

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
PRAZE**

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Spektroskopie nehermitovských kvantových
systémů**

Autor: Matěj Herrmann

Vedoucí: Ing. Miroslav Krůs, Ph.D.

Akademický rok: 2023/2024

FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
KATEDRA FYZIKY

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2022/2023



Student: Matěj Herrmann

Studijní program: Jaderná a částicová fyzika

Název práce: Spektroskopie nehermitovských kvantových systémů
(česky)

Název práce: Non-hermitian quantum system spectroscopy
(anglicky)

Jazyk práce: Čeština

Pokyny pro vypracování:

- 1) seznámte se s nehermitovskou kvantovou mechanikou
- 2) seznámte se s nehermitovskými degeneracemi ve dvouhladinových systémech
- 3) seznámte se základy optické a XUV spektroskopie
- 4) porovnejte spektra vybraných atomů a identifikujte mezi nimi "dvouhladinové" systémy

Doporučená literatura:

- [1] N. Moiseyev: Non-Hermitian Quantum Mechanics, Cambridge University Press (2011)
- [2] I. Rotter: The role of exceptional points in quantum systems, arXiv:1011.0645 [quant-ph]
- [3] W.D. Heiss: J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 2455
- [4] D. L. Pavia et al.: Introduction to Spectroscopy, Cengage Learning, Stamford, CT, USA (2009)

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Miroslav Krůs, Ph.D.


Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Ústav fyziky plazmatu AV ČR, v. v. i.

Datum zadání bakalářské práce: 20.10.2022

Termín odevzdání bakalářské práce: 02.08.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.


.....
garant studijního programu


.....
vedoucí katedry




.....
děkan

V Praze dne 20.10.2022

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Břehová 7
115 19 Praha 1



PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Jméno a příjmení studenta: Matěj Herrmann
Osobní číslo: 502476
Studijní program: Jaderná a částicová fyzika
Studijní obor: /
Specializace: /

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Spektroskopie nehermitovských kvantových systémů

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiatů.

V Praze dne 2.1.2024

.....*Herrmann*.....

podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především Ing. Miroslavu Krúsovi, Ph.D. za čas, který věnoval vedení mé bakalářské práce, za jeho trpělivost a pomoc při realizaci praktické části práce.

Matěj Herrmann

Název práce: **Spektroskopie nehermitovských kvantových systémů**

Autor: Matěj Herrmann

Studijní program: Jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Miroslav Krůs, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Ústav fyziky plazmatu AV ČR, v. v. i.

Abstrakt:

Význačné body jsou jedním z hlavních důsledků zavedení nového, nehermitovského formalismu kvantové mechaniky a mají využití například ve vývoji senzorů. Význačné body byly pozorovány ve vlnovodech a v mikrodutinách. Tato práce se zabývá přípravou na pozorování těchto bodů v obalu atomu rubidia pomocí provazování excitovaných stavů s kontinuem osvětlením laserem. Tento laser musí mít uniformní intenzitu, stabilní vlnovou délku v rozmezí 2 nm a nesmí způsobovat dvoufotonovou absorpci v rubidiu. Byla otestována možnost použití tvarovače paprsku AdlOptica Nr.289-05 ke splnění prvního požadavku a bylo zjištěno, že tento tvarovač není vhodný k přeměně intenzity do uniformního tvaru. Pro ověření zbylých dvou požadavků při použití titan-safírového laseru byla provedena spektroskopie rubidia. Pomocí získaných spekter byla potvrzena vhodnost testovaného laseru pro plánovaný experiment. .

Klíčová slova: Nehermitvská kvantová mechanika, Význačné body, Spektroskopie, Tvarovač paprsku

Title: **Non-hermitian quantum system spectroscopy**

Author: Matěj Herrmann

Abstract:

Exceptional points are one of the main results of a new non-Hermitian formalism of quantum mechanics and have applications for example in sensor development. Exceptional points were already observed in waveguides and in microcavities. This work describes the preparation phase for an experiment which would observe exceptional points in rubidium by coupling excited states with continuum via laser. This laser must have uniform intensity, stable wavelength within a range of 2 nm and it must not cause two-photon absorption in rubidium. An AdlOPTica Nr.289-05 beam shaper was tested as a possible device to create a uniform intensity beam profile and it was concluded that it is not suitable for that purpose. Fulfilment of the two other conditions when a Titan-sapphire laser is used was tested with spectral measurements. The collected spectra show that the laser is suitable for the experiment.

Key words: Non-hermitian quantum mechanics, Exceptional points, Spectroscopy, Beam shaper

Obsah

1	Úvod	11
2	Význačné body v nehermitovské kvantové mechanice	13
2.1	Hermitovská kvantová mechanika	13
2.1.1	Základní principy Hermitovské kvantové mecha- niky	13
2.1.2	Rezonance v Hermitovské kvantové mechanice .	14
2.1.3	Shrnutí problematiky	21
2.2	Nehermitovská kvantová mechanika	21
2.2.1	Rezonance v Nehermitovské kvantové mechanice	22
2.2.2	Vlnové funkce nehermitovské kvantové mechaniky	24
2.2.3	C-součin	26
2.3	Význačné body v nehermitovské kvantové mechanice .	27
2.3.1	Autoortoganalita pro nehermitovské matice . .	28
2.3.2	Vliv význačných bodů na pozorovatelné veličiny	30
2.3.3	Berryho fáze	31
3	Experimentální motivace	32
4	Možný příklad provazovacího laseru	34
4.1	Použité přístroje	34
4.2	Experimentální soustava a postup měření	34
4.3	Výsledky	36

4.4	Diskuze	40
5	Měření spekter rubidia	42
5.1	Použité přístroje	42
5.2	Experimentální soustava a postup měření	42
5.3	Výsledky	43
5.3.1	Analýza laseru	43
5.3.2	Spektrum rubidia	46
5.4	Diskuze	48
6	Závěr	49

Kapitola 1

Úvod

Standardní, hermitovská formulace kvantové mechaniky má potíže s popisem některých jevů, například s komplexními refrakčními indexy v optice, s parito-časovou symetrií Hamiltoniánů v kvantové teorii pole a s rezonancemi. K lepšímu popisu rezonancí zavádíme nový nehermitovský formalismus kvantové mechaniky. Hlavním rozdílem mezi těmito dvěma formalismy je požadavek na hermitovskost operátorů $\langle f|\hat{A}|g\rangle = \langle g|\hat{A}|f\rangle^*$, tento požadavek nemusí v nehermitovské kvantové mechanice platit. Jedním z hlavních důsledků popisu systému tímto novým formalismem je možnost existence takzvaných význačných bodů. Význačné body jsou body, kde dva ortogonální vlastní stavy hamiltoniánu splynou v jeden stav, který je ortogonální sám na sebe. Vznik těchto stavů je způsoben poruchovým potenciálem v hamiltoniánu, vliv tohoto potenciálu na systém popíšeme pomocí parametru λ . Později ukážeme, že existence význačných bodů je velmi citlivá na hodnotu tohoto parametru. Význačné body byly už pozorovány například ve magnonických provázaných vlnovodech [11], v chaotické optické mikrodutině [7] a v provázaných elektrických obvodech použitých jako tlumené provázané oscilátory [12]. Dalším krokem ve výzkumu význačných bodů by bylo jejich pozorování v elektronovém obalu atomu. Navrhovaný experiment, který by měl tyto body v atomu pozorovat, používá vzorek rubidia, ve kterém by excitované stavy byly přeměny na fotorezonance pomocí jejich provázáním s kontinuem laserem, na nichž by pak byl pozorován vliv význačných bodů. Tento laser musí mít uniformní intenzitu, musí mít vlnovou délku stabilní v roz-

mezi 2 nm a nesmí při jeho použití docházet k dvoufotonové absorpci v rubidiu. V experimentální části práce je prvně prozkoumána možnost použití komerčně dostupného tvarovače paprsku AdlOPTica Nr.289-05 k získání paprsku s uniformní intenzitou. A poté je testována možnost použití titan-safírového laseru Coherent k provázání rezonancí s kontínuem.

Kapitola 2

Význačné body v nehermitovské kvantové mechanice

2.1 Hermitovská kvantová mechanika

2.1.1 Základní principy Hermitovské kvantové mechaniky

V kvantové mechanice je pohyb dané částice nebo systému dán Schrödingerovou rovnicí:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (2.1)$$

kde \hat{H} je hamiltonián popisující systém. Hamiltonián je ve tvaru $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$, kde \hat{p} je operátor hybnosti a \hat{V} operátor potenciálu. ψ je vlnová funkce z Hilbertova prostoru \mathcal{H} tříd kvadraticky integrabilních funkcí. Pro operátor hamiltoniánu \hat{H} platí bezčasová Schrödingerova rovnice neboli vztah pro jeho vlastní čísla a hodnoty

$$\hat{H}\psi_N = E_N\psi_N, \quad (2.2)$$

kde ψ_N jsou vlastní vektory, respektive funkce hamiltoniánu a E_N jsou jeho vlastní čísla. Soubor všech vlastních čísel operátoru \hat{A} tvoří jeho spektrum značené σ_A . Toto spektrum může být spojitě nebo diskrétní.

Stav kvantového systému experimentálně testujeme takzvanými pozorovatelnými veličinami, tyto veličiny působí jako operátory na vlastní funkce ψ a fyzicky lze změřit jejich vlastní hodnoty, dané rovnicí

$\hat{A}\phi_N = A_N\phi_N$. Pravděpodobnost naměření konkrétní hodnoty pozorovatelné veličiny \hat{A}_j je $|\phi_j|^2$, aby tyto hodnoty (vlastní čísla) bylo možno změřit, tak mohou být vlastní čísla těchto operátorů pouze reálná, tedy $\sigma_A \subset \mathbb{R}$. Z tohoto důvodu hermitovská kvantová mechanika vyžaduje, aby operátory měřitelných veličin \hat{A} byly hermitovské na funkcích z už zmíněného Hilbertova prostoru, tedy v Dirackově bracketovém zápisu splňuje operátor \hat{A} vztah

$$\langle f|\hat{A}|g\rangle = \langle g|\hat{A}|f\rangle^* . \quad (2.3)$$

Soubor měřitelných veličin, který úplně popisuje daný systém, nazýváme stavem, pro popis rezonancí rozlišujeme několik druhů stavů.

- Vázaný stav je stav systému, který je udržovaný potenciálem v jednom (nebo více) konkrétním místě v prostoru.
- Metastabilní stav je stav ovlivněný potenciálem, který má dostatečnou energii, aby se rozpadl na několik subsystémů, ale k rozpadu nedochází okamžitě, nýbrž po delší době.

Dalším důležitým výsledkem kvantové mechaniky jsou relace neurčitosti, které pro libovolný pár nekompatibilních pozorovatelných veličin \hat{A} a \hat{B} platí ve tvaru

$$\Delta_A\Delta_B \geq \frac{1}{2} |[\hat{A},\hat{B}]| , \quad (2.4)$$

kde $[\hat{A},\hat{B}]$ je komutátor daných veličin. Pro případ hybnosti a polohy, tedy kde $\hat{A} = \hat{x}$ a $\hat{B} = \hat{p}$, tento vztah přechází na Heisenbergův princip neurčitosti ve tvaru

$$\Delta_x\Delta_p \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (2.5)$$

2.1.2 Rezonance v Hermitovské kvantové mechanice

Rezonance jsou v kvantové mechanice obecně spojovány s metastabilními stavy. Rezonance dělíme na tvarové a Feshbachovy. Tvarové rezonance označují rezonance, které vznikají při průchodu částice potenciálovou bariérou a jejich poločas rozpadu výrazně závisí na tvaru

této bariéry. Feshbachovy rezonance popisuje metastabilní stav vzniklý v libovolném mnohočasticovém systému nebo v jednočasticovém systému s n -dimenzionálním potenciálem provázáním vázaného stavu s zanořeným kontinuem.

Pro základní popis rezonancí ve standardním hermitovském formalismu kvantové mechaniky použijeme systém popsany hamiltoniánem

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}, \quad (2.6)$$

kde \hat{V} je potenciál způsobující provázání nerušeného systému popsaného hamiltoniánem \hat{H}_0 . Tento hamiltonián uvažujeme takový, že podporuje vázané stavy $|\psi_b(E_b)\rangle$ příslušné energiím E_b normalizované na $\delta(E - E')$. Pro parametr $\lambda \rightarrow 0$ lze pomocí Fermiho zlatého pravidla získat rychlost rozpadu stavu Γ jako

$$\Gamma = 2\pi\lambda^2 \rho_c(E_b) |\langle \psi_b(E_b) | \hat{V} | \psi_c(E_b) \rangle|^2, \quad (2.7)$$

kde ρ_c je hustota vázaných stavů v kontinuu hamiltoniánu \hat{H}_0 . Rychlost rozpadu Γ lze považovat za neurčitost určení energie nebo za šířku rezonance. Pokud na Γ aplikujeme relaci neurčitosti ve tvaru $\frac{1}{\hbar} \Delta_E \Delta_t = 1$, dostaneme vztah pro dobu života rezonance jako

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (2.8)$$

Úzkou rezonancí rozumíme rezonanci s malým Γ , tedy s velkým poločasem rozpadu τ .

Pro ilustraci použijeme tenkou izolovanou rezonanci vzniklou interakcí v oblasti $x \leq L$ na potenciálu $V(x)$ ve tvaru

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ V_0, & x > L. \end{cases} \quad (2.9)$$

Pro tento potenciál je řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice

$$\Psi = \begin{cases} \psi_{in} = \sin(kx), & 0 \leq x \leq L, \\ \psi_{out} = A(k)e^{-iq(x-L)} + B(k)e^{+iq(x-L)}, & x > L, \end{cases} \quad (2.10)$$

kde

$$k = \sqrt{2M \frac{E}{\hbar}}, \quad \text{a} \quad q = \sqrt{2M \frac{E + V_0}{\hbar}}. \quad (2.11)$$

Předpisy pro $A(k)$ a $B(k)$ dostaneme ze spojitosti vlnové funkce v bodě $x = L$ popsané vztahy

$$\psi_{in}(L) = \psi_{out}(L), \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_{in}}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \psi_{out}}{\partial x} \right|_{x=L} \quad (2.13)$$

jako

$$A(k) = \frac{1}{2} \left(\sin(kL) + \frac{ik}{q} \cos(kL) \right) \quad (2.14)$$

a

$$B(k) = \frac{1}{2} \left(\sin(kL) - \frac{ik}{q} \cos(kL) \right). \quad (2.15)$$

Tyto vztahy lze pomocí definování $\delta(k)$ jako

$$\delta(k) = \arctan \left(\frac{-k}{q} \cot(kL) \right), \quad (2.16)$$

přepsat do tvarů

$$A(k) = |A| e^{-i\delta(k)} \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

a

$$B(k) = |A| e^{+i\delta(k)}. \quad (2.19)$$

V 1-D případě pak podíl $\frac{B(k)}{A(k)}$ dá element $S(k)$ rozptylové matice dále jen S-matice jako

$$S(k) = e^{i2\delta(k)}, \quad (2.20)$$

což je obecná vlastnost S-matice, kde $\delta(k)$ je posun fáze této matice a je definovaný až na celočíselný násobek π . Účinný průřez měření úzkých rezonancí je spojován s komplexními póly S-matice. Tyto póly se vyskytují ve dvou případech:

1. Pokud se póly vyskytují v amplitudě vystupujících vln $B(k)$, pak nejsou spojeny s rezonancí a nezávisí na parametru λ , tedy nemizí pro $\lambda \rightarrow 0$.
2. Pokud amplituda přicházejících vln $A(k)$ vymizí a póly se vyskytují na kladné části imaginární osy, tak póly přísluší vázaným stavům. Z těchto pólů ty, které jsou ve čtvrtém kvadrantu komplexní roviny, tedy $\text{Re}(k) > 0$ a $\text{Im}(k) < 0$ přísluší rezonancím.

V okolí n -tého pólu příslušného rezonanci lze matici $S(k)$ zapsat jako

$$S(k) \propto \frac{k - k_n^*}{k - k_n}, \quad (2.21)$$

kde k_n je komplexní pól s $\text{Re}(k_n) > 0$ a $\text{Im}(k_n) < 0$. Pomocí nehermitovské kvantové mechaniky lze póly analyzovat jako komplexní vlastní čísla hamiltoniánu.

Určení poloh rezonancí

Pokud budeme analyzovat hustotu stavů rezonujícího systému, tak zjistíme, že rezonance jsou spojeny s píky ve spektru hustoty stavů $\rho(E)$. Pomocí residuové věty získáme počet pólů S -matice ve spodní polovině komplexní roviny k , značený N jako

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \ln S(k)}{\partial k} dk, \quad (2.22)$$

kde \mathcal{C} je uzavřená křivka v komplexní rovině. Tuto rovnici lze, pokud jsou všechny póly v konečné vzdálenosti od reálné osy v rovině parametru k , přepsat jako

$$\frac{\partial N}{\partial k} = (2\pi i)^{-1} \frac{\partial \ln S(k)}{\partial k}. \quad (2.23)$$

Pomocí tohoto tvaru dostaneme předpis pro hustotu stavů ρ pro jednodimenzionální problém jako

$$\rho \equiv \frac{dN}{dE} = \frac{\partial N}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial E} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \ln S(E)}{\partial E}. \quad (2.24)$$

Tento předpis lze pomocí vyjádření $S(E)$ jako v rovnici (2.21) pro $k_n = E_n$ upravit do tvaru

$$\frac{1}{2\pi} \frac{-2\text{Im}(E_n)}{(E - \text{Re}(E_n))^2 + (\text{Im}(E_n))^2}, \quad (2.25)$$

kde n -tý pól energie je daný vztahem

$$E_n = E_t + \frac{(\hbar k_n)^2}{2M}, \quad (2.26)$$

kde E_t je hraniční energie, kterou musí stav překonat, aby k rezonanci mohlo dojít. Stopa rezonance v hustotě ρ jako funkce energie E je výrazněji s rostoucí výškou potenciálu V_0 . Podle Fermiho zlatého pravidla se s rostoucím potenciálem zužují rezonance, tedy Γ klesá a pro $V_0 \rightarrow +\infty$ rezonance přechází ve vázaný stav. Normalizací stavu $\psi_E(x)$ definovaného v rovnici (2.10) dostaneme maximální pravděpodobnost, že částice opustí interakční oblast, a označíme ji jako $|A_{out}(E)|^2$. Pro malé hodnoty A_{out} se v interakční oblasti objevují kontinua energie. Jednotlivé píky příslušné rezonancím jsou v modelovém případě úměrné n^2 , kde $n = 1, 2, 3, \dots$. Tyto píky jsou s rostoucí V_0 stále více lokalizované v interakční oblasti. Každá hodnota energie uvnitř rezonance, tedy energie, pro kterou platí $E_{res} - \Gamma/2 < E < E_{res} + \Gamma/2$ má stavy spojené s rezonancí. Proto rezonance není v hermitovské kvantové mechanice jen jedno řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice, ale soubor spojitých stavů neboli vlnový balík. Takovýto balík centrováný kolem energie E_n lze popsat funkcí $\Psi(x,t)_{E_n}^{WP}$ jako

$$\Psi(x,t)_{E_n}^{WP} = \frac{1}{2\Delta E} \int_{E_n - \Delta E}^{E_n + \Delta E} dE \Psi_E(x) e^{-iEt/\hbar}, \quad (2.27)$$

kde $\Psi_E(x)$ je vlastní funkce hamiltoniánu (2.6). Rychlost rozpadu v interakční oblasti lze zapsat jako

$$\Gamma(E) = |\gamma(E)|^2 = \frac{2\pi\hbar^2 q}{M} |A_{out}(E)|^2. \quad (2.28)$$

Ze vztahů (2.21) pro $k_n = E_n$ a (2.20) lze odvodit vztah pro změnu energie při změně posunu fáze jako

$$\frac{dE}{d\delta} = \frac{\hbar^4 k q}{M} \left[\frac{q^2 \sin^2(kL) + k^2 \cos^2(kL)}{\hbar^2 k q^2 L - M V_0 \sin(2kL)} \right], \quad (2.29)$$

kde konstanty k a q jsou definovány vztahy (2.11) a V_0 je výška potenciální bariéry. Je třeba zdůraznit, že vztah (2.29) umožňuje určit polohu jen dostatečně úzkých rezonancí.

Další způsob získání poloh a šířek rezonancí je pomocí stabilizačních výpočtů kontinua. Tato metoda je založena na vysoké hustotě stavů v okolí rezonance. Parametrizací energií E_n pomocí parametru λ získáme polohy rezonancí variacemi λ , jako energie, jejíž okolí je vůči variaci stabilní. Pro použití této metody je třeba diskretizovat kontinuum, toho lze docílit uzavřením problému do intervalu o délce L_c a podmínkou $\psi_E(x = L_c) = 0$. Po diskretizaci popíšeme stabilní okolí jako zakázaný přechod mezi dvěma sousedními energiemi E_j a E_{j+1} . A rezonanci jako jejich superpozici $E_r = (E_1 + E_2)/2$. Potom je hustota stavů dána jako

$$\rho_c(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{\sqrt{M}L_c}{\sqrt{2E}\pi\hbar}. \quad (2.30)$$

Pak pomocí Fermiho zlatého pravidla z ρ_c dostaneme přibližnou šířku rezonance

$$\Gamma = L_c \frac{(\Delta E)^2}{2\hbar} \sqrt{\frac{M}{2(E_r + V_0)}}, \quad (2.31)$$

kde ΔE je rozdíl E_1 a E_2 .

Rozptylová délka a přechod stavů

Pokud budeme uvažovat tří dimenzionální problém, tak řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice pro částici přilétávající podle osy x na potenciál $V(r)$ je funkce Ψ ve tvaru

$$\Psi = e^{-kx} + f_k(\Theta) \frac{e^{+kr}}{r}, \quad (2.32)$$

kterou lze pro $k \rightarrow 0$ přepsat do tvaru

$$\Psi(k \rightarrow 0) = 1 + \frac{a_0}{r}. \quad (2.33)$$

Člen a_0 z rovnice (2.42) nazveme rozptylovou délkou. A a_0 přechází z $+\infty$ do $-\infty$ s měnící se hodnotou V_0 . Pro hodnotu V_0 takovou, že

rezonance je v $E = 0$ je $a_0 = +\infty$. Pro hodnotu V_0 , kde tato rezonance přechází na vázaný stav je $a_0 = -\infty$. Tento přechod nelze zkoumat pomocí hermitovské kvantové mechaniky.

Rozptyl vlnových balíků

Uvažujeme vlnový balík definovaný ve vztahu (2.27), který je dostatečně úzký. Tedy ΔE je dostatečně malé, aby závislost amplitud na energii vymizela a k šlo zapsat jako

$$k \simeq k_n + \frac{E - E_n}{\hbar v_n}, \quad (2.34)$$

kde v_n je rychlost šíření balíku a je určena vztahem

$$v_n = \frac{\hbar k_n}{M} \quad (2.35)$$

v interakční oblasti a vztahem

$$v_n^{out} = \frac{\hbar q_n}{M} \quad (2.36)$$

mimo interakční oblast. Pro tento balík můžeme definovat parametr lokalizace $LP(t, E)$ jako

$$LP(E, t) = \frac{\rho_{in}(t, E)}{\rho_{in}(t, E) + \rho_{out}(t, E)}, \quad (2.37)$$

kde hustoty $\rho_{in}(t, E)$ a $\rho_{out}(t, E)$ jsou dány vztahy

$$\rho_{in}(t, E) = \int_0^L |\Psi_E^{WP}(x, t)|^2 dx \quad (2.38)$$

$$\rho_{out}(t, E) = \int_L^{+\infty} |\Psi_E^{WP}(x, t)|^2 dx. \quad (2.39)$$

Lokalizační parametr pro použitý model nabývá lokálních maxim pro $E \approx n^2$, tedy pro energii v okolí rezonance. Exponenciální rozptyl vlnových balíků, ke kterému dochází až po dostatečně dlouhé době, odpovídá rozptylu lokalizačního parametru popsaného vztahem

$$\ln[LP(t)] = \ln[LP(0)] - \frac{\Gamma_{LP}(t)}{\hbar} t. \quad (2.40)$$

Pomocí rozptylové teorie lze odvodit předpis pro rozptýlený vlnový balík jako

$$\Psi_{sc}(x,t) \approx ie^{ik_r x - iE_r t/\hbar} \Gamma \Phi(E_r) \int_0^{+\infty} dE \frac{e^{-i(E-E_r)(t-x/v_r)/\hbar}}{E - E_r + \frac{i}{2}\Gamma}. \quad (2.41)$$

Za předpokladů, že zaprvé $\Phi(E)$ mělo maximum v okolí E_r a může být nahrazeno $\Phi(E_r)$, a zadruhé že integraci přes $\langle 0, +\infty \rangle$ lze rozšířit na integraci přes $\langle -\infty, +\infty \rangle$ bez významné změny hodnoty, lze rozptýlený vlnový balík popsat jako

$$|\Psi_{sc}(x,t)|^2 = \frac{2\pi M\Gamma^2}{\hbar^2 k_r} |\Phi(k_r)|^2 e^{-\Gamma t/\hbar} e^{+\frac{\Gamma x}{\hbar v_r}}. \quad (2.42)$$

Rozptýlený vlnový balík popsaný v rovnici (2.42) se exponenciálně rozplývá v čase a diverguje s $x \rightarrow +\infty$. Tato funkce není kvadraticky integrabilní, a tedy se neshoduje s předpoklady hermitovské kvantové mechaniky. Tento rozkol je způsoben rozšířením integrace, která zanedbala vliv komplexních pólů S-matice.

2.1.3 Shrnutí problematiky

Jednou z nejpodstatnějších motivací k zavedení nehermitovské kvantové mechaniky je studium rezonancí, které nejsou ve standardní hermitovské kvantové mechanice dobře definované. A při jejich studiu jsou zanedbávány komplexní póly S-matice, čímž vzniká kvadraticky neintegrabilní funkce rozptýleného vlnového balíku (2.42). V nehermitovské kvantové mechanice, kde rezonance studujeme jako komplexní vlastní čísla tento problém vymizí. Dalším problémem se studiem rezonancí je přechod mezi rezonančními a vázanými stavy, který není možné ve standardní kvantové mechanice analyzovat.

2.2 Nehermitovská kvantová mechanika

V této sekci budeme diskutovat změny vzniklé přechodem do nehermitovské kvantové mechaniky a její základní principy. Ve formalismu nehermitovské kvantové mechaniky neplatí vztah (2.3). Tato vlastnost závisí jak na vlastnostech hamiltoniánu \hat{H} , tak i na vlastnostech

vlnových funkcí $|\psi\rangle$. Pro popis rezonancí se využívají divergentní periodické funkce.

2.2.1 Rezonance v Nehermitovské kvantové mechanice

Z výzkumu rezonancí v hermitovské kvantové mechanice jsme získali S-matici a asociaci mezi jejími komplexními póly a rezonancemi. V nehermitovské kvantové mechanice lze póly S-matice považovat za komplexní vlastní čísla hamiltoniánu při aplikaci otevřených okrajových podmínek. Tyto podmínky dají společně s podmínkou $A_{\pm}(E = E_n) = 0$ vyplývající z požadavku na periodičnost vlastních funkcí, asymptotické řešení ve tvaru

$$\psi(E \rightarrow +\infty) = A_+(E)e^{-ik^+x} + B_+(E)e^{+ik^+x}, \quad (2.43)$$

$$\psi(E \rightarrow -\infty) = A_-(E)e^{-ik^-x} + B_-(E)e^{+ik^-x}. \quad (2.44)$$

Podmínku $A_{\pm}(E = E_n) = 0$ lze splnit ve dvou případech:

1. Pro $k_n^+ = i|k_n^+|$, tento případ odpovídá vázaným stavům.
2. Pro $k_n^+ = |k_n^+|e^{-i\alpha_n}$, které odpovídají rezonancím a dávají komplexní energii

$$E_n = \varepsilon_n - i/2\Gamma_n = E_+^{th} + |\hbar k_n^+|^2 e^{-2i\alpha_n} / (2M), \quad (2.45)$$

$$\text{kde } \alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{\Gamma_n}{2(\varepsilon_n - E_+^{th})}$$

Pokud aplikujeme otevřené okrajové podmínky na modelový případ ze studia rezonancí hermitovskou kvantovou mechanikou, dostaneme komplexní hodnoty vlastní čísla. A pro řešení z (2.13) dostaneme podmínku

$$\tan(kL) = i\frac{k}{q}, \quad (2.46)$$

kde L je šířka studované bariéry a k, q jsou definovány vztahem (2.11). Tato rovnice má diskrétní řešení a tím potvrzuje značení k_n .

Póly S-matice dále klasifikujeme na:

1. Rozpadové rezonance (Decay resonances) získané aplikací otevřených okrajových podmínek na komplexní póly.
2. Záchytové rezonance (Capture resonances) spojené s komplexními virtuálními póly popisovanými později.

Přechod mezi stavy rezonance

Uvažujeme potenciál, který podporuje vázaný stav o energii $E(n, \lambda)$, kde λ je parametr potenciálu. Pokud změním parametr λ na $-\lambda$ přejde potenciál V_0 na $-V_0$ a potenciální bariéra na jámu nebo naopak. Touto transformací pro přechod z jámy na bariéru lze získat komplexní vlastní čísla. Z tohoto faktu plyne, že pro diskrétní spektrum energie existuje jen jeden předpis a mezi komplexními a reálnými hodnotami lze přecházet variací parametrů potenciálu. Pro ilustraci použijeme potenciálovou jámu ve tvaru

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ -V_0, & x > L. \end{cases} \quad (2.47)$$

Pro tento potenciál má bezčasová Schrödingerova rovnice řešení ve tvaru:

$$\begin{cases} \Psi = Ce^{ik_0x} + C'e^{-ik_0x}, & x < 0, \\ \Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & 0 < x < L, \\ \Psi = De^{ik_0x} + D'e^{-ik_0x}, & L < x, \end{cases} \quad (2.48)$$

kde A, B, C, C', D, D' jsou konstanty určené okrajovými podmínkami a funkce e^{ik_0x} a e^{-ik_0x} reprezentují asymptotické vlny. Obecná rovnice popisující jak příchozí, tak odchozí vlny má tvar

$$2\cotan(kL) = \frac{\pm i(k^2 + k_0^2)}{kk_0}, \quad (2.49)$$

kde $k_0 = \sqrt{2ME/\hbar}$ a $k = \sqrt{2M(E + V_0)/\hbar}$. Tuto rovnici lze řešit jen numericky. Vázaným a anti-vázaným stavům odpovídají čistě reálné energie, rezonančním stavům odpovídají $\text{Im}(E) < 0$ a virtuálním stavům (nepozorovatelným stavům s velmi krátkou dobou života) energie

s $\text{Im}(E) > 0$. Pro získání mechanismu přechodů mezi rezonancemi použijeme substituci

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{E}{V_0}} \quad \text{a} \quad \gamma = \sqrt{\frac{2MV_0L^2}{\hbar^2}}, \quad (2.50)$$

s jejíž pomocí lze přepsat rovnici (2.49) do tvaru

$$\gamma\alpha = (n - 1)\pi + 2 \cos^{-1}(\alpha). \quad (2.51)$$

Pravá strana této rovnice nezávisí na γ a tedy ani na hloubce potenciálu. Z této rovnice lze odvodit předpis pro energii vázaných stavů jako

$$E = -V_0(1 - \alpha^2). \quad (2.52)$$

Rovnice (2.49) jde stejným způsobem přepsat pro virtuální stavy do tvaru

$$\gamma\alpha = (n - 1)\pi + 2 \cos^{-1} \sqrt{13\alpha^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.53)$$

Virtuální stavy jsou spojeny s přicházejícími okrajovými podmínkami a mohou být komplexní i reálné. Podrobnou analýzou rovnic (2.51) a (2.53) dostaneme mechanismus přeměny rezonancí na vázané stavy. Podle tohoto mechanismu nový virtuální stav $n - 1$ (původní stav nezaniká) vzniká, jak se n -tý vázaný stav přibližuje k hraniční energii E_{th} zmenšováním hloubky potenciálové jámy. Dalším zmenšováním hloubky se k sobě virtuální stavy přibližují, pak se spojí a zmizí. Tyto stavy se znovu objeví jako komplexní řešení, tento virtuální stav se pak přemění na rezonanci o energii menší než E_{th} . Bod, kde virtuální stavy přecházejí z reálné hladiny do komplexní nazveme bodem větvení (Branch point) a jeho energie je

$$E_{bp} = -\frac{2\hbar^2}{ML^2}. \quad (2.54)$$

2.2.2 Vlnové funkce nehermitovské kvantové mechaniky

Použití odchozích vlnových funkcí umožňuje studium rezonancí, které je nemožné nebo výrazně složitější studovat ve standardní kvantové mechanice. Takovéto vlnové funkce ovšem divergují, a tedy nepatří do Hilbertova prostoru, což je zásadní problém při formulaci

vnitřního součinu. Dalším problémem je fyzikální interpretace komplexních vlastních čísel. Prvním krokem k řešení těchto problémů je zavedení transformace, která převede asymptoticky divergentní funkce na kvadraticky integrabilní funkce ze zobecněného Hilbertova prostoru. Těchto transformací je několik a jsou si navzájem ekvivalentní. Při popisu hledané transformace \hat{S} budeme uvažovat 3-D sféricky symetrický reálný Hamiltonián se vztahem pro vlastní čísla funkce ve tvaru

$$\hat{H}_S \psi_S = E \psi_S, \quad (2.55)$$

kde \hat{H}_S je transformovaný hamiltonián daný

$$\hat{H}_S = \hat{S} \hat{H} \hat{S}^{-1} \quad (2.56)$$

a ψ_S transformovaná vlnová funkce daná

$$\psi_S = \hat{S} \psi, \quad (2.57)$$

na kterou je daný požadavek, aby $\psi_S \rightarrow 0$ s $r \rightarrow 0$ zatímco $\psi \rightarrow +\infty$ ve stejné limitě.

První možností je takzvaná Zeldovičova transformace, která spočívá ve volbě $\hat{S} = e^{-\varepsilon r^2}$, kde $\varepsilon \rightarrow 0$ a umožňuje transformovaný hamiltonián zapsat jako

$$\hat{H}_S = \hat{H} + \hat{V}_{zel} = \hat{H} - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{M} \left[\sum_{j=1}^3 \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \right) \right], \quad (2.58)$$

kde x_j jsou kartézské souřadnice.

Další možností je provedení rotace asymptot do komplexní roviny, tedy provedení transformace $r \rightarrow (r - r_0)e^{i\theta} + r_0$, ve které je už vybraná poloha r_0 , kde transformace začíná. Tato transformace převádí rezonanční vlnové funkce na kvadraticky integrabilní funkce pro $\theta < \theta_{res}$, kde $\theta_{res} = \arctan\left(\frac{\Gamma}{2(E - E_t)}\right)$. A udává operátor \hat{S} ve tvaru

$$\hat{S} = e^{i\theta/2} e^{i\theta x_j \frac{\partial}{\partial x_j}} \quad (2.59)$$

pro transformaci jedné souřadnice. Tuto metodu lze aplikovat jen na analytické funkce a lze ji interpretovat jako škálování souřadnice komplexní fázi.

Metoda komplexního škálování má ovšem problémy při její numerické aplikaci, jelikož škáluje celý potenciál. Tento problém je řešen zavedením takzvané externí škálovací transformace, která mění \hat{S} do tvaru

$$\hat{S}_{ES} = \begin{cases} 1, & r_j < r_0 \\ e^{i\theta(r_j-r_0)\frac{\partial}{\partial x_j}}, & r_j \geq r_0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Tato transformace jde jednoduše aplikovat na potenciály krátkého dosahu, ale kinetický člen po transformaci je výrazně komplikovanější než před transformací. Tuto metodu lze zlepšit pro určité případy vložením komplexního tlumivého potenciálu. Touto transformací pro r_0 dostatečně daleko od působení potenciálu, pak hamiltonián přejde do tvaru

$$\hat{H}_{SES} = \hat{T} + \hat{V}_{CAP}, \quad (2.61)$$

kde \hat{T} je neškálovaná kinetická energie, ale potenciál \hat{V}_{CAP} je složitý.

2.2.3 C-součin

Další nezbytnou součástí kvantové mechaniky je vnitřní součin, který umožňuje získávání měřitelných hodnot z vlnových funkcí. Tento součin je třeba v nehermitovské kvantové mechanice předdefinovat, protože vlastní funkce nezbytně netvoří úplnou bázi. Vnitřní součin tedy nahrazujeme tzv. c-součinem, který budeme značit jako $(\cdot|\cdot)$ a musí splňovat podmínky ortogonality $(\psi_n|\psi_{n \neq m}) = \delta_{nm}$ a uzavřenost. Pro definici c-součinu použijeme nehermitovský, komplexně škálovaný operátor \hat{O}_θ s vlastními funkcemi ψ_n^θ a čísly λ_n^θ , tento operátor budeme reprezentovat maticí \mathbb{O}_θ v libovolné ortonormální bázi $\{f_j\}_{j=1,2,\dots}$. Prvky této matice jsou dány vztahem $[\mathbb{O}_\theta]_{j,k} = \langle f_k|\hat{O}_\theta|f_j \rangle$. V prvním kroku převedeme problém vlastních čísel operátoru na problém vlastních čísel matice:

$$\mathbb{O}_\theta \mathbf{C}_n^\theta = \lambda_n^\theta \mathbf{C}_n^\theta, \quad (2.62)$$

$$[\mathbf{D}_m^\theta]^T \mathbb{O}_\theta = \lambda_m^\theta [\mathbf{D}_m^\theta]^T, \quad (2.63)$$

$$[\mathbf{D}_{m \neq n}^\theta]^T \mathbf{C}_n^\theta = 0, \quad (2.64)$$

kde $[\mathbf{D}_m^\theta]^T$ je levý vlastní vektor matice a \mathbf{C}_n^θ je pravý. Pomocí těchto vektorů definujeme vlastní stavy operátoru:

$$\text{bra jako} \quad (\psi_n^\theta| = \sum_j C_{j,n} f_j(x) \quad (2.65)$$

$$\text{a ket jako} \quad |\psi_m^\theta) = \sum_j D_{j,m} f_j^*(x). \quad (2.66)$$

Potom je c-součin definovaný pomocí

$$(\psi_n^\theta|\psi_m^\theta) = \sum_j D_{j,m} C_{j,n} = \delta_{n,m}. \quad (2.67)$$

Pro c-součin lze dokázat, že obecně platí tvrzení, že všechny nedege-nerované rezonance jsou vždy ortogonální. Pomocí c-součinu lze pravděpodobnost přežití $S(t) = |\langle \phi(0)|\phi(t)\rangle|^2$ pro reálný hamiltonián, původní vlnový balík mimo vázaný stav a při použití reálných funkcí jako bázi při konstrukci c-součinu aproximovat jako

$$S(t) \simeq e^{-\Gamma_{n_{res}} t/\hbar}, \quad (2.68)$$

kde $\Gamma_{n_{res}} = -2\text{Im}E_{n_{res}}^\theta$.

F-součin je zobecnění c-součinu které umožňuje výpočet časově závislých očekávaných hodnot vlnových balíků. Toto zobecnění je diskutováno jen na omezeném prostoru, který ovšem může být libovolně velký. Cílem F-součinu je popis dynamiky rozpadajícího se systému pomocí evoluce rezonančních stavů.

2.3 Význačné body v nehermitovské kvantové mechanice

V diskuzi přechodů mezi rezonancemi a vázanými stavy jsme zjistili, že se ve spektru vyskytují body větvení, jejichž existence je velmi citlivá na vnější rušení. Tyto body lze popisovat jako autoortogonální body v c-součinu. Tedy specificky pro vlnové funkce nehermitovského hamiltoniánu Ψ_m a Ψ_n , které při variaci specifických parametrů hamiltoniánu λ splývají, hodnotu parametru, kde splynou, značíme λ_{bp} .

Pak chování při variaci popíšeme jako

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{bp}} [E_1(\lambda) - E_2(\lambda)] = 0 \quad (2.69)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{bp}} [\Psi_1(r, \lambda) - \Psi_2(r, \lambda)] = 0 \quad (2.70)$$

a v bodě splynutí musí platit

$$\Psi_1(r, \lambda_{bp}) = \Psi_2(r, \lambda_{bp}) \equiv \Psi_{bp}(r) \quad (2.71)$$

$$(\Psi_{bp}(r) | \Psi_{bp}(r)) = 0. \quad (2.72)$$

Jelikož v bodu větvení přecházejí dva vektory na jeden, lze tento bod považovat za degenerovaný. Normalizací stavů zjistíme, že amplitudy normalizovaných stavů $\Phi_{1,2}(r, \lambda) = \varepsilon_{1,2}^{-1/2} \Psi_{1,2}(r, \lambda)$, kde $\varepsilon_{1,2} = (\Psi_{1,2} | \Psi_{1,2})$, velmi rychle roste, když $\lambda \rightarrow \lambda_{bp}$.

2.3.1 Autoortogonalita pro nehermitovské matice

Autoortogonalita se může vyskytovat jen u matic, které lze transformovat na matici neprovázaných diagonálních bloků. Počet variačních parametrů nezbytných pro nalezení degenerace se liší podle druhu matice, respektive je 2 pro symetrické nehermitovské a reálné symetrické matice a 3 pro komplexní hermitovské matice. Pro ilustraci použijeme 2×2 matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

tato matice má vlastní čísla

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{1 + \lambda^2} \quad (2.74)$$

a vlastní vektory

$$\mathbf{c}_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda \\ E_{\pm} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

tyto vlastní vektory jsou ortogonální při použití c-součinu. Vlastní vektory a energie (ne vždy) splývají pro $\lambda = \pm i \equiv \lambda_{bp}$, jejich hodnoty

v tomto bodě pak jsou

$$E_{bp} = 0 \quad (2.76)$$

$$\text{a } \mathbf{c}_{bp} = \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Jelikož se autoortogonalita vyskytuje jen pro určité hodnoty parametrů, tak je možné, že se jedná jen o "náhodný" jev bez dalšího využití a fyzikálního významu. Abychom ukázali, že význačné body jsou zajímavé použijeme matici

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}, \quad (2.78)$$

kde \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou hermitovské matice, které navzájem nekomutují. Matice \mathbf{H} má potom význačný bod pro alespoň jednu hodnotu λ . Pro okolí význačných bodů nelze obecně použít poruchovou teorii, jelikož Taylorova řada okolo λ_{bp} konverguje jen za určitých podmínek. Proto se pro hledání bodů větvení používá jiná metoda, pro její použití zapíšeme hledanou hodnotu parametru jako

$$\lambda_{bp} = \rho_c e^{-i\phi_c}. \quad (2.79)$$

Fázi ϕ_c a velikost ρ_c určíme vztahy

$$\rho_c^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)(2n-3)r_{n-2}^{-1} - (n-3)(2n-5)r_{n-1}^{-1}}{n(2n-5)r_n - (n-1)(2n-3)r_{n-1}} \quad (2.80)$$

$$\cos \phi_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2n-3}(\rho_c r_n) + \frac{n-3}{2n-3}(\rho_c r_{n-1}^{-1}) \right], \quad (2.81)$$

kde r_n je

$$r_n = \frac{E^{(n)}}{E^{(n-1)}} \quad (2.82)$$

s E_n daným vztahem

$$E^{(n)} = \frac{P_{n-2}(\cos \phi_c) - P_n(\cos \phi_c)}{(2n-1)\rho_c^{n-1}} + R^{(n)}, \quad (2.83)$$

kde $R^{(n)}$ je zanedbatelně malý zbytek.

2.3.2 Vliv význačných bodů na pozorovatelné veličiny

Pro studium chování pozorovatelných veličin v dostatečně blízkém okolí význačného bodu použijeme aproximace,

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &\simeq E_{bp} + \alpha\sqrt{\lambda - \lambda_{bp}} \\ E_2(\lambda) &\simeq E_{bp} - \alpha\sqrt{\lambda - \lambda_{bp}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

pro dvě vlastní hodnoty, které splynou v $\lambda \rightarrow \lambda_{bp}$ a

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\lambda)\rangle &= \mathcal{N}_1|\Phi_{bp}\rangle + \sqrt{\lambda - \lambda_{bp}}|\chi\rangle + (\lambda - \lambda_{bp})|\xi\rangle + \dots \\ |\Phi_2(\lambda)\rangle &= \mathcal{N}_1|\Phi_{bp}\rangle - \sqrt{\lambda - \lambda_{bp}}|\chi\rangle + (\lambda - \lambda_{bp})|\xi\rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.85)$$

pro jejich příslušné vlastní funkce. Tyto funkce jsou ortogonální. Jak se hodnota parametru λ blíží k λ_{bp} pak hodnoty $\Gamma_1 = -2\text{Im}(E_1)$ budou mít ostrý pík, zatímco hodnoty $\Gamma_2 = -2\text{Im}(E_2)$ budou klesat. Očekávané hodnoty škálovaného operátoru \hat{O}_θ získané c-součinem jsou v okolí význačného bodu velmi vysoké a s $\lambda \rightarrow \lambda_{bp}$, jejich normované hodnoty $\bar{O}_{1,2} \rightarrow \infty$. Tedy pokud je parametr měněn tak, že systém zůstává ve stejném vlastním stavu, je možné dosáhnout velmi vysokých očekávaných hodnot u libovolné měřitelné veličiny nekomutující s hamiltoniánem. Pokud místo konkrétního stavu studujeme vlnový balík $|\Phi_0\rangle = \sum_{j=1} a_j|\Psi_j(\lambda)\rangle$, pak je aproximace očekávané hodnoty energie daná

$$\begin{aligned} \bar{E}_{WP} &= (\Phi_0|\hat{H}_\theta|\Phi_0) \simeq \\ &\frac{2(\Psi_{bp}|\Phi_0)(\chi|\Phi_0)}{(\chi|\Psi_{bp})}E_{bp} + \frac{\alpha(\Psi_{bp}|\Phi_0)^2}{(\chi|\Psi_{bp})} + \frac{\alpha(\lambda - \lambda_{bp})(\Phi_{bp}|\Phi_0)^2}{(\chi|\Psi_{bp})} + \sum_{j \neq 1, \neq 2} (\Psi_j|\Phi_0)^2 E_j(\lambda) \end{aligned} \quad (2.86)$$

a v prvních dvou řádech λ -nezávislá. Pro časově závislé měřitelné veličiny lze pravděpodobnost nalezení částice v interakční oblasti získat pomocí F-součinu jako

$$p(t) = \left| \sum_{j=1} a_j^2 e^{-\Gamma_j t/\hbar} \right|. \quad (2.87)$$

Pro systém v dostatečné blízkosti význačného bodu lze nalézt časový interval, na kterém se zdánlivě vytvářejí částice. Toto je možné, protože $p(t)$ a $|\Psi_j\rangle$ nelze změřit současně.

2.3.3 Berryho fáze

Pokud při hledání význačného bodu budeme měnit parametr λ podél kružnice v komplexním prostoru se středem v $\lambda = \lambda_{bp}$, tedy

$$\lambda - \lambda_{bp} = R e^{i\phi}. \quad (2.88)$$

Vlastní funkce a vektory dvou ortogonálních stavů, které splývají ve význačném bodě, získáme ze vztahu (2.85) pro vlastní čísla jako

$$E_{\pm} = E_{bp} \pm \alpha R^{1/2} e^{\frac{i}{2}\phi} \quad (2.89)$$

a (2.86) pro vlastní vektory jako

$$\begin{aligned} |\psi_+(\phi)\rangle &= R^{-1/4} e^{-\frac{i}{4}\phi} [2(\chi|\psi_{bp})]^{-1/2} [|\psi_{bp}\rangle - R^{1/2} e^{\frac{i}{2}\phi} |\chi\rangle], \\ |\psi_-(\phi)\rangle &= i R^{-1/4} e^{-\frac{i}{4}\phi} [2(\chi|\psi_{bp})]^{-1/2} [|\psi_{bp}\rangle - R^{1/2} e^{\frac{i}{2}\phi} |\chi\rangle]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Pro takovéto stavy potom rotace po kružnici o $\phi = 2\pi$ změní vlastní energie a vektory do tvaru

$$\begin{aligned} E_{\pm}(2\pi) &= E_{\mp}(0), \\ |\psi_{\pm}(2\pi)\rangle &= \mp |\psi_{\mp}(0)\rangle \end{aligned} \quad (2.91)$$

a rotace o 4π ve tvaru

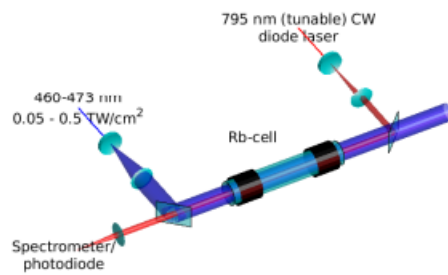
$$\begin{aligned} E_{\pm}(4\pi) &= E_{\pm}(0), \\ |\psi_{\pm}(4\pi)\rangle &= -|\psi_{\pm}(0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Tedy po rotaci 4π u vlastního vektoru vznikne fáze velikosti π , která zanikne po rotaci o další 4π . Tato fáze se nazývá Berryho fází nebo geometrickou fází.

Kapitola 3

Experimentální motivace

Experimentální část práce se zabývá přípravou na pokus o pozorování význačných bodů v atomovém obalu, konkrétně v elektronovém obalu rubidia. Během experimentu by byly excitované 5P ($5P_{1/2}$ a $5P_{3/2}$) stavy transformovány na fotorezonance pomocí CW laseru o vlnové délce ~ 473 nm. Dalším krokem by byla příprava rezonancí s přibližně Lorenzovskými absorpčními čarami. Takovýto tvar rezonancí bude třeba při dalších fázích experimentu. Během přípravy rezonancí by byly excitované stavy provázány s kontinuem pomocí kontinuálního laseru o vlnové délce o málo nižší než 473,67 nm. Tímto se excitované 5P stavy v rubidiu změní na izolované fotorezonance, které se navzájem nepřekrývají, ani nejsou mezi sebou provázány. Plánovaná soustava laserů pro tento experiment je zobrazená v Obr. 3.1. Rubidium by pak bylo testováno kontinuálním nebo impulzním laserem o vlnové délce mezi 770 a 800 nm. Vlastnosti rezonance by pak byly vyčteny z absorpčního spektra, jehož tvar by odrážel komplexní fázi dipólového momentu rezonance. Z měření Fano-profilů absorpčního spektra lze pak vypočítat zmíněnou komplexní fázi. V dalších částech navrhovaného experimentu by byly měřeny Rabiho oscilace a jejich interakce s význačnými body. Tyto interakce by byly pozorovány jako fázové posuny Rabiho oscilací a jako 'odraz' Rabiho oscilací od význačného bodu. Tyto kroky nejsou ovšem součástí této práce.



Obr. 3.1: Schéma případného experimentu měřícího význačné body v rubidiu. Převzato z interních materiálů experimentu

Kapitola 4

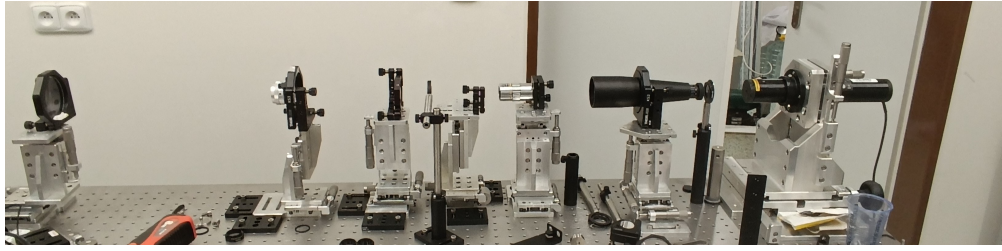
Možný příklad provazovacího laseru

4.1 Použité přístroje

Spojné čočky, mikroskop se zvětšením $10\times$, kolimátor, irisové clony, kruhová mikroapertura, mikroskopický objektiv se zvětšením $20\times$, tvarovač paprsku (beam shaper) AdlOPTica Nr.289-05, červený laser o nízké intenzitě, jednobarevná digitální kamera FLIR Grasshopper 3, optický stůl.

4.2 Experimentální soustava a postup měření

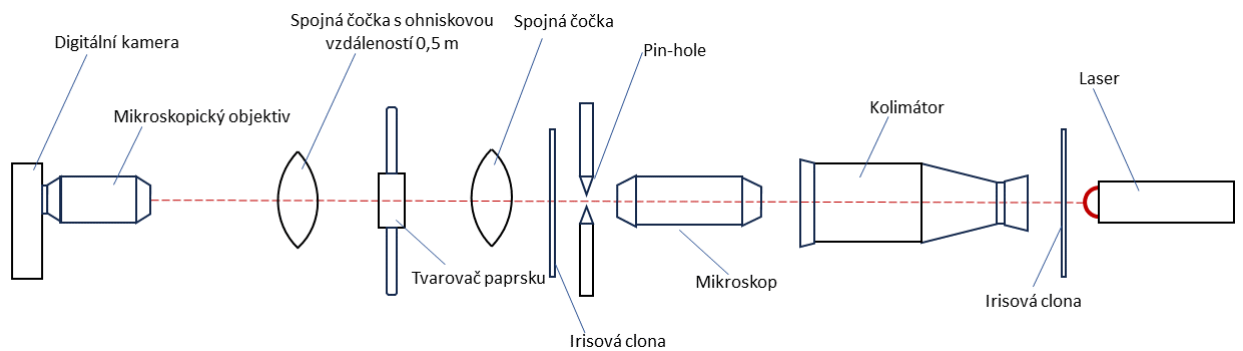
Pro testování použitelnosti tvarovače paprsku AdlOPTica Nr.289-05 k vytvoření paprsku s uniformním profilem k detekci význačných bodů v rubidiu sestavíme teleskop s prostorovým filtrem zobrazený ve schématu na Obr. 4.3. Kruhová mikroapertura je umístěná v ohnisku mikroskopu, tato apertura čistí paprsek. Ten po průchodu aperturou má přibližný tvar Gaussovy funkce, který je třeba pro dobré fungování tvarovače. a její reálná konstrukce je na fotkách 4.1 a 4.2.



Obr. 4.1: Fotografie experimentální soustavy upravující profil laserového paprsku z boku. Na fotografii není kamera s mikroskopickou optikou.



Obr. 4.2: Fotografie experimentální soustavy upravující profil laserového paprsku z konce s kamerou. Na fotografii není kamera s mikroskopickou optikou.

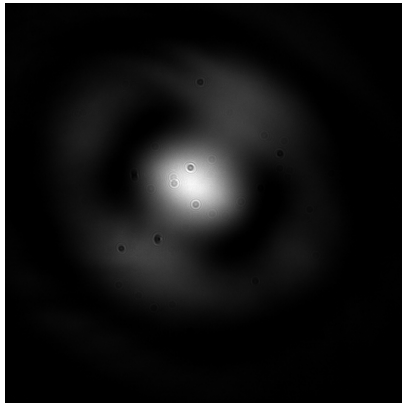


Obr. 4.3: Schéma experimentální soustavy upravující profil laserového paprsku.

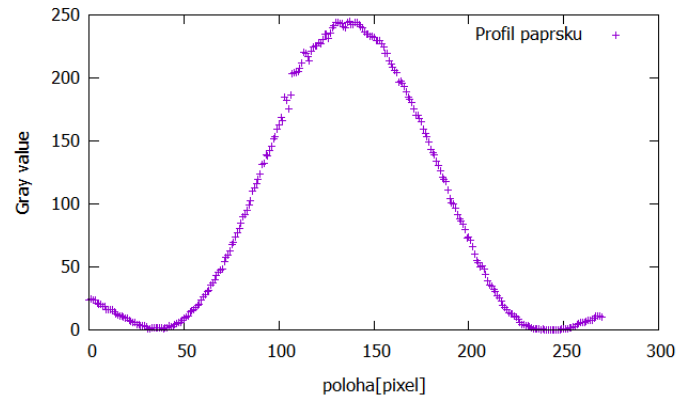
4.3 Výsledky

Během experimentu bylo naměřeno devět profilů bez tvarovače paprsku. Tato měření byla provedena v různých vzdálenostech v okolí ohniska, přesněji ve vzdálenostech do 5mm a jsou zobrazena v obrázcích 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 a 4.8 společně se svými profily pro různé vzdálenosti. Pozorováním paprsku bylo nalezeno ohnisko. Profil intenzity v ohnisku je na Obr. 4.8.

Měření s tvarovačem paprsku jsou zobrazená v obrázcích 4.9, 4.10 a 4.11. Kvůli diskuzi výsledků byl také naměřen paprsek jen po průchodu mikroskopem bez další aparatury, toto měření je na Obr. 4.12

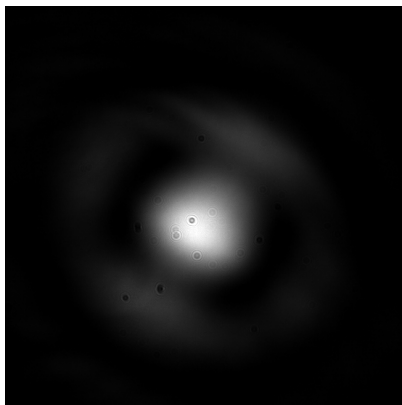


(a) Snímek z kamery v odpovídající vzdálenosti.

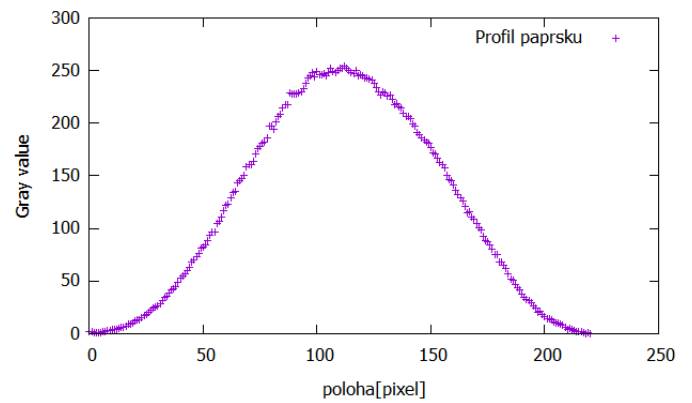


(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku

Obr. 4.4: Snímek laseru kamerou a jeho profil 2,384 mm od ohniska

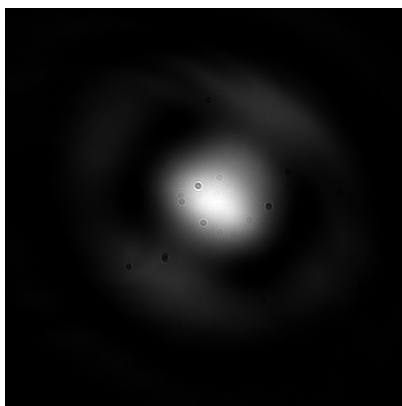


(a) Snímek z kamery v odpovídající vzdálenosti.

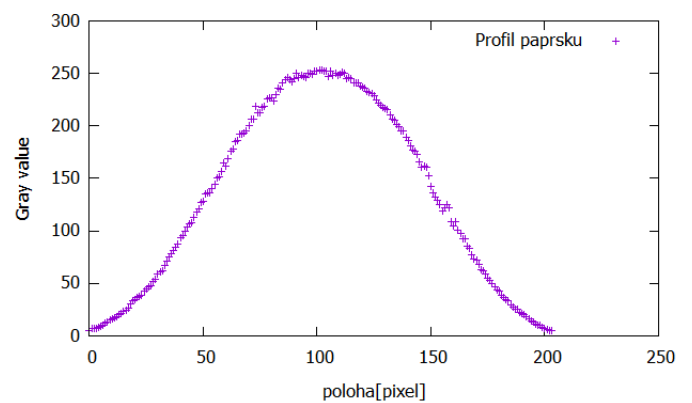


(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku

Obr. 4.5: Snímek laseru kamerou a jeho profil pro hodnotu 1,634 mm od ohniska

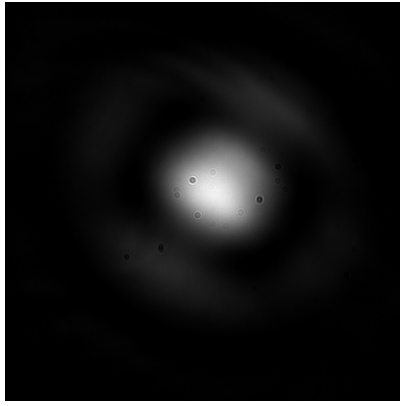


(a) Snímek z kamery v odpovídající vzdálenosti.

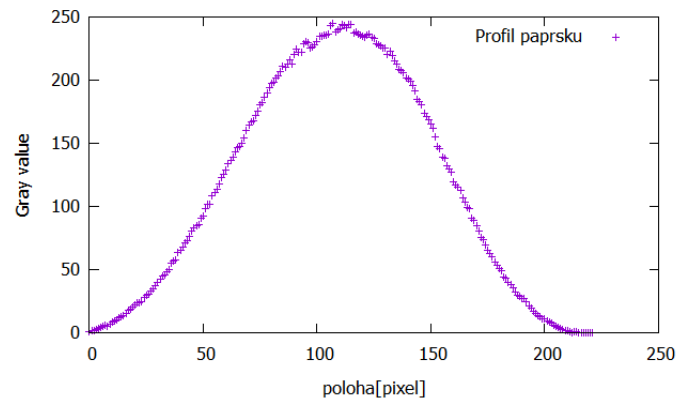


(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku

Obr. 4.6: Snímek laseru kamerou a jeho profil 1,384 mm od ohniska

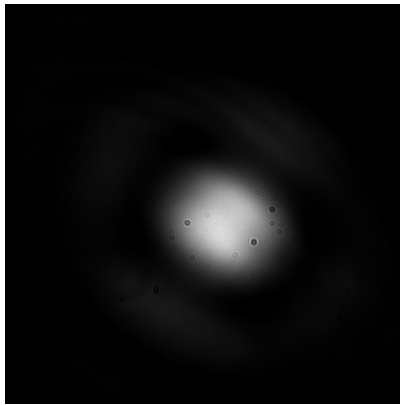


(a) Snímek z kamery v odpovídající vzdálenosti.

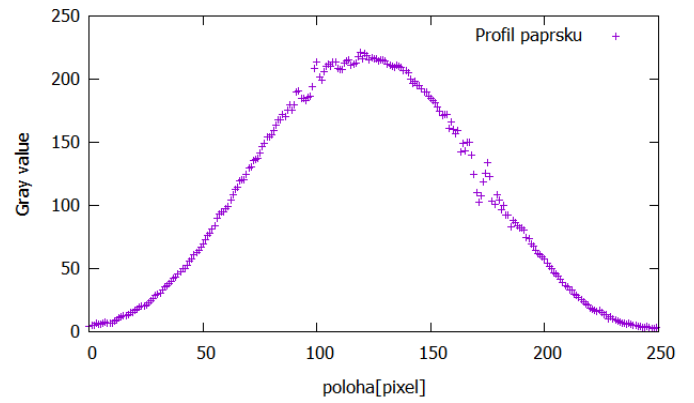


(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku

Obr. 4.7: Snímek laseru kamerou a jeho profil 0,934 mm od ohniska

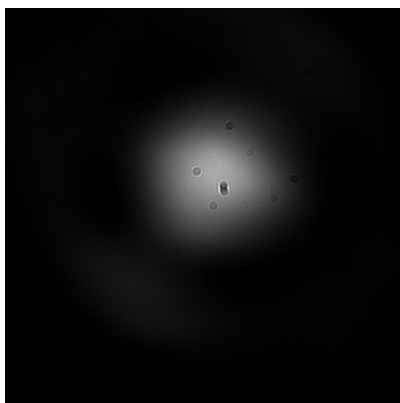


(a) Snímek z kamery v odpovídající vzdálenosti.

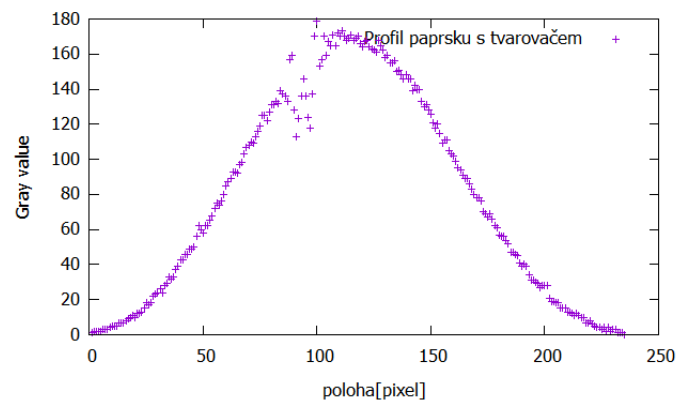


(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku

Obr. 4.8: Snímek laseru kamerou a jeho profil v ohnisku

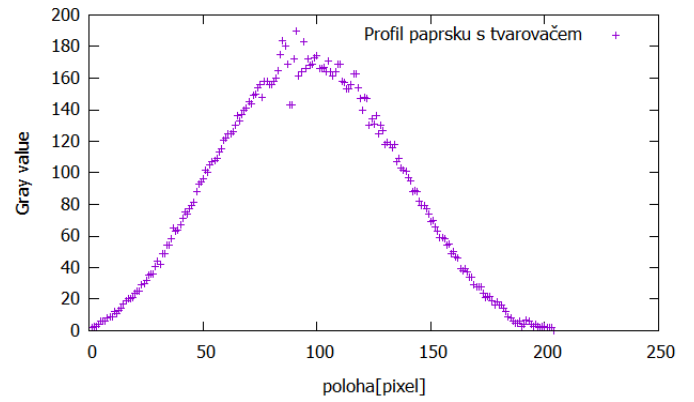
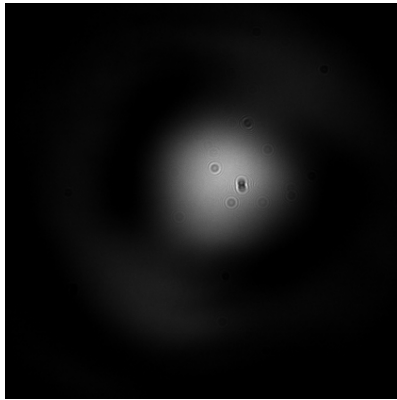


(a) Snímek z kamery s tvarovačem vlny.



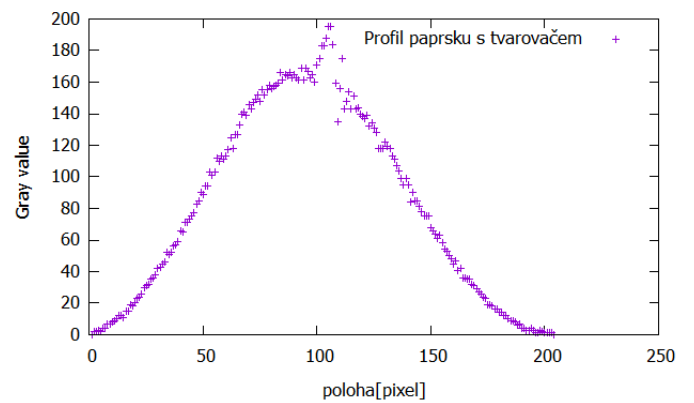
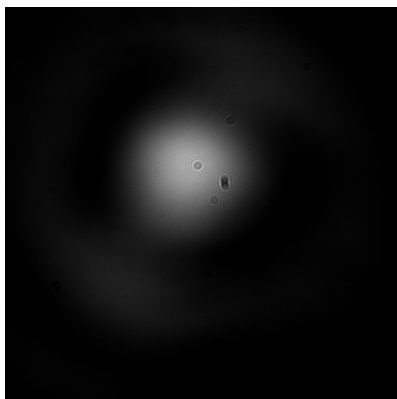
(b) Profil paprsku odpovídajícího snímku.

Obr. 4.9: Snímek laseru s tvarovačem paprsku a jeho profil v ohnisku



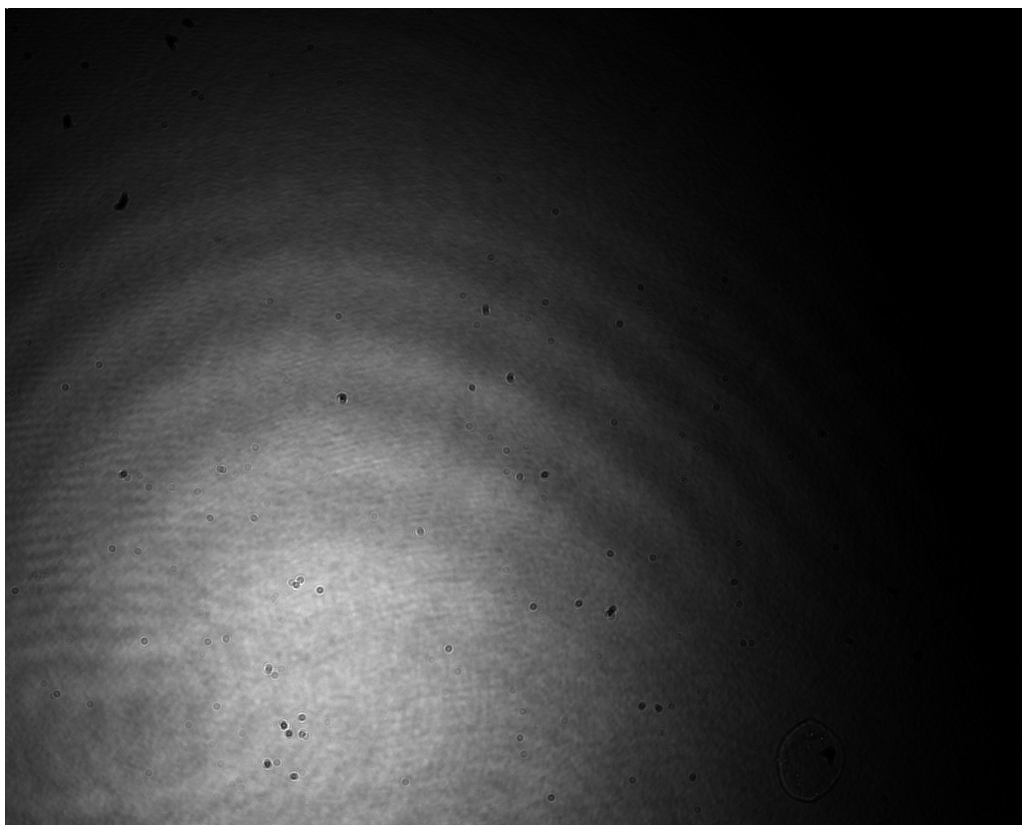
(a) Snímek z kamery s tvarovačem vlny. (b) Profil paprsku odpovídajícího snímku.

Obr. 4.10: Snímek laseru s tvarovačem paprsku a jeho profil 1,384 mm od ohniska



(a) Snímek z kamery s tvarovačem vlny. (b) Profil paprsku odpovídajícího snímku.

Obr. 4.11: Snímek laseru s tvarovačem paprsku a jeho profil 1,634 mm od ohniska



Obr. 4.12: Snímek paprsku kamerou po průchodu mikroskopem, bez další aparatury.

4.4 Diskuze

Z měření konečných profilů na obrázcích 4.9, 4.10 a 4.11 je vidět, že tvarovač vlny, který měl přeměnit její profil na uniformní distribuci v tomto případě nefungoval. K tomu mohlo dojít z několika důvodů. Prvně tvarovač vyžaduje pro správné fungování profil paprsku ve tvaru Gaussovy funkce. Reálný profil se dobře blíží tvaru Gaussovy funkce, ale nemá tvar určený touto funkcí. Druhým možným zdrojem poruchy jsou difrakce zobrazené v Obr. 4.12 způsobené mikroskopem použitým v prostorovém filtru, tyto difrakce jsou utlumeny po průchodu kruhovou mikroaperturou, ale nevymizí úplně a jsou detekovatelné i v profilu laseru po průchodu kompletní soustavou. Tyto difrakce se nepodařilo odstranit jemným laděním polohy a náklonu paprsku, jedná se tedy nejspíš o poruchu samotného mikroskopu. Další čištění paprsku by pravděpodobně zlepšilo fungování tvarovače, ale použití prostorového filtru snižuje intenzitu laseru a pro aplikaci v plánovaném experimentu je třeba vysoká intenzita. Mnohonásobné čištění paprsku

tedy není použitelné řešení pro tento experiment. Další možností je nahrazení tvarovače jiným optickým prvkem, například speciálně navrženým tvarovačem.

V naměřených profilech jsou vidět poruchy, například v Obr. 4.8 blízko středu profilu. Tyto poruchy jsou způsobeny poškozením na mikroskopickém objektivu kamery, vznikají tedy až za tvarovačem a nemohou tedy mít vliv na jeho fungování. Jejich větší výraznost v měřeních s tvarovačem je způsobena metodou použitou na získání dat a nemá fyzikální význam.

Kapitola 5

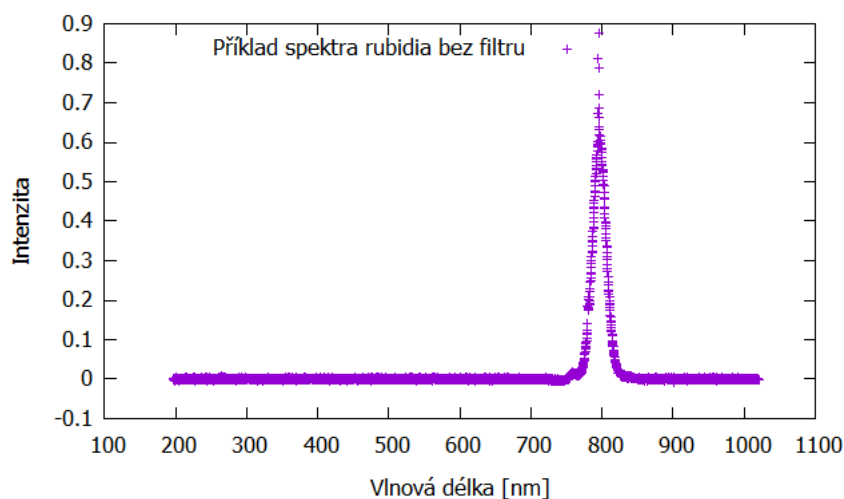
Měření spekter rubidia

5.1 Použité přístroje

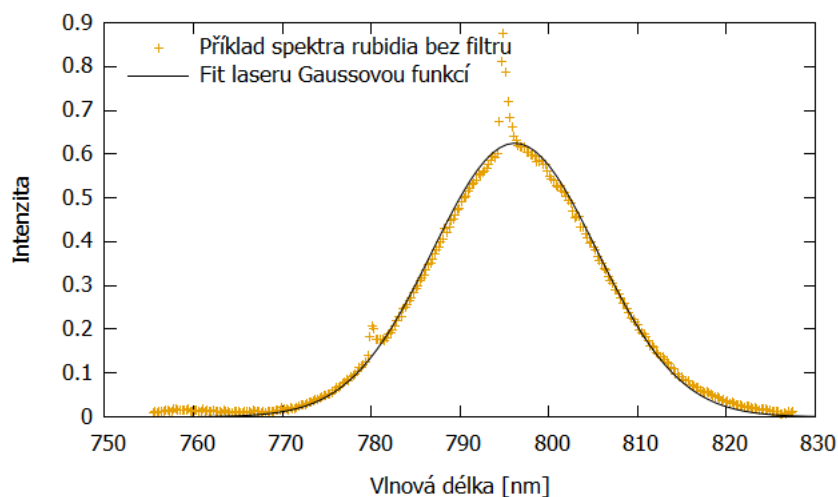
Vysoko výkonnostní titano-safírový laser Coherent Vitara-T, vlnový filtr Semrock BrightLine FF02-470/100-25, kompaktní CCD spektrometr, rubidiový vzorek, dvě zrcadla, optický kabel, kolimátor s napojením na optický kabel, optický stůl.

5.2 Experimentální soustava a postup měření

Pro měření spekter použijeme titano-safírový laser, který v rubidiovém vzorku vybudí některé přechody. Do cesty paprsku umístíme vzorek rubidia a kolmo na paprsek umístíme kolimátor spektrometru, aby laser přímo neosvětloval spektrometr. Spektrometrem tedy sbíráme jen světlo rozptýlené ve vzorku a čárové spektrum rubidia. Dál nastavíme střední vlnovou délku laseru na přibližně 797 nm, ve spektru pak budeme pozorovat široký pík způsobený dopadajícím laserem v nastavené vlnové délce. Na tomto píku se bude nacházet spektrální čára rubidia, kterou použijeme pro analýzu paprsku. Spektrum měříme 1023-krát s integračním časem 1 s pro každé měření. Naměřením 151 spekter s integračním časem 40 s a s vlnovým filtrem propouštějícím jen vlnové délky 420-520 nm zjišťujeme, jestli dochází k dvoufotonové absorpci.



Obr. 5.1: Příklad naměřeného spektra rubidiového vzorku bez použití vlnového filtru.

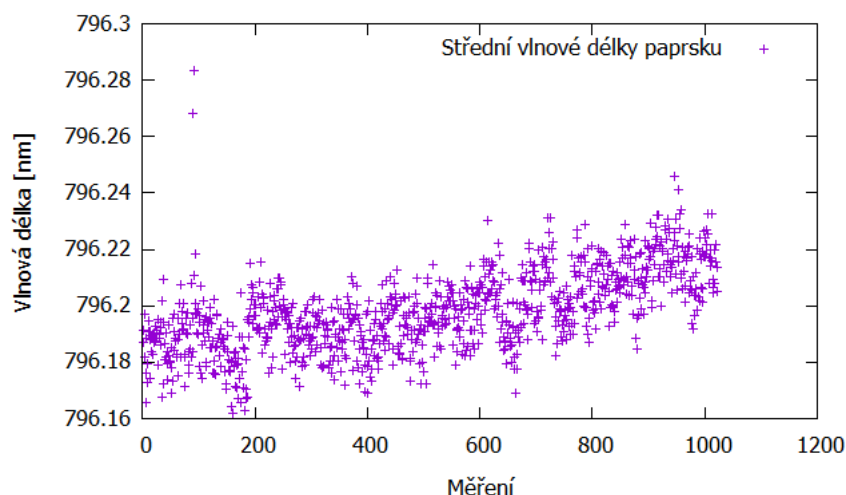


Obr. 5.2: Příklad naměřeného spektra rubidiového vzorku bez použití vlnového filtru

5.3 Výsledky

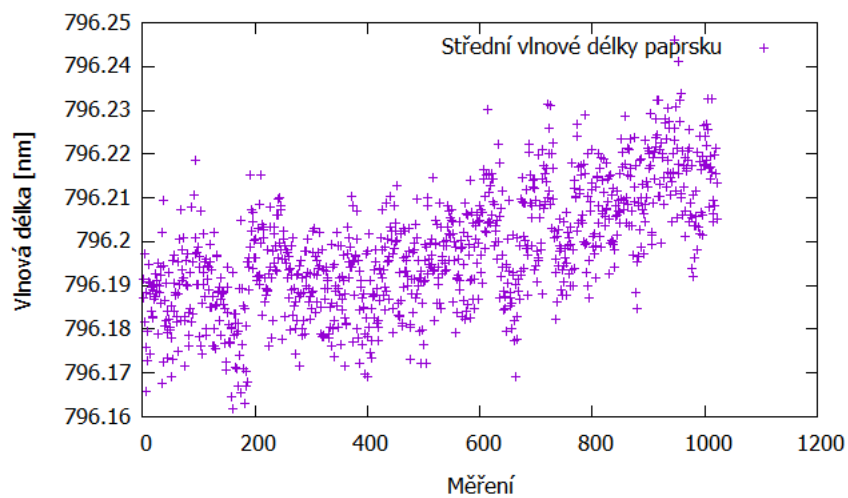
5.3.1 Analýza laseru

Na spektrech naměřených bez filtru byla provedena analýza použitelného laseru. Příklad naměřeného spektra je zobrazen na Obr. 5.1. Dopadajícímu laseru odpovídá široký pík, který je lépe zobrazený na Obr. 5.2, na tomto obrázku jsou také vidět dva ostré píky spektrálních čar rubidia. Spektrální čára o vlnové délce 794,9 nm byla použita jako reference při analýze paprsku. Pík paprsku byl proložený Gaussovou funkcí $g(x) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, kde získané hodnoty μ určí

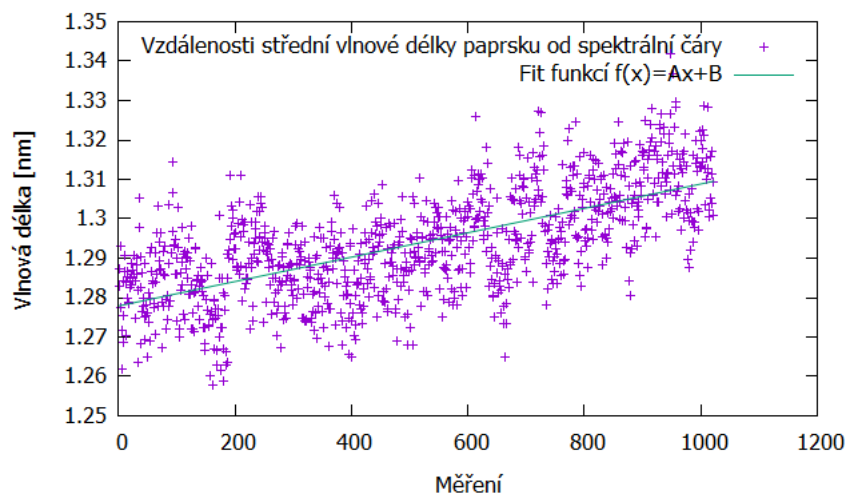


Obr. 5.3: Střední hodnoty vlnových délek laseru pro všechna měření před korekcí.

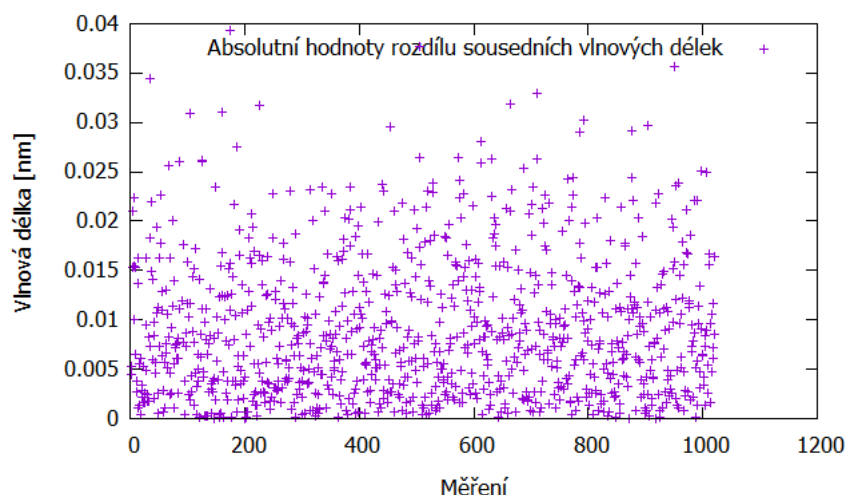
střední vlnovou délku dopadajícího laseru jejich hodnoty pro provedená měření jsou zobrazena v Obr. 5.3, ve kterém jsou vidět dvě výrazně posunuté hodnoty. Konkrétně u měření číslo 88 a 91, tato měření byla vyřazena jako hrubé chyby. Střední vlnové délky po korekci jsou zobrazeny v Obr. 5.4. K přesnější analýze použijeme výše zmíněnou spektrální čáru jako pevný bod, od jejíž vlnové délky byly odečteny střední vlnové délky laseru a získané hodnoty jsou zobrazeny v Obr. 5.5. Na tomto obrázku je vidět posun hodnot stejně jako na Obr. 5.4. Tento posun byl zachycen fitem vzdáleností od spektrální čáry lineární funkcí $f(x) = Ax + B$ se získanými hodnotami $A = (31 \pm 1) \times 10^{-6}$ a $B = (1,2779 \pm 0,0006)$. Pro zobrazení změn nezpůsobených posunem hodnot použijeme absolutní hodnoty rozdílů dvou sousedních hodnot zobrazené v Obr. 5.6, odkud je vidět, že maximální změna způsobená fluktuací laseru je $\Delta_1 = 0,039$ nm. Změna ve střední vlnové délce laseru způsobená posunem je $\Delta_2 = (0,031 \pm 0,001)$ nm získaná jako součin A s počtem měření. Celková maximální změna je z Obr. 5.5 $\Delta_c = 0,084$ nm jako rozdíl maximální a minimální vzdálenosti. Chyba změny způsobené posunem je chyba fitu a chyby změn odečtených z neměřených spekter jsou vůči této chybě zanedbatelné.



Obr. 5.4: Střední hodnoty vlnových délek laseru pro všechna měření po korekci.



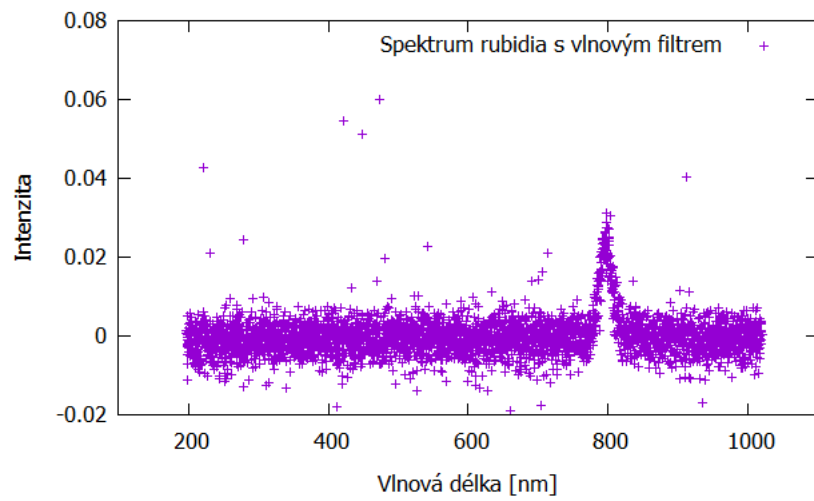
Obr. 5.5: Rozdíl vlnových délek spektrální čáry v $\lambda = 794,9$ nm a střední vlnové délky z Obr. 5.4 laseru pro jednotlivá měření.



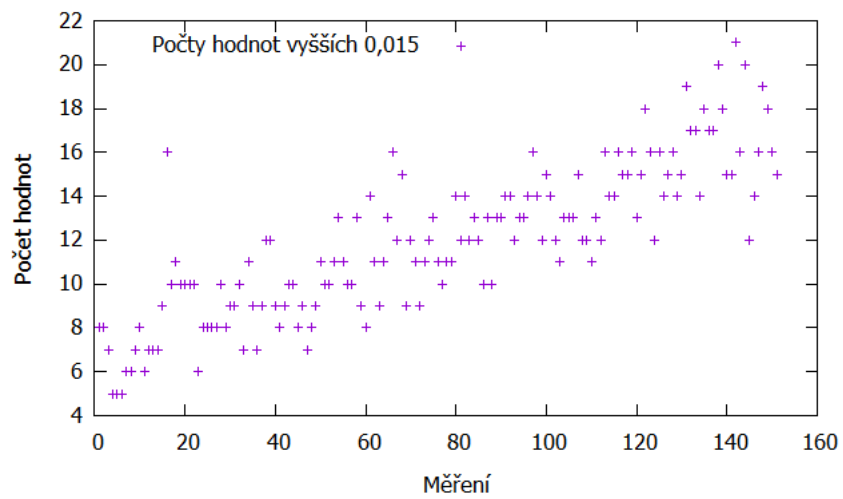
Obr. 5.6: Rozdíl vzdáleností středních vlnových délek od použité spektrální čáry dvou sousedních měření.

5.3.2 Spektrum rubidia

Příklad naměřeného spektra s použitým vlnovým filtrem Semroc BrightLine FF02-470/100-25 je zobrazen v Obr. 5.7. Účelem této části měření je hledání excitované spektrální čáry kolem $\lambda \simeq 473,67$ nm. Tato čára byla hledána pomocí počítání intenzit větších než 0,015, jejich počty jsou zobrazeny v Obr. 5.8. Spektra s větším počtem vysokých hodnot byla poté zkontrolována ručně, kde by spektrální čára byla vidět buď jako pík, nebo jako snížená koncentrace hodnot s nízkou intenzitou. Žádná čára nebyla nalezena, což potvrzuje, že při dané intenzitě laseru nedochází k dvoufotonové absorpci. Což je pro navržený experiment žádané, jelikož na této čáře by byl pozorován vliv význačného bodu, který by byl rušen dvoufotonovou absorpcí.



Obr. 5.7: Příklad naměřeného spektra rubidia s použitím přiloženého vlnového filtru.



Obr. 5.8: Počty intenzit vyšších 0,015 ve vlnových délkách menších než 600 nm.

5.4 Diskuze

Z analýzy použitého laseru byla vyřazena dvě měření kvůli výraznému posunu střední vlnové délky vůči okolním hodnotám, jak je patrné z Obr. 5.3. Konkrétně se jedná o měření číslo 88 a 91. Pro zkoumání laseru byla také použita spektrální čára o vlnové délce 794,4 nm. Její vlnová délka se po všechna měření neměnila, což z ní dělá dobrý referenční bod a zároveň se shoduje s předpoklady a tím potvrzuje, že nedocházelo k systematické chybě spektrometru. Analýzou použitého laseru jsme našli dva zdroje změn střední vlnové délky svazku. Prvním zdrojem je posun do vyšších vlnových délek, toto je způsobeno ohříváním laseru. Tento problém by se tedy dal nejlépe vyřešit lepším chlazením laseru. Druhým zdrojem jsou fluktuace laseru, které se nemění po celý průběh měření a nejsou odstranitelné bez výrazného zásahu (stabilizace) do rezonátoru laseru, což je pro modelockované lasery netriviální operace. Vliv těchto dvou zdrojů byl ke konci měření spekter bez filtru přibližně stejný $\Delta_1 = 0,039$ nm pro fluktuace a $\Delta_2 = (0,031 \pm 0,001)$ nm pro posun. Během měření ovšem nedošlo k ustálení laseru, takže vliv posunu bude pravděpodobně růst při delších měřeních. Celková změna polohy laseru odečtená ze spekter je $\Delta_c = (0,084) \pm 0,001$ nm. Pro použití v experimentu je třeba laser stabilní v rozsahu 2 nm, do kterého se použitý laser vejde.

Při měření spekter s vlnovým filtrem hledáme spektrální čáru o vlnové délce $\lambda \simeq 473$ nm způsobenou dvoufotonovou absorpcí. Tato čára nebyla nalezena v provedených měřeních. Pravděpodobnost vzniku hledané dvoufotonové absorpce roste s rostoucí intenzitou laseru a jelikož při plánovaném experimentu bude použit laser o větší intenzitě, tak pravděpodobnost excitace bude větší. Tento fakt byl do měření započítán použitím delší integrační doby a mnoha měření.

Kapitola 6

Závěr

Účelem práce je provést přípravné měření pro detekci význačných bodů v elektronovém obalu atomu, konkrétně rubidia. V první části práce jsme ukázali, že existence význačných bodů je velmi citlivá na hodnotu poruchového parametru. Z tohoto důvodu je nezbytné, aby provazovací laser popsany v experimentální motivaci měl v profilu uniformní intenzitu. První experimentální část práce zkoumá možnost použití komerčně dostupného vlnového tvarovače AdlOPTica Nr.289-05 k transformaci profilu laseru do potřebného uniformního tvaru. Z naměřených profilů paprsku po průchodu tvarovačem zobrazených například v Obr. 4.9 a Obr. 4.10 je vidět, že použití tvarovače popsany způsobem nezmění profil paprsku do potřebného tvaru. V práci byly dále diskutovány možnosti použití dalšího čištění paprsku pomocí opakované aplikace prostorového filtru na parsek před tvarovačem. Tato metoda není ovšem použitelná v plánovaném experimentu kvůli výraznému úbytku intenzity svazku při použití prostorového filtru a faktu, že experiment potřebuje laser o vysoké intenzitě. Z těchto důvodů je třeba pro experiment nalézt jiný tvarovač nebo alternativní způsob úpravy profilu paprsku.

V druhé experimentální části práce byla provedena analýza spektra titan-sařirového laseru v rubidiu a spektra rubidia excitovaného tímto laserem po průchodu použitým vlnovým filtrem. Analýzou spektra laseru v rubidiu za použití spektrální čáry s $\lambda = 794,4$ nm jsme objevili dva zdroje změn středních vlnových délek laseru. Posun středních vlnových délek do vyšších hodnot způsobený zahříváním laseru

a jejich fluktuace. Růst středních vlnových délek jsme popsali lineární funkcí $f(x) = Ax + B$ s koeficienty $A = (31 \pm 1) \times 10^{-6}$ a $B = (1,2779 \pm 0,0006)$. Tento posun způsobí maximální změnu střední vlnové délky o $\Delta_2 = (0,031 \pm 0,001)$ nm. Fluktuace střední vlnové délky laseru mají maximální hodnotu $\Delta_1 = 0,039$ nm. Velikost těchto fluktuací je vlastnost použitého laseru a nelze ji snížit bez výrazné úpravy rezonátoru laseru. Celkový maximální posun středních vlnových délek od měření s nejnižší střední vlnovou délkou k měření s nejvyšší byl odhadnut jako $\Delta_c = 0,084$ nm. Provazovací kontinuální nebo impulzní laser potřebuje pro použití v experimentu mít střední vlnovou délku, která se nezmění o více než o 2 nm. Testovaný laser tento požadavek splňuje. Dalším požadavkem na provazovací laser je, že nesmí vytvářet excitované 5P stavy. Tyto stavy by byly ve spektru zobrazeny jako spektrální čáry o vlnové délce o přibližné hodnotě 473 nm. K ověření, že použitý laser neexcituje dvoufotonovou absorpcí zmíněné stavy rubidia bylo provedeno množství měření spekter, čímž byla kompenzována nízká intenzita laseru, a tedy nízká pravděpodobnost excitace. V naměřených spektrech nebyla nalezena žádná spektrální čára ve vlnových délkách v rozmezí od 200 nm do 600 nm. Z této experimentální části plyne, že testovaný laser má dostatečnou stabilitu a že neexcituje rubidium způsobem, který by narušoval experiment. Je tedy použitelný jako provazovací laser v navrhovaném experimentu.

Literatura

- [1] M V Berry. Physics of nonhermitian degeneracies. *Czechoslovak Journal of Physics*, 54(10):1039–1047, October 2004.
- [2] Weijian Chen, Şahin Kaya Özdemir, Guangming Zhao, Jan Wiersig, and Lan Yang. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity. *Nature*, 548(7666):192–196, August 2017.
- [3] Gabriel J. Gallant, Jean-François Bisson, Kris Bulmer, and Georges Bader. Observation of exceptional points in helically structured thin films. *Opt. Lett.*, 46(13):3135–3138, Jul 2021.
- [4] Naomichi Hatano and David R. Nelson. Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics. *Physical Review Letters*, 77(3):570–573, jul 1996.
- [5] W D Heiss. Exceptional points – their universal occurrence and their physical significance. *Czechoslovak Journal of Physics*, 54(10):1091–1099, October 2004.
- [6] W D Heiss. Exceptional points of non-hermitian operators. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(6):2455–2464, jan 2004.
- [7] Sang-Bum Lee, Juhee Yang, Songky Moon, Soo-Young Lee, Jeong-Bo Shim, Sang Wook Kim, Jai-Hyung Lee, and Kyungwon An. Observation of an exceptional point in a chaotic optical microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 103:134101, Sep 2009.
- [8] Nimrod Moiseyev. *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2011.

- [9] Donal Pavia, Gary Lampman, George Kriz, and James Vyvyan. *Introduction to spectroscopy/ Donald L. Pavia, Gary M. Lampman, George S. Kriz, and James R. Vyvyan.* 08 2015.
- [10] Ingrid Rotter. The role of exceptional points in quantum systems, 2010.
- [11] Alexander V. Sadovnikov, Alexander A. Zyablovsky, Alexander V. Dorofeenko, and Sergey A. Nikitov. Exceptional-point phase transition in coupled magnonic waveguides. *Phys. Rev. Appl.*, 18:024073, Aug 2022.
- [12] T Stehmann, W D Heiss, and F G Scholtz. Observation of exceptional points in electronic circuits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(31):7813, jul 2004.