

## Oponentský posudek na disertační práci

Mgr. ing. Martina Malachova:

### Chaotic dynamics of purification protocols

Disertační práce předložena ve studijním programu Matematické inženýrství FJFI je motivována současnými problémy kvantové informatiky a zpracování kvantové informace, nicméně zasahuje i do dalších ryze matematických oblastí jako jsou matematické modelování a zvláště pak dynamiky nelineárních systémů a s tím spojenou teorie chaosu. Jako oponent mohu konstatovat, že jsem se již dříve seznámil s předcházejícími pracemi na stejné téma-diplomovou prací (2015) a tezemi k dizertaci (2017) a předložená disertace představuje značný posun autora v této oblasti.

Předložená disertace je poměrně rozsáhlá, obsahuje 167 stran hlavního textu, dohromady s doplňujícími kapitolami a literaturou se pak jedná o 192 číslovaných stránek psaných v dobré a většinou srozumitelné angličtině. Disertace je rozčleněna do 7 číslovaných kapitol různého rozsahu a to včetně Úvodu a Shrnutí. Kapitola 2 rekapituluje základy kvantové informatiky, teorie chaosu a purifikačních protokolů, Kapitola 3 je věnovaná bráně CNOT a jejím využití při návrhu protokolů vedoucích k chaotickému chování, Kapitola 4 je věnovaná operacím které promíchávají dynamiku mezi různými mody ("twirling" operace), Kapitola 5 je věnovaná operacím, které modelují vývoj vyššími mocninnými řády a Kapitola 6 pak rozšiřuje úvahy do oblasti provázaných q-bitů. Originální výsledky autora jsou založeny na publikaci (se spoluautory) Chaos, 29, 033107 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5082946> a byly využity v Kapitole 3. Mimo lze za autorské výsledky považovat formulaci fázových přechodů mezi chaotickými protokoly a metodiky výpočtu "box-counting" algoritmu, kterým lze numericky aproximovat výpočet Hausdorffovy dimenze. Práce obsahuje celou řadu působivých obrázků, které jsou výsledkem komplexních iterčních výpočtů. To mimo jiné také dokumentuje autorovu erudici ve zvládnutí rozsáhlých algoritmických výpočtů. Z tohoto hlediska je možné odpovědět kladně na všechny otázky, k nimž by se oponent měl jasně vyslovit: téma práce je živé a aktuální, je mu věnovaná značná pozornost v současném literatuře a téma disertace je tedy stále aktuální. Metody zpracování vycházejí z teorie chaosu a náročných numerických simulací, které ilustrují zákonitosti chaotických jevů. Disertační práce splnila svým způsobem svůj cíl, protože student svým výzkumem dosáhnul vědeckých výsledků.

Na druhé straně má práce i své nepřehlédnutelné nedostatky. Text disertace mohl být promyšlenější a pečlivěji zpracovaný po všech stránkách. Tak například číslování referencí je nešťastně zvoleno pro takto rozsáhlý typ práce- první reference začínají jako [59, 13]. Mnohem vhodnější by bylo ponechat abecední řazení a použít například odkazy se zkratkou prvního jména autora a roku vydání. Kapitoly jsou nevyvážené, práce je možná zbytečně dlouhá a pro čtenáře dost špatně čitelná, protože málo rozlišuje mezi fundamentálními abstraktními problémy a technickými detaily. Některé tvrzení zní trochu povrchně, i když s významem lze souhlasit, viz "entropy is celebrity" na str. 17. S trochou nadhledu a úsilí by autor jistě našel pro své tvrzení jiná, elegantnější a hlubší vyjádření, např. [Eddington]. V práci lze také občas najít překlepy, chybějící citace viz str. 23. Proč se Kapitola 4.11 odkazuje dopředu na vztah 5.15? Čtenář si také povšimne, že pouze Kapitola 3 obsahuje část "Summary", ostatní

ale nikoliv. Obrázek 6.1 obsahuje křivky, které mají různý rozsah na ose x. Má to nějaký hlubší důvod? Pokud ano, mohlo to být uvedeno v popisu pod obrázkem. To vše vzbuzuje dojem, že práce byla sepsána pod časovým tlakem. Na druhé straně uznávám, že je poměrně obtížné zkombinovat hodně formální matematická tvrzení s implementací numerických algoritmů a oceňuji např. snahu o vysvětlení Hausdorffovy dimenze Def. 2.3.35 na příkladu. Obrázky atraktorů jsou působivé a uznávám, že působí nezanedbatelným uměleckým dojmem.

V rámci obhajoby bych byl rád, kdyby se autor zamyslel nad některými svými tvrzeními, kterými se snaží dát význam jeho převážně matematické práce do kontextu s kvantovým zpracováním informace (viz poslední věta na str. 167) "*Succeeding in identification of the basic chaotic features in the quantum information processing, we believe that the field has much to offer not only to abstract mathematical studies but also to the physical applications leading to secure communication, faster information processing etc. in the near future.*"

K diskuzi navrhuji dva náměty. Dnes tolik populární "umělá inteligence" (machine learning) představuje metody, založené na interpolaci mezi známými konfiguracemi. Může v této oblasti přinést něco nového nelineární dynamika a chování atraktorů, které poskytuje na libovolně malé dimenzi "nekonečně bohatou" replikující strukturu? Naopak hlavním cílem kvantových metrologických aplikací je zvýšení meze rozlišitelnosti. Jemné detaily fraktalových struktur pak mohou představovat netriviální (kontrolované) vzorky pro škálovatelné meze rozlišení. Bylo by velice přínosné, pokud by se podařilo propojit vysoce teoretické úvahy spojené s Hausdorffovou dimenzí a "box-counting dimension" s reálnými metrologickými aplikacemi nebo úvahami, které pracují s (kvantovou) Fisherovou informací, která je opět spojena s entropickými principy.

V souhrnu řečeno, i přes jisté problémy předložená disertace představuje ucelenou vědeckou práci, která vyžadovala proniknout do abstraktních metod teorie chaosu a zvládnutí náročných simulací a komplexní a multioborový přístup kombinující analytické úvahy se značným smyslem pro algoritmizaci. Práci proto doporučuji k obhajobě.

V Olomouci, 17. 6. 2023

prof. RNDr. Z. Hradil, CSc.

[Eddington] A. Eddington, *The Nature of the Physical World*, (London: J.M. Dent & Sons 1935) "The law that entropy always increases, – the second law of thermodynamics—holds, I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations—then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation—well, these experimentalists bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.