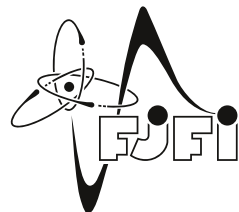




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Dynamika křivek v rovině a prostoru a její aplikace

Curve Dynamics in Plane and Space and Its Applications

Bakalářská práce

Autor: **Petr Filip**

Vedoucí práce: **prof. Dr. Ing. Michal Beneš**

Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Petr Filip
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní specializace: Matematická informatika
Název práce (česky): Dynamika křivek v rovině a prostoru a její aplikace
Název práce (anglicky): Curve Dynamics in Plane and Space and Its Applications

Pokyny pro vypracování:

- 1) Prostudujte matematické vlastnosti difuzních rovnic.
- 2) Prostudujte základy popisu křivek v rovině a prostoru a možnosti řešení rovnic, které tyto křivky určují.
- 3) Seznamte se se základními pojmy diferenciální geometrie potřebnými pro popis křivek a jejich pohybu.
- 4) Seznamte se s jednotlivými druhy pohybu křivek v rovině a prostoru a s oblastmi jejich použití v přírodních vědách.
- 5) Seznamte se s metodami pro numerické řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic popisujících dynamiku křivek.
- 6) Zahajte vývoj analytických a numerických metod pro zkoumání dynamiky křivek v rovině a prostoru.

Doporučená literatura:

- 1) F. Cao, Geometric Curve Evolution and Image Processing. Springer, Berlin, 2003.
- 2) M. A. Grayson, Shortening Embedded Curves. Annals of Mathematics, 129, 1989, 71-111.
- 3) Beneš M., Feireisl E., Eds., Topics in mathematical modeling. Jindřich Nečas Center for Mathematical Modelling, Lecture Notes 4, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, Prague, 2008.
- 4) P. Kaplický, Š. Nečasová, Topics on partial differential equations, Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes 2, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, Prague, 2007.
- 5) G. Dziuk, K. Deckelnick, Numerical approximations of mean curvature flow of graphs and level sets. In: L. Ambrosio, K. Deckelnick, G. Dziuk, M. Mimura, V. A. Solonnikov, H. M. Soner (eds): Mathematical aspects of evolving interfaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2003 - Lecture Notes in Mathematics 1812, 53-87.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Trojanova 13,
120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

.....
B
garant oboru

.....
Mankon
vedoucí katedry



.....
V. A.
děkan

Poděkování:

Rád bych zde poděkoval prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za jeho trpělivost, ochotu, poskytnuté materiály a cenné rady, které mi věnoval při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 8. ledna 2023

Petr Filip

Název práce:

Dynamika křivek v rovině a prostoru a její aplikace

Autor: Petr Filip

Studijní program: Matematické inženýrství

Studijní specializace: Matematická informatika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Cílem práce je prozkoumat problematiku diferenciálních rovnic popisujících pohyb křivek v rovině a prostoru. V úvodu je řešena rovnice difuze jako související problém. Dále jsou zavedeny potřebné definice a představeny teoretické výsledky týkající se vlastností řešení pohybu podle křivosti. V textu jsou dále popsány různé druhy pohybu, přístupy k numerickému výpočtu a příklady aplikací. V poslední části je parametrickou metodou numericky řešena úloha normálového pohybu podle křivosti. V příkladech je využita tangenciální redistribuce pro větší numerickou stabilitu.

Klíčová slova: křivky, parametrická metoda, pohyb podle křivosti, pohyb ve směru normály, tangenciální redistribuce

Title:

Curve Dynamics in Plane and Space and Its Applications

Author: Petr Filip

Abstract: The aim of this theses is to investigate the problem of differential equations describing the motion of curves in plane and space. In the introduction, the difusion equation is solved as a related problem. In the following the necessary definitions and theoretical results concerning the properties of the solution of the motion by curvature are presented. Different types of motion, approaches to numerical computation and examples of applications are also described. In the last section, the problem of normal motion of curves by the curvature is numerically solved by a parametric method. Tangential redistribution is used in the examples for greater numerical stability.

Key words: curves, parametric approach, curvature driven motion, motion in the normal direction, tangential redistribution

Obsah

Úvod	8
1 Rovnice difuze a pojmy diferenciální geometrie křivek	9
1.1 Rovnice difuze	9
1.1.1 Analytické řešení v 1D	9
1.1.2 Princip maxima	13
1.2 Popis křivek v rovině a prostoru	14
1.2.1 Geometrie křivek v rovině	16
1.2.2 Geometrie křivek v prostoru	18
2 Rovnice dynamiky křivek	20
2.1 Pohyb podle křivosti v rovině	20
2.1.1 Existence a vlastnosti řešení	20
2.1.2 Globální veličiny	22
2.2 Další druhy evoluce křivek v rovině	26
2.2.1 Willmorův tok	26
2.2.2 Hyperbolický pohyb podle křivosti	26
2.2.3 Geodetický tok podle křivosti	26
2.3 Dynamika křivek v prostoru	27
2.3.1 Pohyb podle binormály	28
2.3.2 Pohyb podle normály v prostoru	28
2.4 Metody řešení dynamiky křivek	28
2.4.1 Parametrická metoda	28
2.4.2 Vrstevnicová metoda	29
2.5 Dynamika křivek v aplikacích	31
2.5.1 Zpracování obrazu	31
2.5.2 Polymerová nanovlákná	31
2.5.3 Nitrobuněčné struktury	32
3 Numerické řešení úloh dynamiky křivek	34
3.1 Metoda konečných diferencí	34
3.2 Role vnější síly	35
3.2.1 Pohyb zachovávající obsah	35
3.2.2 Pohyb zachovávající délku	36
3.3 Volba tangenciální rychlosti	37
3.3.1 Lokální redistribuce	37
3.3.2 Uniformní redistribuce	38

4	Výpočetní studie	41
4.1	Analytické řešení pohybu podle křivosti	41
4.1.1	Řád konvergence	42
4.2	Příklady vývoje křivek ve 2D	46
4.2.1	Použití redistribuce	48
4.3	Příklady pohybu v prostoru	51
	Závěr	54

Úvod

Práce představuje úvod do rovnic dynamiky křivek a jejich řešení. Tato oblast diferenciální geometrie nachází využití v různých úlohách – modelování fázových přechodů s volnou hranicí, modelování materiálových dislokací, dále například při zpracování obrazu nebo modelování nanovláken. Jako související úlohu s dobře prozkoumanými vlastnostmi nejprve řešíme rovnici difuze, která má některé vlastnosti podobné pohybu křivek podle křivosti. V další části zavádíme používané definice z geometrie křivek. Jsou představeny teoretické výsledky týkající se zejména pohybu podle křivosti ve směru normály v rovině. Část textu je věnována výčtu různých druhů dynamiky křivek, například geodetickému toku podle křivosti.

Problémy z různých oblastí lze reprezentovat pohybem křivek. V této práci zmiňujeme práce [27], [36], [37] týkající se pohybu nanovláken při jejich výrobě. Dále v [25], [26] je popsán vznik tubulárních nitrobuněčných struktur nebo v [4], [23] jsou křivky použity při zpracování obrazu. Další aplikace se týkají například materiálových dislokací [22], [16]. Pozornost byla věnována numerickému řešení pohybu podle křivosti ve směru normály ve tvaru

$$\partial_t x = (k + F)\mathbf{n} + \alpha \mathbf{t}. \quad (1)$$

Konkrétně byl použit parametrický přístup s využitím lokální nebo uniformní tangenciální redistribuce. V poslední kapitole jsou schémata představena na příkladech rovinných a prostorových křivek s použitím různých typů redistribuce a silového členu. Výsledky jsou také porovnávány s analytickými řešeními pomocí řádu konvergence.

Kapitola 1

Rovnice difuze a pojmy diferenciální geometrie křivek

V této kapitole prozkoumáme vlastnosti rovnice difuze. Jedná se o úlohu podobného typu, jako jsou rovnice popisující vývoj křivek, takže slouží jako úvod k úkolům této práce. V dalších částech se budeme zabývat pojmy z diferenciální geometrie křivek v rovině a prostoru.

1.1 Rovnice difuze

Rovnice difuze je parabolická diferenciální rovnice popisující makroskopické chování částic vykazujících Brownův pohyb. Stejná rovnice popisuje také šíření tepla, někdy proto používáme název rovnice vedení tepla. Podrobné odvození výsledného tvaru rovnice lze nalézt v [34]. V jednorozměrném případě v homogenním prostředí má tato rovnice tvar

$$\partial_t u = D\Delta u. \quad (1.1)$$

$u = u(x, t)$ představuje koncentraci částic v prostoru a čase a D je difuzní koeficient, který je v homogenním prostředí konstantní.

1.1.1 Analytické řešení v 1D

Řešení rovnice difuze najdeme pro jednorozměrný případ s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Příslušná smíšená úloha bude ve tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t u &= D\partial_x^2 u, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde $0 \leq x \leq l$ a $0 \leq t \leq T$. Podrobný popis metody řešení lze nalézt v [34]. Budeme postupovat metodou separace proměnných. Navrhujeme formálně řešení ve tvaru

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

kde $X(x)$ a $T(t)$ jsou funkce jedné proměnné někde různé od nuly. Dosazením do (1.2) dostaneme

$$X(x)\dot{T}(t) = DX''(x)T(t).$$

Vydělením rovnice výrazem $DX(x)T(t) \neq 0$ dostaneme

$$\frac{1}{D} \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Obě strany rovnice tedy budou rovny nějaké konstantě λ . Získáváme tak dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ \dot{T} + D\lambda T &= 0 \end{aligned}$$

s okrajovými podmínkami

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Řešení $X(x)$ bude v obecném tvaru

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z tvaru okrajových podmínek určíme, jakých hodnot může nabývat λ .

- Pro $\lambda < 0$ dostaneme pouze triviální řešení. Stačí dosadit do okrajových podmínek, pak totiž dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} \left(e^{2\sqrt{-\lambda}l} - 1 \right) &= 0, \end{aligned}$$

kde ale $\sqrt{-\lambda}l > 0$, tedy druhá rovnost neplatí pro netriviální řešení.

- Pro $\lambda = 0$ dostáváme řešení ve tvaru lineární funkce, která nemůže splnit obě okrajové podmínky najednou.
- Zbývá případ $\lambda > 0$. Pak dostaneme řešení ve tvaru komplexních exponenciálních funkcí, které můžeme převést na vhodný součet sinů a cosinů

$$X(x) = A \sin(x\sqrt{\lambda}) + B \cos(x\sqrt{\lambda}).$$

Dosazením do okrajových podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} X(0) &= B = 0, \\ X(l) &= A \sin(l\sqrt{\lambda}) = 0, \end{aligned}$$

kde netrivialitu řešení splníme pouze pro $A \neq 0$. Hodnoty λ pak mají tvar

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Abychom našli tvar kompletního řešení, zbývá určit tvar $T(t)$. Vyřešením druhé rovnice

$$T(t) = C e^{-D\lambda t}.$$

Dosazením za λ z postupu výše dostaneme řešení

$$T_n(t) = \hat{C}_n e^{-D\sqrt{\lambda_n}t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Homogenní řešení splňující okrajové podmínky pro $u(x, t)$ získáme zpětným dosazením (označíme $C_n = A_n \hat{C}_n$)

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (1.3)$$

Lineární kombinací těchto výrazů získáme také homogenní řešení, proto formálně navrhneme celkové řešení ve tvaru řady. Tato řada je řešením, pokud konverguje a lze ji derivovat dvakrát podle x a jednou podle t .

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Koeficienty C_n hledáme tak, abychom splnili počáteční podmínku, tj.

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Rozvinutím $\varphi(x)$ v sinovou řadu na $[0, l]$ bychom dostali

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi. \quad (1.4)$$

Pokud $\varphi(x)$ splňuje podmínky

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0,$$

a φ je spojitá s po částech spojitou derivací na $[0, l]$, pak řada (1.4) stejnoměrně konverguje na $[0, l]$ k $\varphi(x)$ podle Jordanovy věty.

Dále vidíme, že $C_n = A_n$, tedy C_n budou koeficienty Fourierovy řady $\varphi(x)$ na intervalu $[0, l]$. Takto předepsaná řada skutečně konverguje a má i příslušné derivace, jak se lze dočíst v [34]. Dostáváme celkové řešení pro (1.2)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi. \quad (1.5)$$

Záměnou sumy a integrálu (při důkazu stejnoměrné konvergence byla nalezena i integritabilní majoranta [34]) získáme tvar

$$u(x, t) = \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) \varphi(\xi) d\xi.$$

Označme

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right),$$

kde $G(x, \xi, t)$ se nazývá Greenova funkce. S upraveným značením pro $u(x, t)$ dostaneme

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Dále se zabýváme obecnějším případem rovnice (1.2), kdy na pravé straně budeme uvažovat zdrojový člen.

$$\begin{aligned}\partial_t u &= D\partial_x^2 u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0,\end{aligned}\tag{1.6}$$

Využijeme postupu pro řešení homogenní úlohy. Najdeme funkci splňující rovnici s pravou stranou a nulovou počáteční podmínkou. Celkový výsledek pak bude superpozicí těchto řešení. Úloha s nulovou počáteční podmínkou má tvar

$$\begin{aligned}\partial_t u &= D\partial_x^2 u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Řešení budeme hledat ve tvaru rozvoje podle $\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ (podrobnosti v [34])

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Hledáme tak koeficienty $u_n(t)$. Rozvineme pravou stranu, tedy funkci $f(x, t)$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

kde koeficienty $f_n(t)$ jsou ve tvaru

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) \xi \, d\xi.$$

Dosadíme do (1.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) - D \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Vytknutím získáme tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(t) - D \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

ze kterého porovnáním koeficientů u jednotlivých členů řad dostaneme obyčejné diferenciální rovnice pro $u_n(t)$

$$\dot{u}_n(t) = - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D u_n(t) + f_n(t)$$

s počátečními podmínkami $u_n(0) = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$, které bychom zjistili dosazením. Vyřešením těchto rovnic dostaneme

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D(t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau, \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Dosazením dojdeme k tvaru

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 D(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right),$$

který dále upravíme dosazením za $f_n(t)$, záměnou sumy a integrálu a poté využitím značení Greenovy funkce

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 D(t-\tau)} \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) d\xi d\tau \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \\ &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 D(t-\tau)} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Celkové řešení rovnice (1.6) je pak superpozicí homogenního řešení s netriviální počáteční podmínkou a řešení s pravou stranou s nulovou počáteční podmínkou

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

1.1.2 Princip maxima

V této sekci dokážeme princip maxima pro rovnici difuze na omezeném intervalu, který lze dále využít pro vyšetřování vlastností rovnice. Uvažujeme úlohu bez pravé strany s Dirichletovými okrajovými a počátečními podmínkami, tedy uvažujeme spojitou funkci u definovanou pro $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ a splňující

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= D \partial_x^2 u(x, t) && \text{na } (0, l) \times (0, T], \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{pro } x \in (0, l), \\ u(0, t) &= g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), && t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Věta 1 (Princip maxima). Pro funkci u splňující rovnici (1.9) platí následující tvrzení:

$$u(x, t) \leq \max \left\{ u_0(x), g_1(t), g_2(t) \mid x \in [0, l], t \in [0, T] \right\}, \text{ na } (0, l) \times (0, T].$$

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Označme

$$\begin{aligned} M &:= \max \left\{ u_0(x), g_1(t), g_2(t) \mid x \in [0, l], t \in [0, T] \right\}, \\ m &:= \max \left\{ u(x, t) \mid (x, t) \in (0, l) \times (0, T] \right\}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $m > M$, tedy existuje bod $(x_0, t_0) \in (0, l) \times (0, T]$ tak, že $m = u(x_0, t_0)$. Definujme pomocnou funkci v

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon(x - x_0)^2,$$

přičemž ε je pozitivní číslo, které volíme tak, že

$$M_1 := \max\{v(x, t) \mid x = 0 \vee x = l \vee t = 0\} < m_1 := \max\{v(x, t) \mid (x, t) \in (0, l) \times (0, T]\}.$$

Všimneme si, že

$$\begin{aligned} m_1 &\geq m, \\ M_1 &\leq M + \varepsilon l^2. \end{aligned}$$

Tedy podmínka $M_1 < m_1$ platí, pokud $M + \varepsilon l^2 < m$. Vyjádřením ε dostaneme

$$0 < \varepsilon < \frac{m - M}{l^2}.$$

Pro hodnotu funkce v v bodě (x_0, t_0) dostáváme

$$v(x_0, t_0) = m + \varepsilon(x_0 - x_0) = m.$$

Hodnoty v případech, že $x = 0$, $x = l$ nebo $t = 0$, můžeme shora odhadnout

$$v(x, t) \leq M + \varepsilon(x - x_0)^2 < M + \frac{m - M}{l^2} l^2 = m.$$

Maximum funkce v je tedy větší nebo rovno než m a je nabýváno mimo krajní body a počáteční okamžik. Nechť se maximální hodnota nabývá v bodě (x_1, t_1) , kde $0 < x_1 < l$, $0 < t \leq T$.

Z vlastností maxima dostatečně diferencovatelné funkce vyplývá

$$\partial_x v(x_1, t_1) = 0, \quad \partial_t v(x_1, t_1) \geq 0, \quad \partial_x^2 v(x_1, t_1) \leq 0,$$

kdy v případě $t_1 < T$ bude $\partial_t u(x_1, t_1) = 0$, v případě, že $t_1 = T$, může být $\partial_t u(x_1, t_1) \geq 0$. Poslední ze tří nerovností vyplývá z negativní semidefinitnosti Hessovy matice a Sylvestrova kritéria. V obou případech hodnoty t_1 dostáváme

$$0 \leq \partial_t v - D\partial_x^2 v = \partial_t u - D\partial_x^2 u - 2D\varepsilon = -2D\varepsilon < -2D\frac{m - M}{l^2},$$

to by ale znamenalo $M > m$, což je spor s předpokladem $M < m$. □

1.2 Popis křivek v rovině a prostoru

Cílem této části je představit pojmy používané pro popis křivek a jejich vývoje v rovině a prostoru.

Definice 1. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a γ spojitě zobrazení, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak γ nazýváme **parametricky zadanou křivkou**. Obraz $\Gamma := \gamma(I)$ nazýváme **stopa křivky** γ .

Definice 2. Křivku $\gamma \in C^1(I)$ nazveme **regulární**, pokud $|\gamma'(u)| \neq 0$, pro všechna $u \in I$.

Definice 3. Křivka γ je **prostá**, pokud γ je prosté zobrazení.

Definice 4. Křivka γ definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je **uzavřená**, pokud $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definice 5. Křivka γ se nazývá **Jordanova**, pokud je uzavřená a prostá až na počáteční a koncový bod.

Křivku se stejnou stopou lze popsat různými parametrizacemi, jedna má však mezi nimi speciální postavení.

Definice 6. Nechť $\gamma \in C^1(I)$ křivka. Řekneme, že γ je **přirozeně parametrizovaná**, pokud pro všechna $s \in I$ platí $|\gamma'(s)| = 1$, kde $|\cdot|$ značí eukleidovskou normu v \mathbb{R}^n .

Přirozeně parametrizovaná křivka je tedy regulární. V následujícím tvrzení můžeme pozorovat, že přirozená parametrizace každému bodu na křivce přiřazuje délku oblouku.

Věta 2. Každou regulární křivku lze přirozeně reparametrizovat.

Důkaz. Mějme libovolně parametrizovanou C^1 křivku γ definovanou na intervalu I . Nechť bez újmy na obecnosti $I \subset \mathbb{R}_0^+$ a I obsahuje nulu. Označme s funkci definovanou jako délku oblouku od $\gamma(0)$ do $\gamma(u)$ pro libovolné $u \in I$. Tedy

$$s(u) = \int_0^u |\gamma'(\hat{u})| d\hat{u}, \quad \text{pro všechna } u \in I.$$

Derivací s podle u dostáváme

$$\frac{ds}{du} = |\gamma'(u)| > 0.$$

Funkce $s(u)$ je tedy na I ostře rostoucí, a proto i prostá. Existuje tedy inverzní funkce $u : s(I) \rightarrow I$. Uvažujme tedy křivku γ parametrizovanou u funkcí od s . Pak pro derivaci γ podle s dostáváme s využitím věty o derivaci inverzní funkce v \mathbb{R}

$$\left(\gamma(u(s))\right)' = \gamma'(u) \frac{du}{ds} = \gamma'(u) \frac{1}{\frac{ds}{du}} = \gamma'(u) \frac{1}{|\gamma'(u)|}.$$

Pro velikost pak platí

$$\left| \frac{d\gamma(u(s))}{ds} \right| = \frac{|\gamma'(u)|}{|\gamma'(u)|} = 1, \quad \text{pro všechna } s \in s(I).$$

$\gamma(u(s))$ je tedy přirozeně parametrizovaná. □

Z důkazu vyplývá užitečný vztah mezi derivací podle obecné a podle přirozené parametrizace. Pokud místo γ budeme derivovat libovolnou funkci $g(u(s))$ podle s , dostaneme

$$\frac{dg}{ds} = \left(\frac{dg}{du} \right) \frac{1}{|\gamma'(u)|}.$$

Odtud plyne

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\gamma'(u)|} \frac{d}{du}.$$

1.2.1 Geometrie křivek v rovině

V rovině můžeme u uzavřených křivek rozlišit vnějšek a vnitřek, jak popisuje následující věta.

Věta 3 (Jordan). Nechť $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka. Pak $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ má právě dvě souvislé komponenty, jedna je omezená a druhá neomezená.

Neomezenou komponentu nazýváme **vnějšek křivky** a značíme $\text{ext}(\Gamma)$, omezenou komponentu nazýváme **vnitřek křivky** a značíme $\text{int}(\Gamma)$.

Dále můžeme zkoumat konvexní křivky.

Definice 7. Křivka $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá **konvexní**, pokud pro všechna $u_1, u_2 \in I$ a $\alpha \in (0, 1)$ platí

$$\alpha\gamma(u_1) + (1 - \alpha)\gamma(u_2) \in \text{int}(\Gamma) \cup \Gamma.$$

Pro další postup zavedeme tečný a normálový vektor v bodě.

Definice 8. Mějme γ regulární křivku. **Jednotkový tečný vektor** definujeme jako derivaci křivky podle přirozeného parametru, tedy $\mathbf{T} = \frac{d\gamma}{ds}$. Dále definujeme **jednotkový normálový vektor** tak, že je kolmý na \mathbf{T} a splňuje podmínku $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = 1$.

Poznámka (Orientace normály). Pokud je tečný vektor ve tvaru $\mathbf{T} = (a, b)$ a odpovídá křivce s kladnou orientací, pak normálový vektor \mathbf{N} má složky $(-b, a)$ a odpovídá vnitřní normále. Pokud bychom naopak zvolili vektor kolmý na \mathbf{T} tak, že splňuje podmínku $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = -1$, pak by byl ve tvaru $\tilde{\mathbf{N}} = (b, -a)$ a dostali bychom vnější normálu.

Dále odvodíme vztahy pro derivace tečného a normálového vektoru. Pro velikost tečného vektoru máme

$$|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1.$$

Zderivujeme tuto identitu podle přirozeného parametru

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{T},$$

tedy pro libovolný bod parametrizace s existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že $\frac{d}{ds}\mathbf{T} = k\mathbf{N}$.

Podobně budeme postupovat pro normálový vektor, kdy navíc využijeme, že tečný a normálový vektor jsou na sebe kolmé

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Derivujeme první rovnici podle s

$$2\mathbf{N} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{N} = 0,$$

Pro libovolné s tak existuje číslo m tak, že $\frac{d}{ds}\mathbf{N} = m\mathbf{T}$. Derivací druhé rovnice podle s máme

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{T} = 0.$$

Dosazením odvozených identit pro derivaci \mathbf{N} a \mathbf{T}

$$m\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + k\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = m + k = 0, \text{ tedy } m = -k.$$

Dostáváme tak vztahy

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{T} &= k\mathbf{N}, \\ \frac{d}{ds}\mathbf{N} &= -k\mathbf{T},\end{aligned}\tag{1.10}$$

kteřé nazýváme **Frenetovy vzorce v rovině**.

Definice 9. Funkci $k(s)$, která pro libovolné $s \in I$ splňuje vztah $\frac{d}{ds}\mathbf{T} = k(s)\mathbf{N}$, nazýváme **křivost** křivky v bodě s .

Věta 4. Pro obecně parametrizovanou regulární křivku platí, že

$$k = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}, \quad \text{pro všechna } u \in I.\tag{1.11}$$

Důkaz. Z Frenetových vzorců víme, že

$$\frac{d}{ds}\mathbf{T} = \frac{d^2}{ds^2}\gamma = k\mathbf{N}.$$

Z identity $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = 1$ vyplývá

$$k = \det\left(\frac{d}{ds}\gamma, \frac{d^2}{ds^2}\gamma\right).$$

Pomocí vztahu derivace podle obecné a přirozené parametrizace dostaneme

$$k = \frac{1}{\left|\frac{d}{du}\gamma\right|^3} \det\left(\frac{d}{du}\gamma, \frac{d^2}{du^2}\gamma\right),$$

čímž je důkaz kompletní. □

Definice 10. Pro křivku γ definujeme **tečný úhel** $\nu(s)$ jako argument \mathbf{T} , kde $\mathbf{T} = (\cos(\nu), \sin(\nu))$.

Věta 5. Pro křivost přirozeně parametrizované křivky γ platí

$$k(s) = \frac{d}{ds}\nu(s) \text{ pro všechna } s \in I.$$

Důkaz.

$$\frac{d}{ds}\mathbf{T} = k(-\sin(\nu), \cos(\nu))^T = \frac{d}{ds}\nu(-\sin(\nu), \cos(\nu))^T.$$

□

Poznámka. Pro Jordanovu křivku jde tečný úhel ν od 0 do 2π . Potom pokud je tato křivka definovaná například na $[0, 1]$, dostáváme z věty 5

$$2\pi = \nu(1) - \nu(0) = \int_0^1 \partial_u \nu = \int_0^1 \partial_s \nu |\gamma'| du = \int_{\Gamma} k ds.$$

1.2.2 Geometrie křivek v prostoru

Pro prostorové křivky lze rovněž použít popis pomocí Frenetova rámce, kde kromě tečného a normálového vektoru zavádíme také vektor **binormály**, který je jejich vektorovým součinem. Dále můžeme rozšířit Frenetovy vzorce tím, že k popisu přidáme **torzi** křivky, která představuje zakřivení ve vertikálním směru.

Definice 11. Definujeme tečný, normálový a binormálový vektor pro prostorovou přirozeně parametrizovanou křivku $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma \in C^2(I)$ následujícími vztahy

$$\mathbf{T} := \gamma', \quad \mathbf{N} := \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \quad (1.12)$$

Vektory budou jednoznačně definovány všude, kde $|\gamma''| \neq 0$. Soubor vektorů $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ nazýváme **Frenetův rámec** křivky v prostoru.

Dalším cílem bude odvodit Frenetovy vzorce v prostoru, tedy najít vztahy mezi vektory Frenetova rámce a jejich derivacemi. Pro derivaci tečného vektoru podle přirozeného parametru dostáváme

$$\frac{d}{ds}\mathbf{T} = \gamma'' = |\gamma''|\mathbf{N} := k\mathbf{N}.$$

Vztahem $k = |\gamma''|$ definujeme křivost prostorové křivky. Z derivace rovnosti $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$$

vidíme, že vektor $\frac{d}{ds}\mathbf{B}$ je kolmý na \mathbf{B} , tedy jej lze vyjádřit pomocí lineární kombinace \mathbf{T} a \mathbf{N} jako

$$\frac{d}{ds}\mathbf{B} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N}.$$

Dál vynásobením rovnice skalárně vektorem \mathbf{T} zjistíme, že

$$a = \frac{d}{ds}\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = \frac{d}{ds}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{B} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{T} = 0 - k\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Máme tedy $\frac{d}{ds}\mathbf{B} = b\mathbf{N}$. Derivujme identitu $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ podle s . Dostaneme

$$\frac{d}{ds}\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Vyjádríme derivaci \mathbf{N} jako lineární kombinaci \mathbf{T} a \mathbf{B}

$$\frac{d}{ds}\mathbf{N} = c\mathbf{T} + d\mathbf{B}.$$

Vynásobíme rovnici skalárně tečným vektorem, čímž získáme tvar

$$\frac{d}{ds}\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \frac{d}{ds}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{N} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{T} = 0 - k = c.$$

Vynásobením binormálovým vektorem dostaneme

$$d = \frac{d}{ds}\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{B} = -b.$$

Definujeme novou veličinu nazývanou **torze** křivky γ předpisem

$$\tau(s) := d = -b.$$

Výsledné vztahy shrneme v následující definici.

Definice 12. Nechť $\gamma \in C^3(I)$ je přirozeně parametrizovaná křivka. Pak tam, kde křivost není nulová platí vztahy

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

které nazýváme **Frenetovy vzorce** křivky γ v prostoru.

Kapitola 2

Rovnice dynamiky křivek

V této kapitole představíme různé druhy zákonů vývoje křivek. Zvláštní pozornost budeme věnovat pohybu podle střední křivosti (v angličtině **mean curvature flow**) a jeho numerickému řešení. V závěru zmíníme některé z aplikací pohybu křivek v reálných situacích.

2.1 Pohyb podle křivosti v rovině

Předmětem dalšího postupu bude křivka měnící se v čase. Budeme tedy uvažovat $\gamma = \gamma(u, t)$. Označíme časový vývoj pozice obecného bodu na křivce $x(t) = \gamma(u, t)$, kde $u \in I$ v této části uvažujeme libovolné pevné a $t \in [0, T]$, přičemž $0 < T \leq +\infty$ je doba pohybu křivky. Pro rychlost bodu křivky potom dostáváme

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) = \partial_t \gamma(u, t).$$

Rychlost zapíšeme ve tvaru lineární kombinace tečné a normálové složky

$$\mathbf{v}(t) = \alpha \mathbf{T}(t) + \beta \mathbf{N}(t).$$

Pohyb podle křivosti předepisuje rychlost pohybu bodu ve směru normály, tedy

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{N} = \beta \equiv v = k + f, \tag{2.1}$$

kde k je křivost γ v daném bodě a f představuje působení vnější síly. Roli f rozvedeme v dalších částech.

V případě $f = 0$ máme

$$v = k.$$

Tento druh pohybu se anglicky nazývá **Curve Shortening Flow** (dále zkráceně CSF) neboli pohyb zkracující křivku. Křivka při tomto předpisu zmenšuje svůj obsah a zkracuje se.

2.1.1 Existence a vlastnosti řešení

Dále představíme teoretické výsledky týkající se CSF. Lokální existenci řešení pro hladké počáteční křivky se zabývali M. Gage a R. Hamilton v [12]. V tomto článku také dokázali, že pro regulární Jordanovy křivky řešení existuje, pokud je křivost omezená, a křivky zůstanou regulární a Jordanovy. V článku [10] Gage ukázal následující tvrzení.

Věta 6 (Gage, 1983). Pro konvexní uzavřené C^2 rovinné křivky splňující CSF platí izoperimetrická nerovnost

$$\pi \frac{L(t)}{A(t)} \leq \int_{\Gamma} (k(t)^2) ds.$$

Dosazením této nerovnosti do vzorce (2.4) dostaneme, že izoperimetrický poměr pro dané křivky vyvíjející se podle křivosti klesá.

Všechny uzavřené křivky splňují izoperimetrickou nerovnost

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi,$$

kdy rovnost je nabývána právě tehdy, když uvažovaná křivka je kružnice. V dalším článku [11] Gage dokázal, že izoperimetrický poměr klesá v limitě právě k 4π , tedy že z konvexních uzavřených křivek se stávají kružnice.

Věta 7 (Gage, 1984). Necht' $\gamma(\cdot, t)$ jsou rovinné konvexní uzavřené C^2 křivky splňující pro $0 < t < T$ rovnice

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma(u, t) &= k\mathbf{N} && \text{v } I \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{v } I. \end{aligned}$$

Dále necht' $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$. Potom pro izoperimetrický poměr platí

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

Navíc normalizované křivky $\eta(\cdot, t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}} \gamma(\cdot, t)$ uzavírají konvexní oblast, která v Hausdorffově metrice konverguje k jednotkovému kruhu.

M. Grayson dále v [13] ukázal, že nekonvexní počáteční Jordanovy křivky se při CSF mění na konvexní a následně se stahují do bodu podle předchozího výsledku.

Věta 8 (Grayson, 1987). Necht' γ_0 je regulární Jordanova křivka. Pak existuje $\gamma(\cdot, t)$ na $[0, T)$ tak, že splňuje

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= k\mathbf{N} && \text{na } I \times [0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } I. \end{aligned}$$

$\gamma(\cdot, t)$ je hladká křivka pro všechna t , v limitě $t \rightarrow T$ konverguje do bodu a její limitní tvar je kružnice s konvergencí v C^∞ normě.

Vývojem nejjednodušších křivek se zabývali například S. Altschuler a Grayson v [1]. U takových křivek po určitém čase vznikají „hroty“, kdy se menší z oblouků stáhne. V tomto článku autoři využili převedení na vývoj jednoduchých prostorových křivek a ukázali, že vývoj probíhá i skrze tyto singularity.

Definice 13. Rampa je prostorová křivka, která stále roste ve vertikálním směru, tedy její tečný vektor má kladnou vertikální složku.

Definice 14. Necht' $\Gamma_0(t)$ je regulární rovinná křivka vyvíjející se podle CSF bez singularit v čase $t \in [0, t_0]$. $\Gamma_\lambda(0), \lambda \in (0, 1]$ libovolná množina periodických ramp, které mají svislou projekci na Γ_0 a mají vertikální periodu λ . Pak se $\Gamma_\lambda(t)$ vyvíjí podle křivosti pro prostorové křivky.

Věta 9 (Altschuler-Grayson, 1992). Pro Γ jako výše platí

1. Pro všechna $\lambda > 0$ Γ_λ existuje a je hladká pro všechny časy.
2. Limita $\Gamma_\lambda(t)$ pro $\lambda \rightarrow 0$ je hladká křivka až na diskrétní okamžiky $t_i \in [t_0, t_n]$. Pro $t \geq t_n$ je limitou bod.
3. Limita se shoduje s vývojem v rovině až na singularity.
4. Limitní rovinná křivka nezávisí na volbě $\Gamma_\lambda(0)$, a je tedy jednoznačná.

2.1.2 Globální veličiny

Chování křivky lze kromě lokálních změn popsat také pomocí veličin, které berou v úvahu celou křivku. V této sekci některé takové veličiny představíme.

$$\begin{array}{ll} \text{Délka} & L(\Gamma) := \int_{\Gamma} 1 ds, \quad \text{Celková křivost} & C(\Gamma) := \int_{\Gamma} k ds \\ \text{Obsah} & A(\Gamma) := \iint_{\text{int}(\Gamma)} d\mathbf{x}, \quad \text{Elastická energie} & E(\Gamma) := \int_{\Gamma} k^2 ds \end{array}$$

Pro další zápis budeme předpokládat pohyb křivky γ ve tvaru

$$\partial_t \gamma = \beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}. \quad (2.2)$$

Pro CSF bude $\beta = k$, pro pohyb podle křivosti s vnější silou $\beta = k + f$.

Lemma 1. Pro obsah regulární Jordanovy křivky γ definované na intervalu I platí

$$A = \frac{1}{2} \int_I \det(\gamma, \partial_u \gamma) du.$$

Důkaz. Použijeme Greenovu větu pro integrál obsahu křivky. Nejprve jej přepíšeme do tvaru

$$A = \iint_{\text{int}(\Gamma)} 1 d\mathbf{x} = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \frac{1}{2} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial x_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2.$$

Definujeme funkce

$$P = -\frac{x_2}{2}, \quad Q = \frac{x_1}{2},$$

potom

$$A = \iint_{\text{int}(\Gamma)} (\partial_{x_1} Q - \partial_{x_2} P) dx_1 dx_2.$$

Nyní použijeme Greenovu větu a dostaneme

$$A = \int_{\Gamma} P dx_1 + Q dx_2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_I (-\gamma_2 \partial_u \gamma_1 + \gamma_1 \partial_u \gamma_2) du = \frac{1}{2} \int_I \det(\gamma, \partial_u \gamma) du.$$

□

Lemma 2. Pro regulární Jordanovu křivku platí

$$\int_I \det(\gamma, \partial_u \partial_t \gamma) du = \int_I \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du.$$

Důkaz. Využijeme, že integrál derivace veličiny přes uzavřenou křivku dá 0.

$$0 = \int_I \partial_u \det(\gamma, \partial_t \gamma) du = \int_I \det(\partial_u \gamma, \partial_t \gamma) + \det(\gamma, \partial_u \partial_t \gamma) du.$$

Dále pro determinant platí $\det(\partial_u \gamma, \partial_t \gamma) = -\det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma)$. Převedením prvního sčítance na levou stranu dostaneme

$$\int_I \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du = \int_I \det(\gamma, \partial_u \partial_t \gamma),$$

čímž je důkaz dokončen. □

Věta 10. Pro obsah Jordanovy křivky $\gamma \in C^2(I)$ vyvíjející se podle (2.2) platí

$$\frac{d}{dt} A(t) + \int_{\Gamma(t)} \beta ds = 0.$$

Důkaz. Derivujme identitu z lemmatu 1 podle času, přičemž použijeme záměnu derivace a integrálu (to lze, pokud je $\det(\gamma, \partial_u \gamma)$ omezený, jelikož integrujeme na omezeném intervalu).

$$\frac{d}{dt} A = \frac{1}{2} \int_I \partial_t \det(\gamma, \partial_u \gamma) du = \frac{1}{2} \int_I \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) + \det(\gamma, \partial_t \partial_u \gamma) du.$$

Využijeme symetrii druhých derivací pro C^2 funkci, výsledek lemmatu 2 a dostaneme

$$\frac{d}{dt} A = \int_I \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du.$$

Dosadíme za rychlost bodu na křivce $\partial_t \gamma = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}$ a tečný vektor $\partial_u \gamma = |\partial_u \gamma| \partial_s \gamma = |\partial_u \gamma| \mathbf{T}$.

$$\frac{d}{dt} A = \int_I \det(\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}, |\partial_u \gamma| \mathbf{T}) du.$$

Dál využijeme vlastnosti determinantu

$$\det(\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}, |\partial_u \gamma| \mathbf{T}) = \det(\alpha \mathbf{T}, |\partial_u \gamma| \mathbf{T}) + \det(\beta \mathbf{N}, |\partial_u \gamma| \mathbf{T}) = 0 - \beta |\partial_u \gamma|.$$

Celkem dostaneme

$$\frac{d}{dt} A = - \int_I \beta |\partial_u \gamma| du = - \int_{\Gamma(t)} \beta ds.$$

□

Poznámka. Pro křivku vyvíjející se podle CSF, tedy $\beta = k$, dostáváme podle poznámky 1.2.1

$$\frac{d}{dt}A = -2\pi.$$

Obsah křivky se tedy zmenšuje. Integrací dostaneme tvar

$$A(t) = A_0 - 2\pi t.$$

Křivka tak může existovat jen po omezenou dobu, kterou zjistíme vyjádřením z výrazu

$$T = \frac{2\pi}{A_0},$$

kde A_0 je obsah vnitřku křivky na začátku pohybu.

Lemma 3. Pro křivku γ vyvíjející se podle (2.2)

$$\partial_t |\partial_u \gamma| = |\partial_u \gamma| (\partial_s \alpha - k\beta)$$

Důkaz. Derivujeme $|\partial_u \gamma|$ podle času

$$\partial_t |\partial_u \gamma| = \partial_t \sqrt{(\partial_u \gamma \cdot \partial_u \gamma)} = \frac{\partial_u \gamma \cdot \partial_t \partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|}. \quad (2.3)$$

Výrazy v čitateli dále upravíme

$$\partial_t \partial_u \gamma = \partial_u \partial_t \gamma = \partial_u (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}) = |\partial_u \gamma| (\partial_s \alpha \mathbf{T} + \alpha \partial_s \mathbf{T} + \partial_s \beta \mathbf{N} + \beta \partial_s \mathbf{N}).$$

Použitím Frenetových vzorců dostaneme

$$\partial_t \partial_u \gamma = |\partial_u \gamma| \left((\partial_s \alpha - k\beta) \mathbf{T} + (\partial_s \beta + k\alpha) \mathbf{N} \right)$$

Pro celý čítec pak bude

$$\partial_u \gamma \cdot \partial_t \partial_u \gamma = |\partial_u \gamma| \mathbf{T} \cdot |\partial_u \gamma| \left((\partial_s \alpha - k\beta) \mathbf{T} + (\partial_s \beta + k\alpha) \mathbf{N} \right) = |\partial_u \gamma|^2 (\partial_s \alpha - k\beta).$$

Dosazením do (2.3) bychom získali požadovanou rovnost. □

Věta 11. Pro regulární uzavřenou křivku vyvíjející se podle (2.2) platí

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma(t)} k\beta ds. \quad (2.4)$$

Důkaz. Mějme tedy křivku γ definovanou na omezeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pro její délku platí

$$L(t) = \int_I |\partial_u \gamma| du.$$

Derivací podle t a použitím věty o záměně dostaneme

$$\frac{d}{dt}L(t) = \int_I \partial_t |\partial_u \gamma| du.$$

Použitím lemmatu 3 získáme tvar

$$\frac{d}{dt}L(t) = \int_I \partial_s \alpha |\partial_u \gamma| du - \int_I k \beta |\partial_u \gamma| du.$$

Využijeme vztahu pro derivaci podle přirozeného parametru a pro první integrál uplatníme uzavřenost křivky

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma(t)} k \beta ds.$$

□

Využijeme dokázaná tvrzení pro důkaz vzorce pro časovou derivaci izoperimetrického poměru křivky.

Věta 12. Pro uzavřenou křivku vyvíjející se podle CSF, tedy $\beta = k$, platí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{(L(t))^2}{A(t)} \right) = -2 \frac{L(t)}{A(t)} \left(\int_{\Gamma(t)} k^2 ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right),$$

kde veličina $\frac{L^2}{A}$ se nazývá izoperimetrický poměr.

Důkaz. Z derivace podílu dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{A} \right) = \frac{2L \frac{dL}{dt} A - L^2 \frac{dA}{dt}}{A^2} = 2 \frac{L}{A} \frac{dL}{dt} - \frac{L^2}{A^2} \frac{dA}{dt}.$$

Využijeme předchozích tvrzení pro $\beta = k$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \int_{\Gamma(t)} k^2 ds + \frac{L^2}{A^2} \int_{\Gamma(t)} k ds.$$

Podle poznámky 1.2.1 potom celkově získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \left(\int_{\Gamma(t)} k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right).$$

□

2.2 Další druhy evoluce křivek v rovině

Křivka může být použita jako model v různých situacích, které mohou vést k dalším typům pohybu jako například pohyb na zakřivené ploše. Některé druhy vývoje v této části představíme.

2.2.1 Willmorův tok

V obecném případě se jedná o pohyb nadplochy Γ v \mathbb{R}^n , který minimalizuje elastickou energii

$$E(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_M dx^{n-1},$$

kde k_M značí střední křivost Γ , která je pro křivky v \mathbb{R}^2 shodná s již definovanou křivostí. Normálová rychlost pak má tvar

$$\partial_t \gamma \cdot \mathbf{N} = \beta = -\Delta_{\Gamma} k_M - \frac{1}{2} k_M^3 + k_G k_M,$$

kde k_G je Gaussova křivost a Δ_{Γ} značí Laplacův-Bertramioho operátor. Willmorův tok je podrobněji popsán například v [20].

2.2.2 Hyperbolický pohyb podle křivosti

Hyperbolický pohyb pro rovinné křivky předepisuje zrychlení ve směru normály

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \gamma &= k \mathbf{N}, \\ \partial_t \gamma(u, 0) &= v_0(u) \mathbf{N}(u, 0), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0. \end{aligned}$$

Podrobnější popis tohoto pohybu lze nalézt v [29].

2.2.3 Geodetický tok podle křivosti

Jedná se o pohyb křivky po ploše v \mathbb{R}^3 . Uvažujeme křivky $\mathcal{G}_t \subset \mathbb{R}^3$, které se v čase vyvíjí na 2D ploše \mathcal{M} , jež je dána jako graf spojitého zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{X} = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))^T, \mathbf{x} \in \Omega \}.$$

Pro tento typ vývoje předepisujeme rychlost ve směru normály křivky k ploše značené \mathcal{N}

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{G}} &= \mathcal{K}_{\mathcal{G}} + \mathcal{F}, \\ \mathcal{G}|_{t=0} &= \mathcal{G}_0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde \mathcal{G}_0 značí počáteční křivku na ploše \mathcal{M} , $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ geodetickou křivost křivky \mathcal{G}_t a \mathcal{F} vnější sílu působící ve směru \mathcal{N} .

Tento typ pohybu je v práci [16] řešený parametrickou metodou. Křivka je na ploše uvažována jako vertikální projekce rovinné vyvíjející se křivky, parametrizací $\gamma(u, t)$ je tedy dána množina

$$\Gamma_t = \{ \mathbf{X} = (\gamma_1(u, t), \gamma_2(u, t))^T, u \in I \} \subset \mathbb{R}^2.$$

Křivka \mathcal{G}_t na ploše \mathcal{M} může být jednoznačně určena její svislou projekcí do roviny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tedy

$$\mathcal{G}_t = \{(\mathbf{X}, \varphi(\mathbf{X})) \mid \mathbf{X} \in \Gamma_t \subset \Omega\}.$$

Dalším krokem je zkoumat pohyb křivky \mathcal{G}_t vyvíjející se podle zákona (2.5) na ploše \mathcal{M} pomocí toku její svislé projekce Γ_t v rovině. Cílem je tedy najít soustavu řídicích rovnic pro parametrizaci $\gamma(u, t)$ za předpokladu, že \mathcal{G}_t se vyvíjí podle geodetické křivosti. Výsledný předpis pro normálovou rychlost Γ_t , který je odvozen v [16], je

$$\partial_t \gamma \cdot \mathbf{N} = \beta(u, k) = \hat{a}k + \hat{b} + \hat{c}\mathcal{F},$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{1 + (\nabla\varphi \cdot \mathbf{T})^2}, \\ \hat{b} &= \frac{\mathbf{T}^T \nabla^2 \varphi \mathbf{T} (\nabla\varphi \cdot \mathbf{N})}{(1 + (\nabla\varphi \cdot \mathbf{T})^2)(1 + |\nabla\varphi|^2)}, \\ \hat{c} &= \left(\frac{(1 + (\nabla\varphi \cdot \mathbf{T})^2)}{1 + |\nabla\varphi|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

přičemž \mathbf{T} , \mathbf{N} značí tečný a normálový vektor Γ_t definovaný dříve, k značí křivost Γ_t a $\nabla\varphi$ gradient plochy \mathcal{M} .

2.3 Dynamika křivek v prostoru

V této části představíme dva druhy pohybu pro křivky v prostoru. Budeme tedy uvažovat vývoj $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma \in C(I)$. Více informací týkajících se těchto druhů pohybu lze nalézt v [19]. Do rozkladu rychlosti křivky přidáme binormálovou složku, pohyb potom bude mít obecně tvar

$$\partial_t \gamma = v_N \mathbf{N} + v_B \mathbf{B} + v_T \mathbf{T}. \quad (2.6)$$

Pro pohyb v prostoru lze také odvodit vztahy pro časové derivace délky a obsahu [2], kde obsah ohraničený křivkou je zobecněn do tvaru

$$A(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\gamma \times \partial_s \gamma) \cdot \partial_t \mathbf{B} ds. \quad (2.7)$$

Věta 13. Předpokládejme křivku Γ vyvíjející se podle (2.6). Potom pro délku a zobecněný obsah ohraničený Γ platí

$$\begin{aligned} \frac{dL_{\Gamma}}{dt}(\Gamma) &= - \int_{\Gamma} k v_N ds, \\ \frac{dA_{\Gamma}}{dt}(\Gamma) &= - \int_{\Gamma} v_N ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\gamma \times \partial_t \gamma) \cdot \partial_s \mathbf{B} ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\gamma \times \partial_s \gamma) \cdot \partial_t \mathbf{B} ds. \end{aligned}$$

Speciálně pokud se křivka vyvíjí v rovině, pak obsah má tvar $\iint_{\text{int}(\Gamma)} d\mathbf{x}$ a $\frac{dA_{\Gamma}}{dt}(\Gamma) = - \int_{\Gamma} v_N ds$.

2.3.1 Pohyb podle binormály

Tento druh pohybu lze například využít k modelování pohybu vírových smyček. Další informace lze kromě [19] najít také v [2], kde je také popisován pohyb interagujících křivek. Základní rovnice má tvar

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma &= k\mathbf{B} = (\mathbf{T} \times k\mathbf{N}) = \partial_s \gamma \times \partial_s^2 \gamma \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0\end{aligned}$$

2.3.2 Pohyb podle normály v prostoru

Analogií pro Curve Shortening Flow je v prostoru pohyb ve tvaru

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma &= k\mathbf{N} \text{ na } I \times (0, T) \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 \text{ na } I.\end{aligned}$$

Ve výpočetní části ukážeme několik příkladů tohoto pohybu. Bude možné pozorovat podobné efekty jako pro CSF v rovině. Práce zabývající se tímto typem pohybu je například [19].

2.4 Metody řešení dynamiky křivek

Na situaci pohybu podle křivosti představíme dva přístupy k řešení dynamiky křivek. Parametrická neboli přímá metoda řeší rovnici s parametrizací křivky. Při použití vrstevnicové metody je pohybuující se křivka hledaná jako vrstevnice nějakého zobrazení. Dalším přístupem k řešení je například metoda fázového pole. Více informací lze nalézt například v [7].

2.4.1 Parametrická metoda

Vyjdeme z předpisu pro pohyb podle střední křivosti a převedeme jej na parciální diferenciální rovnici pro parametrizaci křivky. K řešení této rovnice lze dále použít numerické metody.

$$\begin{aligned}\beta &= k + F = \partial_t x \cdot \mathbf{N}, \\ \partial_t x &= \beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T} = k\mathbf{N} + F\mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}.\end{aligned}$$

V této části budeme uvažovat pohyb pouze ve směru normály, tj. $\alpha = 0$. Výraz $k\mathbf{N}$ lze z Frenetova rámce nahradit derivací tečného vektoru, tj.

$$k\mathbf{N} = \partial_s \mathbf{T} = \partial_s^2 x.$$

Přepíšeme poslední výraz, aby odpovídal použití obecné parametrizace

$$k\mathbf{N} = \frac{1}{|\partial_u x|} \partial_u \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right).$$

Normálový vektor při silovém členu bude ve tvaru

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right)^\perp.$$

Výsledný tvar rovnic pohybu je

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \frac{1}{|\partial_u x|} \partial_u \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right) + F \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right)^\perp, & \text{pro } t \in (0, T], u \in [0, 1) \\ x(1, t) &= x(0, t), & \text{pro } t \in [0, T], \\ x(u, 0) &= x_0(u), & \text{pro } u \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Parametrickou metodou se zabývali například [8], [6].

2.4.2 Vrstevnicová metoda

Další informace o této metodě lze nalézt například v [21], [15], [32]. Řešení hledá zobrazení $g: [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Toto zobrazení bude určeno tak, že vyvíjená křivka bude v každém čase určena jako vrstevnice g , tedy Γ_t bude zadána implicitně způsobem

$$\Gamma_t = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid g(t, \mathbf{x}) = 0 \}, \text{ kde } t \in [0, T].$$

Dále budeme předpokládat spojitou diferencovatelnost g podle času a dvakrát spojitou diferencovatelnost podle prostorových souřadnic. Spojitost g zajišťuje, že uvnitř množin $\text{int}(\Gamma)$ a $\text{ext}(\Gamma)$ se nemění znaménko g . Také budeme předpokládat, že na $\text{int}(\Gamma)$ a $\text{ext}(\Gamma)$ má g různé znaménko tak, aby $\nabla g \neq 0$ na Γ .

V dalším postupu odvodíme rovnice svazující g pomocí vrstevnic, tedy bodů, kde platí

$$g(t, \mathbf{x}(t)) = c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

Derivací rovnice vrstevnice podle času a aplikací řetězového pravidla dostaneme

$$\partial_t g + \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} g \partial_t x_i = \partial_t g + \nabla_x g \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.9)$$

Pro body odpovídající vyvíjející se křivce Γ_t , tedy v případě $c = 0$, požadujeme pohyb podle křivosti pouze ve směru normály, což znamená

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (k + F)\mathbf{N}.$$

Abychom získali rovnici pro g , je třeba vhodně vyjádřit křivost k a normálový vektor \mathbf{N} . Nechť $\gamma(s, t)$ je přirozená parametrizace Γ_t , potom

$$g(t, \gamma(s, t)) = 0.$$

Derivací podle s a z definice tečného vektoru dostaneme

$$\nabla_x g \cdot \partial_s \gamma = \nabla_x g \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (2.10)$$

Z toho dál plyne, že

$$\nabla_x g = w\mathbf{N}, \text{ kde } w \in \mathbb{R}.$$

Normálový vektor tak lze vyjádřit pomocí g jako

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|}.$$

Volba znaménka závisí na konvenci. Pokud chceme zachovat orientaci s vnitřní normálou, pak pro funkci g , která bude menší než nula na $\text{int}(\Gamma)$ a větší než nula na $\text{ext}(\Gamma)$, budeme volit

$$\mathbf{N} = -\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|}.$$

Derivací (2.10) podle s dostaneme

$$(\partial_s \gamma)^T \nabla_x^2 g \partial_s \gamma + \nabla_x g \partial_s^2 \gamma = 0.$$

Užitím Frenetových vzorců a definice tečného vektoru získáme

$$k \nabla_x g \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T}^T \nabla_x^2 g \mathbf{T} = 0,$$

po dosazení vyjádření normálového vektoru bude

$$k = \mp \frac{1}{|\nabla_x g|} \mathbf{T}^T \nabla_x^2 g \mathbf{T}.$$

Lze ukázat identitu ([32])

$$|\nabla_x g| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} \right) = \mathbf{T}^T \nabla_x^2 g \mathbf{T}.$$

Potom pro křivost máme

$$k = \mp \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} \right).$$

Jednou z užívaných vrstevnicových funkcí je například funkce vzdálenosti od počáteční křivky se znaménkem

$$g(0, x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma_0),$$

kde funkce $\operatorname{dist}(x, \Gamma_0)$ je definovaná jako

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, \Gamma_0) &= \rho(x, \Gamma_0) \text{ pro } x \in \text{ext}(\Gamma_0), \\ \operatorname{dist}(x, \Gamma_0) &= -\rho(x, \Gamma_0) \text{ pro } x \in \text{int}(\Gamma_0), \\ \operatorname{dist}(x, \Gamma_0) &= 0 \text{ pro } x \in \Gamma_0. \end{aligned}$$

Pro takový tvar g tedy volíme $\mathbf{N} = -\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|}$. Dosazením nových tvarů do (2.9) dostaneme

$$\partial_t g = \nabla_x g \cdot \frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} \right) + f \right).$$

Upravením skalárního součinu na normu dostaneme výslednou rovnici pro g , kterou bychom dále mohli řešit numerickými metodami

$$\partial_t g = |\nabla_x g| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} \right) + |\nabla_x g| f.$$

Výpočet pomocí level-set metody dobře reaguje na topologické změny křivky (protnutí) bez dalších úprav. U parametrické metody může bez upravení algoritmu při topologických změnách dojít k nesprávnému vývoji. Ukázkou selhání výpočtu (obrat normály) lze nalézt například v práci [30].

2.5 Dynamika křivek v aplikacích

2.5.1 Zpracování obrazu

Dynamika křivek se uplatní v mnoha oblastech zpracování obrazu. Jde například o odstranění šumu nebo detekci kontur předmětu (například v [32] je vysvětlena detekce předmětu v pohybu). Při segmentaci objektu lze využít model aktivních kontur s pomocí level-set metod, jak je popsáno v [4], [5], [14]. Tento způsob dobře reaguje na topologické změny křivek.

Segmentaci lze řešit i pomocí parametrického přístupu, který v této práci využíváme při výpočtech v poslední kapitole. Na rozdíl od level-set metody nereaguje na topologické změny a můžeme tak dostat nesprávné řešení, pokud ke změnám dojde. Tento nedostatek lze odstranit úpravou algoritmu, která je popsána v [23]. Podrobněji popíšeme parametrickou metodu segmentace obrazu vycházející z článků [3] a [23].

Hranice objektu bude reprezentována křivkou, která bude mít na počátku tvar

$$\Gamma(\cdot, 0) = \Gamma_0 \quad (2.11)$$

a je volena tak, aby byla blízko odhadovanému výsledku. Křivka se bude pohybovat ve směru normály rychlostí danou rovnicí

$$\partial_t \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = k + F, \quad (2.12)$$

kde silový člen je ve tvaru

$$F(\mathbf{x}) = F_{\max} - (F_{\max} - F_{\min}) \frac{I(\mathbf{x})}{255}. \quad (2.13)$$

Člen $I(\mathbf{x})$ značí intenzitu jednotlivých pixelů obrázku je ve zlomku s 255 z předpokladu 8-bitového formátu. Konstanty $F_{\max} > 0$ a $F_{\min} < 0$ (v [23] je nastavení $F_{\max} = 1.2$ a $F_{\min} = -1.2$) ovlivňují ostrost finální hranice. Tvar síly je volen takto, aby pro větší intenzitu (bílá část obrázku, tedy objekt, jehož hranici hledáme) byla F menší a křivka se tak v těchto místech roztahovala a naopak aby v tmavém pozadí byla F blíže F_{\max} a docházelo k většímu stahování. V [23] je využita vzdálenost barev k transformaci obrazu a ohrazení částí stejné barvy.

Na závěr poznamenejme, že moderní metody segmentace s modely aktivních kontur využívají vývoj vrstevnice pomocí Sobolevových gradientů [31].

2.5.2 Polymerová nanovlákna

Rovnice dynamiky křivek lze uplatnit při modelování formování nanovláken. Podrobný popis modelů nanovláken a způsobů jejich výroby je popsán v textu [37]. Dále zmíníme model tvoření nanovláken pomocí metody **solution blowing** z článku [27].

V tomto článku jsou pro tenké části kapalinové trysky, kde dochází k vychýlením, využívány rovnice pro rychlost

$$\begin{aligned} \partial_t v_\tau &= v_n \left(\frac{1}{\lambda} \partial_s v_n + k v_t \right) + \frac{1}{\rho f \lambda} \partial_s P + g_\tau + \frac{q_{\text{total}, \tau}}{\rho f} \\ \partial_t v_n &= -v_\tau \left(\frac{1}{\lambda} \partial_s v_n + k v_t \right) + \frac{P k}{\rho f} + g_n + \frac{q_{\text{total}, n}}{\rho f} \\ \partial_t v_b &= -v_b \left(\frac{1}{\lambda} \partial_s v_n + k v_t \right) + \frac{P k}{\rho f} + g_b + \frac{q_{\text{total}, b}}{\rho f}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vysvětlíme úlohu jednotlivých členů

- v_τ, v_n, v_b označují rychlosti v tečném, normálovém a binormálovém směru,
- k je lokální křivost trysky v ose,
- $f = \pi a^2$ je obsah průřezu vlákna (předpokládáný je kruhový tvar i ve vychýlených částech),
- $a(s, t)$ představuje poloměr průřezu vlákna,
- λ odpovídá podélné elasticitě,
- ρ značí hustotu kapalinového roztoku,
- $P(s, t)$ je velikost vnitřních sil. Ty jsou viskoelastického původu a působí v průřezu ve směru osy trysky,
- g značí gravitační zrychlení,
- q_{total} je souhrn aerodynamických sil okolního vzduchu na jednotku délky.

Podobné rovnice se vyskytují i v modelech vychýlení trysky při elektrostatickém zvlákňování (anglicky **electrospinning**) [36].

2.5.3 Nitrobuněčné struktury

Uvnitř buněk existují tubulární útvary, jejichž formování může odpovídat dynamice navzájem se ovlivňujících pohybujících se křivek. V článku [25] je popsán vztah mezi tvarem cylindrické membrány a na ni vázaných filamentů a je dále demonstrován na dynamice tzv. FtsZ kroužků, které jsou předpokladem pro dělení u mnoha druhů bakterií. V [26] je podobný model rozšířen a využit pro mechanismus membránově zprostředkované interakce mezi dynaminovými oligomery. Tyto oligomery dále souvisí se štěpením membrány, které má úlohu při látkových přenosech uvnitř buňky. Energie membrány je v těchto člancích reprezentována Helfrichovou energií, která má základní tvar

$$\epsilon_m = \int \left(\frac{1}{2} \kappa H^2 + \sigma \right) dA,$$

kde κ je modul ohybu, H střední křivost membrány a σ představuje efektivní pružnost membrány.

V modelu je předpokladem válcová symetrie membrány a koncentrace FtsZ nebo dynaminových oligomerů. Poloměr membrány lze potom zapsat ve tvaru

$$R(z) = R_m + h(z),$$

kde R_m značí poloměr membrány v rovnovážném stavu a $h(z)$ výchylku. V [25] je dále odvozena řídicí rovnice pro výchylku $h(z)$ a $n(z)$, což představuje koncentraci FtsZ filamentů nebo dynaminu, z podmínek minimalizace volné energie a pomocí transformace proměnných. Výsledný tvar rovnic je

$$\begin{aligned} \partial_t h(z) &= -(\Delta^4 + (2 - \sigma)\Delta^2 + (1 + \gamma))h(z) + (1 + A)n(z), \\ \partial_t n(z) &= \omega_D(\Delta^2 n(z) - a\Delta(n\Delta h)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

V kontextu dynamiky křivek $h(z)$ odpovídá souřadnici křivky – kružnice – v normálovém směru. Koncentraci $n(z)$ pak lze interpretovat jako souřadnici v binormálovém směru, pokud křivku budeme chápat jako oblast s lokálně vysokou hodnotou $n(z)$. Tento pohled je možný, jak ukazuje vývoj koncentrace v čase. K formování struktur dochází tak, že na počátku vlivem nestabilit

roste $n(z)$ lokálně exponenciálně, poté se dál mění, až se ustálí u gaussovského rozdělení s úzkým rozptylem. Při zkoumání interakce struktur byla použita situace dvou kroužku reprezentovaných pomocí dvou delta rozdělení, která představují dvě interagující křivky.

Popis účinku dynamických oligomerů na štěpení membrány z pohledu přírodních věd lze nalézt v [24].

Kapitola 3

Numerické řešení úloh dynamiky křivek

V této kapitole odvodíme numerické schéma pro aproximaci řešení vývoje křivky podle křivosti pomocí přímé metody. Výsledné rovnice budou explicitní a získáme je náhradou výrazů konečnými diferencemi. Zmíníme roli silového členu a jak jej volit tak, aby se při pohybu křivky zachovával obsah nebo délka. Dále se budeme zabývat vylepšením vlastností schématu pomocí tangenciální redistribuce bodů na křivce. Výsledné schéma s asymptoticky uniformní redistribucí používá metodu konečných objemů a jeho odvození lze nalézt v [16].

3.1 Metoda konečných diferencí

Provedeme diskretizaci rovnice (2.8) náhradou diferenciálních výrazů konečnými diferencemi. Nechť $x = x(u, t)$, kde $u \in [a, b]$, představuje parametrizaci pohybující se křivky. Diskretizujeme interval $[a, b]$ následovně

$$u_1 = a, u_2 = a + ih, \dots, u_N = a + Nh = b.$$

Označme

$$x(u_i) = x_i, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, N.$$

Potom parciální derivaci nahradíme zpětnou diferencí ve tvaru

$$\partial_u x_i \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{h}.$$

Celkem aproximujeme první výraz na pravé straně následovně

$$\frac{1}{|\partial_u x|} \partial_u \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right) \approx \frac{h}{|x_i - x_{i-1}|} \left(\frac{\left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial_u x}{|\partial_u x|} \right)_i}{h} \right) \approx \frac{h}{|x_i - x_{i-1}|} \left(\frac{\frac{x_{i+1} - x_i}{|x_{i+1} - x_i|} - \frac{x_i - x_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}}{h} \right).$$

Použijeme označení

$$g_i = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \right|.$$

Výsledná rovnice s diskretizovanou pravou stranou bude ve tvaru

$$\partial_t x = \frac{1}{g_i} \left(\frac{\frac{x_{i+1} - x_i}{g_{i+1}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{g_i}}{h^2} \right) + F \frac{(x_i - x_{i-1})^\perp}{hg_i}. \quad (3.1)$$

Získáváme tak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou můžeme dále řešit například Runge-Kuttovými metodami. V této práci jsme použili Eulerovu metodu, kterou lze snadněji implementovat, ovšem za cenu nižší přesnosti řešení. Metoda spočívá v náhradě časové derivace dopřednou diferencí.

Časový interval řešení $[0, T]$ rozdělíme na diskrétní časové hladiny, tedy

$$0 = t_0, t_1 = \tau, t_2 = 2\tau \dots t_{N_t} = T,$$

kde $\tau = \frac{T}{N_t}$, N_t značí počet časových hladin. Podobně jako pro prostorovou diskretizaci označme

$$x(u, t_j) = x^j(u), \quad \text{kde } j = 1, 2, \dots, N_t.$$

Kombinace značení pro prostorovou a časovou diskretizaci budeme používat způsobem

$$x(u_i, t_j) = x_i^j.$$

Výsledná rovnice s diskretizovaným prostorovým i časovým krokem bude mít tvar

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2 g_i} \left(\frac{x_{i+1}^j - x_i^j}{g_{i+1}} - \frac{x_i^j - x_{i-1}^j}{g_i} \right) + F \frac{(x_i^j - x_{i-1}^j)^\perp}{h g_i},$$

odkud vynásobením τ a přičtením x_i^j dostáváme

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \tau \frac{1}{h^2 g_i} \left(\frac{x_{i+1}^j - x_i^j}{g_{i+1}} - \frac{x_i^j - x_{i-1}^j}{g_i} \right) + \tau F \frac{(x_i^j - x_{i-1}^j)^\perp}{h g_i}.$$

Můžeme nahlédnout, že další časovou hladinu řešení získáme pouze na základě předchozí, schéma je tedy explicitní.

Poznámka. Pro výpočty pohybu v prostoru není třeba zvláštních úprav, pouze řešíme rovnice pro tři souřadnice místo dvou. Dál dostáváme další možnosti pro počáteční křivky, například můžeme rovinnou křivku zvlnit nebo zobrazit na sféru.

3.2 Role vnější síly

Vlastnosti pohybu podle (3.4) můžeme ovlivnit vnější silou tak, aby vývoj odpovídal fyzikálním jevům (například modelování dislokací [16], [22]) nebo aby křivka zachovávala obsah, případně délku. Představu o účinku silového členu získáme dosazením konstanty. Pokud zvolíme $F > 0$, projeví se působení zpomalením zkracování křivky, pro dostatečně velkou hodnotu se křivka bude roztahovat. Kladná volba F také způsobí, že vývoj neskončí zkrácením do bodu, ale kružnicí s kladným poloměrem. Naopak volbou $F < 0$ dochází k urychlení pohybu.

3.2.1 Pohyb zachovávající obsah

V této části odvodíme tvar vnější síly tak, aby obsah uzavřený Jordanovou křivkou $\gamma \in C^2(I)$ byl konstantní. Využijeme předchozích výsledků pro globální veličiny vyvíjejících se křivek. Další informace týkající se pohybu zachovávajícího obsah křivku na dané ploše lze nalézt v článku [17].

Předpokládejme, že křivka se vyvíjí podle křivosti s normálovou rychlostí ve tvaru

$$v = k + F,$$

kde F má takový tvar, že platí $\frac{d}{dt}A(t) = 0$. Navrhne pro sílu tvar

$$F = -\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} k ds. \quad (3.2)$$

Ověříme, že tato volba funguje dosazením do věty 10:

$$\frac{d}{dt}A(t) = - \int_{\Gamma(t)} k ds + \int_{\Gamma_t} \frac{\int_{\Gamma(t)} k ds}{L(t)} ds,$$

kde integrand v druhém sčítanci je konstantní podél křivky, takže po další úpravě dostaneme

$$- \int_{\Gamma(t)} k ds + \frac{\int_{\Gamma(t)} k ds}{L(t)} \int_{\Gamma_t} ds = - \int_{\Gamma(t)} k ds + \frac{L(t)}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} k ds = 0,$$

což jsme chtěli ukázat.

Spočteme ještě výsledek pro derivaci délky. Opět dosadíme do věty 11

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma_t} k^2 ds + \frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} k \left(\int_{\Gamma(t)} k ds \right) ds.$$

Úpravou druhého sčítance získáme

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma_t} k^2 ds + \frac{1}{L(t)} \left(\int_{\Gamma(t)} k ds \right)^2.$$

Využitím poznámky 1.2.1

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma_t} k^2 ds + \frac{4\pi^2}{L(t)}.$$

Použitím izoperimetrické nerovnosti dostaneme

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq \pi \frac{L(t)}{A(t)} - \int_{\Gamma(t)} k^2 ds.$$

3.2.2 Pohyb zachovávající délku

Budeme postupovat obdobně jako při hledání síly zachovávající obsah. Tedy uvažujeme Jordanovu křivku $\gamma \in C^2(I)$, která se vyvíjí podle křivosti s působením vnější síly F . Navrhne silový člen ve tvaru

$$F = -\frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds} \quad (3.3)$$

a ověříme dosazením do věty 11.

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_{\Gamma(t)} k^2 ds + \int_{\Gamma(t)} k \frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds} ds.$$

Výraz dále upravíme vytknutím nezávislých členů z druhého integrálu

$$-\int_{\Gamma(t)} k^2 ds + \int_{\Gamma(t)} k \frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds} ds = -\int_{\Gamma(t)} k^2 ds + \frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds} \int_{\Gamma(t)} k ds = 0.$$

Ukázali jsme tedy, že volba síly ve tvaru (3.3) skutečně zachovává délku.

Zabývejme se také změnou obsahu křivky. Dosadíme do věty 10

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\int_{\Gamma(t)} k ds + \int_{\Gamma(t)} \frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds} ds = -\int_{\Gamma(t)} k ds + L(t) \frac{\int_{\Gamma(t)} k^2 ds}{\int_{\Gamma(t)} k ds}.$$

Opět využijeme poznámku 1.2.1 a dostaneme

$$\frac{d}{dt} A(t) = -2\pi + \frac{L(t)}{2\pi} \int_{\Gamma_t} k^2 ds.$$

Tímto typem pohybu pro křivky na dané ploše se zabývá článek [18].

3.3 Volba tangenciální rychlosti

Podrobné informace o tématu lze hledat v práci [16] a článcích [32], [33]. Pro pohybující se křivku můžeme rychlost jejích bodů rozdělit do tečné a normálové složky

$$\partial_t \gamma = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}.$$

Tvar křivky ovšem ovlivňuje pouze rychlost ve směru normály. Tečná rychlost nemá na tvar vliv, může ale zlepšit dlouhodobou stabilitu výpočtu při použití parametrické metody. Při numerickém řešení například metodou konečných diferencí odhadujeme křivku po částech lineární funkcí pomocí bodů prostorové diskretizace. Tyto body mají tendenci se zhušťovat v částech křivky s větší křivostí, což může vést k nedostatečné přesnosti v jiných místech. Přidáním vhodného tečného členu, který bude pozici bodů upravovat, můžeme tomuto efektu předcházet.

Dále se budeme zabývat pohybem podle křivosti, tedy rychlost bodů vyvíjející se křivky γ je ve tvaru

$$\partial_t \gamma = \alpha \mathbf{T} + k \mathbf{N} + F \mathbf{N}.$$

Tvar vhodný pro řešení přímou metodou pak má podobný tvar jako (2.8)

$$\partial_t \gamma = \alpha \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} + \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) + F \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right)^\perp. \quad (3.4)$$

3.3.1 Lokální redistribuce

Pro volbu tangenciálního členu můžeme brát v úvahu lokální vlastnosti křivky. Jednou takovou volbou pro pohyb podle křivosti může být **přirozená redistribuce** (někdy také DeTurck trick). Rovnice (3.4) má při použití této redistribuce tvar

$$\partial_t \gamma = \frac{\partial_u^2 \gamma}{|\partial_u \gamma|^2} + F \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right)^\perp \quad (3.5)$$

a odpovídá volbě tangenciální rychlosti v podobě

$$\alpha = \frac{\partial_u \gamma \cdot \partial_u^2 \gamma}{|\partial_u \gamma|^3}. \quad (3.6)$$

Ukážeme, že dosazením za α do (3.4) dostaneme (3.5). Derivace tečného vektoru podle u bude tvaru

$$\partial_u \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) = \frac{\partial_u^2 \gamma |\partial_u \gamma| - \partial_u \gamma \partial_u |\partial_u \gamma|}{|\partial_u \gamma|^2}.$$

Dosazením za derivaci normy

$$\partial_u |\partial_u \gamma| = \frac{\partial_u \gamma \cdot \partial_u^2 \gamma}{|\partial_u \gamma|}$$

dostaneme

$$\partial_u \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) = \frac{|\partial_u \gamma|^2 \partial_u^2 \gamma - (\partial_u \gamma \cdot \partial_u^2 \gamma) \partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|^3}.$$

Potom pro druhý sčítanec v (3.4) získáme

$$\frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left(\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) = \frac{\partial_u^2 \gamma}{|\partial_u \gamma|^2} - \frac{(\partial_u \gamma \cdot \partial_u^2 \gamma)}{|\partial_u \gamma|^3} \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|},$$

tedy volbou α ve tvaru (3.6) dojdeme k řídicí rovnici (3.5) s lokálně definovanou tangenciální rychlostí. Takto definovaný systém zlepšuje redistribuci bodů pro pohyb podle křivosti, ale pro úlohy s výrazným silovým členem nebo s dlouhým časovým vývojem stále může k akumulaci bodů docházet.

3.3.2 Uniformní redistribuce

Další metody volby tečné rychlosti berou v úvahu informace o křivce jako celku a mohou tak vést například k asymptoticky rovnoměrnému rozdělení nebo mezi body zachovat vzdálenosti z počáteční křivky. Pro usnadnění zápisu označíme

$$g(u, t) = |\partial_u \gamma(u, t)|.$$

Definujeme novou veličinu θ jako logaritmus relativní délky

$$\theta(u, t) = \ln \left(\frac{g}{L} \right). \quad (3.7)$$

Význam θ lze vysvětlit na následujícím příkladu:

Mějme křivku $\gamma(u, t)$ parametrizovanou na intervalu $[0, 1]$ se stopou $\Gamma(t)$, která je diskretizována N body, tedy

$$\gamma_i = \gamma(u_i, t), \quad \text{kde } u_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Délku oblouku $\Gamma(t)$ definujeme

$$s(u, t) = \int_0^u |\partial_u \gamma| du = \int_0^u g(u, t) du.$$

Vzdálenost po křivce mezi jednotlivými body pak spočteme

$$s(u_i, t) - s(u_{i-1}, t) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} g(u, t) du = L(t) \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{g(u, t)}{L(t)} du, \quad \text{pro } i = 1, \dots, N.$$

Můžeme si všimnout, že pokud $\frac{g}{L} = 1$, pak $s(u_i, t) - s(u_{i-1}, t) = \frac{L(t)}{N}$ pro $i = 1, \dots, N$, tedy body budou na křivce rovnoměrně rozdělené. Pokud $\lim_{t \rightarrow T} \frac{g}{L} = 1$, pro $u \in [0, 1]$ a nějaký konečný čas T , pak rozdělení bodů bude pro $t \rightarrow T$ asymptoticky rovnoměrné.

Dále odvodíme řídicí rovnici pro θ . Upravíme výsledek lemmatu 3 pomocí vztahu pro derivaci podle přirozeného parametru

$$\partial_t |\partial_u \gamma| = \partial_t g = g(\partial_s \alpha - k\beta) = \partial_u \alpha - gk\beta.$$

Derivace θ podle času bude mít tvar

$$\partial_t \theta(u, t) = \frac{L}{g} \frac{L \partial_t g - g \dot{L}}{L^2} = \frac{\partial_t g}{g} - \frac{\dot{L}}{L},$$

který dále upravíme s využitím věty 11

$$\partial_t \theta(u, t) = \partial_s \alpha - k\beta + \frac{1}{L} \int_{\Gamma(t)} k\beta ds. \quad (3.8)$$

Volbou α na pravé straně můžeme upravit chování θ a tím řídit distribuci bodů podél křivky.

Redistribuce zachovávající vzdálenosti

Pokud budeme požadovat θ v čase konstantní, pak $\partial_t \theta = 0$, což znamená

$$\frac{g(u, t)}{L(t)} = \frac{g(u, 0)}{L(0)}, \quad \text{pro libovolné } u \in [0, 1],$$

tedy rozdělení bodů bude po celou dobu vývoje stejné jako na počáteční křivce.

Pro $\partial_s \alpha$ pak dostaneme předpis

$$\partial_s \alpha = k\beta - \frac{1}{L} \int_{\Gamma(t)} k\beta ds,$$

ze kterého při volbě okrajové podmínky $\alpha(0, t) = 0$ můžeme jednoznačně získat α .

Asymptoticky uniformní redistribuce

Pro tento typ redistribuce je třeba volit α tak, aby

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{g}{L} = 1,$$

tedy pro θ

$$\theta = \ln\left(\frac{g}{L}\right) \rightarrow 0, \quad \text{pro } t \rightarrow T. \quad (3.9)$$

Rovnici pro α budeme řešit ve tvaru

$$\partial_s \alpha = k\beta - \frac{1}{L} \int_{\Gamma(t)} k\beta ds + \omega \left(\frac{L}{g} - 1 \right). \quad (3.10)$$

$\omega \in L^1_{loc}([0, T])$ představuje relaxační funkci, která splňuje podmínku

$$\int_0^T \omega(\tau) d\tau = +\infty.$$

Pro θ tak požadujeme, aby splnilo rovnici

$$\partial_t \theta = (e^{-\theta} - 1)\omega(t),$$

jejíž řešení θ splňuje podmínku (3.9). Pro α tak platí (3.10) s normalizační podmínkou $\alpha(0, t) = 0$ a rozdělení bodů na vyvíjející se křivce $\Gamma(t)$ bude asymptoticky uniformní pro t jdoucí k T .

Volba ω může být například

$$\omega = \kappa_1 + \kappa_2 \left(\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma_t} k\beta \right),$$

kde κ_1, κ_2 jsou konstanty, které lze volit podle vlastností křivky. Pokud vývoj křivky probíhá nekonečně dlouho, tedy $T = +\infty$, pak lze volit $\kappa_1 > 0$ a $\kappa_2 = 0$, protože

$$\int_0^{+\infty} \omega d\tau = \int_0^{+\infty} \kappa_1 = +\infty.$$

Pokud se křivka v konečném čase stahuje do bodu, a tedy pro její délku platí $\lim_{t \rightarrow T} L(t) = 0$, pak lze volit $\kappa_1 = 0$ a $\kappa_2 > 0$ a pro požadovaný integrál dostaneme s použitím věty 11

$$\int_0^t \omega d\tau = \int_0^t \frac{1}{L(\tau)} \left(\int_{\Gamma(\tau)} k\beta \right) d\tau = - \int_0^t \frac{1}{L(\tau)} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Přepsáním integrandu na derivaci logaritmu délky dostaneme

$$- \int_0^t \frac{1}{L(\tau)} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau = - \int_0^t \frac{d \ln L(\tau)}{d\tau} d\tau = \ln L(0) - \ln L(t) \rightarrow \infty, \text{ pro } t \rightarrow T.$$

V práci [16] je odvozeno numerické schéma pomocí metody konečných objemů s obecnější redistribucí upravovanou podle křivosti. Je tak umožněno pomocí parametru upravit míru zhušťování bodů v místech s větší křivostí.

Kapitola 4

Výpočetní studie

4.1 Analytické řešení pohybu podle křivosti

Navržené numerické schéma lze ověřit porovnáním s analytickým řešením. Pokud se výsledky shodují dostatečně přesně, máme dobrý předpoklad k tomu, že správně napočítáme i řešení pro křivky, kde analytický předpis najít neumíme. Jeden příklad, kde analytické řešení umíme nalézt, si zde ukážeme (v [7] je úloha řešena i pro vyšší dimenze).

Uvažme počáteční křivku ve tvaru kružnice, tj.

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma|_{t=0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\},$$

s parametrizací

$$\gamma(u, 0) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Předpokládejme dále, že pohyb kružnice bude probíhat takovým způsobem, že se bude měnit pouze poloměr, tj.

$$\gamma = \gamma(u, t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(u) \\ r(t) \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Předpis $r(t)$ získáme z požadavku na pohyb podle křivosti, tedy řešením rovnice

$$\partial_t \gamma = k \mathbf{N}.$$

Členy upravíme, abychom získali rovnici pro $r(t)$. Pravou stranu můžeme vyjádřit pomocí Frenetových vzorců

$$\begin{aligned} k \mathbf{N} &= \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \mathbf{T} = \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left(\frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \gamma \right), \\ |\partial_u \gamma| &= \sqrt{r^2(t) \sin^2(u) + r^2(t) \cos^2(u)} = r(t), \\ \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \gamma &= \mathbf{T} = (-\sin(u), \cos(u))^T, \\ \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \mathbf{T} &= \frac{1}{r(t)} (-\cos(u), -\sin(u))^T. \end{aligned}$$

Dosazením za γ do levé strany dostaneme rovnici

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{r(t)} \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}, \\ r(t)\dot{r}(t) &= -1,\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$r(0) = r_0,$$

jejíž řešení získáme integrací a bude tvaru

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t},$$

kteřé bude existovat na intervalu $t \in \left[0, \frac{r_0^2}{2}\right]$.

4.1.1 Řád konvergence

Při diskretizaci problému jsme provedli odhady, které se zpřesňují se zjemňováním kroku rychlostí určitého řádu. Možností, jak ověřit, že schéma, které jsme odvodili, funguje správně, je výpočet řádu konvergence (tzv. EOC, zaveden v [9], příklady analýz například v [28], [20]) k analytickému řešení (pokud není k dispozici, můžeme za analytické řešení považovat řešení s velmi jemnou sítí). V této práci jsme k výpočtu EOC pro vyvíjející se kružnice použili následující postup:

- Uvažujme celkem \hat{N}_t (neuvažujeme nutně všechny hladiny výpočtu) dvojic polygonů s N vrcholy.
- V příslušných časových hladinách spočítáme odchylky odpovídajících si vrcholů od sebe.

$$R_i = |x_i - y_i|$$

- Aproximujeme L_2 a maximovou normu odchylek přes celý polygon, tedy napočítáme

$$E_t^2 := \sum_i R_i h, \quad E_t^\infty := \max_i (R_i)$$

- Totéž provedeme postupně ve všech časových hladinách a odhadneme L_2 a maximovou normu v časovém kroku

$$E^2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_t} \hat{\tau}(E_t^2)^2}, \quad E^\infty = \max_{j \in \hat{N}_t} (E_t^\infty)$$

- Pro výpočet řádu konvergence uvažujme dvě řešení s N_1 a N_2 body, $N_1 < N_2$.

$$\text{EOC}^2 = \frac{\ln\left(\frac{E_1^2}{E_2^2}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \quad \text{EOC}^\infty = \frac{\ln\left(\frac{E_1^\infty}{E_2^\infty}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

Uvedený postup postačí pro porovnání s kružnicí, pro obecné křivky je třeba obměna. Ve 3. bodu pak počítáme odchylku jako Hausdorffovu vzdálenost polygonů na příslušných hladinách. 2. bod může být vynechán.

Příklad 1: Pohyb kružnice podle křivosti řešený přímou metodou bez redistribuce.
Počáteční křivka:

$$\Gamma(\mathbf{0}) = \{ (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u))^T \mid u \in [0, 1] \}$$

Tvar pohybu:

$$\partial_t \mathbf{x} = k \mathbf{N}$$

Tvar analytického řešení: $\sqrt{1-2t} (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u))^T, u \in [0, 1]$

Nastavení: Řešíme postupně pro $N = 100, 200, 400, 800$ a 1600 bodů, počet časových kroků N_t je volen tak, aby byla splněna podmínka

$$\frac{N^2}{N_t} = 0.45$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 0.48]$

Řád konvergence: Kontrola konvergence řešení je provedena v tabulce 4.1

Obrázek: obrázek 4.1

Tabulka 4.1: Řád konvergence pro kružnici vyvíjející se podle CSF.

N	E^2	EOC^2	E^∞	EOC^∞
100	$2.943 \cdot 10^{-5}$		$1.780 \cdot 10^{-4}$	
200	$7.355 \cdot 10^{-6}$	2.001	$4.501 \cdot 10^{-5}$	1.984
400	$1.875 \cdot 10^{-6}$	1.972	$1.180 \cdot 10^{-5}$	1.932
800	$5.075 \cdot 10^{-7}$	1.886	$3.427 \cdot 10^{-6}$	1.784
1600	$2.328 \cdot 10^{-7}$	1.124	$1.283 \cdot 10^{-6}$	1.418

Příklad 2: Vývoj s přirozenou redistribucí a silou závislou na čase.

Počáteční křivka:

$$\Gamma(\mathbf{0}) = \{ (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u))^T \mid u \in [0, 1] \}$$

Tvar pohybu: $\partial_t \gamma = (k + F) \mathbf{N}$, kde F je tvaru $\frac{1}{1+0.6 \sin(2\pi t)} + 1.2\pi \cos(2\pi t)$.

Časový interval řešení: $t \in [0, 1.0]$

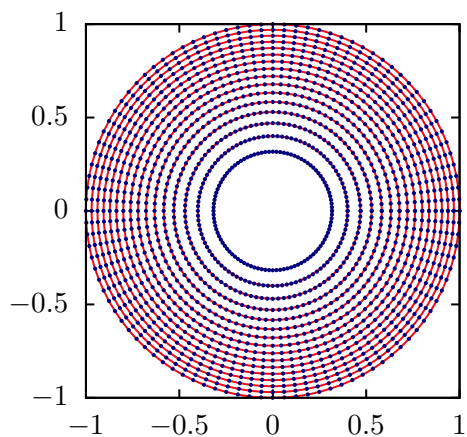
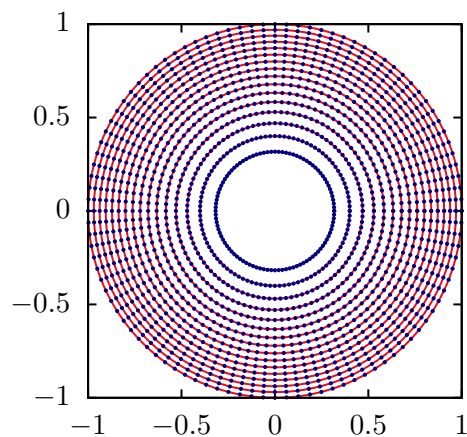
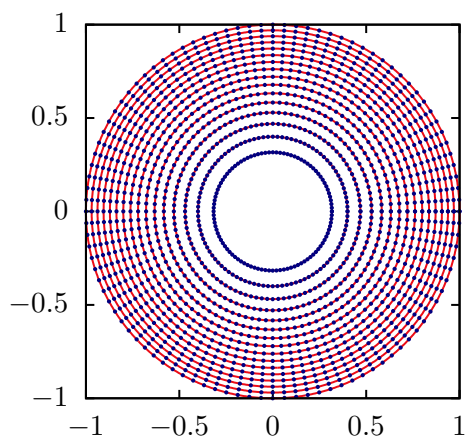
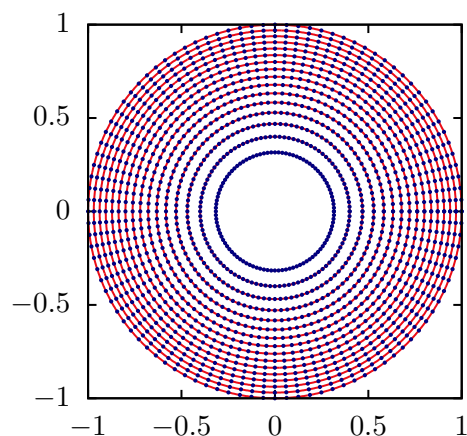
Nastavení: $N = 600, N_t = \frac{N^2}{0.45} = 800000$

Řád konvergence: Tabulka 4.2

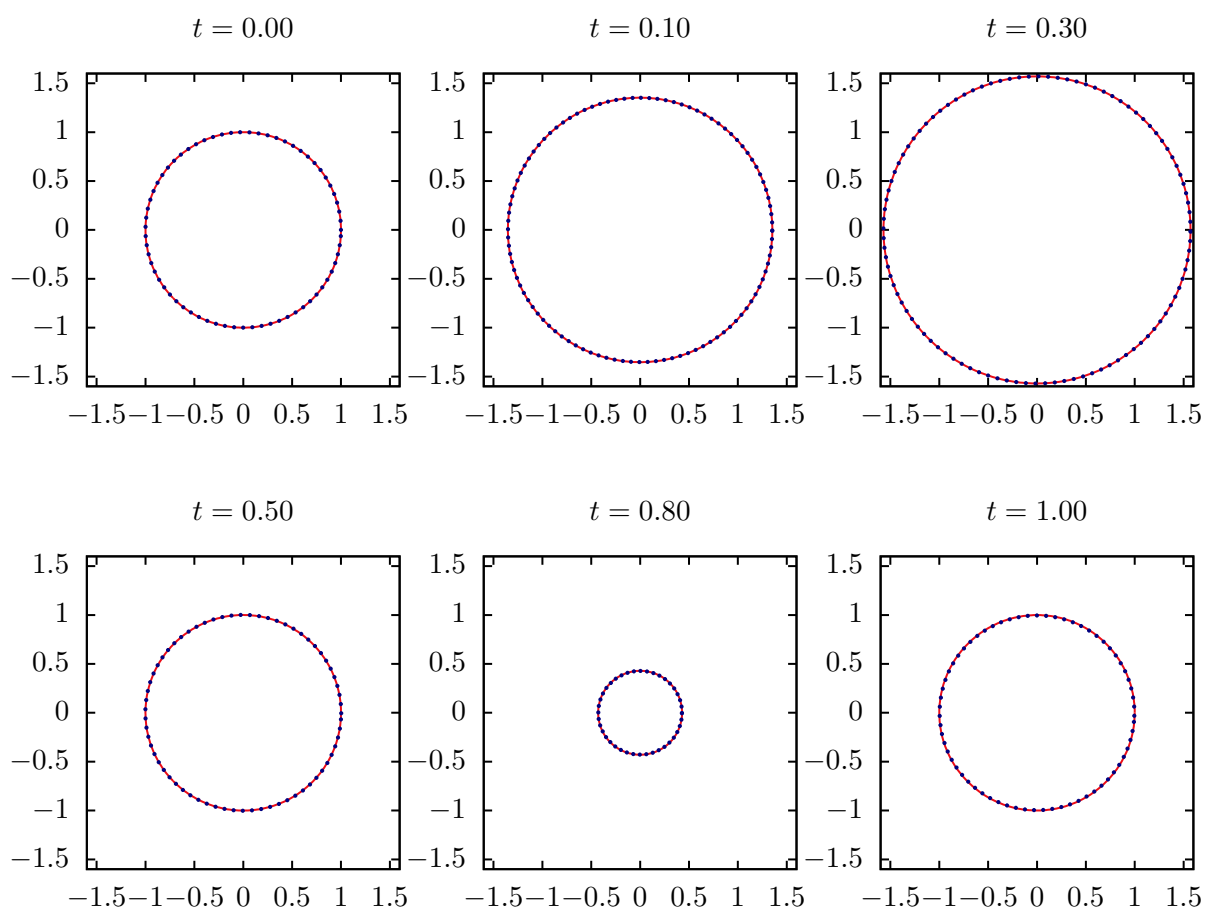
Obrázek: obrázek 4.2

Tabulka 4.2: Řád konvergence pro pulzující kružnici s přirozenou redistribucí.

N	E^2	EOC^2	E^∞	EOC^∞
100	$7.969 \cdot 10^{-4}$		$1.992 \cdot 10^{-3}$	
200	$1.991 \cdot 10^{-4}$	2.001	$4.980 \cdot 10^{-4}$	2.000
400	$4.994 \cdot 10^{-5}$	1.995	$1.252 \cdot 10^{-4}$	1.992
800	$1.260 \cdot 10^{-5}$	1.987	$3.175 \cdot 10^{-5}$	1.979
1600	$3.598 \cdot 10^{-6}$	1.808	$9.037 \cdot 10^{-6}$	1.813

(a) $N = 100$ (b) $N = 200$ (c) $N = 400$ (d) $N = 1600$

Obrázek 4.1: Porovnání analytického řešení s numerickým s různou hustotou sítě. V tomto případě se výsledky vizuálně v podstatě neliší. Ve všech případech je $t \in [0, 0, 48]$.



Obrázek 4.2: Příklad 2: Pohyb pulzující kružnice se silou závislou na čase.
 $N = 200, N_t = 88888, t = [0, 1.0]$.

4.2 Příklady vývoje křivek ve 2D

Příklad 3: Vývoj se silou zachovávající obsah bez redistribuce.

Počáteční křivka:

$$\Gamma(0) = \{(1 + 0.6 \cos(7u))(\cos(u), \sin(u))^T \mid u \in [0, 2\pi]\}$$

Tvar pohybu:

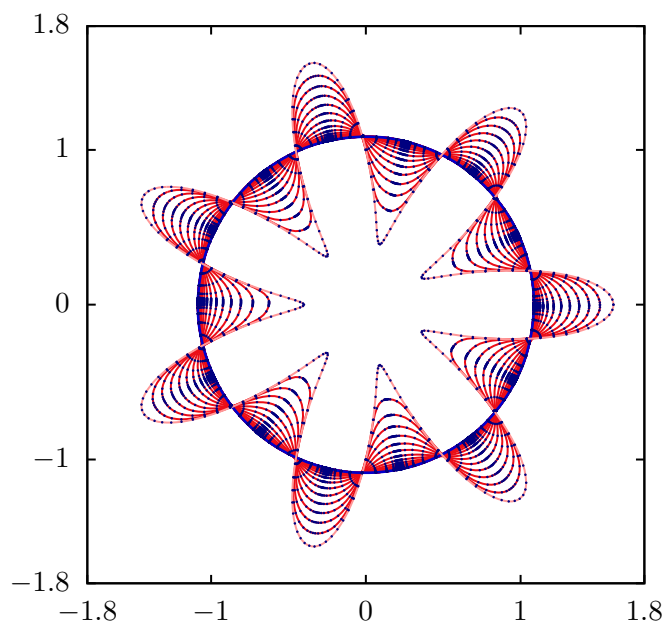
$$\partial_t \gamma = (k + F)N,$$

kde F je tvaru (3.2).

Časový interval řešení: $t \in [0, 0.3]$

Nastavení: $N = 600$, $N_t = \frac{N^2}{0.45} = 800000$

Obrázek: obrázek 4.3



Obrázek 4.3: Příklad 3: pohyb zachovávající obsah bez redistribuce
 $N = 600$, $N_t = 800000$, $t = [0, 0.3]$.

Příklad 4: Vývoj křivky ve tvaru vážky bez redistribuce.

Počáteční křivka: [35]

Tvar pohybu:

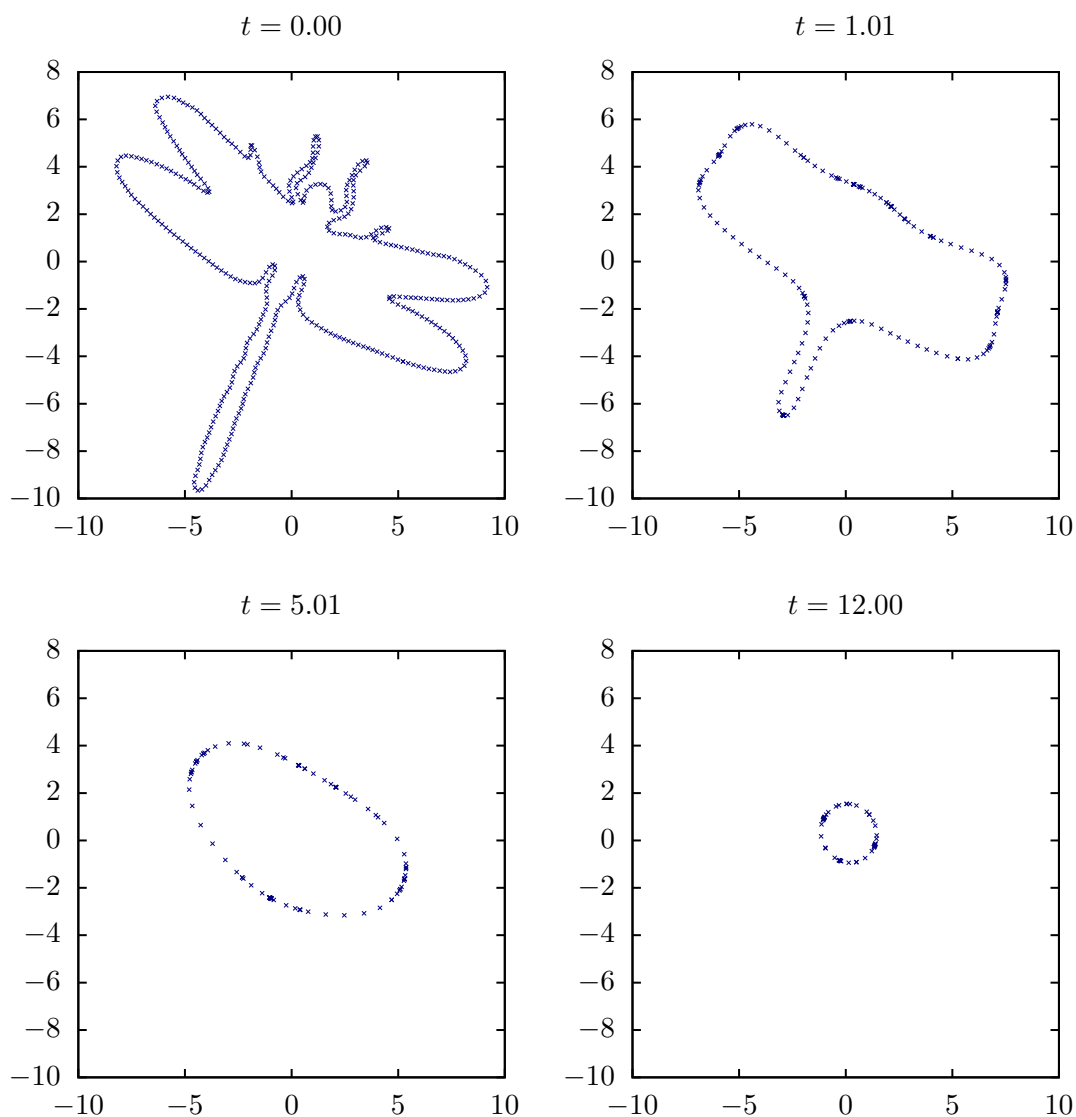
$$\partial_t \gamma = kN,$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 12.0]$

Nastavení: $N = 400$, $N_t = \frac{N^2}{0.45} = 4266666$

Obrázek: obrázek 4.4

Počáteční křivka obsahuje mnoho úseků s velkou křivostí, kolem kterých se body diskretizace zahušťují, což se projevuje i na finální (na obrázku tmavě modré) kružnici. V případě využití redistribuce se tomuto efektu vyhneme, což umožňuje počítat i s méně hustou sítí.



Obrázek 4.4: Příklad 3: pohyb křivky ve tvaru vážky bez redistribuce
 $N = 400$, $N_t = 4266666$, $t = [0, 12.0]$.

4.2.1 Použití redistribuce

Příklad 5: Vývoj se silou zachovávající obsah s přirozenou redistribucí.

Počáteční křivka:

$$\Gamma(0) = \{(1 + 0.6 \cos(7u))(\cos(u), \sin(u))^T \mid u \in [0, 2\pi]\}$$

Tvar pohybu:

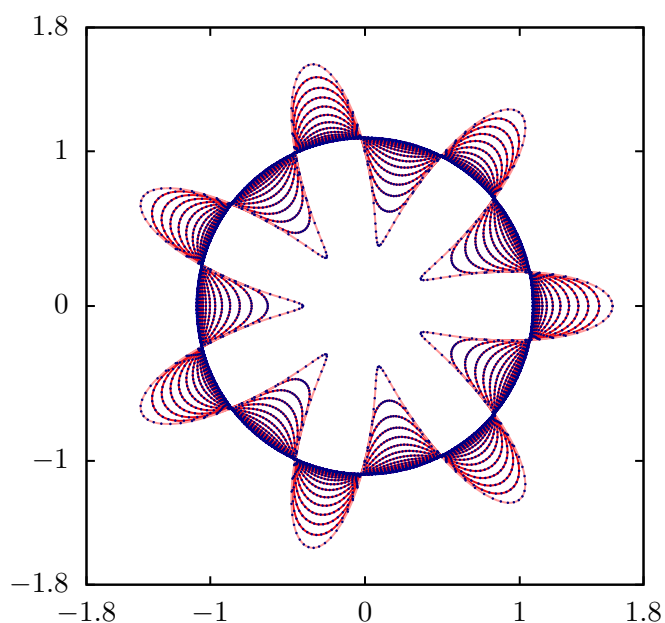
$$\partial_t \gamma = (k + F)N,$$

kde F je tvaru (3.2).

Časový interval řešení: $t \in [0, 0.3]$

Nastavení: $N = 600$, $N_t = \frac{N^2}{0.45} = 800000$

Obrázek: obrázek 4.5



Obrázek 4.5: Příklad 3: pohyb zachovávající obsah s přirozenou redistribucí
 $N = 600$, $N_t = 800000$, $t = [0, 0.3]$.

Tabulka 4.3: Řád konvergence pro lističek vyvíjející se podle křivosti se silou zachovávající obsah s přirozenou redistribucí. $t \in [0, 0.3]$.

N	E^2	EOC^2	E^∞	EOC^∞
100	$5.014 \cdot 10^{-3}$	2.011	$5.495 \cdot 10^{-2}$	1.900
200	$1.244 \cdot 10^{-3}$	2.093	$1.473 \cdot 10^{-2}$	2.083
400	$2.918 \cdot 10^{-4}$	2.080	$3.475 \cdot 10^{-3}$	2.089
800	$6.898 \cdot 10^{-5}$	2.254	$8.168 \cdot 10^{-4}$	2.321
1600	$1.447 \cdot 10^{-5}$		$1.635 \cdot 10^{-4}$	

Příklad 6: Vývoj křivky ve tvaru vážky s přirozenou redistribucí.

Počáteční křivka: [35]

Tvar pohybu:

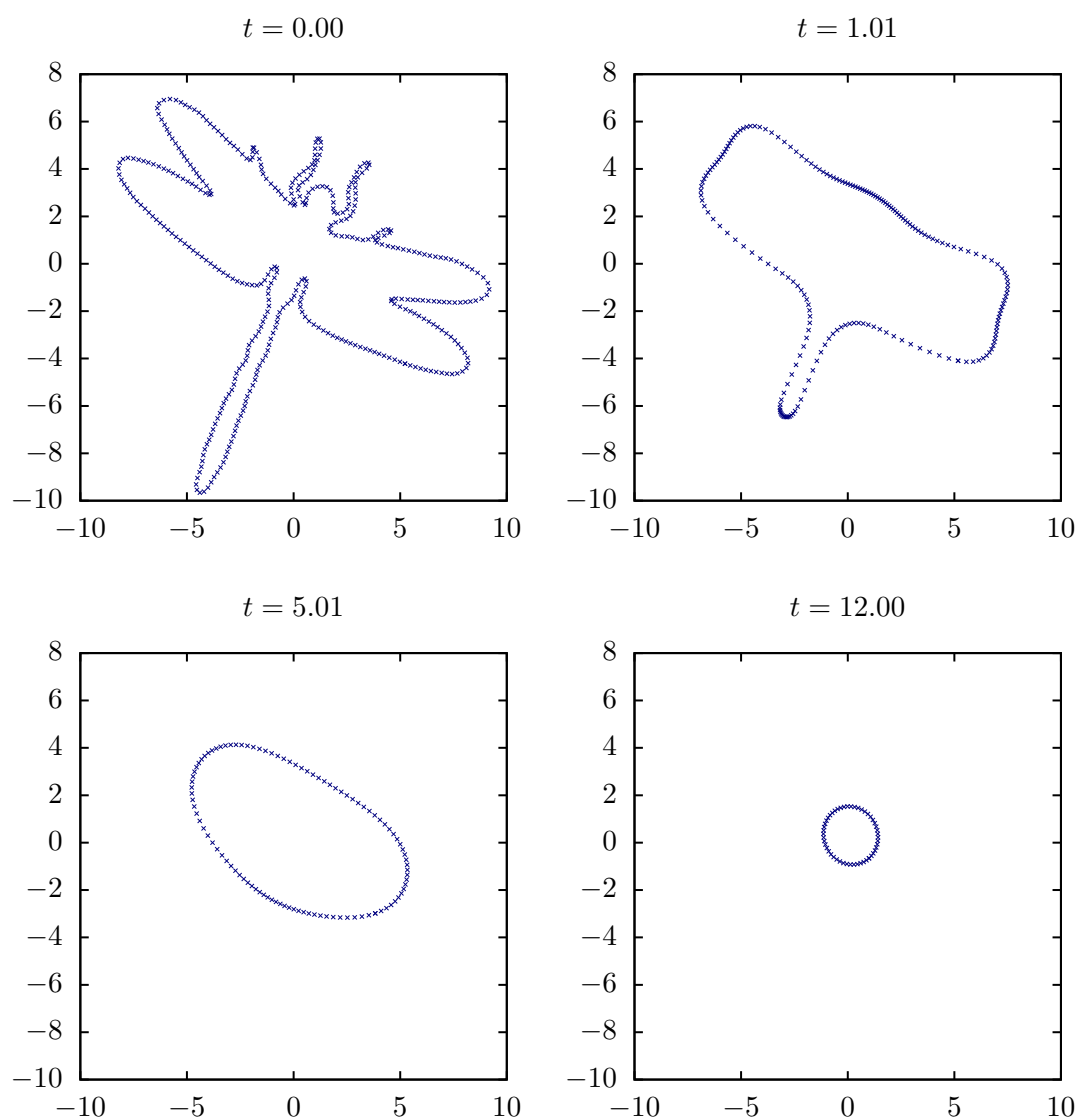
$$\partial_t \gamma = kN,$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 12.0]$

Nastavení: $N = 400$, $N_t = \frac{N^2}{0.45} = 4266666$

Obrázek: obrázek 4.6

Po využití přirozené redistribuce můžeme pozorovat zlepšení v rozmístění bodů, ale v místech s větší křivostí stále dochází k akumulaci.



Obrázek 4.6: Příklad 3: pohyb křivky ve tvaru vážky s přirozenou redistribucí.
 $N = 400$, $N_t = 4266666$, $t = [0, 12.0]$.

Příklad 7: Vývoj křivky ve tvaru vážky s asymptoticky uniformní redistribucí.

Počáteční křivka: [35]

Tvar pohybu:

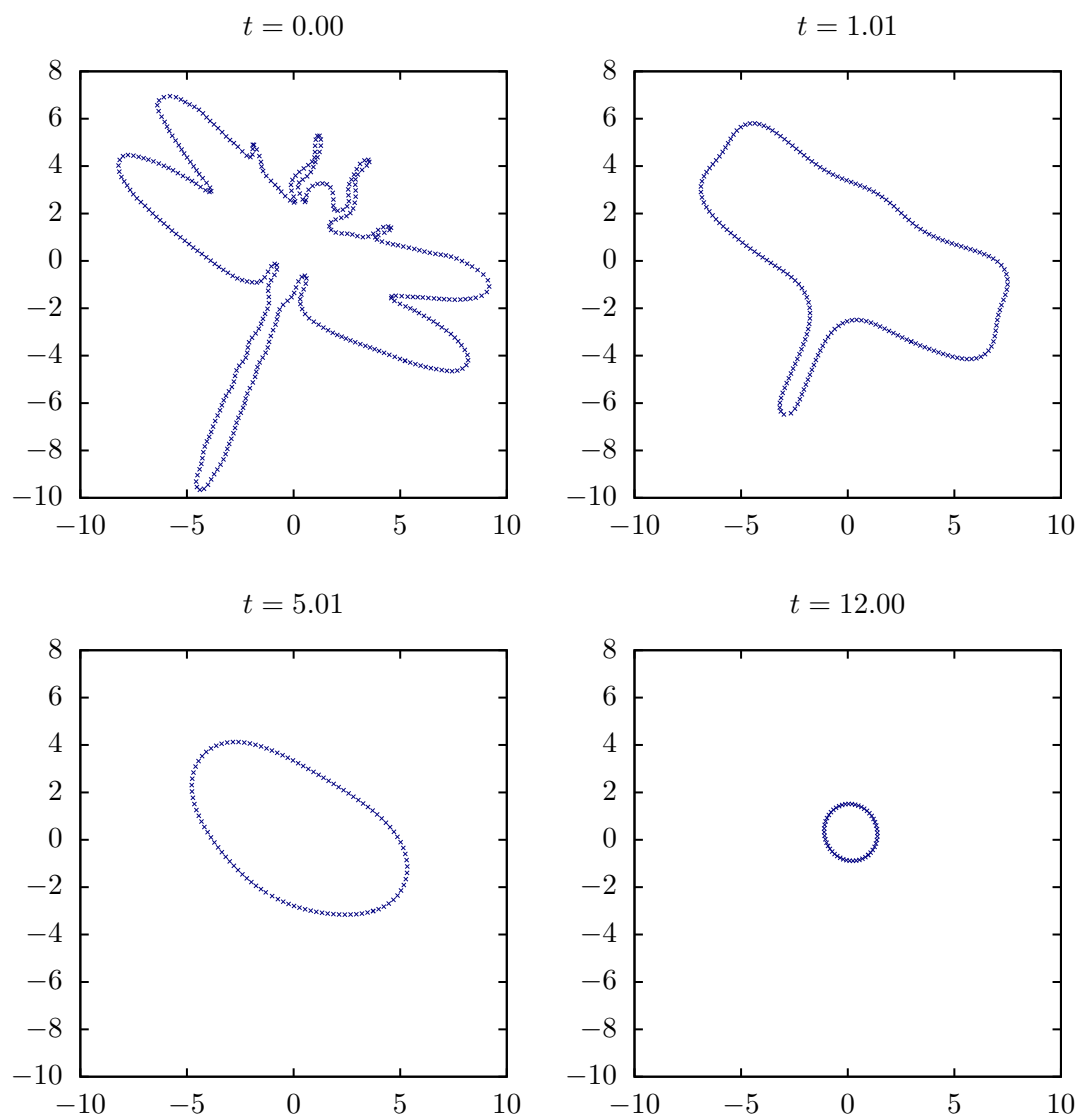
$$\partial_t \gamma = kN,$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 12.0]$

Nastavení: $N = 400$, $N_t = T \frac{N^2}{0.45} = 4266666$

Obrázek: obrázek 4.7

Na ukázce s asymptoticky uniformní redistribucí rovnoměrné rozdělení bodů podél křivky nezávisle na křivosti. Tím se vyhneme případu, kdy by v místech s malou křivostí byl pouze malý počet bodů diskretizace.



Obrázek 4.7: Příklad 4: pohyb křivky ve tvaru vážky s uniformní redistribucí.
 $N = 400$, $N_t = 4266666$, $t = [0, 12.0]$.

4.3 Příklady pohybu v prostoru

Příklad 8: Vývoj sférické křivky s přirozenou redistribucí.

Počáteční křivka:

$$\Gamma(0) = r(u) (\cos(u), \sin(u), 4 \cos(5u))^T,$$
$$r(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \cos^2(5u)}}, \quad u \in [0, 2\pi]$$

Tvar pohybu:

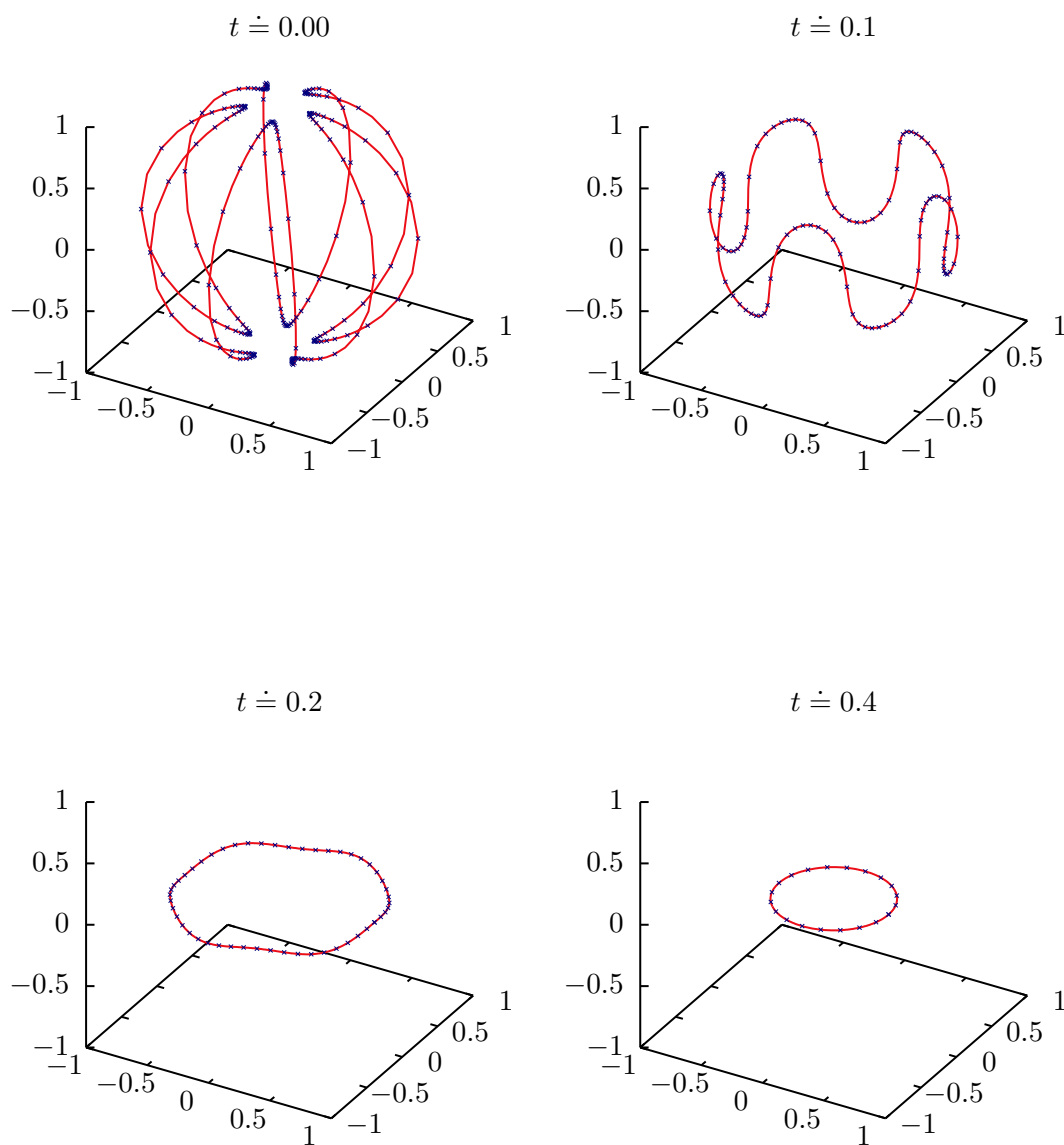
$$\partial_t \gamma = k \mathbf{N},$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 0.49]$

Nastavení: $N = 400$, $N_t = T \frac{N^2}{0.45} = 174222$

Obrázek: obrázek 4.8

Vývoj křivek, které se dotýkají sféry, nikdy nepředběhne stahování sféry, pro více informací viz [19].



Obrázek 4.8: Příklad 3: pohyb křivky ve tvaru vážky bez redistribuce
 $N = 400, N_t = 174222, t = [0, 0.49]$.

Příklad 9: Vývoj rovinné křivky v prostoru s přirozenou redistribucí.

Počáteční křivka (s upravenými parametry převzatá z [19]):

$$\Gamma(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u), \sin(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u) \right)^T, \quad u \in [0, 2\pi]$$

Tvar pohybu:

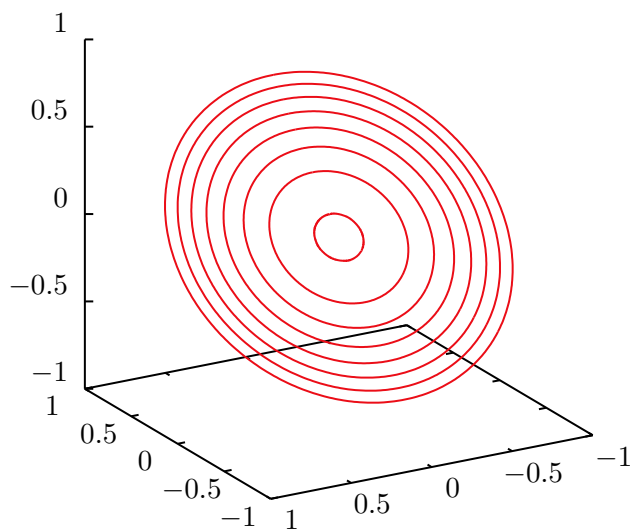
$$\partial_t \gamma = k \mathbf{N},$$

Časový interval řešení: $t \in [0, 0.49]$

Nastavení: $N = 400$, $N_t = T \frac{N^2}{0.45} = 174222$

Obrázek: obrázek 4.9

V této ukázce můžeme vidět, že rovinná křivka v prostoru během pohybu podle normály zůstává v této rovině.



Obrázek 4.9: Příklad 8: pohyb nakloněné kružnice s přirozenou redistribucí
 $N = 400$, $N_t = 174222$, $t = [0, 0.49]$.

Závěr

V práci jsme představili úlohy dynamiky křivek a seznámili se s některými jejich teoretickými a numerickými vlastnostmi. První kapitola byla věnována rovnici difuze a pojmům z diferenciální geometrie. Ve druhé kapitole jsme se seznámili s různými druhy pohybu křivek v rovině a prostoru. Zmínili jsme také aplikace v oblasti zpracování obrazu, dynamiky nitrobuněčných struktur a modelování nanovláken.

Ve třetí kapitole jsme pomocí metody konečných diferencí odvodili numerické schéma pro řešení pohybu podle křivosti ve směru normály. Výsledkem bylo explicitní schéma používající parametrický přístup. Zmínili jsme lokální typ redistribuce a jako globální typy redistribuce jsme zmínili uniformní a redistribuci zachovávající lokální délku.

Představená schémata jsme v poslední kapitole ověřovali pomocí řádu konvergence chyby oproti analytickému řešení nebo řešení s hustou sítí, také jsme mohli pozorovat efekty různých metod přerozdělování bodů.

Seznam použité literatury

- [1] S. J. Altschuler a M. A. Grayson. “Shortening space curves and flow through singularities”. In: *Journal of Differential Geometry* 35.2 (1992), s. 283–298.
- [2] M. Beneš, M. Kolář a D. Ševčovič. “Qualitative and Numerical Aspects of a Motion of a Family of Interacting Curves in Space”. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 82.2 (2022), s. 549–575.
- [3] M. Beneš et al. “Application of a curvature adjusted method in image segmentation”. In: *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series)* 3 (2008), s. 509–523.
- [4] F. Cao. *Geometric curve evolution and image processing*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [5] I. Capuzzo-Dolcetta, S. Finzi Vita a R. March. “Area-preserving curve-shortening flows: From phase separation to image processing”. In: *Interfaces Free Bound.* 4 (říj. 2002), s. 325–343.
- [6] K. Deckelnick a G. Dziuk. “Mean Curvature Flow and Related Topics”. In: (2003), s. 63–108.
- [7] K. Deckelnick, G. Dziuk a Ch. M. Elliott. “Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow”. In: *Acta Numerica* 14 (2005), s. 139–232.
- [8] K. Decklenick. “Weak solutions of the curve shortening flow”. In: *Calc. Var.* 5.6 (1997), s. 489–510.
- [9] G. Dziuk. “Convergence of a semi-discrete scheme for the curve shortening flow”. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 4 (1994), s. 589–606.
- [10] M. E. Gage. “An isoperimetric inequality with applications to curve shortening”. In: *Duke Mathematical Journal* 50.4 (1983), s. 1225–1229.
- [11] M. E. Gage. “Curve shortening makes convex curves circular”. In: *Inventiones mathematicae* 76 (1984), s. 357–364.
- [12] M. E. Gage a R. S. Hamilton. “The heat equation shrinking convex plane curves”. In: *Journal of Differential Geometry* 23.1 (1986), s. 69–96.
- [13] M. A. Grayson. “The heat equation shrinks embedded plane curves to round points”. In: *Journal of Differential Geometry* 26.2 (1987), s. 285–314.
- [14] J. Chudý. *Zpracování obrazu pomocí degenerovaných parabolických parciálních diferenciálních rovnic*. Diplomová práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2015.
- [15] J. A. Sethian. *Level Set Methods*. první vydání. Cambridge University Press, 1996.

- [16] M. Kolář. *Motion of Curves with the Application to Dislocation Dynamics*. Dizertační práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2018.
- [17] M. Kolář, M. Beneš a D. Ševčovič. “Area Preserving Geodesic Curvature Driven Flow of Closed Curves on a Surface”. In: *Discrete Continuous Dynamical Systems B* 22.10 (2017), s. 3671–3689.
- [18] M. Kolář, M. Beneš a D. Ševčovič. “On Surface Area and Length Preserving Flows of Closed Curves on a Given Surface”. In: *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2017*. Springer International Publishing, 2019, s. 279–287.
- [19] J. Minarčík. *Space Curve Evolution and its Applications*. Diplomová práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2018.
- [20] T. Oberhuber. *Numerical Solution of Willmore Flow*. Dizertační práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2009.
- [21] S. Osher a N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer New York, 2003.
- [22] P. Pauš. *Mathematical Model of Interactions in Discrete Dislocation Dynamics*. Dizertační práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2013.
- [23] P. Pauš a S. Yazaki. “Segmentation of color images using mean curvature flow and parametric curves”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S* 14.3 (2021), s. 1123–1132.
- [24] A. Roux et al. “GTP-dependent twisting of dynamin implicates constriction and tension in membrane fission”. In: *Nature* 441 (čvn. 2006), s. 528–531.
- [25] R. Shlomovitz a N. S. Gov. “Membrane-mediated interactions drive the condensation and coalescence of FtsZ rings”. In: *Physical Biology* 6.4 (lis. 2009), s. 046017.
- [26] R. Shlomovitz, N. S. Gov a A. Roux. “Membrane-mediated interactions and the dynamics of dynamin oligomers on membrane tubes”. In: *New Journal of Physics* 13.6 (čvn. 2011), s. 065008.
- [27] S. Sinha-Ray et al. “Theoretical and experimental investigation of physical mechanisms responsible for polymer nanofiber formation in solution blowing”. In: *Polymer* 56 (2015), s. 452–463.
- [28] P. Strachota. *Analysis and Application of Numerical Methods for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion Equations*. Dizertační práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2012.
- [29] M. Suchomelová. *Evolution Equations for Planar Curves and Their Generalization*. Diplomová práce, program Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2022.
- [30] M. Suchomelová. *Geometrický pohyb křivek a jeho aplikace*. Bakalářská práce, obor Matematické inženýrství. FJFI ČVUT v Praze, 2020.
- [31] G. Sundaramoorthi, A. Yezzi a A. Mennucci. “Sobolev Active Contours”. In: *International Journal of Computer Vision* 73 (led. 2005), s. 345–366.
- [32] D. Ševčovič. “Qualitative and quantitative aspects of curvature driven flows of planar curves”. In: *Topics on partial differential equations, Lecture notes* (2007). MATFYZPRESS, Charles University in Prague, s. 55–119.

- [33] D. Ševčovič a S. Yazaki. “Evolution of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity”. In: *Japan J. Indust. Appl. Math.* 28.3 (2011), s. 413–442.
- [34] A. N. Tichonov a A. A. Samarskij. *Rovnice matematické fyziky*. Praha CSAV, 1955.
- [35] WolframAlpha. *Dragonfly curve*. Navštíveno dne 8. 11. 2023. URL: <https://www.wolframalpha.com/input?i=dragonfly+curve&assumption=%22ClashPrefs%22+-%3E+%7B%22PopularCurve%22%2C+%22DragonflyCurve%22%7D>.
- [36] A. L. Yarin, S. Koombhongse a D. H. Reneker. “Bending instability in electrospinning of nanofibers”. In: *Journal of Applied Physics* 89.5 (2001), s. 3018–3026.
- [37] A. L. Yarin., B. Pourdeyhimi a S. Ramakrishna. *Fundamentals and Applications of Micro- and Nanofibers*. Cambridge University Press, 2014.