

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Charakteristiky nehermitovských degenerací ve  
dvouhladinových systémech

Autor: Štěpán Mayer  
Vedoucí: Ing. Miroslav Krůs, Ph.D.  
Akademický rok: 2023

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2022/2023



*Student:* Štěpán Mayer

*Studijní program:* Jaderná a částicová fyzika

*Název práce:* Charakteristiky nehermitovských degenerací ve dvouhladinových systémech  
(česky)

*Název práce:* Exceptional point signatures in two-level systems  
(anglicky)

*Jazyk práce:* Čeština

*Pokyny pro vypracování:*

- 1) seznámte se s nehermitovskou kvantovou mechanikou
- 2) seznámte se s tzv. výjimečnými body ve dvouhladinových systémech
- 3) seznámte se s experimentálními metodami užívanými ve fyzice výjimečných bodů
- 4) prostudujte vliv reálných parametrů laserových impulzů na experimentální signatury nehermitovských degenerací

*Doporučená literatura:*

- [1] N. Moiseyev: Non-Hermitian Quantum Mechanics, Cambridge University Press (2011)
- [2] I. Rotter: The role of exceptional points in quantum systems, arXiv:1011.0645 [quant-ph]
- [3] W.D. Heiss: J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 2455
- [4] W.D. Heiss: The physics of exceptional points, PROCEEDINGS OF SAIP 2011

*Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:*

Ing. Miroslav Krůs, Ph.D.

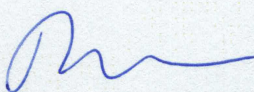
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Ústav fyziky plazmatu AV ČR, v. v. i.

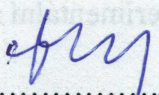
*Datum zadání bakalářské práce:* 20.10.2022

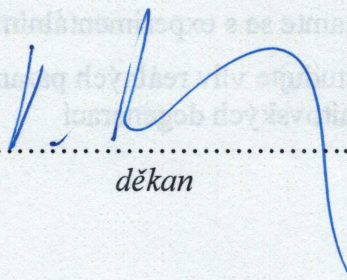
*Termín odevzdání bakalářské práce:* 02.08.2023

*Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.*

  
.....  
*garant studijního programu*



  
.....  
*vedoucí katedry*

  
.....  
*děkan*

*V Praze dne 20.10.2022*



## PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

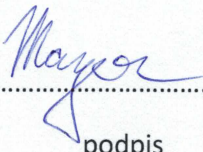
*Jméno a příjmení studenta:* Štěpán Mayer  
*Osobní číslo:* 502677  
*Název studijního programu (oboru):* Jaderná a částicová fyzika

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

**Charakteristiky nehermitovských degenerací ve dvouhladinových systémech**

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 30.7.2023

  
.....  
podpis

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat svému školiteli Ing. Miroslavu Krúsovi, Ph.D. za pomoc, ochotu a trpělivost při vedení mé bakalářské práce a za praktické rady, které ji směřovaly správným směrem.

Štěpán Mayer

*Název práce:* **Charakteristiky nehermitovských degenerací ve dvouhladinových systémech**

*Autor:* Štěpán Mayer

*Studijní program:* Jaderná a částicová fyzika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Miroslav Krůs, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Ústav fyziky plazmatu AV ČR, v. v. i.

*Abstrakt:* Tato práce se zabývá působením laserových impulzů na hodnoty vlastních čísel dvouhladinového systému v blízkém okolí výjimečných bodů. Výjimečné body jsou body, ve kterých dochází ke splynutí dvou a více vlastních čísel a vektorů. Jedná se o nehermitovské degenerace operátorů, vyskytující se exkluzivně ve formalismu nehermitovské kvantové mechaniky. Vliv reálných parametrů na vlastní čísla jsme vypočítali pro několik různých šířek rezonancí. Působení jsme nejprve vypočítali pro jednomódové lasery a výsledky dále porovnali s impulzy vícemódovými. Očekávali jsme, že přesné signatury jednomódových impulzů se v případě vícemódových laserů zamlží. To znemožňuje identifikaci výjimečných bodů. Tuto hypotézu jsme následně výpočtem prokázali.

*Klíčová slova:* Výjimečný bod, nehermitovská kvantová mechanika, experimentální signatury

*Title:* **Exceptional point signatures in two-level systems**

*Author:* Štěpán Mayer

*Abstract:* This thesis deals with the interaction of laser pulses on the eigenvalues of a two-level system in the vicinity of an exceptional point. Exceptional points are points, where two or more eigenvalues or eigenvectors coalesce. They are non-Hermitian degenerations of operators, which are found exclusively in the formalism of non-Hermitian quantum mechanics. The influence of real parameters on the eigenvalues was calculated for several resonance widths. The effect was initially calculated for single mode lasers and the results were then compared to those of multimode pulses. We expected the exact signatures of single mode lasers to become blurred, making the identification of exceptional points significantly more difficult. This hypothesis was then confirmed via calculation.

*Key words:* Exceptional point, non-Hermitian quantum mechanics, experimental signatures

# Obsah

<b>1</b>	<b>Rezonance v kvantové mechanice</b>	<b>10</b>
1.1	Tvarové rezonance . . . . .	10
1.2	Feshbachovy rezonance . . . . .	11
1.3	Standardní popis . . . . .	11
1.4	Problémy popisu rezonancí . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Nehermitovská kvantová mechanika</b>	<b>13</b>
2.1	Zavedení formalismu . . . . .	13
2.2	C-součin . . . . .	14
2.3	Výjimečné body . . . . .	15
2.3.1	Autoortogonalita . . . . .	16
2.3.2	Výpočet výjimečného bodu . . . . .	16
2.3.3	Berryho fáze . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Reálné laserové parametry</b>	<b>19</b>
3.1	Jednomódové impulzy . . . . .	20
3.1.1	$\Gamma = 10^{-34}$ J . . . . .	20
3.1.2	$\Gamma = 1$ J . . . . .	24
3.1.3	$\Gamma = 10^{-12}$ J . . . . .	28
3.2	Vícemódové impulzy . . . . .	32

# Úvod

Nehermitovská kvantová mechanika je důležitou alternativou ke standardnímu formalismu hermitovské kvantové mechaniky. Umožňuje nám řešit problémy, které jsou ve standardním formalismu náročné. Jednou z výhod je právě popis rezonančních stavů. Jedním z hlavních problémů standardního popisu je nemožnost rezonanci přesně definovat, tedy přiřadit takovému stavu vlnovou funkci. Rezonanční stavy totiž existují pouze po časově omezenou dobu.

Nehermitovská kvantová mechanika nám dává přístup ke komplexním vlastním číslům a vlastním vektorům, aniž bychom museli měnit hamiltonián. To znamená, že vázané stavy si zachovávají reálná vlastní čísla a rezonančním stavům můžeme přiřadit vlastní čísla s nenulovou imaginární složkou. Kvůli nehermitovskému chování ale jsme nuceni definovat novou alternativu ke standardnímu skalárnímu součinu, který při aplikaci na nehermitovské funkce může vytvářet neúplné množiny řešení, kvůli jevu známému jako autoortogonalita, neboli výjimečné body.

V této práci se zaměříme na využití tohoto formalismu při počítání rezonancí, konkrétně na tzv. výjimečné body. Existence výjimečných bodů byla v matematické literatuře známa již mnoho let. Výjimečné body byly poprvé představeny v poruchové teorii lineárních operátorů [1]. Přestože nejsme schopni tyto body pozorovat přímo, na blízkém okolí jsme schopni odvodit jejich přítomnost.

Tato práce je organizována následovně.

- V 1. kapitole představujeme druhy rezonancí, tvarové v sekci 1.1 a feshbachovy v sekci 1.2. Poté představíme popis rezonancí v hermitovské mechanice v sekci 1.3, spolu s hlavními problémy, se kterými se při popisu potýkáme, v sekci 1.4.
- Dále ve 2. kapitole zavádíme nový formalismus kvantové mechaniky v sekci 2.1. V sekci 2.2 definujeme také C-součin, což je alternativa ke skalárnímu součinu. V sekci 2.3 zavádíme pojem výjimečných bodů, který propojujeme s C-součinem v sekci 2.3.1. Názorný výpočet výjimečného bodu představujeme v sekci 2.3.2 a jeden ze zajímavých jevů na okolí výjimečných bodů popisujeme v sekci 2.3.3.
- V poslední 3. kapitole už ukazujeme naše výpočty. V sekci 3.1 počítáme vliv jednomódových impulzů na signatury dvouhladinového systému pro šířku rezonance  $\Gamma = 10^{-34}$  J v sekci 3.1.1,  $\Gamma = 1$  J v sekci 3.1.2 a  $\Gamma = 10^{-12}$  J v sekci 3.1.3. Nakonec v sekci 3.2 zkoumáme působení vícemódových impulzů při stejných parametrech, které jsme použili v sekci 3.1.3. Výsledky zde také porovnáваме s výsledky jednomódových impulzů.



V poslední kapitole prozkoumáme, jaký vliv má přítomnost těchto výjimečných bodů na vlastní čísla dvouhladinového systému působením laserových impulzů. Pomocí těchto impulzů prozkoumáme vliv parametrů na hodnoty vlastních čísel nejprve jednomódoými laserovými impulzy a poté porovnáme, jak se výsledky změní, pokud se impulzy skládají z více, než jednoho módu.

V případě jednomódových impulzů jsme předpokládali získání přesného spektra. Můžeme totiž u každého impulzu přesně určit jeho vlastní čísla a díky tomu i dobře vidět polohu výjimečného bodu. V případě vícemódových impulzů jsme očekávali, že spektrum vlastních čísel bude rozmazané. Dokážeme sice pro každý mód impulzu určit, jak interagují jeho módy, ale interakci celého impulzu musíme aproximovat přes všechny jeho módy. Domnívali jsme se tedy, že výjimečné body, které vyžadují značnou přesnost parametrů impulzu k určení, budou spíše naznačeny. Tuto hypotézu se nám v sekci 3.2 podařilo výpočtem potvrdit. Existenci výjimečných bodů jsme pozorovali, ovšem určení jejich polohy bylo náročnější, obzvláště pro impulzy složené z vyššího počtu módů.

# Kapitola 1

## Rezonance v kvantové mechanice

Fenomén rezonance je ve fyzice blízce spojený s metastabilními stavy - stavy, které se s časem rozpadají na více podsystémů. Tyto systémy, přestože mají dostatečnou energii, se nerozpadají okamžitě, ale po dlouhé době vzhledem k charakteristickému času systému. Doba, po kterou může metastabilní stav existovat závisí na konkrétním systému a řádově může trvat od nanosekund až po tisíce let. Rezonance budeme dělit do dvou skupin: Tvarové (Shape-type) a Feshbachovy (Feshbach-type) [2], které budou vysvětleny v následujících kapitolách. První teorii rezonančních stavů sepsal G. Gamow v roce 1928 [3] pro popis  $\alpha$  rozpadu těžkých jader při studiu průchodu částice potenciálovou bariérou.

### 1.1 Tvarové rezonance

Prvním typem rezonancí jsou již zmíněné tvarové rezonance. Představíme-li si kvantovou částici uvězněnou v určitém potenciálu, víme, že doba, po kterou je částice uvězněna, závisí na výšce a šířce daného potenciálu. Částice se tedy nachází v rezonančním stavu, jehož doba života je určena tvarem potenciálové bariéry. Odtud tedy pochází i název "tvarová" rezonance. Příkladem tvarové rezonance je již zmíněná Gamowova teorie  $\alpha$  rozpadu těžkých jader [3], ve které uvažujeme  $\alpha$  částici vzniklou uvnitř jádra a uvězněnou jaderným potenciálem. Jelikož tvarové rezonance jsou závislé na tvaru potenciálové bariéry, je zřejmé, že se jedná o rezonanci, která ve klasické mechanice neexistuje. V semiklasické limitě  $\hbar \rightarrow 0$  se doba života těchto rezonancí blíží k nekonečnu a protože nemůže docházet ke kvantovému tunelování, stávají se tyto stavy vázanými.

## 1.2 Feshbachovy rezonance

Představme si stabilní fyzikální systém, popsaný hamiltoniánem  $\hat{H}_0$ . V čase  $t_0$  tento systém narušíme potenciálem  $\hat{V}$ , nový stav systému je tedy popsán hamiltoniánem  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ . V tomto stavu je však vlivem poruchy  $\hat{V}$  systém metastabilní, nachází se tedy ve feshbachové rezonanci. Tyto rezonance je možné vybudit v jednočásticových systémech pod vlivem  $n$ -rozměrné poruchy ( $n > 1$ ) nebo vícečásticových systémech (i pod vlivem jednorozměrné poruchy). Feshbachovy rezonance si uvedeme na následujícím příkladu. Mějme atom helia  $\text{He}^4$ , jehož oba elektrony byly vybudeny do prvního excitovaného stavu. Pokud zanedbáme elektromagnetickou repulzi, můžeme energetické hladiny helia aproximovat vztahem (pro  $\hbar = 1$ ) [2]

$$E_{n,m} = -2 \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right). \quad (1.1)$$

Odtud můžeme vidět energii našeho excitovaného stavu  $E_{2,2} = -1$ , energii základního stavu  $E_{1,1} = -4$  a energii iontu  $\text{He}^+$ :  $E_{n,\infty} = -2$ . Takto snadno vidíme, že atom helia v excitovaném stavu  $E_{2,2}$  se nachází v rezonanci a dochází k následující autoionizaci [4], [5]:  $\text{He}^* \rightarrow \text{He}^+ + e^-$ .

Podat přesnou definici feshbachových rezonancí je značně obtížnější, než u tvarových. Máme-li atom, který excitujeme působením elektromagnetického pole laseru s frekvencí  $\omega_L$ , atom přechází do feshbachovy rezonance. Ovšem v případě  $\omega_L \rightarrow 0$ , pole laseru oscilující jako  $\cos(\omega_L t)$  nabývá statického charakteru. Takové rezonance jsou ale tvarového charakteru, vzhledem k tunelování tímto kvazi-statickým potenciálem. Odtud vidíme, že neexistuje přesně určená hranice, která jednoznačně odděluje feshbachovy a tvarové rezonance. K rozlišení typu rezonance využijeme faktu, že tvarové rezonance, narozdíl od feshbachových, nemají klasický analog, ale přecházejí ve vázané stavy. Jestliže se tedy doba života rezonance blíží nule v limitě  $\hbar \rightarrow 0$ , pak můžeme tuto rezonanci označit jako tvarovou. Pokud se ovšem v limitě  $\hbar \rightarrow 0$  doba života blíží nenulové hodnotě, jedná se o feshbachovu rezonanci.

## 1.3 Standardní popis

Mějme následující hamiltonián:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}, \quad (1.2)$$

kde  $\hat{H}_0$  je hamiltonián kvadraticky integrabilního vázaného stavu  $|\psi_b(E_b)\rangle$ . Funkce kontinua jsou energeticky normalizované s hraniční hodnotou  $E = 0$ :

$\langle \psi_c(E') | \psi_c(E) \rangle = \delta(E - E')$ . Člen  $\hat{V}$  představuje poruchu, která spojuje vázaný stav  $\hat{H}_0$  s kontinuem. Řešení tohoto příkladu se v čase exponenciálně rozpadá rychlostí  $\frac{\Gamma}{\hbar}$ , kde  $\Gamma$  je šířka rezonance a její hodnota závisí na konkrétním problému. V limitě  $\lambda \rightarrow 0$  můžeme tvar  $\Gamma$  odhadnout pomocí Fermiho zlatého pravidla [2],

$$\Gamma \rightarrow 2\pi\lambda^2 \rho_c(E_b) |\langle \psi_b(E_b) | \hat{V} | \psi_c(E_b) \rangle|^2, \quad (1.3)$$

kde  $\rho_c$  je hustota stavů v kontinuu hamiltoniánu  $\hat{H}_0$ . V tomto příkladu jsme uvažovali vázaný stav  $\hat{H}_0$ , který jsme přivedli do stavu rezonance zavedením poruchy  $\hat{V}$ , z předchozí kapitoly tedy víme, že se jedná o rezonanci feshbachova typu.

Ve standardní kvantové mechanice lze rezonance s jistotou určit pouze, pokud jsou úzké a izolované [2]. Šířku rezonance  $\Gamma$  lze interpretovat jako energetickou neurčitost rezonančního stavu, což vychází z relace neurčitosti  $\Delta\omega\Delta t = 1$ , kde  $\Delta t$  je doba signálu a  $\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$  je šířka signálu. Označíme-li neurčitost v čase jako dobu života rezonance  $\tau = \Delta t$ , pak vidíme vztah mezi šířkou a dobou života rezonance,

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (1.4)$$

Odtud už lze definovat úzké rezonance jako rezonance s malou šířkou  $\Gamma$ , tedy dlouhou dobou života  $\tau$ . Izolované rezonance jsou takové, jejichž rozdíl v energii vzhledem k sousedním rezonancím je výrazně menší, než příslušné šířky rezonancí.

## 1.4 Problémy popisu rezonancí

V kvantové mechanice popisujeme stav částice pomocí vlastního vektoru, který zachovává pravděpodobnost jejího nalezení všude v čase a prostoru. Už zde můžeme vidět první problém ve snaze popisu metastabilních stavů. Jelikož rezonance existují pouze v určitém časovém intervalu, nelze jim přiřadit unikátní vlastní vektor. Ve formalismu standardní kvantové mechaniky tedy musíme rezonancím přiřadit vlnový balík [2]. Výsledek, který jsme získali použitím Fermiho zlatého pravidla se v čase exponenciálně rozpadá, ve skutečnosti se však rezonance nemusí nutně rozpadat v čase exponenciálně. Navíc Fermiho zlaté pravidlo můžeme použít pouze pro malé poruchy  $\lambda$ . To znamená, že ve standardním formalismu kvantové mechaniky dokážeme rezonance popsat pouze pro malé poruchy a pouze po dobu, kdy vykazují exponenciální rozpad v čase.

# Kapitola 2

## Nehermitovská kvantová mechanika

Jak jsme uvedli v předchozí kapitole, v rámci standardní hermitovské mechaniky jsme schopni rezonance správně popsat pouze ve značně limitujícím rozsahu. V této kapitole se pokusíme představit nehermitovský formalismus kvantové mechaniky, dále důvody k jeho zavedení, výhody a zajímavé důsledky tohoto nového formalismu.

### 2.1 Zavedení formalismu

Nejprve se zaměříme na samotnou vlastnost hermiticity. Ta se totiž nevztahuje pouze na operátory, ale i na funkce, na které tyto operátory působí. Hermitovský formalismus kvantové mechaniky operuje na  $L^2$  Hilbertově prostoru, na kterém okrajové podmínky vymizí v nekonečno. Při zavedení výchozích (outgoing) okrajových podmínek [2] na vlastní funkce časově nezávislého hamiltoniánu, získáme přístup ke komplexním vlastním číslům, které dále můžeme přiřadit metastabilním stavům. Vázané stavy si tedy i nadále zachovají reálné energie, ovšem energie rezonančních stavů mají energie komplexní. Jestliže ale používáme stejný hamiltonián, jak můžeme získat komplexní vlastní čísla? Jak jsme uvedli výše, hermiticita není vlastnost pouze operátoru, ale i funkcí, na které působí. Mějme pro ilustraci hamiltonián  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{V}$ , který je hermitovský, pokud platí  $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ . Operátor  $\hat{H}^\dagger$  tedy splňuje rovnici [2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{H}^\dagger g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \hat{H}^* f(x) dx. \quad (2.1)$$

Pokud  $\hat{V}(x)$  předpokládáme reálné, pak integrací po částech získáme výraz [2]

$$\left[ g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (2.2)$$

V případě Hermitovského formalismu náleží funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  do prostoru  $L^2$  a obě funkce vymizí v limitě  $x \rightarrow \pm\infty$ . Pokud ale tyto funkce exponenciálně divergují, hamiltonián je nehermitovský a jeho řešením získáme komplexní čísla.

## 2.2 C-součin

Mějme systém v určitém stavu popsaném vlastním vektorem  $|\psi(t)\rangle$  a pozorovatelnou veličinou  $\hat{A}$ , které přísluší vlastní stavy  $|n\rangle$ . Projekci stavu  $|\psi(t)\rangle$  na vlastní stavy operátoru  $\hat{A}$  získáme pomocí skalárního součinu  $\langle\psi(t)|n\rangle$ . Analogicky střední hodnotu pozorovatelné získáme pomocí

$$\langle\hat{A}\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \frac{\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle}{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}. \quad (2.3)$$

Tyto vztahy ale pro funkce  $|\psi(t)\rangle$  a  $|n\rangle$  předpokládají kvadratickou integrabilitu, tedy vlastnost, kterou jsme zavrhlí při definici nehermitovského formalismu. Aplikací skalárního součinu na funkce neležící v prostoru  $L^2$  můžeme získat nekompletní množiny řešení, kvůli fenoménu zvaném autoortogonalita (Self-orthogonality), o kterém se dozvíme více v sekcích 2.3 a 2.3.1.

Musíme tedy skalární součin nahradit novým druhem součinu, tzv. C-součinem, který byl poprvé uveden v knize [6]. Než však zavedeme C-součin, připomněme si definici skalárního součinu. Počítaje v 1-dimenzionálním prostoru  $L^2$  s funkcemi  $f(x), g(x), h(x)$  a skalárními veličinami  $\alpha$  a  $\beta$ , skalární součin definujeme

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx, \\ \langle h(x)|\alpha f(x) + \beta g(x)\rangle &= \alpha\langle h|f\rangle + \beta\langle h|g\rangle, \\ \langle f|g\rangle &= \langle g|f\rangle^* = c \in \mathbb{R}, \\ \langle f|f\rangle &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde  $\langle f|f\rangle = 0$  platí právě tehdy, když  $f(x) = 0$ . Tato definice zaručí, že každá nedegenerovaná vlastní funkce Hermitovského operátoru  $\hat{A}$  je ortogonální. Jelikož vlastní stavy operátoru  $|n\rangle$  tvoří úplnou množinu, můžeme psát relaci uzavřenosti

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad (2.5)$$

kde  $\hat{I}$  je jednotková množina  $n$ -té dimenze.

Pro definici C-součinu využijeme důležitosti maticové reprezentace v praktických výpočtech kvantové mechaniky [7], [8]. Podobně jako u skalárního součinu, chceme, aby C-součin dodržoval relaci uzavřenosti (2.5) a zachovával ortogonalitu nedegenerovaných funkcí. Abychom odlišili od skalárního součinu  $\langle\cdot|\cdot\rangle$ , pro C-součin použijeme značení  $(\cdot|\cdot)$ . Mějme tedy nehermitovský operátor  $\hat{A}_\theta$ , jemuž přísluší vlastní stavy  $|\psi_n^\theta\rangle$  a vlastní čísla  $\lambda_n^\theta$ , značeno

$$\hat{A}_\theta|\psi_n^\theta\rangle = \lambda_n^\theta|\psi_n^\theta\rangle. \quad (2.6)$$

Zachování ortogonalitu vyjádříme jednoduše

$$(\psi_m^\theta|\psi_n^\theta) = \delta_{m,n}. \quad (2.7)$$

Dále využijeme maticové reprezentace operátoru  $\hat{A}_\theta$  [7], [8], abychom definovali levé a pravé vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$ . Mejsme tedy úplnou sadu ortonormálních bazických vektorů  $f_{j=1,2,\dots}$  matice  $\mathbf{A}$ , jejíž maticové elementy snadno vyjádříme jako

$$[\mathbf{A}_\theta]_{j,k} = \langle f_j | \hat{A}_\theta | f_k \rangle. \quad (2.8)$$

Hlavní myšlenkou naší definice je fakt, že každý diferenciální problém vlastních čísel  $\hat{A}^\theta |\psi_n^\theta\rangle = \lambda_n^\theta |\psi_n^\theta\rangle$  lze převést na maticový problém vlastních čísel [7], [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\theta \mathbf{C}_n^\theta &= \lambda_n^\theta \mathbf{C}_n^\theta, \\ [\mathbf{D}_m^\theta]^T \mathbf{A}_\theta &= \lambda_m^\theta [\mathbf{D}_m^\theta]^T, \\ [\mathbf{D}_{m \neq n}^\theta]^T \mathbf{C}_n^\theta &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde  $[\mathbf{D}_m^\theta]^T$  a  $\mathbf{C}_n^\theta$  jsou levé a pravé vlastní vektory matice  $\mathbf{A}_\theta$  [2]. Za jejich pomoci dokážeme definovat vlastní stavy bra- a -ket operátoru  $\hat{A}_\theta$  jako

$$\begin{aligned} (x | \psi_n^\theta) &\equiv \sum_j C_{j,n} f_j(x), \\ (\psi_m^\theta | x) &\equiv \sum_j D_{j,m} f_j^*(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Protože matice a její transpozice mají stejné spektrum a protože platí  $[[\mathbf{D}_m^\theta]^T \mathbf{A}_\theta]^T = \mathbf{A}_\theta^T \mathbf{D}_m^\theta$ , vektory  $\mathbf{C}_n^\theta$  a  $\mathbf{D}_m^\theta$  mají stejné vlastní číslo  $\lambda_n^\theta$ . To znamená, že až na výjimku kdy splývají 2 a více vlastní čísla a vlastní vektory, můžeme definovat C-součin jako [2]

$$(\psi_m^\theta | \psi_n^\theta) = \sum_j D_{j,m} C_{j,n} = \delta_{m,n}, \quad (2.11)$$

a nehermitovskou relaci úplnosti jako [2]

$$\sum_n |\psi_n^\theta\rangle \langle \psi_n^\theta| = \hat{I}. \quad (2.12)$$

## 2.3 Výjimečné body

V rámci nehermitovského formalismu je možné, aby při variaci parametru potenciálu došlo k překryvu 2 energetických hladin se stejnou symetrií. V tomto bodě dochází k degeneraci vlastních hodnot a splynutí příslušných vlastních vektorů. Jelikož k tomuto fenoménu dochází pouze v rámci nehermitovské kvantové mechaniky, můžeme tento případ označit za nehermitovskou degeneraci [2], [6]. V této situaci dochází k rozštěpení v komplexní rovině energií, což nazýváme "výjimečný bod" (exceptional point) ve spektru nehermitovského hamiltoniánu [2], [6]. Tento bod ale vymizí při zavedení jakékoliv poruchy, není tedy možné ho experimentálně přímo změřit. I přesto pozorujeme na blízkém okolí nezvyklé chování, pokud provádíme

variaci parametru potenciálu kolem výjimečného bodu, existence výjimečného bodu se projeví akumulováním geometrických fází, tzv. Berryho fází [2], [9], které představíme v sekci 2.3.3.

### 2.3.1 Autoortogonalita

Díky v předchozí kapitole zavedenému C-součinu, jsou všechny nedegenerované rezonanční stavy ortogonální. Fenomén autoortogonalit nastává právě v případě, kdy alespoň dva vlastní vektory splynou v degeneraci [2], [6]. Z popisu výjimečných bodů uvedených na začátku této kapitoly je zřejmé, že tyto body jsou vzhledem k C-součinu autoortogonální. K ilustraci autoortogonalit využijeme následující příklad.

Mějme hamiltonián závislý na parametru  $\lambda$ . Pro konkrétní hodnotu parametru  $\lambda = \lambda_{ep}$  dochází ke splnutí 2 vlastních funkcí tohoto hamiltoniánu, funkcí  $\psi_1$  a  $\psi_2$  [2]. Pokud provádíme variaci parametru ve sféře o poloměru  $r = |\lambda_{ep}|$ , vlastní funkce a hodnoty se mění následovně

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{ep}} [E_1(\lambda) - E_2(\lambda)] &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{ep}} [\psi_1(\lambda, r) - \psi_2(\lambda, r)] &= 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dále v bodě splnutí platí

$$\begin{aligned}\psi_1(\lambda_{ep}, r) &= \psi_2(\lambda_{ep}, r) \equiv \psi_{ep}(r) \\ (\psi_{ep}|\psi_{ep}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Odtud už skutečně vidíme, že termíny autoortogonalita a výjimečný bod označují stejný fenomén. Zároveň ale vidíme, že i infinitezimální změna v parametru  $\lambda$  tuto degeneraci odstraní [2], [6]. Z předchozí rovnice také můžeme vidět zajímavý důsledek autoortogonalit. Přestože funkce, které ve výjimečném bodu splývají mohou být normalizované, vlastní funkce výjimečného bodu bude vždy mít normu rovnu nule.

$$(\psi_{ep}|\psi_{ep}) = 0 \implies |\psi_{ep}|^2 = 0.\tag{2.15}$$

### 2.3.2 Výpočet výjimečného bodu

V této kapitole se podíváme, jak nalézt výjimečný bod pomocí výpočtu v dvouhladinovém systému. Mějme systém s energetickou hladinou základního stavu  $E_{gs}$  a rezonančního stavu  $E_{es}$  se šířkou rezonance  $\Gamma$ . Tento systém je buzený laserovým impulzem o frekvenci  $\omega$ . Hamiltonián takového systému má následující stav:

$$\begin{pmatrix} E_{es} - i\Gamma & \varepsilon_0 \frac{\mu}{2} \\ \varepsilon_0 \frac{\mu}{2} & E_{gs} + \hbar\omega \end{pmatrix},\tag{2.16}$$



kde  $\mu$  je dipólový moment přechodu,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}}$  je amplituda normalizované intenzity laseru,  $\epsilon_0$  je permitivita vakua,  $I$  je intenzita laseru a  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Naším úkolem je určit intenzitu a frekvenci laseru tak, abychom našli výjimečný bod.

Nejprve určíme vlastní čísla hamiltoniánu  $\lambda_{1,2}$  řešením rovnice

$$\begin{vmatrix} E_{\text{es}} - i\Gamma - \lambda & \varepsilon_0 \frac{\mu}{2} \\ \varepsilon_0 \frac{\mu}{2} & E_{\text{gs}} + \hbar\omega - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2.17)$$

což vede na řešení kvadratické rovnice

$$\lambda^2 + \lambda(-E_{\text{es}} - E_{\text{gs}} - \hbar\omega + i\Gamma) + [E_{\text{es}}E_{\text{gs}} + E_{\text{es}}\hbar\omega - \frac{1}{4}\varepsilon_0^2\mu^2 + i(-\Gamma E_{\text{gs}} - \Gamma\hbar\omega)] = 0, \quad (2.18)$$

jejímž řešením získáme vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(E_{\text{es}} + E_{\text{gs}} + \hbar\omega - i\Gamma) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_{\text{es}} - E_{\text{gs}} - \hbar\omega - i\Gamma)^2 + \varepsilon_0^2\mu^2}. \quad (2.19)$$

Abychom určili výjimečný bod, musíme vlastní čísla položit do rovnosti, z čehož získáme výraz pro amplitudu normalizované intenzity laseru

$$\varepsilon_0^2 = -\frac{1}{\mu^2}(E_{\text{es}} - E_{\text{gs}} - \hbar\omega - i\Gamma)^2. \quad (2.20)$$

Protože laserová intenzita je reálný parametr, můžeme odtud vidět podmínku na frekvenci laseru  $\omega = \frac{E_{\text{es}} - E_{\text{gs}}}{\hbar}$  a dosazením za  $\varepsilon_0$  získáme potřebnou intenzitu laseru k určení výjimečného bodu:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2\mu^2}\Gamma^2. \quad (2.21)$$

### 2.3.3 Berryho fáze

Pro vysvětlení Berryho fází si představme systém s libovolným potenciálem. U tohoto potenciálu dále zafixujeme všechny parametry, s výjimkou jednoho, který označíme  $\lambda$ . Tento parametr předpokládáme reálný, bez újmy na obecnosti [2]. Dále nechť pro hodnotu parametru  $\lambda = \lambda_{\text{ep}}$  dochází ke splynutí 2 vlastních vektů  $|\psi_+\rangle$  a  $|\psi_-\rangle$ , s vlastními čísly  $E_{\pm} = E_{\text{ep}} \pm \alpha\sqrt{\lambda - \lambda_{\text{ep}}}$  [2].

K demonstraci Berryho fází budeme provádět variaci parametru  $\lambda$  po kružnici kolem výjimečného bodu  $\lambda - \lambda_{\text{ep}} = Re^{i\varphi}$ . Odtud mají vlastní čísla a vlastní vektory tvar [2]

$$E_{\pm}(\varphi) = E(\lambda_{\text{ep}} + Re^{i\varphi}) = E_{\text{ep}} \pm \alpha R^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad (2.22)$$

$$|\psi_{\pm}(\varphi)\rangle = R^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\varphi}{4}} [2(x|\psi_{\text{ep}})]^{-\frac{1}{2}} [|\psi_{\text{ep}}\rangle \pm R^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}} |x\rangle]. \quad (2.23)$$

Odtud nás zajímá, jak bude vypadat výsledek při variaci po celočíselném násobku  $2\pi$ . Předpokládali bychom, že po úplné kružnici se vlastní čísla a vektory nezmění, ovšem pokud provedeme výpočet, zjistíme

$$\begin{aligned}
\varphi = 2\pi : E_{\pm}(2\pi) &= E_{\mp}; & |\psi_{\pm}(2\pi) &= \mp|\psi_{\mp}(0)), \\
\varphi = 4\pi : E_{\pm}(4\pi) &= E_{\pm}; & |\psi_{\pm}(4\pi) &= -|\psi_{\pm}(0)), \\
\varphi = 8\pi : E_{\pm}(8\pi) &= E_{\pm}; & |\psi_{\pm}(8\pi) &= +|\psi_{\pm}(0)).
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

Jak můžeme vidět, po  $2\pi$  se ani vlastní čísla, ani vlastní vektory nevrátí do původního stavu, naopak v případě vlastních čísel dochází k jejich záměně a k návratu do původního stavu dochází až po variaci o  $4\pi$ . Případ vlastních vektorů je ještě složitější. Po  $2\pi$  dochází nejen k záměně vlastních vektorů, ale i k záměně znaménka u jednoho z vektorů. Po  $4\pi$  dochází k opětovné záměně vektorů, ovšem znaménko je zaměněné tentokrát u obou vektorů. Abychom se vrátili do původního stavu, musíme provést variaci o  $8\pi$ . Akumulovaná znaménka před vlastními vektory při provádění těchto variací nazýváme Berryho (Geometrické) fáze [2], [9].

# Kapitola 3

## Reálné laserové parametry

V této kapitole prozkoumáme působení laserových impulzů na okolí výjimečného bodu v dvouhladinovém systému. V celé kapitole budeme vycházet z vlastních čísel vyjádřených jako

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\hbar}{2} \left( \omega - \omega_R + \frac{i\Gamma}{2\hbar} \pm \sqrt{\left( \omega - \omega_R + \frac{i\Gamma}{2\hbar} \right)^2 + \frac{\mu^2 \varepsilon_0^2}{\hbar^2}} \right), \quad (3.1)$$

kde  $\omega$  je frekvence laserového impulzu,  $\omega_R = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$  je rezonanční frekvence systému,  $\Gamma$  je šířka rezonance  $\varepsilon_0$  je intenzita laseru a  $\mu$  je dipólový moment přechodu. Frekvence odpovídající výjimečnému bodu má tvar

$$\omega_{\text{ep}} = \omega_R - \frac{\Gamma \operatorname{Im}[\mu]}{2\hbar \operatorname{Re}[\mu]}, \quad (3.2)$$

pro zjednodušení ovšem budeme uvažovat dipólový moment přechodu  $\mu$  reálný, odtud tedy bude platit  $\omega_R = \omega_{\text{ep}}$ . Pro usnadnění výpočtů a čitelnost grafů jsme rovnici 3.1 upravili na tvar

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{1}{2}x + a \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + ax + a^2 + \frac{1}{4}y^2}, \quad (3.3)$$

kde  $x = \hbar(\omega - \omega_R)$ ,  $y = \mu\varepsilon_0$  a  $a = i\frac{\Gamma}{4}$ . Jak plyne z rovnice 3.2 pro případ, kdy je  $\mu$  reálné, dostaneme  $\omega_R = \omega_{\text{ep}}$ . Proto zavedením proměnné  $x$  jako rozdílu frekvence módu a rezonanční frekvence se bude výjimečný bod nacházet vždy v hodnotě  $x = 0$ . Ve všech výpočtech budeme vysílat impulzy tak, aby rozdíly mezi jednotlivými módy  $\Delta\omega$  byly konstantní a rozdíly mezi jednotlivými body na ose  $\Delta y = \Delta(\mu\varepsilon_0)$  také konstantní. Tyto parametry -  $\Delta\omega$  a  $\Delta(\mu\varepsilon_0)$  budeme dále nazývat hustotou bodů. Při vykreslování grafů budeme vždy vykreslovat osy takto:  $x = \hbar(\omega - \omega_R)$ ,  $y = \mu\varepsilon_0$  a  $z = \varepsilon_{\pm}$ .

## 3.1 Jednomódové impulzy

Nejprve se budeme zabývat laserovými impulzy, které se skládají z pouze jednoho módu. Hlavní výhodou těchto impulzů<sup>1</sup> je fakt, že pro každý impulz můžeme přesně určit jeho vliv na vlastní čísla. Působení impulzů jsme prozkoumali pro 3 různé systémy s rozdílnými hodnotami šířky rezonance, abychom dostatečně posoudili vliv jednotlivých parametrů. Vybrané hodnoty  $\Gamma$  jsme volili tak, aby v prvním případě  $\Gamma = 10^{-34}$  J měla řádovou hodnotu srovnatelnou s Planckovou konstantou. V takovém případě je totiž hodnota šířky rezonance srovnatelná s hodnotami  $x = \hbar(\omega - \omega_R)$ . Druhou šířku rezonance  $\Gamma = 1$  J jsme volili tak, abychom porovnali změny parametrů při výrazné změně řádu. Hodnoty  $\Gamma = 10^{-34}$  J a  $\Gamma = 1$  J jsme volili tak, abychom parametry prozkoumali v extrémních případech. Poslední hodnotu  $\Gamma = 10^{-12}$  J jsme volili tak, aby lépe řádově odpovídala reálným hodnotám, v našem případě desítkám keV, tedy aby se nacházela přibližně ve druhé třetině intervalu tvořeném předchozími hodnotami.

### 3.1.1 $\Gamma = 10^{-34}$ J

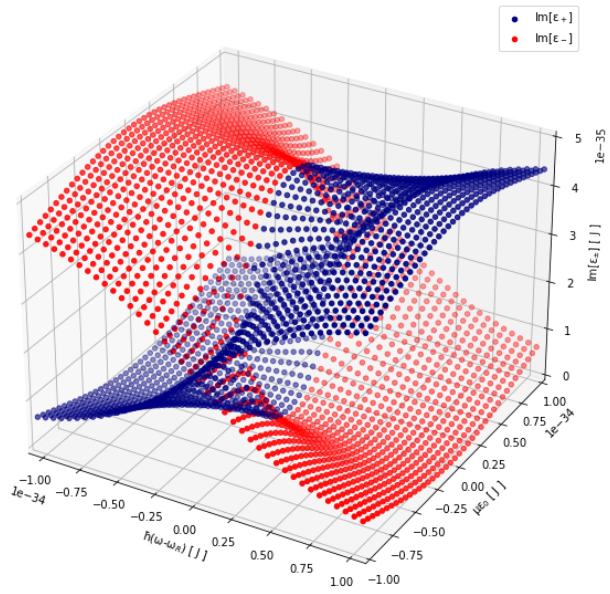
V první sadě jsme nastavili šířku rezonance  $\Gamma = 10^{-34}$  J. Výsledné reálné a imaginární části vlastních čísel můžeme vidět na grafech 3.1a a 3.1b. Výjimečné body můžeme na grafech 3.1a a 3.1b pozorovat v místech, kde na ose  $y$  ( $x = 0$ ) dochází k rozštěpení, na grafu 3.1a tedy v místě, kde se opisovaná kružnice protíná s rovinou  $(x, y)$ . Na grafu 3.1b vidíme, že se grafy pro  $\varepsilon_+$  a  $\varepsilon_-$  dotýkají na úsečce v okolí nuly, výjimečné body se tedy nacházejí na krajích této dotykové úsečky. Na obou grafech také vidíme, že plocha, kterou body opisují daleko od výjimečných bodů, je na jejich okolí značně zdeformována.

Dále vykreslíme graf ukazující absolutní hodnotu rozdílu vlastních čísel  $|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|$ , spolu s mapou tohoto rozdílu. Výsledky můžeme vidět na grafech 3.2a a 3.2b. Na těchto grafech už snadno vidíme polohu výjimečných bodů, na jejich okolí totiž hodnoty rychle klesají k nule. Zde už jednoznačně vidíme, že výjimečné body se nacházejí pro hodnoty  $y \approx \pm 5 \cdot 10^{-35}$  J.

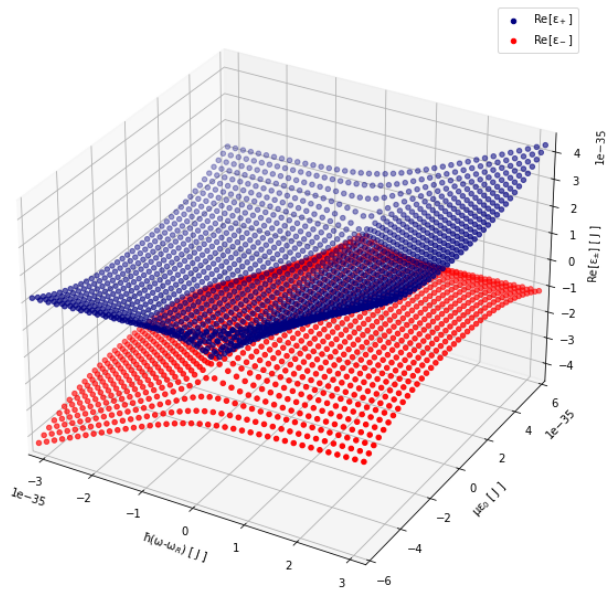
Nakonec se zaměříme na detailní okolí jednoho z výjimečných bodů. Zvolený bod se bude v našem případě nacházet pro hodnotu  $y \approx 5 \cdot 10^{-35}$  J. Výsledky můžeme vidět na grafech 3.3a a 3.3b. Na grafu 3.3a už můžeme jasně vidět polohu výjimečného bodu i chování vlastních čísel na jeho blízkém okolí. Je třeba podotknout, že přestože se frekvence pohybovaly v řádech  $10^{-3}$  Hz, parametry na ose  $y - \mu\varepsilon_0$  - se pohybovaly v řádech  $10^{-37}$  J ( $10^{-18}$  eV). Hodnoty frekvencí jsou velmi nízké a v praxi se s takovými nesetkáme. Chtěli jsme však prozkoumat extrémní případ, kdy je šířka rezonance srovnatelná s  $\hbar(\omega - \omega_R)$ . Jak jsme mohli vidět na grafech, přítomnost výjimečných bodů pro  $\Gamma = 10^{-34}$  J můžeme pozorovat pro hodnoty parametrů  $\omega - \omega_R \in (-0, 1; 0, 1)$  Hz a  $\mu\varepsilon_0 \in (\pm 6, \pm 4) \cdot 10^{-35}$  J. Hodnoty vlastních čísel se v tomto případě pohybují v řádech  $10^{-35}$  J ( $10^{-16}$  eV).

---

<sup>1</sup>Jelikož se bavíme o jednomódových impulzech, jedná se ve skutečnosti o CW laser.

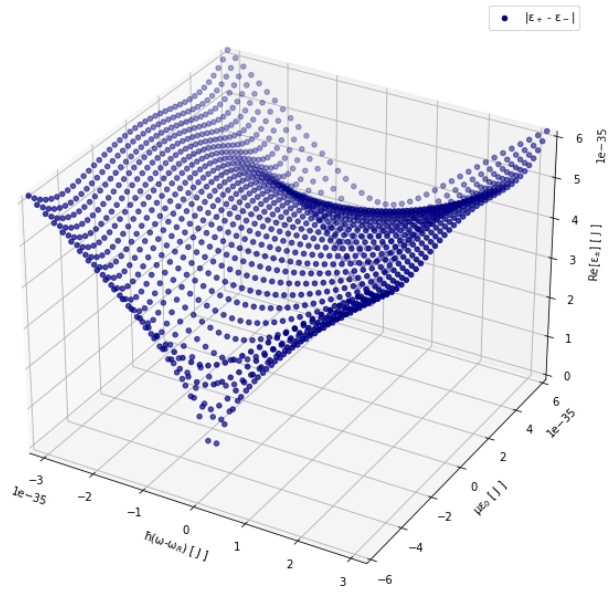


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 0,05$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 5 \cdot 10^{-36}$  J.

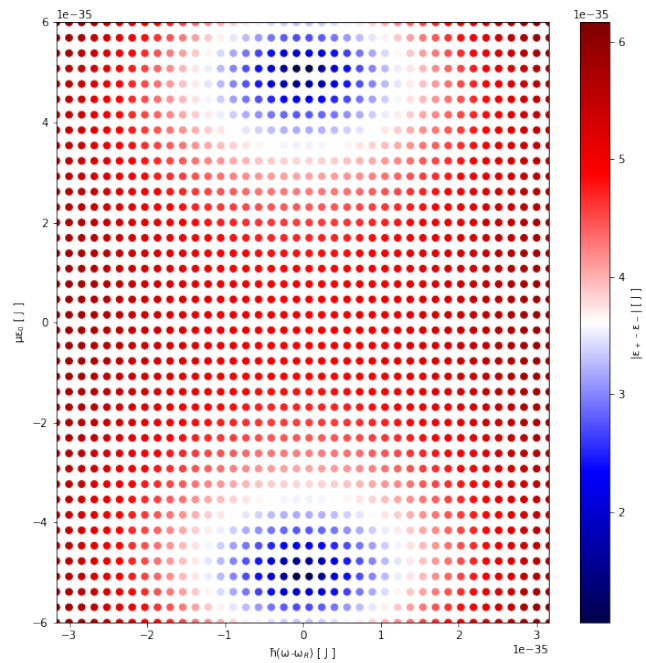


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 0,015$  Hz  
a  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-36}$  J.

Obrázek 3.1: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro  $\Gamma = 10^{-32}$  J

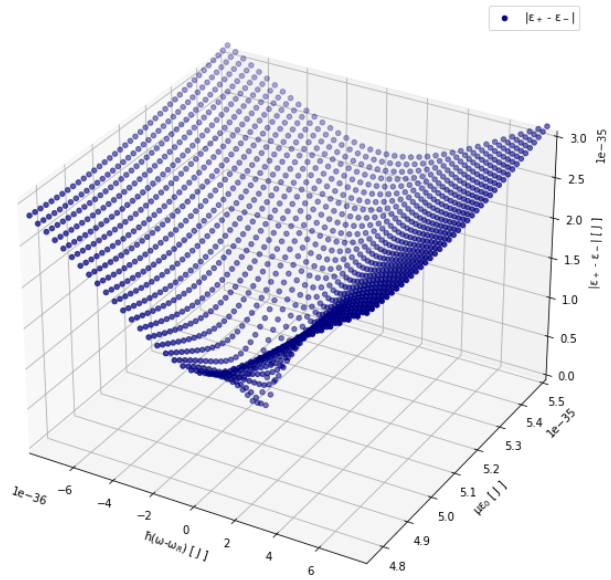


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 0,015$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-36}$  J.

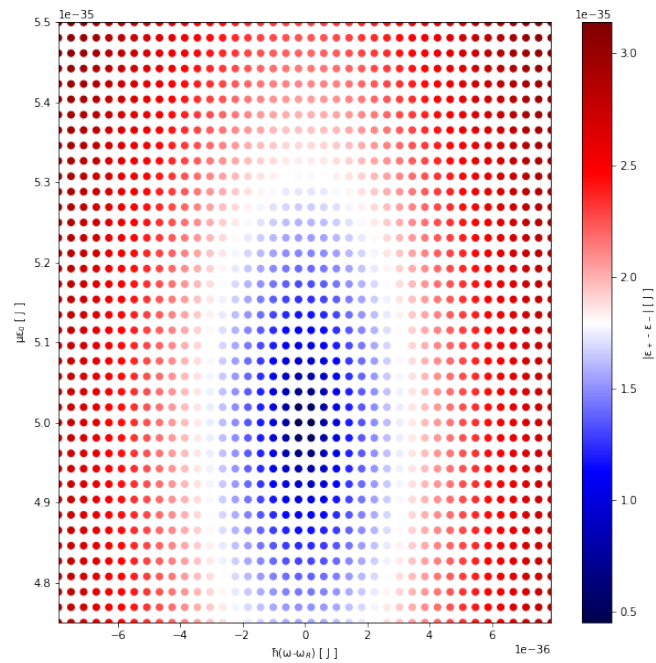


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 0,015$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-36}$  J.

Obrázek 3.2: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel pro  $\Gamma = 10^{-32}$  J.



(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{-3}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-37}$  J.



(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{-3}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-37}$  J.

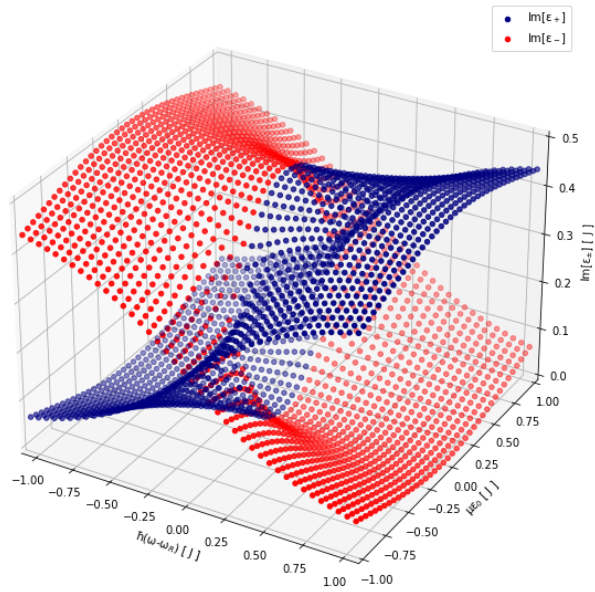
Obrázek 3.3: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro  $\Gamma = 10^{-32}$  J.

### 3.1.2 $\Gamma = 1 \text{ J}$

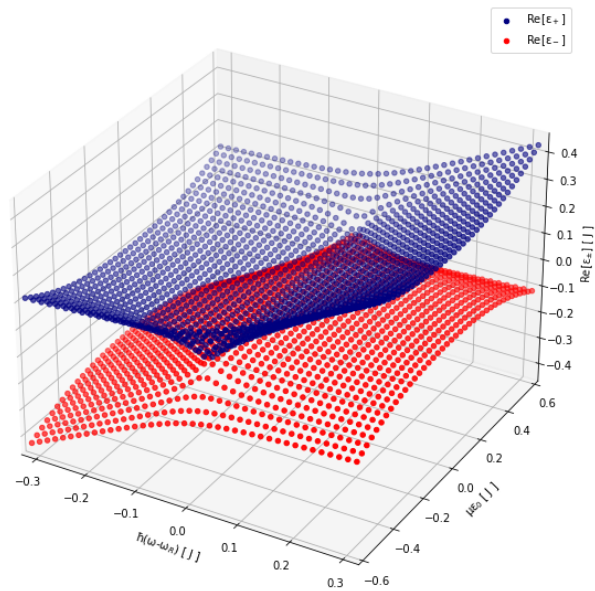
V první sadě jsme uvažovali malou hodnotu šířky rezonance  $\Gamma = 10^{-34} \text{ J}$  a v důsledku toho byly výjimečné body ve značně úzkém intervalu parametrů. Pro srovnání se nyní podíváme na případ, kdy je šířka rezonance ve druhém extrému. Budeme tedy nyní uvažovat hodnotu šířky rezonance  $\Gamma = 1 \text{ J}$ . Imaginární a reálnou část vlastních čísel můžeme vidět v grafech 3.4a a 3.4b. Dále opět vypíšeme absolutní hodnotu rozdílu, čímž získáme grafy 3.5a a 3.5b. Nakonec se opět zaměříme na blízké okolí výjimečného bodu u  $y \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ . Výsledek můžeme vidět na grafech 3.6a a 3.6b.

Když porovnáme grafy z této sekce s výsledky z předchozí sekce, okamžitě vidíme, že pro větší hodnoty šířky rezonance se i interval parametrů musí výrazně zvětšit, abychom získali stejnou změnu. Nejen to, ale můžeme vidět, že změna řádu v šířce rezonance se projeví na stejnou řádovou změnu v ostatních parametrech. Když porovnáme hodnoty parametrů těchto grafů s předchozími, vidíme, že, abychom získali pozorovatelnou změnu v hodnotách vlastních čísel, musíme i výrazně měnit parametry. Konkrétně podíváme-li se na frekvenční rozdíly mezi módy, tentokrát musíme frekvence  $\Delta\omega$  měnit v řádech  $10^{31} \text{ Hz}$ , abychom získali znatelnou změnu. Naopak v případě osy  $y$ , kde v předchozím případě byl výsledek značně citlivý na změnu v intenzitě laseru  $\varepsilon_0$ , tentokrát se citlivost výsledku pohybuje v řádech  $10^{-3} \text{ J}$  ( $10^{16} \text{ eV}$ ). Přítomnost výjimečných bodů pro  $\Gamma = 1 \text{ J}$  můžeme pozorovat pro hodnoty parametrů  $\omega - \omega_R \in (-1, 1) \cdot 10^{33} \text{ Hz}$  a  $\mu\varepsilon_0 \in (\pm 0, 6; \pm 0, 4) \text{ J}$ . Hodnoty vlastních čísel se v tomto případě pohybují v řádech desetin  $\text{J}$  ( $10^{18} \text{ eV}$ ).



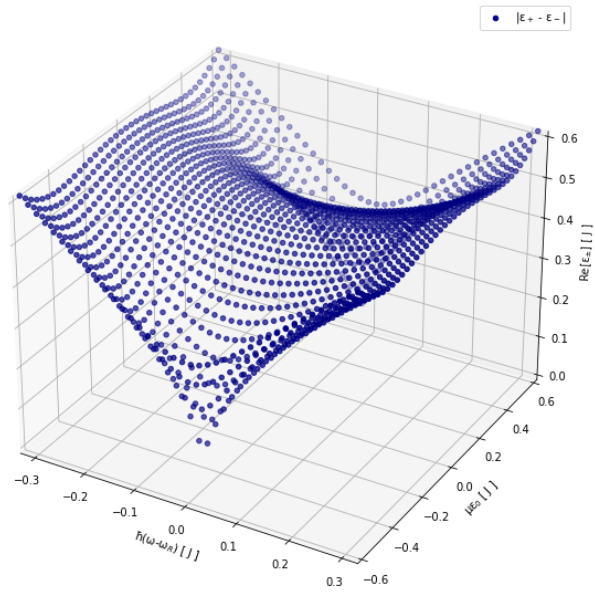


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{32}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 0,05$  J.

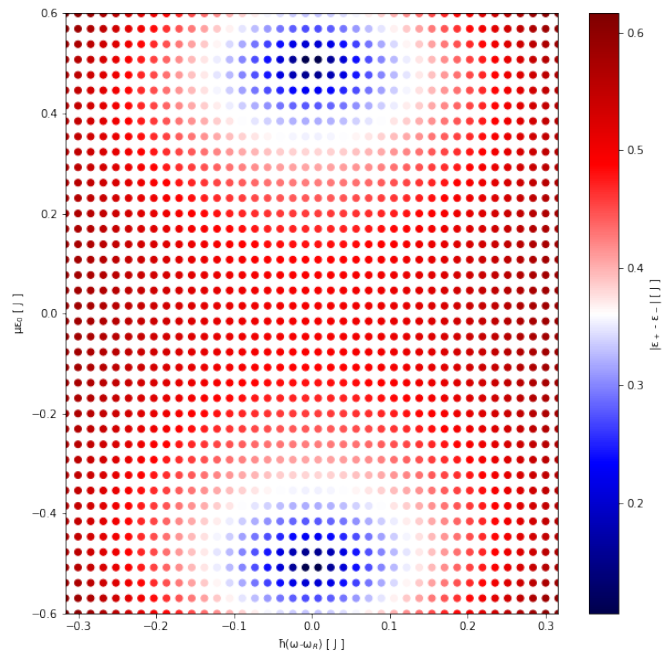


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{32}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 0,03$  J.

Obrázek 3.4: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro  $\Gamma = 1$  J.

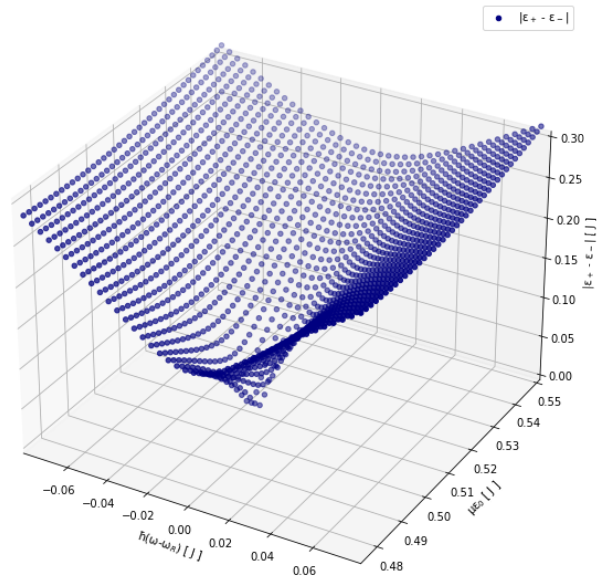


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{32}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 0,03$  J.

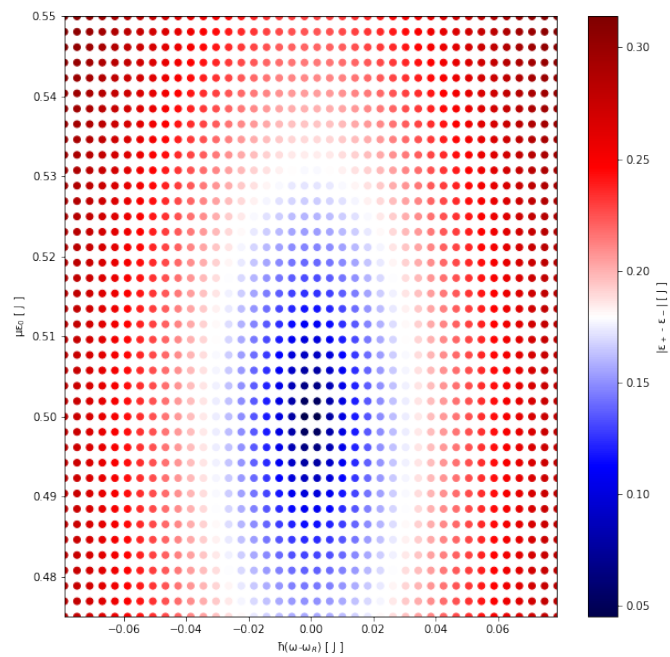


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{32}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 0,03$  J.

Obrázek 3.5: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel pro  $\Gamma = 1$  J.



(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{31}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-3}$  J.



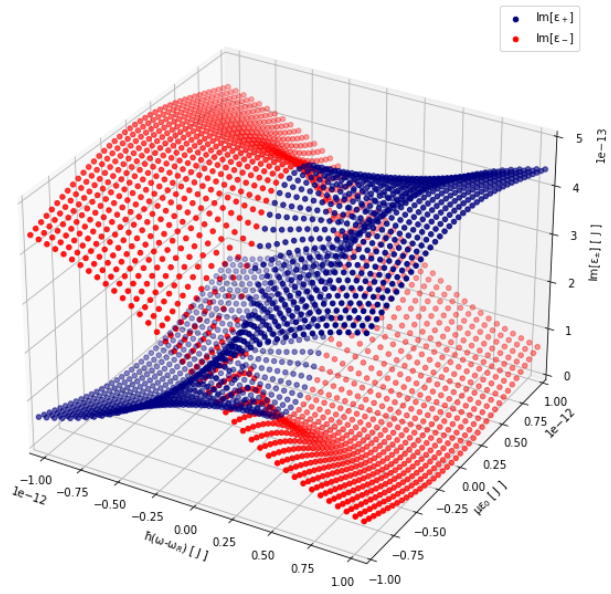
(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{31}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-3}$  J.

Obrázek 3.6: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro  $\Gamma = 1$  J.

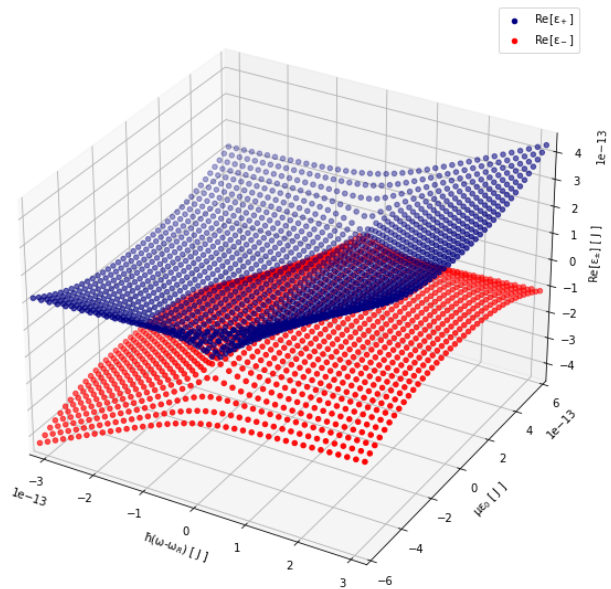
### 3.1.3 $\Gamma = 10^{-12}$ J

Nakonec se podíváme na hodnotu šířky rezonance  $\Gamma = 10^{-12}$  J. Nejprve zobrazíme separovaně reálnou a imaginární složku vlastních čísel na grafech 3.7a a 3.7b. Dále vykreslíme graf absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel spolu jejich mapou, jak můžeme vidět na grafech 3.8a a 3.8b. Odtud můžeme určit přibližnou polohu výjimečného bodu a prozkoumáme blízké okolí výjimečného bodu v hodnotě  $y \approx 5 \cdot 10^{-13}$  J. Výsledek můžeme vidět na grafech 3.9a a 3.9b.

V předchozích případech byl výsledek extrémně citlivý na jeden z parametrů  $\Delta\omega$ , nebo  $\Delta(\mu\varepsilon_0)$ , tentokrát jsme volili šířku rezonance mezi předchozími hodnotami. Vidíme tedy, že hodnoty frekvencí  $\omega$  se pohybují v řádech  $10^{20}$  Hz a hodnoty parametrů  $\mu\varepsilon_0$  v řádech  $10^{-15}$  J ( $10^4$  eV = 10 keV). Přesto, abychom pozorovali výrazné změny v hodnotách vlastních čísel, hodnoty frekvencí se musí pohybovat v řádech  $10^{20}$  Hz, zatímco hodnoty  $\mu\varepsilon_0$  v desítkách keV. Tento případ jsme volili tak, aby lépe odpovídal reálným hodnotám. Přesto, pokud se podíváme na frekvence, pohybujeme se ve spektru RTG záření. Přítomnost výjimečných bodů pro  $\Gamma = 10^{-12}$  J tedy můžeme pozorovat pro hodnoty parametrů  $\omega - \omega_R \in (-1, 1) \cdot 10^6$  Hz a  $\mu\varepsilon_0 \in (\pm 6, \pm 4) \cdot 10^{-13}$  J. Hodnoty vlastních čísel se v tomto případě pohybují v řádech  $10^{-13}$  J (desítky keV).

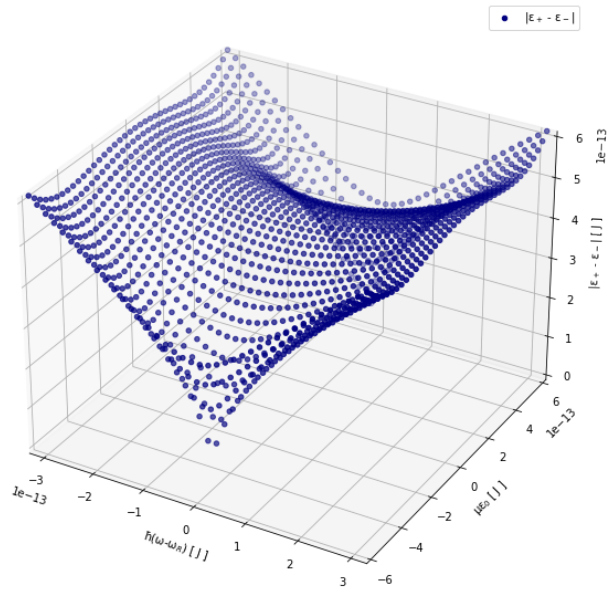


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 5 \cdot 10^{-14}$  J.

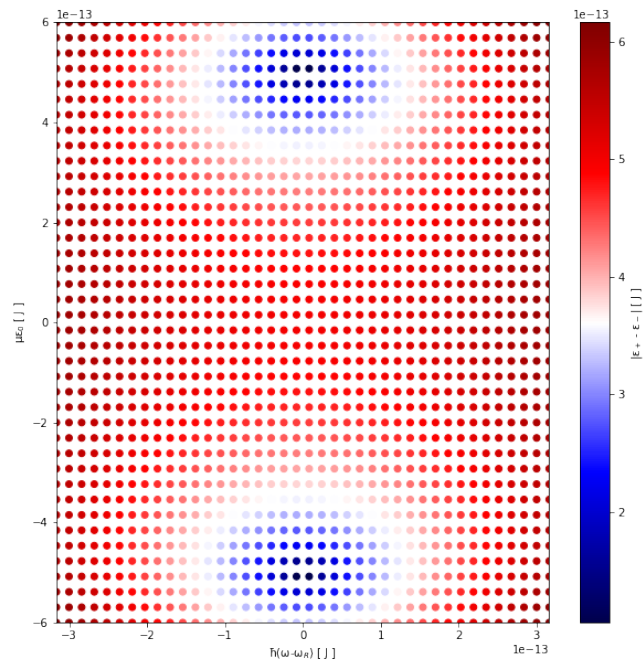


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.7: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro  $\Gamma = 10^{-12}$  J.

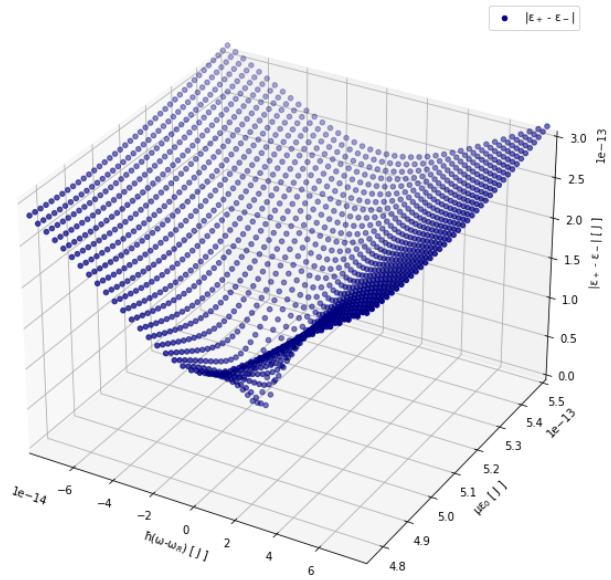


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

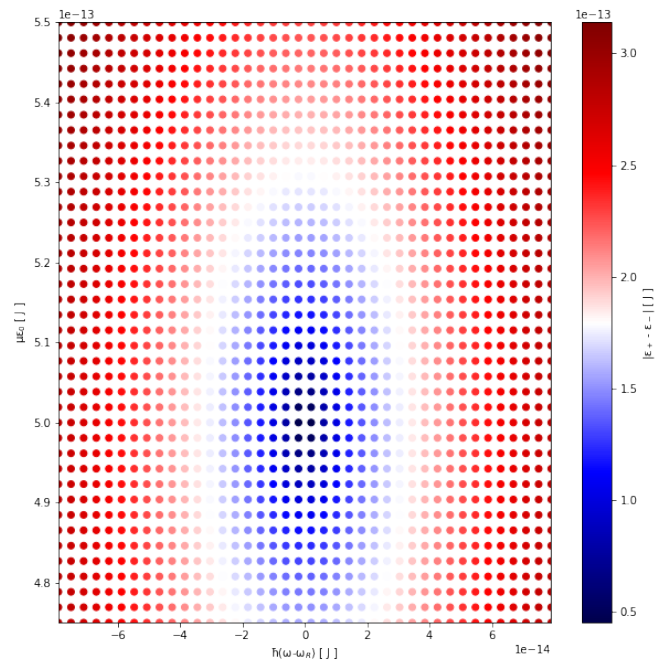


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.8: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel pro  $\Gamma = 10^{-12}$  J.



(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\epsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\epsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.



(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\epsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\epsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.

Obrázek 3.9: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro  $\Gamma = 10^{-12}$  J.

## 3.2 Vícemódové impulzy

V této sekci prozkoumáme, jak se změní výsledky měření, pokud namísto jednomódových impulzů budeme okolí výjimečného bodu zkoumat za použití impulzů složených z více módů. Přesto ale pro zjednodušení výpočtů budeme impuls idealizovat. Ponecháme předpoklady z předchozí sekce o rovnoměrném rozložení frekvencí  $\omega$  a parametřů na ose  $y$  tak, že  $\Delta\omega = \text{konst.}$  a  $\Delta\mu\varepsilon_0 = \text{konst.}$  Dalším předpokladem bude, že intenzita všech módů v impulsu je stejná, tzn. máme-li impuls složený ze tří módů  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , platí:  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 = \Delta\omega$  a  $\mu\varepsilon_1 = \mu\varepsilon_2 = \mu\varepsilon_3$ .

V předchozí sekci jsme zkoumali, jakým způsobem se mění parametry vlastních čísel v závislosti na různých hodnotách šířky rezonance. To jsme již prozkoumali, a proto budeme všechny výpočty provádět pro stejnou hodnotu šířky rezonance  $\Gamma = 10^{-12}$  J. Budeme uvažovat 3 různé případy, 3 různé laserové impulzy - první impuls se skládá ze 3 módů, druhý impuls z 5 módů a třetí impuls ze 7 módů. Působení vícemódových impulzů jsme počítali stejně jako dříve, ovšem namísto vykreslení jsme působení jednotlivých módů vyrovnali aplikací Savitzky-Golay filtru<sup>2</sup>, čímž jsme získali bod, který odpovídá frekvencí středového módu a ten jsme vykreslili na graf. Ve filtru jsme se rozhodli aproximovat polynomem prvního řádu. Polynom nultého řádu by až příliš zredukoval reálný impuls. Mohli bychom působení módů aproximovat polynomem vyššího řádu, ovšem zvolený filtr by vyžadoval více módů v impulsu. Jak v této kapitole uvidíme, rozmazání polohy výjimečného bodu je značné už v případě třímódového impulsu, proto jsme se rozhodli použít polynom prvního řádu.

Nejprve se podíváme na případ reálné a imaginární složky vlastních čísel 3.10, 3.11, 3.12. Výsledky můžeme porovnat s jednomódovým případem na grafu 3.7a. Jak můžeme vidět, středová kružnice, která dříve jednoznačně oddělovala kladnou a zápornou stranu osy  $x$ , je v závislosti na počtu módů impulzů více a více zdeformována. Tato deformace znemožňuje přesné určení výjimečného bodu. Na grafu imaginární části ovšem toto vyhlazení není dobře vidět, trochu lépe ho můžeme vidět na grafech reálné části. Opět se nejprve podíváme na jednomódový příklad na obrázku 3.7b, na kterém jsme určili výjimečné body jako kraje dotykové úsečky. Jak můžeme vidět na grafech 3.10, 3.11, 3.12, deformace indikující polohu výjimečného bodu je značně vyrovnána a výjimečné body už prakticky nemůžeme pozorovat.

Dále se podíváme na grafy absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel, které můžeme vidět na obrázcích 3.13, 3.14, 3.15. Jak můžeme vidět na grafech, polohu výjimečného bodu můžeme stále dobře určit, ovšem se zvyšujícím se počtem módů v impulsu výjimečný bod rychle vymizí. To můžeme dobře vidět na mapách grafů 3.13b, 3.14b, 3.15b. Můžeme také vidět, že pro zvyšující počet módů v impulsu se výjimečný bod rychle ztrácí.

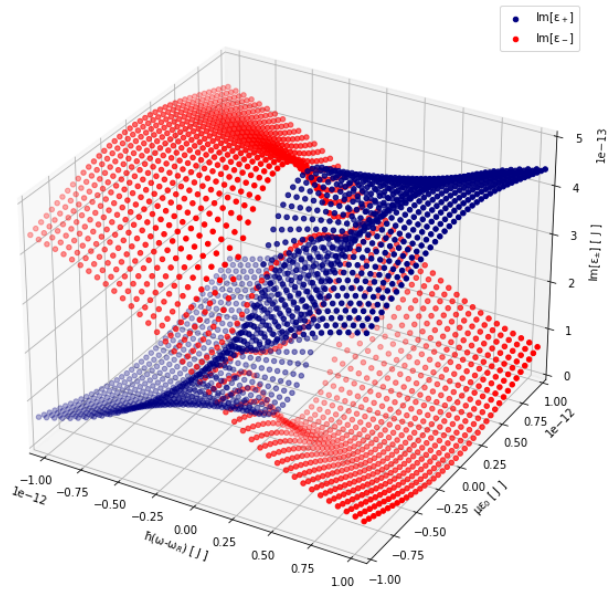
---

<sup>2</sup>Použili jsme Savitzky-Golay filtr, protože je v našem případě analogický algoritmizaci, je ovšem značně rychlejší.

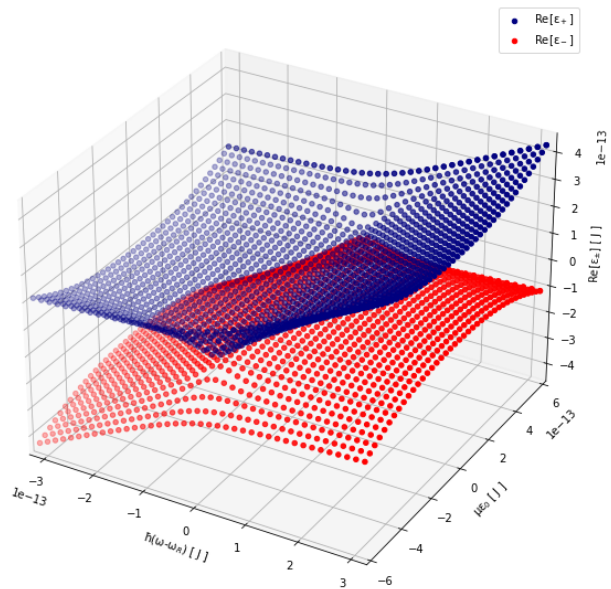


Nakonec se zaměříme na úzké okolí výjimečného bodu v blízkosti  $y \approx 5 \cdot 10^{-13}$  J. Výsledky můžeme vidět na obrázcích 3.16, 3.17 a 3.18. Ty opět porovnáme s jednomódovým případem na grafech 3.9a a 3.9b. Zde můžeme vidět stejný jev, který jsme pozorovali na předchozích grafech, ovšem ve větší míře. Opět pozorujeme vyrovnání okolí výjimečného bodu, na tomto úzkém okolí ovšem efekt pozorujeme mnohem výrazněji.

Přítomnost výjimečných bodů můžeme tedy pozorovat pro stejné hodnoty parametrů  $\omega - \omega_R \in (-1, 1) \cdot 10^6$  Hz a  $\mu\varepsilon_0 \in (\pm 6, \pm 4) \cdot 10^{-13}$  J, jako v jednomódovém případě. Tentokrát ale pozorujeme ostrý pokles indikující výjimečný bod pouze na okraji těchto intervalů. Z důvodu rozmazání se výjimečný bod jeví ne jako ostrý pokles k nule v celém intervalu, ale jako mělké lokální minimum.

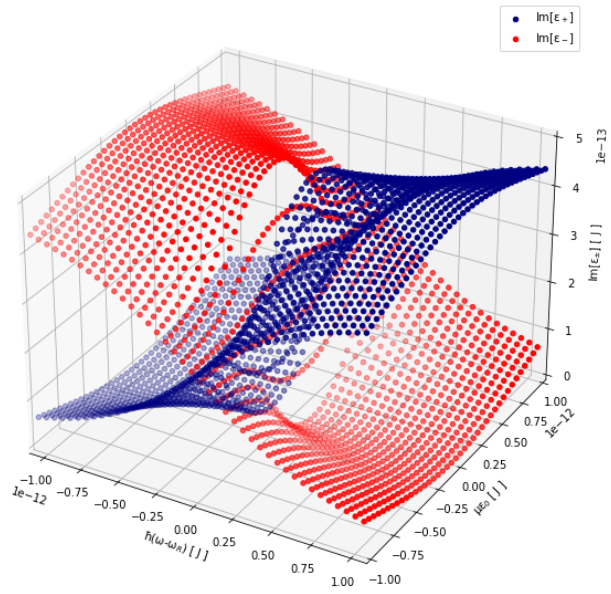


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 5 \cdot 10^{-14}$  J.

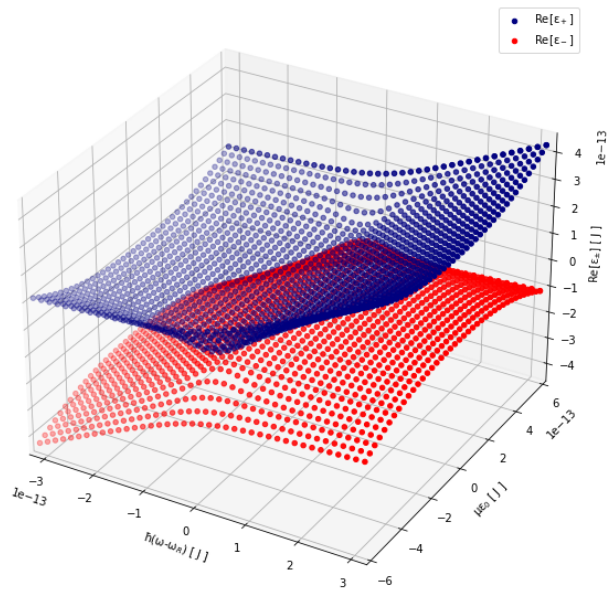


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.10: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro impuls ze 3 módů.

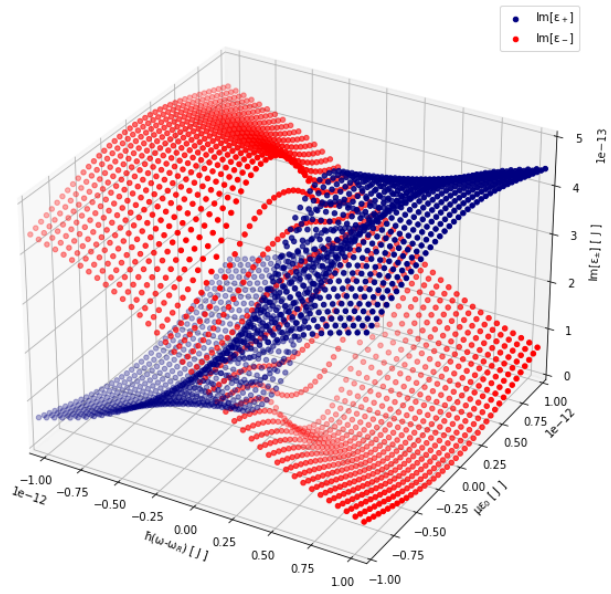


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 5 \cdot 10^{-14}$  J.

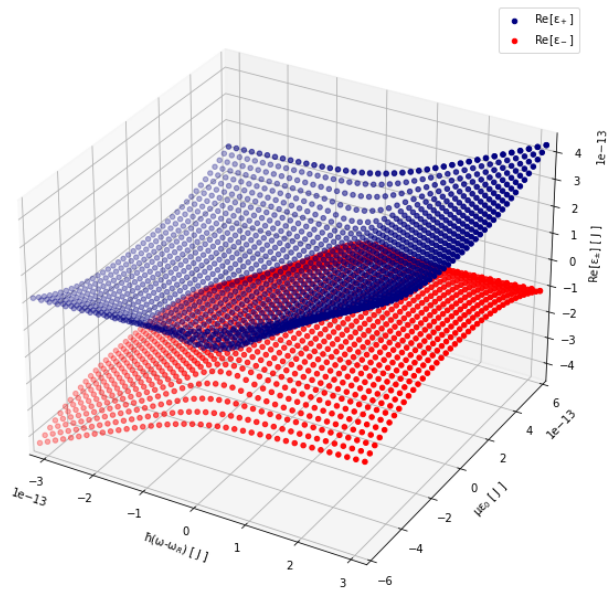


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.11: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro impuls z 5 módů.

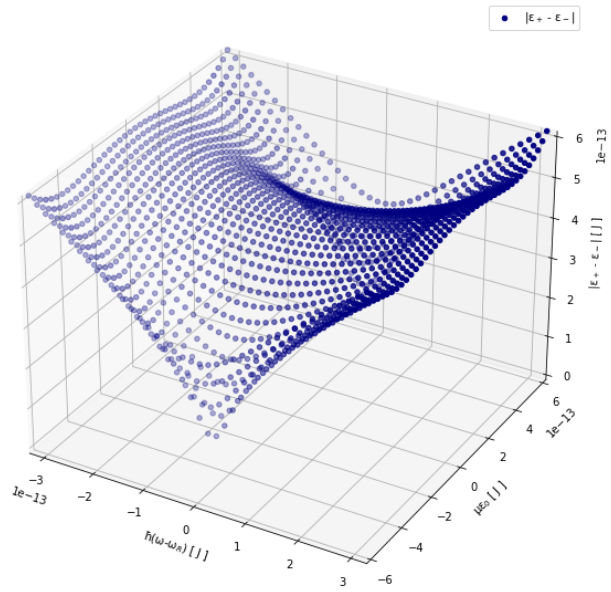


(a) Imaginární část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 5 \cdot 10^{-14}$  J.

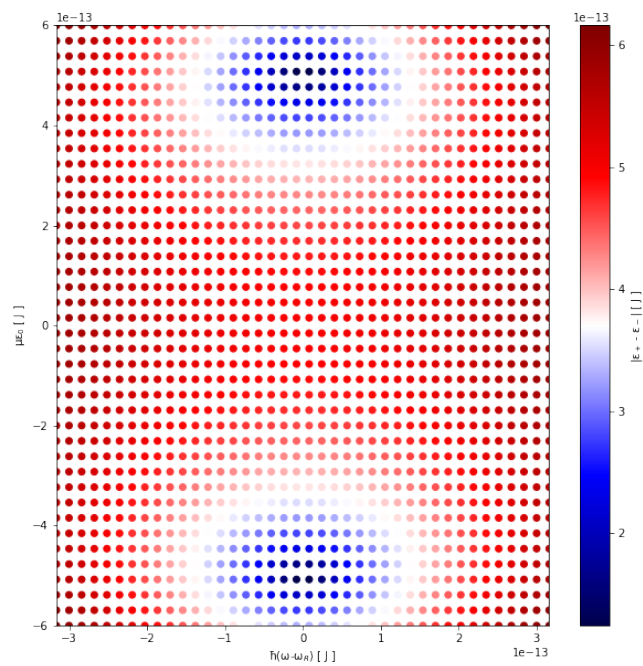


(b) Reálná část vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.12: Reálná a imaginární část vlastních čísel pro impuls ze 7 módů.

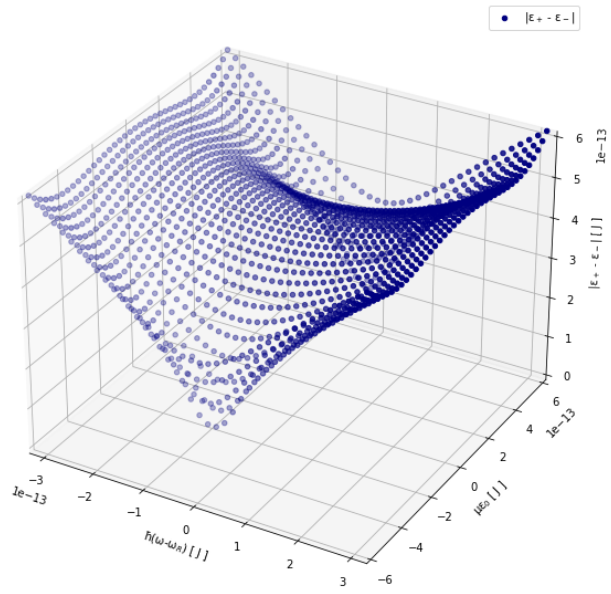


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

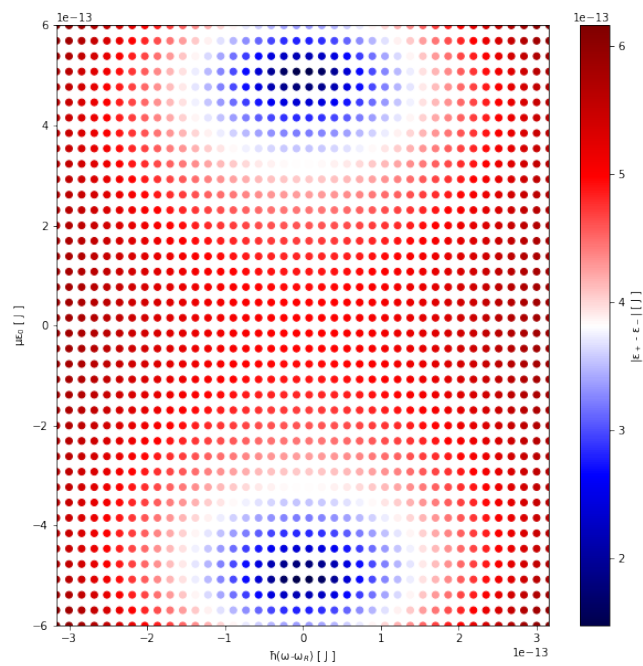


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.13: Absolutní hodnota vlastních čísel pro impuls ze 3 módů.

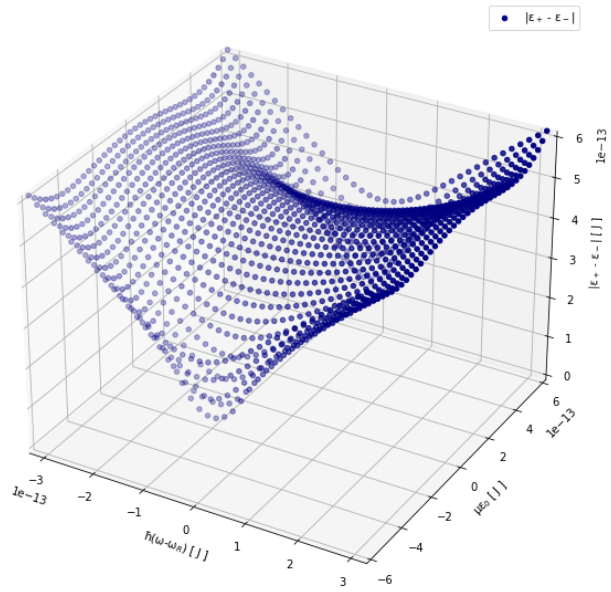


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

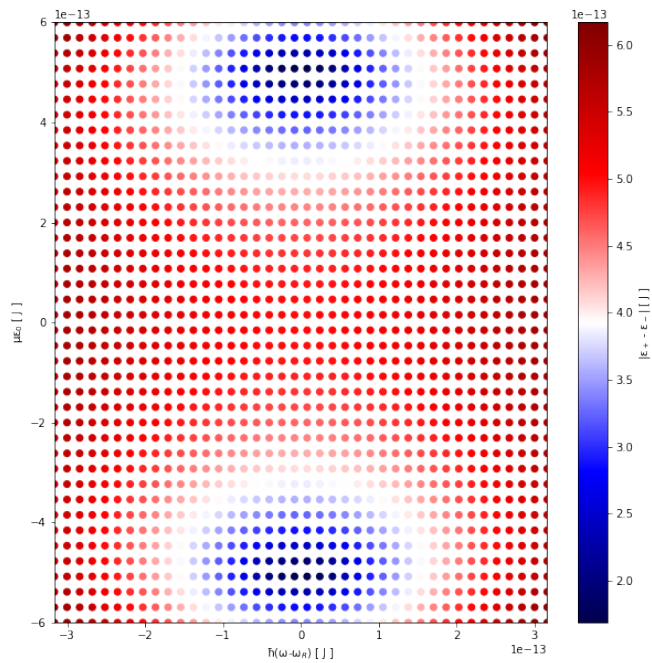


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.14: Absolutní hodnota vlastních čísel pro impuls z 5 módů.

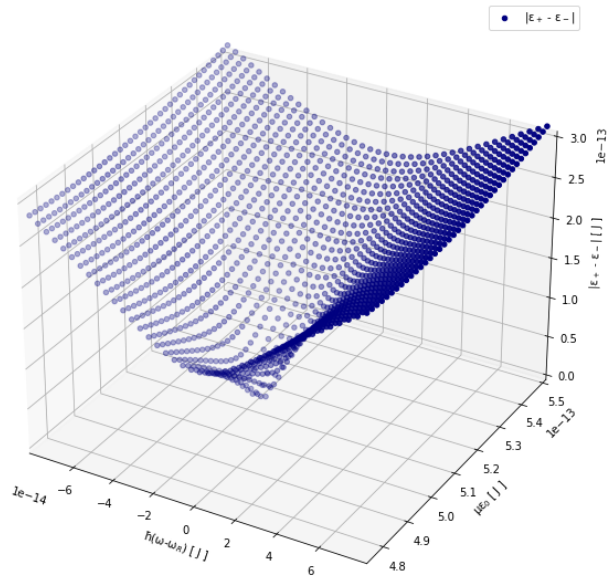


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

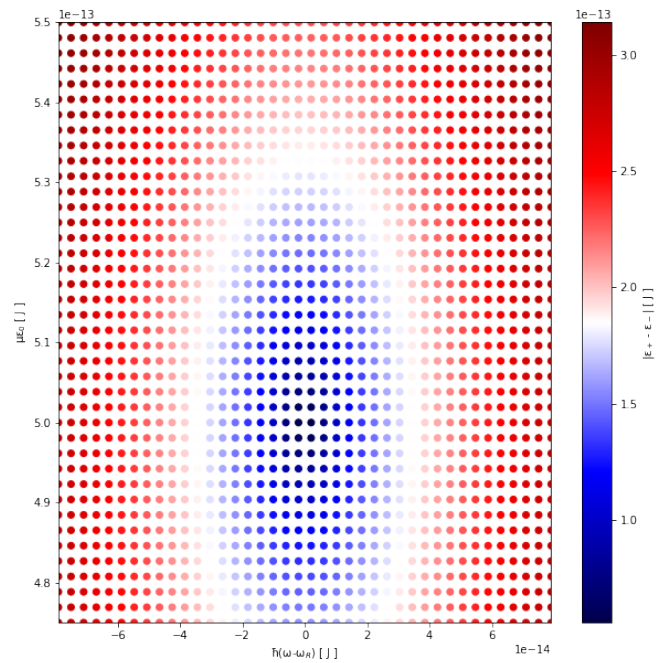


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 3 \cdot 10^{-14}$  J.

Obrázek 3.15: Absolutní hodnota vlastních čísel pro impuls ze 7 módů.



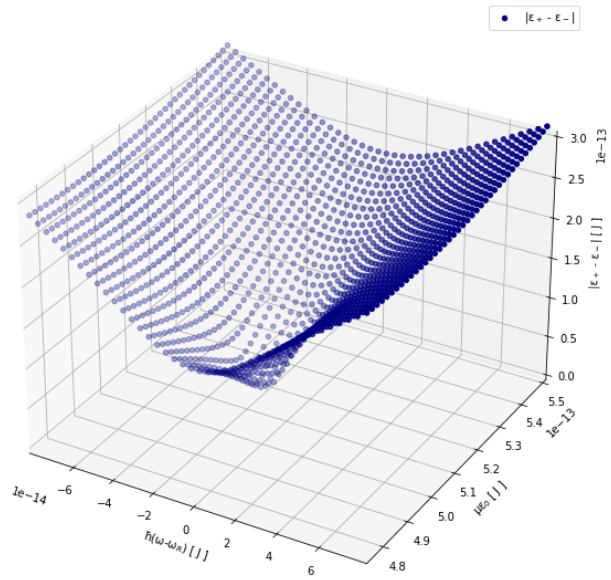
(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.



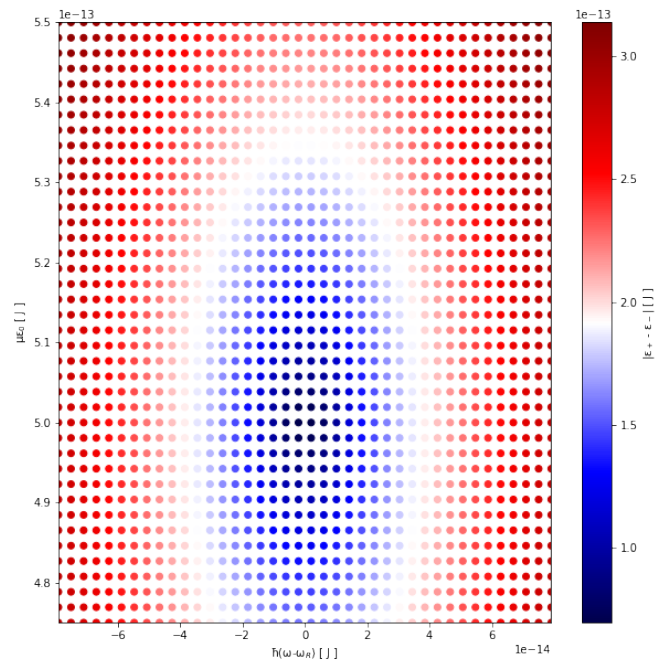
(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.

Obrázek 3.16: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro impuls ze 3 módů.



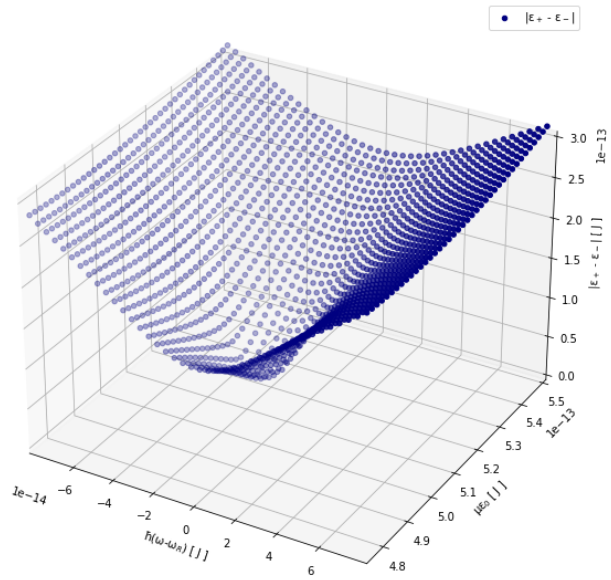


(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.

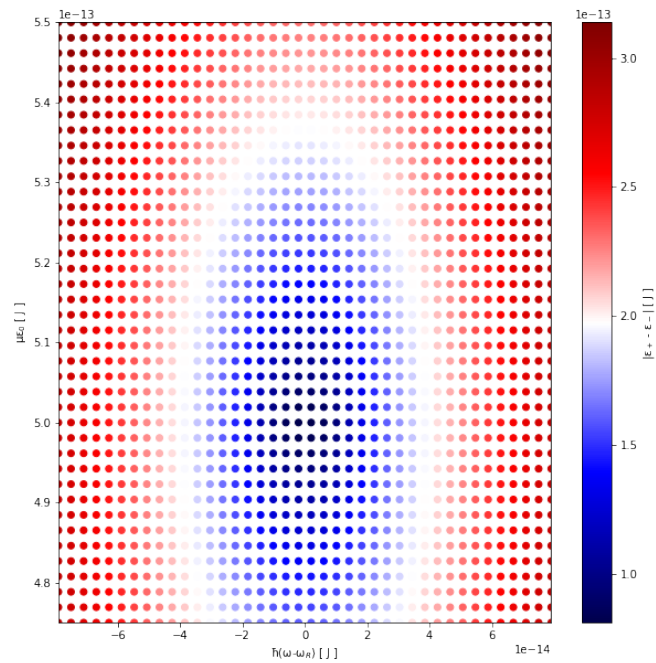


(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.

Obrázek 3.17: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro impuls z 5 módů.



(a) Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.



(b) Mapa absolutní hodnoty rozdílu vlastních čísel  $\varepsilon_{\pm}$  při hustotě bodů  $\Delta\omega = 3,75 \cdot 10^{19}$  Hz,  $\Delta(\mu\varepsilon_0) = 1,875 \cdot 10^{-15}$  J.

Obrázek 3.18: Absolutní hodnota rozdílu vlastních čísel na úzkém okolí výjimečného bodu pro impuls ze 7 módů.

# Závěr

V této práci jsme zkoumali působení laserových impulzů na okolí výjimečných bodů ve dvouhladinových systémech. Nejprve jsme zkoumali závislost vlastních čísel na šířce rezonance  $\Gamma$  a parametrech  $\omega$  a  $\mu\varepsilon_0$ , pomocí jednomódových impulzů. Zkoumali jsme odděleně reálnou a imaginární složku vlastních čísel, dále absolutní hodnotu jejich rozdílu a úzké okolí jednoho výjimečného módu opět v absolutní hodnotě rozdílu. Tuto závislost jsme prozkoumali pro 3 různé šířky rezonancí. Pro  $\Gamma = 10^{-34}$  J jsme ukázali, že při takto malé šířce rezonance se vlastní čísla výrazně mění už při  $\Delta\omega = 0,015$  Hz a  $\Delta\mu\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-36}$  J, ovšem samotná hodnota vlastních čísel se pohybuje v řádech  $10^{-35}$  J. Dále jsme zkoumali  $\Gamma = 1$  J, kde jsme viděli, že k výraznějším změnám dochází až při hodnotách  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{32}$  Hz a  $\Delta\mu\varepsilon_0 = 0,03$  J, zatímco vlastní čísla se pohybují v řádech desetin J. Nakonec jsme prozkoumali případ  $\Gamma = 10^{-12}$  J, kdy ke značným změnám docházelo při hodnotě parametrů  $\Delta\omega = 1,5 \cdot 10^{20}$  Hz a  $\Delta\mu\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-14}$  J a vlastní čísla nabývala hodnot  $10^{-13}$  J  $\approx 10$  keV. Tyto konkrétní hodnoty  $\Gamma$  jsme volili tak, abychom porovnali chování vlastních čísel v extrémních hodnotách.

V poslední části jsme stejným způsobem zkoumali případ  $\Gamma = 10^{-12}$  J za pomoci laserových impulzů složených ze 3, 5 a 7 módů. Použité laserové impulzy jsme idealizovali, předpokládali jsme ekvidistantní rozložení parametrů o vzdálenostech  $\Delta\omega$  a  $\Delta(\mu\varepsilon_0)$  a u vícemódových impulzů jsme navíc předpokládali, že intenzita všech módů v impulzu je stejná. Vícemódové impulzy jsme počítali za použití Savitzky-Golay filtru a působení jednotlivých módů jsme aproximovali polynomem prvního řádu, který ale nepopisuje reálný laserový impulz dobře. Ukázali jsme, že přestože výjimečné body jsou snadno viditelné při použití jednomódových impulzů, pokud se impulz skládá z více módů, přesná poloha výjimečného bodu rychle zaniká. To jsme očekávali, neboť pro jednomódové impulzy můžeme přesně vypočítat, jak interagují. Pokud ale předpokládáme vícemódové impulzy, dokážeme přesně určit interakce módů, ale interakci celého impulzu musíme aproximovat přes interakce všech módů. Kvůli tomuto zamlžení ztrácíme přesnost v určení výjimečného bodu. Jeho existenci jsme stále mohli pozorovat, ovšem přesné určení jeho pozice bylo výrazně náročnější. Nejlépe jsme výjimečný bod viděli při zobrazení absolutní hodnoty rozdílu. Vícemódové impulzy jsme sice zkoumali pouze pro 3, 5 a 7 módů, ale už při takto nízkých počtech jsme pozorovali výrazný zánik výjimečného bodu. Odtud můžeme podle našich výpočtů uvažovat, že, v případě impulzů složených z více jak 1000 módů, bychom neměli být schopni výjimečný bod vůbec pozorovat.

V budoucích pracích by tedy bylo zajímavé prozkoumat, jak se výsledky změni v případě reálnějších tvarů intenzit jednotlivých vícemódových impulzů, například Gaussovských, apod. Dále by bylo dobré prozkoumat i jiné efekty, ke kterým v okolí výjimečných bodů dochází, například vliv výjimečného bodu na dobu přechodu elektronu na autoionizační hladině, nebo přechod od Rabiho oscilací k tzv. rychlému adiabatickému přechodu.

# Literatura

- [1] Ingrid Rotter: *The role of exceptional points in quantum systems*, arXiv:1011.0645v1 [quant-ph]; (2010)
- [2] Nimrod Moiseyev: *Non-Hermitian Quantum Mechanics*, Cambridge University Press; (2011)
- [3] G. Gamow: *Zs. f. Phys.*, **51**, 204 (1928); *Zs. f. Phys.* **52**, 210 (1928)
- [4] A. Temkin and Z. J. Horak: *Autoionization recent developments and applications*, *Astrophys Space Sci.*, **123**, 216 (1986)
- [5] G. W. Drake: *Handbook on Atomic, Molecular and Optical Physics*, New York, Springer (2005)
- [6] N. Moiseyev, P. R. Certain and F. Weinhold: *Resonance properties of complex-rotated Hamiltonians*, *Mol. Phys.* **36**, 1613-1630 (1978)
- [7] J. H. Wilkinson: *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, Clarendon Press (1965)
- [8] P. A. M. Dirac: *The Principle of Quantum Mechanics*, London, Oxford University Press, fourth edition (1967)  
H. P. Breuer, K. Dietz and M. Holthaus, *Berry's phase in quantum optics*, *Phys. Rev. A* **47**, 725–728 (1993)
- [9] P. H. P. Breuer, K. Dietz and M. Holthaus: *Berry's phase in quantum optics*, *Phys. Rev. A* **47**, 725–728 (1993)
- [10] W. D. Heiss: *Exceptional points of non-Hermitian operators*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 2455-2464
- [11] W. D. Heiss: *The physics of exceptional points*, PROCEEDINGS OF SAIP 2011