

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

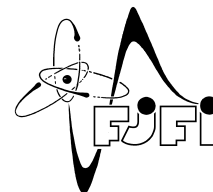
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Zavadilová

2023



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Bakalářská práce

Matematické modelování proudění v nenasycené zóně

Mathematical modeling of flow in the unsaturated zone

Autor: **Jana Zavadilová**
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Mikyška, Ph.D.**
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Jana Zavadilová
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní specializace: Matematické modelování
Název práce (česky): Matematické modelování proudění v nenasycené zóně
Název práce (anglicky): Mathematical modeling of flow in the unsaturated zone

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s popisem proudění podzemní vody v nenasycené zóně, zejména s Richardsovou rovnicí.
- 2) Na základě získaných poznatků zformulujte úlohu popisující tento problém.
- 3) Na základě literární rešerše navrhněte vhodný numerický algoritmus pro řešení Richardsovy rovnice a tento algoritmus implementujte.
- 4) Navržený numerický algoritmus otestujte na vhodných testovacích příkladech.
- 5) Popište své zkušenosti s navrženým algoritmem, diskutujte jeho přednosti a nevýhody.

Doporučená literatura:

- 1) J. Bear, Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media. Springer, 2018.
- 2) P. Bastian, Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media. Habilitační práce, Technische Fakultät der Christian–Albrechts–Universität, Kiel, 1999.
- 3) V. Casulli, P. Zanolli, A nested Newton-type algorithm for finite volume methods solving Richards' equation in mixed form. SIAM Journal on Scientific Computing 32(4), 2010, 2255–2273.
- 4) O. Polívka, Numerické řešení Richardsovy rovnice metodou konečných objemů. Bakalářská práce, KM FJFI ČVUT, 2008.
- 5) M. W. Farthing, F. L. Ogden, Numerical solution of Richards' equation: a review of advances and challenges. Soil Science Society of America Journal 81(6), 2017, 1257–1269.
- 6) M. A. Celia, E. T. Bouloutas, R. L. Zarba, A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. Water Resources Research 26(7), 1990, 1483–1496.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Jiří Mikyška, Ph.D.

Katedra matematiky FJFI ČVUT, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

.....
B
garant oboru

.....
Maršková
vedoucí katedry



.....
[Signature]
děkan

Poděkování:

Chtěla bych zde poděkovat především svému školiteli profesoru Jiřímu Míkyškovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a cenné rady při psaní této práce. Dále děkuji docentu Tomáši Oberhuberovi za poskytnutí vytvořených knihoven v C++ a svým rodičům za umožnění studia.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Praze dne 2. srpna 2023

Jana Zavadilová

Název práce: **Matematické modelování proudění v nenasycené zóně**

Autor: Jana Zavadilová

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Jiří Mikyška, Ph.D.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Bakalářská práce se zaměřuje na numerické řešení Richardsovy rovnice metodou vnějších a vnitřních iterací a poté na konvergenční analýzou této metody. V první kapitole je Richardsova rovnice odvozena z Darcyho zákona a zákona zachování hmoty. Druhá kapitola se zabývá popisem samotné metody vnějších a vnitřních iterací, jejího algoritmu. Algoritmus je implementován pomocí jazyka C++. Algoritmus je testován na problémech převzatých z literatury. Dále je provedena experimentální konvergenční analýza, porovnání s Newtonovou metodou, studie vlivu velikosti časového kroku na konvergenci nelineárního řešiče.

Klíčová slova: Dvoufázové proudění v nenasyceném porézním prostředí, Richardsova rovnice, Metoda vnějších a vnitřních iterací, Newtonova metoda

Title: **Mathematical modeling of flow in the unsaturated zone**

Author: Jana Zavadilová

Branch of study: Matematical engineering

Specialisation: Mathematical modeling

Kind of project: Bachelor project

Supervisor: prof. Ing. Jiří Mikyška, Ph.D.
Department of Mathematics, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague

Abstract: The bachelor project focuses on the numerical solution of the Richards' equation using the method of outer and inner iterations, followed by an analysis of the convergence of this method. In the first chapter, the Richards' equation is derived from Darcy's law and the conservation of mass. The second chapter describes the method of outer and inner iterations and its algorithm. The algorithm is implemented using the C++. The algorithm is tested on problems taken over from the literature. Furthermore, an experimental convergence analysis is performed, along with a comparison to the Newton's method, a study of the influence of the time step size on the convergence of nonlinear solution.

Key words: Two-Phase Flow in Unsaturated Porous Media, Richards' Equation, Method of Outer and Inner Iterations, Newton's Method

Obsah

Úvod	10
1 Formulace problému	11
1.1 Základní pojmy	11
1.2 Dvofázové proudění v nenasycené zóně	12
1.2.1 Rovnice kontinuity	13
1.2.2 Darcyho zákon	13
1.2.3 Richardsova rovnice	15
1.3 Matematická formulace	15
2 Numerické řešení	17
2.1 Metoda konečných objemů	17
2.2 Linearizace	20
2.2.1 Picardova částečná linearizace	20
2.2.2 Newtonova metoda	20
2.2.3 Metoda vnějších a vnitřních iterací	21
3 Numerické experimenty a výsledky	26
3.1 Testovací úloha	26
3.2 Konvergenční analýza	29
3.3 Srovnání s klasickou Newtonovou metodou	31
Závěr	37

Úvod

Proudění v porézním prostředí je fyzikální jev vyskytující se v horninách, půdách, sedimentech a různých typech filtrů nebo membrán. Dochází k pohybu tekutin mezi póry, který je ovlivněn mnoha faktory, jako jsou tlakové gradienty, viskozita tekutiny, vlastnosti porézní struktury a další vnější vlivy [1]. Jedná se o komplexní téma, které vyžaduje kombinaci matematických modelů, numerických simulací a experimentálních studií. Je klíčové pro realizaci řady inženýrských projektů, například pro odhad zásob podzemních vod, monitorování kontaminace, správu vodních zdrojů a ochranu životního prostředí.

Transport hmoty proudící v porézním prostředí popisuje Richardsova rovnice, nelineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu tvaru

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla (\psi + z)],$$

kde θ představuje objemovou vlhkost, ψ tlakovou výšku a K vodivost. Jedná se o komplexní rovnici, která nemá analytické řešení [6]. Využívá se tak numerických metod, které aproximují a vypočítávají hodnoty řešení pomocí diskretizace prostoru a času. Mezi nejčastěji používané numerické metody patří metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů a metoda konečných prvků.

Hlavním cílem této práce je testování implementace a experimentální konvergenční analýza konkrétního algoritmu pro řešení Richardsovy rovnice, a sice algoritmu metody vnějších a vnitřních iterací [5]. Nelineární rovnici nejprve diskretizujeme v prostoru a čase, dostaneme soubor nelineárních algebraických rovnic, který částečně linearizujeme Picardovou metodou [10]. Dále na částečně nelineární systém aplikujeme Newtonův algoritmus metodou vnějších a vnitřních iterací. Vnořený iterativní proces pokračuje, dokud se řešení dostatečně nepřiblíží požadované přesnosti.

Prozatím se omezujeme na jednodušší jednorozměrné případy. V první kapitole se seznamujeme s popisem problematiky a odvozujeme tvar Richardsovy rovnice. Druhá kapitola se zabývá numerickým řešením rovnice, popisem samotného algoritmu. Třetí kapitola pak zahrnuje numerické experimenty, určení řádu konvergence a zkoumání vlivu parametrů na konvergenci.

Kapitola 1

Formulace problému

V této kapitole jsou poskytnuty základní informace o proudění v porézním prostředí. Velká část popisu je převzata z [9]. Zavedeme nyní základní pojmy z oblasti podzemních vod. Odvodíme námi řešenou úlohu.

1.1 Základní pojmy

Porézní prostředí je těleso tvořené zrny zeminy a prázdným prostorem, který může být vyplněn jednou nebo více tekutinami (např. voda, olej, vzduch). Říkáme, že prostředí je **homogenní** vzhledem k dané veličině, jestliže má tato veličina všude stejnou hodnotu. Není-li tomu tak, jedná se o prostředí **nehomogenní**. Některé veličiny mohou také záviset na směru, v takovém případě se porézní prostředí nazývá **anizotropní** vzhledem k této veličině. V opačném případě se prostředí nazývá **izotropní**.

V **nasycené (saturované)** zóně jsou póry zcela vyplněny vodou (resp. jinou kapalinou). **Nenasycenou zónou** je pak myšleno porézní prostředí, kde je alepoň část pórů vyplněná vzduchem.

Fáze je definována jako oblast prostoru oddělená od jiné části jistou fyzickou hranicí [1]. Ve **vícefázovém systému** je porézní prostředí vyplněno dvěma či více nemísitelnými tekutinami.

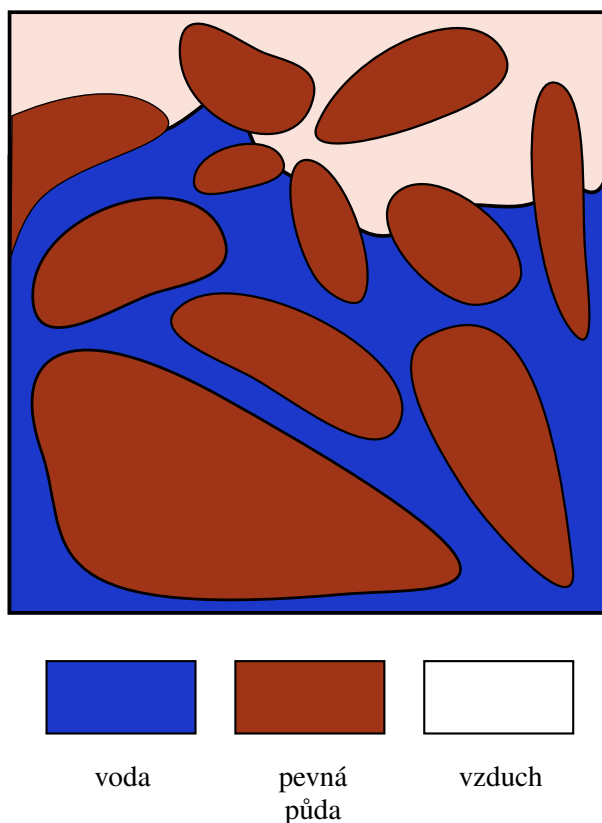
Vzhledem k tomu, že většinou neznáme kompletní strukturu prostředí, která je zpravidla velmi komplikovaná, nelze k odvození rovnic pro proudění použít Eulerovy ani Navierovy-Stokesovy rovnice. Předpokládáme dále následující vlastnosti zkoumané porézní oblasti:

- (P1) vzájemné propojení pórů,
- (P2) dostatečně velké rozměry pórů vzhledem ke střední volné dráze molekuly tekutiny,
- (P3) dostatečně malé rozměry pórů vzhledem k působení adhezivních a kohezivních sil.

Předpoklad (P1) je zřejmý, jelikož tok se nemůže vyskytovat v nesouvislém prostoru. Předpoklad (P2) umožní nahradit molekuly tekutiny v prázdném prostoru kontinuem. Třetí vlastnost (P3) vylučuje z definice porézního prostředí případy, jako je například síť potrubí.

Označme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast porézního prostředí o objemu V_Ω a REV^1 reprezentativní elementární objem Ω_0 . Ten je dostatečně malý vzhledem ke zkoumané oblasti a zároveň dostatečně velký k velikosti pórů tak,

¹Z anglického *Representative Elementary Volume*



Obrázek 1.1: Nenasycené porézní prostředí vyhovující našim předpokladům.

aby průměrné hodnoty fyzikálních veličin popisující porézní prostředí s danými tekutinami byly v tomto objemu téměř konstantní (podrobnosti viz [1]).

Definujeme funkci $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$ v bodě $x_0 \in \Omega_0(x_0) \subset \Omega$, kde oblast $\Omega_0(x_0)$ je REV, podle [1] jako

$$\phi(x_0) = \frac{1}{V_{\Omega_0(x_0)}} \int_{\Omega_0(x_0)} \gamma(x) dx, \quad (1.1)$$

kde $V_{\Omega_0(x_0)}$ je objem oblasti Ω_0 ,

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ v prázdném prostoru,} \\ 0, & x \text{ v zemině,} \end{cases} \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.2)$$

Funkce ϕ se nazývá **porozita**. Vyjadřuje, kolik volného místa se nachází v objemu zeminy.

1.2 Dvoufázové proudění v nenasycené zóně

V této práci se zaměříme na proudění v nenasycené zóně, tedy póry jsou alespoň částečně vyplněny vzduchem. Mějme póry zaplněné dvěma fázemi, a sice vzduchem a vodou. Budeme zkoumat toto dvoufázové proudění. Proudění každé fáze je popsáno rovnicí kontinuity a Darcyho zákonem.

1.2.1 Rovnice kontinuity

Předpokládejme nestlačitelnost tekutin, tedy $\rho_\alpha = konst.$ Rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování hmoty poté udává bilanci objemu fáze α

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (q_\alpha) = \tilde{S}_\alpha, \quad (1.3)$$

θ_α značí objemovou vlhkost fáze α a q_α její hustotu objemového průtoku. Člen \tilde{S}_α značí hustotu objemových zdrojů, resp. propadů fáze α . Uvažujme modelování situace proudění bez jakýchkoliv zdrojů a propadů, dále tedy předpokládáme $\tilde{S}_\alpha = 0$.

Objemová vlhkost fáze v jednotkovém množství zeminy je definovaná následovně

$$\theta_\alpha = \phi S_\alpha \in (0; \phi),$$

ϕ značí porozitu a S_α saturaci příslušné fáze α . **Saturace** udává, kolik volného prostoru zabírá daná fáze

$$S_\alpha = \frac{\int_{\Omega_0(x_0)} \gamma_\alpha(x, t) dx}{\int_{\Omega_0(x_0)} \gamma(x, t) dx} = \frac{\text{objem fáze } \alpha \text{ v REV}}{\text{objem REV}} \quad \forall x \in \Omega, x_0 \in \Omega_0 \subset \Omega,$$

kde

$$\gamma_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1, & x \text{ leží ve fázi } \alpha \text{ v čase } t, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

a γ je funkce z (1.2). Platí $\sum_\alpha S_\alpha(x, t) = 1, 0 \leq S_\alpha \leq 1$.

1.2.2 Darcyho zákon

Ve dvoufázovém systému je tok fáze α popsán Darcyho zákonem [1]

$$q_\alpha = -\frac{k_{r,\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha} \cdot k \cdot (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad (1.4)$$

q_α značí objemový průtok, $k_{r,\alpha}(S_\alpha)$ relativní propustnost fáze α , k vlastní propustnost zeminy (permeabilitu), p_α tlak dané fáze a ρ_α hustotu fáze α . Tento vztah je zobecněním Darcyho zákona pro jednofázové proudění, který byl odvozen francouzským inženýrem Henry Darcym roku 1856 [7].

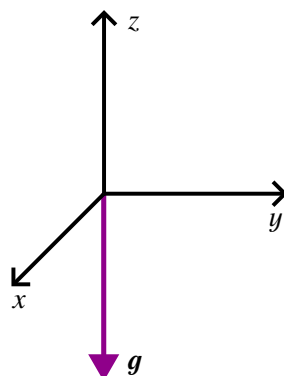
Pro upřesnění zde uvedu použitou konvenci, a sice $\mathbf{g} = (0; 0; -g) = -g\nabla z$ je brán jako vektor směřující dolů proti směru osy z v pravotočivé soustavě, jak lze vidět na obrázku 1.2.

Problematiku budeme formulovat v řeči proměnných $\theta_\alpha, \psi_\alpha$, tj. objemové vlhkosti a tlakové výšky fáze. Přepíšeme Darcyho zákon do těchto proměnných. Pro hydrostatický tlak platí

$$p_\alpha = \rho_\alpha g \psi_\alpha, \quad (1.5)$$

kde ρ_α je hustota fáze α , $g = 9.81 m/s^2$ gravitační zrychlení a ψ_α je tlaková výška fáze α . Dosadíme do (1.4) a pro fázi α máme následující znění Darcyho zákona

$$q_\alpha = -k_{r,\alpha}(S_\alpha) \frac{k g \rho_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla(\psi_\alpha + z).$$



Obrázek 1.2: Konvence pro vektor \mathbf{g} .

Vodivostí při plném nasycení nazýváme veličinu

$$\tilde{K}_\alpha := \frac{k g \rho_\alpha}{\mu_\alpha},$$

poté Darcyho zákon vypadá následovně

$$q_\alpha = -k_{r,\alpha}(S_\alpha) \tilde{K}_\alpha \nabla(\psi_\alpha + z).$$

Označme dále $K_\alpha(\psi) := k_{r,\alpha}(S_\alpha) \tilde{K}_\alpha$. Potom

$$q_\alpha = -K_\alpha(\psi) \nabla(\psi_\alpha + z).$$

Jsme v situaci, kdy máme dvě rovnice pro neznámé θ_α a dvě rovnice pro neznámé p_α , resp. ψ_α . Darcyho zákon lze dosadit do rovnice kontinuity, dostáváme tak celkem dvě rovnice pro čtyři neznámé. Pro jednoznačnost řešení je potřeba uvést další vztahy mezi proměnnými, aby počet rovnic odpovídal počtu neznámých. Tyto vztahy jsou poskytnuty kapilárními modely, které udávají vazbu mezi tlakem a saturací, resp. objemovou vlhkostí a tlakovou výškou [1]. Nejčastější jsou modely van Genuchtena [12] nebo Brookse-Coreyho [4]. V této práci budeme používat model van Genuchtena.

Nechť $\alpha \in \{v, n\}$ značí fáze vody a nevodů (vody a vzduchu). V řeči tlaků a saturací nám van Genuchtenův model poskytuje vazbu mezi fázovými tlaky a saturací v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} p_n - p_v &= p_c(S_v), \\ S_v + S_n &= 1. \end{aligned}$$

Pro proměnné ψ, θ (tlakovou výšku a objemovou vlhkost) máme podobu

$$\begin{aligned} \psi_n - \psi_v &= \psi_c(\theta_v), \\ \theta_v + \theta_n &= \phi. \end{aligned}$$

Nyní máme všechny potřebné vztahy a počet rovnic odpovídá počtu neznámých.

1.2.3 Richardsova rovnice

Mějme systém skládající se z fáze vody a vzduchu. Při standardních podmínkách (STP)² je hustota vzduchu přibližně $1,204 \text{ kg/m}^3$ a hustota vody při STP přibližně 1000 kg/m^3 . Co se týče viskozity při STP, její hodnoty dosahují pro vzduch zhruba $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a pro vodu zhruba $1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Hodnoty pro vzduch jsou řádově téměř tisíckrát menší. Vzduch je tak v podzemí daleko pohyblivější než voda. Když vzniká proudění, vzduch vyrovná gradienty tlaku daleko rychleji než voda.

Proto předpokládejme kromě nestlačitelnosti tekutin ($\rho_\alpha = \text{konst.}$) také pasivitu fáze vzduchu. Nebudou přítomny toky vzduchu, tj. $\nabla p_n = \rho_n \mathbf{g}$. Pak $\psi_n = \text{konst.}$ a tedy

$$\theta_v = \phi - \theta_n, \quad (1.6)$$

$$\psi_v = \psi_n - \psi_c(\theta_v). \quad (1.7)$$

Předpokládáme, že vztah (1.7) lze invertovat, poté $\theta_v = \theta_v(\psi_v)$. Za daných předpokladů zkoumáme proudění fáze vody, dále budeme vynechávat její index $\alpha = v$.

Spojením rovnic (1.3), (1.6) pro vodu dostáváme **Richardsovu rovnici**

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla(\psi + z)]. \quad (1.8)$$

1.3 Matematická formulace

Omezíme se na jednodimenzionální případ. Máme dvě tekutiny v porézním prostředí, vodu a vzduch. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- tekutiny jsou nestlačitelné,
- prostředí je nestlačitelné,
- zkoumaná oblast je nenasycená.

Naší typovou úlohou je rovnice (1.8) v jedné dimenzi včetně počátečních a okrajových podmínek

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\psi + z) \right), \\ \psi(z, 0) &= \psi_0(z), \quad \forall z \in \Omega, \\ \psi(a, t) &= \psi_a, \quad \psi(b, t) = \psi_b, \quad \forall t \in (0; T). \end{aligned} \quad (1.9)$$

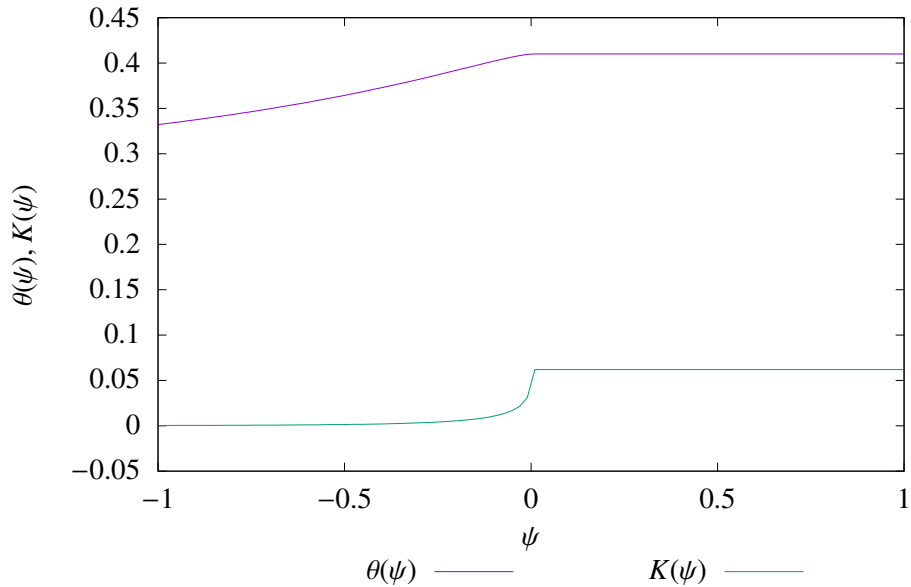
Konstituční vztahy pro $K(\psi)$, $\theta(\psi)$ uvažujeme podle van Genuchtenova modelu [5], [12] následovně

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha\psi|^n]^m}, & \text{pokud } \psi \leq 0, \\ \theta_s, & \text{pokud } \psi > 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

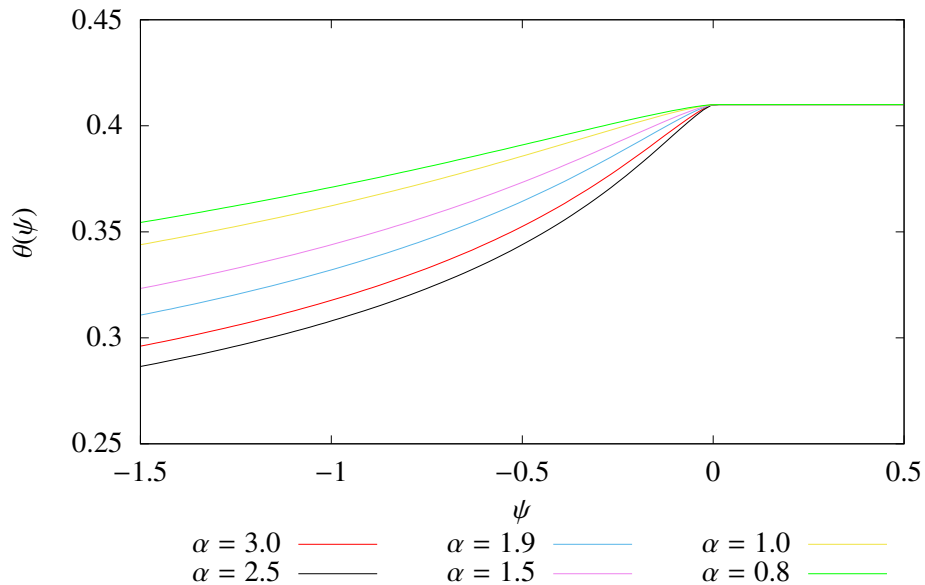
$$K(\psi) = K_s \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^m \right\}^2, \quad (1.11)$$

²Teplota 20°C, tlak 1 013,25 hPa

kde $m = 1 - \frac{1}{n}$ a $\theta_s, \theta_r, K_s, \alpha, a, n \geq 1$ jsou parametry materiálu splňující $0 \leq \theta_r \leq \theta_s$ a $K_s, \alpha > 0$. Parametr θ_r představuje reziduální objemovou vlhkost. θ_s značí nasycenou objemovou vlhkost, jedná se tedy o půdní porozitu, tj. $\theta_s = \phi$. Parametr K_s nám dává hodnotu vodivosti při plném nasycení. α je škálovací parametr [2], jehož vliv na průběh (1.10) můžeme vidět na obrázku 1.4.



Obrázek 1.3: Průběh funkcí $\theta(\psi)$ (1.10), $K(\psi)$ (1.11) v závislosti na ψ pro konkrétní parametry: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $\alpha = 1.9$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.



Obrázek 1.4: Vliv parametru α na průběh křivky $\theta(\psi)$ (1.10) pro konkrétní hodnoty: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.

Kapitola 2

Numerické řešení

Nyní přicházíme k řešení nelineární rovnice v úloze (1.9). Nejprve použijme metodu konečných objemů. Vzniklý nelineární systém linearizujeme Picardovou metodou a metodou vnějších a vnitřních iterací [5].

2.1 Metoda konečných objemů

Jednodimenzionální Richardsova rovnice je parciální diferenciální rovnice pro neznámou ψ

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\psi + z) \right), \quad z \in \Omega = (a; b), \quad t \in I = (0; T) \quad (2.1)$$

s následujícími počátečními a okrajovými podmínkami Dirichletova typu

$$\begin{aligned} \psi(z, 0) &= \psi_0(z), \quad \forall x \in (a; b), \\ \psi(a, t) &= \psi_a(t), \quad \psi(b, t) = \psi_b(t), \quad \forall t \in \langle 0; T \rangle. \end{aligned}$$

Nejprve rovnici (2.1) diskretizujeme v prostoru, čas ponecháme spojitý, a následně provedeme také diskretizaci časovou.

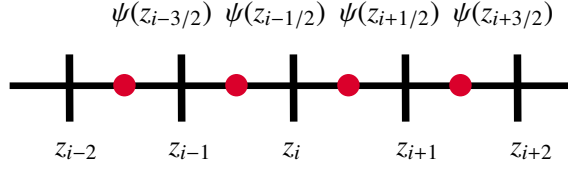
Prostorová diskretizace

Prostorový interval $\langle a; b \rangle$ rozdělíme $\tilde{n} + 1$ vrcholy z_i , které tvoří síť (obecně neekvidistantní). Při ekvidistantním rozdělení pro vrcholy platí

$$z_i = a + \frac{b-a}{\tilde{n}} i, \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n}, \quad \text{kde } \frac{b-a}{\tilde{n}} = h \text{ značí krok sítě.}$$

Rovnici (2.1) integrujeme přes pevně zvolený dílčí objem, v jednorozměrném případě tedy přes interval $\langle z_{i-1}, z_i \rangle$

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} dz = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\psi + z) \right] dz. \quad (2.2)$$



Obrázek 2.1: Rozdělení intervalu a umístění diskrétních veličin. Hodnoty skalárních veličin jsou dány ve středech podintervalů a hodnoty toků přes jejich hranice, tj. v bodech z_i .

Dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \theta(\psi) dz = \left[K(\psi) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\psi + z) \right]_{z_{i-1}}^{z_i}. \quad (2.3)$$

Střední hodnota θ na intervalu $\langle z_{i-1}; z_i \rangle$ je dána vztahem

$$\theta(\psi(z_{i-\frac{1}{2}})) := \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \theta(\psi) dz. \quad (2.4)$$

Integrál na levé straně v (2.3) nahradíme ze vzorce střední hodnoty (2.4). Volíme ekvidistantní rozdělení, a proto $z_i - z_{i-1} = h$. Dále budeme užívat tohoto značení. Hodnoty tlakové výšky $\psi(z)$ známe ve středech intervalů, viz obrázek 2.1, chceme ovšem vyčíslit vodivost $K(\psi(z))$ na hranici, tedy v bodech z_i , použijeme aproximaci maximem sousedních hodnot (na základě postupu v [5]). Prostorové derivace aproximujeme pomocí centrálních diferencí. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\theta(\psi(z_{i-\frac{1}{2}})) \cdot h \right) &= K(\theta(\psi(z_i))) \cdot \left(\frac{\partial \psi(z_i)}{\partial z} + 1 \right) - K(\theta(\psi(z_{i-1}))) \cdot \left(\frac{\partial \psi(z_{i-1})}{\partial z} + 1 \right) \\ &\approx \max \left\{ K(\theta(\psi(z_{i+\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi(z_{i-\frac{1}{2}}))) \right\} \cdot \left[\left(\frac{\psi(z_{i+\frac{1}{2}}) - \psi(z_{i-\frac{1}{2}})}{h} \right) + 1 \right] \\ &\quad - \max \left\{ K(\theta(\psi(z_{i-\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi(z_{i-\frac{3}{2}}))) \right\} \cdot \left[\left(\frac{\psi(z_{i-\frac{1}{2}}) - \psi(z_{i-\frac{3}{2}})}{h} \right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Časová diskretizace

Na časový interval $\langle 0; T \rangle$ položíme ekvidistantní síť s $N + 1$ vrcholy a časovým krokem Δt . Nahradíme časovou derivaci zpětnou diferencí

$$\frac{d\theta(\psi)}{dt} \Big|_{\psi=\psi^n} = \frac{\theta(\psi^n) - \theta(\psi^{n-1})}{\Delta t}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Předpokládejme, že v každém časovém kroku n je tlaková výška $\psi(z)$ konstantní pro $\forall z \in (z_{i-1}; z_i)$. V n -té časové vrstvě aproximacemi dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})) - \theta(\psi^{n-1}(z_{i-\frac{1}{2}}))}{\Delta t} \cdot h &= \max \left\{ K(\theta(\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))) \right\} \cdot \frac{\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}) - \psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})}{h} - \max \left\{ K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))), \right. \\ &\quad \left. K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{3}{2}}))) \right\} \cdot \frac{\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}) - \psi^n(z_{i-\frac{3}{2}})}{h} + \max \left\{ K(\theta(\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))) \right\} - \max \left\{ K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{3}{2}}))) \right\}. \end{aligned}$$

Rovnici přenásobíme časovým krokem, převedeme členy obsahující neznámou ψ^n na jednu stranu a člen $\theta(\psi^{n-1}(z_i))$ ze staré časové vrstvy převedeme na druhou stranu rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} & \theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})) \cdot h - \Delta t \left[\max\{K(\theta(\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})))\} \cdot \frac{\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}) - \psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})}{h} \right. \\ & \left. - \max\{K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{3}{2}})))\} \cdot \frac{\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}) - \psi^n(z_{i-\frac{3}{2}})}{h} \right] = \theta(\psi^{n-1}(z_{i-\frac{1}{2}})) \cdot h + \\ & + \Delta t \left[\max\{K(\theta(\psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}})))\} - \max\{K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}))), K(\theta(\psi^n(z_{i-\frac{3}{2}})))\} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Rovnici (2.6) prepíšeme do vektorového tvaru. Za tímto účelem definujeme vektory

$$\boldsymbol{\psi}^n = \begin{pmatrix} \psi_0^n \\ \psi_1^n \\ \vdots \\ \psi_{\tilde{n}-1}^n \\ \psi_{\tilde{n}}^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi^n(z_{\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ \psi^n(z_{\tilde{n}-\frac{1}{2}}) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\psi}^n) = \begin{pmatrix} \theta_0(\boldsymbol{\psi}^n) \\ \theta_1(\boldsymbol{\psi}^n) \\ \vdots \\ \theta_{\tilde{n}-1}(\boldsymbol{\psi}^n) \\ \theta_{\tilde{n}}(\boldsymbol{\psi}^n) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \theta(\psi_0^n) \\ \theta(\psi^n(z_{\frac{1}{2}})) \\ \vdots \\ \theta(\psi^n(z_{\tilde{n}-\frac{1}{2}})) \\ \theta(\psi_{\tilde{n}}^n) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Pravou stranu (2.6) definujeme jako

$$b_i(\boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\psi}^{n-1}) := \theta_i(\boldsymbol{\psi}^{n-1}) \cdot h + \Delta t \left[\max\{K(\theta_{i+1}(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n))\} - \max\{K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_{i-1}(\boldsymbol{\psi}^n))\} \right], \quad (2.8)$$

$i = 1, \dots, \tilde{n} - 1.$

Pro přehlednost rozepíšeme rovnici (2.6) následovně

$$\begin{aligned} & \theta_i(\boldsymbol{\psi}^n) \cdot h + \psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \left[-\frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_{i+1}(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n))\} \right] + \psi^n(z_{i-\frac{3}{2}}) \cdot \left[-\frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_{i-1}(\boldsymbol{\psi}^n))\} \right] \\ & + \psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}) \cdot \left[\frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_{i+1}(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n))\} + \frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_{i-1}(\boldsymbol{\psi}^n))\} \right] = b_i(\boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\psi}^{n-1}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Definujeme

$$t_{i,i+1}(\boldsymbol{\psi}^n) := -\frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_{i+1}(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n))\}, \quad (2.10)$$

$$t_{i,i-1}(\boldsymbol{\psi}^n) := -\frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_{i-1}(\boldsymbol{\psi}^n))\}, \quad (2.11)$$

$$t_{i,i}(\boldsymbol{\psi}^n) := \frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_{i+1}(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n))\} + \frac{\Delta t}{h} \cdot \max\{K(\theta_i(\boldsymbol{\psi}^n)), K(\theta_{i-1}(\boldsymbol{\psi}^n))\} \quad (2.12)$$

pro $i = 1, \dots, \tilde{n} - 1.$

Z Dirichletových okrajových podmínek dostáváme tvar krajních členů vektoru b a matice T

$$\begin{aligned} b_0(\boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\psi}^{n-1}) &= \psi_a(t), & b_{\tilde{n}}(\boldsymbol{\psi}^n, \boldsymbol{\psi}^{n-1}) &= \psi_b(t), \\ t_{0,0}(\boldsymbol{\psi}^n) &= 1, & t_{0,1}(\boldsymbol{\psi}^n) &= 0, \\ t_{\tilde{n},\tilde{n}-1}(\boldsymbol{\psi}^n) &= 0, & t_{\tilde{n},\tilde{n}}(\boldsymbol{\psi}^n) &= 1. \end{aligned}$$

Rovnice (2.9) je rozepsaná forma pro jednotlivou i -tou složku. Soustavu lze zapsat maticově

$$\theta(\psi^n) \cdot h + T(\psi^n) \cdot \psi^n = b(\psi^n), \quad (2.13)$$

kde $T(\psi^n)$ je (tridiagonální) matice difuzního toku a $b(\psi^n)$ je vektor pravé strany. Časovou a prostorovou diskretizací dostáváme soustavu nelineárních algebraických rovnic (2.13), kterou je potřeba linearizovat.

2.2 Linearizace

Rovnice (2.13) obsahuje nelinearitu nejen v $\theta(\psi)$, ale také ve členech obsahujících vodivost $K(\psi)$. Nelineárními členy jsou tedy také vektor b a matice T . Nabízí se různé metody linearizace, jako Picardovy iterace, Newtonova metoda nebo jejich kombinace. Náš postup na základě článku [5] bude následující: nejprve použijeme Picardovu metodu na nelineární vektor b a matici T . Dostaneme tzv. lehce nelineární systém, ve kterém se nelinearita schovává už jen „diagonálně“ ve členu $\theta(\psi)$. Na tento systém poté použijeme metodu vnějších a vnitřních iterací, která využívá Newtonovy aproximace.

2.2.1 Picardova částečná linearizace

Picardova metoda [10] spočívá v dosažení řešení z předchozí iterace do nelineárních členů. Linearizujeme členy $T(\psi^n)$ a $b(\psi^n)$. Pro první iteraci vezmeme ψ z předešlé časové vrstvy, a sice $\psi^{n,0}(z) = \psi^{n-1}(z)$. Pro každou časovou vrstvu tak dostáváme

$$\theta_i(\psi^n) \cdot h + \psi^n(z_{i+\frac{1}{2}}) \cdot t_{i,i+1}(\psi^{n-1}) + \psi^n(z_{i-\frac{3}{2}}) \cdot t_{i,i-1}(\psi^{n-1}) + \psi^n(z_{i-\frac{1}{2}}) \cdot t_{i,i}(\psi^{n-1}) = b_i(\psi^{n-1}) \quad (2.14)$$

Dostáváme lehce nelineární systém, kdy je nelinearita reprezentována výrazy $\theta_i(\psi^n)$ a má diagonální charakter. Systém lze řešit Newtonovou metodou [13], nebo také sofistikovanější metodou vnějších a vnitřních iterací [5].

2.2.2 Newtonova metoda

Newtonova metoda [13], pod jiným názvem známá jako metoda tečen, spočívá v linearizaci funkce $y(x)$ v okolí bodu x_k pomocí Taylorovy řady. Předpoklady metody jsou spojitost funkce $y(x)$ v daném bodě x_k a existence první derivace v bodě x_k . Linearizace je daná vztahem

$$t(x_k) = y(x_{k-1}) + y'(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}). \quad (2.15)$$

Rovnice (2.14) je linearizována následovně

$$(\theta(\psi^{n-1}) + \theta'(\psi^{n-1}) \cdot (\psi^n - \psi^{n-1})) \cdot h + T(\psi^{n-1}) \cdot \psi^n = b(\psi^{n-1}). \quad (2.16)$$

Předností metody je její rychlá konvergence, jedná se o metodu druhého řádu pro kořen o násobnosti 1. Metoda ovšem obecně konverguje pouze lokálně. Pro zajištění konvergence je tedy potřeba volit časový krok dostatečně malý.

2.2.3 Metoda vnějších a vnitřních iterací

Připomeňme, že konstituční vztahy pro $K(\psi)$, $\theta(\psi)$ jsou dány van Genuchtenovým modelem (1.10), (1.11). Označme θ_r reziduální objemovou vlhkost a $c(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ (nezápornou) specifickou kapacitu vlhkosti. Pak lze objemovou vlhkost vyjádřit pomocí $c(\psi)$ následovně

$$\theta(\psi) = \theta_r + \int_{-\infty}^{\psi} c(\xi) d\xi. \quad (2.17)$$

Nechť platí následující předpoklady na kapacitu vlhkosti $c(\psi)$:

Předpoklad C1 $c(\psi)$ je definováno pro $\forall \psi \in \mathbb{R}$ a jedná se o nezápornou funkci s omezenými derivacemi,

Předpoklad C2 Existuje $\psi^* \in \mathbb{R}$ takové, že $c(\psi)$ je kladná a neklesající funkce na $(-\infty; \psi^*)$ a nerostoucí na $(\psi^*; +\infty)$.

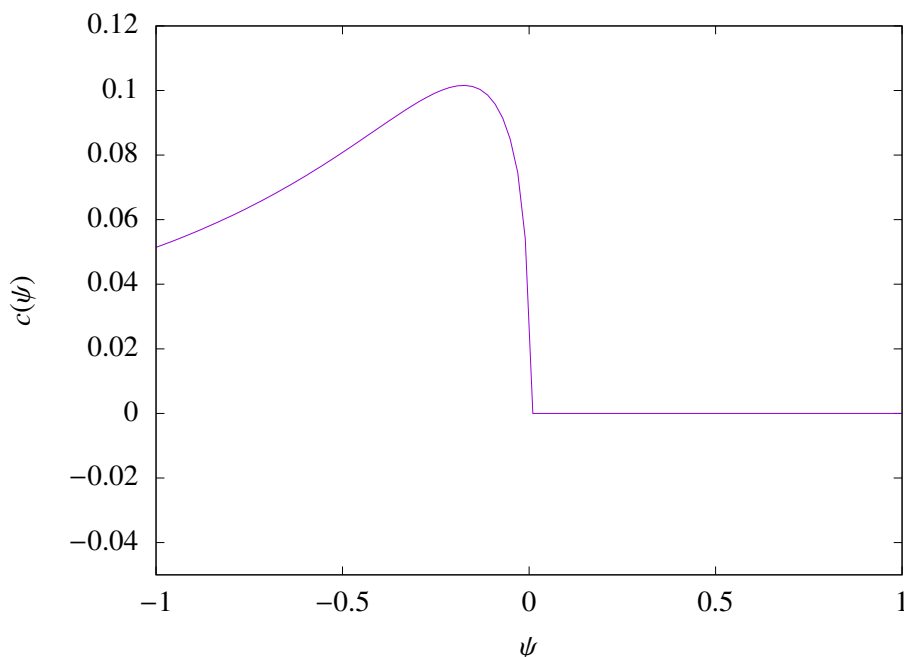
Pak $c(\psi) = \frac{d\theta(\psi)}{d\psi} \geq 0$ a pro $\forall \psi \in \mathbb{R}$, $\theta_r < \theta(\psi) \leq \theta_s$. Nejpoužívanější konstituční vztahy pro kapacitu vlhkosti $c(\psi)$ tyto předpoklady C1-C2 splňují.

Pro van Genuchtenův model lze kapacitu vlhkosti c dostat derivací (1.10), a sice

$$c(\psi) = \frac{d\theta(\psi)}{d\psi} = \begin{cases} \alpha n m \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha \psi|^n]^{m+1}} |\alpha \psi|^{n-1}, & \text{pokud } \psi \leq 0, \\ 0, & \text{pokud } \psi > 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Tato veličina je nezáporná a její maximum se nachází v bodě $\frac{d\theta(\psi)}{d\psi} = 0$, to jest pro

$$\psi^* = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$



Obrázek 2.2: Průběh funkce $c(\psi)$ (2.18) v závislosti na ψ pro konkrétní parametry: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $\alpha = 1.9$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.

Funkce $c(\psi)$ je nezáporná s omezenými derivacemi, je téměř všude diferencovatelná, připouští pouze nespojitosti prvního druhu. Lze ji vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných, neklesajících a omezených funkcí [8], označme je $p(\psi)$ a $q(\psi)$ (tzv. Jordanova dekompozice). Pak $c(\psi) = p(\psi) - q(\psi) \geq 0$ a $0 \leq q(\psi) \leq p(\psi) \forall \psi \in \mathbb{R}$. Když $c(\psi)$ splňuje předpoklady C1-C2, příslušející Jordanova dekompozice je dána následovně

$$\begin{cases} p(\psi) = c(\psi), & q(\psi) = 0 & \text{pro } \psi \leq \psi^*, \\ p(\psi) = c(\psi^*), & q(\psi) = p(\psi) - c(\psi) & \text{pro } \psi > \psi^*. \end{cases} \quad (2.19)$$

Dále lze objemovou vlhkost $\theta(\psi)$ zapsat jako $\theta(\psi) = \theta_1(\psi) - \theta_2(\psi)$, kde každá složka $\theta_1(\psi)$, $\theta_2(\psi)$ je dána vztahem

$$\begin{cases} \theta_1(\psi) = \theta(\psi), & \theta_2(\psi) = 0 & \text{pro } \psi \leq \psi^*, \\ \theta_1(\psi) = \theta(\psi^*) + c(\psi^*)(\psi - \psi^*), & \theta_2(\psi) = \theta_1(\psi) - \theta(\psi) & \text{pro } \psi > \psi^*, \end{cases} \quad (2.20)$$

takže $p(\psi) = \frac{d\theta_1(\psi)}{d\psi}$ a $q(\psi) = \frac{d\theta_2(\psi)}{d\psi}$.

Označme $C(\psi)$, $P(\psi)$ a $Q(\psi)$ diagonální matice, jejichž diagonální prvky jsou $c(\psi_i)$, $p(\psi_i)$ a $q(\psi_i)$. Pak $C(\psi) = P(\psi) - Q(\psi)$ představuje jakobián $\theta(\psi)$ skoro všude, $P(\psi)$ je skoro všude jakobián $\theta_1(\psi)$ a $Q(\psi)$ je skoro všude jakobián $\theta_2(\psi)$.

Algoritmus výpočtu jedné časové vrstvy

Nechť je T symetrická M-matice¹ definovaná výše vztahy (2.10) - (2.12) a kapacity vlhkosti $c(\psi)$ splňují předpoklady C1-C2. Pak lze soustavu (2.14) (částečně linearizované rovnice Picardovými iteracemi)

¹ $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je M-matice \iff 1) $m_{ii} > 0, \forall i \in N$; 2) $m_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$; 3) M je regulární $\wedge \mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$

zapsat následovně

$$\theta_1(\psi^n) - \theta_2(\psi^n) + T(\psi^{n-1}) \cdot \psi^n = b(\psi^{n-1}). \quad (2.21)$$

Vnější iterace

Nejprve linearizujeme člen $\theta_2(\psi^n)$ pomocí předpisu Newtonovy metody (2.15).

Pro naši rovnici (2.21) dostáváme

$$\theta_1(\psi^{n,k}) - [\theta_2(\psi^{n,k-1}) + \theta_2'(\psi^{n,k-1}) \cdot (\psi^{n,k} - \psi^{n,k-1})] + T(\psi^{n-1}) \cdot \psi^{n,k} = b(\psi^{n-1}).$$

Označme $\theta_2'(\psi^{n,k-1}) \equiv Q(\psi^{n,k-1}) = Q^{n,k-1}$, $T(\psi^{n-1}) = T^{n-1}$ a $b(\psi^{n-1}) = b^{n-1}$. Po přepsání máme

$$\theta_1(\psi^{n,k}) + (T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k} = \underbrace{b^{n-1} + \theta_2(\psi^{n,k-1}) - Q^{n,k-1} \cdot \psi^{n,k-1}}_{=:d^{n,k-1}}. \quad (2.22)$$

Přejdeme k linearizaci členu $\theta_1(\psi^{n,k})$.

Vnitřní iterace

V rovnici (2.22) nyní linearizujeme první člen pomocí vztahu (2.15)

$$[\theta_1(\psi^{n,k,l-1}) + \theta_1'(\psi^{n,k,l-1}) \cdot (\psi^{n,k,l} - \psi^{n,k,l-1})] + (T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k,l} = d^{n,k-1}.$$

Označme $\theta_1'(\psi^{n,k,l-1}) \equiv P(\psi^{n,k,l-1}) = P^{n,k,l-1}$. Po přepsání dostáváme

$$(P^{n,k,l-1} + T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k,l} = \underbrace{d^{n,k-1} - \theta_1(\psi^{n,k,l-1}) + P^{n,k,l-1} \cdot \psi^{n,k,l-1}}_{=:f^{n,k,l-1}}. \quad (2.23)$$

Dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic s tridiagonální maticí. Smyčka vnitřních iterací je ukončena, jestliže je splněna podmínka $\|r^{n,k,l}\| < \epsilon$, kde

$$r^{n,k,l} = \theta_1(\psi^{n,k,l}) + (T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k,l} - d^{n,k-1} \quad (2.24)$$

je reziduum rovnice (2.23). Obdobně pro smyčku vnějších iterací $\|r^{n,k}\| < \epsilon$, kde

$$r^{n,k} = \theta_1(\psi^{n,k}) - \theta_2(\psi^{n,k}) + T^{n-1} \cdot \psi^{n,k} - b^{n-1} \quad (2.25)$$

je reziduum rovnice (2.22).

Algoritmus schematicky

Výše popsanou iteraci časové smyčky lze shrnout pomocí schematu Algoritmus 1.

Algoritmus 1: Metoda vnějších a vnitřních iterací

```
1 Načti počáteční podmínku  $\psi^0$ 
2 for  $n = 1$  to  $T$  do
3   Napočti  $b^{n-1}, T^{n-1}$  podle (2.8), (2.10)-(2.12)
4   Polož  $k = 1$ 
5   Polož  $\psi^{n,0} = \min\{\psi^*, \psi^{n-1}\}$ 
6   do
7     Napočti  $d^{n,k-1}, Q^{n,k-1}$  podle (2.22) // smyčka přes index k
8     Polož  $l = 1$ 
9     Polož  $\psi^{n,k,0} = \psi^{n,k-1}$ 
10    do
11      Napočti  $f^{n,k-1,l-1}, p^{n,k-1,l-1}$  podle (2.23) // smyčka přes index l
12      Vyřeš  $(P^{n,k,l-1} + T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k,l} = f^{n,k,l-1}$  // soustava s tridiagonální
13       $r^{n,k,l} = \theta_1(\psi^{n,k,l}) + (T^{n-1} - Q^{n,k-1}) \cdot \psi^{n,k,l} - d^{n,k-1}$ 
14       $l++$ 
15      while  $\|r^{n,k,l}\| < \epsilon$ 
16      Polož  $\psi^{n,k} = \psi^{n,k,l}$ 
17       $r^{n,k} = \theta_1(\psi^{n,k}) - \theta_2(\psi^{n,k}) + T^{n-1} \cdot \psi^{n,k} - b^{n-1}$ 
18       $k++$ 
19    while  $\|r^{n,k}\| < \epsilon$ 
20    Polož  $\psi^n = \psi^{n,k}$ 
```

V článku [5] jsou dokázány následující konvergenční tvrzení:

Lemma 1. Pro $k \geq 1$ necht' $\psi^{n,k,l}$ a $\psi^{n,k,l+1}$ jsou dvě po sobě jdoucí vnitřní iterace získané z (2.23). Pokud je $(P^{n,k,l} + T^n - Q^{n,k-1})$ M -matice, potom

$$\psi^{n,k,l+1} \leq \psi^{n,k,l}. \quad (2.26)$$

Lemma 2. Pro $k \geq 1$ necht' $\psi^{n,k}$ je k -tá iterace získaná z (2.22) a necht' $\psi^{n,k+1,l}$ je l -tá iterace splňující (2.23). Pokud je $(P^{n,k+1,l-1} + T^n - Q^{n,k})$ M -matice, potom

$$\psi^{n,k} \leq \psi^{n,k+1,l}. \quad (2.27)$$

Věta 1. Necht' $\theta(\psi)$ je dána předpisem (2.17) a necht' T je ireducibilní (nerozložitelná) matice difúzního toku, která je symetrickou M -maticí. Pokud kapacita vlhkosti $c(\psi)$ splňuje předpoklady $C1$ a $C2$, potom je algoritmus 1 dobře definovaný a vnitřní a vnější iterace jsou monotónní.

Spec. pro $\forall k = 1, 2, \dots$ dostáváme

$$\psi^{n,k,l+1} \leq \psi^{n,k,l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (2.28)$$

$$\psi^{n,k} \leq \psi^{n,k+1,l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

$$\psi^{n,k} \leq \psi^{n,k+1}. \quad (2.30)$$

a vnější iterace $\psi^{n,k}$ konvergují k přesnému řešení (2.13).

Obecně platí, že rychlejší konvergence se dosáhne volbou řešení z vnější iterační smyčky nebo z předchozího časového kroku jako počáteční odhad. Pro dosažení monotonní konvergence a splnění požadavku $\psi^0 \leq \psi^*$ algoritmu 1 je navržen počáteční odhad (řádek 5), který využívá známého řešení z předchozí Picardovy iterace:

$$\psi^{n,0} = \min\{\psi^*, \psi^{n-1}\}.$$

Výsledkem vnitřní iterace je lineární rovnice na řádku 12 v algoritmu 1, která se dá řešit například Thomasovým algoritmem, viz [11].

Kapitola 3

Numerické experimenty a výsledky

Obsahem této kapitoly je testování implementace již popsaného numerického řešení Richardsovy rovnice v jednorozměrném případě.

3.1 Testovací úloha

Metodu vnějších a vnitřních iterací aplikujeme na úlohu, která je popsána v článku [5], a ověříme, zda-li jsou naše výsledky konzistentní s výsledky v literatuře.

Řešíme rovnici 2.1 v oblasti $\Omega \times I = (a; b) \times (0; T)$, kde $a = 0\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$, $T = 300\,000\text{ s}$ s těmito počátečními a okrajovými podmínkami:

$$\psi(z, 0) = -z, \quad (3.1)$$

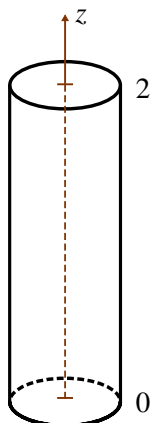
$$\psi(0, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\psi(2, t) = \begin{cases} -0,05 + 0,03 \sin\left(\frac{2\pi t}{100000}\right), & \text{pro } 0 < t \leq 100000, \\ 0,1, & \text{pro } 100000 < t \leq 180000, \\ -0,05 + 2952,45 \exp\left(\frac{-t}{18204.8}\right), & \text{pro } 180000 < t \leq 300000. \end{cases} \quad (3.3)$$

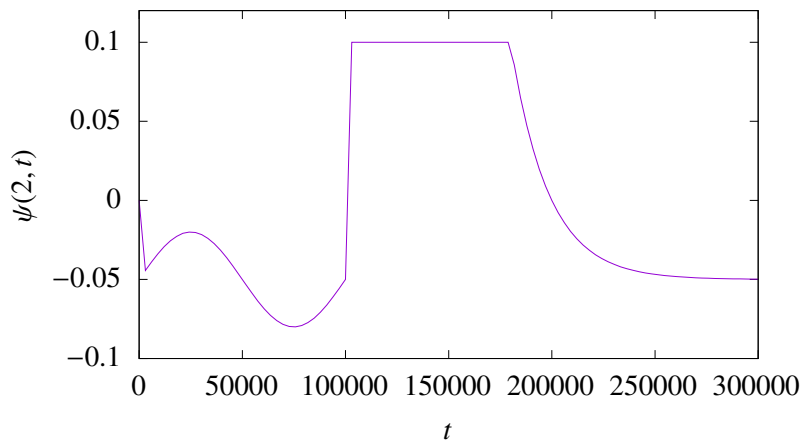
Jedná se o situaci, kdy máme dvoumetrový půdní válec, v jehož počátku je okrajová podmínka daná konstantní hladinou podzemní vody, zatímco na horní hranici máme časově závislou Dirichletovu podmínku. Vývoj časově závislé Dirichletovy podmínky můžeme vidět na obrázku 3.2.

Na interval $(0; 2\text{ m})$ položíme ekvidistantní síť s velikostí oka sítě $h = 0,00625\text{ m}$. Dostáváme tak síť o 320 dílcích. Půdní hydraulické vlastnosti jsou popsány van Genuchtenovým modelem (1.10) a jejich parametry jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Dále diskretizujeme časový interval $(0; 300\,000\text{ s})$. Velikost časového kroku volme $1\,000\text{ s}$. Počet iterací k získání řešení závisí na velikosti ϵ , tedy jak moc přesné řešení chceme dostat. Výsledky nalezneme v tabulce 3.2. Vidíme, že při nejméně přísné podmínce $\epsilon = 10^{-3}$ dostáváme konvergenci hned po jedné iteraci vnitřní i vnější smyčky. Optimální se zdá být $\epsilon = 10^{-6}$. Tlaková výška získaná s touto tolerancí je vykreslena na obrázku 3.3b. Toto řešení se zdá být velmi podobné řešení uvedenému v článku [5] na straně 2269.



Obrázek 3.1: Půdní válec o výšce 2 m s počátkem u hladiny podzemní vody.



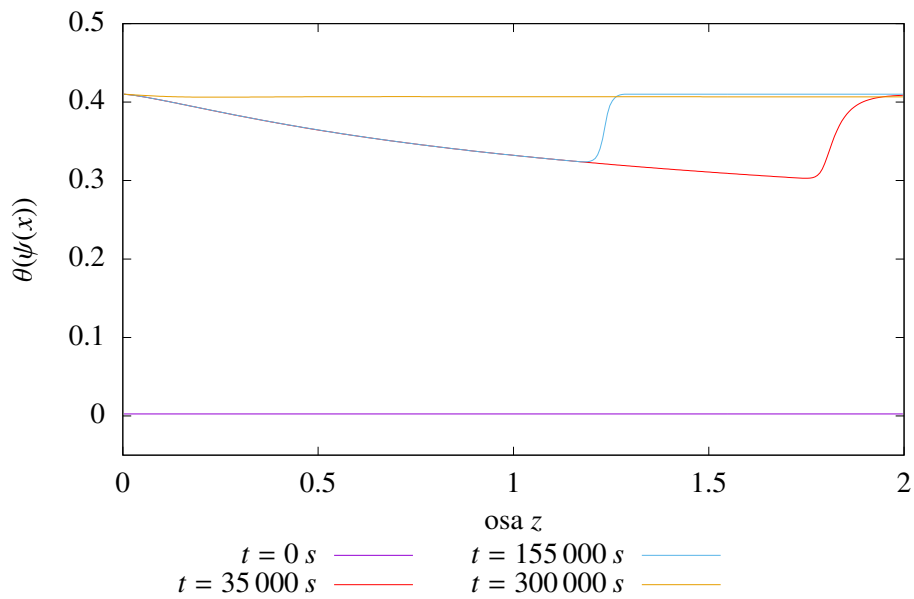
Obrázek 3.2: Časově závislá Dirichletova podmínka (3.3).

Tabulka 3.1: Hydraulické vlastnosti půdy použité v testovacím problému.

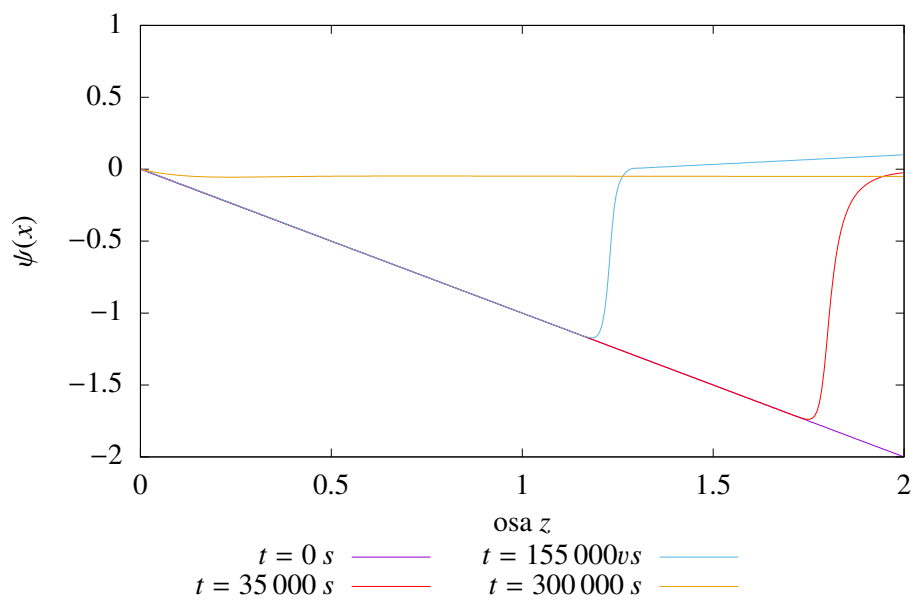
θ_s	0,410
θ_r	0,095
$\alpha (m^{-1})$	1,9
n	1,31
$K_s (m/den)$	0,062

Tabulka 3.2: Výsledky testovací úlohy.

	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-12}$
počet časových kroků	300	300	300
celkový počet vnitřních iterací	300	612	1572
celkový počet vnějších iterací	300	440	846
průměrný počet vnitřních iterací na časovou vrstvu	1	2.04	5.24
průměrný počet vnějších iterací na časovou vrstvu	1	1.46	2.82



(a) Profily objemové vlhkosti ve vybraných časech.



(b) Profily tlakové výšky ve vybraných časech.

Obrázek 3.3: Vývoj veličin ve vybraných časech 0 s, 35 000 s, 155 000 s, 300 000 s.

3.2 Konvergenční analýza

Při použití numerických metod pro výpočet diferenciálních rovnic nás zajímá, jaká je jejich přesnost a konvergenční vlastnosti. V praxi metody aplikujeme na diskrétní síť s konečným počtem vrcholů a chceme zajistit dostatečně dobrou aproximaci přesného řešení. Nastávají případy, kdy přesné - analytické řešení nemáme k dispozici. Tehdy numerické metody testujeme na zjednodušených problémech, jejichž analytické řešení existuje; případně naše numerické řešení porovnáme s jiným řešením, které nachítáme na velmi jemné síti vzhledem k původnímu - „hrubému“ numerickému řešení. Řád konvergence se pak počítá na základě chyby numerického řešení v porovnání s přesným nebo velmi jemným numerickým řešením.

Zdefinujeme si nyní následující pojmy. Vycházíme z [3].

Definice 1. *Necht' Ω je oblast, \mathcal{H}_h je prostor síťových funkcí (tj. funkcí definovaných na síti s krokem h a reálným oborem hodnot), $\mathcal{P}_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{H}_h$ je operátor projekce na prostor síťových funkcí. Pak numerické řešení $u_h \in \mathcal{H}_h$ konverguje k přesnému řešení y , právě když*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathcal{P}_h y - u_h\|_h = 0.$$

Řekneme, že konvergence má řád $\alpha > 0$, právě když

$$\|\mathcal{P}_h y - u_h\|_h = O(h^\alpha) \text{ pro } h \rightarrow 0.$$

Poznámka 1. *Platí ekvivalence*

$$\|\mathcal{P}_h y - u_h\|_h = O(h^\alpha) \iff (\exists C > 0) (\exists H_0^+ \text{ okolí}) (\forall h \in H_0^+) (\|\mathcal{P}_h y - u_h\|_h \leq C \cdot h^\alpha).$$

Definice 2. *Necht' $\forall h \in (0, 1)$ je $\|\cdot\|_h$ norma na \mathcal{H}_h , pro kterou existuje norma $\|\cdot\|_{\max}$ na $C(\bar{\Omega})$ tak, že pro všechny spojité funkce y na $\bar{\Omega}$ platí*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathcal{P}_h y\|_h = \|y\|_{\max}.$$

Pak se norma $\|\cdot\|_h$ nazývá konzistentní.

Poznámka 2. *Označme $E_h = \|\mathcal{P}_h y - u_h\|_h$ chybu numerického řešení. Budeme používat následující konzistentní normy:*

$$\|E_h\|_{h,p} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} h|E_{hi}|^p + \frac{h}{2}|E_{h0}|^p + \frac{h}{2}|E_{hn}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad E_{hi} = \|(\mathcal{P}_h y - u_h)_i\|_h, \quad p \geq 1;$$

$$\|E_h\|_{h,\max} = \max_{i=0,\dots,n} |E_{hi}|.$$

Řád konvergence budeme počítat pomocí chyb numerických řešení na dvou sítích.

Definice 3. *Experimentální řád konvergence $EOC^1(h_1, h_2)$ definujeme jako*

$$EOC(h_1, h_2) := \frac{\log(E_{h_1}/E_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}. \quad (3.4)$$

kde $h_1 > h_2$ jsou dva různé kroky sítě, E_{h_1} a E_{h_2} příslušné chyby aproximace s příslušnou normou.

¹Z anglického Experimental Order of Convergence

Nyní máme zavedené základní pojmy. Dále budeme testovat konvergenci a určíme řád konvergence pro úlohu z kapitoly 3.1 řešenou metodou vnějších a vnitřních iterací (MVVI). Hledanou neznámou je vektor ψ . Protože úloha nemá analytické řešení, použijeme pro konvergenční analýzu jako přesné řešení právě to na nejjemnější síti, označme ho y . Vektor u představuje numericky napočtené řešení vektrem ψ různé od y .

Postup výpočtu řádu konvergence bude následující:

1. napočtení nejjemnějšího řešení y pro krok h ,
2. napočtení numerických řešení u_h pro kroky sítě $2h, 4h, 8h, \dots$,
3. interpolace vektorů tak, aby bylo možné porovnat hrubší vektor s nejjemnějším vektorem y , tj. napočtení $\mathcal{I}_h^{kh} \cdot u_{kh}$, kde \mathcal{I}_h^{kh} je operátor lineárně interpolující diskrétní funkce ze sítě $k \cdot h$ na síť h , kde $k \in \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$,
4. napočtení normy chyb numerických řešení

$$E_h = \|y - \mathcal{I}_h^{2h} \cdot u_{2h}\|_h, E_h = \|y - \mathcal{I}_h^{4h} \cdot u_{4h}\|_h, E_h = \|y - \mathcal{I}_h^{8h} \cdot u_{8h}\|_h, \dots,$$

5. napočtení řádu konvergence EOC podle definice 3.

Výsledky konvergenční analýzy

Řešíme rovnici (2.1) na $(0; 35\,000\text{ s}) \times (0; 2\text{ m})$ a napočítáme experimentální řád konvergence.

Začneme s jedním časovým krokem o velikosti 35 000 s a deseti elementy o velikosti 0,2 m. Postupně zmenšujeme časový krok a zároveň element sítě na polovinu. Nastavení můžeme vidět v tabulce 3.3. Řešení v Nastavení 10 je nejjemnější a s ním budeme předchozí řešení srovnávat.

Tabulka 3.3: Konvergenční analýza - nastavení.

	počet časových kroků	velikost časového kroku [s]	počet elementů	velikost elementu sítě [m]
Nast.1	1	35 000	10	0,2
Nast.2	2	17 500	20	0,1
Nast.3	4	8 750	40	0,05
Nast.4	8	4 375	80	0,025
Nast.5	16	2 187,5	160	0,0125
Nast.6	32	1 093,75	320	0,00625
Nast.7	64	546,875	640	0,003125
Nast.8	128	273,4375	1280	0,0015625
Nast.9	256	136,71875	2560	0,00078125
Nast.10	512	68,359375	5120	0,000390625

V tabulce 3.4 poté vidíme výsledky. V L_1 normě řád konverguje k hodnotě 2,5, pro normu L_2 je hodnota také rovna přibližně 2,5. Pro maximovou normu se po zaokrouhlení dostáváme k hodnotě 1,6.

Tabulka 3.4: Konvergenční analýza - výsledky MVVI.

	čas výpočtu [s]	L_1		L_2		L_∞	
		E_h	EOC	E_h	EOC	E_h	EOC
Nast.1	0,0056	76,2328		1,7340		0,9195	
Nast.2	0,0452	25,3363	1,5892	0,7601	1,1898	0,9084	0,0176
Nast.3	0,0576	6,1857	2,0342	0,2197	1,7907	0,6535	0,4750
Nast.4	0,1211	1,9824	1,6417	0,0957	1,1983	0,6199	0,0763
Nast.5	0,2991	0,8437	1,2325	0,0477	1,0041	0,5493	0,1745
Nast.6	0,7376	0,2814	1,5842	0,0166	1,5270	0,3654	0,5881
Nast.7	4,4219	0,0778	1,8544	0,0046	1,8497	0,1978	0,8854
Nast.8	17,0197	0,0157	2,3048	0,0009	2,3460	0,0790	1,3248
Nast.9	60,1513	0,0029	2,4655	0,0002	2,5480	0,0265	1,5768

3.3 Srovnání s klasickou Newtonovou metodou

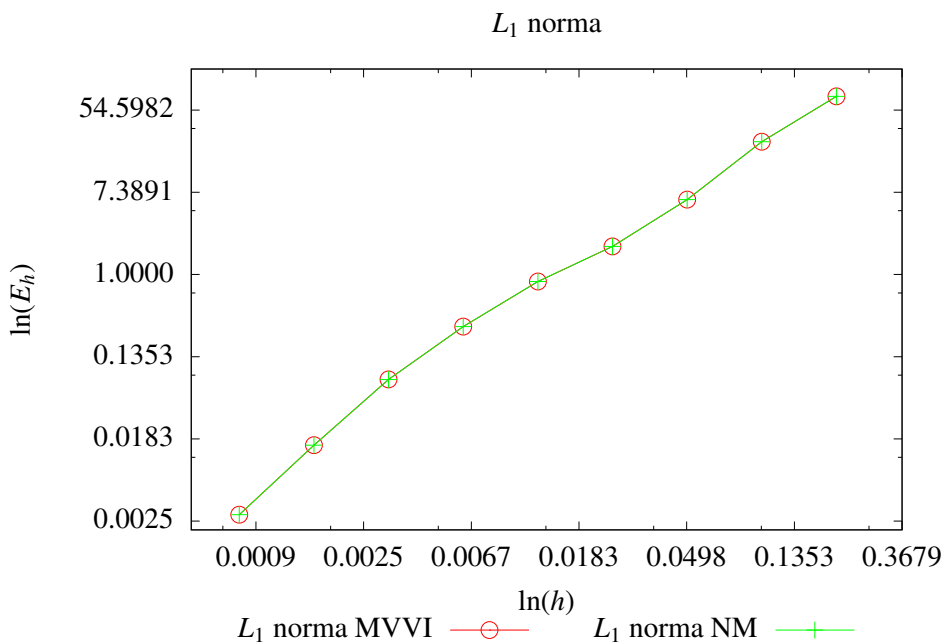
Jako další experiment zde máme porovnání námi testované metody vnořených vnějších a vnitřních iterací (MVVI) s klasickou Newtonovou metodou. Newtonovu metodu jde nasimulovat v MVVI nastavením jedné vnitřní iterace, protože pro $l = 1$ přechází rovnice (2.23) v rovnici (2.16).

Použijme opět úlohu, kdy řešíme rovnici (2.1) na $(0; 35\,000s) \times (0; 2m)$. Ponecháváme toleranci $\epsilon = 10^{-6}$. Uvažujme nastavení stejná jako v tabulce 3.3. Porovnáme celkový čas potřebný k napočítání řešení a příslušné normy pro metodu vnějších a vnitřních iterací (MVVI) a Newtonovu metodu (NM). Dostáváme následující tabulku:

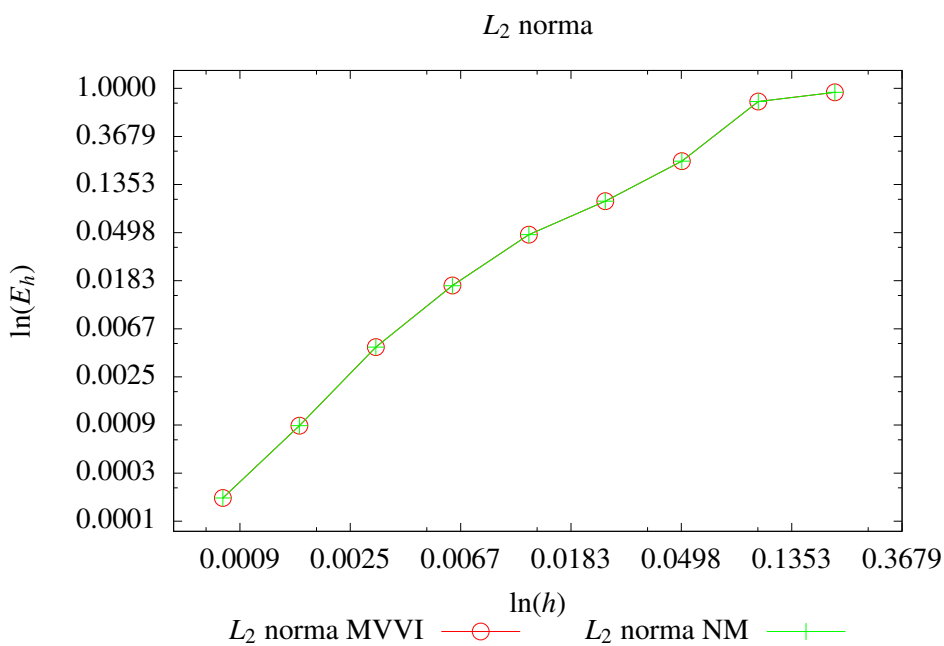
Tabulka 3.5: Konvergenční analýza - výsledky NM.

	čas výpočtu [s]	L_1		L_2		L_∞	
		E_h	EOC	E_h	EOC	E_h	EOC
Nast.1	0,0029	76,2328		1,7340		0,9195	
Nast.2	0,0113	25,3363	1,5892	0,7601	1,1898	0,9084	0,0176
Nast.3	0,0413	6,1857	2,0342	0,2197	1,7907	0,6535	0,4750
Nast.4	0,1478	1,9825	1,6416	0,0957	1,1984	0,6199	0,0763
Nast.5	0,4671	0,8427	1,2342	0,0477	1,0058	0,5489	0,1753
Nast.6	1,8377	0,2810	1,5842	0,0165	1,5270	0,3651	0,5886
Nast.7	5,5102	0,0777	1,8554	0,0046	1,8509	0,1975	0,8865
Nast.8	16,6876	0,0157	2,3026	0,0009	2,3435	0,0789	1,3228
Nast.9	47,5283	0,0029	2,4652	0,0002	2,5478	0,0265	1,5764

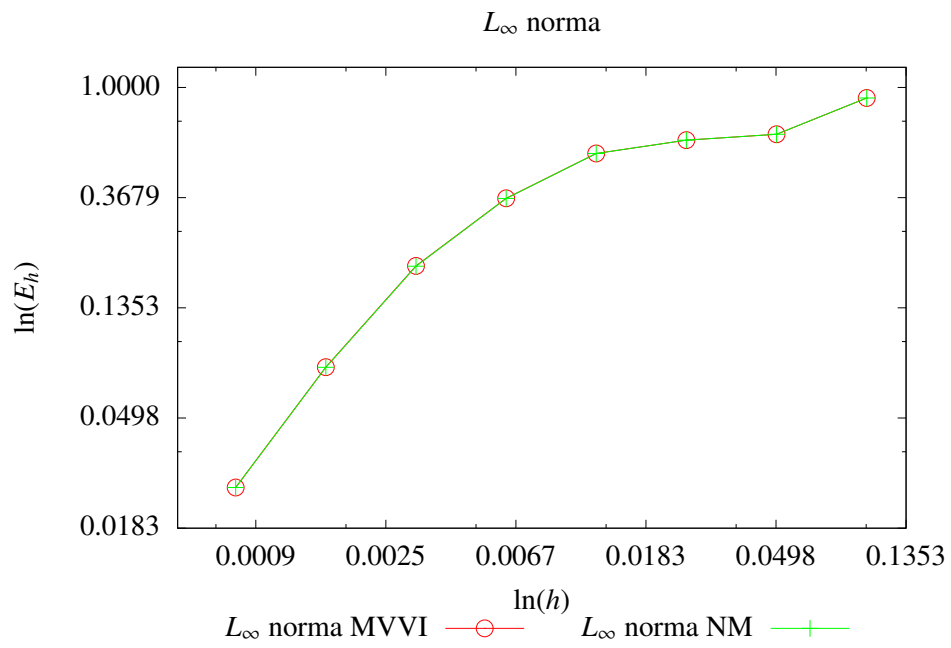
Pro lepší interpretaci srovnání výsledků v tabulkách 3.4 a 3.5 vykresleme chyby numerických řešení E_h příslušných norem v logaritmickém měřítku. Na obrázcích 3.4 - 3.6 můžeme vidět, že se chyba snižuje se zmenšujícím se krokem.



Obrázek 3.4: Chyba L_1 normy v logaritmickém měřítku.



Obrázek 3.5: Chyba L_2 normy v logaritmickém měřítku.



Obrázek 3.6: Chyba L_∞ normy v logaritmicím měřítku.

V tabulkách 3.6 a 3.7 srovnáme počet iterací.

Tabulka 3.6: Počty iterací pro MVVI.

	MVVI			
	celkový počet vnitřních iterací	celkový počet vnějších iterací	průměrný počet vnitřních iterací na jednu vnější iteraci	počet vnějších iterací na jednu časovou vrstvu
Nast.1	2	1	2	1
Nast.2	6	4	1,5	2
Nast.3	13	8	1,6250	2
Nast.4	26	14	1,8571	1,75
Nast.5	40	18	2,2222	1,125
Nast.6	71	34	2,0882	1,0625
Nast.7	115	66	1,7424	1,0313
Nast.8	158	128	1,2344	1
Nast.9	278	256	1,0859	1
Nast.10	530	512	1,0352	1

Tabulka 3.7: Počty iterací pro NM.

	NM			
	celkový počet vnitřních iterací	celkový počet vnějších iterací	průměrný počet vnitřních iterací na jednu vnější iteraci	počet vnějších iterací na jednu časovou vrstvu
Nast.1	2	2	1	2
Nast.2	5	5	1	2,5
Nast.3	11	11	1	2,75
Nast.4	22	22	1	2,75
Nast.5	38	38	1	2,375
Nast.6	69	69	1	2,1563
Nast.7	113	113	1	1,7656
Nast.8	158	158	1	1,2344
Nast.9	278	278	1	1,0859
Nast.10	530	530	1	1,0352

Vidíme, že při použití NM je napočítáván menší počet iterací, a proto je čas výpočtu kratší než pro MVVI, jak je uvedeno v tabulkách 3.4 a 3.5. EOC je přitom pro obě metody téměř stejný.

Vliv velikosti časového kroku na konvergenci metod

Jako další budeme pozorovat působení velikosti časového kroku na konvergenci metod MVVI a NM. Mějme zadání obdobné úloze v kapitole 3.1 s rozdílem hodnoty okrajové podmínky

$$\psi(2, t) = 0,1, \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T, \quad (3.5)$$

a oblasti - prostorový interval je zachován $(0; 2m)$, změněn je interval časový, a sice $(0; 262\,144\,s)$.

Nastavení oblasti a sítě mějme pro obě metody shodné. Volme jemnou síť o 1 280 prvcích, každý délky $0,0015625\,m$. Postupně budeme $4\times$ zvětšovat časový krok a sledovat, jak se mění počet iterací pro napočtení numerického řešení.

Tabulka 3.8: Vliv velikosti časového kroku na počet iterací a čas výpočtu pro MVVI.

velikost čas kroku	čas výpočtu [s]	MVVI			
		celkový počet vnitřních iterací	celkový počet vnějších iterací	průměrný počet vnitřních iterací na 1 vnější iteraci	počet vnějších iterací na jednu čas. vrstvu
1	938,658	262 157	262 145	1,00005	1,000004
4	234,18	65 562	65 538	1,0004	1,00003
16	53,9617	16 431	16 389	1,0026	1,0003
64	14,7992	4 190	4 114	1,0185	1,0044
256	4,98495	1 331	1 071	1,2428	1,0459
1 024	2,1371	615	447	1,3758	1,7461
4 096	1,0715	241	166	1,4518	2,5938
16 384	0,2448	68	36	1,8889	2,25
65 536	0,0698	16	8	2	2
262 144	0,0152	4	2	2	2

Tabulka 3.9: Vliv velikosti časového kroku na počet iterací a čas výpočtu pro NM.

velikost čas kroku	čas výpočtu [s]	NM			
		celkový počet vnitřních iterací	celkový počet vnějších iterací	průměrný počet vnitřních iterací na 1 vnější iteraci	počet vnějších iterací na jednu čas. vrstvu
1	900,136	262 157	262 157	1	1,00005
4	230,261	65 561	65 561	1	1,00038
16	58,6624	16 429	16 429	1	1,00275
64	16,1818	4 179	4 179	1	1,02026
256	5,2249	1 310	1 310	1	1,27930
1 024	1,9960	458	458	1	1,78906
4 096	0,6555	164	164	1	2,5625
16 384	0,2602	48	48	1	3
65 536	0,0645	12	12	1	3
262 144	0,0235	3	3	1	3

Po porovnání dat z tabulek 3.8 a 3.9 lze konstatovat, že pro malé časové kroky se jeví Newtonova metoda jako výhodnější. Výpočet pro naše nastavení je rychlejší o necelých 40 s a počet iterací je téměř srovnatelný.

Zvětšujeme-li časový krok, rychlejší konvergence se obrací ve prospěch metody vnějších a vnitřních iterací, kdy je výpočet 1,5× rychlejší než pro Newtonovu metodu. Zdá se, že počet vnějších iterací na jednu časovou vrstvu je nižší. Ovšem je nutno si uvědomit, že dvě vnitřní iterace (celkový počet) a dvě vnější iterace v průměru na časovou vrstvu dají dohromady čtyři iterace celkem. To je více než tři Newtonovy iterace na jednu časovou vrstvu. Z hlediska výpočetního času se MVVI pro delší časové kroky jeví jako vhodnější než NM.

Závěr

V této práci byl představen algoritmus metody vnějších a vnitřních iterací spolu s analýzou implementované metody řešící nelineární parciální diferenciální rovnici - Richardsovu rovnici.

Po ověření korektnosti implementace a porovnání s literárními výsledky jsme zjistili, že MVVI (metoda vnějších a vnitřních iterací) dosahuje vysokého experimentálního řádu konvergence v normách L_1 , L_2 a také L_∞ . Dále jsme provedli srovnání s klasickou Newtonovou metodou a zjistili, že obě metody dosahují srovnatelné chyby, jestliže snižujeme krok metody zároveň s velikostí elementu sítě. Nicméně výsledky ukázaly, že Newtonova metoda byla časově efektivnější než MVVI. Pokud jsme ponechali velikost elementu sítě neměnnou a změnili pouze časový krok, MVVI se zdála být výhodnější při zvětšujícím se časovém kroku.

Přínosem práce je mimo jiné zpřehlednění popisu algoritmu z článku [5], kde byly vynechány určité indexy a mohlo dojít ke zmatení čtenáře. Možností dalšího rozšíření tohoto výzkumu je zkoumání výsledků vícerozměrných případů, abychom posoudili, zda-li dojdeme k obdobným závěrům.

Literatura

- [1] Peter Bastian. *Numerical computation of multiphase flows in porous media*. PhD thesis, habilitati-onsschrift Univeristät Kiel, 1999.
- [2] Jacob Bear. *Modeling phenomena of flow and transport in porous media*, volume 1. Springer, 2018.
- [3] Michal Beneš. Numerická matematika. Přednášky FJFI (ČVUT), 2023.
- [4] Royal Harvard Brooks and Arthur T Corey. Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the irrigation and drainage division*, 92(2):61–88, 1966.
- [5] Vincenzo Casulli and Paola Zanolli. A nested Newton-type algorithm for finite volume methods solving Richards' equation in mixed form. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(4):2255–2273, 2010.
- [6] Michael A Celia, Efthimios T Bouloutas, and Rebecca L Zarba. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26(7):1483–1496, 1990.
- [7] Henry Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon exposition et application... par Henry Darcy*. Victor Dalmont, 1856.
- [8] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet II*. Academia (Praha), 1984.
- [9] Ondřej Polívka. Numerické řešení Richardsovy rovnice metodou konečných objemů. Bakalářská práce, FJFI (ČVUT), 2008.
- [10] Mario Putti and Claudio Paniconi. Picard and Newton linearization for the coupled model for saltwater intrusion in aquifers. *Advances in water resources*, 18(3):159–170, 1995.
- [11] Llewellyn Hilleth Thomas. Elliptic problems in linear difference equations over a network. *Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York*, 1:71, 1949.
- [12] M Th Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsatu-rated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5):892–898, 1980.
- [13] Sunethra Weerakoon and T. G. I. Fernando. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied mathematics letters*, 13(8):87–93, 2000.

Seznam obrázků

1.1	Nenasycené porézní prostředí vyhovující našim předpokladům.	12
1.2	Konvence pro vektor \mathbf{g}	14
1.3	Průběh funkcí $\theta(\psi)$ (1.10), $K(\psi)$ (1.11) v závislosti na ψ pro konkrétní parametry: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $\alpha = 1.9$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.	16
1.4	Vliv parametru α na průběh křivky $\theta(\psi)$ (1.10) pro konkrétní hodnoty: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.	16
2.1	Rozdělení intervalu a umístění diskretních veličin. Hodnoty skalárních veličin jsou dány ve středech podintervalů a hodnoty toků přes jejich hranice, tj. v bodech z_i	18
2.2	Průběh funkce $c(\psi)$ (2.18) v závislosti na ψ pro konkrétní parametry: $\theta_s = 0.41$, $\theta_r = 0.095$, $\alpha = 1.9$, $n = 1.31$, $K_s = 0.062$, viz tabulka 3.3.	22
3.1	Půdní válec o výšce 2 m s počátkem u hladiny podzemní vody.	27
3.2	Časově závislá Dirichletova podmínka (3.3).	27
3.3	Vývoj veličin ve vybraných časech 0 s, 35 000 s, 155 000 s, 300 000 s.	28
3.4	Chyba L_1 normy v logaritmickém měřítku.	32
3.5	Chyba L_2 normy v logaritmickém měřítku.	32
3.6	Chyba L_∞ normy v logaritmickém měřítku.	33

Seznam tabulek

3.1	Hydraulické vlastnosti půdy použité v testovacím problému.	27
3.2	Výsledky testovací úlohy.	27
3.3	Konvergenční analýza - nastavení.	30
3.4	Konvergenční analýza - výsledky MVVI.	31
3.5	Konvergenční analýza - výsledky NM.	31
3.6	Počty iterací pro MVVI.	34
3.7	Počty iterací pro NM.	34
3.8	Vliv velikosti časového kroku na počet iterací a čas výpočtu pro MVVI.	35
3.9	Vliv velikosti časového kroku na počet iterací a čas výpočtu pro NM.	35