoda AoD 5
2.3 Určení polohy ve 2D ze dvou změřených úhlů triangulační metodou 6
2.4 Typy anténních polí 7

3.1 Blokové schéma pro určení úhlu příchozího signálu 10
3.2 BLE v5.1 paket včetně CTE 12
3.3 Fáze a amplituda určující I, Q soustavu 13
a IQ Diagram 13
b Simulované IQ vzorky 13
3.4 Vývojový kit XPLR-AOA-2 – vlevo tag C209 a vpravo kotva C211 [25] 14
3.5 Příklad scény s rozpoložením jednotlivých prvků 16

4.1 Příklad porovnání dvou boxplotů 19
4.2 Struktura funkcí nástroje `serialSynch` pro zpracování dat z více kotev 21
4.3 Grafické rozhraní nástroje pro ověřování úhlů 23
4.4 Detaily nástroje ověřující úhly BLE scény 25
a Detail výstupu jednotlivých úhlů 25
b Okno umožňující popis dané konstelace 25

5.1 Blokový diagram pro Newton-Raphsonovu metodu 30
5.2 Praktická ukázka iterací pomocí Newton-Raphsonovy metody s jedním datasetem . 31
5.3 Symbolické znázornění cyklu predikce a korekce Kalmanova filtru 37

6.1 Model držáku pro kotvu pro měření v bezodrazové komoře 43
6.2 Měření v bezodrazové komoře pro získání přesných dat 44
a Měření v bezodrazové komoře 44
b Venkovní pracoviště 44
6.3 Závislost střední hodnoty naměřeného azimutu a elevace na skutečné hodnotě úhlů 45
6.4 Závislost rozdílu měřených a nastavených úhlů azimutu a elevace na skutečné hodnotě úhlů. 46
6.5 Lineární proložení naměřené křivky pro azimut 47
6.6 Znázornění odvození constained varianty paraboly 48
6.7 Kvadratické proložení naměřené křivky a bodem [0,0] 49
6.8 Kubické proložení naměřené křivky a bodem [0,0] 50
6.9 Zobrazení 95% predikce chyb na základě měřené sady dat 51
6.10 Naměřené závislosti RSSI pro azimut a elevaci 54

7.1 Měření v laboratoři 58
a Ukázka části konstelace v laboratoři 58
b Detail tagu 58
7.2 Konstelace v halových laboratořích 60

7.3 2D konstelace pro jednotlivá měření (A: Anchors, T: Tags) 61
a Konstelace pro laboratoř 61
b Konstelace pro halové laboratoře 61
7.4 Porovnání naměřených úhlů ve středu konstelace `T1` v halových laboratořích pro případ bez pohybu a s pohybem osob 64
a CDF naměřených úhlů 64
b Boxploty naměřených úhlů 64
7.5 Porovnání chození osob uvnitř konstelace v laboratoři, poloha odhadnuta pomocí EKF 67
a Výsledky bez pohybu osob uvnitř konstelace 67
b Výsledky s pohybem osob uvnitř konstelace 67
7.6 Výsledky odhadů polohy pro statická měření v laboratoři s vyznačeným 95% predikčním intervalem výskytu hodnot 68
a Výsledky statického měření pro Newton-Raphsonovu metodu 68
b Výsledky statického měření pro metodu největšího spádu 68
c Výsledky statického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu 68
d Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr 68
7.7 Výsledky odhadů polohy pro statická měření v halových laboratořích s vyznačeným 95% predikčním intervalem výskytu hodnot 71
a Výsledky statického měření pro Newton-Raphsonovu metodu 71
b Výsledky statického měření pro metodu největšího spádu 71
c Výsledky statického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu 71
d Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr 71
7.8 Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr s nízkými hodnotami $\mathbf{Q}$. 72
7.9 Výsledky odhadů polohy pro dynamická měření č. 11 proti směru hodinových ručiček v halových laboratořích 74
a Výsledky dynamického měření pro Newton-Raphsonovu metodu 74
b Výsledky dynamického měření pro metodu největšího spádu 74
c Výsledky dynamického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu 74
d Výsledky statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr 74
7.10 Výsledky odhadů x-ové a y-ové souřadnice v čase pro dynamická měření č. 11 proti směru hodinových ručiček v halových laboratořích 75
a Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro Newton-Raphsonovu metodu 75
b Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro metodu největšího spádu . 75
c Odhad souřadnic v čase dynamického měření pro Levenberg-Marquardtovu metodu 75
d Odhad souřadnic v čase statického měření pro rozšířený Kalmanův filtr . . . 75

Seznam tabulek

3.1 Nejdůležitější parametry BLE v5.1 11

6.1 Typy měření 41
6.2 Podmínky měření 42
6.3 Výsledky měření 42
6.4 Intervaly použitelnosti korekčních vztahů 51
6.5 Koeficienty determinace pro jednotlivé křivky 52
6.6 Příklad korigovaných úhlů 53

7.1 Souřadnice kotev a bodů reálných pozic tagů v laboratoři 58
7.2 Souřadnice kotev a bodů reálných pozic tagů pro konstelaci v halových laboratořích 60
7.3 Statistické výsledky z měření v laboratoři 66
7.4 Legenda k odhadům polohy pro body T1 a T2 v laboratoři 68
7.5 Statistické výsledky z měření v halových laboratořích 70
7.6 Legenda k odhadům polohy pro body T1 a T2 v halových laboratořích 72

Literatura

1. MOHAGHEGH, Pooneh; Alexis BOEGLI; Yves PERRIARD. Bluetooth Low Energy Direction Finding Principle. In: *2021 24th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)* [online]. 2021, s. 830–834 [cit. 2022-12-07]. Dostupné z DOI: 10.23919/ICEMS52562.2021.9634353.
2. MAUTZ, Rainer. *Overview of current indoor positioning systems* [online]. Zurich, Švýcarsko: Swiss Federal Institute of Technology, 2008 [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/XPLR-AOA-Explorer-kits_UserGuide_UBX-21004616.pdf.
3. WOOLEY, Martin. *Bluetooth Direction Finding: A Technical Overview* [online]. 2021. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: https://www.bluetooth.com/bluetooth-resources/bluetooth-direction-finding/.
4. HAJIAKHONDI-MEYBODI, Zohreh; Mohammad SALIMIBENI; Konstantinos N. PLATANIOTIS; Arash MOHAMMADI. Bluetooth Low Energy-based Angle of Arrival Estimation via Switch Antenna Array for Indoor Localization. In: *2020 IEEE 23rd International Conference on Information Fusion (FUSION)* [online]. 2020, s. 1–6 [cit. 2022-12-05]. Dostupné z DOI: 10.23919/FUSION45008.2020.9190573.
5. ZHANG, Yao; Zhongliang DENG; Yuhui GAO. Angle of Arrival Passive Location Algorithm Based on Proximal Policy Optimization. *Electronics* [online]. 2019, roč. 8, č. 12 [cit. 2022-12-05]. ISSN 2079-9292. Dostupné z DOI: 10.3390/electronics8121558.
6. SESMA SANTOS, Victor; Victor EGOROV. *Improved Accuracy for Indoor Positioning with Bluetooth 5.1: From Theory to Measurements* [online]. 2020. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: https://lup.lub.lu.se/student-papers/search/publication/9027829. Student Paper.
7. ŠIMEK, Petr. *Přesnost systémů rádiového určování polohy.* [Online]. Praha: ČVUT FEL, 2022 [cit. 2022-12-08]. Dostupné z: https://dspace.cvut.cz/handle/10467/101435.
8. J, N. Syazwani C.; Nur Haliza Abdul WAHAB; Noorhazirah SUNAR; Sharifah H. S. ARIFFIN; Keng Yinn WONG; Yichiet AUN. Indoor Positioning System: A Review. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications* [online]. 2022, roč. 13, č. 6 [cit. 2024-01-06]. Dostupné z DOI: 10.14569/IJACSA.2022.0130659.
9. JONDHALE, S. R.; R. S. DESHPANDE; S. M. WALKE; A. S. JONDHALE. Issues and challenges in RSSI based target localization and tracking in wireless sensor networks. In: *2016 International Conference on Automatic Control and Dynamic Optimization Techniques (ICACDOT)* [online]. 2016, s. 594–598 [cit. 2022-12-05]. Dostupné z DOI: 10.1109/ICACDOT.2016.7877655.
10. VEJRAŽKA, František. *Základní radiová navigační zařízení* [skriptum]. Praha: ČVUT FEL, 1979.
11. U-BLOX. *Indoor positioning demo system user guide: Bluetooth indoor positioning* [online]. 2023. [cit. 2023-12-25]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/Bluetooth-Indoor-Positioning_UserGuide_UBX-21006395.pdf.

12. MAZÁNEK, Miloš; Pavel PECHAČ; Jaroslav VOKURKA. *Antény a šíření vln* [skriptum]. 1. vyd. Praha: ČVUT FEL, 1999. ISBN 80-0101855-5.

13. FRIEDLANDER, Benjamin. Localization of Signals in the Near-Field of an Antenna Array. *IEEE Transactions on Signal Processing* [online]. 2019, roč. 67, č. 15, s. 3885–3893 [cit. 2023-12-05]. Dostupné z DOI: 10.1109/TSP.2019.2923164.

14. PAU, Giovanni; Fabio ARENA; Yonas Engida GEBREMARIAM; Ilsun YOU. Bluetooth 5.1: An Analysis of Direction Finding Capability for High-Precision Location Services. *Sensors* [online]. 2021, roč. 21, č. 11 [cit. 2024-01-05]. ISSN 1424-8220. Dostupné z: https://www.mdpi.com/1424-8220/21/11/3589.

15. COMINELLI, Marco; Paul PATRAS; Francesco GRINGOLI. Dead on Arrival: An Empirical Study of The Bluetooth 5.1 Positioning System [online]. 2019, s. 9 [cit. 2024-01-05]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/335908427_Dead_on_Arrival_An_Empirical_Study_of_The_Bluetooth_51_Positioning_System.

16. LI, Guoquan; Enxu GENG; Zhouyang YE; Yongjun XU; Jinzhao LIN; Yu PANG. Indoor Positioning Algorithm Based on the Improved RSSI Distance Model. *Sensors* [online]. 2018, roč. 18, č. 9 [cit. 2024-01-08]. ISSN 1424-8220. Dostupné z DOI: 10.3390/s18092820.

17. U-BLOX. *Webinar: Integrating Bluetooth Direction Finding with u-blox* [online]. 2022. [cit. 2023-10-03]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=vtGhFzs3ZPk.

18. SIG, Bluetooth. *Bluetooth® Wireless Technology: Bluetooth Technology Overview* [online]. [cit. 2023-10-06]. Dostupné z: https://www.bluetooth.com/learn-about-bluetooth/tech-overview/.

19. DIGIKEY. *Use Bluetooth 5.1-Enabled Platforms for Precise Asset Tracking and Indoor Positioning - Part 2* [online]. 2019. [cit. 2023-10-06]. Dostupné z: https://www.digikey.com/en/articles/use-bluetooth-5-1-enabled-platforms-part-2.

20. SCHMIDT, R. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* [online]. 1986, roč. 34, č. 3, s. 276–280 [cit. 2023-10-10]. Dostupné z DOI: 10.1109/TAP.1986.1143830.

21. AOUNALLAH, Naceur. Performance Enhancement of Capon’s DOA Algorithm Using Covariance Matrix Decomposition. *Engineering Proceedings* [online]. 2022, roč. 14, č. 1 [cit. 2023-10-10]. ISSN 2673-4591. Dostupné z DOI: 10.3390/engproc2022014007.

22. PESAVENTO, M.; A.B. GERSHMAN. Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise. *IEEE Transactions on Signal Processing* [online]. 2001, roč. 49, č. 7, s. 1310–1324 [cit. 2023-10-10]. Dostupné z DOI: 10.1109/78.928686.

23. OUSMANE ABDOULAYE OUMAR Ming Fei Siyau, Tariq P. Sattar. Comparison between MUSIC and ESPRIT Direction of Arrival Estimation Algorithms for Wireless Communication Systems. *IEEE* [online]. 2012 [cit. 2023-10-10]. Dostupné z: https://core.ac.uk/download/pdf/227104046.pdf.

24. YE, Hongyun; Biao YANG; Zhiqiang LONG; Chunhui DAI. A Method of Indoor Positioning by Signal Fitting and PDDA Algorithm Using BLE AOA Device. *IEEE Sensors Journal* [online]. 2022, roč. 22, č. 8, s. 7877–7887 [cit. 2023-10-10]. Dostupné z DOI: 10.1109/JSEN.2022.3141739.

25. U-BLOX. *XPLR-AOA-1 and XPLR-AOA-2 explorer kits user guide: Bluetooth direction finding* [online]. 2021. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/XPLR-AOA-Explorer-kits_UserGuide_UBX-21004616.pdf.

26. U-BLOX. *NINA-B41 series data sheet: Stand-alone Bluetooth 5.1 low energy modules* [online]. 2023. [cit. 2023-12-25]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/NINA-B41_DataSheet_UBX-20035327.pdf.

27. U-BLOX. *NINA-B40 series data sheet: Stand-alone Bluetooth 5.1 low energy modules* [online]. 2022. [cit. 2023-12-25]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/NINA-B40_DataSheet_UBX-19049405.pdf.

28. U-BLOX. *XPLR-AOA-2: Bluetooth 5.1 indoor positioning explorer kit with NINA-B4* [online]. 2021. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/XPLR-AOA-2_ProductSummary_UBX-21017999.pdf.

29. HRDZINA, Zdeněk; František VEJRAŽKA. *Signály a soustavy* [skriptum]. 1. vyd. Praha: ČVUT FEL v Praze, 2000. ISBN 80-01-01726-5.

30. THE MATHWORKS, Inc. *Visualize summary statistics with box plot* [online]. [B.r.]. [cit. 2024-01-04]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/stats/boxplot.html.

31. DOWNEY, B. Allen. *Think Stats: Exploratory Data Analysis in Python* [online]. 2. vyd. Needham, Massachusetts, USA: Green Tea Press, 2014 [cit. 2023-12-28]. ISBN 1491907339. Dostupné z: https://greenteapress.com/thinkstats2/thinkstats2.pdf.

32. MICROSOFT. *Winbase.h dokumentace* [online]. [B.r.]. [cit. 2023-12-26]. Dostupné z: https://learn.microsoft.com/en-us/windows/win32/api/winbase/.

33. THE SINGLE UNIX ® SPECIFICATION, Version 2. *Pthread.h dokumentace* [online]. [B.r.]. [cit. 2023-12-26]. Dostupné z: https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/7908799/xsh/pthread.h.html.

34. NAVRÁTIL, Václav. *Positioning and Data Fusion Algorithms for Radionavigation Systems* [online]. Praha: ČVUT FEL, 2019 [cit. 2022-12-18]. Dostupné z: https://dspace.cvut.cz/handle/10467/84646.

35. VELEBIL, Jiří. *Abstraktní a konkrétní lineární algebra* [online]. Praha: ČVUT FEL, 2022 [cit. 2022-12-18]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/akla.html.

36. KAY, Steven. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory* [kniha]. 1. vyd. New Jersey, USA: Prentice Hall PTR, 1993. ISBN 0-13-345711-7.

37. FLOATER, Michael. *Lecture 13: Non-linear least squares and the Gauss-Newton method* [online]. Univerzita v Oslu, 2018 [cit. 2023-01-22]. Dostupné z: https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT3110/h19/undervisningsmateriale/lecture13.pdf.

38. GAVIN, P. Henri. The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems [online]. 2022 [cit. 2023-12-17]. Dostupné z: https://people.duke.edu/~hpgavin/ExperimentalSystems/lm.pdf.

39. DOBEŠ, Josef; Václav ŽALUD. *Moderní radiotechnika* [kniha]. 1. vyd. Praha: Technická literatura BEN, 2006. ISBN 80-7300-132-2.

40. SIMON, Dan. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞, and Nonlinear Approaches* [kniha]. 1. vyd. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN 9780471708582.

41. KALMAN, Rudolph Emil. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering* [online]. 1960, roč. 82, č. Series D, s. 35–45 [cit. 2024-01-06]. Dostupné z: https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/kalmanPaper.html.

42. WELCH, Greg; Gary BISHOP. An Introduction to The Kalman Filter: SIGGRAPH 2001, Course 8 [online]. 2001 [cit. 2023-12-18]. Dostupné z: https://sreal.ucf.edu/wp-content/uploads/2017/02/Welch2001.pdf.

43. ANDRADE-CETTO, Juan. The Kalman Filter [online]. 2005 [cit. 2024-01-01]. Dostupné z: https://digital.csic.es/bitstream/10261/30069/1/doc1.pdf.

44. ZANETTI, Renato; Kyle J. DEMARS. Joseph Formulation of Unscented and Quadrature Filters with Application to Consider States [online]. 2012 [cit. 2024-01-01]. Dostupné z: https://sites.utexas.edu/renato/files/2017/04/CUKF_ver06.pdf.

45. QIAN, M.; K. ZHAO; A. SENEVIRATNE; B. LI. Performance Analysis of BLE 5.1 New Feature Angle of Arrival for Relative Positioning. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences* [online]. 2022, roč. XLVI-3/W1-2022, s. 155–161 [cit. 2024-01-08]. Dostupné z DOI: 10.5194/isprs-archives-XLVI-3-W1-2022-155-2022.

46. SAMBU, Pradeep; Myounggyu WON. An Experimental Study on Direction Finding of Bluetooth 5.1: Indoor vs Outdoor. In: *2022 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)* [online]. 2022, s. 1934–1939 [cit. 2024-01-08]. Dostupné z DOI: 10.1109/WCNC51071.2022.9771930.

47. U-BLOX. *XPLR-AOA-3 user guide: Evaluation kit for ANT-B10 antenna boards* [online]. 2022. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: https://content.u-blox.com/sites/default/files/documents/ANT-B10_UserGuide_UBX-22006906.pdf.

48. DUFOUR, Jean-Marie. Coefficients of determination [online]. 2011, s. 14 [cit. 2024-01-05]. Dostupné z: https://jeanmariedufour.github.io/ResE/Dufour_1983_R2_W.pdf.

49. KYURKCHIEV, Nikolay; Svetoslav MARKOV. *Sigmoid functions: Some approximation, and modelling aspects* [online]. 2015. [cit. 2023-12-17]. Dostupné z: https://biomath.bg/s%20markov%20publications/B2015-Kyurkchiev_Markov_Lambert.pdf.

50. MELIA, Gregory C. R. *Electromagnetic Absorption by the Human Body from 1 to 15 GHz* [online]. York: The University of York, UK, 2013 [cit. 2024-01-08]. Dostupné z: https://core.ac.uk/download/pdf/18451914.pdf.

51. KOUTRIS, Aristotelis; Theodoros SIOZOS; Yannis KOPSINIS; Aggelos PIKRAKIS; Timon MERK; Matthias MAHLIG; Stylianos PAPAHARALABOS; Peter KARLSSON. Deep Learning-Based Indoor Localization Using Multi-View BLE Signal. *Sensors* [online]. 2022, roč. 22, č. 7 [cit. 2024-01-08]. ISSN 1424-8220. Dostupné z DOI: 10.3390/s22072759.