

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fluktuace počtu částic ve srážkách těžkých iontů

Fluctuations of particle number in heavy-ion collisions

Autor: Vojtěch Honěk
Vedoucí: prof. Dr. Boris Tomášik
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2022/2023



Student: Vojtěch Honěk

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Název práce: Fluktuace počtu částic ve srážkách těžkých iontů
(česky)

Název práce: Fluctuations of particle number in heavy-ion collisions
(anglicky)

Jazyk práce: Čeština

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se se základními proměnnými, které se používají ve fyzice ultrarelativistických srážek těžkých iontů
- 2) Seznamte se se Statistickým modelem rezonančního plynu a s modelem částečné chemické rovnováhy
- 3) Nastudujte, jak závisí fluktuace počtu částic od zákonů zachování a omezeného pokrytí detektoru v hybnosti
- 4) Vypočítejte druhé momenty a korelace počtu identifikovaných částic ze Statistického modelu

Doporučená literatura:

- [1] W. Florkowski: Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions, World Scientific 2010
- [2] M. Nahrgang et al: Impact of resonance regeneration and decay on the net proton fluctuations in a hadron resonance gas model, Eur. Phys. J. C 75 (2015) 573
- [3] B. Tomášik, P. Hillmann, M. Bleicher: Proton number fluctuations in partial chemical equilibrium, Phys. Rev. C 104 (2021) 044907
- [4] R. Bellwied et al.: Off-diagonal correlators of conserved charges from lattice QCD and how to relate them to experiments, Phys. Rev. D 101 (2020) 034506
- [5] V. Vovchenko et al.: Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities, Phys. Lett. B 811 (2020) 135868

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Boris Tomášik

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

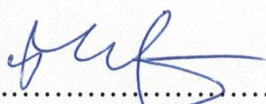
Datum zadání bakalářské práce: 20.10.2022

Termín odevzdání bakalářské práce: 02.08.2023

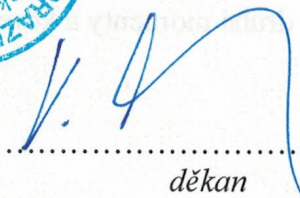
Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.



.....
garant oboru



.....
vedoucí katedry



.....
děkan

V Praze dne 20.10.2022



PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Jméno a příjmení studenta: Vojtěch Honěk

Osobní číslo: 494659

Název studijního programu (oboru): Aplikace přírodních věd, Experimentální jaderná a částicová fyzika

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Fluktuace počtu částic ve srážkách těžkých iontů

vypracoval(a) samostatně a uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne

31.7.2023


.....

podpis

Poděkování

Na úvod této práce je mi velikou ctí poděkovat svému vedoucímu práce prof. Dr. Borisi Tomášikovi za jeho odbornou pomoc, trpělivé vedení a poskytnutí nutných podkladů a konzultací v době, kdy byly nejvíce třeba.

Vojtěch Honěk

Název práce:

Fluktuace počtu částic ve srážkách těžkých iontů

Autor: Vojtěch Honěk

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Boris Tomášik

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

ČVUT v Praze

Konzultant: —

Abstrakt: Fázový přechod kvark-gluonového plazmatu do stavu hadronové hmoty ve srážkách těžkých iontů je předmětem intenzivního studia urychlovače RHIC. Tato práce se zaměřuje na odvození fluktuací a korelací mezi počtem stabilních detekovaných částic, které značně pomáhají při zkoumání vlastností kritického bodu fázového diagramu kvark-gluonového plazmatu. Tyto pozorovatelné jsou určeny v systému po chemickém vymrznutí. Při výpočtech je uvažován model hadronového rezonančního plynu, který předpokládá neinteragující plyn stabilních částic a rezonancí v kombinaci s částečnou chemickou rovnováhou.

Klíčová slova: Srážky těžkých iontů, Plyn hadronů a rezonancí, Částečná chemická rovnováha, Fluktuace počtu částic

Title:

Fluctuations of particle number in heavy-ion collisions

Author: Vojtěch Honěk

Abstract: Phase transition between quark-gluon plasma and hadronic matter is a subject of intense study in heavy ion collisions at RHIC. This work focuses on calculating fluctuations and correlations between number of stable detected particles, which significantly helps with the investigation of properties of the critical point of the QGP phase diagram. These observables are calculated in a system after the chemical freeze-out. The calculations use Hadron Resonance Gas model, which assumes non-interacting gas of stable particles and resonances in conjunction with partial chemical equilibrium.

Keywords: Heavy Ion Collisions, Hadron Resonance Gas, Partial Chemical Equilibrium, Fluctuations of particle number

Obsah

Seznam obrázků	xi
Úvod	1
1 Relativistická kinematika	2
1.1 Lorentzovy transformace	2
1.2 Minkowského prostoročas	3
1.3 Příčná hybnost a hmotnost, rapidita	4
1.4 Rozdělení podle hybnosti	4
2 Srážky těžkých iontů	5
2.1 Kvar-k-gluonové plazma	6
2.2 Průběh ultra-relativistických srážek	6
2.3 Přechod mezi fázemi	7
2.4 Tok	8
2.4.1 Statický fireball	8
2.4.2 Podélná expanze	9
2.4.3 Příčná expanze	11
2.4.4 Fourierova analýza	11
3 Statistický přístup	13
3.1 Grand-kanonický formalismus	13
3.2 Stavová rovnice	15
3.2.1 Partiční funkce	16
3.3 HRG model	17
3.4 Landauova teorie fázového přechodu	18
3.5 Částečná chemická rovnováha	19
3.6 Omezené pokrytí v hybnostech a energiích	20
4 Fluktuace a korelace	22
4.1 Výpočet maticových elementů	22
4.2 Maticový formalismus	24
4.3 Rekurentní vztahy	25
4.4 Momenty	26
4.5 Aplikace rekurentních vztahů pro výpočet momentů	27

5 Numerické výsledky	29
5.1 Vývoj částečné chemické rovnováhy	29
5.2 Náhrady	30
Závěr	38
Literatura	40

Seznam obrázků

2.1	Fázový diagram kvark-gluonového plazmatu	7
2.2	Prostoro-časový vývoj expanze <i>fireballu</i>	10
3.1	Omezené pokrytí v rapiditách	20
5.1	Vývoj chemických potenciálů v modelů částečné chemické rovnováhy	30
5.2	Škálované fluktuace protonů	31
5.3	Škálované fluktuace kaonů	32
5.4	Škálované fluktuace pionů	33
5.5	Susceptibility protonů, kaonů a pionů	33
5.6	Susceptibility kvantových čísel	34
5.7	<i>Náhrada</i> korelace baryonového čísla s elektrickým nábojem	35
5.8	<i>Náhrada</i> korelace baryonového čísla s podivností	36
5.9	<i>Náhrada</i> korelace elektrického náboje s podivností	36
5.10	Porovnání <i>náhrad</i> a celkových fluktuací	37

Úvod

Studium vlastností jaderných sil a silné interakce je důležitou součástí dnešní experimentální i teoretické fyziky. Znalost makroskopických projevů takové interakce pro horkou a hustou hmotu by značně pomohla v pochopení nejen exotických vysokoenergetických procesů, ale také by prohloubila naše znalosti o vývoji raného vesmíru. Právě studium těchto extrémních stavů hmoty je cílem experimentů se srážkami těžkých iontů, jako je např. velký hadronový urychlovač (LHC) v CERNu nebo urychlovač relativistických těžkých iontů (RHIC) v Brookhavenské národní laboratoři ve Spojených státech amerických. Popis vlastností hmoty vzniklé při srážkách těžkých iontů je ovšem složitý a je třeba pečlivě vybírat, které pozorovatelné lze využít. Pro popis kolektivních vlastností tohoto stavu hmoty slouží jako výborné sondy právě fluktuace počtu částic. Na těch lze pozorovat různé kritické jevy, ale vypovídají i mnohé o stavové rovnici horké jaderné hmoty.

Tato práce se zaměřuje na odvození fluktuací počtu částic v husté a horké hmotě vzniklé srážkami jader $Au + Au$ v rámci statického modelu. V první kapitole zavedeme základní veličiny relativistické kinematiky, jejichž znalost je nutná pro odvození dalších pozorování.

V druhé kapitole uvedeme základní poznatky o srážkách těžkých iontů. Vysvětlíme pojem kvark-gluonového plazmatu a popíšeme základní veličiny využívané k popisu vývoje takovýchto srážek.

Ve třetí kapitole přejdeme k termálnímu popisu srážek těžkých iontů. Popíšeme formalismus, který bude využit k dalším výpočtům. Dále budeme diskutovat možné kritické vlastnosti hmoty a vztah k fluktuacím. Zavedeme model hadronového rezonančního plynu společně s částečnou chemickou rovnováhou a budeme diskutovat vliv omezených pokrytí v hybnosti na výsledné fluktuace. Na konci kapitoly provedeme krátký úvod do dalších možností využití fluktuací jednotlivých částic jakožto *náhrad* za fluktuace kvantových čísel.

Ve čtvrté kapitole budeme diskutovat příspěvky rezonančních rozpadů k produkci částic. Vybudujeme formalismus schopný popsat tyto příspěvky a odvodíme předpis pro jejich výpočet.

V poslední kapitole bude předveden model částečné chemické rovnováhy, fluktuace jednotlivých částic pro různé těžištové srážkové energie v rámci statistického modelu a jejich závislost na teplotě. Dále budou modelovány pozorovatelné přibližující chování fluktuací kvantových čísel.

Kapitola 1

Relativistická kinematika

Relevantní procesy, tj. průběh srážek těžkých iontů jsou velice komplexní a pro jejich pochopení a popis jejich vývoje je třeba zavést formalismus relativistické kinematiky. Díky veličinám zavedeným v této kapitole budeme schopni popsat příčiny a průběh takovýchto srážek, jejich důsledky a popsat možné způsoby detekce.

1.1 Lorentzovy transformace

V klasické mechanice jsou transformace mezi dvěma vztažnými soustavami pohybující se vůči sobě konstantní rychlostí dány tzv. Galileovskými transformacemi. Pro takové transformace ve směru osy x platí

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Srážky těžkých iontů jsou ovšem relativistické a transformace mezi dvěma vztažnými soustavami bude tedy dána transformacemi Lorentzovskými

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct), \\y' &= y, \\z' &= z, \\ct' &= \gamma(ct - \beta x).\end{aligned}\tag{1.2}$$

1.2 Minkowského prostoročas

Spojením polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$ a časové souřadnice t transformujících se podle Lorentzových transformací (1.2) přecházíme od třírozměrného prostoru rozšířeného o časovou souřadnici k neeuklidovskému čtyřrozměrnému prostoru nazývaného Minkowského prostoročas. Relevantní invariant určující interval v takovémto prostoru bude dán vztahem

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (1.3)$$

Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ je tedy dán jako

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Vektory rovnice (1.3) s indexy nahoře budou nazývány kontravariantní. Oproti tomu vektory s dolním indexem budou nazývány kovariantní. Převody mezi nimi provádíme pomocí metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}x^\nu = x_\mu. \quad (1.5)$$

Metrický tenzor (1.4) má vlastnost

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Lorentzovu transformaci v Minkowského prostoročase lze kompaktně zapsat ve tvaru

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad (1.7)$$

kde matice (Λ_μ^ν) je dána jako

$$(\Lambda_\mu^\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

V takovémto prostoru má smysl hledat veličiny, které jsou invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Například po zavedení čtyřrychlosti

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.9)$$

dostáváme veličinu invariantní vůči libovolným transformacím

$$u_\mu u^\mu = c^2. \quad (1.10)$$

Stejně při zavedení čtyřhybnosti $P = (E, \vec{p}c)$ bude platit vztah

$$P^2 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = m_0c^2. \quad (1.11)$$

Klidová energie m_0c^2 je tedy invariantem čtyřhybnosti.

1.3 Příčná hybnost a hmotnost, rapidita

Jak lze vidět z transformačních vztahů (1.7) složky polohových veličin jako je čtyřvektor polohy nebo hybnosti se transformují pouze ve složkách korespondujících s aplikovaným boostem. Má tedy smysl volit soustavu souřadnic tak, že se transformují pouze složky rovnoběžné s jednou z os (zvolme např. osu z .) V takovém případě je rozumné zavést veličiny jako je příčná hybnost, hmotnost, rapidita a pseudorapidita. Nejprve je ovšem třeba objasnit pojem příčná rovina. Nechť se svazek částic pohybuje ve směru osy z . Řekneme, že příčná rovina je rovina daná osami x a y . V takovéto rovině lze zavést příčnou hybnost, která je Lorentzovsky invariantní veličinou vůči boostům v ose z . Ta je daná vztahem

$$p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \quad (1.12)$$

Podobným způsobem lze zavést i veličinu příčné hmotnosti, která má podobné vlastnosti vůči boostům jako příčná hybnost

$$m_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2/c^2}. \quad (1.13)$$

Nakonec je třeba popsat vlastnosti pohybu v podélném směru. Nejčastěji používaná veličina k takovému popisu se nazývá rapidita a je daná vztahem

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E/c + p_z}{E/c - p_z} \right). \quad (1.14)$$

Dalším důvodem zavedení takovéto veličiny je tvar její transformace při podélném boostu. Pro tu platí

$$y' = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E'/c + p'_z}{E'/c - p'_z} \right) = y + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right). \quad (1.15)$$

V neposlední řadě je výhodné zavést veličinu zvanou pseudorapidita η . Protože pro vysoké energie jako v procesech srážek těžkých iontů platí $E \approx pc$ je možné zjednodušit vztah (1.14) do tvaru

$$y \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p + p \cdot \cos\theta}{p - p \cdot \cos\theta} \right) = -\ln \tan \frac{\theta}{2} \equiv \eta. \quad (1.16)$$

1.4 Rozdělení podle hybnosti

Nakonec je třeba uvést jakým způsobem jsou určeny rozdělení částic v hybnostech. Klasické rozdělení $\frac{d^3N}{d^3p}$ je kvůli závislosti hybností na volbě vztažné soustavy proměnné při Lorentzovských transformacích. Tento problém lze vyřešit vynásobením celého vztahu energií, tím dostaneme invariantní rozdělení počtu částic podle hybnosti. Dalšími úpravami získáme vztahy, které jsou neměnné při boostech.

$$E \frac{d^3N}{d^3p} = \frac{d^3N}{m_t dm_t d\Phi dy} = c \cdot \frac{d^3N}{p_t dp_t d\Phi dy} \quad (1.17)$$

Kapitola 2

Srážky těžkých iontů

Samotné srážky relativistických těžkých iontů mohou sloužit k výzkumu dvou důležitých otázek v rámci aktuální fyziky. Za prvé je polem intenzivního studia fázový přechod mezi uvězněnou a asymptoticky volnou kvarkovou hmotou, tj. hadronovou hmotou a kvark-gluonovým plazmatem. Za druhé mohou sloužit k výzkumu raného stavu vesmíru přibližně 10^{-6} s po velkém třesku, kde se předpokládá, že v tomto čase byly podmínky těchto dvou systému velmi podobné [1]. Ve srážkách při vysokých energiích dochází ke vzniku horké vysoce koncentrované hmoty a v závislosti na její vlastnostech mluvíme o tzv. kvark-gluonovém plazmatu nebo o hadronové hmotě. Tyto dva stavy hmoty se liší uvězněním kvarků. Silná interakce poutající kvarky dohromady je popsána teorií kvantové chromodynamiky (QCD) a má vlastnost asymptotické volnosti. Popis srážek pomocí QCD je ovšem obtížný a v mnohých situacích nepraktický.

Experimenty produkující takovéto srážky probíhají například na projektech RHIC (Relativistic Heavy-Ion Collider) v Brookhaven National Laboratory (BNL) v Uptonu ve Spojených státech amerických při energiích až $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV pro Au + Au. Další urychlovač stojící za zmínku je Large Hadron Collider (LHC) náležící Evropské organizaci pro jaderný výzkum (CERN) na švýcarsko-francouzské hranici, který operuje při energiích až $\sqrt{s_{NN}} = 6,8$ TeV. Alternativou ke zlatým jádrům v takových kolizích jsou například jádra olova, která se urychlují na urychlovači LHC při energiích až $\sqrt{s_{NN}} = 5,5$ TeV.

Při srážkách těchto vysokoenergetických jader tedy dochází ke vzniku velkého počtu dalších částic a při dostatečně vysokých energiích přestávají být kvarky v takto vzniklé hmotě uvězněné a vzniká kvark-gluonové plazma. Tento stav je však vysoce nestabilní. Celý systém rychle chladne a expanduje a po dostatečném čase dojde k rekombinaci a kvarky se vrátí do svého uvězněného stavu. Tento proces se nazývá hadronizace hmoty.

2.1 Kvark-gluonové plazma

Již v roce 1965 poukázal Rolf Hagedorn na maximální možnou teplotu hadronové hmoty. V jeho článku byla tato teplota určena na $T_c \sim 150$ MeV [2]. Sám Hagedorn tuto teplotu interpretoval tak, že po dodání další energie dochází v silně interagujícím plynu pouze k produkci nových těžších částic, samotná teplota celého systému však zůstává konstantní. V roce 1975 byla tato teplota reinterpretovala právě jako teplota fázového přechodu mezi hadronovou hmotou a jistou novou fází [3]. Ve stejném roce bylo ukázáno, že v podmínkách s vysokou teplotou nebo baryonovou hustotou jako například v jádrech neutronových hvězd nebo v raném stádiu vesmíru tj. až $5 \cdot 10^{-6}$ s po velkém třesku se hmota nebude vyskytovat v jejím přirozeném stavu, ale kvarky samotné se budou chovat jako volné částice [4]. V tomto článku autoři J. C. Collins a M. J. Perry pozorovali důsledky kvarkového modelu pro exotická prostředí jako jsou například jádra neutronových hvězd, explodující černé díry nebo rané stádium vesmíru. Jejich argumenty vycházely především ze ztráty individuality hadronů při vysokých hustotách. Dále navrhli využití asymptoticky volné kvantové teorie pole pro provedení dalších výpočtů. Ty byly provedeny v následujících letech [5, 6, 7]. Pouze tři roky poté byl S.A. Chinem publikován článek diskutující možnost vytvoření právě takovýchto podmínek v laboratorních srážkách ultra-relativistických těžkých iontů s energiemi řádově GeV na nukleon [8]. Tato hypotéza byla potvrzena v roce 2000, kdy bylo laboratoří CERN oznámeno pozorování nové fáze silně interagující hmoty [9]. Kondenzace velkého množství hmoty do malého prostoru, kde vzdálenost jednotlivých částic je $R \ll 1$ fm a dodání vysoké energie jsou tedy podmínky dávající vznik nehadronové fázi hmoty. Hmotu s takovými kolektivními vlastnostmi nazýváme kvark-gluonové plazma.

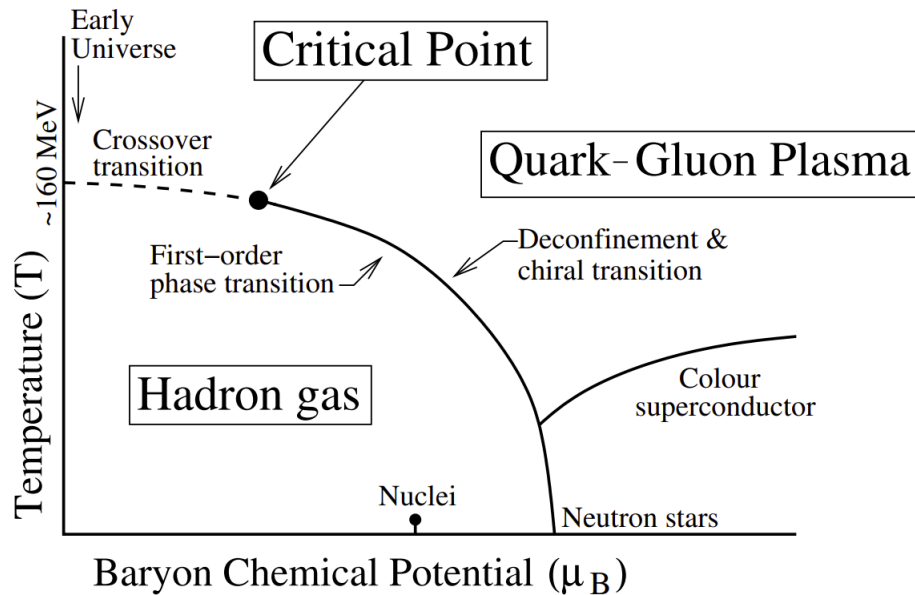
2.2 Průběh ultra-relativistických srážek

Důležitou otázkou je tedy způsob vzniku kvark-gluonového plazmatu ve srážkách těžkých iontů, chování tohoto systému, jeho vývoj a počáteční podmínky. Tento problém zaujal amerického teoretického fyzika J.D.Bjorkena, který v roce 1982 vydal slavný článek zkoumající právě takové procesy v regionu střední rapidity [1]. Průběh takovýchto srážek vypadá následovně. Dvě nabitá relativistická jádra blížící se k sobě relativistickými rychlostmi jsou Lorentzovsky kontrahovaná podle transformací (1.7). Jádra tedy nabývají tvaru dvou na sebe nalétávajících *palačinek*. Takováto situace bývá často popisována např. pomocí modelu barevného skleněného kondenzátu (CGC) [9, 10]. Při srážce těchto plochých disků dochází k interakcím jejich konstituentů (nukleonů) a vzniká tzv. *fireball*. Za konečný časový úsek dochází ke vzniku nových partonů tj. kvarků, anti-kvarků a gluonů a vzniká vysoce hustý a energetický systém těchto částic. Interakce mezi jednotlivými partony mají za důsledek lokální termalizaci systému a vzniká kvark-gluonové plazma [10]. Díky vysoké teplotě a hustotě začíná expanze, kterou je možné popsat pomocí hydrodynamických veličin. Po dostatečném *roztáhnutí* a ochlazení dochází k rekombinaci kvarků a jejich následnému uvěznění do hadronů - procesu zvaný hadronizace. Takto vzniká z horkého kvark-gluonového plazmatu hadronový plyn, který však stále silně interaguje.

Při určité teplotě systému nastane moment zvaný chemické vymrznutí. V této chvíli přestávají neelastické kolize mezi jednotlivými hadrony v plynu [9]. Další užitečnou vlastností tohoto bodu je, že po takovém momentu je zafixovaný střední počet částic v celém systému. Po další expanzi dochází ke kinetickému vymrznutí. V tuto chvíli již ustávají téměř veškeré interakce mezi částicemi a ze silně vázaného systému vzniká soubor téměř volných částic, které se pohybují do detektorů.

2.3 Přechod mezi fázemi

Hlavním důvodem projektů jako RHIC je právě studium fázového přechodu mezi kvark-gluonovým plazmatem a hadronovou hmotou. Tento proces se nazývá hadronizace. Samotné hodnoty teploty T_{crit} , při které k takovému fázovému přechodu dojde je možné teoreticky určit za použití kvantové chromodynamiky na mřížce. Takto určená teplota má hodnotu $T_{crit} = (151 \pm 3)$ MeV [11]. V dnešní době je již známo, že jde o plynulý, ale rychlý přechod mezi fázemi [12]. Problémem tohoto postupu je fakt, že je funkční pouze pro mizející chemické potenciály. Jinými slovy pro funkčnost tohoto postupu je třeba, aby v systému byl na počátku stejný počet částic a antičástic. Takovýto scénář je ovšem pro srážky těžkých iontů např. Au+Au nevhodný, proto je třeba se obrátit k jiným fenomenologickým nebo experimentálním metodám.



Obrázek 2.1: Fázový diagram kvark-gluonového plazmatu, hadronové hmoty a baryonového supravodiče závisící na teplotě a baryonovém chemickém potenciálu se znázorněným kritickým bodem a typy přechodů. Převzato z [10].

2.4 Tok

Vzhledem ke vzniku mnohých částic ve srážkách těžkých iontů a k vlastnostem *fireballu* vznikajícím v takových procesech je předmětem zájmu studium kolektivních jevů. Jednou z nejdůležitějších vlastností takového systému je šíření částic v různých směrech a zkoumání Lorentzovsky invariantních distribucí daných rovnicemi (1.17). Takové šíření částic prostorem lze popsat právě pomocí veličin toků. Zajímavou otázkou je závislost rozdělení částic na azimutálním úhlu Φ . Rozložme směry šíření částic do směru rovnoběžného a kolmého ke směru šíření svazku. Pro šíření v podélném směru, je zdůvodnění následující. Vzhledem k tomu, že nepředpokládáme kompletní zastavení jader při srážce, tak si některé vzniklé částice odnášejí určitou podélnou hybnost, se kterou se dále šíří prostorem. Druhým faktorem, který hraje roli při podélné expanzi je právě Lorentzovská kontrakce, která má po srážce za důsledek vyšší tlakový gradient v podélném směru než ve směru kolmém na svazek. Kolmé šíření je poté důsledkem interakce konstituentů srážených jader. Samotná problematika takovéto expanze nám umožňuje skrze měření výsledných toků studovat stavovou rovnici hmoty, vyskytující se v takovýchto srážkách. Ke statistickému popisu *fireballu* je využíváno Boseho nebo Fermiho statistiky. V dalším postupně odvozujeme tvar hybnostního spektra expandujícího *fireballu*. Postupujeme přitom podle [13].

2.4.1 Statický fireball

Nejprve provedeme nejhrubší odhad, který povede na explicitní předpis tvaru spektra. Uvažme tedy, že *fireball* nebude expandovat a pozorujme tvar spektra z rovnice (1.17).

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy}. \quad (2.1)$$

Při zápisu čtyřhybnosti p^μ ve tvaru

$$p^\mu = (m_t \cosh y, p_t \cos \Phi, p_t \sin \Phi, m_t \sinh y), \quad (2.2)$$

pro kterou platí vztah (1.11) a přijetí Boltzmanovy aproximace, jsme schopni zapsat spektrum termálně produkovaných částic (2.1) ve tvaru

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} \propto E \exp\left(-\frac{E}{T}\right) = E \exp\left(-\frac{m_t \cosh y}{T}\right). \quad (2.3)$$

Naším zájmem je ovšem získat takové spektrum pro určitou fixní rapiditu [13]. Tu si můžeme zvolit za např $y = 0$. Dosazením do rovnice (2.3) a porovnáním s obecnou metodou pro odvození takové distribuce, tj. integrací s rozložením hmoty přes celý objem, získáme

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy} \right|_{y=0} = \frac{V}{(2\pi)^3} m_t \exp\left(-\frac{m_t}{T}\right). \quad (2.4)$$

Spektra částic s různými hmotnostmi tedy budou stejná, pokud je vykreslíme jako funkci příčné hmotnosti m_t .

2.4.2 Podélná expanze

Jak již bylo zmíněno realistický *fireball* expanduje. Podobně s Bjorkenovým článkem vydaným roku 1982 uvažujeme takovou longitudální expanzi, která je invariantní vůči boostům v podélném směru [1]. Pro částice pohybující se uvnitř *fireballu* tedy není možné vzhledem k *fireballu* samotnému určit s jakou rychlostí se pohybují. Tento předpoklad má však za důsledek, že je třeba uvažovat *fireball* nekonečných rozměrů v podélném směru. Další výpočty jsou tedy aproximací uplatnitelnou na částice vznikající v centrální oblasti rapidity. Podélná rychlost bude dána vztahem

$$v_z = \frac{z}{t}. \quad (2.5)$$

Díky relativistické dilataci času je možno pozorovat, že dojde k vymrznutí celého *fireballu* ve vlastním čase $\tau = \tau_{fo}$. Je tedy rozumné místo času v těžiškové soustavě využít právě této veličiny vlastního podélného času, který určí v rovině času a podélné souřadnice hyperbolu ukazující hyperpovrch vymrznutí

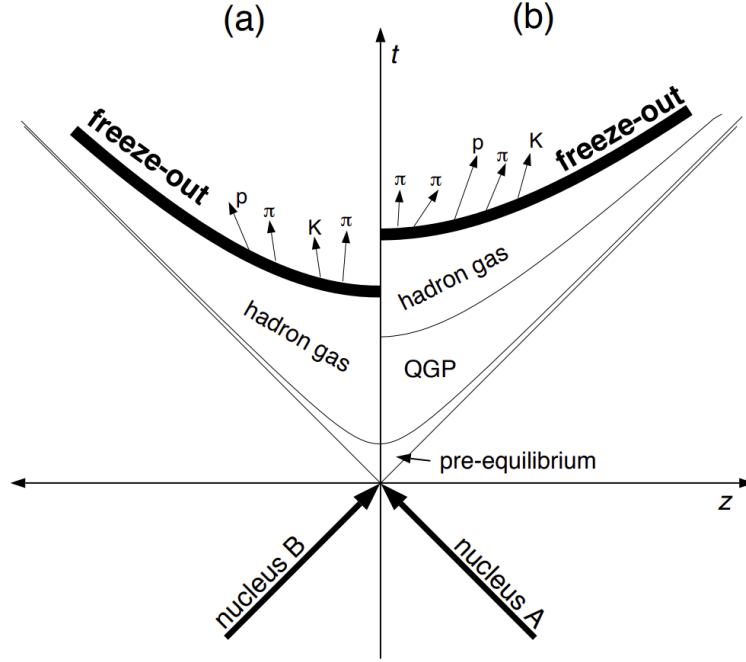
$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}. \quad (2.6)$$

Dále vzhledem k předpokladu podélně Lorentzovsky invariantní expanze je užitečné zavést veličinu prostoro-časové rapidity, která je analogií k definici rapidity (1.14). Prostoročasovou rapiditu y_{st} zavedeme vztahem

$$y_{st} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v_z}{1-v_z} \right). \quad (2.7)$$

Při těchto definicích poté všechny části *fireballu* mají svou konstantní prostoro-časovou rapiditu y_{st} a vyvíjí se ve svých vlastních časech τ stejným způsobem [13]. Tento fakt je zobrazen na Obrázku 2.2. Pro popis kolmé roviny ke svazku využijeme polárních souřadnic. Tímto způsobem zkonstruujeme parametrizaci souřadnic

$$x^\mu = (\tau \cosh y_{st}, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh y_{st}). \quad (2.8)$$



Obrázek 2.2: Prostorovo-časový vývoj podélně Lorentzovsky invariantní expanze *fireballu*. Obrázek znázorňuje stejný vývoj systému ve svých vlastních podélných časech a vyznačuje vymrznutí. Levá část ukazuje na vývoj takové hmoty bez existence QGP a pravá část s existencí QGP. Převzato z [13].

Pro získání spektra příčné hmotnosti v oblasti střední rapidity je třeba zintegrovat přes všechny takové částice s $y = 0$. Problémem ovšem zůstává různá rychlost expanze různých částí *fireballu*, proto není možné jako v předchozím případě mluvit o termálním rozdělení, ale pouze o lokálně termálním rozdělení tj. hybnostní rozdělení bude Boltzmanovské pro každou část *fireballu* pouze v lokální klidové soustavě této části. V každém takovém lokálním systému bude tedy ekvivalentně se statickým fireballem platit

$$\frac{d^3 N}{dp^3} \propto \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right). \quad (2.9)$$

Veličina E^* udává energii částice v lokální klidové soustavě a je pro podélně Lorentzovsky invariantní *fireball* daná vztahem

$$E^* = g_{\mu\nu} p^\nu u^\mu = m_t \cosh(y - y_{st}), \quad (2.10)$$

kde čtyřrychlost u^μ je dána vztahem

$$u^\mu = (\cosh y_{st}, 0, 0, \sinh y_{st}). \quad (2.11)$$

Odsud je možné ekvivalentním postupem jako u statického *fireballu* vyjádřit spektrum příčných hmotností (2.1). To nabude tvaru

$$\left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy} \right|_{y=0} = \int_V \frac{\tau_{fo} r dr d\theta dy_{st}}{(2\pi)^3} m_t \cosh(y_{st} - y) \rho(r) \exp\left(-\frac{m_t \cosh(y_{st} - y)}{T}\right). \quad (2.12)$$

Zde funkce $\rho(r)$ odpovídá azimutálně symetrickému rozdělení částic a provádíme integraci přes objem daný hyperpovrchem vymrznutí. Vztah (2.13) lze částečně zintegrovat a dojdeme ke vztahu

$$\left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy} \right|_{y=0} = \frac{2\pi\tau_{fo} \int r\rho(r)dr}{(2\pi)^2} m_t K_1 \left(\frac{m_t}{T} \right). \quad (2.13)$$

Opět tedy dostáváme výsledek nezávislý na hmotnostech částic a spektra tak tedy opět budou vypadat stejně jako funkce příčné hmotnosti m_t . Za poznámku také stojí, že opravdu došlo pouze k úpravě předchozího vztahu jelikož modifikovaná Besselova funkce K_1 se extrémálně chová právě jako exponenciála. Faktory před touto funkcí opět souvisí pouze s objemem zdroje původních částic.

2.4.3 Příčná expanze

Zbývá tedy do systému přidat expanzi příčnou. Pro další postup budeme uvažovat azimutální symetrii v šíření částic. Složky transversální rychlosti v_t zavedeme v polárních souřadnicích a parametrizujeme pomocí příčné rapidity $y_t(r)$. Pro vektor čtyřrychlosti tedy máme

$$u^\mu = (\cosh y_{st} \cosh y_t, \sinh y_t \cos \theta, \sinh y_t \sin \theta, \sinh y_{st} \cosh y_t). \quad (2.14)$$

Energii E^* v lokální klidové soustavě opět obdržíme aplikací vztahu (2.11) a dostáváme

$$E^* = g_{\mu\nu} p^\nu u^\mu = m_t \cosh(y_{st} - y) \cosh y_t - p_t \sinh(y_t) \cos(\phi - \theta). \quad (2.15)$$

Stejně jako v předchozích případech uvažujeme v každé lokální klidové soustavě Boltzmanovo rozdělení, proto je i další výpočet proveden ve stejném duchu [13]

$$\frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy} = \frac{\tau_{fo}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{st} m_t \cosh(y_{st} - y) \rho(r) \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right). \quad (2.16)$$

Samotné integrály je znova možno zčásti vypočítat a s využitím Besselových funkcí pro spektrum v centrální rapiditě dostáváme

$$\left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\Phi dy} \right|_{y=0} = \frac{\tau_{fo} m_t}{(2\pi)^2} \int_0^\infty r \rho(r) I_0 \left(\frac{p_t \sinh y_t}{T} \right) K_1 \left(\frac{m_t \cosh y_t}{T} \right). \quad (2.17)$$

Je třeba poznamenat, že Besselovy funkce nelze vytknout z integrálu vzhledem k závislosti rapidity y_t na radiální souřadnici. Dále si lze povšimnout závislosti spektra jak na příčné hybnosti, tak na příčné hmotnosti což znamená, že spektrum nyní bude explicitně záviset na hmotnosti částic.

2.4.4 Fourierova analýza

Dosud jsme uvažovali situaci s azimutální symetrií. V takovém případě se částice produkují symetricky v azimutálních úhlech. Expanze je rovněž v těchto úhlech symetrická. Mluvíme o takzvaném izotropním toku, který je idealistickým případem

a bylo by zapotřebí uvažovat pouze kolize s nulovým parametrem srážky a zanedbávat veškeré kvantové fluktuaace. V opačném případě je třeba mluvit o toku anizotropním tj. nesymetrickém v azimutálních úhlech. Pro popis spektra v takovéto situaci se využívají veličiny směrového a eliptického toku odpovídající Fourierovým koeficientům rozvoje spektra. Pro pochopení tohoto konceptu je nejprve třeba zavést reakční rovinu. Nechť vektor srážky je vektor spojující projekce center srážejících se částic do roviny tj. parametr srážky by poté byl jeho velikost a nechť vektor \vec{z} je jednotkový vektor ve směru svazku. Rovina dána těmito dvěma vektory se poté nazývá reakční rovina [9]. Pokud nyní přepíšeme azimutální část spektra pomocí Fourierova rozvoje dostáváme

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_t dp_t dy} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2v_k \cos(k(\phi_p - \Psi_{rp})) \right], \quad (2.18)$$

kde ϕ_p je úhel vylétávající částice v laboratorní soustavě a Ψ_{rp} je úhel definující reakční rovinu [9]. Právě tyto koeficienty v_k jsou funkcemi, které pomáhají popsat anizotropie v rozdělení hybností, tj. pro izotropní systém by každý z těchto koeficientů byl nulový. Nejpoužívanějšími z těchto koeficientů jsou právě v_1 a v_2 nazývané směrový a eliptický tok. Obě tyto veličiny jsou velmi citlivé na počáteční podmínky srážky. Směrový tok lze využít k popisu tlakových gradientů v momentu srážky nebo stlačitelnosti vytvořené jaderné hmoty. Eliptický tok lze použít k charakterizaci azimutální asymetrie v hybnostním rozdělení. Právě souhlas měřených hodnot eliptického toku na urychlovači RHIC s předpověďmi ideální hydrodynamiky vedl na tvrzení, že se horká jaderná hmota chová jako ideální tekutina [9, 10].

Kapitola 3

Statistický přístup

Horkou jadernou hmotu je možné popsat pomocí aparátu statistické fyziky. Při použití těchto metod je možné odvodit veličiny jako jsou střední hodnoty počtů částic jejich korelace nebo fluktuace. Je ovšem taky možné nalézt stavovou rovnici silně interagujících systémů a tak lze přejít k hydrodynamickému popisu expanze *fireballu* tak, jak bylo předvedeno v kapitole o srážkách těžkých iontů. Námi kýžené veličiny jsou právě fluktuace a korelace různých typů částic. Ty budou sloužit jako určitá sonda pro zjištění vlastností horké hmoty a jejich stavů.

3.1 Grand-kanonický formalismus

Budeme pracovat se systémem, ve kterém je možná nejen výměna energie s rezervoárem, ale dále taky v němž fluktuuje jeho celkový počet částic. Vhodným souborem k popisu takové situace je právě grand-kanonický soubor. Všechny relevantní veličiny takového souboru jsou určeny jeho partiční funkcí $\mathcal{Z}(T, V, \mu)$, kde T je teplota systému V jeho objem a μ relevantní chemické potenciály. Pro relativistické systémy navíc platí, že v nich mohou vznikat nové částice, proto přecházíme od jejich počtu k zachovávajícímu se náboji. Nejprve ovšem vybudujeme formalismus v nerelativistickém tvaru. Pro partiční sumu bude platit vztah

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_n \varrho(E_n, N) \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T} + \frac{\mu \cdot N}{k_B T}\right) = \sum_{N=0}^{+\infty} \exp\left(\frac{\mu \cdot N}{k_B T}\right) Z_N(T, V), \quad (3.1)$$

kde poslední krok byl proveden pomocí vytknutí výrazu nezávislém na energii z vnitřní sumy, $Z_N(T, V)$ označuje kanonickou partiční sumu pro N částic a $\varrho(E_n, N)$ je degenerace energetické hladiny s N částicemi. Z definice partiční funkce (3.1) je zřejmé, že v samotném rozdělení vystupuje právě jako jeho normalizace.

Vzhledem k obecné závislosti energie na hybnosti p a poloze q potom lze zespojitiěním

převést rovnici (3.1) do tvaru

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{+\infty} \int_V d^3q \int_{\mathbb{R}} d^3p \varrho(E(p, q), N) \exp\left(-\frac{E(p, q)}{k_B T} + \frac{\mu \cdot N}{k_B T}\right). \quad (3.2)$$

Dále je možné zavedením parametrů $\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$ a $\beta = \frac{1}{k_B T}$ pomocí partiční funkce (3.1) vyjádřit střední hodnoty počtů částic a energie v systému pomocí vztahů

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_{\gamma} E_{\gamma} w_{\gamma} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\gamma} E_{\gamma} \exp(-\beta E_{\gamma} + \alpha N_{\gamma}) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\gamma} -\frac{\partial}{\partial \beta} \exp(-\beta E_{\gamma} + \alpha N_{\gamma}) = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta} = -\frac{\partial(\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A podobným způsobem pro střední počet částic v systému

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{\gamma} N_{\gamma} w_{\gamma} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\gamma} N_{\gamma} \exp(-\beta E_{\gamma} + \alpha N_{\gamma}) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp(-\beta E_{\gamma} + \alpha N_{\gamma}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \alpha} = \frac{\partial(\ln \mathcal{Z})}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podobně jsme schopni vyjádřit i druhé momenty rozdělení jako druhé derivace podle chemického potenciálu tj.

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2(\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta^2}. \quad (3.5)$$

A pro varianci v počtu částic poté máme

$$\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2(\ln \mathcal{Z})}{\partial \alpha^2}. \quad (3.6)$$

Samotnou pravděpodobnost nalezení N částic v systému pro energii obecně závislou na poloze q a hybnosti p nalezneme integrací přes tyto souřadnice

$$P(N) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_V d^3q \int_{\mathbb{R}} d^3p \varrho(E(p, q), N) \exp\left(-\frac{E(p, q)}{k_B T} + \frac{\mu \cdot N}{k_B T}\right). \quad (3.7)$$

Pokud navíc uvažíme energii nezávislou na poloze v systému získáme výraz pro pravděpodobnost výskytu počtu částic

$$P_{ind}(N) = \frac{V}{\mathcal{Z}(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}} d^3p \varrho(E(p), N) \exp\left(-\frac{E(p)}{k_B T} + \frac{\mu \cdot N}{k_B T}\right). \quad (3.8)$$

3.2 Stavová rovnice

Pro popis hydrodynamické expanze horké jaderné hmoty ve smyslu velmi energetických a nahuštěných hadronů je třeba odvodit její stavovou rovnici. Proces vytváření takové hmoty byl diskutován v kapitole o srážkách těžkých iontů a v této sekci se tedy zaměřujeme na odvození samotné stavové rovnice. Výpočty budou provedeny v rámci relativistického ideálního plynu. Kýženými pozorovatelnými jsou veličiny nezávislé na velikosti systému jako hustota energie a hustota entropie.

Výjdeme z vlastnosti grand-kanonického potenciálu Ω , která spojuje grand-kanonickou partiční funkci spolu s tlakem soustavy, pro který platí

$$\Omega = -pV = -k_B T \ln \mathcal{Z}. \quad (3.9)$$

Samotnou hustotu energie ϵ získáme pouhým vydělením vztahu pro střední energii (3.3) celkovým objemem systému a dostáváme tedy

$$\epsilon = -\frac{1}{V} \frac{\partial(\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta} \quad (3.10)$$

Pro vyjádření hustoty entropie s využijeme Maxwellových vztahů první série a dostáváme

$$s = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu} = -\frac{k_B}{V} \frac{\partial}{\partial T} T \ln \mathcal{Z}. \quad (3.11)$$

Samotné partiční funkce, kterými popisujeme takové systémy je již třeba odvodit zvlášť. Do dalších výpočtů je nyní ovšem potřeba započítat kvantové jevy. Při takovém přístupu je nutné nahlížet na tvar vlnových funkcí popisující samotné fermiony nebo bosony. Takové částice mají dvě hlavní vlastnosti a to sice, že jsou nerozlišitelné a pro částice s poločíselným spinem je třeba uvažovat Pauliho vylučovací princip. Partiční suma pro fermiony poté nabude tvaru

$$\ln \mathcal{Z}_{FD} = -\beta \Omega = \beta T \sum_k \log [1 + \exp \beta (\mu - \epsilon_k)] \quad (3.12)$$

a pro bosony

$$\ln \mathcal{Z}_{BE} = -\beta \Omega = -\beta T \sum_k \log [1 - \exp \beta (\mu - \epsilon_k)], \quad (3.13)$$

kde sumace prochází přes všechny kvantové stavy a ϵ_k jsou energie k -tého kvantového stavu [14].

V relativistických systémech je dále třeba uvažovat produkci párů částic a antičástic. Při určování celkových kvantových čísel jako je třeba baryonové číslo je tedy třeba uvažovat obě možnosti. Pro jejich zápočet vycházíme ze superpoziční vlastnosti partiční funkce, kterou vyscítáme přes všechny druhy částic i

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_i \ln \mathcal{Z}_i. \quad (3.14)$$

Potom lze zapsat partiční sumu pro bosony a fermiony jako sumu přes partiční funkce částic a jejich antičástic. Dostaneme funkce tvaru[15]

$$\ln \mathcal{Z}_{FD} = g_f V \int_{\mathbb{R}} d^3 p \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[\ln(1 + e^{\frac{\mu}{k_B T}} e^{-\beta E(p)}) + \ln(1 + e^{-\frac{\mu}{k_B T}} e^{-\beta E(p)}) \right], \quad (3.15)$$

$$\ln \mathcal{Z}_{BE} = g_b V \int_{\mathbb{R}} d^3 p \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[\ln(1 - e^{\frac{\mu}{k_B T}} e^{-\beta E(p)}) + \ln(1 - e^{-\frac{\mu}{k_B T}} e^{-\beta E(p)}) \right]. \quad (3.16)$$

V rovnicích (3.15) a (3.16) se vyskytují členy g_f a g_b , které označují degeneraci energetických hladin kvůli dalším kvantovým čísům.

3.2.1 Partiční funkce

Řešíme statistický problém fluktuujícího počtu částic při teplotě T budeme tedy využívat grand-kanonického potenciálu. V dalším budeme uvažovat soustavu jednotek kde $k_B = \hbar = 1$. Pro systém v grand kanonickém souboru platí

$$\mathcal{Z}(V, T, \vec{\mu}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{E - \sum_j \mu_j N_{j,i}}{T}} = \sum_{N_i} \lambda^{N_i} Z(T, V, N_i), \quad (3.17)$$

kde λ je fugacita a \mathcal{Z} je kanonická partiční suma. V dalším postupujeme podle [16, str. 48-52]. Nyní tedy přistupme k výpočtu kanonické partiční sumy $Z(T, V)$. Pro takový systém platí

$$Z(T, V) = \sum_i e^{\frac{-E_i}{T}} = \int_0^{\infty} \varrho(E, V) e^{\frac{-E}{T}} dE, \quad (3.18)$$

kde $\varrho(E, V)$ degenerace energetických stavů. Zavedme energii hadronu a s hybností p_a a máme tedy

$$E_{a,b}^2 = p_a^2 + m_b^2. \quad (3.19)$$

Pro obsazovací čísla fermionů platí z Pauliho vylučovacího principu

$$r_{a,b} = 0, 1. \quad (3.20)$$

Pro obsazovací čísla bosonů, pro které Pauliho vylučovací princip neplatí pak naopak

$$r_{a,b} = 0, 1, \dots, + \infty. \quad (3.21)$$

V tomto formalismu je stav systému plně určen sadou obsazovacích čísel $r_{a,b}$ a energiemi těchto částic $E_{a,b}$. Energie i -tého stavu bude dána jako

$$E_i = \sum_{a,b}^{\infty} r_{a,b} E_{a,b}. \quad (3.22)$$

Partiční funkci poté lze získat jako sumu přes všechny možné mikrostavy, tj. sumu přes všechny možné sady obsazovacích čísel $r_{a,b}$

$$\sum_{\{r_{a,b}\}} \exp \left[-\frac{1}{T} \sum_{a,b} r_{a,b} E_{a,b} \right]. \quad (3.23)$$

Roztržením $r_{a,b}$ na $r_{a,F}$ a $r_{a,B}$, kde index F označuje, že se jedná o fermion a index B , že se jedná o boson lze dojít ke vztahu

$$\ln Z(T,V) = - \sum_{a,B} \ln \left(1 - e^{-\frac{E_{a,B}}{T}} \right) + \sum_{a,F} \ln \left(1 + e^{-\frac{E_{a,F}}{T}} \right). \quad (3.24)$$

Zespojitěním sum v (3.24) poté získáváme vztah

$$\ln Z(T,V) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left[\int_0^\infty dm \rho_F(m) \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p,m)}{T}} \right) - \rho_B(m) \ln \left(1 - e^{-\frac{E(p,m)}{T}} \right) \right]. \quad (3.25)$$

Pokud rozvineme logaritmy v (3.25) pomocí Taylorova rozvoje a zdefinujeme funkci

$$\rho(m,n) = \rho_B(m) - (-1)^n \rho_F(m), \quad (3.26)$$

pak lze výraz pro kanonickou partiční sumu (3.25) upravit do tvaru

$$\ln Z(T,V) = \frac{V}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty dm dp p^2 \rho(m,n) \exp \left(-\frac{n}{T} E(p,m) \right) \quad (3.27)$$

3.3 HRG model

Pro naše účely budeme pro modelování situace používat model plynu hadronů a rezonancí nebo tzv. hadron resonance gas model (dále jen HRG). Ten spočívá v nahrazení komplexní situace, kde je zapotřebí uvažovat všechny částice, které silně interagují za systém volných neinteragujících rezonancí.

Výpočet samotné partiční sumy pro termální systém fermionů a bosonů byl již proveden v rovnici (3.27). V takovémto plynu odpovídá celkový hamiltonián sumě kinetických energií jednotlivých rezonancí tj. relativistickým kinetických energií bosonů a fermionů s hmotnostmi m_i . Odsud tedy dostáváme, že celkovou partiční funkci lze spočítat jako sumu přes jednotlivé partiční funkce pro každý jedinečný typ rezonancí tj.

$$\ln Z(T,V) = \sum_i \ln Z_i(T,V), \quad (3.28)$$

kde $Z_i(T,V)$ je partiční suma pro i -tou částici. Takovou partiční funkci lze upravit do tvaru (3.27). My nyní přejdeme k partiční sumě tvaru

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(T,V,\vec{\mu}), \quad (3.29)$$

kde $\vec{\mu}$ je vektor chemických potenciálů. Partiční suma takového systému poté bude dána jako

$$\ln \mathcal{Z}(T, V, \vec{\mu}_Q) = \text{Tr} \left[e^{-\beta(E - \sum_i \mu_{Q_i} Q_i)} \right], \quad (3.30)$$

kde Q_i jsou náboje příslušející daným chemickým potenciálům [17]. Znova pro partiční sumu (3.30) platí vlastnost (3.28). Pomocí vztahu (3.12) a (3.13) jsme tedy schopni spočítat explicitně partiční sumu pro i -tou rezonanci

$$\ln \mathcal{Z}_i(T, V, \vec{\mu}) = \frac{VTg_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+1}}{k} \lambda_i^k m_i^2 K_2 \left(\frac{km_i}{T} \right), \quad (3.31)$$

kde g_i je degenerační faktor, K_2 modifikovaná Besselova funkce a λ je fugacita

$$\lambda_i = e^{\frac{\sum_i \mu_{Q_i} Q_i}{T}}. \quad (3.32)$$

Odsud lze již z (3.4) lze získat střední hodnotu počtu i -té částice v termálním systému. Ke střednímu počtu částic však dále ještě přispívají rozpady rezonancí. O jejich příspěvcích budeme hovořit více v další kapitole.

3.4 Landauova teorie fázového přechodu

Na otázku vztahu fluktuací a kritického bodu fázového diagramu odpovídá Landauova teorie fázového přechodu. Samotná formulace této teorie vychází z pozorování, že v kritickém bodě nabývá stlačitelnost $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ a tepelná kapacita C_p nekonečných hodnot. Stejně tak divergují fluktuace objemu a entropie. Oproti tomu fluktuace teploty a tlaku zůstávají konečné [14]. Prvním krokem nutným k pochopení Landauovy teorie fázových přechodů je zavedení parametru uspořádání Ψ . Tento parametr slouží k odlišení různých fází a může být reprezentován libovolnou veličinou schopnou tohoto rozlišení. Nejprve zavedeme redukovanou teplotu τ pro kritickou teplotu T_C

$$\tau = \frac{T - T_C}{T}. \quad (3.33)$$

Nechť dále $\Psi(T)$ představuje právě parametr uspořádání. Landauův argument spočívá v analytičnosti volné energie F v proměnných T a Ψ v okolí kritického bodu. Je tedy možné ji rozvinout do Taylorovy řady do tvaru[18]

$$F(P, T) = F_0(T) + V [a(T)\Psi^2 + b(T)\Psi^4 + \dots], \quad (3.34)$$

kde pro koeficienty $a(T)$ a $b(T)$ platí

$$a(T) = a_0\tau + \dots > 0, \quad (3.35)$$

$$b(T) = b_0 + \dots > 0. \quad (3.36)$$

Podle druhého zákona termodynamiky lze nalézt rovnovážný stav právě minimalizací volné energie. Pokud uvážíme pouze první dva členy rozvoje pak rovnovážná podmínka dává(3.34)

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = 0 \propto 2a(T)\Psi + 4b(T)\Psi^3. \quad (3.37)$$

Odsud lze nalézt tvar volné energie a podmínku na skok v tepelné kapacitě C_p v kritickém bodě při teplotě T_c . Zavedením pole, svázaného s lineárním parametrem, lze stejným postupem a následnou derivací parametru uspořádání dojít k výrazu pro susceptibilitu. Právě tato veličina charakterizuje jak systém reaguje na odchylky. Ta ovšem v kritickém bodě T_c diverguje [18]. Z divergence susceptibility je rozumné uvažovat vysoké fluktuace v okolí kritického bodu.

3.5 Částečná chemická rovnováha

Samotný model HRG je nedostačující právě z důvodu rozpadu rezonancí a souvislostí s průměrným počtem částic po chemickém vymrznutí. Jak již bylo vysvětleno v kapitole o srážkách těžkých iontů tento moment označuje konec všech neelastických interakcí mezi částicemi v systému. Všechny interakce ovšem ustávají až v momentě termálního vymrznutí, které nastává při teplotách mnohem nižších než předchozí zmíněný [19]. Jinými slovy po chemickém vymrznutí dochází ke ztrátě chemické rovnováhy systému. Tento problém lze vyřešit zavedením částečné chemické rovnováhy. Ta je založena na pozorování, že po chemickém vymrznutí jsou průměrné multiplicity stabilních částic zafixovány [20]. V takovémto stavu platí, že všechny počty rezonancí, tak jak jsou popsány v sekci o hadronovém rezonančním plynu zůstávají v rovnovážném stavu s jejich produkty. Z toho plyne i zachování chemických potenciálů v tom smyslu, že pokud zavedeme chemický potenciál pro každý typ rezonancí, ty poté budou sumou chemických potenciálů násobených průměrným počtem příslušných dceřiných částic těchto rezonancí. [21]. Pokud budeme uvažovat expanzi *fireballu* se zachováním konstantní entropie, je možné vyjádřit chemický potenciál dané stabilní částice právě z těchto dvou podmínek, které lze zkombinovat v rovnost tvaru

$$\frac{\langle N(T) \rangle}{S(T)} = \frac{\langle N(T) \rangle}{S(T)} \Big|_{T=T_{fo}}, \quad (3.38)$$

kde T_{fo} označuje teplotu při které dochází k chemickému vymrznutí. Entropie S bude přitom dána vztahem

$$S = \sum_R \frac{V P_R + E_R - \langle N_R \rangle \mu_R}{T}. \quad (3.39)$$

Samotná energie E_R , tlak P_R a průměrný počet částic $\langle N_R \rangle$ byly již vyjádřeny v pojednání o stavové rovnici silně interagujícího plynu.

3.6 Omezené pokrytí v hybnostech a energiích

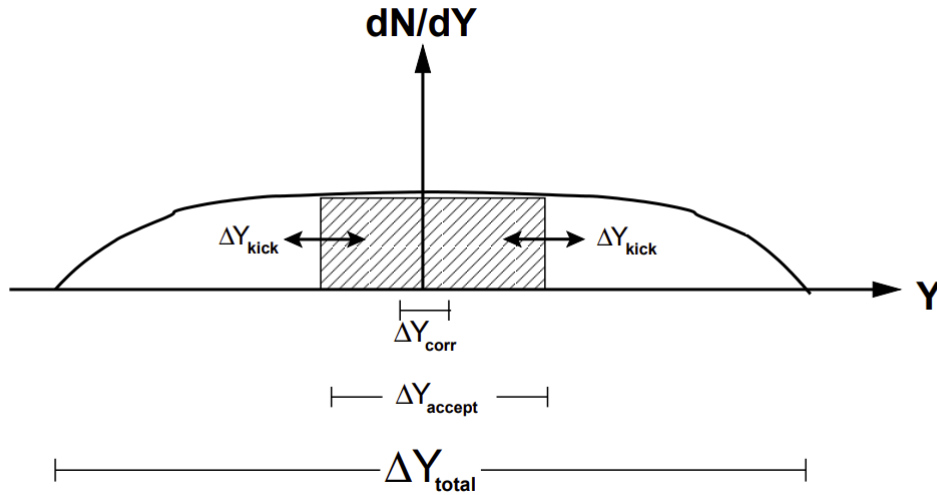
Spojení teoretických výpočtů vycházejících z grand-kanonického potenciálu s experimentálními měřeními je netriviální otázkou. V celém procesu srážek těžkých iontů jsou všechna globální kvantová čísla zachována, proto nelze mluvit o fluktuacích. Naproti tomu formalismus grand-kanonického souboru poskytuje možnost výměny částic s rezervoárem. Samotný interval měřených energií a hybností ovšem nepokrývá celý fázový prostor. Studium celého intervalu by však z výše zmíněných důvodů nemělo žádný význam. Je tedy zapotřebí vybrat správné pokrytí v rapiditách, které v experimentech charakterizují měřené energie a hybnosti. Hlavním cílem je najít určitou rovnováhu mezi zachováním podstatných fyzikálních vlastností a potlačením globálních zákonů zachování. Takovýto výběr lze vidět na Obrázku 3.1. V dalším uvažujeme susceptibility zavedené vztahem

$$\chi_{i,j} = \frac{T}{V} \frac{\partial^2}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \ln \mathcal{Z}. \quad (3.40)$$

Ty lze svázat s variancemi a kovariancemi pomocí vztahu

$$\langle \Delta Q_i \Delta Q_j \rangle = T^2 \frac{\partial^2}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \ln \mathcal{Z} = VT \chi_{i,j}. \quad (3.41)$$

Lze vidět, že susceptibility budou tvořit matice, jejichž diagonální prvky budou popisovat právě fluktuace a nediagonální prvky kovariance [22]. Takto jsme ovšem



Obrázek 3.1: Demonstrace omezeného pokrytí spektra v rapiditách. ΔY_{total} označuje celkové spektrum. ΔY_{accept} jsou částice přijaté detektorem. ΔY_{corr} označuje délku intervalu, který udává důležité fyzikální vlastnosti spojené s fluktuacemi. ΔY_{kick} popisuje část spektra spojenou s posuny v rapiditě v důsledku hadronizace. Převzato z [22].

zdefinovali pouze susceptibility druhého řádu. Lze je ovšem formulovat pro řád obecný. V tomto pojetí nebudou nic jiného, než derivace tlaku podle příslušného

chemického potenciálu (Tyto zápisy jsou podle (3.9) ekvivalentní.)

$$\chi_n^B = \frac{\partial^n (p/T^4)}{\partial (\mu_B/T)^n} = \frac{\kappa_n}{VT^3}, \quad (3.42)$$

kde κ_n je kumulant n -tého řádu a index B označuje, že jde o susceptibilitu baryonového čísla [23]. Užitečnou vlastností těchto kumulantů je, že až do třetího řádu se shodují se středními momenty distribuce [24]. Pro susceptibility až do třetího řádu tedy dostáváme

$$\chi_1^B = \frac{1}{VT^3} \langle N_B \rangle, \quad (3.43)$$

$$\chi_2^B = \frac{1}{VT^3} \langle (\Delta N_B)^2 \rangle, \quad (3.44)$$

$$\chi_3^B = \frac{1}{VT^3} \langle (\Delta N_B)^3 \rangle. \quad (3.45)$$

Dále si lze povšimnout, že všechny tyto susceptibility jsou nepřímo úměrné objemu a třetí mocnině teploty, proto je výhodnější využívat poměrů susceptibilit. Hlavním důvodem tohoto kroku, je potlačení efektů způsobených fluktuacemi srážkového parametru.

Některé částice jsou ovšem nedetekovatelné a proto dochází k určité ztrátě v globálním zachování kvantových čísel jako je například baryonové číslo B nebo podivnost S . Tento problém je většinou řešen pomocí zavedení tak zvaných *náhrad*. V tomto přístupu se přistupuje ke kumulantům jednotlivých typů identifikovaných částic (resp. k poměru susceptibilit) jako k veličinám, které nesou veškeré informace o kvantovém čísle. Místo měření fluktuací všech částic a následné rekonstrukce celkového kvantového čísla je tedy možné přejít k měření fluktuací vybraných typů částic. Otázkou ovšem zůstává jak vybrat tyto poměry tak, aby korelovaly s experimentálně určenými kvantovými čísly. Tradiční volbou pro *náhradu* baryonového čísla byl počet protonů, dále pro podivnost kaony a pro náboj piony. Konstrukce těchto veličin může ovšem být i složitější například pro vytvoření *náhrady* χ_{11}^{QS}/χ_2^S je možné použít poměr variancí [25]

$$C(T) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_K^2}{\sigma_\Lambda^2 + \sigma_K^2}. \quad (3.46)$$

Samotná konstrukce a využitelnost těchto *náhrad* bude demonstrována v poslední kapitole.

Kapitola 4

Fluktuace a korelace

4.1 Výpočet maticových elementů

V této části provedeme odvození distribuce počtu částic typu a a b po rozpadech N rezonancí typu R . Začneme zavedením pojmu větvicí poměr rezonance typu R . Tento termín označuje pravděpodobnost průchodu rozpadu skrze určitou rozpadovou větev a budeme jej označovat b_r^R , kde r je indexování rozpadových větví. Označme si nyní $N_{r,a}^R$ počet částic typu a vzniklých po rozpadu rezonance typu R po průchodu větví r . Snadno nahlédneme, že celková pravděpodobnost, že se rezonance rozpadne právě na N_a částic typu a bude dána vztahem

$$\Gamma_{R \rightarrow N_a} = \sum_r b_r^R \cdot \delta(N_{r,a}^R - N_a). \quad (4.1)$$

Nyní přejdeme k pravděpodobnosti rozpadu N_R rezonancí R na N_a částic typu a . Pro odvození této využijeme následujících podmínek.

1. Každá rezonance se může rozpadnout právě jedním rozpadovým kanálem.
2. Součet všech částic typu a , které vznikly rozpady rezonancí musí dávat náš požadovaný počet částic N_a .
3. Když se jedna rezonance rozpadne právě na N_a částic typu a pak se žádná jiná na tuto částici rozpadnout nesmí. Tato možnost nastane právě N_R krát.
4. Budeme mít právě $\binom{N_R}{N_a}$ možností, kdy se každá rezonance rozpadne právě na jednu nebo žádnou částici typu a .

Zaveďme vektor \vec{r} , který má právě N_R složek. Složka vektoru r_n bude odpovídat počtu dceřiných částic po rozpadu n -té rezonance R . Pro takový vektor musí jistě platit

$$\sum_{n=1}^{N_R} r_n = N_a. \quad (4.2)$$

Nechť \mathcal{R} je množina všech vektorů, které splňují podmínku (4.2). Dále zavedeme zobrazení $\mathcal{K} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0^{N_a+1}$. Zobrazení \mathcal{K} působí tak, že zobrazuje na i -tý prvek vektoru $\vec{s} \in \mathcal{S}$ počet čísel i obsažených ve vektoru \vec{r} . Libovolný vektor $\vec{s} \in \mathcal{S}$ splňuje vlastnosti

$$\sum_i s_i = N_R, \quad \sum_i i s_i = N_a. \quad (4.3)$$

Je zřejmé, že zobrazení \mathcal{K} není prosté. Na každý vektor $\vec{s}_j \in \mathcal{S}$ se zobrazí právě P_j vektorů $\vec{r} \in \mathcal{R}$. Díky vlastnostem vektorů náležících \mathcal{S} , jejichž elementy pouze počítají počet čísel od 0 do N_a ve vektoru \vec{r} lze vyjádřit číslo P_j následujícím vztahem

$$P_j = \frac{N_R!}{\prod_{i=0}^{N_a} s_{j,i}!}. \quad (4.4)$$

Pro pravděpodobnost rozpadu N_R rezonancí R na N_a částic typu a pak zřejmě platí

$$\varrho(N_a, N_R) = \sum_j N_R! \prod_{i=0}^{N_a} \frac{\Gamma_{R \rightarrow i}^{s_{j,i}}}{s_{j,i}!}. \quad (4.5)$$

Nyní přejdeme k pravděpodobnosti rozpadu N_R rezonancí typu R na N_a částic typu a a N_b částic typu b . Pravděpodobnost rozpadu jedné rezonance bude dána podobně jako v předchozím případě vztahem

$$\Gamma_{R \rightarrow (N_a, N_b)} = \sum_r b_r^R \cdot \delta(N_{r,a}^R - N_b) \cdot \delta(N_{r,b}^R - N_b). \quad (4.6)$$

K pravděpodobnosti budeme přecházet ekvivalentním způsobem. Jediným rozdílem bude definice množin \mathcal{R} a \mathcal{S} . Vektory \vec{r} , budou opět mít právě N_R složek, každá složka nyní samotná dvou komponentním vektorem. Bude platit podobný vztah k (4.2)

$$\sum_{n=1}^{N_R} \vec{r}_n = (N_a, N_b). \quad (4.7)$$

Množinu \mathcal{R} nyní definujeme jako množinu všech vektorů splňující podmínku (4.7). Zobrazení \mathcal{K} nyní nabude formy $\mathcal{K} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0^{N_a+1} \times \mathbb{N}_0^{N_b+1}$, kde \mathcal{K} přiřazuje i, j -tému prvku matice $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ počet vektorů (i, j) obsažených ve vektoru $\vec{r} \in \mathcal{R}$. Pro všechny matice $\mathbf{s}_j \in \mathcal{S}$ budou nyní platit vztahy obdobné (4.3)

$$\sum_i \sum_k s_{j,i,k} = N_R, \quad \sum_i \sum_k i s_{j,i,k} = N_a, \quad \sum_i \sum_k k s_{j,i,k} = N_b, \quad (4.8)$$

kde index j označuje j -tou matici $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$. Stejným postupem dojdeme jako v předchozím případě k pravděpodobnosti rozpadu N_R rezonancí R na N_a částic typu a a N_b částic typu b

$$\varrho(N_a, N_b, N_R) = \sum_j N_R! \prod_{i=0}^{N_a} \prod_{k=0}^{N_b} \frac{\Gamma_{R \rightarrow (i,k)}^{s_{j,i,k}}}{s_{j,i,k}!}. \quad (4.9)$$

4.2 Maticový formalismus

Nyní přejdeme k formalismu matic a následnému odvození momentů naší distribuce. Tyto výpočty budou provedeny v podobném pořadí jako výpočty předchozí sekce. Nejprve se tedy podíváme na situaci, kde se nám rozpadá jediná rezonance na n_a částic typu a a n_b částic typu b . Budeme předpokládat horní limit na počet částic vznikajících z jediné rezonance N_a, N_b . Pravděpodobnost, že se rezonance rozpadne na N_a částic a a N_b částic b označíme $\mathbf{P}_{N_a, N_b} \equiv \Gamma_{R \rightarrow (N_a, N_b)}$. Nyní jsme tyto pravděpodobnosti schopni zorganizovat do matice \mathbf{P} .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \cdots & \mathbf{P}_{0,N_b} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \cdots & \mathbf{P}_{1,N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{N_a,0} & \mathbf{P}_{N_a,1} & \cdots & \mathbf{P}_{N_a,N_b} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Jednotlivé prvky této matice lze spočítat pomocí vztahu (4.9), kde položíme $N_R = 1$. Matice musí být normalizovaná, musí tedy platit podmínka

$$\sum_{i,j=0}^{N_a, N_b} \mathbf{P}_{i,j} = 1. \quad (4.11)$$

Dalším krokem je pozorovat chování takovéto matice pro rozpad pevného počtu rezonancí N_R typu R . Tato matice nabude podobného tvaru jako matice (4.10) a pro její prvky bude platit

$${}^{N_R}\mathbf{Q}_{N_a, N_b} = \varrho(N_a, N_b, N_R). \quad (4.12)$$

Horní limit pro maximální počet částic je možné znova nastavit libovolně na počet N_a, N_b . Explicitně dostáváme

$${}^{N_R}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} {}^{N_R}\mathbf{Q}_{0,0} & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{0,1} & \cdots & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{0,N_b} \\ {}^{N_R}\mathbf{Q}_{1,0} & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{1,1} & \cdots & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{1,N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{N_R}\mathbf{Q}_{N_a,0} & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{N_a,1} & \cdots & {}^{N_R}\mathbf{Q}_{N_a,N_b} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Posledním krokem je prozkoumat chování pro fluktuující počet rezonancí N_R . Pravděpodobnost vzniku N_R rezonancí hmotnosti m_R bude dána pravděpodobností (3.8). Konečnou matici tedy získáme jako střední hodnotu matic ${}^{N_R}\mathbf{Q}$ v rozdělení (3.8). Získáváme tedy vztah

$$\mathbf{F} = \sum_{N_R=0}^{N_R^F} P_n(N_R) \cdot {}^{N_R}\mathbf{Q}. \quad (4.14)$$

I pro matici F musí platit normalizační podmínka

$$\sum_{i,j=0}^{N_a, N_b} \mathbf{F}_{i,j} = 1. \quad (4.15)$$

4.3 Rekurentní vztahy

Matice (4.13) lze odvodit pomocí rekurencí. Budeme uvažovat proces rozpadu N_R+1 rezonancí jako proces rozpadu N_R rezonancí a následný rozpad jedné rezonance. Pomocí takové úvahy v této sekci demonstrujeme tvar této rekurence a dokážeme její platnost. Důkaz provedeme indukcí. Tvar rekurence pro matice \mathbf{Q} bude ve tvaru

$${}^{N_R+1}\mathbf{Q}_{a,b} = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b {}^{N_R}\mathbf{Q}_{i,j} \cdot {}^1\mathbf{Q}_{a-i,b-j}. \quad (4.16)$$

Nejprve ukážeme platnost vztahu (4.16) pro nejjednodušší příklad $N_R = 1$. Při odvozování budeme vycházet ze vztahu pro maticové elementy ve tvaru (4.9). V takovém případě platí

$$\varrho(a,b,2) = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \varrho(i,j,1) \cdot \varrho(a-i,b-j,1) = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \Gamma_{R \rightarrow (i,j)} \cdot \Gamma_{R \rightarrow (a-i,b-j)}. \quad (4.17)$$

Dále upravujeme vztah (4.9) pro $N_R = 2$, $N_a = a$ a $N_b = b$.

$$\varrho(a,b,2) = \sum_j 2! \prod_{i=0}^a \prod_{k=0}^b \frac{\Gamma_{R \rightarrow (i,j)}^{s_{j,i,k}}}{s_{j,i,k}!}. \quad (4.18)$$

Následně budeme uvažovat dva případy pro počet částic a a b . Prvně uvažujeme případ, kdy a i b jsou sudé. Z výběrových pravidel (4.8) lze ukázat, že existuje pouze jedna kombinace korespondující s možností, kdy $s_{j,i,k} = 2$ a to právě tehdy, když $s_{0,a/2,b/2} = 2$. Pokud budou a nebo b lichá čísla taková kombinace neexistuje nikdy. Odsud se již lze dopracovat ke vztahu

$$\varrho(a,b,2) = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \Gamma_{R \rightarrow (i,j)} \cdot \Gamma_{R \rightarrow (a-i,b-j)}. \quad (4.19)$$

Lze tedy vidět, že rovnice (4.16) platí pro $N_R = 1$.

V dalším kroku se přejdeme k důkazu pomocí indukce. Na rovnici (4.9) použijeme $(N_R - 1)$ -krát indukční předpoklad

$$\begin{aligned} \varrho(a,b,N_R) &= \sum_{i_1=0}^a \sum_{j_1=0}^b \varrho(i_1,j_1,1) \cdot \varrho(a-i_1,b-j_1,N_R-1) = \dots = \\ & \sum_{i_1=0}^a \sum_{j_1=0}^b \sum_{i_2=0}^{a-i_1} \sum_{j_2=0}^{b-j_1} \dots \sum_{i_{N_R-1}}^{a-i_1-\dots-i_{N_R-2}} \sum_{j_{N_R-1}}^{b-j_1-\dots-j_{N_R-2}} \prod_{n=1}^{N_R} \Gamma_{R \rightarrow (i_n,j_n)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

kde $(i_{N_R}, j_{N_R}) = (a - \sum_{k=1}^{N_R-1} i_k, b - \sum_{k=1}^{N_R-1} j_k)$. Kompaktně lze formuli (4.20) zapsat ve tvaru

$$\varrho(a,b,N_R) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{N_R} \\ i_1 + \dots + i_{N_R} = a}} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{N_R} \\ j_1 + \dots + j_{N_R} = b}} \prod_{n=1}^{N_R} \Gamma_{R \rightarrow (i_n, j_n)}. \quad (4.21)$$

Vztah (4.21) není však nic jiného než vzorec pro výpočet maticového elementu (4.9) v neupraveném tvaru. Dokázali jsme tedy, že pro maticový element ${}^{NR}\mathbf{Q}_{a,b}$ platí rekurentní vztah (4.16).

4.4 Momenty

Matice \mathbf{F} udává pravděpodobnost produkce částic a a b a lze ji tedy použít k odvození kýžených veličin. Tyto pozorovatelné vypočteme z momentů takovéto matice. Nejprve se podíváme na první moment, tj. střední hodnotu počtu částic a . Ta bude dána vztajem

$$\langle N_a \rangle = \sum_{i=0}^{C_a} \sum_{j=0}^{C_a} i \mathbf{F}_{i,j}. \quad (4.22)$$

Ekvivalentně lze vyjádřit střední počet částic b záměnou sumování přes řádky a sloupce. Druhé momenty lze vyjádřit pomocí vztahů

$$\langle n_a^2 \rangle = \sum_{i=0}^{C_a} \sum_{j=0}^{C_a} i^2 \mathbf{F}_{i,j}, \quad (4.23)$$

$$\langle n_b^2 \rangle = \sum_{i=0}^{C_a} \sum_{j=0}^{C_a} j^2 \mathbf{F}_{i,j}, \quad (4.24)$$

$$\langle n_a n_b \rangle = \sum_{i=0}^{C_a} \sum_{j=0}^{C_a} ij \mathbf{F}_{i,j}. \quad (4.25)$$

Pro obecný moment poté bude tedy platit vztah

$$\langle n_a^s n_b^t \rangle = \sum_{i=0}^{C_a} \sum_{j=0}^{C_a} i^s j^t \mathbf{F}_{i,j}. \quad (4.26)$$

Zde indexy s, t značí mocniny v klasickém smyslu. Po dosazení definice matice \mathbf{F} do vztahu (4.14) lze pomocí záměny sum vyjádřit vztah

$$\langle n_a^s n_b^t \rangle = \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \langle n_a^s n_b^t \rangle_{N_R}, \quad (4.27)$$

kde $\langle n_a^s n_b^t \rangle_{N_R}$ označuje moment vypočítaný záměnou matice \mathbf{F} ve vztahu (4.26) za matici ${}^{NR}\mathbf{Q}$ a $P(N_R)$ je pravděpodobnost vzniku N_R rezonancí typu R . Z momentů lze nyní vypočít veličiny jako je střední hodnota, variance a kovariance. První z těchto pozorovatelných je předepsaná vztahem (4.22). Varianci je možné vyjádřit pomocí vztahu

$$\sigma_a^2 = \langle (n_a - \langle n_a \rangle)^2 \rangle = \langle n_a^2 \rangle - \langle n_a \rangle^2. \quad (4.28)$$

Poslední z pozorovatelných, kterou je třeba vyjádřit je kovariance mezi počtem částic a a b . Ta je dána vztahem

$$\text{cov}(n_a, n_b) = \langle (n_a - \langle n_a \rangle) \cdot (n_b - \langle n_b \rangle) \rangle = \langle n_a n_b \rangle - \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle. \quad (4.29)$$

4.5 Aplikace rekurentních vztahů pro výpočet momentů

Vzorec pro výpočet momentů (4.27) lze dále zjednodušit právě pomocí rekurentních vztahů matic ${}^{N_R}\mathbf{Q}$ (4.16). V rámci této práce se zaměřujeme pouze na fluktuační korelace a střední hodnoty počtu částic, proto provedeme odvození pouze pro momenty prvního a druhého řádu. Jako první ukážeme, že normalizace matice ${}^1\mathbf{Q}$ implikuje normalizaci libovolné matice ${}^{N_R}\mathbf{Q}$. Předpokládejme tedy, že matice ${}^1\mathbf{Q}$ je normalizovaná tj. formálně splňuje podmínku

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{i,j} = 1. \quad (4.30)$$

Chceme ukázat, že pokud matice ${}^{N_R}\mathbf{Q}$ je normalizovaná platí vztah

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^{N_R}\mathbf{Q}_{i,j} = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^{N_R+1}\mathbf{Q}_{i,j} = 1. \quad (4.31)$$

Nejprve ukážeme platnost tohoto tvrzení pro $N_R = 1$ za použití vztahu (4.16).

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^2\mathbf{Q}_{i,j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j {}^1\mathbf{Q}_{k,l} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{k,l} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{k,l} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{k,l} = 1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Poslední dvě rovnosti vycházejí z předpokladu normalizace matice ${}^1\mathbf{Q}$. Tvrzení tedy platí pro $N_R = 1$. Nyní přistupme k druhé části důkazu pro $N_R = m + 1$. Opět budeme vycházet ze vztahu (4.16).

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} {}^{m+1}\mathbf{Q}_{i,j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j {}^m\mathbf{Q}_{k,l} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} {}^m\mathbf{Q}_{k,l} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^m\mathbf{Q}_{k,l} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} {}^1\mathbf{Q}_{i-k,j-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^m\mathbf{Q}_{k,l} = 1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

kde pro poslední krok jsme využili indukčního předpokladu normalizace matice ${}^{N_R}\mathbf{Q}$. Se znalostí platnosti vztahu (4.31) lze již ukázat tvar prvních a druhých momentů.

Začneme s případem, kde v rovnici (4.26) položíme $s = 1$ a $t = 0$. Tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \langle n_a \rangle_{N_R} &= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i \cdot {}^{N_R}Q_{i,j} = \\
&= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j {}^{N_R-1}Q_{k,l} {}^1Q_{i-k,j-l} = \\
&= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j (i-k+k) \cdot {}^{N_R-1}Q_{k,l} {}^1Q_{i-k,j-l} = \\
&= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j [(i-k) \cdot {}^{N_R-1}Q_{k,l} {}^1Q_{i-k,j-l} + k \cdot {}^{N_R-1}Q_{k,l} {}^1Q_{i-k,j-l}] = \\
&= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^{N_R-1}Q_{k,l} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} [(i-k) \cdot {}^1Q_{i-k,j-l} + k \cdot {}^1Q_{i-k,j-l}] = \\
&= \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} {}^{N_R-1}Q_{k,l} (\langle n_a \rangle_1 + k) = \sum_{N_R=0}^{\infty} P(N_R) (\langle n_a \rangle_1 + \langle n_a \rangle_{N_R-1}).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ze série vztahů (4.34) ovšem neplyne nic jiného než

$$\langle n_a \rangle = \langle N_R \rangle \langle n_a \rangle_1. \tag{4.35}$$

Výpočet fluktuací i korelací je určen analogickým postupem jako ve výpočtech (4.34). Dostáváme tak explicitní výraz pro výpočet variance

$$\sigma_a^2 = \langle N_R \rangle (\langle n_a^2 \rangle_1 - \langle n_a \rangle_1^2) + \langle (\Delta N_R)^2 \rangle \langle n_a \rangle_1^2. \tag{4.36}$$

Pro kovariance poté platí vztah

$$cov(n_a, n_b) = \langle N_R \rangle (\langle n_a n_b \rangle_1 - \langle n_a \rangle_1 \langle n_b \rangle_1) + \langle (\Delta N_R)^2 \rangle \langle n_a \rangle_1 \langle n_b \rangle_1. \tag{4.37}$$

Kapitola 5

Numerické výsledky

5.1 Vývoj částečné chemické rovnováhy

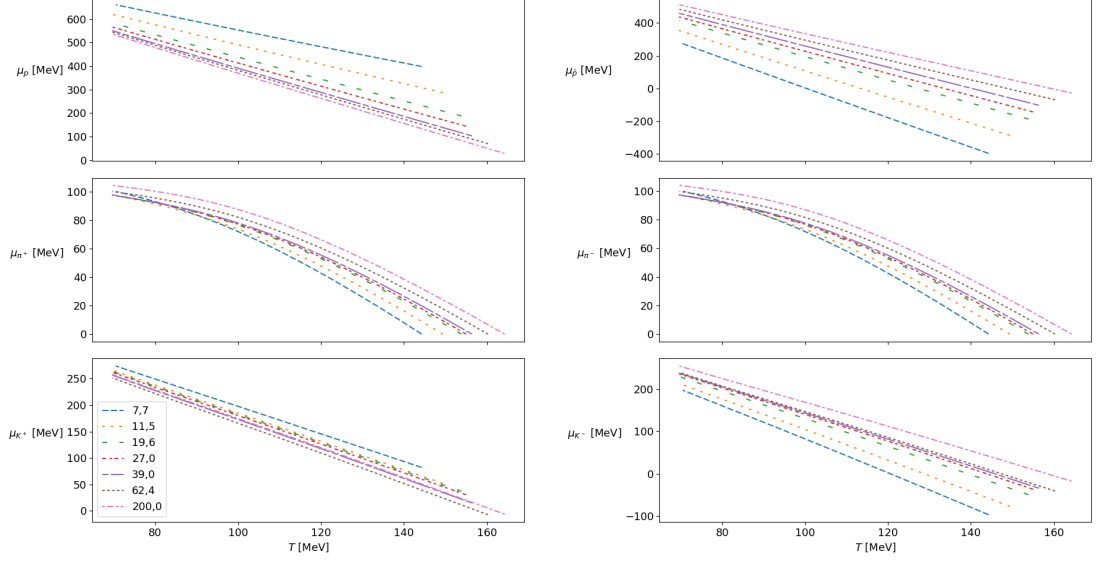
Data vývoje částečné rovnováhy byla převzata z práce [21]. V té byl k vývoji využit grand-kanonický soubor společně s nedosycením podivnosti. Data o rozpadových větvích a jednotlivých rezonancích byla převzata z [26]. Partiční funkce takového souboru je určena jako

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_i \frac{g_i V}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 \pm \gamma_s^{|S_i|} e^{\frac{\mu_i - \sqrt{m_i^2 + p^2}}{T}} \right). \quad (5.1)$$

Suma zde prochází přes všechny druhy částic. Izospin částic byl ošetřen zahrnutím všech izospinových stavů separátně. Chemický potenciál v momentě chemického vymrznutí je pro tuto funkci určen pro podivnost a baryonové číslo

$$\mu_i = B_i \mu_{B_i} + S_i \mu_{S_i}. \quad (5.2)$$

Parametr γ_s vyjadřuje podivnostní nedosycení. Počáteční parametry vývoje byly určeny kolaborací STAR v [27]. Vývoj chemického potenciálu jako funkce teploty pro protony, kaony a piony a jejich antičástice je zobrazen na Obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Vývoj chemických potenciálů v modelu částečné chemické rovnováhy. Chemické potenciály zobrazeny pro p , \bar{p} , π^+ , π^- , K^+ a K^- . Vyobrazeno pro různé energie srážek od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Data využité pro konstrukci grafů přejaty z [21]. Počáteční podmínky pro vývoj určeny v [27].

5.2 Náhrady

Explicitní znalost chemických potenciálů všech částic nám umožňuje konstrukci *náhrad* diskutovaných v Sekci 3.6. V našem zájmu budeme pozorovat chování škálovacích variací v celkovém počtu protonů, kaonů a pionů. Dále budeme zkoumat korelace mezi různými kvantovými čísly, jmenovitě mezi baryonovým číslem, elektrickým nábojem a podivností. Jejich konstrukce probíhá podle postupu článku [25]. Nejprve budou zkonstruovány susceptibility daných kvantových čísel a poté budou pozorovány příspěvky k nim jednotlivými částicemi. Vypracovány budou grafy poměru susceptibilit, proto sledujeme chování následujících veličin: $\chi_2^S, \chi_Q^2, \chi_{11}^{BS}, \chi_{11}^{BQ}, \chi_{11}^{QS}$. Aby zkonstruovaná *náhrada* byla dobrou aproximací chování fluktuací, je třeba aby i čitatel i jmenovatel dobře aproximoval danou susceptibilitu. V článku [25] byla diskutována situace pro mizející chemický potenciál, my ovšem uvažujeme situaci částečné chemické rovnováhy. Uvažovány jsou celá částicová čísla, např. pokud mluvíme o fluktuacích protonů odkazujeme na fluktuaci celkového protonového čísla, tj. počet protonů společně s antiprotony. Pro střední hodnoty částic a antičástic platí

$$\langle a_{net} \rangle = \langle a - \bar{a} \rangle = \langle a \rangle - \langle \bar{a} \rangle. \quad (5.3)$$

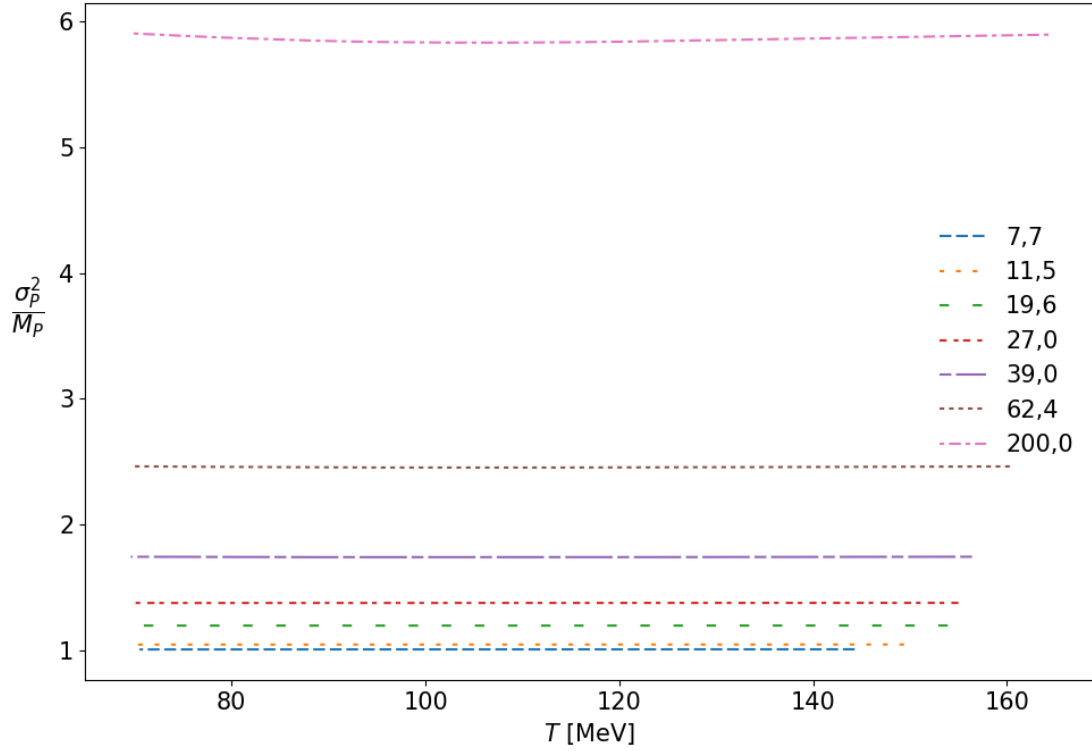
Pro variace částic společně s antičásticema máme

$$\langle (\Delta a_{net})^2 \rangle = \langle (a - \bar{a} - \langle a - \bar{a} \rangle)^2 \rangle = \langle (\Delta a)^2 \rangle + \langle (\Delta \bar{a})^2 \rangle - 2 \langle \Delta a \Delta \bar{a} \rangle. \quad (5.4)$$

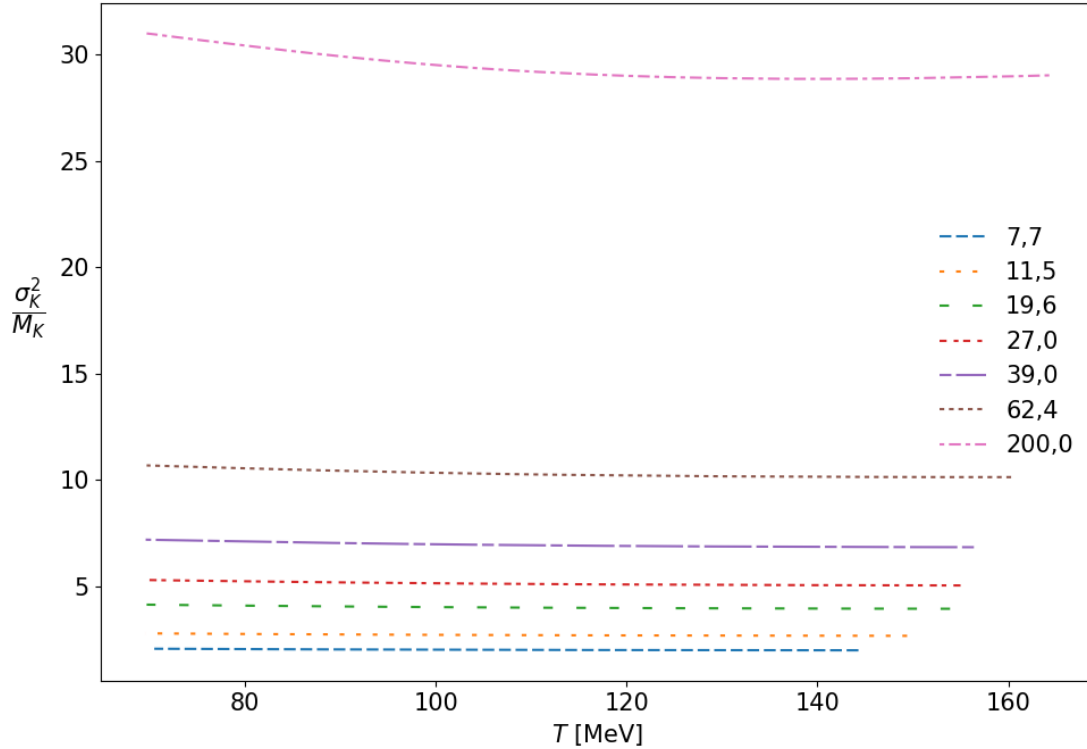
Nakonec pro kovariance dvou celkových počtů částic

$$\langle \Delta a_{net} \Delta b_{net} \rangle = \langle \Delta a \Delta b \rangle + \langle \Delta \bar{a} \Delta \bar{b} \rangle - \langle \Delta a \Delta \bar{b} \rangle - \langle \Delta \bar{a} \Delta b \rangle. \quad (5.5)$$

Prvím zaměřením bylo sledovat škálované fluktuační protonů, nabitých kaonů a nabitých pionů, které v nejhrubším odhadu slouží jako *náhrady* baryonového čísla, podivnosti a elektrického náboje. Závislosti těchto fluktuačních na teplotě lze vidět na Obrázku 5.2 pro protony, na Obrázku 5.3 pro kaony a na Obrázku 5.4 pro piony.



Obrázek 5.2: Variance dělená středním počtem pro celkové protonové číslo. Vyobrazeno pro různé energie srážky od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.



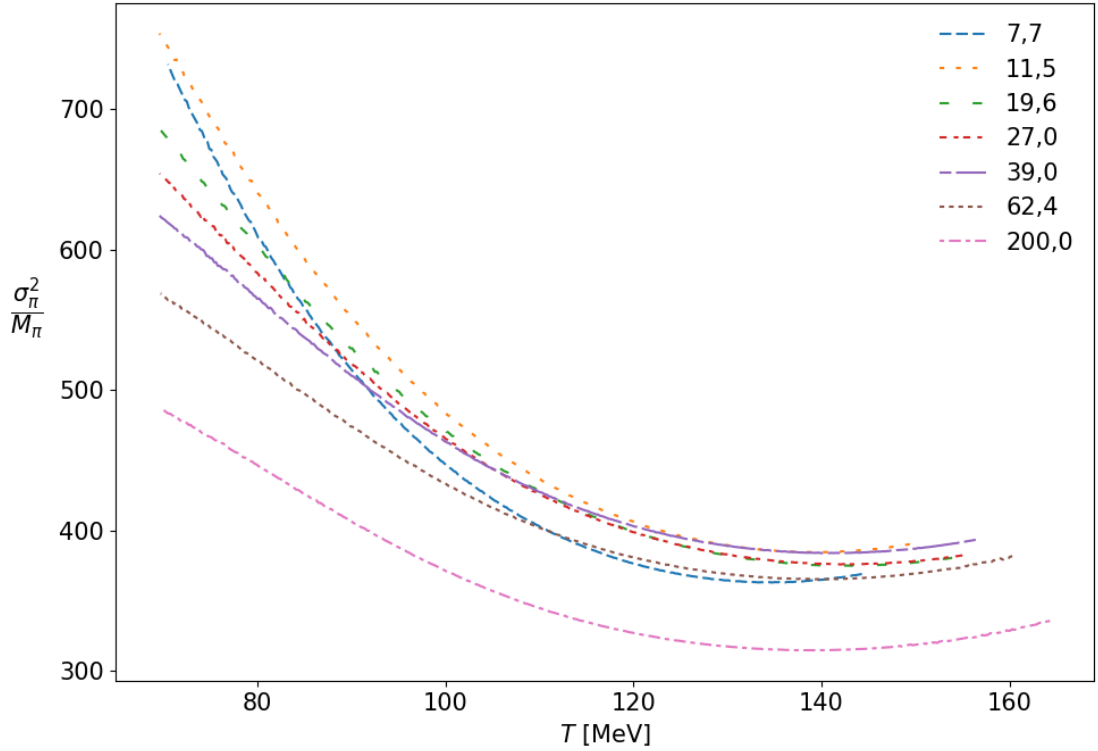
Obrázek 5.3: Variance dělená středním počtem pro celkové kaonové číslo. Uvažovány byly pouze rozpady končící částicemi K^+ nebo K^- . Vyobrazeno pro různé energie srážky od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Jak lze vidět na Obrázku 5.2 škálované fluktuační protonů nevykazují vysokou závislost na teplotě T . Oproti tomu lze pozorovat rychlý nárůst pro vyšší energie srážky. Výsledky jsou v kvalitativním souladu s prací [21].

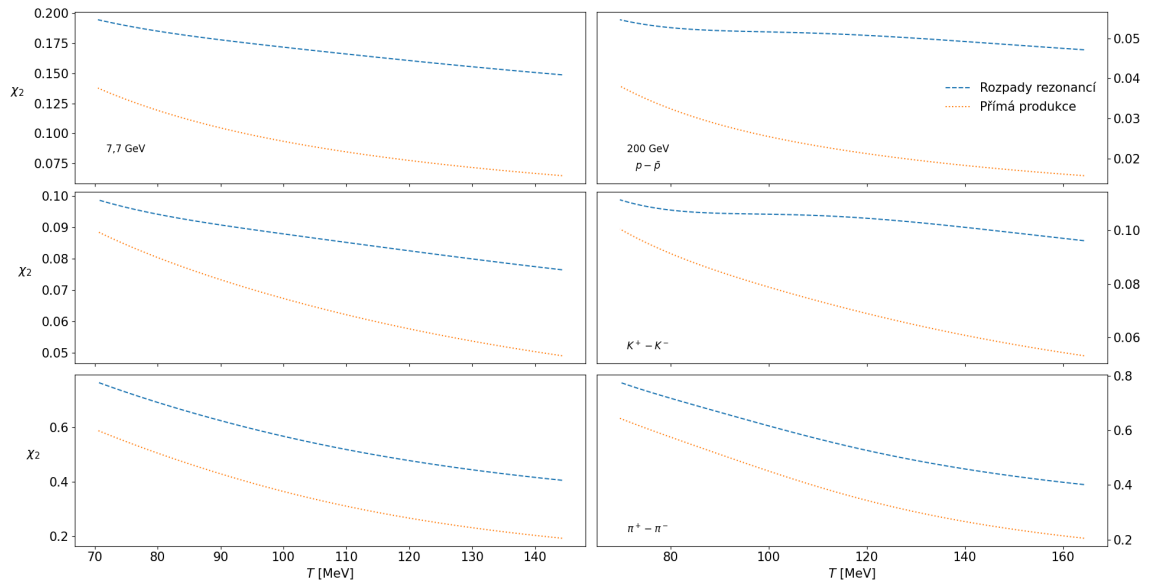
Stejně jako v případě protonů lze na Obrázku 5.3 pozorovat pouze jemnou závislost fluktuačních na teplotě. Vlastnost silné závislosti na srážkové energii je opět lehce viditelná.

Oproti protonům a kaonům vykazují škálované fluktuační pionů na Obrázku 5.4 vysokou závislost na teplotě. Dalším zajímavým pozorováním je opačná vazba ke srážkové energii. Zatímco pro protony i pro kaony fluktuační rostly s vzrůstající $\sqrt{s_{NN}}$ pro piony platí právě opak.

Dále jsme studovali závislost susceptibilit druhého řádu celkového počtu protonů, kaonů a pionů na teplotě. Tyto závislosti jsou vykresleny na Obrázku 5.5, kde lze vidět příspěvek rezonančních rozpadů k susceptibilitám. Byly uvažovány situace bez rezonanční příspěvků tj. přímá produkce a s příspěvkem všech uvažovaných rezonancí. Lze si povšimnout, že nezávisle na srážkové energii činí pro teploty při chemickém vymrznutí příspěvky rezonančních rozpadů přibližně polovinu hodnoty susceptibilit nezávisle na srážkové energii.

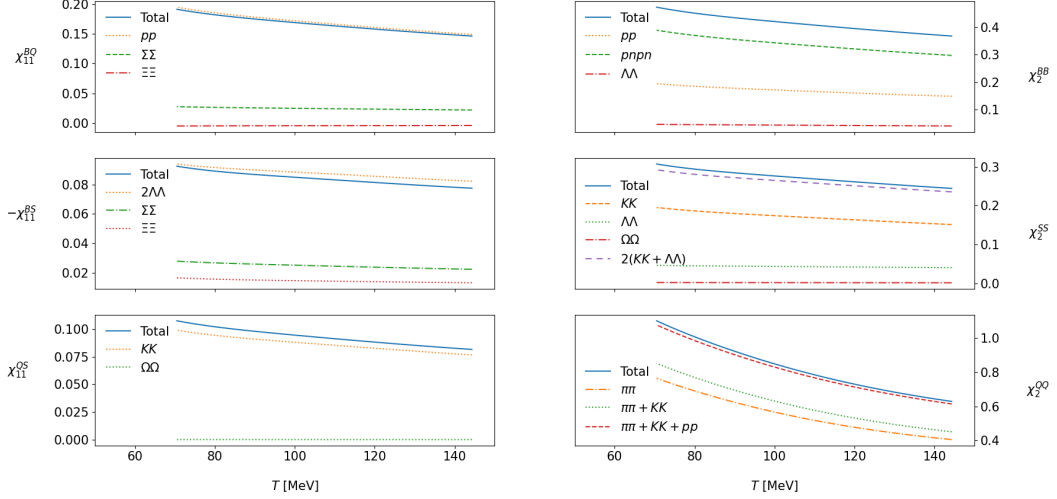


Obrázek 5.4: Škálovaná variance pro celkové pionové číslo $\pi^+ - \pi^-$. Uvažovány byly pouze nabité piony. Vyobrazeno pro různé energie srážky od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.



Obrázek 5.5: Příspěvky rezonančních rozpadů k susceptibilitám protonů, kaonů a pionů vykreslených v závislosti na teplotě pro srážkové energie $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV (levý sloupec) a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (pravý sloupec).

V dalším pozorujeme chování baryonového čísla podivnosti a elektrického náboje. Konstrukci náhrad započneme pozorováním vývoje susceptibilit daných kvantových čísel v teplotě. Budeme pozorovat, jak různé částice přispívají k hodnotám těchto susceptibilit. *Náhrady* vypracujeme pro srážkové energie $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV. Závislost susceptibilit na teplotě společně s příspěvy jednotlivých částic lze vidět na Obrázku 5.6.

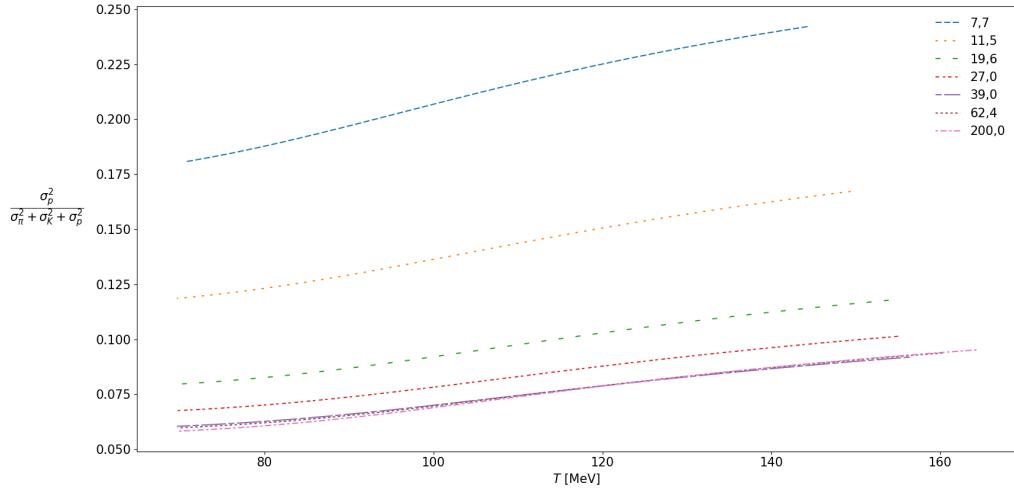


Obrázek 5.6: Grafy vyobrazují příspěvy jednotlivých částic k susceptibilitám baryonového čísla, elektrického náboje a podivnosti. Vypracováno pro $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV.

Závislosti Obrázku 5.6 lze dobře využít pro konstrukci *náhrad*. Vidíme, že korelace baryonového čísla a podivnosti je velmi dobře popsána variancemi Λ částic. Stejně tak korelace baryonového čísla a elektrického náboje, dobře odpovídá varianci protonů. Podobná situace nastane i se susceptibilitou elektrického náboje a podivnosti, která je téměř zcela určena variancí kaonů. Těchto pozorování můžeme využít podle závislostí na Obrázku 5.6 zkonstruovat námi kýžené *náhrady*. Nejprve zkoumejme korelaci baryonového čísla a elektrického náboje. Lze nahlédnout, že platí

$$\frac{\chi_{11}^{BQ}}{\chi_2^Q} \approx \frac{\sigma_p^2}{\sigma_Q^2}, \quad (5.6)$$

kde index p označuje celkové protonové číslo, tj. protony i antiprotony. Indexem Q jsou poté myšleny všechny částice výrazně přispívající k fluktuacím náboje. Z Obrázku 5.6 lze vidět, že za Q lze vzít p, π^+, K^+ a jejich antičástice. Vývoj *náhrady* (5.6) jako funkce teploty je vyobrazen na Obrázku 5.7. Na něm lze zřetelně pozorovat monotonicnou závislost korelací elektrického náboje a baryonového čísla na teplotě. Opět lze také vidět závislost na srážkové energii $\sqrt{s_{NN}}$.



Obrázek 5.7: *Náhrada* pro korelace elektrického náboje a baryonového čísla. Vyobrazeno pro různé srážkové energie od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Další zajímavou pozorovatelnou je korelace baryonového čísla a podivnosti. Tu lze podle Obrázku 5.6 zapsat ve tvaru

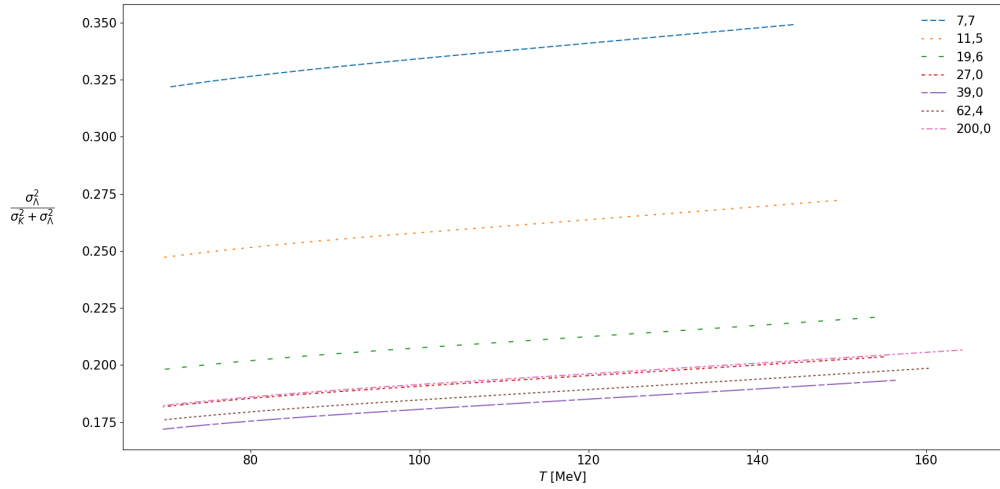
$$-\frac{\chi_{11}^{BS}}{\chi_2^S} \approx \frac{\sigma_\Lambda^2}{\sigma_S^2}, \quad (5.7)$$

kde S označuje veškeré částice hodnotně přispívající k susceptibilitě χ_2^S . Těmi jsou v našem případě K a Λ . Uvažovány jsou pouze nabitě kaony. Pro Λ je zahrnuta i její antičástice. Grafy byly vypracovány s modelem částečné chemické rovnováhy. Pro nižší energie $\sqrt{s_{NN}}$ je opět možné pozorovat na Obrázku 5.8 monotonicnou závislost. Pro vyšší srážkové energie je však již narušena a korelace opět stoupají.

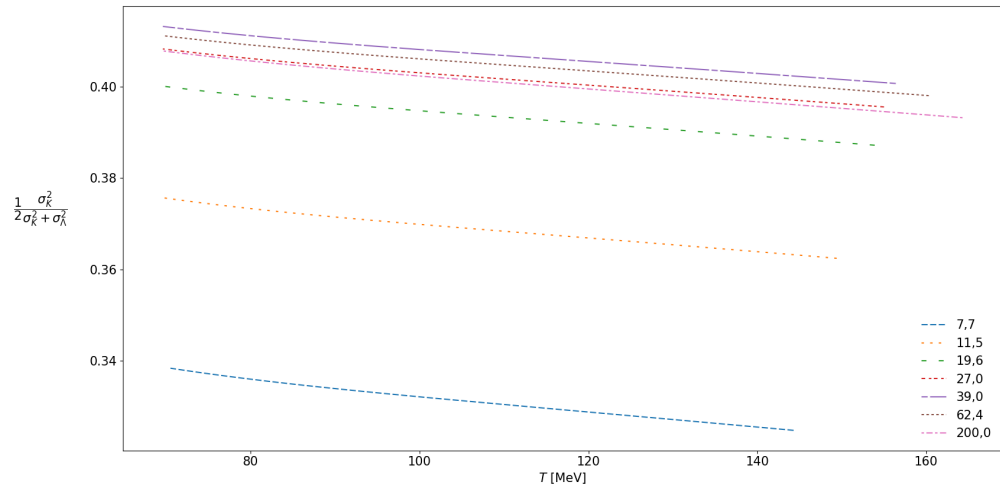
Nakonec byly vyhodnoceny korelace elektrického náboje a podivnosti. Pro konstrukci *náhrad* je opět užitečné vrátit se k Obrázku 5.6. Snadno nahlédneme, že platí

$$\frac{\chi_{11}^{QS}}{\chi_2^S} \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_K^2}{\sigma_S^2}, \quad (5.8)$$

kde S odpovídá definici v předchozím případě. Korelace vykazují monotonické chování jako funkce teploty. Opět jako v předchozích případech se chovají monotonicky i pro $\sqrt{s_{NN}}$, ale pouze pro nižší srážkové energie.

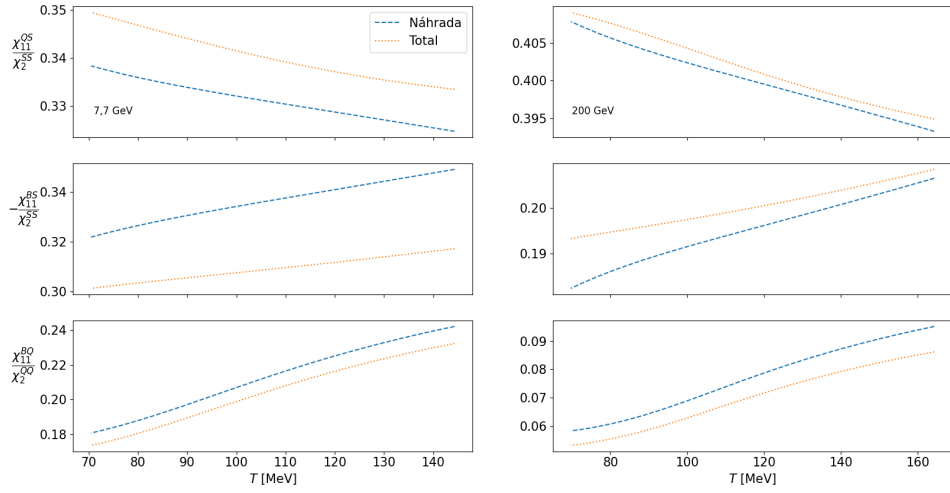


Obrázek 5.8: Graf zobrazující *náhradu* korelací baryonového čísla a podivnosti pro různé srážkové energie od $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV do $\sqrt{s_{NN}} = 200$.



Obrázek 5.9: Graf znázorňující *náhradu* korelací elektrického náboje a podivnosti jako závislost na teplotě pro různé $\sqrt{s_{NN}}$ od 7,7 GeV do 200 GeV.

Nakonec provedeme porovnání *náhrad* s chováním fluktuací kvantových čísel. Graf byl vyneseno pro dvě srážkové energie $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Závislosti lze vidět na Obrázku 5.10. Účinnost *náhrad* se příliš nemění v závislosti na srážkové energii. Dále vidíme, že s největší přesností je *náhradami* určena korelace mezi baryonovým číslem a elektrickým nábojem. Tento výsledek lze odhadnout již z Obrázku 5.6, na kterém lze vidět, že právě tyto susceptibility jsou nejlépe popsány příspěvky částic.



Obrázek 5.10: Obrázek ukazuje porovnání *náhrad* a celkových fluktuací. Vykresleno pro srážkové energie $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV (levý sloupec) a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (pravý sloupec).

Jejich účinnost se ovšem také velmi nemění v teplotě. Společně s faktem, že *náhrady* samotné se příliš v teplotě nemění toto pozorování poukazuje na fakt, že získané fluktuace v různých teplotách, jsou téměř identické s hodnotami při chemickém vymrznutí.

Závěr

Práce měla za cíl studium fluktuací v rámci statického modelu hadronového rezonančního plynu pro popis srážek těžkých iontů. Zaměření této práce nás vedlo k uvažování částečné chemické rovnováhy. Studium fluktuací probíhalo převážně v závislosti na teplotě.

První kapitola shrnula úvod do relativistické kinematiky, potřebné k budování dalšího formalismu. V druhé kapitole jsme uvedli základní poznatky o srážkách těžkých iontů. Krátce jsme hovořili o fázovém přechodu a diskutované existenci kritického bodu. Zavedli jsme veličiny toku často využívané pro analýzu spekter ve srážkách ultra-relativistických těžkých iontů.

Ve třetí kapitole jsme se soustředili na statistický popis horké hadronové hmoty. Zavedli jsme grand-kanonický soubor pro fermionový a bosonový ideální plyn. Krátce jsme diskutovali důležitost stavové rovnice v popisu expanze *fireballu*. Ukázali jsme model hadronového rezonančního plynu a hovořili o chování fluktuací v okolí kritického bodu. Nakonec jsme zavedli model částečné chemické rovnováhy a diskutovali význam omezeného pokrytí v hybnostech a jeho aplikovatelnost na HRG model.

Ve čtvrté kapitole jsme zavedli maticový formalismus popisující příspěvky rezonančních rozpadů k fluktuacím se zaměřením na první dva momenty.

V poslední kapitole jsme aplikovali naše výsledky na reálná data. Využili jsme zpracovaných chemických potenciálů stabilních částic z [21] ke konstrukci chemických potenciálů nestabilních částic. Vykreslili jsme závislost chemických potenciálů pro protony, kaony a piony a jejich antičástice, ty lze vidět na Obrázku 5.1. S použitím znalostí chemických potenciálů pro různé teploty jsme vypracovali škálované fluktuace protonů, kaonů a pionů pro různé těžiškové energie srážky. Určili jsme susceptibilitu protonů, kaonů a pionů a diskutovali jejich závislost na příspěvcích z rezonančních rozpadů. Aproximovali jsme korelace baryonového čísla, podivnosti a elektrického náboje pomocí *náhrad*, které jsme nakonec porovnali s fluktuacemi baryonového čísla, elektrického náboje a podivnosti.

Literatura

- [1] J. D. Bjorken, “Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region,” *Phys. Rev. D*, vol. 27, s. 140–151, 1983.
- [2] R. Hagedorn, “Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies,” *Nuovo Cim. Suppl.*, vol. 3, s. 147–186, 1965.
- [3] N. Cabibbo and G. Parisi, “Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation,” *Phys. Lett. B*, vol. 59, s. 67–69, 1975.
- [4] J. C. Collins and M. J. Perry, “Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 34, s. 1353, 1975.
- [5] M. B. Kislinger and P. D. Morley, “Collective Phenomena in Gauge Theories. 1. The Plasmon Effect for Yang-Mills Fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, s. 2765, 1976.
- [6] M. B. Kislinger and P. D. Morley, “Collective Phenomena in Gauge Theories. 2. Renormalization in Finite Temperature Field Theory,” vol. 13, s. 2771, 1976.
- [7] E. V. Shuryak, “Quark-Gluon Plasma and Hadronic Production of Leptons, Photons and Psions,” *Phys. Lett. B*, vol. 78, s. 150, 1978.
- [8] S. A. Chin, “Transition to Hot Quark Matter in Relativistic Heavy Ion Collision,” *Phys. Lett. B*, vol. 78, s. 552–555, 1978.
- [9] W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*. World Scientific, Singapore, 2010. ISBN: 978-981-4280-66-2.
- [10] R. S. Bhalerao, “Relativistic heavy-ion collisions,” in *1st Asia-Europe-Pacific School of High-Energy Physics*, s. 219–239, 2014.
- [11] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo, “The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit,” *Phys. Lett. B*, vol. 643, s. 46–54, 2006.
- [12] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo, “The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics,” *Nature*, vol. 443, s. 675–678, 2006.
- [13] B. Tomášik *et al.*, “Topics in modern nuclear physics: Flows and Sizes.” Københavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.

- [14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980. ISBN: 978-0-7506-3372-7.
- [15] B. Tomášik *et al.*, “Topics in modern nuclear physics: Nuclear equation of state at high temperature.” Københavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.
- [16] R. Hagedorn, *Thermodynamics of strong interactions*. CERN Academic Training Lecture, Geneva: CERN, 1971. CERN, Geneva, 1970 - 1971.
- [17] K. Redlich, “Statistical model description of particle multiplicities in heavy ion collisions,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 5, s. 162, leden 2005.
- [18] P. Hohenberg and A. Krekhov, “An introduction to the ginzburg–landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns,” *Physics Reports*, vol. 572, s. 1–42, duben 2015.
- [19] A. Motornenko, V. Vovchenko, C. Greiner, and H. Stoecker, “Kinetic freeze-out temperature from yields of short-lived resonances,” *Phys. Rev. C*, vol. 102, no. 2, s. 024909, 2020.
- [20] H. Bebie, P. Gerber, J. L. Goity, and H. Leutwyler, “The Role of the entropy in an expanding hadronic gas,” *Nucl. Phys. B*, vol. 378, s. 95–128, 1992.
- [21] B. Tomasik, P. Hillmann, and M. Bleicher, “Proton number fluctuations in partial chemical equilibrium,” *Phys. Rev. C*, vol. 104, s. 044907, 2021.
- [22] V. Koch, *Hadronic Fluctuations and Correlations*, s. 626–652. Springer, 2010.
- [23] V. Vovchenko, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein, and V. Koch, “Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities,” *Phys. Lett. B*, vol. 811, s. 135868, 2020.
- [24] M. Nahrgang, M. Bluhm, P. Alba, R. Bellwied, and C. Ratti, “Impact of resonance regeneration and decay on the net-proton fluctuations in a hadron resonance gas,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 75, no. 12, s. 573, 2015. 10.1140/epjc/s10052-015-3775-0.
- [25] R. Bellwied, S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, J. Noronha-Hostler, P. Parotto, A. Pasztor, C. Ratti, and J. M. Stafford, “Off-diagonal correlators of conserved charges from lattice QCD and how to relate them to experiment,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 3, s. 034506, 2020.
- [26] B. Tomasik, “DRAGON: Monte Carlo generator of particle production from a fragmented fireball in ultrarelativistic nuclear collisions,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 180, s. 1642–1653, 2009.
- [27] L. Adamczyk *et al.*, “Bulk Properties of the Medium Produced in Relativistic Heavy-Ion Collisions from the Beam Energy Scan Program,” *Phys. Rev. C*, vol. 96, no. 4, s. 044904, 2017.