České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diskrétní Diracův operátor a jeho nerelativistická limita

Discrete Dirac operator and its non-relativistic limit

Bakalářská práce

Autor: **Ruben Karapetyan**

Vedoucí práce: **doc. Ing. Matěj Tušek, Ph.D.**

Akademický rok: 2022/2023

Katedra: matematiky | Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Ruben Karapetyan
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní specializace:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Diskrétní Diracův operátor a jeho nerelativistická limita
Název práce (anglicky):	Discrete Dirac operator and its non-relativistic limit

Pokyny pro vypracování:

1) Seznamte se se základy teorie omezených operátorů na Hilbertových prostorech.
2) Prostudujte, jak se zavádí jednodimenzionální diskrétní Laplaceův a Diracův operátor a jak se neleznou příslušná spektra a resolventy.
3) Nalezněte nerelativistickou limitu Diracova operátoru v co nejsilnější topologii.

Doporučená literatura:

1) M. Havlíček, P. Exner, J. Blank, Lineární operátory v kvantové fyzice. Karolinum, 1993.
2) G. Teschl, Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators. American Mathematical Society, 2009.
3) O. Ibrogimov, F. Štampach, Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operators. Integral Equations and Operator Theory 91:53, 2009.
4) B. Cassano, O. Ibrogimov, D. Krejčiřík, F. Štampach, Location of eigenvalues of non-self-adjoint discrete Dirac operators. Annales Henri Poincaré 21, 2020, 2193–2217.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Matěj Tušek, Ph.D.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

....
garant oboru

....
vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-3-

....
děkan

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli doc. Ing. Mateji Tuškovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 2. srpna 2023 Ruben Karapetyan

Název práce:

Diskrétní Diracův operátor a jeho nerelativistická limita

Autor: Ruben Karapetyan

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Matěj Tušek, Ph.D.

Abstrakt: V této bakalářské práci je hlavním cílem dokázat, že rezolventa diskrétního Diracova operátoru posunutého o mc^2 konverguje k diskrétnímu Laplaceovu operátoru v operátorové normě pro c jdoucí do nekonečna. Tohoto cíle dosáhneme třemi různými, odlišnými cestami využívajícími různé poznatky z teorie lineárních operátorů. Dalším studiem problematiky získáme úplný Taylorův rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru v okolí $c = +\infty$. Nakonec zkoumáme, jak konvergenci rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru ovlivní přidání omezeného potenciálu.

Klíčová slova: diskrétní Diracův operátor, Laurentovy operátory, nerelativstická limita, supersymetrie

Title:

Discrete Dirac operator and its non-relativistic limit

Author: Ruben Karapetyan

Abstract: In this thesis, the main goal is to prove that the discrete Dirac operator, shifted by mc^2, converges to the discrete Laplace operator in the norm resolvent sense as c approaches infinity. We reach this goal using three different approaches based on various parts of theory of linear operators. Moreover, we obtain the full Taylor expansion of the shifted discrete Dirac operator's resolvent in the neighbourhood of $c = +\infty$. Lastly, we investigate how adding a bounded potential influences the convergence of the shifted discrete Dirac operator in the norm resolvent sense.

Key words: discrete Dirac operator, Laurent operators, nonrelativistic limit, supersymetry

Obsah

Úvod

V této práci budeme studovat diskrétní Diracův operátor. Diracův operátor je zaveden mnoha různými způsoby na odlišných prostorech, jeho klíčová vlastnost však je, že jeho druhá mocnina je úzce svázána s Laplaceovým operátorem opět na příslušném prostoru.

V závislosti na prostoru je Laplaceův operátor $\triangle$ definován jako operátor obsahující nějakou formu druhé derivace podle jedné, či více proměnných. Podobně Diracův operátor D zpravidla obsahuje nějakou formu první derivace.

Jako příklad Diracova operátoru, jehož diskrétní analogií se budeme zabývat, uveďme pro prostorovou dimenzi 1 volný Diracův operátor D, který má popisovat volný relativistický elektron a který je definovaný v [6] na prvním Sobolevovu prostoru $H^1(\mathbb{R})$ následovně.

$$D = -i\hbar c\sigma_1 \frac{d}{dx} + \sigma_3 mc^2, \tag{1}$$

kde σ_1, σ_3 jsou Pauliho matice. Pro Laplaceův operátor definovaný jako $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ pak mezi Diracovým a Laplaceovým operátorem platí vztah

$$D^2 = -\hbar^2 c^2 \sigma_0 \triangle + \sigma_0 m^2 c^4,$$

což je analogie známého vztahu $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$, přičemž energii E odpovídá Diracův operátor D a druhé mocnině hybnosti p^2 odpovídá $-\hbar^2\sigma_0\triangle$. Uvažujeme σ_0 jako identickou matici 2×2.

My budeme zkoumat diskrétní Diracův operátor na prostoru direktního součtu nekonečných posloupností $\ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$. V jistém smyslu se na takovou situaci dá dívat jako na zjednodušení spojitého 1D případu z (1) takovým způsobem, že místo sledování hodnot funkcí na celé přímce se soustředíme pouze na spočetně mnoho uzlů. Dále jsou derivace nahrazeny konečnými dopřednými a zpětnými diferencemi, které jsou pomocí působení na bazické vektory v ℓ^2 definovány následovně

$$\begin{aligned} d^+ e_n &= -i(e_{n+1} - e_n), \\ d^- e_n &= -i(e_n - e_{n-1}). \end{aligned}$$

Diskrétní Diracův operátor je pak pomocí maticové notace zaveden jako

$$D_c = \begin{pmatrix} mc^2 & cd^- \\ cd^+ & -mc^2 \end{pmatrix}.$$

Podrobnosti ohledně této definice jsou v kapitole 2.

Konkrétně se budeme zabývat nerelativistickou limitou rezolventy diskrétního Diracova operátoru posunutého o klidovou energii mc^2, přesněji pro $\lambda \in \varrho(D_c - mc^2)$ a $c \to +\infty$ vyšetříme limitu z operátoru $(D_c - mc^2 - \lambda)^{-1}$ v topologii určené operátorovou normou, čemuž se budeme věnovat v kapitole 3. Motivací nám může být fakt, že pro zmíněnou spojitou verzi volného Diracova operátoru z (1) je tato problematika již podrobně vyšetřena například v [6]. Je tedy zajímavé pro porovnání zjistit, zda je v diskrétním případě situace analogická.

Kromě konvergence rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru nás bude zajímat i její Taylorův rozvoj, který budeme rozebírat v kapitole 4.

Poslední kapitola bude věnována otázce, jak se změní konvergence rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru, přidáme-li potenciál, neboli poruchu v podobě omezeného operátoru. Pro speciální třídu potenciálů navíc budeme schopni jistým způsobem získat Taylorův rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru i včetně poruchy.

Kapitola 1

Vybrané partie z teorie lineárních operátorů

1.1 Hilbertovy prostory

Uveďme definice zásadních pojmů charakterizujících Hilbertův prostor, což je úplný vektorový prostor se skalárním součinem. Hilbertovy prostory a jejich vlastnosti se budou hojně objevovat v průběhu celé této práce.

Definice 1 (Vektorový prostor)**.** *Mějme neprázdnou množinu V, těleso T, operaci $\oplus$ sčítání vektorů, operaci $\odot$ násobení vektoru prvkem z tělesa. Pak čtveřici $(V, T, \oplus, \odot)$ nazýváme vektorovým prostorem, jestliže množina V je uzavřená na sčítání vektorů $\oplus$, násobení vektorů $\odot$ číslem z tělesa a jestliže jsou splněny známé axiomy vektorového prostoru uvedené v [1] na straně 21.*

Definice 2 (Skalární součin)**.** *Mějme vektorový prostor $(V, T, \oplus, \otimes)$. Zobrazení $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow V$ se nazývá skalární součin, jestliže pro $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha \in T$ platí*

1. $\langle x, \alpha y + z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *a* $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Definice 3 (Úplný metrický prostor)**.** *Metrický prostor (X, ρ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost v X konverguje v topologii určené metrikou ρ.*

Definice 4. *Nechť $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ jsou Hilbertovy prostory. Prostor všech lineárních operátorů zobrazujících z $\mathcal{H}_1$ do $\mathcal{H}_2$ značíme $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

Definice 5. *Nechť $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ jsou Hilbertovy prostory. Lineární zobrazení $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ nazveme izomorfismem Hilbertových prostorů $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, jestliže A je bijekce a zachovává skalární součin. Takový operátor A také nazýváme unitárním operátorem.*

1.2 Omezené lineární operátory

Omezené lineární operátory mají příznivé vlastnosti a práce s nimi je zpravidla jednodušší než s operátory neomezenými. Jak lze vidět v několika následujících tvrzeních, omezené operátory mají v jistých směrech podobné vlastnosti jako konečněrozměrné matice, nebo dokonce čísla, což naši práci značně zpříjemní.

Definice 6. *Nechť X, Y jsou metrické prostory, A je lineární operátor zobrazující z X do Y. Pak normu operátoru A značíme* $\left\|A\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ *a je definována jako* $\left\|A\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} \left\|Ax\right\|_Y$*. Operátor A je omezený, je-li* $\left\|A\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$*. Prostor všech omezených lineárních operátorů zobrazujících z X do Y značíme* $B(X,Y)$*.* $A \in B(X,Y)$ *automaticky znamená, že operátor A je definovaný na celém prostoru X. Řekneme-li o operátoru, že je omezený, máme tím na mysli jeho příslušnost v* $B(X,Y)$*, tedy zejména i to, že je definovaný na celém X.*

Definice 7. *Nechť* $\mathcal{H}$ *je Hilbertův prostor,* $A \in B(\mathcal{H})$*.* A^* *nazeveme operátorem sdruženým s A, jestliže je pro* $\forall x, y \in \mathcal{H}$ *splněno* $\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle$*. Podrobnosti jsou uvedeny v [1].*

Definice 8. *Nechť* $\mathcal{H}$ *je Hilbertův prostor,* $A \in B(\mathcal{H})$*. Operátor A je hermitovský, jestliže* $A = A^*$*, neboli pro* $\forall x, y \in \mathcal{H}$ *platí* $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$*.*

Definice 9. *Nechť* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$*,* $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$*. Řekneme, že S a T jsou unitárně ekvivalentní, jestliže existuje izomorfismus Hilbertových prostorů* $V : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *tak, že* $S = VTV^{-1}$*.*

Tvrzení 1. *Nechť* $\mathcal{H}$ *je Hilbertův prostor,* $A, B \in B(\mathcal{H})$ *jsou hermitovské operátory. Pak i* $A + B$ *je hermitovský operátor.*

Důkaz tvrzení 1. Z definice pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$
$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle,$$

odkud

$$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle x, By\rangle = \langle x, (A+B)y\rangle.$$

Omezenost $A + B$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro operátorovou normu. □

Tvrzení 2. *Nechť X, Y jsou metrické prostory,* $A \in B(X,Y)$*. Pak pro* $\forall x \in X$ *platí*

$$\left\|Ax\right\|_Y \le \left\|A\right\|_{B(X,Y)} \left\|x\right\|_X .$$

Důkaz tvrzení 2. Pro $x = 0$ tvrzení zřejmě platí. Pro $x \neq 0$ je i $\left\|x\right\|_X \neq 0$ a $\frac{1}{\left\|x\right\|_X} x$ má normu rovnou jedné, odkud

$$\left\|Ax\right\|_Y = \left\|x\right\|_X \left\|A\left(\frac{1}{\left\|x\right\|_X} x\right)\right\|_Y \le \left\|x\right\|_X \left\|A\right\|_{B(X,Y)} .$$

□

Tvrzení 3. *Nechť X, Y, Z jsou metrické prostory,* $S \in B(Y,Z)$*,* $T \in B(X,Y)$*. Pak* $ST \in B(X,Z)$ *a* $\left\|ST\right\|_{B(X,Z)} \le \left\|S\right\|_{B(Y,Z)} \left\|T\right\|_{B(X,Y)}$ *.*

Důkaz tvrzení 3. Uvažujme libovolný vektor $x \in X$ takový, že $\left\|x\right\|_X = 1$, pak užitím odhadu z tvrzení 2 a definice normy operátoru získáváme

$$\left\|STx\right\|_Z \le \left\|S\right\|_{B(Y,Z)} \left\|Tx\right\|_Y \le \left\|S\right\|_{B(Y,Z)} \left\|T\right\|_{B(X,Y)} ,$$

tedy i

$$\left\|ST\right\|_{B(X,Z)} = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} \left\|STx\right\|_Z \le \left\|S\right\|_{B(Y,Z)} \left\|T\right\|_{B(X,Y)} .$$

□

Tvrzení 4. *Operace skládání konečně mnoha omezených operátorů na Banachově prostoru je spojitá ve všech argumentech naráz.*

Důkaz tvrzení 4. Nechť X je Banachův prostor. Důkaz provedeme pro složení dvou omezených operátorů, matematickou indukcí by se však dal jednoduše rozšířit pro $n \in \mathbb{N}$ operátorů. Uvažujeme operaci skládání $\circ$ jako

$$\circ: \ B(X) \times B(X) \to B(X) : U \times V \mapsto U \circ V.$$

Využijeme toho, že zobrazení je spojité $\iff$ převádí konvergentní posloupnosti na konvergentní. Uvažujme tedy $(U_n)_{n=1}^{\infty}, (V_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(X)$ tak, že $U_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} U$, $V_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} V$ v $B(X)$. Potom

$$\begin{aligned}\left\|U_nV_n - UV\right\|_{B(X)} &\leq \left\|U_n(V_n - V)\right\|_{B(X)} + \left\|(U_n - U)V\right\|_{B(X)} \leq \left\|U_n\right\|_{B(X)} \left\|V_n - V\right\|_{B(X)} + \\ &+ \left\|U_n - U\right\|_{B(X)} \left\|V\right\|_{B(X)}.\end{aligned}$$

Z konvergence U_n a V_n v $B(X)$ víme, že $\left\|U_n - U\right\|_{B(X)}$ i $\left\|V_n - V\right\|_{B(X)}$ jdou limitně pro $n \to \infty$ k nule. Dále $V \in B(X)$, tedy $\left\|V\right\|_{B(X)} \leq \infty$ z definice. Nakonec využijeme poznatku, že konverguje-li posloupnost v normovaném prostoru, pak je jistě omezená. Tím získáváme omezenost $\left\|U_n\right\|_{B(X)}$, čímž je důkaz hotov.

□

Tvrzení 5. *Nechť $A, B \in B(\mathcal{H})$ jsou bijekce na $\mathcal{H}$. Pak $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Důkaz tvrzení 5. A, B jsou bijekce, tedy existují jejich inverze. Složení dvou bijekcí je taktéž bijekce. Stačí ověřit, že $B^{-1}A^{-1}$ je levou i pravou inverzí.

$$\begin{aligned}ABB^{-1}A^{-1} &= AA^{-1} = I_{\mathcal{H}},\\ B^{-1}A^{-1}AB &= BB^{-1} = I_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

□

Tvrzení 6. *Nechť X je normovaný vektorový prostor, $V \subset X$, $\mathcal{Y}$ Banachův prostor, $A \in B(V, \mathcal{Y})$. Je-li $\overline{V} = X$, pak existuje jediné $\hat{A} \in B(X, \mathcal{Y})$ rozšíření operátoru A. Přitom $\left\|\hat{A}\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} = \left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})}$.*

Důkaz tvrzení 6. Pro důkaz existence chceme dokázat, že pro libovolné $x \in X$ jsme schopni definovat $\hat{A}x$ způsobem vyhovujícím znění věty. Z hustoty V pro každé libovolné $x \in X$ existuje $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$ tak, že $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Tím pádem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Z odhadu

$$\left\|Ax_n - Ax_m\right\| \leq \left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \left\|x_n - x_m\right\|$$

je $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ taktéž cauchyovská, odkud díky úplnosti $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \in \mathcal{Y}$ a pokládáme $\hat{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$.
Je potřeba ověřit, že $\hat{A}x$ závisí pouze na x, nikoliv na volbě $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Uvažujme další posloupnost $(\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$. Pak

$$\left\|A\tilde{x}_n - Ax_n\right\| \leq \left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \left\|\tilde{x}_n - x_n\right\|,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} A\tilde{x}_n = \hat{A}x$.
Poznamenejme, že pro $\forall x \in V$ lze brát pro definici $\hat{A}x$ konstantní posloupnost $(x)_{n=1}^{\infty}$, odkud máme

$\lim_{n\to\infty} Ax = Ax = \hat{A}x$. Odsud jistě $\hat{A}\big|_V = A$.
Na závěr vyšetřeme operátorovou normu $\hat{A}$. Z toho, že se jedná o rozšíření A platí

$$\left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \leq \left\|\hat{A}\right\|_{B(X,\mathcal{Y})}.$$

Pro ukázaní opačné nerovnosti uvažujme libovolné $x \in X$ a k němu konvergující posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$. Pak $\lim_{n\to\infty} \left\|x_n\right\| = \left\|x\right\|$ a ze spojitosti normy

$$\left\|\hat{A}x\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} Ax_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|Ax_n\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \left\|x_n\right\| = \left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \left\|x\right\|,$$

odkud

$$\left\|A\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} \geq \left\|\hat{A}\right\|_{B(X,\mathcal{Y})}.$$

Dokažme jednoznačnost. Uvažujme $\hat{A}$ jako v důkazu existence a navíc další rozšíření operátoru A na celý prostor X, které označíme $\tilde{A}$ a které je z předpokladů omezené a má stejnou normu jako $\hat{A}$.

Předpokládejme, že $\exists x \in X$ tak, že $\hat{A}x \neq \tilde{A}x$. Z hustoty V plyne, že existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$ taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pak protože $\tilde{A}, \hat{A}$ jsou rozšíření A, platí, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $Ax_n = \tilde{A}x_n = \hat{A}x_n$, odkud díky spojitosti operátorové normy a operátorů $\tilde{A}, \hat{A}$

$$\left\|\hat{A}x - \tilde{A}x\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} = \left\|\hat{A}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) - \tilde{A}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} = \lim_{n\to\infty} \left\|\hat{A}x_n - \tilde{A}x_n\right\|_{B(X,\mathcal{Y})} = 0,$$

což je spor s předpokladem $\hat{A}x \neq \tilde{A}x$. □

Poznámka. *Splňuje-li operátor A předpoklady tvrzení* 6*, pak jeho rozšíření $\hat{A}$ budeme často značit pouze A. Důvodem je existence právě jednoho rozšíření operátoru A na celý prostor X.*

Poznámka. *Řekneme-li o operátoru A na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, že je omezený, budeme tím mít na mysli $A \in B(\mathcal{H})$, tedy že je jeho operátorová norma konečná a že operátor je všude definovaný.*

Tvrzení 7. *Nechť X je Banachův prostor, $A \in B(X)$, $\left\|A\right\|_{B(X)} < 1$. Pak existuje $(\mathbb{I} - A)^{-1} \in B(X)$ a platí $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.*

Důkaz tvrzení 7. Poznamenejme nejprve, že $A^0 = \mathbb{I}$. Pak $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konverguje v $B(X)$, neboť

$$\left\|\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\|_{B(X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|A\right\|_{B(X)}^k = \frac{1}{1 - \left\|A\right\|_{B(X)}}.$$

Nyní ukážeme, že právě výraz $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ je levá a pravá inverze $(\mathbb{I} - A)$. Využitím především tvrzení 4 totiž platí

$$(\mathbb{I} - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{I} - A) \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} A^k = \lim_{N\to\infty} \left[(\mathbb{I} - A) \sum_{k=0}^{N} A^k\right] = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{N} A^k - \sum_{k=1}^{N+1} A^k\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{N} A^k (\mathbb{I} - A)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (\mathbb{I} - A),$$

tedy $(\mathbb{I} - A)$ komutuje se sumou a v prostoru $B(X)$ je

$$(\mathbb{I} - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{I} - A) \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} A^k = \lim_{N\to\infty} \left[(\mathbb{I} - A) \sum_{k=0}^{N} A^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = \mathbb{I}.$$

Nakonec vyšetřeme normu operátoru $(\mathbb{I} - A)^{-1}$.

$$\left\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\right\|_{B(X)} = \left\|\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\|_{B(X)} \leq \frac{1}{1 - \left\|A\right\|_{B(X)}} \leq \infty.$$

□

Definice 10. *Nechť X je Banachův prostor, $A \in B(X)$ je hustě definovaný uzavřený operátor. Pak rezolventní množina je množina všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které operátor $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ existuje a je omezený. Značíme $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} = R_A(\lambda)$.*

Tvrzení 8 (1. rezolventní identita)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $A \in B(X)$, $\lambda, \mu \in \varrho(A)$. Pak platí $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$.*

Důkaz tvrzení 8. Je-li $\lambda \in \varrho(A)$, potom je $(A - \lambda\mathbb{I})$ prostý, tj. $\ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}$. Uvažujme libovolné $x \in X$, pak

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda\mathbb{I})\,(R_A(\lambda) - R_A(\mu) - (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu))\,x \\
&= \mathbb{I}x - \left[A - \mu\mathbb{I} - (\lambda - \mu)\mathbb{I}\right] R_A(\mu)x - (\lambda - \mu)\mathbb{I}R_A(\mu)x \\
&= \mathbb{I}x - \mathbb{I}x + (\lambda - \mu)\mathbb{I}R_A(\mu)x - (\lambda - \mu)\mathbb{I}R_A(\mu)x = 0.
\end{aligned}$$

Rovnost platí pro každé x, z prostoty $(A - \lambda\mathbb{I})$ je nutně $(R_A(\lambda) - R_A(\mu) - (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu))$ nulový operátor. □

Tvrzení 9 (2. rezolventní identita)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $A, B \in B(X)$, $\lambda \in \varrho(A) \bigcap \varrho(B)$. Pak $R_A(\lambda) - R_B(\lambda) = R_A(\lambda)\,(B - A)\,R_B(\lambda)$.*

Důkaz tvrzení 9. Pro $\lambda \in \varrho(A) \bigcap \varrho(B)$ lze psát

$$\begin{aligned}
&R_A(\lambda)\,(B - A)\,R_B(\lambda) = R_A(\lambda)\,(B - \lambda + \lambda - A)\,R_B(\lambda) \\
&= R_A(\lambda)\,(B - \lambda)\,R_B(\lambda) + R_A(\lambda)\,(\lambda - A)\,R_B(\lambda) = R_A(\lambda)\mathbb{I} - \mathbb{I}R_B(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 10. *Mějme Hilbertův prostor $\mathcal{H}$, operátor $A \in B(\mathcal{H})$ a $A_\epsilon \in B(\mathcal{H})$, který závisí na ϵ. Nechť*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left\|A_\epsilon - A\right\|_{B(\mathcal{H})} = 0$$

a $A^{-1} \in B(\mathcal{H})$. Pak pro dost malá ϵ platí, že existuje $A_\epsilon^{-1} \in B(\mathcal{H})$. Přitom rychlost konvergence v ϵ je stejná jako pro $\left\|A_\epsilon - A\right\|_{B(\mathcal{H})}$.

Důkaz tvrzení 10.

$$A_\epsilon = A + (A_\epsilon - A) = A\left(\mathbb{I} + A^{-1}(A_\epsilon - A)\right),$$

kde na operátor $\mathbb{I}+A^{-1}(A_\epsilon-A)$ lze užít tvrzení 7, neboť výraz $A^{-1}(A_\epsilon-A)$ je z předpokladů v operátorové normě ostře menší než 1 pro ϵ dost malá. Obdržíme

$$\left(\mathbb{I}+A^{-1}(A_\epsilon-A)\right)^{-1}=\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A^{-1}(A_\epsilon-A)\right)^n\in B(\mathcal{H}).$$

Z předchozího pozorování, předpokladu existence $A^{-1}\in B(\mathcal{H})$ a tvrzení 5 plyne, že existuje operátor $A_\epsilon^{-1}\in B(\mathcal{H})$ a

$$A_\epsilon^{-1}=\left(\mathbb{I}+A^{-1}(A_\epsilon-A)\right)^{-1}A^{-1}.$$

Nyní k části tvrzení o rychlosti konvergence.

$$\begin{aligned}&\left\|A^{-1}-A_\epsilon^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\le\left\|\mathbb{I}-\left(\mathbb{I}+A^{-1}(A_\epsilon-A)\right)^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|A^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}=\left\|\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A^{-1}(A_\epsilon-A)\right)^n\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|A^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\\&\le\left\|A^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|A^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|A_\epsilon-A\right\|_{B(\mathcal{H})}\right)^n\le\left\|A^{-1}\right\|^2_{B(\mathcal{H})}\frac{\left\|A_\epsilon-A\right\|_{B(\mathcal{H})}}{1-\left\|A^{-1}\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|A_\epsilon-A\right\|_{B(\mathcal{H})}}\\&\le 2\left\|A^{-1}\right\|^2_{B(\mathcal{H})}\left\|A_\epsilon-A\right\|_{B(\mathcal{H})},\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost získáváme z předpokladu, že pro dost malá ϵ platí $\left\|A_\epsilon-A\right\|_{B(\mathcal{H})}\le\frac{1}{2}$.

□

1.3 Operátory násobení v prostoru $L^2([a,b])$

V této kapitole i v celé práci nadále budeme uvažovat pro $p\ge 1$ prostor p-integrabilních funkcí $L^p([a,b],d\mu)$ na intervalu $[a,b]$ s klasickou Lebesgueovou mírou μ , které budeme zkráceně značit $L^p([a,b])$. Speciální případ lineárních operátorů jsou operátory násobení integrabilní funkcí. Okolo nich je vybudovaná užitečná teorie, které budeme využívat. Následující tvrzení nám budou nápomocná například při vyšetřování konvergence rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru nebo při hledání spektra.

Nadále bude operátorem násobení funkcí f myšlen operátor

$$M_f:L^2([a,b])\longrightarrow L^2([a,b]):g(x)\mapsto f(x)g(x).$$

Definiční obor operátoru M_f je $\mathrm{Dom}(M_f)=\left\{g\in L^2([a,b]),M_fg\in L^2([a,b])\right\}$.

Tvrzení 11 (Norma operátoru násobení)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f\in L^\infty([a,b])$, $M_f\in B\left(L^2([a,b])\right)$ je operátor násobení funkcí f. Pak*

$$\left\|M_f\right\|_{B(L^2([a,b]))}=\left\|f\right\|_\infty=\inf\left\{c>0,\ \mu(\{t\in[a,b]|\,|f(t)|>c\})=0\right\}.$$

Důkaz tvrzení 11. Je-li $\left\|f\right\|_\infty=0$, pak je i $f=0$ skoro všude, tím pádem M_f je operátor násobení nulou skoro všude a jeho norma je jistě = 0. Uvažujme tedy $\left\|f\right\|_\infty\ne 0$ Chceme dokázat dvě nerovnosti.

$$\left\|M_f\right\|_{B(L^2([a,b]))}=\sup_{\|g\|_{L^2([a,b])}=1}\left\|fg\right\|_{L^2([a,b])}\le\sup_{\|g\|_{L^2([a,b])}=1}\left\|\left(\left\|f\right\|_\infty g\right)\right\|_{L^2([a,b])}=\left\|f\right\|_\infty$$

To znamená, že $\left\|f\right\|_\infty$ je omezovací konstanta operátoru M_f. Ukážeme, že je to optimální omezovací konstanta.

Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Budeme hledat $0 \neq g \in L^2([a,b])$ tak, že

$$\left\|M_f\right\|_{B\left(L^2([a,b])\right)} \geq \frac{\left\|fg\right\|_{L^2([a,b])}}{\left\|g\right\|_{L^2([a,b])}} \geq \left\|f\right\|_\infty - \varepsilon.$$

Ukážeme, že vhodná volba je funkce χ_{A_ε}, kterou definujme jako charakteristickou funkci množiny $A_\varepsilon = \left\{t \in [a,b] \middle| \, |f(t)| \geq \left\|f\right\|_\infty - \varepsilon\right\}$. Poznamenejme, že je-li $\left\|f\right\|_\infty \neq 0$, pak z jeho definice jistě platí, že pro $\varepsilon > 0$ je $\mu(A_\varepsilon) > 0$. Potom tedy lze psát

$$\left\|M_f\right\|_{B(L^2([a,b]))} \geq \frac{\left\|f\chi_{A_\varepsilon}\right\|_{L^2([a,b])}}{\left\|\chi_{A_\varepsilon}\right\|_{L^2([a,b])}} \geq \frac{\left\|\left(\left\|f\right\|_\infty - \varepsilon\right)\chi_{A_\varepsilon}\right\|_{L^2([a,b])}}{\left\|\chi_{A_\varepsilon}\right\|_{L^2([a,b])}} = \left(\left\|f\right\|_\infty - \varepsilon\right)\frac{\sqrt{\mu(A_\varepsilon)}}{\sqrt{\mu(A_\varepsilon)}} = \left\|f\right\|_\infty - \varepsilon,$$

což platí pro libovolně malá ε a jak jsme zmínili, uvažujeme Lebesgueovu míru μ, důkaz i tvrzení by však vypadalo stejně i pro obecnou konečnou míru μ na $[a,b]$. □

Poznámka. *V průběhu práce někdy budeme zaměňovat značení operátoru násobení funkcí přímo za příslušnou funkci, tj. $M_f \equiv f$, přičemž z kontextu bude zřejmé, o jaký objekt se jedná. Například někdy budeme psát, že norma operátoru násobení funkcí $f \in L^\infty([a,b])$ je*

$$\left\|M_f\right\|_{B(L^2([a,b])} = \left\|f\right\|_{B(L^2([a,b])} = \left\|f\right\|_\infty,$$

kdy v poslední rovnici jsme užili tvrzení 11 *a je zřejmé, že objekt v normě $\left\|\cdot\right\|_{B(L^2)}$ je operátor násobení, zatímco objekt v normě $\left\|\cdot\right\|_\infty$ je funkce.*

Poznámka. *Později budeme pracovat především na prostoru kvadraticky integrabilních funkcí $L^2([0,2\pi])$. Pro zkrácení někdy v průběhu práce budeme psát pouze L^2, tím budeme mít na mysli právě $L^2([0,2\pi])$.*

Tvrzení 12. *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, $M_f \in B\left(L^2([a,b])\right)$ jako v tvrzení* 11. *Pak*

$$\sigma(M_f) = \left\{f(t), t \in [a,b]\right\}.$$

Důkaz tvrzení 12. Uvažujme předpoklady tvrzení, pro (obecnou) míru μ na $[a,b]$ definujeme podstatný obor hodnot funkce f jako

$$R_{ess}(f) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \mu\left(\left\{t \in [a,b], \left|f(t) - \lambda\right| < \epsilon\right\}\right) \neq 0 \text{ pro každé } \epsilon > 0\right\}.$$

Zkoumejme, kdy existuje všude definovaná a omezená inverze M_f. Pro $g \in \operatorname{Dom}\left((M_f - \lambda)^{-1}\right)$ je jistě

$$\left(M_f - \lambda\right)^{-1} g(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda} g(x),$$

kde

$$\operatorname{Dom}\left((M_f - \lambda)^{-1}\right) = \left\{g \in L^2([a,b], d\mu), \tfrac{1}{f-\lambda} g \in L^2([a,b], d\mu)\right\},$$

přičemž požadujeme omezenost operátoru $(M_f - \lambda)^{-1}$, ze které bude plynout i

$$\mathrm{Dom}\left((M_f - \lambda)^{-1}\right) = L^2\left([a,b], d\mu\right).$$

Z tvrzení 11 je pro $\epsilon > 0$ podmínka

$$\left\|(M_f - \lambda)^{-1}\right\|_{L^2([a,b],d\mu)} = \left\|\tfrac{1}{f-\lambda}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}$$

ekvivalentní podmínce $\mu\left(\left\{t \in [a,b], \left|f(x) - \lambda\right| < \epsilon\right\}\right) = 0$, odkud

$$\begin{aligned}\varrho(M_f) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \exists \epsilon > 0 : \mu\left(t \in [a,b], \left|f(x) - \lambda\right| < \epsilon\right) = 0\right\},\\ \sigma(M_f) &= R_{ess}(f).\end{aligned}$$

Speciálně pro Lebesgueovu míru μ a spojitou funkci f je $\sigma(M_f) = R_{ess}(f) = f([a,b])$. □

1.4 Laurentovy operátory

Operátory na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$, jejichž matice vzhledem ke standardní ortonormální bázi má hlavní i všechny vedlejší diagonály konstantní, se nazývají Laurentovy operátory. Vyšetřování takových operátorů na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ lze převést na studium operátorů násobení funkcí na prostoru $L^2([0,2\pi])$, kde můžeme aplikovat teorii z kapitoly 1.3. Jinak řečeno každému operátoru na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$, jehož matice má konstantní diagonály, jednoznačně přiřadíme operátor násobení funkcí na prostoru $L^2([0,2\pi])$. Postupovat budeme následovně.

V prostoru $L^2[0,2\pi]$ uvažujme ON bázi $\chi = (f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}|\ n \in \mathbb{Z})$. Standardní ortonormální bázi prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ označme jako $\mathcal{M} = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, kde

$$[e_n]_i = \begin{cases} 1 & pro \quad i = n, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Zavedeme lineární operátor $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2[0,2\pi] : e_n \mapsto f_n$ zobrazující prvky ON báze $\ell^2(\mathbb{Z})$ na prvky ON báze $L^2[0,2\pi]$. Podobně $U^{-1} : L^2[0,2\pi] \mapsto \ell^2(\mathbb{Z}) : f_n \mapsto e_n$.

Tvrzení 13. *Operátor U je izomorfismus Hilbertových prostorů zobrazující z $\ell^2(\mathbb{Z})$ do $L^2([0,2\pi])$.*

Důkaz tvrzení 13. Lineární operátor U jsme definovali pomocí působení na bazické vektory e_n. Z linearity je zřejmé, že pro $x \in \mathrm{span}\left\{e_n, n \in \mathbb{Z}\right\}$, $x = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$ je $Ux = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n f_n$. Tím máme U definované na hustém podprostoru ℓ^2.

Uvažujme $x, y \in \ell^2$, tj.

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n = \lim_{N\to+\infty} x_N, \tag{1.1}$$

$$y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e_n = \lim_{N\to+\infty} y_N, \tag{1.2}$$

kde $x_N = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$, $y_N = \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e_n$, přičemž $(\alpha_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, (\beta_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in \ell^2$. Pro takto zavedené x_N, y_N platí z ortonormality bází

$$\langle Ux_N, Uy_N\rangle_{L^2} = \langle \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n f_n, \sum_{n=-N}^{N} \beta_n f_n\rangle_{L^2} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\alpha_n}\beta_n = \langle \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n, \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e_n\rangle_{\ell^2} = \langle x_N, y_N\rangle_{\ell^2}, \quad (1.3)$$

což znamená zachování skalárního součinu na span$\left\{e_n, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Užitím tvrzení 6 lze U spojitě a jednoznačně rozšířit na ℓ^2. Pro x jako z rovnice (1.1) je po spojitém rozšíření

$$Ux = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n f_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n f_n,$$

tedy získáváme operátor definovaný na celém ℓ^2, přičemž pro něj užíváme stejné značení U a rovnost

$$\langle Ux, Uy\rangle_{L^2} = \langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_n}\beta_n \quad (1.4)$$

je tak pouze limitním přechodem rovnosti (1.3) pro $N \to +\infty$, což dává dobrý smysl, neboť skalární součin je spojitý v obou argumentech naráz. Navíc konečnost všech třech výrazů z rovnosti (1.4) plyne z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti. Pro $x = y$ nám rovnice (1.4) říká, že U je izometrie, což je postačující podmínka pro prostotu U.

Surjektivita je zřejmá, neboť vzor libovolného $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n f_n \in L^2$ vzhledem k U je právě $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n$.

Bijektivita a zachování skalárního součinu jsou právě podmínky pro to, aby U byl izomorfismus Hilbertových prostorů. Nyní můžeme říkat, že operátor U je unitární. □

Tvrzení 14. *Nechť $S, T \in B(\ell^2)$ jsou Laurentovy operátory, $X, Y \in B(\ell^2)$ jsou jim unitárně ekvivalentní operátory násobení integrabilní funkcí, tedy $X = USU^{-1}$, $Y = UTU^{-1} \in B(L^2)$. Pak spolu operátory S, T komutují.*

Důkaz tvrzení 14. X, Y jsou operátory násobení funkcemi $X(t), Y(t)$ na L^2. Pak pro libovolné $f \in L^2$ je $XYf(t) = XY(t)f(t) = X(t)Y(t)f(t) = Y(t)X(t)f(t) = YX(t)f(t) = YXf(t)$. Je-li $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n f_n(t)$, pak $U^{-1}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n =: a$. Zřejmě platí

$$STa = U^{-1}XUU^{-1}YUa = U^{-1}XYf(t) = U^{-1}YXf(t) = U^{-1}YUU^{-1}XUa = TSa.$$

Jelikož díky bijektivitě U libovolné $f \in L^2$ znamená i libovolné $a \in \ell^2$, získáváme tím kýženou komutativitu S a T. □

Tuto podkapitolu zakončíme tvrzením, které v jistém smyslu ospravedlňuje přístup převedení studia operátorů na $\ell^2(\mathbb{Z})$ na studium operátorů násobení. Říká totiž, že unitárně ekvivalentní operátory mají stejné spektrální vlastnosti. Poznamenejme ještě, že v práci často píšeme zkráceně ℓ^2 místo $\ell^2(\mathbb{Z})$ a myslíme tím právě posloupnosti s indexy z $\mathbb{Z}$, pro které suma druhých mocnin absolutních hodnot jejich členů je konečná.

Tvrzení 15. *Nechť U je izomorfismus Hilbertových prostorů $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$. Nechť $A \in B(\mathcal{H}_1)$, pak pro $UAU^{-1} \in B(\mathcal{H}_2)$ platí $\varrho(A) = \varrho(UAU^{-1})$.*

Důkaz tvrzení 15. Platí

$$UAU^{-1} - \lambda\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2} = U(A - \lambda\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1})U^{-1},$$

z omezenosti operátorů a bijektivity U plyne, že $A - \lambda\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1}$ je bijektivní z $\mathcal{H}_1$ do $\mathcal{H}_2$ právě tehdy, když je $UAU^{-1} - \lambda\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2}$ bijektivní z $U(\mathrm{Dom}A) = \mathcal{H}_2$ do $\mathcal{H}_1$, tedy $\lambda \in \varrho(A)$ právě tehdy, když $\lambda \in \varrho(UAU^{-1})$. □

1.5 Lineární operátory na direktním součtu Hilbertových prostorů

Diskrétní Diracův operátor je definován na direktním součtu Hilbertových prostorů. Studování takových operátorů obnáší jisté, především technické, potíže. Následující tvrzení nám pomohou v různých směrech tyto potíže vyřešit.

Definice 11. *Uvažujme Hilbertovy prostory $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$. Jejich direktní součet je množina*

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2 \right\}$$

společně se skalárním součinem

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \mapsto \langle x, \hat{x} \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y, \hat{y} \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

tedy $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle x, \hat{x} \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y, \hat{y} \rangle_{\mathcal{H}_2}.$

Důsledek 1. *Pro indukovanou normu na direktním součtu Hilbertových prostorů $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ platí*

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y, y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \|x\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|y\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

odkud

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \sqrt{\|x\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|y\|^2_{\mathcal{H}_2}}.$$

Poznámka. *Jak již bylo zmíněno, budeme pracovat s operátory, které mají za definiční obor prostor $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Uvažujme lineární operátor $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$. Jeho působením na $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ získáme*

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Důvodem pro tuto notaci je mimo jiné následující pozorování, které je v hlubších detailech uvedeno v [5]. *Pro každý operátor $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ existují $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tak, že U lze reprezentovat jako operátorovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, pro kterou platí*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 16 (Odhad normy operátorové matice)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor a $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})$ jsou omezené operátory. Pak platí*

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\|_{B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})} \leq \|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|B\|_{B(\mathcal{H})} + \|C\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})}.$$

Důkaz tvrzení 16. Začněme úpravou výrazu, které následně využijeme. Předpokládejme, že $f, g \in \mathcal{H}$.

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \left\| \begin{pmatrix} Af + Bg \\ Cf + Dg \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \sqrt{\left\| \left(Af + Bg\right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\| \left(Cf + Dg\right) \right\|_{\mathcal{H}}^2}$$
$$\overset{(a)}{\leq} \left\| \left(Af + Bg\right) \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| \left(Cf + Dg\right) \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|C\|_{B(\mathcal{H})} \right) \|f\|_{\mathcal{H}} + \left(\|B\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})} \right) \|g\|_{\mathcal{H}}$$
$$\overset{(b)}{\leq} \sqrt{\left(\|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|C\|_{B(\mathcal{H})} \right)^2 + \left(\|B\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})} \right)^2} \sqrt{\|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g\|_{\mathcal{H}}^2}$$
$$\overset{(a)}{\leq} \left(\|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|B\|_{B(\mathcal{H})} + \|C\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})} \right) \|(f, g)^T\|_{\mathcal{H}},$$

kde v nerovnostech (a) užíváme pro $x, y > 0$ $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$ a v nerovnosti (b) jsme užili Cauchy-Schwarzovu nerovnost na $\mathbb{C}^2$. Užitím výše získané nerovnosti získáváme

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\|_{B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})} = \sup_{\|(f,g)^T\|=1} \left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \leq \sup_{\|(f,g)^T\|=1} \left(\|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|B\|_{B(\mathcal{H})} + \right.$$
$$\left. + \|C\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})} \right) \|(f, g)^T\|_{\mathcal{H}} = \|A\|_{B(\mathcal{H})} + \|B\|_{B(\mathcal{H})} + \|C\|_{B(\mathcal{H})} + \|D\|_{B(\mathcal{H})}.$$

□

Tvrzení 17. *Mějme funkci $f_\epsilon(t)$, tj. funkci s parametrem ϵ a proměnnou $t \in [0, 2\pi]$. Nechť od jisté hranice $M > 0$ platí $(\forall \epsilon < M)\left(f_\epsilon(\cdot) \in L^2([0, 2\pi])\right)$.*

Dále nechť $f_\epsilon(t)$ lze v $\epsilon = 0$ pro $\forall t \in [0, 2\pi]$ rozvinout f do řady

$$f_\epsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\epsilon^n = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\epsilon^n,$$

kde $\exists G, L > 0$ tak, že $\|a_n\|_\infty \leq GL^n$. Nakonec nechť $M_f \in B\left(L^2([0, 2\pi])\right)$ je operátor násobení funkcí $f_\epsilon(t)$.
Potom, označíme-li $f_\epsilon^N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n\epsilon^n$ pro $\forall N \in \mathbb{N}_0$, platí

$$\left\| M_f - M_{f_\epsilon^N} \right\|_{B(L^2([0,2\pi]))} \leq GL^{N+1}\epsilon^{N+1} \overset{\epsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Důkaz tvrzení 17. Odhadujme pro $\epsilon < L$

$$\left\| M_f - M_{a_0} - \textstyle\sum_{n=1}^N M_{a_n}\epsilon^n \right\|_{B(L^2([0,2\pi]))} = \left\| \textstyle\sum_{n=N+1}^\infty M_{a_n}\epsilon^n \right\|_{B(L^2([0,2\pi]))} \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \epsilon^n \left\| M_{a_n} \right\|_{B(L^2([0,2\pi]))}$$
$$\leq G \sum_{n=N+1}^{\infty} (\epsilon L)^n = G\frac{(\epsilon L)^{N+1}}{1 - \epsilon L} \leq 2GL^{N+1}\epsilon^{N+1}$$

pro $\epsilon L \leq \frac{1}{2}$. Část s limitou $\epsilon \to 0+$ je zřejmá. □

Tvrzení 18. *Mějme operátorovou matici*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f^{(11)} & f^{(12)} \\ f^{(21)} & f^{(22)} \end{pmatrix} \in B(L^2([0, 2\pi]) \oplus L^2([0, 2\pi])),$$

kde všechny prvky $f^{(ij)} = f_\epsilon^{(ij)}(t)$ *operátorové matice přesně splňují předpoklady předchozí věty, tj. zejména*

$$f_\epsilon^{(ij)}(t) = a_0^{(ij)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(ij)}(t)\epsilon^n,$$
$$\left\|a_n^{(ij)}(t)\right\|_\infty \leq G^{(ij)}\left(L^{(ij)}\right)^n.$$

Označme dále

$$\mathbb{M}_{F_\epsilon^N} = \begin{pmatrix} a_0^{(11)} & a_0^{(12)} \\ a_0^{(21)} & f_0^{(22)}a \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{N} \epsilon^n \begin{pmatrix} a_n^{(11)} & a_n^{(12)} \\ a_n^{(21)} & a_n^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Pak pro $\forall N \in \mathbb{N}_0$ *existují kladné konstanty* $G, L > 0$ *tak, že platí*

$$\left\|\mathbb{M} - \mathbb{M}_{F_\epsilon^N}\right\|_{B(L^2([0,2\pi]\oplus[0,2\pi]))} \leq 2GL^{N+1}\epsilon^{N+1}. \tag{1.5}$$

Důkaz tvrzení 18. Uvažujme fixní $N \in \mathbb{N}_0$ a hledejme konstanty G, L vyhovující znění věty. Z předpokladů věty jsou s každou funkcí $f^{(ij)}$ spjaté konstanty $G^{(ij)}, L^{(ij)} > 0$ tak, že pro členy jejího rozvoje platí $\left\|a_n^{(ij)}\right\|_\infty \leq G^{(ij)}\left(L^{(ij)}\right)^n$. Využijeme odhadu dle tvrzení 16 a předpokladů z předchozí věty pro $f^{(ij)}$. Zapišme tedy levou stranu v (1.5) maticově

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix} f^{(11)} - a_0^{(11)} - \sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(11)} & f^{(12)} - a_0^{(12)} - \sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(12)} \\ f^{(21)} - a_0^{(21)} - \sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(21)} & f^{(22)} - a_0^{(22)} - \sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(22)} \end{pmatrix}\right\|_{B(L^2([0,2\pi]\oplus[0,2\pi]))} \\
&\leq \left(\left\|f^{(11)} - a_0^{(11)} - \textstyle\sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(11)}\right\|^2_{B(L^2([0,2\pi]))} + \left\|f^{(12)} - a_0^{(12)} - \textstyle\sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(12)}\right\|^2_{B(L^2([0,2\pi]))} + \right. \\
&\left. + \left\|f^{(21)} - a_0^{(21)} - \textstyle\sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(21)}\right\|^2_{B(L^2([0,2\pi]))} + \left\|f^{(22)} - a_0^{(22)} - \textstyle\sum_{n=1}^N \epsilon^n a_n^{(22)}\right\|^2_{B(L^2([0,2\pi]))}\right)^{1/2} \\
&\leq 2\left(\epsilon^{2N+2}\left[G^{11}\left(L^{(11)}\right)^{2N+2} + G^{12}\left(L^{(12)}\right)^{2N+2} + G^{21}\left(L^{(21)}\right)^{2N+2} + G^{22}\left(L^{(22)}\right)^{2N+2}\right]\right)^{1/2} \\
&\leq 2GL^{N+1}\epsilon^{N+1}
\end{aligned}$$

kde $G = 2\sqrt{\max\{G^{(11)}, G^{(12)}, G^{(21)}, G^{(22)}\}}$ a $L = \max\{L^{(11)}, L^{(12)}, L^{(21)}, L^{(22)}\}$. Poznamenejme, že G, L lze brát i libovolně větší, než je právě to námi zvolené, odhady budou stále platit. □

Tvrzení 19. *Nechť* A, $B \in B(\mathcal{H})$, *pak platí následující rovnosti pro inverze operátorových matic horního, respektive dolního trojúhelníkového tvaru s identitami na diagonále.*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & A \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -A \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \ a \ \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ B & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -B & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Navíc jsou tyto maticové operátory vždy bijektivní.

Důkaz tvrzení 19. Důkaz provedeme korektně pouze pro první z matic, pro druhou vše plyne analogicky. Dokážeme, že $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & A \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$ je bijekce, odkud bude zajištěna existence inverze. Prostota plyne z

$$\ker(\mathbb{A}) = \{(x,y)^T \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \big| \mathbb{A}\left((x,y)^T\right) = (x + Ay, y) = (0,0)^T\} = \{(0,0)^T\}.$$

Surjektivitu ověříme z definice. Mějme libovolné $u,\ v \in \mathcal{H}$, hledejme vzor $(x, y)^T$ při zobrazení $\mathbb{A}$

$$(u, v)^T = \mathbb{A}\left((x, y)^T\right) = (x + Ay, y)^T,$$

odkud $y = v$ a $x = u - Av$.

Omezenost operátoru $\mathbb{A}$ i jeho inverze získáme na základě tvrzení 16

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \pm A \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \right\|_{B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})} \leq K\left(2 + \|\pm A\|_{B(\mathcal{H})}\right) < +\infty$$

Závěrem pozorování je, že operátor $\mathbb{A} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ je bijekce a to, že předpis pro inverzi z tvrzení platí, je zřejmé z toho, že maticovým násobením inverze se samotným operátorem dostaneme identitu na $B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. □

Na následujícím tvrzení, které lze v obecnějším znění najít v [5], bude založena jedna z metod, kterou budeme užívat při vyšetřování konvergence rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru.

Tvrzení 20. *Mějme $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})$ a operátorovou matici*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}).$$

Pak pro $\lambda \notin \sigma(D)$ platí

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & B(D-\lambda)^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(\lambda) & 0 \\ 0 & D-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (D-\lambda)^{-1}C & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

kde $S_1(\lambda) = A - \lambda - B(D-\lambda)^{-1}C$ se nazývá Schurův doplněk operátoru $\mathcal{A}$.

Navíc $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D) = \sigma(S_1)$, kde $\sigma(S_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D), S_1 \text{ není bijektivní}\}$.

Kapitola 2

Diskrétní Diracův operátor a stanovení cílů práce

2.1 Zavedení operátorů v $B\left(\ell^2 \oplus \ell^2\right)$

Uvažujme prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$ posloupností a_n, kde $n \in \mathbb{Z}$. Označme standardní ortonormální bázi v $\ell^2(\mathbb{Z})$ jako $\mathcal{M} = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, kde

$$[e_n]_i = \begin{cases} 1 & pro \quad i = n, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Na něm definujeme lineární operátory d^+, $d^- \in \mathcal{L}(\ell^2)$ pomocí jejich působení na prvky z báze následovně

$$\begin{aligned} d^- e_n &= -i(e_n - e_{n-1}), \\ d^+ e_n &= -i(e_{n+1} - e_n). \end{aligned}$$

Dále definujeme diskrétní Laplaceův operátor $H \in \mathcal{L}(\ell^2)$ jako

$$H = \frac{1}{2m} d^+ d^-,$$

kde $m > 0$ je konstanta, hmotnost.

V této práci budeme mnohokrát potřebovat spojitost operátorů d^+ a d^-, z čehož mimo jiné plyne i spojitost operátorů d^+d^- a d^-d^+. Vyslovme tedy tvrzení.

Tvrzení 21 (Korektnost a spojitost d^+, d^-)**.** *Operátory d^+, d^- jsou omezené a lze je z linearity a spojitosti rozšířit na celý prostor ℓ^2.*

Důkaz tvrzení 21. Je zřejmé, že z definice d^+, d^- pomocí působení na jednotlivé bazické vektory jsou z linearity operátory d^+, d^- dobře definované na celé množině $\operatorname{span}\{e_n \big| \, n \in \mathbb{Z}\}$, která je navíc hustá v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ukážeme-li omezenost operátorů d^+, d^- na $\mathcal{A} = \operatorname{span}\{e_n \big| \, n \in \mathbb{Z}\}$, pak z tvrzení 6 plyne existence jednoznačných rozšíření operátorů d^+, d^- z $\mathcal{A}$ na $\overline{\mathcal{A}} = l^2(\mathbb{Z})$, která jsou navíc spojitá a zachovávají normu.

Vezměme libovolné $x \in \mathcal{A}$, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $x = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$, odkud

$$\left\|d^+ x\right\|_{\ell^2} = \left\|d^+ \textstyle\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n\right\|_{\ell^2} \leq \left\|\textstyle\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_{n+1}\right\|_{\ell^2} + \left\|\textstyle\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n\right\|_{\ell^2} = 2\left\|x\right\|_{\ell^2}.$$

Tedy d^+ je omezený, tím pádem spojitý. Stejně tak je omezený a spojitý i operátor d^-, neboť

$$\left\|d^- x\right\|_{\ell^2} = \left\|d^- \textstyle\sum_{n=N}^N \alpha_n e_n\right\|_{\ell^2} \leq \left\|\textstyle\sum_{n=N}^N \alpha_n e_1\right\|_{\ell^2} + \left\|\textstyle\sum_{n=N}^N \alpha_n e_{n-1}\right\|_{\ell^2} = 2\left\|x\right\|_{\ell^2},$$

odkud $\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)} \leq 2$ a $\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)} \leq 2$. □

Důsledek 2 (Spojitost operátoru H)**.** *Z tvrzení* 21 *plyne omezenost, tím pádem i spojitost operátoru H, neboli $H \in B(\ell^2)$, neboť z tvrzení* 3 $\left\|H\right\|_{B(\ell^2)} = \left\|\frac{1}{2m} d^+ d^-\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{1}{2m}\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)}\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{2}{m}$.

Další důležitou vlastností d^+ a d^- je jejich vzájemná sdruženost.

Tvrzení 22 (Vzájemná sdruženost d^+ a d^-)**.** *Operátory d^+ a d^- jsou vzájemně sdružené a $d^+d^- = d^-d^+$.*

Důkaz tvrzení 22. Nejprve ke sdruženosti. Oba operátory jsou definované na celém ℓ^2. Chceme ověřit, že pro všechny $x, y \in \ell^2$ platí $\langle d^+ x, y\rangle = \langle x, d^- y\rangle$. V ℓ^2 máme ON bázi, každý prvek z tohoto prostoru si tedy můžeme zapsat jako nekonečnou sumu prvků báze s příslušnými koeficienty. Využijeme-li spojitosti skalárního součinu a operátorů d^+, d^- z předchozího tvrzení 21, je zřejmé, že stačí ověřit definiční vlastnost sdruženosti na bazických vektorech

$$\langle d^+ e_n, e_m\rangle = \langle e_n, d^- e_m\rangle. \tag{2.1}$$

Na levé straně máme

$$\langle d^+ e_n, e_m\rangle = \langle -i(e_{n+1} - e_n), e_m\rangle = i\langle e_{n+1}, e_m\rangle - i\langle e_n, e_m\rangle,$$

odkud

$$\langle d^+ e_n, e_m\rangle = \begin{cases} i & \text{pro } m = n+1, \\ -i & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Na pravé straně máme

$$\langle e_n, -i(e_m - e_{m-1})\rangle = -i\langle e_n, e_m\rangle + i\langle e_n, e_{m-1}\rangle,$$

odkud

$$\langle e_n, d^- e_m\rangle = \begin{cases} i & \text{pro } m = n+1, \\ -i & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Výrazy na levé a pravé straně rovnice (2.1) se tedy rovnají, čímž dostáváme kýženou sdruženost.

Nyní k rovnosti $d^+d^- = d^-d^+$. Ověřme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $d^+d^- e_n = d^-d^+ e_n$.

$$d^+d^- e_n = -id^+(e_n - e_{n-1}) = -e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1} = -id^-(e_{n+1} - e_n) = d^-d^+ e_n,$$

z čehož díky linearitě d^+, d^- plyne, že i pro $\forall x \in \operatorname{span}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ je $d^+d^- x = d^-d^+ x$. Položíme-li dle tvrzení 6 $A = d^+d^- - d^-d^+$, $V = \operatorname{span}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, což je hustý podprostor ℓ^2, pak pro A existuje jediné rozšíření $\hat{A} = 0$ na celý prostor ℓ^2, odkud $d^+d^- = d^-d^+$ na ℓ^2. □

Nyní máme vše připraveno k zavedení diskrétní verze Diracova operátoru $D_c \in B(l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z}))$. Pro $\forall c > 0$ mějme

$$D_c = \begin{pmatrix} mc^2\mathbb{I} & cd^- \\ cd^+ & -mc^2\mathbb{I} \end{pmatrix}, \text{ někdy stručněji budeme psát jen } D_c = \begin{pmatrix} mc^2 & cd^- \\ cd^+ & -mc^2 \end{pmatrix}.$$

V této práci budeme zkoumat především posunutý diskrétní Diracův operátor

$$D_c - mc^2(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & cd^- \\ cd^+ & -2mc^2 \end{pmatrix}.$$

Bude-li nadále zmíněn posunutý diskrétní Diracův operátor, je tím myšlen právě diskrétní Diracův operátor D_c, od něhož je odečtena identita $\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}$ vynásobená klidovou energií mc^2.

Poznámka. *Matematicky korektní zápis $X + \alpha\mathbb{I}$ pro $X \in B(\mathcal{H})$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, respektive $Y + \alpha(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I})$ pro $Y \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ budeme nahrazovat $X + \alpha$, respektive $Y + \alpha$, neboť je zřejmé, že přičítáme-li k operátoru na daném Hilbertově prostoru číslo, myslíme tím přičtení číslem vynásobené identity právě na daném prostoru.*

Tvrzení 23. *Operátor D_c je hermitovský.*

Důkaz tvrzení 23. Omezenost operátoru D_c pro každé pevné $c > 0$ plyne z tvrzení 21 a 16, neboť

$$\left\|D_c\right\|_{B(L^2 \oplus L^2)} \leq \hat{K}\left(\left\|mc^2\right\|_{B(L^2)} + \left\|cd^-\right\|_{B(L^2)} + \left\|cd^+\right\|_{B(L^2)} + \left\|mc^2\right\|_{B(L^2)}\right) = 4c + 2mc^2.$$

Z definice je dále nutné ověřit, zda pro libovolné $A, B, X, Y \in l^2(\mathbb{Z})$ platí

$$\left\langle D_c \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, D_c \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{2.2}$$

Skalární součin v $l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z})$ uvažujeme po složkách. Levá a pravá strana 2.2 se skutečně rovnají, protože

$$\begin{aligned} \left\langle D_c \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle mc^2 A + cd^- B, X \right\rangle + \left\langle cd^+ A - mc^2 B, Y \right\rangle \\ &= \left\langle mc^2 A, X \right\rangle + \langle cd^- B, X\rangle + \langle cd^+ A, Y\rangle - \left\langle mc^2 B, Y \right\rangle \\ &= \left\langle mc^2 A, X \right\rangle + \langle cd^+ A, Y\rangle + \langle cd^- B, X\rangle - \left\langle mc^2 B, Y \right\rangle \\ &= \left\langle A, mc^2 X + cd^- Y \right\rangle + \left\langle B, cd^+ X - mc^2 Y \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, D_c \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Důsledek 3. *Jelikož identita i jakýkoliv její reálný násobek je hermitovský operátor, z tvrzení* 1 *plyne, že součet dvou hermitovských operátorů $D_c - mc^2$ je opět hermitovský operátor.*

Poznámka. *Jak jsme zmínili již v úvodu, druhá mocnina Diracova operátoru je úzce spjata s Laplaceovým operátorem. Podívejme se, zda to splňuje i náš operátor D_c.*

$$D_c^2 = \begin{pmatrix} m^2c^4 + c^2 d^- d^+ & 0 \\ 0 & m^2c^4 + c^2 d^+ d^- \end{pmatrix} = m^2c^4 + c^2 \begin{pmatrix} d^- d^+ & 0 \\ 0 & d^+ d^- \end{pmatrix} = (mc^2)^2 + 2mc^2(H \oplus H),$$

protože jak víme, je $d^+d^- = d^-d^+ = 2mH$. Druhá mocnina našeho diskrétního Diracova operátoru tedy v jistém smyslu dává druhou mocninu klidové energie a Laplaceův operátor vynásobený $2mc^2$. Dá se říct, že výše zmíněný vztah mezi D_c a H je analogií známé rovnosti $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$, kde energii E odpovídá operátor D_c a druhé mocnině hybnosti p^2 odpovídá operátor $\begin{pmatrix} d^-d^+ & 0 \\ 0 & d^+d^- \end{pmatrix}$. Situace pro diskrétní Diracův operátor je do velké míry analogická té pro spojitý Diracův operátor z úvodu. Uvažujeme ale jiné fyzikální jednotky, máme totiž $\hbar = 1$.

2.2 Zavedení operátorů v $B\left(L^2([0,2\pi]) \oplus L^2([0,2\pi])\right)$

Jak jsme již zmínili například v podkapitole 1.4, v budoucnu budeme chtít využít možnosti převést vyšetřování operátorů na $\ell^2(\mathbb{Z})$ na vyšetřování operátorů násobení na $L^2([0,2\pi])$. Konkrétně nás zajímá, jaké funkce přísluší operátorům Ucd^+U^{-1}, Ucd^-U^{-1}, $U(\pm mc^2)U^{-1}$, $U\frac{1}{2m}d^+d^-U^{-1} \in B(L^2([0,2\pi]))$.

Z linearity jednoduše
$$U(\pm mc^2\mathbb{I}_{\ell^2})U^{-1} = \pm mc^2 UU^{-1} = \pm mc^2\mathbb{I}_{L^2}.$$

Nyní budeme zjišťovat, jak operátory Ud^+U^{-1}, Ud^-U^{-1} a $Ud^+d^-U^{-1}$ působí na prvek ON báze $f_n \in \chi$, kdy bereme bázi χ jako v podkapitole 1.4.

$$d^+e_n = -i(e_{n+1} - e_n), \text{ tedy maticově v ON bázi } (d^+)^{\mathcal{M}} = -i\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & -1 & 1 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & -1 & 1 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & -1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Stejně tak

$$d^-e_n = -i(e_n - e_{n-1}), \text{ tedy maticově v ON bázi } (d^+)^{\mathcal{M}} = -i\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & -1 & 1 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & -1 & 1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Operátor d^+d^- je složením operátoru d^+ a d^-, proto

$$d^+d^-e_n = d^+(-i)(e_n - e_{n-1}) = (-i)(d^+e_n - d^+e_{n-1}) = (-i)(-ie_{n+1} + 2ie_n - ie_{n-1}) = -e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1},$$

tedy matice operátoru H v ON bázi je

$$H^{\mathcal{M}} = \frac{1}{2m}(d^+d^-)^{\mathcal{M}} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 2 & -1 & 0 & \ddots \\ \ddots & -1 & 2 & -1 & \ddots \\ \ddots & 0 & -1 & 2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pro identický operátor a operátory $d^+, d^-, H \in B(\ell^2)$ jsou splněny požadavky na konstantní diagonály a lze tedy použít teorii Laurentových operátorů.

$$\begin{aligned} Ud^+U^{-1}f_n &= Ud^+e_n = U(-i[e_{n+1} - e_n]) = -i(Ue_{n+1} - Ue_n) = -i(f_{n+1} - f_n) \\ &= -i(\frac{e^{i(n+1)t}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}) = -i(e^{it} - 1)\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = M_{-i(e^{it}-1)}f_n, \end{aligned}$$

kde $M_{g(t)}$ je operátor násobení funkcí g(t) na $L^2[0, 2\pi]$. Analogickými úpravami získáme $Ud^-U^{-1}f_n$, index n se akorát posune o -1.

$$\begin{aligned} Ud^-U^{-1}f_n &= Ud^-e_n = U(-i[e_n - e_{n-1}]) = -i(Ue_n - Ue_{n-1}) = -i(f_n - f_{n-1}) \\ &= -i(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{i(n-1)t}}{\sqrt{2\pi}}) = -i(1 - e^{-it})\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = M_{-i(1-e^{-it})}f_n \end{aligned}$$

Působení operátoru $U\frac{1}{2m}d^+d^-U^{-1}$ na f_n lze zapsat následovně

$$\begin{aligned} U\frac{1}{2m}d^+d^-U^{-1}f_n &= U\frac{1}{2m}(-e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1}) = \frac{1}{2m}(-f_{n+1} + 2f_n - f_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{i(n+1)t} + 2e^{int} - e^{i(n-1)t}) = \frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}(2 - e^{it} - e^{-it}) \\ &= \frac{1}{2m}f_n(2 - 2\cos t - i\sin t - i\sin(-t)) = \frac{1}{m}(1 - \cos t)f_n = M_{\frac{1-\cos t}{m}}f_n. \end{aligned}$$

Díky tomu, že báze v obou příslušných prostorech jsou ON, z teorie plyne, že libovolný prvek $f \in L^2[0, 2\pi]$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci prvků z ON báze, přičemž koeficienty u f_n jsou přímo Fourierovy koeficienty $\langle f_n , f\rangle$. Tedy $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f_n , f\rangle f_n$. Označme tyto Fourierovy koeficienty $\xi_n = \langle f_n , f\rangle$.

Z linearity a spojitosti operátorů U, d^+ a U^{-1} pak plyne

$$\begin{aligned}
Ucd^+U^{-1}f &= Ucd^+U^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n f_n = Ucd^+U^{-1}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\xi_n f_n = Ucd^+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}U^{-1}\xi_n f_n \\
&= Ucd^+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\xi_n e_n = Uc\lim_{N\to+\infty}d^+\sum_{n=-N}^{N}\xi_n e_n = Uc\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}-i\xi_n\left(e_{n+1}-e_n\right) \\
&= c\lim_{N\to+\infty}U\sum_{n=-N}^{N}-i\xi_n\left(e_{n+1}-e_n\right) = c\sum_{n=-\infty}^{\infty}-i\xi_n\left(f_{n+1}-f_n\right) \\
&= -ic\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(n+1)t}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right) = -ic\left(e^it-1\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n f_n = M_{-ic(e^{it}-1)}f. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Naprosto analogicky

$$Ucd^-U^{-1}f = M_{-ic(1-e^{-it})}f. \qquad (2.4)$$

Taktéž

$$UHU^{-1}f = U\frac{1}{2m}d^+d^-U^{-1}f = M_{\frac{1-\cos t}{m}}f. \qquad (2.5)$$

Nyní můžeme náš operátor $D_c - mc^2 \in B(\ell^2(\mathbb{Z})\oplus\ell^2(\mathbb{Z}))$ převést pomocí přenásobení zleva, respektive zprava operátorem $U\oplus U$, respektive $U^{-1}\oplus U^{-1}$. Takovému obložení operátoru $D_c - mc^2$ budeme rozumět tak, že každý jednotlivý prvek operátorové matice $D_c - mc^2$ obložíme zleva U a zprava U^{-1}.

$$U\oplus U(D_c-mc^2)U^{-1}\oplus U^{-1} = \begin{pmatrix} U0U^{-1} & Ucd^-U^{-1} \\ Ucd^+U^{-1} & U(-2mc^2)U^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & M_{-ic(1-e^{-it})} \\ M_{-ic(e^{it}-1)} & M_{-2mc^2}\end{pmatrix}.$$

Dále pro úsporu zápisu operátor násobení funkcí $M_{g(t)}$ budeme značit jen $g(t)$ a navíc dále budeme užívat označení $\mathbb{D}_c$ pro operátor $U\oplus U(D_c-mc^2)U^{-1}\oplus U^{-1}$, tedy

$$\mathbb{D}_c = U\oplus U(D_c-mc^2)U^{-1}\oplus U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ic(1-e^{-it}) \\ -ic(e^{it}-1) & -2mc^2\end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Stejné převedení a následné zjednodušení značení zavedeme i pro operátor $H\oplus 0$, neboť

$$H\oplus 0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m}d^+d^- & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Užívejme dále značení $\mathbb{H}$ pro operátor UHU^{-1}, pak

$$\mathbb{H}\oplus 0 = U\oplus U\ \ (H\oplus 0)\ \ U^{-1}\oplus U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos t}{m} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2.3 Spektrum

První důležitá informace, kterou díky teorii Laurentových operátorů získáme, je spektrum a rezolventní množina operátorů $D_c - mc^2$ a $H \oplus 0 \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. Princip hledání spektra bude takový, že vyšetříme spektrum unitárně sdružených operátorů

$$\begin{aligned} &U \oplus U(D_c - mc^2)U^{-1} \oplus U^{-1}, \\ &U \oplus U \ \ (H \oplus 0) \ \ U^{-1} \oplus U^{-1} \in B(L^2 \oplus L^2). \end{aligned}$$

Díky tomu, že U je izometrický izomorfismus, z tvrzení 15 plyne, že Laurentovy operátory v $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ mají stejné spektrum jako jejich unitárně ekvivalentní protějšky v $B(L^2 \oplus L^2)$.

Na základě obecnějšího pozorování v [7], konkrétně v Proposition 2.2.1, pro náš konkrétní případ s operátorovou maticí $\mathbb{D}_c$ plyne, že $\mathbb{D}_c - \lambda$ je invertovatelný na L^2 a tedy $\lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c)$ právě tehdy, když je matice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -ic(1 - e^{-it}) \\ -ic(e^{it} - 1) & -2mc^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

regulární pro $\forall t \in [0, 2\pi]$, jakožto matice z $\mathbb{C}^{2,2}$.

$$\det(\mathbb{D}_c - \lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -ic(1 - e^{-it}) \\ -ic(e^{it} - 1) & -2mc^2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda mc^2 + 2c^2(\cos t - 1),$$

tedy platí

$$\det(\mathbb{D}_c - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2mc^2 \pm \sqrt{4m^2c^4 - 8c^2(\cos t - 1)}}{2} = -mc^2 \pm c\sqrt{m^2c^2 + 2 - 2\cos t}.$$

Rezolventní množina je pro nás $\varrho(\mathbb{D}_c)$, kde

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbb{D}_c) &= \mathbb{C} \setminus \overline{\{-mc^2 \pm c\sqrt{m^2c^2 + 2 - 2\cos t})| \ t \in [0, 2\pi]\}} \\ &= \mathbb{C} \setminus \left(\left[-mc^2 - c\sqrt{m^2c^2 + 4}, \ -2mc^2\right] \bigcup \left[0, \ c\sqrt{m^2c^2 + 4} - mc^2\right]\right) = \varrho(D_c - mc^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pošleme-li $c \to \infty$, získáváme

$$\varrho(\mathbb{D}_\infty) = \mathbb{C} \setminus \left[0, \frac{2}{m}\right]. \tag{2.8}$$

Již víme, pro která λ je operátor $\mathbb{D}_c - \lambda$ invertovatelný. Dle [7] získáme pro $\lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c)$ rezolventu jako

$$R_{\mathbb{D}_c}(\lambda) = (\mathbb{D}_c - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2mc^2 - \lambda}{\lambda^2 + 2\lambda mc^2 + 2c^2(\cos t - 1)} & \frac{ic(1 - e^{-it})}{\lambda^2 + 2\lambda mc^2 + 2c^2(\cos t - 1)} \\ \frac{ic(e^{it} - 1)}{\lambda^2 + 2\lambda mc^2 + 2c^2(\cos t - 1)} & \frac{-\lambda}{\lambda^2 + 2\lambda mc^2 + 2c^2(\cos t - 1)} \end{pmatrix}$$

Uvažujme operátorovou matici $\begin{pmatrix} \frac{1-\cos t}{m} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Inverze operátoru $(H - \lambda)$ z tvrzení 12 a 15 existuje pro $\lambda \in \varrho(H)$, kde

$$\varrho(H) = \varrho(\mathbb{H}) = \mathbb{C} \setminus \overline{\{\frac{1 - \cos t}{m} | \ t \in [0, 2\pi]\}} = \mathbb{C} \setminus \left[0, \frac{2}{m}\right], \tag{2.9}$$

což koresponduje s (2.8).

Poznamenejme navíc, že $\varrho(\mathbb{D}_c) = \varrho(D_c - mc^2) \subset \varrho(H)$ pro $\forall c > 0$.

2.4 Stanovení cílů práce

Hlavní cíl naší práce bude pro $\lambda \in \varrho(H) \bigcap \varrho(D_c - mc^2)$ dokázat konvergenci rezolventy posunutého Diracova operátoru $\left(D_c - mc^2 - \lambda\right)^{-1} \xrightarrow{c\to\infty} (H-\lambda)^{-1} \oplus 0$ v prostoru $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$, což odpovídá

$$\left\|\left(D_c - mc^2 - \lambda\right)^{-1} - (H-\lambda)^{-1} \oplus 0\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0. \tag{2.10}$$

Podobu spektra a rezolventní množiny příslušných operátorů jsme již získali na základě užití teorie Laurentových operátorů.

Hlavního cíle dosáhneme třemi různými metodami. Každá metoda má své obtíže i své výhody. Z každé metody lze kromě kýžené konvergence v operátorové normě navíc získat jisté dodatečné poznatky. Konkrétně budeme schopni vyšetřit asymptotické chování posunutého diskrétního Diracova operátoru nebo přidat poruchu v podobě omezeného potenciálu.

Kapitola 3

Nerelativistická limita

V této kapitole budeme dokazovat, že platí (2.10). Nejdříve pomocí užití teorie Laurentových operátorů, kdy budeme především zkoumat normy operátorů násobení funkcí. Dále pomocí maticového rozkladu pomocí Schurova komplementu dle [5], který nám umožní jednoduchou práci přímo s operátory v původním prostoru. Nakonec pomocí tvrzení z [6], která využívají příznivých algebraických vlastností Diracova operátoru.

3.1 Laurentovy operátory

Tato metoda nám umožní vyšetřit limitu D_c pomocí studování operátorů na prostoru $L^2 \oplus L^2$. Výhodou nám budou známá tvrzení o operátorech násobení L^2 integrabilní funkcí z kapitoly 1.3.

Označme pro $\lambda \in \varrho(\mathbb{H})$ operátorovou matici

$$(\mathbb{H}-\lambda)^{-1} \oplus 0 = \begin{pmatrix} (\frac{1-\cos t}{m} - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{1-\cos t - m\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Cílem této kapitoly je pro $\forall \lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c) \cap \varrho(\mathbb{H})$ dokázat konvergenci

$$\left\| (\mathbb{D}_c - \lambda)^1 - (\mathbb{H}-\lambda)^{-1} \oplus 0 \right\|_{B(L^2 \oplus L^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0, \tag{3.2}$$

kde operátor $\mathbb{D}_c$ na c záleží, $\mathbb{H}$ nikoliv.

Rezolventu operátoru $\mathbb{D}_c \in B(L^2 \oplus L^2)$ zavedeného v (2.6) označíme jako $R_{\mathbb{D}_c}(\lambda)$. Pak pro $\lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c)$

$$R_{\mathbb{D}_c}(\lambda) = (\mathbb{D}_c - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2mc^2-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{ic(1-e^{-it})}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \\ \frac{ic(e^{it}-1)}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \end{pmatrix}.$$

Užijme odhadu normy po prvcích dle tvrzení 16, pak

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathbb{D}_c - \lambda)^1 - (\mathbb{H}-\lambda)^{-1} \oplus 0 \right\|_{B(L^2 \oplus L^2)} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \frac{-2mc^2-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{ic(1-e^{-it})}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \\ \frac{ic(e^{it}-1)}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m}{1-\cos t - m\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{B(L^2 \oplus L^2)} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \right\|_{B(L^2 \oplus L^2)} \\
&\leq \left(\|U_{11}\|_{B(L^2)} + \|U_{12}\|_{B(L^2)} + \|U_{21}\|_{B(L^2)} + \|U_{22}\|_{B(L^2)} \right),
\end{aligned}$$

kde U_{ij} jsou operátory násobení příslušnou funkcí dle indexu prvku.

Ukážeme-li, že všechny 4 členy $\left\|U_{ij}\right\|_{B(L^2)}$ konvergují v operátorové normě pro $c \to +\infty$, pak máme dokázanou konvergenci (3.2).

Začněme pozorováním, zda k 0 konverguje první člen $\left\|U_{11}\right\|_{B(L^2)}$. Zde využijeme poznatku z teorie, že pro normu operátoru násobení dle tvrzení 11 platí $\left\|M_f\right\|_{B(L^2)} = \left\|f\right\|_\infty$. Jelikož jsme volili $\lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c) \cap \varrho(\mathbb{H})$, funkce příslušející operátorům násobení ve všech čtyřech prvcích operátorové matice jsou jistě spojité, a to i stejnoměrně díky kompaktnosti intervalu $[0, 2\pi]$. Pro stejnoměrně spojité funkce je esenciální supremum rovno přímo maximu z absolutních hodnot funkce. Stačí nám tedy vyšetřit, že pro příslušné operátory U_{ij} násobení danou funkcí f platí $\sup\limits_{t\in[0,2\pi]} |f(t)| \xrightarrow{c\to\infty} 0$. Odhadujme tedy.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-2mc^2-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} - \frac{m}{1-\cos t-m\lambda}\right| = \left|\frac{(-2mc^2-\lambda)(1-\cos t-m\lambda)-m(\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1))}{(1-\cos t-m\lambda)(\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1))}\right| \\
&= \left|\frac{-\lambda(\cos t-1)}{(1-\cos t-m\lambda)(\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1))}\right| \overset{(a)}{\leq} \left|\frac{2\lambda}{Kc^2(\lambda^2/c^2+2\lambda m+2(\cos t-1))}\right| \overset{(b)}{\leq} \left|\frac{2\lambda}{KLc^2}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kde jsme v nerovnosti (a) čitatele v absolutní hodnotě jako samostatnou funkci odhadli jejím maximem. Navíc ze stejnoměrné spojitosti a nenulovosti výrazu $|1-\cos t - m\lambda|$ díky volbě $\lambda \in \varrho(\mathbb{D}_c) \cap \varrho(\mathbb{H})$ můžeme provést odhad zdola $|1 - \cos t - m\lambda| \geq K$, kde $K > 0$ je konstanta.

V nerovnosti (b) jsme funkci $\xi(t) = |\lambda^2/c^2 + 2\lambda m + 2(\cos t - 1)|$ taktéž odhadli jejím nabývaným minimem $L > 0$, nezávislým na c, alespoň pro c dostatečně velká. To lze udělat opět díky stejnoměrné spojitosti funkce a volbě λ.

Jelikož jsme v (3.3) získali odhad, který nezávisí na t a jde limitně k nule pro $c \to \infty$, můžeme prohlásit, že i

$$\left\|U_{11}\right\|_{B(L^2)} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{-2mc^2-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} - \frac{m}{1-\cos t-m\lambda}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Pro další členy budeme postupovat téměř analogicky. Důležité bude opakování principu s odhadnutím funkce ve jmenovateli. Odhadnutí čitatele ve 2. členu triviálně provedeme následovně

$$\left|\frac{ic(1-e^{-it})}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \leq \left|\frac{c(1+|e^{-it}|)}{Lc^2}\right| = \left|\frac{2c}{Lc^2}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Tedy

$$\left\|U_{12}\right\|_{B(L^2)} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{ic(1-e^{-it})}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Totožný odhad uděláme pro 3. člen

$$\left|\frac{ic(e^{it}-1)}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \leq \left|\frac{c(1+|e^{it}|)}{Lc^2}\right| = \left|\frac{2c}{Lc^2}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Tedy

$$\left\|U_{12}\right\|_{B(L^2)} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{ic(e^{it}-1)}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

U posledního členu dokonce ani nemusíme provádět žádný odhad pro čitatele, neboť v něm je přímo konstanta

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \leq \left|\frac{\lambda}{Lc^2}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0, \tag{3.4}$$

odkud

$$\left\|U_{22}\right\|_{B(L^2)} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Tím máme dokázanou platnost (3.2), z čehož platí i (2.10).

3.2 Maticový rozklad

Nyní nám hlavním nástrojem bude tvrzení 20.

My tento rozklad aplikujeme na prostoru $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} = \ell^2\oplus\ell^2$ na operátorovou matici

$$D_c - mc^2 = \begin{pmatrix} 0 & cd^- \\ cd^+ & -2mc^2 \end{pmatrix} \in B(\ell^2\oplus\ell^2),$$

budeme požadovat $\lambda \notin \sigma(-2mc^2\mathbb{I}) = \{-2mc^2\}$. Potom

$$D_c - mc^2 - \lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & cd^-(-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2-\lambda)\mathbb{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (-2mc^2-\lambda)^{-1}cd^+ & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

kde $S_1(\lambda) = -\lambda - cd^-(-2mc^2-\lambda)^{-1}cd^+$ je jistě omezený operátor.

Naším cílem je získat podobný rozklad pro rezolventu posunutého Diracova operátoru. Uvažujme tedy nadále $\lambda \in \varrho\left(D_c - mc^2\right)$. Užitím tvrzení 5, tvrzení 19 a toho, že inverze diagonální operátorové matice vznikne inverzí operátorů na diagonále, získáváme maticový rozklad rezolventy

$$\begin{aligned}\left(D_c - mc^2 - \lambda\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (-2mc^2-\lambda)^{-1}cd^+ & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S_1(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2-\lambda)\mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbb{I} & cd^-(-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (2mc^2+\lambda)^{-1}cd^+ & \mathbb{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I} & cd^-(2mc^2+\lambda)^{-1}\mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Diskutujme nyní, že je rozklad proveden korektně, co se týče volby λ. $\lambda \in \varrho\left(D_c - mc^2\right)$ implikuje požadavek z tvrzení 20 $\lambda \notin \sigma(D) = \{-2mc^2\}$, což plyne z podoby rezolventní množiny v (2.7). Také rezolventa jistě existuje. První a poslední operátorová matice v rozkladu (3.5) i (3.6) jsou na základě tvrzení 19 bijekce nezávisle na volbě λ.

V rozkladu je důležitá prostřední matice $\begin{pmatrix} S_1(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2-\lambda)\mathbb{I} \end{pmatrix}$, respektive její inverze. Tato operátorová matice je diagonální, přičemž z volby λ je jistě $(-2mc^2-\lambda)\mathbb{I}$ invertovatelný. Zbývá tedy zodpovědět, kdy je invertovatelný operátor $S_1(\lambda)$. Na to nám také dává odpověď tvrzení 20, konkrétně fakt, že

$$\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D) = \sigma(S_1),$$

pak je dle značení a definic z [5]

$$\Omega \setminus [\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D)] = [\mathbb{C} \setminus \sigma(D)] \setminus [\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D)] = \varrho(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D) = \Omega \setminus \sigma(S_1) = \varrho(S_1),$$

kde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$ a $\varrho(S_1) = \{\lambda \in \Omega, S_1 \text{ je bijektivní}\}$. Pak speciálně dosazením $\mathcal{A} = D_c - mc^2$, $D = -2mc^2\mathbb{I}_{\ell^2}$ a faktem, že

$$\sigma(D) = \sigma(-2mc^2\mathbb{I}_{\ell^2}) = \{-2mc^2\} \notin \varrho(D_c - mc^2)$$

získáváme $\varrho(D_c - mc^2) = \varrho(S_1)$.

Proveďme však i vlastní pozorování.

Tvrzení 24. *$\lambda \in \varrho(D_c - mc^2) \iff$ existuje všude definovaný $S_1^{-1}(\lambda)$ a je omezený.*

Důkaz tvrzení 24.

$$S_1(\lambda) = \frac{c^2}{2mc^2+\lambda}d^+d^- - \lambda = \frac{2mc^2}{2mc^2+\lambda}\left(\frac{1}{2m}d^+d^- - \lambda - \frac{\lambda^2}{2mc^2}\right) = \frac{2mc^2}{2mc^2+\lambda}\left(H - \lambda - \frac{\lambda^2}{2mc^2}\right).$$

Předfaktor $\frac{2mc^2}{2mc^2+\lambda}$ je konečné nenulové číslo pro $\lambda \neq -2mc^2$, tím pádem nemá vliv na existenci a omezenost inverze. Operátor $S_1^{-1}(\lambda)$ existuje, je omezený a všude definovaný právě tehdy, když je splněna podmínka

$$\lambda + \frac{\lambda^2}{2mc^2} \in \varrho(H) = \mathbb{C} \setminus \left[0, \frac{2}{m}\right], \tag{3.7}$$

což odpovídá

$$2mc^2\lambda + \lambda^2 \in \mathbb{C} \setminus \left[0, 4c^2\right].$$

Uvažujme $\lambda = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

$$2mc^2\lambda + \lambda^2 = 2mc^2a + a^2 - b^2 + i\left(2mc^2b + 2ab\right).$$

Je-li $\Im(2mc^2\lambda + \lambda^2) = 2mc^2b + 2ab \neq 0$, jistě splníme podmínku (3.7).

Je-li $\Im(2mc^2\lambda + \lambda^2) = 2b(mc^2 + a) = 0$, jsou 2 možnosti. Buďto $a = -mc^2$, pak

$$2mc^2\lambda + \lambda^2 = -m^2c^4 - b^2 < 0,$$

odkud opět splňujeme podmínku (3.7), nebo $b = 0$ a vyšetřujeme obor hodnot reálného polynomu.

Uvažujme tedy $\lambda \in \mathbb{R}$, parabola $p(\lambda) = \lambda^2 + 2mc^2\lambda = \lambda(\lambda + 2mc^2)$ má vrchol v bodě $\lambda_0 = -mc^2$, vzhledem ke kterému je symetrická. Stačí tedy vyšetřit, jakých hodnot nabývá polynom $p(\lambda)$ na polopřímce $\lambda \geq -mc^2$, kdy je polynom ostře rostoucí, tedy i prostý.

Ukážeme, že podmínka (3.7) je splněna právě tehdy, když volíme

$$\lambda \in \varrho(D_c - mc^2) = \mathbb{C} \setminus \left(\left[-mc^2 - c\sqrt{m^2c^2+4},\ -2mc^2\right] \bigcup \left[0,\ c\sqrt{m^2c^2+4} - mc^2\right]\right),$$

tedy právě tehdy, když existuje rezolventa posunutého diskrétního Diracova operátoru, čímž tvrzení dokážeme. Nyní se soustředíme na polopřímku $\lambda \geq -mc^2$. Z monotonie $p(\lambda)$ tím pádem stačí ukázat, že $p(\lambda)$ vyčísleno v krajních bodech intervalu $\left[0,\ c\sqrt{m^2c^2+4} - mc^2\right]$ přesně sedí na krajní body intervalu $[0, 4c^2]$. Lze se přesvědčit výpočtem, že opravdu

$$p(0) = 0,$$

$$p(c\sqrt{m^2c^2+4} - mc^2) = \left(c\sqrt{m^2c^2+4} - mc^2\right)^2 + 2mc^2\left(c\sqrt{m^2c^2+4} - mc^2\right) = 4c^2.$$

□

Tvrzení 24 nám tedy říká, že nutná a postačující podmínka na volbu λ, aby byl rozklad z rovnice 5.1 korektní, je, že λ musí být z rezolventní množiny posunutého diskrétního Diracova operátoru.

Dále ukážeme, že v rozkladu (3.6) první a poslední operátorová matice půjde limitně na $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ pro $c \to \infty$ k identitě a prostřední operátorová matice půjde k $(H-\lambda)^{-1} \oplus 0$. Následnou aplikací tvrzení 4 získáme kýženou konvergenci (2.10).

Z tvrzení 16 a omezenosti operátoru d^+ máme

$$\left\|\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (2mc^2+\lambda)^{-1}cd^+ & \mathbb{I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (2mc^2+\lambda)^{-1}cd^+ & 0 \end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \leq \left\|(2mc^2+\lambda)^{-1}cd^+\right\|_{B(\ell^2)}$$
$$= \left|\tfrac{c}{2mc^2+\lambda}\right| \left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Stejně tak

$$\left\|\begin{pmatrix} \mathbb{I} & cd^-(2mc^2+\lambda)^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \leq \left|\tfrac{c}{2mc^2+\lambda}\right| \left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0.$$

Nakonec vyšetřeme prostřední operátorovou matici v rozkladu 3.6.

$$\left\|\begin{pmatrix} S_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I} \end{pmatrix} - (H-\lambda)^{-1} \oplus 0\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \leq \left\|S_1(\lambda)^{-1} - (H-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} +$$
$$+ \left\|(-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I}\right\|_{B(\ell^2)},$$

kde chceme ukázat, že pravá strana jde limitně k nule pro $c \to \infty$. Pro druhý člen jistě platí $\left\|(-2mc^2-\lambda)^{-1}\mathbb{I}\right\|_{B(\ell^2)} = \left|\tfrac{1}{-2mc^2-\lambda}\right| \xrightarrow{c\to\infty} 0.$

Co se týče prvního členu, upravme výraz $S_1^{-1}(\lambda) - (H-\lambda)^{-1}$ užitím první rezolventní formule z tvrzení 8.

$$\begin{aligned} S_1^{-1}(\lambda) - (H-\lambda)^{-1} &= \left(\frac{2mc^2}{2mc^2+\lambda}H - \lambda\right)^{-1} - (H-\lambda)^{-1} \\ &= \frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\left(H - \lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1} - (H-\lambda)^{-1} \\ &= \left(H - \lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1} - (H-\lambda)^{-1} + \frac{\lambda}{2mc^2}\left(H - \lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

odkud je následující odhad v operátorové normě

$$\begin{aligned} &\left\|S_1(\lambda)^{-1} - (H-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \\ &\leq \left|\lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2} - \lambda\right| \left\|\left(H - \lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \left\|(H-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} + \left|\tfrac{\lambda}{2mc^2}\right| \left\|\left(H - \lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)}. \end{aligned}$$

Naším cílem je tím pádem dokázat

$$\left|\lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2} - \lambda\right| \left\|\left(H - \lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \left\|(H-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} + \left|\tfrac{\lambda}{2mc^2}\right| \left\|\left(H - \lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c\to+\infty} 0. \tag{3.8}$$

Musíme ověřit omezenost normy každé z rezolvent závisející na c, přičemž v kontextu limity můžeme pro naše pohodlí uvažovat c libovolně velké. Z toho, že limita obou výrazů $\left|\lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2} - \lambda\right|$ a $\left|\tfrac{\lambda}{2mc^2}\right|$ je 0, pak budeme mít konvergenci $S_1(\lambda)^{-1} - (H-\lambda)^{-1}$ k 0 v operátorové normě.

Z volby $\lambda \in \varrho\left(D_c - mc^2\right)$ je jistě $(H-\lambda)^{-1}$ omezený, všude definovaný operátor.

Uvažujme tedy libovolné pevné $\lambda \in \varrho\left(D_c - mc^2\right)$. Je zřejmé, že $\lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Využijme známého faktu uvedeného například v [1], že rezolventní množina je otevřená. Jistě tedy pro $\lambda \in \varrho(D_c - mc^2)$ existuje nějaká otevřená koule, respektive $r > 0$ tak, že $B(\lambda, 2r) \subset \varrho(D_c - mc^2)$. Vzdálenost λ od spektra je tím pádem alespoň $2r$. Nakonec pro námi volené λ jistě existuje $c_0 > 0$ takové, že pro $\forall c > c_0$ je $\lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2} \in B(\lambda, r)$. Pro taková c je tedy vzdálenost $\lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}$ od spektra H alespoň r. Ze známé formule pro normu rezolventy samosdruženého operátoru uvedené například v [7] plyne, že

$$\left\|\left(H - \lambda\tfrac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} = \frac{1}{d\left(\lambda\frac{2mc^2+\lambda}{2mc^2}, \sigma(H)\right)} \leq \frac{1}{r}.$$

Pro pevné λ tedy získáváme odhad normy rezolventy výše pro $c > c_0$ jako pevné číslo $\frac{1}{r}$. To vysvětluje limitu (3.8).

Celkem jsme dokázali (2.10), přičemž hlavními nástroji nám byly jistá tvrzení o omezených operátorech, odhady operátorové normy a první rezolventní formule.

3.3 Supersymetrie

Poslední způsob, kterým získáme konvergenci (2.10), je založen na poznatcích z [6]. Klíčové budou algebraické vlastnosti diskrétní verze Diracova operátoru, jakožto operátorové matice. Díky nim totiž splníme předpoklady důležitých tvrzení v [6], ze kterých bude konvergence plynout.

V tvrzeních budeme uvažovat lineární operátory na obecném Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, respektive na direktním součtu $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Následovně se přesvědčíme, zda náš diskrétní Diracův operátor splňuje požadované vlastnosti.

Následující definice z [6] zachycují podstatné algebraické vlastnosti Diracova operátoru jakožto operátorové matice.

Definice 12 (Supernáboj)**.** *Nechť $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Pak Q je supernábojem vzhledem k $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, jestliže*

$$\begin{aligned} &\tau\,(\mathrm{Dom}(Q)) \subset \mathrm{Dom}(Q), \\ &\tau Q + Q\tau = 0. \end{aligned}$$

Definice 13 (Diracův operátor se supersymetrií)**.** *Nechť $D, Q, M, \tau \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. D nazveme Diracovým operátorem se supersymetrií, jestliže má formu*

$$D = Q + M\tau, \tag{3.9}$$

přičemž

1. *Q je supernáboj vzhledem k τ,*
2. *M je pozitivní samosdružený operátor, navíc omezený, tedy i všude definovaný,*
3. *M komutuje s Q, τ*

a jsou splněny následující podmínky pro definiční obory operátorů

$$\begin{aligned} &M\,(\mathrm{Dom}(Q)) \subset \mathrm{Dom}(Q), \\ &\tau\,(\mathrm{Dom}(M)) \subset \mathrm{Dom}(M). \end{aligned}$$

Poznámka. *B. Thaller v kontextu nerelativistické limity dále pracuje s Diracovým operátorem tvaru*

$$H_0(c) = cQ + Mc^2\tau, \tag{3.10}$$

kde $c > 0$. Je zřejmé, že násobení konstantou c, respektive c^2 na splnění požadavků z definice 12, 13 *nic nezmění, jak lze například vidět v důkazu následujícího tvrzení.*

Přesvědčme se, že diskrétní Diracův operátor, který studujeme, je opravdu Diracův operátor se supersymetrií. V našem případě je

$$D_c = c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = cQ + Mc^2\tau,$$

kde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix},$$
$$M = m\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

M je tedy pouze operátor násobení klidovou hmotností a τ připomíná jednu z Pauliho matic, konkrétně $\tau = \sigma_3 \mathbb{I}_{\ell^2}$.

Tvrzení 25. $D_c = \begin{pmatrix} mc^2 & cd^- \\ cd^+ & -mc^2 \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ *je Diracův operátor se supersymetrií.*

Důkaz tvrzení 25. Náš diskrétní Diracův operátor je definovaný na prostoru $\ell^2 \oplus \ell^2$. Ačkoliv v sobě již obsahuje faktory c jako v zápisu (3.10), zapíšeme jej pro ověření vlastností supersymetrie ve tvaru z rovnice (3.9).

$$D_c = c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

kde pro změnu

$$Q = c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix},$$
$$M = mc^2\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Ověřme nejprve, že Q je supernábojem vzhledem k τ. Podmínka na definiční obory je jistě splněna, neboť $\mathrm{Dom}(Q) = \ell^2$. Podmínka antikomutace je splněna také, neboť

$$\tau Q + Q\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ -d^+ & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$M = mc^2(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I})$ je jistě pozitivní, neboť $m, c > 0$ a je to násobek identity na $\ell^2 \oplus \ell^2$, je tedy hermitovský.

Nakonec je zřejmé, že M komutuje s Q, τ, neboť je to násobek identity, která komutuje s každým operátorem na $\ell^2 \oplus \ell^2$. □

Definujme pro další tvrzení několik operátorů. P_+, respektive P_- jsou operátorové matice, jedná se v jistém smyslu o projekce na první, resp. druhou složku.

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Dále rezolventa operátoru $H_{0,\infty}$ bude téměř náš limitní operátor pro rezolventu $D_c - mc^2$.

$$H_{0,\infty} = \frac{1}{2} M^{-1} Q^2$$

Pro takto zavedené operátory platí následující tvrzení z [6].

Tvrzení 26. *Nechť $H_0(c) = cQ + Mc^2\tau$ je Diracův operátor se supersymetrií. Pak pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} &\left(H_0(c) \mp Mc^2 - \lambda\right)^{-1} \\ &= \left(P_\pm \pm \frac{1}{c^2}\frac{1}{2}M^{-1}(cQ+\lambda)\right)\left(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \mp \frac{1}{2c^2}M^{-1}\lambda^2(\pm H_{0,\infty} - \lambda)\right)^{-1} (\pm H_{0,\infty} - \lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Tvrzení 27. *Tvrzení* 26 *má za důsledek konvergenci rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru.*

Důkaz tvrzení 27. Přesvědčme se o platnosti tvrzení dosazením operátorů, které zkoumáme.

$$\begin{aligned} H_0(c) &= D_c, \\ Mc^2 &= mc^2, \\ H_{0,\infty} &= \frac{1}{2}M^{-1}Q^2 = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} d^-d^+ & 0 \\ 0 & d^+d^- \end{pmatrix} = H \oplus H, \end{aligned}$$

kde H je diskrétní Laplaceův operátor. Potom

$$\begin{aligned} &\left(D_c \mp mc^2 - \lambda\right)^{-1} \\ &= \left(P_\pm \pm \frac{1}{2mc^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & cd^- \\ cd^+ & 0 \end{pmatrix} + \lambda\right)\right)\left(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \mp \frac{\lambda^2}{2mc^2}(\pm H \oplus H - \lambda)\right)^{-1} (\pm H \oplus H - \lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Chceme zkoumat limitu pro $c \to \infty$. Využijeme opět tvrzení 4. Chceme dokázat, že v prostoru $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ je

$$\begin{aligned} &\left(P_\pm \pm \frac{1}{2mc^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & cd^- \\ cd^+ & 0 \end{pmatrix} + \lambda\right)\right) \xrightarrow{c\to\infty} P_\pm, \\ &\left(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \mp \frac{\lambda^2}{2mc^2}(\pm H \oplus H - \lambda)\right)^{-1} \xrightarrow{c\to\infty} \mathbb{I} \oplus \mathbb{I}. \end{aligned}$$

První z konvergencí je jednoduché ověřit za pomocí tvrzení 16 a trojúhelníkové nerovnosti. Platí totiž

$$\left\| \pm \tfrac{1}{2mc^2} \left(\begin{pmatrix} 0 & cd^- \\ cd^+ & 0 \end{pmatrix} + \lambda \right) \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} \leq \frac{1}{2mc} \left\| \begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix} \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} + \frac{1}{2mc^2} \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)}$$
$$\leq \frac{\left\| d^+ \right\|_{B(\ell^2)} + \left\| d^- \right\|_{B(\ell^2)}}{2mc} + \frac{|\lambda|}{2mc^2} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Co se týče druhé konvergence, z tvrzení 7, které můžeme pro dost velká $c > 0$ užít, získáme

$$\left\| \left(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \mp \tfrac{\lambda^2}{2mc^2} \left(\pm H \oplus H - \lambda \right) \right)^{-1} - \mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} = \left\| \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\pm \tfrac{\lambda^2}{2mc^2} \left(\pm H \oplus H - \lambda \right) \right)^k \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)}$$
$$\leq \left| \tfrac{\lambda^2}{2mc^2} \right| \left\| \pm H \oplus H - \lambda \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} \left(1 - \left| \tfrac{\lambda^2}{2mc^2} \right| \left\| \pm H \oplus H - \lambda \right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} \right)^{-1} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Celkem

$$\left(D_c \mp mc^2 - \lambda \right)^{-1} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} P_{\pm} \begin{pmatrix} H - \lambda & 0 \\ 0 & H - \lambda \end{pmatrix}^{-1}.$$

Speciálně

$$\left(D_c - mc^2 - \lambda \right)^{-1} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} (H - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

což přesně odpovídá (2.10).

Naopak

$$\left(D_c + mc^2 - \lambda \right)^{-1} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (H - \lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

odkud je vidět symetrie naší úlohy vyšetřování konvergence rezolventy D_c vůči přičtení či odečtení klidové energie mc^2. □

Kapitola 4

Taylorův rozvoj rezolventy

V této kapitole budeme hledat rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru. Využijeme naší předchozí práce, především tedy vztahu unitárně sdružených operátorů z $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ a $B(L^2 \oplus L^2)$, kdy Taylorův rozvoj nejprve provedeme pro rezolventu $\mathbb{D}_c \in B(L^2 \oplus L^2)$ a poté zjistíme, jak vypadá kýžený Taylorův rozvoj unitárně sdružené rezolventy $D_c \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. Konkrétně je naším cílem získat na okolí $1/c = 0$ rozvoj

$$\left(D_c - mc^2\mathbb{I} - \lambda\right)^{-1} = (H - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} X_n.$$

Zkoumejme tedy operátor $\mathbb{D}_c$. Nyní již víme, že rezolventa operátoru $\mathbb{D}_c$ v operátorové normě konverguje k operátoru $(\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0$. Zabývejme se otázkou, jak rychlá ona konvergence je. Chtěli bychom na okolí $1/c = 0$ získat rozvoj

$$(\mathbb{D}_c - \lambda)^{-1} = (\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} \mathbb{X}_n \tag{4.1}$$

v prostoru $B(L^2 \oplus L^2)$. Toto okolí se bude lišit v závislosti na λ. Člen s faktorem $\frac{1}{c^0}$ by jistě měl být právě limitní operátor $(\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0$.

Při hledání matic $\mathbb{X}_j$ budeme postupovat tak, že nejdříve je najdeme jako kandidáty pomocí Taylorova rozvoje jednotlivých funkcí příslušných prvků operátorové matice. Poté ověříme, zda jsme našli správné kandidáty konvergencí v operátorové normě.

Prvky matice $(\mathbb{D}_c - \lambda)^{-1}$ můžeme pomocí substituce $\epsilon = \frac{1}{c}$ přepsat následovně

$$\begin{pmatrix} \frac{-2mc^2-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{ic(1-e^{-it})}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \\ \frac{ic(e^{it}-1)}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} & \frac{-\lambda}{\lambda^2+2\lambda mc^2+2c^2(\cos t-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2m-\lambda/c^2}{\lambda^2/c^2+2(\lambda m+\cos t-1)} & \frac{i(1-e^{-it})/c}{\lambda^2/c^2+2(\lambda m+\cos t-1)} \\ \frac{i(e^{it}-1)/c}{\lambda^2/c^2+2(\lambda m+\cos t-1)} & \frac{-\lambda/c^2}{\lambda^2/c^2+2(\lambda m+\cos t-1)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-2m-\lambda\epsilon^2}{\lambda^2\epsilon^2+2(\lambda m+\cos t-1)} & \frac{i(1-e^{-it})\epsilon}{\lambda^2\epsilon^2+2(\lambda m+\cos t-1)} \\ \frac{i(e^{it}-1)\epsilon}{\lambda^2\epsilon^2+2(\lambda m+\cos t-1)} & \frac{-\lambda\epsilon^2}{\lambda^2\epsilon^2+2(\lambda m+\cos t-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}.$$

Proveďme nyní pro každou složku Taylorův rozvoj v proměnné ϵ. Pro přehlednost rozvoje si pomůžeme substitucemi. Začněme se členem S_{11}.

$$K = -\lambda,\ L = -2m,\ M = \lambda^2,\ N = 2(\lambda m + \cos t - 1),\ \frac{M}{N}\epsilon^2 = x,$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{-2m - \lambda\epsilon^2}{\lambda^2\epsilon^2 + 2(\lambda m + \cos t - 1)} = \frac{K\epsilon^2 + L}{M\epsilon^2 + N} = \frac{K}{M} + \frac{\frac{L}{N} - \frac{K}{M}}{\frac{M}{N}\epsilon^2 + 1} = \frac{K}{M} + \left(\frac{L}{N} - \frac{K}{M}\right)\frac{1}{1+x} \\
&= \frac{K}{M} + \left(\frac{L}{N} - \frac{K}{M}\right)\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j x^j = \frac{L}{N} + \left(\frac{L}{N} - \frac{K}{M}\right)\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{M}{N}\right)^j\epsilon^{2j} \\
&= \frac{-m}{(\lambda m + \cos t - 1)} + \left(\frac{-2m}{2(\lambda m + \cos t - 1)} + \frac{1}{\lambda}\right)\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j\epsilon^{2j} \\
&= \frac{-m}{(\lambda m + \cos t - 1)} + \left(\frac{\cos t - 1}{\lambda(\lambda m + \cos t - 1)}\right)\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j\epsilon^{2j}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Rozvoj členů S_{12} a S_{21} provedeme naráz s podobnými substitucemi.

$$F = i(1 - e^{-it}),\ M = \lambda^2,\ N = 2(\lambda m + \cos t - 1),$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{i(1 - e^{-it})\epsilon}{\lambda^2\epsilon^2 + 2(\lambda m + \cos t - 1)} = \frac{\frac{F}{N}\epsilon}{\frac{M}{N}\epsilon^2 + 1} = \frac{F}{N}\epsilon\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{M}{N}\right)^j\epsilon^{2j} \\
&= \frac{i(1 - e^{-it})\epsilon}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j\epsilon^{2j} \qquad (4.3) \\
S_{21} &= \frac{i(e^{it} - 1)\epsilon}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j\epsilon^{2j}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

A nakonec člen S_{22} při užití substitucí z (4.2).

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{-\lambda\epsilon^2}{\lambda^2\epsilon^2 + 2(\lambda m + \cos t - 1)} = \frac{K\epsilon^2}{M\epsilon^2 + N} = \frac{K}{N}\epsilon^2\frac{1}{\frac{M}{N}\epsilon^2 + 1} \\
&= \frac{-\lambda}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^{j-1}\epsilon^{2j}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Nyní známe podobu na kandidáty matic $\mathbb{X}_j$ v rozvoji. Můžeme pozorovat, že diagonální členy S_{11} a S_{22} jsou netriviální právě pro sudé indexy j. Naopak členy S_{12} a S_{21} jsou netriviální právě pro liché indexy j. Navíc lze vidět, že absolutní člen přesně sedí na operátor, jak jsme očekávali z vyšetření konvergence.

$$\mathbb{X}_0 = (\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 = \begin{pmatrix} \frac{m}{1-\cos t - m\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

$$\mathbb{X}_{2j} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\cos t - 1}{\lambda(\lambda m + \cos t - 1)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^{j-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.7)$$

$$\mathbb{X}_{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i(1 - e^{-it})}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j \\ \frac{i(e^{it} - 1)}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

Chceme ověřit, že jsme kandidáty vybrali správně. Cílem je ukázat rovnost (4.1), kde na pravé straně je vlastně limita v podobě nekonečné sumy, tedy jinak řečeno ověřujeme, zda na kladném okolí $\epsilon = 0$, závisejícím na λ, platí v prostoru $B(L^2 \oplus L^2)$ rozvoj

$$(\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1} = \lim_{N\to+\infty} \left((\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{N} \epsilon^n \mathbb{X}_n \right),$$

tedy

$$\begin{aligned} &\left\| (\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1} - \lim_{N\to+\infty} \left((\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \textstyle\sum_{n=1}^{N} \epsilon^n \mathbb{X}_n \right) \right\|_{B(L^2\oplus L^2)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\| (\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1} - \left((\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \textstyle\sum_{n=1}^{N} \epsilon^n \mathbb{X}_n \right) \right\|_{B(L^2\oplus L^2)} = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ukažme, že výraz, ze kterého děláme limitu v (4.9) přesně sedí na výraz $\left\| \mathbb{M} - \mathbb{M}_{F^N_\epsilon} \right\|_{B(L^2\oplus L^2)}$ z důkazu tvrzení 18. Tím bude kýžená rovnost dokázána, neboť ze znění tvrzení 18 bude plynout, že pro nějaké $G, L > 0$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \left\| (\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1} - \left((\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \textstyle\sum_{n=1}^{N} \epsilon^n \mathbb{X}_n \right) \right\|_{B(L^2\oplus L^2)} \le \lim_{N\to\infty} 2GL^{N+1}\epsilon^{N+1} = 0,$$

kde poslední rovnost platí pro $\epsilon < L^{-1}$. Jak již bylo zmíněno, okolí $1/c = 0$ závisí na λ a právě zde můžeme vidět důvod. Konstanta L totiž bude vznikat odhadováním jistých funkcí, které však závisí na λ, což může a bude odhady ovlivňovat. V jistém smyslu bychom tedy mohli psát $L = L(\lambda)$.

Jinak řečeno, je nutné ověřit, že operátorová matice $(\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1}$ splňuje předpoklady tvrzení 18, přesněji, že všechny prvky této operátorové matice splňují předpoklady tvrzení 17.

Předpoklad, že funkce z prvků operátorové matice $(\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1}$ lze rozvinout do řady, je jistě splněn, neboť rozvoje jsme přesně napočítali v rovnicích (4.2) až (4.5). Zbývá nám se přesvědčit, že pro všechny čtyři prvky v operátorové matici $\mathbb{X}_j$, tj. pro všechny čtyři operátory násobení funkcí f_j odpovídající prvkům matic z rovnic (4.6) až (4.8) platí

$$\left(\exists \hat{G}, L > 0 \right) \left(\left\| f_j \right\|_{B(L^2)} = \left\| f_j \right\|_\infty \le \hat{G} L^j \right).$$

Poznamenejme, že při vyšetřování odhadů norem operátorů násobení budeme užívat opakovaně užívat tvrzení 11.

Začněme operátorovou maticí s indexem 0

$$\mathbb{X}_0 = (\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 = \begin{pmatrix} \frac{m}{1-\cos t - m\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operátory násobení nulou, které se mimochodem budou objevovat i v maticích $\mathbb{X}_{2j}$ a $\mathbb{X}_{2j+1}$ jsou jistě omezené, mají nulovou normu. Levý horní prvek v operátorové matici lze v normě odhadnout

$$\left\| \tfrac{m}{1-\cos t - m\lambda} \right\|_{B(L^2)} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left| \tfrac{m}{1-\cos t - m\lambda} \right| \le \frac{m}{K} = \hat{G} L^0, \tag{4.10}$$

kde $\hat{G} = \frac{m}{K}$ a odhad jmenovatele jsme provedli stejně jako v (3.3), kde je podrobněji popsáno hledání konstanty K.

Pokračujme maticí s indexem $2j$, hledáme tedy odhady pro normy operátorů násobení ve tvaru $\hat{G}L^{2j}$.

$$\mathbb{X}_{2j} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\cos t-1}{\lambda(\lambda m+\cos t-1)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^{j-1} \end{pmatrix},$$

odkud

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\left(\frac{\cos t-1}{\lambda(\lambda m+\cos t-1)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j\right| \leq \left(\frac{2}{|\lambda| K}\right)\left(\frac{|\lambda^2|}{2K}\right)^j = \left(\frac{2}{|\lambda| K}\right)\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}\right)^{2j} = \hat{G}L^{2j}, \tag{4.11}$$

zde $\hat{G} = \frac{2}{|\lambda|K}$ a $L = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}$.

Dále

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{-\lambda}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^{j-1}\right| \leq \frac{|\lambda|}{2K}\left(\frac{|\lambda^2|}{2K}\right)^{j-1} = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}\right)^{2j} = \hat{G}L^{2j}, \tag{4.12}$$

kde $\hat{G} = \frac{1}{|\lambda|}$ a opět $L = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}$.

Nakonec nalezněme horní odhad pro operátorovou matici s indexem $2j + 1$, hledáme tedy odhady pro normy operátorů násobení ve tvaru $\hat{G}L^{2j+1}$.

$$\mathbb{X}_{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i(1-e^{-it})}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j \\ \frac{i(e^{it}-1)}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j & 0 \end{pmatrix},$$

odkud

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{i(1-e^{-it})}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j\right| \leq \frac{1}{K}\left(\frac{|\lambda^2|}{2K}\right)^j = \frac{1}{K}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}\right)^{-1}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}\right)^{2j+1} = \hat{G}L^{2j+1}, \tag{4.13}$$

kde $\hat{G} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}|\lambda|}$ a opět máme stejné $L = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}$.

Nakonec naprosto stejnými konstantami $\hat{G}$, L lze odhadnout

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{i(e^{it}-1)}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j\right| \leq \frac{1}{K}\left(\frac{|\lambda^2|}{2K}\right)^j = \hat{G}L^{2j+1}. \tag{4.14}$$

Poznamenejme, že omezovací konstanta L je ve všech odhadech (4.11), (4.12), (4.13) a (4.14) stejná. Do tvrzení 18 bereme $L = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2K}}$ a konstantu G větší než všechny $\hat{G}$ z odhadů (4.10) až (4.14), jistě lze brát

$$G = \frac{m}{K} + \frac{2}{|\lambda| K} + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}\,|\lambda|}$$

Do tvrzení 18, respektive tvrzení 17 jsme tedy našli omezovací konstanty pro všechny prvky maticového rozvoje. Konstantu L jsme našli stejnou pro všechny čtyři prvky operátorové matice. Tím pádem pádem výraz, ze kterého děláme limitu v (4.9) opravdu sedí na $\left\|\mathbb{M} - \mathbb{M}_{S_N}\right\|_{B(L^2\oplus L^2)}$ z tvrzení 18.

Nezapomeňme, že jsme rozvoj udělali v prostoru $B(L^2 \oplus L^2)$, ale nás zajímá především vyšetření asymptotiky v prostoru $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. Z rozvoje

$$(\mathbb{D}_{\frac{1}{\epsilon}} - \lambda)^{-1} = (\mathbb{H} - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} \mathbb{X}_n \tag{4.15}$$

dostaneme rozvoj původní rezolventy

$$\left(D_c - mc^2\mathbb{I} - \lambda\right)^{-1} = (H - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} X_n$$

převedením (4.15) do původního prostoru $B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ pomocí obložení operátory $U^{-1} \oplus U^{-1}$ zleva a $U \oplus U$ zprava. Zajímá nás tedy předpis pro

$$X_n = U^{-1} \oplus U^{-1} \mathbb{X}_n U \oplus U.$$

Nadále několikrát využijeme otočení rovnic (2.3), (2.4), (2.5) a (3.1), odkud víme, že

$$\begin{aligned}
Ud^+U^{-1} &= -i(e^{it} - 1),\\
Ud^-U^{-1} &= -i(1 - e^{-it}),\\
UHU^{-1} &= \frac{1 - \cos t}{m},\\
U(H - \lambda)^{-1}U^{-1} &= \frac{m}{1 - \cos t - m\lambda}.
\end{aligned}$$

Opět musíme případ pro sudé a liché indexy vyřešit zvlášť.

$$\begin{aligned}
X_{2n} &= U^{-1} \oplus U^{-1} \mathbb{X}_{2n} U \oplus U\\
&= \begin{pmatrix} U^{-1}\left(\frac{\cos t - 1}{\lambda(\lambda m + \cos t - 1)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j U & 0 \\ 0 & U^{-1}\frac{-\lambda}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^{j-1} U \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&U^{-1}\left(\frac{\cos t - 1}{\lambda(\lambda m + \cos t - 1)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j U = U^{-1}\left(\frac{m(1 - \cos t)}{\lambda m(1 - \lambda m - \cos t)}\right)\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j U\\
&= \frac{1}{\lambda}(H - \lambda)^{-1} H \left(\frac{\lambda^2}{2m}(H - \lambda)^{-1}\right)^j,
\end{aligned}$$

$$U^{-1}\frac{-\lambda}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^{j-1} U = \frac{\lambda}{2m}(H - \lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H - \lambda)^{-1}\right)^{j-1},$$

z čehož získáváme

$$X_{2j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(H - \lambda)^{-1} H \left(\frac{\lambda^2}{2m}(H - \lambda)^{-1}\right)^j & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2m}(H - \lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H - \lambda)^{-1}\right)^{j-1} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
X_{2j+1} &= U^{-1} \oplus U^{-1} \mathbb{X}_{2j+1} U \oplus U\\
&= \begin{pmatrix} 0 & U^{-1}\frac{i(1 - e^{-it})}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j U \\ U^{-1}\frac{i(e^{it} - 1)}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m + \cos t - 1)}\right)^j U & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$U^{-1}\frac{i(1-e^{-it})}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j U = d^-\frac{1}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}\right)^j,$$

$$U^{-1}\frac{i(e^{it}-1)}{2(\lambda m+\cos t-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2(\lambda m+\cos t-1)}\right)^j U = d^+\frac{1}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}\right)^j,$$

kde jsme navíc použili rovnice 2.3 a 2.4 a odkud

$$X_{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & d^-\frac{1}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}\right)^j \\ d^+\frac{1}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}\right)^j & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Kapitola 5

Přidání potenciálu

5.1 Zavedení potenciálu a užití rozkladu z tvrzení 20

V této části budeme zkoumat rezolventu operátoru, který vznikne tak, že ke každému prvku maticového operátoru $D_c - mc^2$ přičteme operátor $V_{ij} \in B(\ell^2)$. Označme V maticový operátor

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2),$$

který budeme také nazývat potenciál nebo porucha.

Tato kapitola bude opět založená na maticovém rozkladu z tvrzení 20, které aplikujeme na maticový operátor

$$D_c - mc^2 + V = \begin{pmatrix} V_{11} & cd^- + V_{12} \\ cd^+ + V_{21} & -2mc^2 + V_{22} \end{pmatrix}.$$

Pak pro $\lambda \notin \sigma(-2mc^2 + V_{22})$

$$\begin{aligned} &D_c - mc^2 + V - \lambda = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & (cd^- + V_{12})\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S}_1(\lambda) & 0 \\ 0 & (-2mc^2 - \lambda) + V_{22} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} (cd^+ V_{21}) & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $\hat{S}_1(\lambda) = V_{11} - \lambda - (cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1}(cd^+ + V_{21})$.

Tuto operátorovou matici nyní invertujeme za pomocí tvrzení (5) a (19).

$$\begin{aligned} &\left(D_c - mc^2 + V - \lambda\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}(cd^+ + V_{21}) & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S}_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -(cd^- + V_{12})\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2 Korektnost rozkladu

Diskutujme nyní opět volbu λ, pro kterou je rozklad (5.1) proveden korektně. Nezískáme však tak elegantní podmínku na λ jako v tvrzení 24, nebude nám tedy stačit $\lambda \in \varrho(D_c - mc^2 + V)$.

Jak jsme již zmínili, z tvrzení 20 nutně $\lambda \notin \sigma(-2mc^2 + V_{22})$, což také zařizuje omezenost $\hat{S}_1(\lambda)$, navíc budeme v této podkapitole často pracovat se zlomkem $\frac{1}{2mc^2+\lambda}$, předpokládejme tedy navíc i $\lambda \neq -2mc^2$, což je pro libovolné a pevné λ splněno, vezmeme-li dostatečně velké $c > 0$.

Stejně jako v kapitole 3.2 z tvrzení 5 a 19 plyne, že první a poslední matice z rozkladu (5.1) jsou bijekce. První omezení je, že λ musí být z rezolventní množiny $\varrho\left(D_c - mc^2 + V\right)$. Další omezení plyne z toho, že musí existovat všude definovaná, omezená inverze prostřední matice z rozkladu (5.1), tím pádem musí existovat

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2).$$

Zaměřme se na existenci inverze operátoru $\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)$.

$$\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right) = (-2mc^2 - \lambda)\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2 + \lambda} V_{22}\right)$$

Uvažujme fixní λ. Vzhledem k tomu, že budeme zkoumat limitu $c \to +\infty$, pro dost velká $c > 0$ lze na operátor $\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2+\lambda} V_{22}\right)$ užít tvrzení 7, odkud existuje omezená inverze operátoru $\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2+\lambda} V_{22}\right)$.

Celkem pak pro dost velká $c > 0$

$$\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} = \frac{-1}{(2mc^2 + \lambda)}\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2 + \lambda} V_{22}\right)^{-1} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2).$$

Zbývá otázka, kdy existuje omezená a všude definovaná inverze operátoru

$$\hat{S}_1(\lambda) = V_{11} - \lambda - (cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1} (cd^+ + V_{21})\,.$$

Pomůže nám opět dodatek v tvrzení 20, že $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(D) = \sigma(S_1)$, odkud stejně jako v podkapitole 3.2 získáváme

$$\varrho(D_c - mc^2 + V) \setminus \sigma(-2mc^2 + V_{22}) = \varrho(\hat{S}_1(\lambda)),$$

kde $\varrho(\hat{S}_1(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(-2mc^2 + V_{22}), S_1 \text{ je bijekce na } \ell^2\}$.

Jelikož z tvaru operátoru $\hat{S}_1(\lambda)$ nelze jednoduše přesně určit spektrum například pomocí teorie Laurentových operátorů, potřebujeme alespoň postačující podmínku pro volbu λ, aby byl rozklad rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou pomocí Schurova doplňku proveden korektně.

Tvrzení 28. *Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ splňuje $|\lambda| > \left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)} + \frac{2}{m} + 1$, pak $\exists c_0 > 0$ tak, že $\forall c > c_0$ je $\lambda \in \varrho(\hat{S}_1(\lambda))$.*

Důkaz tvrzení 28. Přepišme nejdříve operátor $\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\mathbb{I}\right)^{-1}$ tak, aby se nám s ním lépe pracovalo. Z tvrzení 7, jehož předpoklady jsou splněny od jistého $c_0 > 0$ pro $\forall c > c_0$, získáváme

$$\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\mathbb{I}\right)^{-1} = \frac{-1}{2mc^2 + \lambda}\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2 + \lambda} V_{22}\right)^{-1} = \frac{-1}{2mc^2 + \lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2mc^2 + \lambda} V_{22}\right)^k\right)$$
$$= \frac{-1}{2mc^2 + \lambda}\left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2mc^2 + \lambda} V_{22}\right)^k\right),$$

navíc

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2mc^2+\lambda}V_{22}\right)^k\right\|_{B(\ell^2)} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|2mc^2+\lambda|}\left\|V_{22}\right\|_{B(\ell^2)}\right)^k = \frac{|2mc^2+\lambda|}{|2mc^2+\lambda| - \left\|V_{22}\right\|_{B(\ell^2)}} \leq 2.$$

Výraz $\frac{|2mc^2+\lambda|}{|2mc^2+\lambda|-\left\|V_{22}\right\|_{B(\ell^2)}}$ jde totiž limitně pro $c \to +\infty$ k jedné, jistě tím pádem existuje $c_1 > 0$ tak, že pro všechna $c \geq \max\{c_0, c_1\}$ lze normu operátoru výše odhadnout například číslem 2. Šlo by však místo čísla 2 volit libovolnou konstantou větší než 1. Máme tedy odhad normy operátoru nezávislý na c.

Poznamenejme, že pro dostatečně velká $c > \max\{c_0, c_1\}$ z našeho dosavadního pozorování speciálně plyne i

$$\left\|\left(V_{22} - (2mc^2+\lambda)\mathbb{I}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{2}{\left|2mc^2+\lambda\right|}.$$

Označíme-li opět pro $c > \max\{c_0, c_1\}$

$$\mathcal{P}_c(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2mc^2+\lambda}V_{22}\right)^k,$$
$$\left\|\mathcal{P}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{2}{|2mc^2+\lambda|}\left\|V_{22}\right\|_{B(\ell^2)} = O(c^{-2}), \tag{5.2}$$

můžeme psát

$$\left(V_{22} - (2mc^2+\lambda)\right)^{-1} = \frac{-1}{(2mc^2+\lambda)}\left(\mathbb{I} + \mathcal{P}_c(\lambda)\right). \tag{5.3}$$

Potom

$$\begin{aligned}\hat{S}_1(\lambda) = V_{11} - \lambda + \frac{1}{2mc^2+\lambda}\left(cd^- + V_{12}\right)\left(\mathbb{I} + \mathcal{P}_c(\lambda)\right)\left(cd^+ + V_{21}\right) = V_{11} - \lambda + \frac{1}{2m}d^-d^+ +\\ + \frac{c^2}{2mc^2+\lambda}d^-\mathcal{P}_c(\lambda)d^+ + \frac{c}{2mc^2+\lambda}\left(d^-V_{21} + V_{12}d^+ + d^-\mathcal{P}_c(\lambda)V_{21} + V_{12}\mathcal{P}_c(\lambda)d^+\right) +\\ + \frac{1}{2mc^2+\lambda}\left(V_{12}V_{21} + V_{12}\mathcal{P}_c(\lambda)V_{21}\right) - \frac{\lambda}{2m(2mc^2+\lambda)}d^-d^+.\end{aligned}$$

Jelikož je díky nerovnosti (5.2)

$$\left\|\tfrac{c^2}{2mc^2+\lambda}d^-\mathcal{P}_c(\lambda)d^+\right\|_{B(\ell^2)} \leq \left|\tfrac{c^2}{2mc^2+\lambda}\right|\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)}\left\|\mathcal{P}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)}\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)} = O(c^{-2}),$$

můžeme označit

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda) = \frac{c^2}{2mc^2+\lambda}d^-\mathcal{P}_c(\lambda)d^+ + \frac{c}{2mc^2+\lambda}\left(d^-V_{21} + V_{12}d^+ + d^-\mathcal{P}_c(\lambda)V_{21} + V_{12}\mathcal{P}_c(\lambda)d^+\right) +\\ + \frac{1}{2mc^2+\lambda}\left(V_{12}V_{21} + V_{12}\mathcal{P}_c(\lambda)V_{21}\right) - \frac{\lambda}{2m(2mc^2+\lambda)}d^-d^+,\end{aligned}$$

přičemž $\left\|\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} = O(c^{-1})$.

Celkem pro $\lambda \neq 0$

$$\hat{S}_1(\lambda) = V_{11} - \lambda + H + \hat{\mathcal{P}}_c(\lambda) = -\lambda\left(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}V_{11} - \frac{1}{\lambda}H - \frac{1}{\lambda}\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right).$$

Nyní bychom chtěli využít tvrzení 7, z čehož budou plynout naše požadavky na λ. Nenulový pevný předfaktor $-\lambda$ na invertibilitě nic nemění. Poznamenejme, že $\left\|\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} = O(c^{-1})$ implikuje existenci konstanty $L > 0$ tak, že $\left\|\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{L}{c}$. Postačující podmínkou nám tedy bude

$$\left\|\tfrac{1}{\lambda}V_{11} + \tfrac{1}{\lambda}H + \tfrac{1}{\lambda}\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)} + \left\|H\right\|_{B(\ell^2)} + \left\|\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)}\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)} + \frac{2}{m} + \frac{L}{c}\right) < 1,$$

kde konstanta L je určena asymptotickým chováním $\left\|\hat{\mathcal{P}}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)}$. Vezmeme-li však libovolně malé $\epsilon > 0$, v kontextu limity pro dostatečně velká $c > 0$ můžeme $\frac{L}{c}$ nahradit ϵ. My volíme $\epsilon = 1$, z čehož plyne podmínka pro velikost λ v podobě

$$|\lambda| > \left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)} + \frac{2}{m} + 1.$$

□

5.3 Vyšetření konvergence rezolventy s poruchou

Začněme s vyšetřováním konvergence rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou. λ volíme tak, aby byl splněn předpoklad tvrzení 28, tedy $|\lambda| > \left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)} + \frac{2}{m} + 1$. Přesvědčme se, že první a poslední matice z rozkladu (5.1) konvergují k $\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}$ v operátorové normě. Nejprve využijeme tvrzení 16, dále na složený operátor v normě aplikujeme tvrzení 3 a trojúhelníkovou nerovnost.

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}(cd^+ + V_{21}) & \mathbb{I}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \\
&\leq \left\|-\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}(cd^+ + V_{21})\right\|_{B(\ell^2)} \leq \left\|\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)}\left\|(cd^+ + V_{21})\right\|_{B(\ell^2)} \\
&= \frac{1}{\left|2mc^2 + \lambda\right|}\left\|\left(\mathbb{I} - \tfrac{1}{2mc^2+\lambda}V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)}\left(c\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)} + \left\|V_{21}\right\|_{B(\ell^2)}\right) \xrightarrow{c\to\infty} 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A stejně

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix}\mathbb{I} & -(cd^- + V_{12})\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \\
&\leq \left\|(cd^- + V_{12})\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \\
&\leq \left\|(cd^- + V_{12})\right\|_{B(\ell^2)}\left\|\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \\
&\leq \frac{1}{\left|2mc^2 + \lambda\right|}\left(c\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)} + \left\|V_{12}\right\|_{B(\ell^2)}\right)\left\|\left(\mathbb{I} - \tfrac{1}{2mc^2+\lambda}V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Při výpočtu obou limit jsme využili, že normu operátoru $\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2mc^2+\lambda} V_{22}\right)^{-1}$ můžeme pro dostatečně velká $c > 0$ z důkazu tvrzení 28 odhadnout výrazem $\frac{2}{\left|2mc^2 + \lambda\right|}$. Taktéž d^+, d^-, V_{12}, V_{21} jsou omezené operátory, jejich norma je tedy konečná. Dohromady jdou limitně výrazy z (5.4) a (5.5) pro $c \to \infty$ k nule.

Zbývá vyšetřit, k jaké operátorové matici konverguje v operátorové normě operátorová matice

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Jediný nenulový prvek limitní operátorové matice bude zřejmě ten první, neboť jak jsme již vyšetřili, norma operátoru $\left((-2mc^2 - \lambda) + V_{22}\right)^{-1}$ jde limitně k nule. Z podoby operátoru

$$\hat{S}_1(\lambda) = V_{11} - \lambda - (cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1}(cd^+ + V_{21}),$$

respektive jeho inverze

$$\hat{S}_1^{-1}(\lambda) = \left(V_{11} - \lambda - (cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1}(cd^+ + V_{21})\right)^{-1}$$

lze očekávat, že členy V_{11} a λ zůstanou i v limitním operátoru $\lim_{c\to\infty} \hat{S}_1(\lambda)$, respektive v inverzi $\lim_{c\to\infty} \hat{S}_1^{-1}(\lambda)$ zachovány. Dále můžeme očekávat, že díky faktorům c z výrazu

$$-(cd^- + V_{12})\left(V_{22} - 2mc^2 - \lambda\right)^{-1}(cd^+ + V_{21})$$

v limitních operátorech zbude pouze $\frac{1}{2m} d^- d^+ = H$.

Ověřme naši predikci, zda

$$\left\|\hat{S}_1(\lambda) - (H + V_{11} - \lambda)\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c\to\infty} 0. \tag{5.6}$$

Platí

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_1(\lambda) - (H + V_{11} - \lambda) = V_{11} - \lambda - (cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1}(cd^+ + V_{21}) - (H + V_{11} - \lambda) \\
&= -(cd^- + V_{12})\left(V_{22} - (2mc^2 + \lambda)\right)^{-1}(cd^+ + V_{21}) - H \\
&= (cd^- + V_{12})\frac{1}{(2mc^2 + \lambda)}(\mathbb{I} + \mathcal{P}_c(\lambda))(cd^+ + V_{21}) - H \\
&= \frac{2mc^2}{(2mc^2 + \lambda)} H - H + (cd^- + V_{12})\frac{1}{(2mc^2 + \lambda)}(\mathcal{P}_c(\lambda))(cd^+ + V_{21}) + \\
&+ \frac{1}{(2mc^2 + \lambda)}\left((cd^- + V_{12})V_{21} + V_{12}(cd^+ + V_{21})\right),
\end{aligned}$$

kdy jsme využili rovnosti (5.3), ve které je člen $\left\|\mathcal{P}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} = O(c^{-2})$. Z toho získáváme

$$\begin{aligned}\left\|\hat{S}_1(\lambda)-(H+V_{11}-\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} &\leq \left|\tfrac{\lambda}{2mc^2+\lambda}\right| \left\|H\right\|_{B(\ell^2)} + \\ &+ \frac{\left(c\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|V_{12}\right\|_{B(\ell^2)}\right)\left(c\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|V_{21}\right\|_{B(\ell^2)}\right)}{\left|2mc^2+\lambda\right|}\left\|\mathcal{P}_c(\lambda)\right\|_{B(\ell^2)} + \\ &+ \frac{\left(c\left\|d^-\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|V_{12}\right\|_{B(\ell^2)}\right)\left\|V_{21}\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|V_{12}\right\|_{B(\ell^2)}\left(c\left\|d^+\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|V_{21}\right\|_{B(\ell^2)}\right)}{\left|2mc^2+\lambda\right|},\end{aligned}$$

z čehož je platnost limity (5.6) zřejmá, neboť všechny 3 členy v nerovnosti jdou k nule alespoň jako $\frac{1}{c}$.

Nyní se zaměřme na vyšetření hlavní limity v operátorové normě, kterou chceme v rámci této podkapitoly získat, a to

$$\left\|\begin{pmatrix}\hat{S}_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \left((-2mc^2-\lambda)+V_{22}\right)^{-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.7}$$

Opět můžeme užít nerovnost z tvrzení 16

$$\begin{aligned}&\left\|\begin{pmatrix}\hat{S}_1^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \left((-2mc^2-\lambda)+V_{22}\right)^{-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_{B(\ell^2\oplus\ell^2)} \\ &\leq \left\|\hat{S}_1^{-1}(\lambda)-(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)}+\left\|\left((-2mc^2-\lambda)+V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \\ &\leq \left\|\hat{S}_1^{-1}(\lambda)-(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)}+\frac{1}{\left|2mc^2+\lambda\right|}\left\|\left(\mathbb{I}-\tfrac{1}{2mc^2+\lambda}V_{22}\right)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)},\end{aligned}$$

kde druhý výraz jde jako při vyšetřování v rovnicích (5.4) a (5.5) limitně k nule pro $c\to\infty$.

Pro platnost limity (5.7) zbývá pouze dokázat, zda

$$\left\|\hat{S}_1^{-1}(\lambda)-(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\right\|_{B(\ell^2)} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

což bychom chtěli získat z tvrzení 10, které hovoří právě o konvergenci inverzních operátorů v operátorové normě. Předpoklady tohoto tvrzení opravdu splňujeme, protože máme limitu (5.6) a předpoklad existence operátoru $(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\in B(\ell^2)$ je splněn díky volbě $|\lambda|>\left\|V_{11}\right\|_{B(\ell^2)}+\frac{2}{m}+1$, neboť díky této nerovnosti je jistě λ v rezolventní množině operátoru $H+V_{11}$. Pokládáme $\epsilon=\frac{1}{c}$. Z části tvrzení o rychlosti konvergence navíc víme, že operátor $\hat{S}_1^{-1}(\lambda)-(H+V_{11}-\lambda)^{-1}$ v operátorové normě půjde limitně k 0 jako $\frac{1}{c}$.

Celkem jsme v rozkladu operátorové matice $\left(D_c-mc^2+V-\lambda\right)^{-1}$ na složení tří operátorových matic dokázali, že první a poslední matice jdou v $B(\ell^2\oplus\ell^2)$ limitně pro $c\to\infty$ k identitám a prostřední matice jde limitně pro $c\to\infty$ k $(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\oplus 0$. Z tvrzení 4 plyne, že jsme získali

$$\left(D_c-mc^2+V-\lambda\right)^{-1}\overset{c\to\infty}{\longrightarrow}(H+V_{11}-\lambda)^{-1}\oplus 0 \;\text{ v }\; B(\ell^2\oplus\ell^2).$$

V limitní operátorové matici z původního potenciálu $V=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\in B(\ell^2\oplus\ell^2)$ zbude pouze $V_{11}\in B(\ell^2)$.

5.4 Taylorův rozvoj rezolventy posunutého Diracova operátoru s poruchou

Jako poslední bychom chtěli získat nějakou informaci o tom, jak vypadá Taylorův rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou, popřípadě zda vůbec takový rozvoj existuje. Poslouží nám tvrzení z kapitoly 6.1.3 v [6], která nám říkají, že takový rozvoj udělat lze, uvažujeme-li speciální typ potenciálu.

B. Thaller v [6] uvažuje na prostoru $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ Diracův operátor s poruchou, který označíme

$$H(c) = D + V, \tag{5.8}$$

kde D je Diracův operátor se supersymetrií tak, jako je zaveden v Definici 13, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ je symetrický na $Dom(Q)$, $\tau V = V\tau$ na $Dom(Q)$ a pro $\forall f \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, nějaké $0 < a, b < \infty$ platí

$$\left\|Vf\right\| \leq a\left\|Qf\right\| + b\left\|f\right\|. \tag{5.9}$$

My pro zjednodušení některých důkazů zesílíme předpoklady na $Q, V, \tau \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Omezenost těchto operátorů bude navíc sedět na nastavení s naším diskrétním Diracovým operátorem. Dále budeme uvažovat, že $M = m > 0$ je právě naše konstanta klidové hmotnosti.

Následující tvrzení z [6], na kterém je založena tato podkapitola nám říká. že rezolventu obecného Diracova operátoru se supersymetrií a s vhodně volenou poruchou lze zapsat jako složení tří různých operátorových matic, které mají příznivé vlastnosti pro rozvedení to Taylorova rozvoje. Uveďme ho pro úplnost i s důkazem.

Tvrzení 29. *Nechť $H(c)$ je supersymetrický Diracův operátor s poruchou tak, jako jsme ho zavedli v* 5.8 *včetně navazujícího komentáře. Pak pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je*

$$(H(c) - Mc^2 - \lambda)^{-1} = \left(P_+ + \frac{cQ + \lambda}{2Mc^2}\right)K(c^{-2})\left(1 + \frac{1}{c^2}V\frac{cQ + \lambda}{2M}K(c^{-2})\right)^{-1}, \tag{5.10}$$

kde P_+ bereme jako v 3.11 *a*

$$K(c^{-2}) = \left(H_\infty - \lambda - \frac{1}{2Mc^2}\lambda^2\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2Mc^2}R_\infty\right)^{-1} R_\infty,$$
$$R_\infty = (H_\infty - \lambda)^{-1},\ H_\infty = \frac{Q^2}{2M} + VP_+.$$

Důkaz tvrzení 29. Definujeme

$$K_0 = \left(\frac{Q^2}{2M} - \lambda - \frac{\lambda^2}{2Mc^2}\right)^{-1},$$
$$A_- = cQ - 2Mc^2P_- - \lambda,$$
$$A_+ = cQ + 2Mc^2P_+ + \lambda,$$

kde pro A_- z důkazu tvrzení 6.1 v [6] platí identita

$$A_-^{-1} = \frac{A_+}{2Mc^2}K_0. \tag{5.11}$$

Potom dosazením za A_- z identity 5.11

$$\begin{aligned}
&\left(H(c) - Mc^2 - \lambda\right)^{-1} = \left(cQ + c^2 M\tau - Mc^2 + V - \lambda\right)^{-1} = (A_- + V)^{-1} = A_-^{-1}\left(\mathbb{I} + VA_-^{-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{A_+}{2Mc^2}K_0\left(\mathbb{I} + V\frac{A_+}{2Mc^2}K_0\right)^{-1} = \left(P_+ + \frac{cQ+\lambda}{2Mc^2}\right)K_0\left(\mathbb{I} + VP_+K_0 + V\frac{cQ+\lambda}{2Mc^2}K_0\right)^{-1} \\
&\overset{(a)}{=} \left(P_+ + \frac{cQ+\lambda}{2Mc^2}\right)K_0\left(\mathbb{I} + VP_+K_0\right)^{-1}\left(\mathbb{I} + V\frac{cQ+\lambda}{2Mc^2}K_0\left(\mathbb{I} + VP_+K_0\right)^{-1}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

kdy dosazením

$$K_0\left(\mathbb{I} + VP_+K_0\right)^{-1} = \left(K_0^{-1} + VP_+\right)^{-1} = \left(\frac{Q^2}{2M} - \lambda - \frac{\lambda^2}{2Mc^2} + VP_+\right)^{-1} = \left(H_\infty - \lambda - \frac{1}{2Mc^2}\lambda^2\right)^{-1} = K(c^{-2}) \tag{5.12}$$

získáme kýžené tvrzení. Zbývá ověřit korektnost kroku, kdy v rovnosti (a) "vytýkáme"a pak invertujeme operátor $\mathbb{I} + VP_+K_0$.

$$K(c^{-2}) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2Mc^2}R_\infty\right)^{-1}R_\infty,$$

kde díky volbě $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je jistě R_∞, jakožto rezolventa samosdruženého operátoru (který má jako definiční obor celé $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$), omezený operátor bijektivní z $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ do $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ a pro dost velká $c > 0$ je z tvrzení 7 i $K(c^{-2})$ omezená, všude definovaná bijekce z $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ do $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Stejný argument lze použít pro K_0 a rezolventu samosdruženého operátoru $\left(\frac{Q^2}{2M} - \lambda\right)^{-1}$, z čehož opět z tvrzení 7 plyne stejný závěr. Operátor K_0 je omezená bijekce z $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ do $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, pak z rovnosti

$$K_0^{-1}\left(\mathbb{I} + VP_+K_0\right)^{-1} = K(c^{-2})$$

je nutně $(\mathbb{I} + VP_+K_0)^{-1}$ bijekce z $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ do $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. □

Důsledek tohoto tvrzení dle [6] je , že můžeme získat kýžený Taylorův rozvoj.

Důsledek 4. *Uvažujme $H(c)$ Diracův operátor s poruchou na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ jako v tvrzení 29, pak pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je $(H(c) - Mc^2 - \lambda)^{-1}$ holomorfní v $1/c$ na okolí $1/c = 0$, které závisí na λ, tedy*

$$(H(c) - Mc^2 - \lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} R_n(\lambda)$$

a suma konverguje v operátorové normě, přičemž

$$\begin{aligned}
R_0(\lambda) &= R_\infty P_+ = (H_\infty - \lambda)^{-1} P_+, \\
R_1(\lambda) &= P_+ R_\infty \frac{Q}{2M} + \frac{Q}{2M} R_\infty P_+, \\
R_2(\lambda) &= R_\infty \frac{Q}{2M}\left(\lambda - \left(\frac{Q^2}{2M} - \lambda\right)R_\infty V\right)\frac{Q}{2M}R_\infty
\end{aligned}$$

atd.

Důkaz důsledku 4. Princip, kterým dle [6] Taylorův rozvoj v obecném případě získáváme, je, že třikrát užíváme tvrzení 7 o inverzi operátoru tvaru $\mathbb{I} + A$. Vycházíme z

$$(H(c) - Mc^2 - \lambda)^{-1} = \left(P_+ + \frac{cQ + \lambda}{2Mc^2}\right) K(c^{-2}) \left(1 + \frac{1}{c^2} V \frac{cQ + \lambda}{2M} K(c^{-2})\right)^{-1},$$

přičemž rozvedeme do řady člen

$$K(c^{-2}) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2Mc^2} R_\infty\right)^{-1} R_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^2}{2Mc^2} R_\infty\right)^n R_\infty$$

a poté i člen

$$\left(1 + \frac{1}{c^2} V \frac{cQ + \lambda}{2M} K(c^{-2})\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{c^2} V \frac{cQ + \lambda}{2M} K(c^{-2})\right)^n, \tag{5.13}$$

kde pro dostatečně velká $c > 0$

$$\left\| \tfrac{\lambda^2}{2Mc^2} R_\infty \right\|_{B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})} < 1,$$
$$\left\| \tfrac{1}{c^2} V \tfrac{cQ+\lambda}{2M} K(c^{-2}) \right\|_{B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})} < 1,$$

uvažujeme-li operátory (pro zjednodušení dle poznámky na začátku této podkapitoly) V, Q, M, R_∞ omezené. Oba zmíněné rozvoje tedy lze udělat dle tvrzení 7 pro c dostatečně velká. Povšimněme si, že v rozvoji z rovnice 5.13 se ještě stále vyskytuje $K(c^{-2})$, které je taktéž nutné rozvést do řady. Ideálně bychom chtěli získat explicitní předpis pro $R_n(\lambda)$. To však není možné jednoduše udělat, protože ve výsledku po dosazení řad za příslušné operátory budeme muset pracovat se součinem řady a dvojité řady. Můžeme ale vždy, ačkoliv nejspíš velmi složitě a zdlouhavě, získat předpis $R_n(\lambda)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ pomocí zanedbávání členů s mocninou vyšší než n.

Operátory $R_{0,1,2}(\lambda)$ jsou přesně opsané z kapitoly 6.1.3 v knize [6]. □

V našem konkrétním případě diskrétního Diracova operátoru je

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

a

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2),$$

kde V je hermitovský potenciál na $\mathrm{Dom}(Q) = \ell^2 \oplus \ell^2$, pro který platí $\tau V = V\tau$, což znamená

$$\tau V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ -V_{21} & -V_{22} \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} V_{11} & -V_{12} \\ V_{21} & -V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V\tau,$$

odkud z porovnání prvků operátorových matic v rovnosti (a) nutně $V_{12} = 0 = V_{21}$. Dále V uvažujeme omezený, tím pádem je splněna i nerovnost 5.9, stačí volit $b = \|V\|$.

Jak jsme se již přesvědčili v tvrzení 25, náš Diracův operátor D_c je opravdu Diracův operátor se supersymetrií. Označíme-li $H(c) = D_c + V$ náš případ splňuje předpoklady tvrzení 29 a důsledku 4. Získáváme tím pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\left(D_c - mc^2 + V - \lambda\right)^{-1}\\ &= \left(P_+ + \frac{c}{2mc^2}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2mc^2}\right)K(c^{-2})\left(1 + \frac{1}{2mc^2}V\left(c\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix} + \lambda\right)K(c^{-2})\right)^{-1},\end{aligned}$$

kde máme

$$K(c^{-2}) = \left(H \oplus H - \lambda - \frac{\lambda^2}{2mc^2}\right)^{-1}$$

a kde H je náš diskrétní Laplaceův operátor.

Náš cíl je na nějakém okolí $1/c = 0$ získat rozvoj

$$\left(D_c - mc^2 + V - \lambda\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{c^n} R_n(\lambda),$$

přičemž prvních pár členů rozvoje jsme obdrželi právě v důsledku 4. Víme tedy, že rozvoj existuje, jak již ale bylo řečeno, neznáme předpis všech operátorů $R_n(\lambda)$. Zbývá ještě do důsledku 4 dosadit naše operátory na $\ell^2 \oplus \ell^2$.

$$\begin{aligned}
R_0(\lambda) &= \begin{pmatrix}(H + V_{11} - \lambda)^{-1} & 0\\ 0 & (H-\lambda)^{-1}\end{pmatrix} P_+ = (H + V_{11} - \lambda)^{-1} \oplus 0,\\
R_1(\lambda) &= \frac{1}{2m} P_+ (H + V - \lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix}(H + V - \lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1} P_+\\
&= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}(H + V_{11} - \lambda)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(H + V_{11} - \lambda)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}0 & (H + V_{11} - \lambda)^{-1}d^-\\ d^+(H + V_{11} - \lambda)^{-1} & 0\end{pmatrix},\\
R_2(\lambda) &= \frac{1}{4m^2}(H + V - \lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix}\times\\
&\times\left[\lambda - [(H \oplus H) - \lambda]\left((H + V - \lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}\right)V\right]\begin{pmatrix}0 & d^-\\ d^+ & 0\end{pmatrix}(H + V - \lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}$$

Srovnejme nyní získané členy Taylorova rozvoje rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou s Taylorovým rozvojem rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru bez poruchy z rovnic 4.16 a 4.17. Všimněme si například, že operátorová matice $R_1(\lambda)$ má nenulové pouze mimodiagonální prvky stejně jako operátorová matice X_{2j+1} z rovnice 4.17.

Pokud si odmyslíme potenciál, tedy uvažujeme $V = 0$, měly by tyto tři operátorové matice $R_{0,1,2}(\lambda)$ přesně sedět na operátorové matice $X_{0,1,2}$ z již zmíněných rovnic.

Pro $V = 0$ je zřejmě $R_0(\lambda) = (H-\lambda)^{-1} \oplus 0 = X_0$.

Dále pro $V = 0$ je

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}0 & (H-\lambda)^{-1}d^-\\ d^+(H-\lambda)^{-1} & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}0 & d^-(H-\lambda)^{-1}\\ d^+(H-\lambda)^{-1} & 0\end{pmatrix} = X_1,$$

neboť operátory d^+, d^- komutují s rezolventou $(H-\lambda)^{-1}$ z tvrzení 14.

Nakonec pro $V=0$ z důsledku 4 a rovnosti $d^-d^+ = d^+d^-$ dokázané v tvrzení 22 máme

$$\begin{aligned}
R_2(\lambda) &= \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2m}d^-d^+ & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m}d^+d^- \end{pmatrix} (H-\lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1} \\
&= \frac{\lambda}{2m}\left((H-\lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}\right)(H\oplus H)\left((H-\lambda)^{-1} \oplus (H-\lambda)^{-1}\right) = \\
&= \frac{\lambda}{2m}\begin{pmatrix} (H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zde je vidět, že maticový operátor $R_2(\lambda)$ má na diagonále totožné operátory. Podívejme se však na podobu operátoru X_2.

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

což se s $R_2(\lambda)$ sice shoduje v levém horním diagonálním prvku i v prvcích mimodiagonálních, avšak jistě

$$(H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1} \neq (H-\lambda)^{-1},$$

což odpovídá

$$H(H-\lambda)^{-1} \neq \mathbb{I},$$

tyto operátory jsou odlišné. Operátor $R_2(\lambda)$ uvedený v podobě z [6] nekoresponduje s námi získaným X_2 z kapitoly 4. Proveďme tedy vlastní výpočet prvních 3 členů $R_{0,1,2}(\lambda)$ v obecném nastavení pomocí dosazení rozvojů příslušných operátorů do rovnosti (5.10). Opět pro $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(H(c) - Mc^2 - \lambda)^{-1} \\
&= \left(P_+ + \frac{1}{c}\frac{Q}{2M} + \frac{1}{c^2}\frac{\lambda}{2M}\right)\left(R_\infty + \frac{1}{c^2}\frac{\lambda^2}{2M}R_\infty^2 + O(c^{-4})\right)\times \\
&\times\left(1 - \frac{1}{c}V\frac{Q}{2M}K(c^{-2}) - \frac{1}{c^2}V\frac{\lambda}{2M}K(c^{-2}) - \frac{1}{c^2}V\frac{Q}{2M}K(c^{-2})V\frac{Q}{2M}K(c^{-2}) + O(c^{-3})K(c^{-2})\right) \\
&= \left(\frac{1}{c^0}P_+R_\infty + \frac{1}{c^1}\frac{Q}{2M}R_\infty + \frac{1}{c^2}\left(P_+\frac{\lambda^2}{2M}R_\infty^2 + \frac{\lambda}{2M}R_\infty\right) + O(c^{-3})\right)\times \\
&\times\left(1 - \frac{1}{c}V\frac{Q}{2M}R_\infty - \frac{1}{c^2}V\frac{\lambda}{2M}R_\infty + \frac{1}{c^2}\left(V\frac{Q}{2M}R_\infty\right)^2 + O(c^{-3})\right),
\end{aligned}$$

odkud je

$$\begin{aligned}
\hat{R}_0(\lambda) &= P_+R_\infty, \\
\hat{R}_1(\lambda) &= \frac{Q}{2M}R_\infty - P_+R_\infty V\frac{Q}{2M}R_\infty, \\
\hat{R}_2(\lambda) &= P_+\frac{\lambda^2}{2M}R_\infty^2 + \frac{\lambda}{2M}R_\infty - \frac{Q}{2M}R_\infty V\frac{Q}{2M}R_\infty - P_+R_\infty V\frac{\lambda}{2M}R_\infty + P_+R_\infty\left(V\frac{Q}{2M}R_\infty\right)^2 ..
\end{aligned}$$

Námi získaný člen rozvoje $\hat{R}_0(\lambda)$ sedí s tím uvedeným v [6].

Porovnáním dalšího členu

$$\hat{R}_1(\lambda) = \frac{Q}{2M}R_\infty - P_+ R_\infty V \frac{Q}{2M}R_\infty,$$
$$R_1(\lambda) = P_+ R_\infty \frac{Q}{2M} + \frac{Q}{2M}R_\infty P_+,$$

kde vidíme neshodu výrazů. Dosadíme-li náš konkrétní diskrétní Diracův operátor, máme

$$\hat{R}_1(\lambda) = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & d^-(H-\lambda)^{-1} - (H+V_{11}-\lambda)^{-1}V_{11}d^-(H-\lambda)^{-1} \\ d^+(H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & \left(\mathbb{I} - (H+V_{11}-\lambda)^{-1}V_{11}\right)d^-(H-\lambda)^{-1} \\ d^+(H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$
$$R_1(\lambda) = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & (H+V_{11}-\lambda)^{-1}d^- \\ d^+(H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

odkud je vidět, že nekorespondují mimodiagonální operátory vpravo nahoře. Alespoň po uvažování $V = 0$ a našeho konkrétního diskrétního Diracova operátoru však rovnost $\hat{R}_1(\lambda)$ a $R_1(\lambda)$ nastane

$$\hat{R}_1(\lambda) = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & d^-(H-\lambda)^{-1} \\ d^+(H-\lambda)^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & (H-\lambda)^{-1}d^- \\ d^+(H-\lambda)^{-1} & 0 \end{pmatrix} = R_1(\lambda),$$

a to díky tvrzení 14, ze kterého komutují operátory d^- a $(H-\lambda)^{-1}$. Z této rovnosti plyne i korespondence námi napočteného $\hat{R}_1(\lambda)$ s operátorovou maticí X_1.

Nakonec námi napočítaný druhý člen rozvoje je po dosazení našeho diskrétního Diracova operátoru

$$\hat{R}_2(\lambda) = P_+\frac{\lambda^2}{2m}\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}^2 + \frac{\lambda}{2m}\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} V \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 0 & d^- \\ d^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} -$$
$$- P_+\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} V \frac{\lambda}{2m}\begin{pmatrix} (H+V_{11}-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

odkud pro $V = 0$ je

$$\hat{R}_2(\lambda) = P_+\frac{\lambda^2}{2M}R_\infty^2 + \frac{\lambda}{2M}R_\infty.$$

Zbývá ověřit, zda tento námi odvozený operátor, dosadíme-li námi zkoumané operátory na $\ell^2 \oplus \ell^2$, skutečně koresponduje s operátorem X_2. Po dosazení je

$$R_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}(H-\lambda)^{-1} + \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} = X_2.$$

Rovnost mimodiagonálních nul je zřejmá, stejně tak jako rovnost prvků na diagonále vpravo dole. Zbývá rovnost diagonálních prvků vlevo nahoře, která je vidět z úprav

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda^2}{2m}(H-\lambda)^{-1}(H-\lambda)^{-1}+\frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}=\frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(I+\lambda(H-\lambda)^{-1}\right)\\&=\frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}\left(H-\lambda+\lambda\right)(H-\lambda)^{-1}=\frac{\lambda}{2m}(H-\lambda)^{-1}H(H-\lambda)^{-1},\end{aligned}$$

z čehož získáváme kýženou rovnost $R_2(\lambda)=X_2$.

Tím jsme ještě prohloubili naši znalost o chování rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru včetně poruchy, na kterou jsme v této podkapitole naložili striktnější požadavky. Zároveň je užitečné vidět stejné závěry plynoucí z různých přístupů, ať už mluvíme o konvergenci zmíněné rezolventy, o jejím Taylorově rozvoji, a to včetně poruch nebo bez.

Závěr

V této práci jsme se věnovali diskrétnímu Diracovu operátoru na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$. Nejprve jsme na základě teorie Laurentových operátorů zjistili spektrum posunutého diskrétního Diracova a Laplaceova operátoru.

Dále jsme pro $\lambda \in \varrho(D_c - mc^2)$ dokázali konvergenci rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru k rezolventě diskrétního Laplaceova operátoru v operátorové normě ve smyslu

$$\left\|\left(D_c - mc^2 - \lambda\right)^{-1} - (H - \lambda)^{-1} \oplus 0\right\|_{B(\ell^2 \oplus \ell^2)} \xrightarrow{c \to \infty} 0.$$

To se nám podařilo udělat třemi různými způsoby.

První způsob byl založen na teorii Laurentových operátorů, díky které jsme místo operátorů $D_c - mc^2$ a H, respektive jejich rezolvent, studovali jim unitárně sdružené operátory násobení funkcí, jež jsou dobře prozkoumány.

Dále jsme díky teorii Laurentových operátorů a s ní spjatým vyšetřováním funkcí byli schopni získat Taylorův rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru na okolí $1/c = 0$ pro $\lambda \in \varrho(D_c - mc^2)$ v podobě

$$(D_c - mc^2 - \lambda)^{-1} = (H - \lambda)^{-1} \oplus 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c} X_n(\lambda),$$

kde $X_n(\lambda)$ je explicitně vyjádřeno v rovnicích (4.16) a (4.17).

Limitacemi teorie Laurentových operátorů jsou její požadavky na konstantní diagonály. Vyšetřovat konvergenci rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou by tedy bylo možné pouze pro poruchy v podobě omezených operátorů s konstantními diagonálami.

Druhý způsob byl založen na maticovém rozkladu pomocí Schurova doplňku z tvrzení z [5]. Jeho hlavní předností bylo převedení vyšetřování rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru na vyšetřování tří jiných maticových operátorů, jejichž analýzou jsme získali kýženou konvergenci.

Na základě zmíněného maticového rozkladu jsme navíc vyšetřili i konvergenci rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou v podobě omezeného potenciálu $V \in B(\ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}))$, kdy jsme zjistili, že pro $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ limitu přežije pouze člen V_{11} ve smyslu

$$\left\|(D_c - mc^2 + V - \lambda)^{-1} - (H + V_{11} - \lambda)^{-1} \ \oplus 0\right\|_{B(\ell^2)} \xrightarrow{c \to \infty} 0.$$

Přístup nám tedy v rámci limity dovolil uvažovat i relativně obecnou, omezenou poruchu V, nebylo však možné z něj získat Taylorův rozvoj.

Poslední způsob byl založen na vlastnostech supersymetrie a silných tvrzeních z [6], která nám opět převedla studium rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru na studium tří jiných, v limitě triviálně se chovajících, operátorů.

Tento přístup nám dokonce pro speciální třídu symetrických a omezených potenciálů navíc dal Taylorův rozvoj rezolventy posunutého diskrétního Diracova operátoru s poruchou

$$(D_c - mc^2 + V - \lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} R_n(\lambda),$$

jednotlivé členy R_n je sice možné napočítat pro libovolně velké $n \in \mathbb{N}$, nelze však získat explicitní předpis pro obecné $n \in \mathbb{N}$.

Literatura

[1] J. Blank, P.Exner, M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*. Univerzita Karlova, 1993.

[2] G. Teschl: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators*. American Mathematical Society, 2009.

[3] O. Ibrogimov, F. Štampach: *Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operators*. Integral Equations and Operator Theory. 91:53, 2009.

[4] B. Cassano, O. Ibrogimov, D. Krejčiřík, F. Štampach: *Location of eigenvalues of non-self-adjoint discrete Dirac operators* . Annales Henri Poincaré 21, 2020, 2193–2217.

[5] Ch. Tretter: *Spectral Theory Of Block Operator Matrices And Applications*. Universität Bern, Switzerland, 2008.

[6] B. Thaller: *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, 1992.

[7] M. Fialová: *Two-dimensional Dirac operator with translationally invariant electromagnetic field,* diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2018.