



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Spinory v klasické fyzice

Spinors in Classical Physics

Bakalářská práce

Autor: **Vojtěch Vanc**
Vedoucí práce: **Ing. Václav Zatloukal, Ph.D.**
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2022/2023



Student: Vojtěch Vanc

Studijní program: Matematické inženýrství

Specializace: Matematická fyzika

Název práce: Spinory v klasické fyzice
(česky)

Název práce: Spinors in Classical Physics
(anglicky)

Jazyk práce: Čeština

Pokyny pro vypracování:

- 1) Základy Cliffordovy geometrické algebry, zavedení rotorů a spinorů
- 2) Rotory a spinory v klasické mechanice - pohyb setrvačnicku a Kustaanheimo-Stiefelova transformace
- 3) Lagrangeův formalismus v teorii pole - pohybové rovnice, noetherovské proudy, tenzor energie-hybnosti
- 4) Popis klasického kontinua pomocí spinorového pole a jeho interakce s elektromagnetickým polem

Doporučená literatura:

- [1] C. Doran and A. Lasenby, Geometric Algebra for Physicists, Cambridge Univ. Press (2007).
- [2] D. Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics, Kluwer Academic Publ. (1999).
- [3] A. O. Barut, Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles, Dover Publ. (1980).

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:


Ing. Václav Zatloukal, Ph.D.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

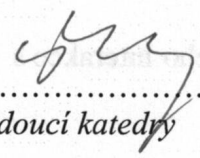
Datum zadání bakalářské práce: 20.10.2022

Termín odevzdání bakalářské práce: 02.08.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.


.....
garant studijního programu




.....
vedoucí katedry


.....
děkan

V Praze dne 20.10.2022



PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Jméno a příjmení studenta: Vojtěch Vanc

Osobní číslo: 502563

Název studijního programu (oboru): Matematické inženýrství - matematická fyzika

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Spinory v klasické fyzice

vypracoval(a) samostatně a uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 2. 8. 2023

.....
podpis

Poděkování:

Chtěl bych poděkovat Ing. Václavu Zatloukalovi, Ph.D. za jeho trpělivost a vstřícnost při vedení práce, za jeho cenné poznámky a pomoc s pochopením látky potřebné pro tuto práci.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 2. srpna 2023

Vojtěch Vanc

Název práce:

Spinory v klasické fyzice

Autor: Vojtěch Vanc

Studijní program: Matematické inženýrství

Specializace: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Václav Zatloukal, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Abstrakt: Spinory jsou používány v kvantové mechanice jako komplexní vektory, které se při transformacích chovají jako "odmocniny" z vektoru. V práci představíme Cliffordovu geometrickou algebru, která dokáže zacházet s těmito objekty a osvětluje jejich zvláštní chování. Navíc díky přímé geometrické interpretaci umožňuje používat spinory i v problémech z klasické mechaniky - rozklad vektoru do spinorů dokáže zjednodušit problémy z nebeské mechaniky či pohyb setrvačnicku. Můžeme tak například případ volného symetrického setrvačnicku vyřešit přímo pomocí dvoukomponentních komplexních vektorů, kterými v kvantové mechanice popisujeme spin elektronu. Na závěr této práce se seznámíme se spinorovým polem a představíme nový model vhodný pro popis ideální relativistické tekutiny.

Klíčová slova: Cliffordova algebra, geometrická algebra, spinor, spinorové pole, ideální relativistická tekutina

Title:

Spinors in Classical Physics

Author: Vojtěch Vanc

Abstract: Spinors are used in quantum mechanics as complex vectors that behave as "square roots" of a vector during transformations. In this thesis, we introduce a Clifford geometric algebra that can handle these objects and illuminate their peculiar behavior. Moreover, due to its direct geometric interpretation, it allows to use spinors also in problems from classical mechanics- the decomposition of a vector into spinors can simplify problems in celestial mechanics or the rotation of a rigid body. For example, we can solve the case of a free symmetric top directly using two-component complex vectors, which in quantum mechanics describe the spin of an electron. At the end of this thesis, we will introduce the spinor field and present a new model suitable for describing an ideal relativistic fluid.

Key words: Clifford algebra, geometric algebra, spinor, spinor field, ideal relativistic fluid

Obsah

Úvod	9
1 Základy Cliffordovy geometrické algebry	10
1.1 Zavedení geometrické algebry	10
1.1.1 Konvence	12
1.2 Geometrická algebra ve 2 a 3 dimenzích	12
1.2.1 Vztah s komplexními čísly	13
1.2.2 Rotace ve dvou dimenzích	13
1.2.3 Vztah s kvaterniony	13
1.2.4 Pseudoskalár a vektorový součin	14
1.2.5 Reflexe a rotace	15
1.2.6 Zavedení spinorů	16
1.2.7 Rotace obecného multivektoru	17
1.3 Časoprostorová algebra	17
1.4 Reprezentace pomocí komplexních matic	18
1.4.1 Konstrukce spinorů	19
1.4.2 Obecná Lorentzova transformace	20
1.4.3 Polární rozklad spinoru	21
2 Rotory a spinory v klasické mechanice	22
2.1 Geometrická algebra v klasické mechanice	22
2.2 Kustaanheimo-Stiefelova transformace	22
2.3 Pohyb setrvačnicku	25
2.4 Reprezentace pomocí komplexních vektorů	27
2.5 Symetrický setrvačnick	28
3 Lagrangeův formalismus pro spinorové pole	30
3.1 Pohybové rovnice	30
3.2 Teorém Noetherové	30
3.2.1 Tenzor energie-hybnosti	31
3.2.2 Tenzor momentu hybnosti	31
3.2.3 Vnitřní symetrie	32
4 Popis klasického kontinua pomocí spinorového pole	34
4.1 Relativistická tekutina	34
4.2 Samointeragující spinorové pole	35
4.2.1 Zachovávající se veličiny	36

4.3	Přechod do klasického kontinua	36
4.4	Elektromagnetické pole	38
	Závěr	41

Úvod

Spinory byli poprvé použity ve fyzice W. Paulim k popisu spinu elektronu. Byli zavedeny jako dvoukomponentní komplexní vektory. Později P. Dirac našel relativistický popis elektronu pomocí spinoru jako čtyřkomponentního komplexního vektoru. Z transformačních vztahů pro střední hodnoty spinu se ukazuje, že spinor se transformuje při rotacích jako "odmocnina z vektoru". Je velmi těžké si tuto geometrickou vlastnost představit pro komplexní vektor. Proto v této práci zavedeme spinory jinak, a to jako prvky Cliffordovy geometrické algebry. Spinory v této algebře mají jasnou geometrickou interpretaci. Ukazuje se, že Schrodingerova rovnice pro spin elektronu či Diracova rovnice se obě dají převést z komplexního zápisu do řeči této algebry [1, kap. 8], kde spinor reprezentuje prvek sudé podalgebry.

Geometrická algebra také zjednodušuje zápis mnoha rovnic z klasické mechaniky, protože umožňuje všechny důležité operace zapsat jen pomocí geometrického součinu. Díky tomu se můžeme často vyhnout indexovému zápisu. Použití geometrické algebry v klasické mechanice poprvé zpopularizoval D. Hestenes v [2]. My si zde ukážeme řešení Keplerovy úlohy, kde vektor polohy rozložíme do spinoru. Tato transformace byla poprvé objevena v maticovém zápisu bez užití geometrické algebry [5], proto nese název po původních autorech P. E. Kustaanheimovi a E. Stiefelovi. Ukazuje se, že po použití této transformace se problém dá převést na problém izotropního harmonického oscilátoru. Toto nemusí být příliš překvapující, protože oba problémy mají v určitém případě stejnou trajektorii - elipsu.

Dále se podíváme na popis setrvačnicku. Ukazuje se, že popis rotačních stupňů volnosti je velice výhodný pomocí spinorů (přesněji rotorů) ve třech dimenzích. Zvolíme netradiční přístup, kdy stav setrvačnicku můžeme zpátky reprezentovat dvoukomponentním komplexním vektorem pro popis spinu elektronu. Ukáže se, že v komplexním zápisu se některé výpočty dokonce zjednoduší.

První dvě kapitoly jsou do značné části inspirované výkladem z [1] a [2]. V posledních dvou kapitolách se pokusíme použít spinory v mechanice kontinua. Od jednoho spinoru přejdeme ke spinorovému poli, k čemuž budeme potřebovat matematický aparát teorie pole představený ve třetí kapitole. Abychom dostali dynamické rovnice, představíme lagrangián inspirovaný Diracovou teorií. Důvodem pro tento popis je následné přidání interakce s elektromagnetickým polem, kde se v pohybových rovnicích pro spinor vyskytuje pouze vektorový potenciál, zatímco v pohybových rovnicích pro kontinuum se vyskytují intenzity elektromagnetického pole. Pro aplikovatelnost modelu je potřeba ukázat, že proud popsaný spinorovým polem splňuje dynamické rovnice pro relativistickou tekutinu. Ty zatím dostáváme jen v přiblížení pro velmi pomalu měnící se spinor s velmi rychle měnící se fází. Dokážeme také najít přesný rozdíl dvou tenzorů energií-hybnosti, popisující odchylku dynamického vývoje dvou modelů.

Kapitola 1

Základy Cliffordovy geometrické algebry

Většina výkladu první kapitoly je inspirovaná [1, kap. 1, 2, 4] a představuje matematický aparát pro další kapitoly. Dále budeme užívat pouze označení geometrická algebra, které je častěji používáno ve fyzice a dalších aplikacích.

1.1 Zavedení geometrické algebry

Mějme vektorový prostor V nad reálnými čísly a kvadratickou formu $Q : V \rightarrow R$. Zavedeme novou operaci mezi vektory, zvanou geometrický součin, pro kterou požadujeme asociativitu

$$\forall a, b, c \in V \quad (ab)c = a(bc), \quad (1.1)$$

distributivitu zprava a zleva

$$\forall a, b, c \in V, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (1.2)$$

$$(b + c)a = ba + ca \quad (1.3)$$

a

$$\forall a \in V, \quad a^2 = Q(x). \quad (1.4)$$

Poslední podmínka je zásadní, protože odlišuje geometrickou algebru od obecné asociativní algebry. Je tak zřejmé, že obraz součinu dvou vektorů bude objekt, který nemusí ležet ve V . K určení prostoru, kam se zobrazují tyto objekty, zkusme rozdělit součin dvou vektorů na symetrickou a antisymetrickou část

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba). \quad (1.5)$$

Symetrickou část můžeme identifikovat jako skalár, jelikož platí následující identita

$$ab + ba = (a + b)^2 - a^2 - b^2, \quad (1.6)$$

kde pravá strana díky třetí podmínce musí být pouze reálné číslo. Můžeme tak definovat skalární součin

$$a \cdot b \equiv \frac{1}{2}(ab + ba). \quad (1.7)$$

Antisymetrická část se už z axiomů nezjednoduší a musíme tak vnímat geometrický součin tenzorově. Rigorózněji lze geometrickou algebru definovat jako volnou tenzorovou algebru s podmínkou

$$v \otimes v = Q(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.8)$$

Antisymetrická část geometrického součinu se nazývá bivektor a značí se pomocí operace zvané vnější součin

$$a \wedge b \equiv \frac{1}{2}(ab - ba). \quad (1.9)$$

Bivektor lze si intuitivně představit jako rovnoběžník se stranami určenými danými vektory a kladnou či zápornou orientací danou pořadím vektorů. Je ale důležité si uvědomit, že bivektor tento rovnoběžník neurčuje jednoznačně. Můžeme například přidat libovolný násobek vektoru a do druhého argumentu bez žádné změny:

$$a \wedge (b + \lambda a) = a \wedge b + a \wedge \lambda a = a \wedge b + \lambda(a \wedge a) = a \wedge b. \quad (1.10)$$

Podobně můžeme měnit i druhý vektor. Obecně tak lineární transformací

$$\begin{aligned} c &= \lambda_1 a + \lambda_2 b \\ d &= \lambda_3 a + \lambda_4 b \end{aligned} \quad (1.11)$$

změníme bivektor pouze o konstantu, tj.

$$c \wedge d = (\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3) a \wedge b. \quad (1.12)$$

Když bychom zvolili vektor a a b jako bázi podprostoru ve V , je vidět, že bivektor pouze nese informaci o rovině, kterou určují jeho vektory, a hodnotu determinantu transformace (1.11), kterou si můžeme představit jako obsah rovnoběžníku s orientací danou znaménkem.

Pro aplikace geometrické algebry stačí předpokládat vektorový prostor s konečnou dimenzí $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Mějme libovolnou bázi (a_1, \dots, a_n) . V prostorech s pozitivní kvadratickou formou lze tuto bázi ortonormalizovat pomocí Gram-Schmidtova algoritmu. Obecně to však nelze provést, protože se v průběhu dělí kvadrátem vektoru, který může být nulový. Budeme tedy postupovat jinak. Definujme matici $M_{ij} = a_i \cdot a_j$. Jelikož je matice symetrická, můžeme ji diagonalizovat na tvar

$$M = R \Lambda R^\dagger, \quad (1.13)$$

kde R je ortogonální a Λ diagonální matice. Definujme novou bázi

$$e_i' = R_{ij}^\dagger a_j, \quad (1.14)$$

pro kterou platí

$$e_i' \cdot e_j' = \Lambda_{ij} \quad (1.15)$$

Vektory z nové báze potom můžeme normalizovat k 1, -1 nebo se může stát, že kvadrát vektoru bude nula. Pro fyzikální uplatnění tuto třetí možnost nepotřebujeme a budeme dále předpokládat nedegenerovanou kvadratickou formu. Počet kladných bazických vektorů označme p a záporných q . Taková algebra se potom obvykle značí $\mathcal{G}(p, q)$.

Dosud jsme uvažovali geometrický součin dvou vektorů. Součin tří nebo více vektorů můžeme rozdělit do dalších objektů, pro které budeme potřebovat zavést vnější součin k vektorů

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} (-1)^{\text{sgn}(\pi)} a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(k)}, \quad (1.16)$$

kde v sumě sčítáme přes všechny permutace k prvků. Opakovaným užitím definice skalárního součinu ve formě $ab = 2(a \cdot b) - ba$ pro součin tří vektorů například najdeme

$$abc = a \wedge b \wedge c + (a \cdot b)c + (b \cdot c)a - (a \cdot c)b. \quad (1.17)$$

Díky vnějšímu součinu dokážeme součin libovolného počtu vektorů rozložit do báze. Mějme tedy libovolnou bázi vektorového prostoru (e_1, \dots, e_n) . Báze celého prostoru $\mathcal{G}(p, q)$ potom bude vypadat následovně:

$$(1, e_i, e_i e_j, e_i e_j e_k, \dots, e_1 e_2 \dots e_n) \quad i, j, k, \dots \in N, \quad i < j < k < \dots,$$

kde díky ortonormalitě místo vnějšího součinu píšeme geometrický součin. Obecný prvek tohoto prostoru nazveme multivektor. Pro součin dvou multivektorů stále platí asociativita a distributivita. Dimenze prostoru bude

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad (1.18)$$

kde sčítáme přes stupně prvků v bázi - skaláry jsou objekty stupně 0, vektory stupně 1 atd.. Poslední prvek báze se nazývá pseudoskalár a obvykle se značí I . Skalární a vnější součin můžeme zobecnit pro vyšší stupně než vektory. Pro obecný multivektor, rozložený na $n + 1$ stupňů $M = A_0 + A_1 + \dots + A_n$ zavedeme projektor vztahem

$$\langle M \rangle_n = A_n, \quad (1.19)$$

$$\langle \cdot \rangle_0 \equiv \langle \cdot \rangle \quad (1.20)$$

Nyní můžeme zobecnit

$$A_n \cdot A_m = \langle A_n A_m \rangle_{|n-m|} \quad (1.21)$$

$$A_n \wedge A_m = \langle A_n A_m \rangle_{n+m}. \quad (1.22)$$

Skalární prvky v geometrickém součinu vždy vznikají součinem dvou stejných objektů z báze. Díky tomu pro libovolné dva multivektory A a B platí

$$\langle AB \rangle = \langle BA \rangle. \quad (1.23)$$

Poznamenejme, že například z (1.17) pro vektor a a bivektor B platí

$$a \cdot B = \langle aB \rangle_1 = \frac{1}{2}(aB - Ba). \quad (1.24)$$

1.1.1 Konvence

Dále budeme při výpočtech používat konvenci, že skalární a vnější součin má vždy přednost před geometrickým součinem, tj.

$$A \wedge B C = (A \wedge B)C \quad (1.25)$$

$$A \cdot B C = (A \cdot B)C \quad (1.26)$$

pro libovolné multivektory A, B a C .

1.2 Geometrická algebra ve 2 a 3 dimenzích

Prvky sudého stupně tvoří podalgebru. Ukazuje se, že ve 2 a 3 dimenzích se tato podalgebra dá identifikovat se známými matematickými strukturami.

1.2.1 Vztah s komplexními čísly

Prostor $\mathcal{G}(2, 0)$ má ortonormální bázi $(1, e_1, e_2, e_1e_2 = I)$. Potom jediný bazický bivektor má vlastnost

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_2e_2e_1 = -e_1e_1 = -1. \quad (1.27)$$

Sudá podalgebra tvoří dvoudimenzionální podprostor, kde pro součin dvou libovolných prvků platí

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 I)(\beta_1 + \beta_2 I) = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)I. \quad (1.28)$$

Tato podalgebra je tak identická s komplexními čísly a můžeme ztotožnit imaginární jednotku i s pseudoskalárem $I = e_1e_2$.

1.2.2 Rotace ve dvou dimenzích

Můžeme nyní využít vzorce pro rotaci komplexních čísel jako vektorů v komplexní rovině

$$z' = e^{i\phi} z. \quad (1.29)$$

Každému sudému multivektoru $Z = a + Ib$ můžeme přiřadit vektor vztahem

$$v = e_1 Z = ae_1 + be_2. \quad (1.30)$$

Rotace vektoru ve dvou dimenzích o úhel ϕ má potom tvar

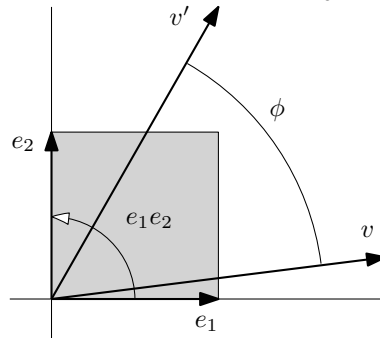
$$v' = e_1 e^{I\phi} e_1 v = e_1 (\cos \phi + \sin \phi e_1 e_2) e_1 v = (\cos \phi - \sin \phi e_1 e_2) v = e^{-I\phi} v = v e^{I\phi}, \quad (1.31)$$

kde jsme využili, že vektor a bivektor ve dvou dimenzích antikomutují. To lze jednoduše odvodit rozepsáním do báze

$$vB = (v_1 e_1 + v_2 e_2)(\alpha e_1 e_2) = -\alpha v_1 e_1 e_2 e_1 - \alpha v_2 e_1 e_2 e_2 = -Bv. \quad (1.32)$$

Vidíme, že na rozdíl od komplexních čísel záleží při rotaci vektoru na pořadí prvků.

Obrázek 1.1: Rotace vektoru v ve dvou dimenzích s jednotkovým bivektorem e_1e_2



1.2.3 Vztah s kvaterniony

Kvaterniony představují rozšíření komplexních čísel o 2 imaginární jednotky j a k , pro které platí

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (1.33)$$

Ve třech dimenzích tvoří bázi $\mathcal{G}(3, 0)$

$$(1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2e_3 = I). \quad (1.34)$$

Upozornujeme, že je třeba si neplést pseudoskalár ve dvou a třech dimenzích. Většinou ale bývá z kontextu zřejmé, v jaké dimenzi se nacházíme. Označme bazické bivektory

$$e_ie_j = \epsilon_{ijk}B_k, \Leftrightarrow B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}e_ie_j. \quad (1.35)$$

Bivektory splňují vlastnosti

$$B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 = -B_1B_2B_3 = -1. \quad (1.36)$$

Sudou podalgebru tak můžeme ztotožnit s kvaterniony následujícím způsobem:

$$i \leftrightarrow -B_1, \quad j \leftrightarrow -B_2, \quad k \leftrightarrow -B_3. \quad (1.37)$$

1.2.4 Pseudoskalár a vektorový součin

Ve třech dimenzích máme jeden bazický pseudoskalár $I = e_1e_2e_3$. Násobení pseudoskalárem jednoznačně mapuje vektory na bivektory a naopak podle

$$I(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 \quad (1.38)$$

$$-I(\alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3. \quad (1.39)$$

Pro druhou rovnici jsme využili vlastnosti

$$I^2 = -1 \Rightarrow I^{-1} = -I. \quad (1.40)$$

Další důležitou vlastností je komutativita pseudoskaláru

$$Ia = aI \quad \forall a \in V. \quad (1.41)$$

Mapa (1.39) přiřadí bivektoru vektor, který je kolmý k jeho oběma definujícím vektorům. S využitím (1.23) a (1.41) lze odvodit

$$(Ia \wedge b) \cdot a = \frac{1}{2}\langle I(ab - ba)a \rangle = \frac{1}{2}\langle (Ib)a^2 - (Ib)a^2 \rangle = 0. \quad (1.42)$$

Díky tomu můžeme definovat vektorový součin

$$a \times b \equiv -I(a \wedge b). \quad (1.43)$$

Z (1.12) víme, že velikost bude odpovídat klasické definici. Z pozorování

$$-I(e_1e_2) = e_3 \quad (1.44)$$

také vidíme, že definice také odpovídá konvenci $\det(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$, kde \mathbf{a} chápeme jako sloupcový vektor souřadnic vektoru a .

1.2.5 Reflexe a rotace

Nejvíce užitečným aspektem geometrické algebry jsou zřejmě vzorce pro reflexe a rotace vektorů. Mějme vektor a , který chceme zrcadlit skrze rovinu určenou jednotkovým vektorem n . Rozložíme vektor a na rovnoběžnou a kolmou část k n :

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp} = a \cdot n n + (a - a \cdot n n). \quad (1.45)$$

Transformovaný vektor můžeme úpravami zapsat do jednoduchého tvaru

$$\begin{aligned} a' &= -a_{\parallel} + a_{\perp} = -a \cdot n n + (a - a \cdot n n) = -2a \cdot n n + a \\ &= -ann - nan + a = -nan. \end{aligned} \quad (1.46)$$

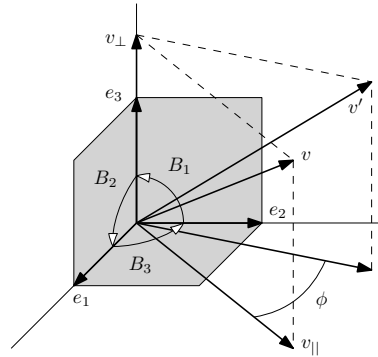
Rotací vektoru myslíme obecnou lineární transformaci zachovávající velikost vektoru. Tu standardně popisujeme třídímenzionální grupou $O(3)$. Víme, že tyto vlastnosti již splňuje reflexe. Obecnou reflexi určuje jednotkový vektor, tedy pouze 2 reálné parametry. Proto zavedeme rotaci jako dvojitou reflexi popsanou jednotkovými vektory n_1 a n_2 . Vektor a tedy násobíme sudým multivektorem $n_1 n_2$ ve smyslu

$$a' = n_1 n_2 a n_2 n_1. \quad (1.47)$$

Ukážeme, že transformaci popisují tři reálné parametry, a je tak už vhodný kandidát pro popis rotací. Rozložíme opět vektor a na kolmou část a_{\perp} a rovnoběžnou část a_{\parallel} k rovině určené tímto bivektorem. Pro transformace a potom platí

$$a' = -n_1 a_{\perp} n_1 - n_1 a_{\parallel} n_1 = a_{\perp} - n_1 a_{\parallel} n_1 \quad (1.48)$$

$$a'' = -n_2 a' n_2 = a_{\perp} + n_2 n_1 a_{\parallel} n_1 n_2. \quad (1.49)$$



Obrázek 1.2: Rotace vektoru v ve třech dimenzích vzhledem k rovině $e_1 e_2$ se třemi jednotkovými bivektory B_1, B_2, B_3

Kolmá část vektoru vzhledem k rovině se při reflexi nemění, protože leží v rovinách kolmých k n_1 a n_2 . Vektor tak otáčíme kolem osy kolmé k rovině $n_1 n_2$. Zatím nevíme, o jaký úhel se otočila rovnoběžná část vektoru. Zajímá nás tedy druhý člen výrazu (1.49), tj.

$$n_2 n_1 a_{\parallel} n_1 n_2 = (n_1 \cdot n_2 + n_2 \wedge n_1) a_{\parallel} (n_1 \cdot n_2 + n_1 \wedge n_2) = (\cos(\phi) - n_1 \wedge n_2) a_{\parallel} (\cos(\phi) + n_1 \wedge n_2). \quad (1.50)$$

Velikost bivektoru můžeme vyjádřit podle

$$\begin{aligned} (a \wedge b)^2 &= (ab - a \cdot b)(a \cdot b - ba) = -a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 + a \cdot b(ab + ba) \\ &= -a^2 b^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 b^2 (\cos^2(\phi) - 1) \\ &= -\sin^2(\phi) |a|^2 |b|^2 \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Rightarrow (n_1 \wedge n_2)^2 = -\sin^2(\phi). \quad (1.52)$$

Bivektor $n_1 \wedge n_2$ tak můžeme vyjádřit jako $\sin(\theta)B$, kde B je jednotkový bivektor. Můžeme nyní přejít do dvou dimenzí a využitím Eulerovy formule pro komplexní čísla a vlastnosti (1.32) najdeme

$$n_2 n_1 a_{\parallel} n_1 n_2 = (\cos \phi - B \sin \phi) a_{\parallel} (\cos \phi + B \sin \phi) = e^{-\phi B} a_{\parallel} e^{\phi B} = e^{-2\phi B} a_{\parallel}. \quad (1.53)$$

Podle (1.31) vidíme, že jsme rovnoběžnou část vektoru otočili o úhel 2ϕ ve směru bivektoru $n_1 \wedge n_2$.

Ve třech dimenzích můžeme libovolnou rotaci určenou jednotkovým bivektorem B a úhlem ϕ zapsat jako

$$a' = e^{-\frac{\phi}{2}B} a e^{\frac{\phi}{2}B} \quad (1.54)$$

Sudý multivektor $e^{-\frac{\phi}{2}B}$ nazýváme rotor. Rotor můžeme popsat jednotkovým bivektorem a parametrem ϕ , a tedy třemi reálnými parametry. Z konstrukce také existují dva jednotkové vektory splňující

$$n_1 n_2 = e^{-\frac{\phi}{2}B}, \quad n_2 n_1 = e^{\frac{\phi}{2}B}. \quad (1.55)$$

Je užitečné zavést operaci reverze, která bude otáčet pořadí násobených vektorů

$$(ab \dots cd)^\sim = dc \dots ba. \quad (1.56)$$

Rotaci určenou rotorem $R = e^{-\frac{\phi}{2}B}$ potom můžeme psát jako

$$a' = Ra\tilde{R}. \quad (1.57)$$

Charakteristickou vlastností rotorů je $R\tilde{R} = 1$, jak uvidíme v následující sekci.

1.2.6 Zavedení spinorů

Spinorem ve třech dimenzích nazveme prvek sudé podalgebry. Uvažujme spinor M , vektor a a transformaci

$$a' = Ma\tilde{M}. \quad (1.58)$$

Velikost transformovaného vektoru určíme z

$$a'^2 = Ma\tilde{M}Ma\tilde{M}. \quad (1.59)$$

Operace reverze je lineární a působí na složky M tím, že otočí znaménko u bivektorů

$$M = \mu + \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3, \quad \tilde{M} = \mu - \alpha B_1 - \beta B_2 - \gamma B_3. \quad (1.60)$$

Vynásobením \tilde{M} a M se vynulují smíšené členy a dostaneme

$$\tilde{M}M = M\tilde{M} = \mu^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \quad (1.61)$$

Výraz (1.59) zjednodušíme na

$$a'^2 = (M\tilde{M})^2 a^2. \quad (1.62)$$

Označme $\rho \equiv \sqrt{M\tilde{M}}$, potom můžeme spinor M rozložit na

$$M = \rho R, \quad (1.63)$$

kde $R\tilde{R} = 1$. Z této vlastnosti potom můžeme každé R zapsat do tvaru rotoru

$$R = \alpha_0 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = e^{-\frac{\phi}{2}B}, \quad (1.64)$$

kde $\cos \frac{\phi}{2} = \alpha_0$, $\sin \frac{\phi}{2} = -\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ a $B = \frac{\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$. Spinor tak v (1.58) otočí vektor podle R a násobí jeho velikost číslem ρ^2 .

1.2.7 Rotace obecného multivektoru

Otáčet můžeme bivektory i multivektory vyššího stupně tím, že otočíme všechny jejich definující vektory. Například pro bivektor $a \wedge b$ máme

$$(a \wedge b)' = (Ra\tilde{R}) \wedge (Rb\tilde{R}) = \frac{1}{2}(Ra\tilde{R}Rb\tilde{R} - Rb\tilde{R}Ra\tilde{R}) = R(a \wedge b)\tilde{R}. \quad (1.65)$$

Analogicky můžeme postupovat pro vyšší stupně a dostáváme tak vztah pro rotaci obecného multivektoru A

$$A' = RA\tilde{R}. \quad (1.66)$$

1.3 Časoprostorová algebra

Časoprostorovou algebru zavedeme jako $\mathcal{G}(1, 3)$. Bazické vektory budeme značit γ_μ . Řeckými písmeny μ, ν, ρ, \dots budeme standardně značit index jdoucí od 0 do 3, latinskými i, j, k, \dots od 1 do 3. Bazické vektory mají vlastnosti

$$\gamma_0^2 = 1 \quad \gamma_i^2 = -1. \quad (1.67)$$

Libovolný vektor můžeme rozložit do složek

$$v = v^\mu \gamma_\mu. \quad (1.68)$$

Velikost vektoru je

$$v^2 = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2. \quad (1.69)$$

Souřadnice vektoru v tak můžeme ztotožnit s čtyřvektorem v Minkowského prostoru. Báze celé algeby má 16 prvků

$$(1, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho, I). \quad (1.70)$$

Celkem 6 bivektorů rozdělíme do dvou skupin. Podprostor tvořený prostorovými vektory známe z minulé kapitoly a bivektory $\gamma_i\gamma_j$ tak generují rotace. Bivektory obsahující γ_0 mají nezvyklou vlastnost

$$(\gamma_i\gamma_0)^2 = 1. \quad (1.71)$$

Rotace generované těmito bivektory tak mají hyperbolický charakter, což očekáváme, protože by tak měli reprezentovat Lorentzovy transformace. Ty jsou totiž lineární a také zachovávají velikost vektorů. Pro rozlišení tak místo rotace budeme používat pojem boost. Zkusme například rozepsat do složek boost generovaný bivektorem $B = \gamma_1\gamma_0$ o úhel ϕ

$$v' = e^{-\frac{\phi}{2}B} v e^{\frac{\phi}{2}B}. \quad (1.72)$$

Rotor můžeme přepsat do tvaru

$$e^{-\frac{\phi}{2}B} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(-\frac{\phi}{2}B\right)^k = \cosh \frac{\phi}{2} - B \sinh \frac{\phi}{2}. \quad (1.73)$$

γ_2 a γ_3 komutují s B , zatímco γ_0 a γ_1 s B antikomutují. Transformace tak působí jen na nultou a první složku v . Pro ty dostaneme

$$v'^0 \gamma_0 + v'^1 \gamma_1 = (\cosh \phi - B \sinh \phi)(v^0 \gamma_0 + v^1 \gamma_1) \quad (1.74)$$

$$= (v^0 \cosh \phi - v^1 \sinh \phi) \gamma_0 + (v^1 \cosh \phi - v^0 \sinh \phi) \gamma_1. \quad (1.75)$$

Pro $\cosh \phi = \gamma$ a $\sinh \phi = \gamma\beta$ dostáváme klasický tvar Lorentzovy transformace ve směru x . Obecnou Lorentzovu transformaci můžeme zapsat jako

$$v' = e^{-B/2} v e^{B/2}, \quad (1.76)$$

kde B je libovolný bivektor. Ten je určený šesti parametry, což odpovídá třem rotacím a třem boostům.

Podobně jako ve třech dimenzích spinory definujeme jako prvky sudé podalgebry. Každý spinor M určuje právě jeden vektor

$$v = M\gamma_0\tilde{M}. \quad (1.77)$$

Na rozdíl od třech dimenzí nyní pseudoskalár s vektory antikomutuje a také platí (viz. [1, kap. 5.4])

$$M\tilde{M} = \tilde{M}M = \alpha + \beta I. \quad (1.78)$$

Pro velikost vektoru tak máme

$$v^2 = M\gamma_0(\alpha + \beta I)\gamma_0\tilde{M} = (\alpha + \beta I)(\alpha - \beta I) = \alpha^2 + \beta^2. \quad (1.79)$$

Odtud vidíme, že mapa (1.77) nepokrývá vektory se zápornou velikostí. Jak si ale ukážeme dále, pokrývá alespoň všechny časupodobné vektory směřující do budoucnosti. Nakonec ještě uved' me užitečnou identitu

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (1.80)$$

kde $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ jsme označili metriku prostoročasu.

1.4 Reprezentace pomocí komplexních matic

Každá Cliffordova algebra se dá reprezentovat pomocí matic (viz. [7]). Většinou to ale není praktické, protože matice odpovídající bazickým vektorům bývají dimenzionálně velmi velké, což vede k dlouhým výpočtům násobení matic. Výjimku ale tvoří komplexní 2×2 matice s bází tvořenou Pauliho maticemi, s kterými můžeme reprezentovat sudou část časoprostorové algebry. Čistě s maticovou reprezentací potom budeme pracovat ve třetí a čtvrté kapitole. Pauliho matice

$$\sigma_0 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

mají vlastnosti

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}\sigma_0 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ (i\sigma_i)(i\sigma_j) &= -\delta_{ij}\sigma_0 - i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Pro lepší manipulace s indexy zavedeme notaci

$$\bar{\sigma}_\mu \equiv \sigma^\mu. \quad (1.83)$$

Pro sigma matice potom platí identita podobná (1.80)

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (1.84)$$

Označme bivektory

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k, \quad IB_i = \gamma_i\gamma_0. \quad (1.85)$$

Odpovídající vlastnosti jsou

$$\begin{aligned} IB_i IB_j &= \delta_{ij} - \varepsilon_{ijk} B_k \\ B_i B_j &= -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} B_k \\ IB_1 IB_2 IB_3 &= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = I. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Porovnáním tedy dostaneme přiřazení

$$1 \leftrightarrow \sigma_0 \quad B_i \leftrightarrow -i\sigma_i \quad IB_i \leftrightarrow \sigma_i \quad I \leftrightarrow i\sigma_0. \quad (1.87)$$

I když vektory nejsou prvky sudé podalgebry, můžeme je reprezentovat pomocí libovolné hermitovské matice jako

$$V = v^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow V = v\gamma_0. \quad (1.88)$$

Více podrobností k tomuto přechodu lze najít v [8]. Jednotlivé složky můžeme najít pomocí stopy

$$v^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(V \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.89)$$

Podobně jako pro sigma matice zavedeme notaci

$$\bar{V} = v^\mu \bar{\sigma}_\mu. \quad (1.90)$$

Z identity (1.84) lze potom odvodit vzorec pro skalární součin

$$v^\mu w_\mu \mathbb{1} = \frac{1}{2} (V\bar{W} + \bar{V}W) \Rightarrow v^\mu w_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(V\bar{W}). \quad (1.91)$$

Pro velikost vektoru tak platí

$$v^\mu v_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(V\bar{V}) = \det V. \quad (1.92)$$

1.4.1 Konstrukce spinorů

Z lineární algebry má každá hermitovská matice V rozklad

$$V = U \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} U^\dagger, \quad (1.93)$$

kde U je unitární matice a λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla. Ty najdeme jako kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = (v^0 - \lambda)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 = 0. \quad (1.94)$$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme

$$\lambda_\pm = v^0 \pm |\boldsymbol{v}|, \quad (1.95)$$

kde $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$.

Pokud je vektor časupodobný nebo světupodobný, tj. $v^\mu v_\mu = \lambda_+ \lambda_- \geq 0$, můžeme vektor rozložit do matice M způsobem

$$V = \pm MM^\dagger, \text{ kde } M = U \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_+|} & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_-|} \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

kde znaménko mínus přidáváme pro vektory mířící do minulosti ($v^0 < 0$).

Prostoropodobný vektor, tj. $\lambda_+ \lambda_- < 0$, můžeme rozložit podobně. Protože mají vlastní čísla rozdílná znaménka, musíme doprostřed přidat matici σ_3 , tj.

$$V = M\sigma_3 M^\dagger. \quad (1.97)$$

Dále budeme uvažovat jen časupodobné vlastní vektory směřující do budoucnosti.

Nyní tento rozklad můžeme využít v geometrické algebře. Upravme (1.77) do sudé podalgebry vynásobením γ_0 zprava:

$$v = M\gamma_0 \tilde{M} \rightarrow v\gamma_0 = M\gamma_0 \tilde{M}\gamma_0. \quad (1.98)$$

Porovnáme M a $\gamma_0 \tilde{M}\gamma_0$

$$M = \alpha + IB + C + \beta I \quad (1.99)$$

$$\tilde{M} = \alpha - IB - C + \beta I \quad (1.100)$$

$$\gamma_0 \tilde{M}\gamma_0 = \alpha + IB - C - \beta I, \quad (1.101)$$

kde B a C jsou odpovídající rotační bivektory. Poslední operace je totožná s hermitovským sdružením v komplexní reprezentaci. Máme tedy

$$V = MM^\dagger \leftrightarrow v\gamma_0 = M\gamma_0 \tilde{M}\gamma_0. \quad (1.102)$$

Dokázali jsme tedy, že rozklad (1.77) lze provést pro každý časupodobný či světlupodobný vektor směřující do budoucnosti.

Nakonec odvodíme odpovídající operaci pro $\det M$. Pro $M = (\alpha_\mu + i\beta_\mu)\bar{\sigma}^\mu$ najdeme

$$\begin{aligned} \det M &= (\alpha_0 + i\beta_0)^2 - (\alpha_3 + i\beta_3)^2 - (\alpha_1 + i\beta_1)^2 + (\beta_2 - i\alpha_2)^2 \\ &= \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2i(\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3). \end{aligned} \quad (1.103)$$

V geometrické algebře pro $M = \alpha_0 + \alpha_i IB_i + \beta_i B_i + \beta_0 I$ platí

$$M\tilde{M} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2I(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3). \quad (1.104)$$

Z (1.87) tedy vidíme

$$\det M \leftrightarrow M\tilde{M}. \quad (1.105)$$

Přepíšme dále determinant do polárního tvaru $\det M = \rho e^{-i\varphi}$. Definujme $\varphi/2$ jako fázi spinoru a $\sqrt{\rho}$ jako velikost spinoru.

1.4.2 Obecná Lorentzova transformace

Podrobnější výklad této sekce lze nalézt v [3]. Obecnou Lorentzovu transformaci můžeme popsat buď maticí L^μ_ν , která působí na složky vektoru

$$V' = v'^\mu \sigma_\mu = L^\mu_\nu v^\nu \sigma_\mu, \quad (1.106)$$

nebo z geometrické algebry předpisem

$$v'\gamma_0 = Rv\tilde{R}\gamma_0 = R(v\gamma_0)(\gamma_0\tilde{R}\gamma_0) \leftrightarrow V' = RVR^\dagger, \quad (1.107)$$

kde R teď chápeme jako komplexní matici s jednotkovým determinanem. Z maticového zápisu jde dokonce jednoduše vidět, že transformace nemění velikost vektoru, protože platí

$$\det V' = \det (RVR^\dagger) = (\det R)^2 \det V = \det V. \quad (1.108)$$

Porovnáním (1.106) a (1.107) dostaneme vztah

$$L^\mu_\nu \sigma_\mu = R \sigma_\nu R^\dagger. \quad (1.109)$$

Složky L^μ_ν můžeme vyjádřit pomocí stopy matice jako

$$L^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(R \sigma_\nu R^\dagger \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.110)$$

Ze znalosti transformace vektorů jednoduše dostaneme předpis pro transformaci spinorů. Z (1.102) a (1.107) máme

$$V' = RMM^\dagger R^\dagger = (RM)(RM)^\dagger. \quad (1.111)$$

Spinor se tedy při Lorentzových transformacích transformuje podle

$$M' = RM. \quad (1.112)$$

1.4.3 Polární rozklad spinoru

Z (1.96) dostaneme polární dekompozici

$$M = U\Lambda U^\dagger U = HU, \quad (1.113)$$

kde Λ je diagonální matice odmocnin vlastních čísel a $H = U\Lambda U^\dagger$ hermitovská matice. Pro vektor V potom platí

$$V = MM^\dagger = H^2. \quad (1.114)$$

Všechny informace o vektoru V jsou ukryty v H , zatímco U představuje 4 další stupně volnosti. Ukážeme, že H lze vyjádřit explicitně pomocí složek vektoru V . Pro diagonalizovatelnou 2×2 matici V platí Hamilton-Cayleyho věta

$$V^2 - (\text{Tr } V)V + (\det V)\mathbb{I} = 0. \quad (1.115)$$

Pro přehlednost dále vynecháváme násobení jednotkovou maticí, které je zjevné z kontextu. Úpravou

$$V^2 - (\text{Tr } V)V + (\det V) = (V \pm \sqrt{\det V})^2 - (\text{Tr } V \pm 2\sqrt{\det V})V \quad (1.116)$$

nalezneme

$$V = \frac{(V \pm \sqrt{\det V})^2}{\text{Tr } V \pm 2\sqrt{\det V}} \quad (1.117)$$

Označme $\rho = \sqrt{\det V}$ a $\text{Tr } V = 2v^0$. Z (1.117) potom nalezneme dvě řešení (1.114)

$$H_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V \pm \rho}{\sqrt{v^0 \pm \rho}}. \quad (1.118)$$

Dále existují ještě další dvě řešení s opačným znaménkem. Dá se ukázat, že $h_-^0 - |\mathbf{h}_-| < 0$, a tedy H_- je prostorupodobný vektor. H_+ už je časupodobný a pro lepší interpretaci ho můžeme upravit do tvaru

$$H_+ = \sqrt{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{2\rho}} \sqrt{v^0 + \rho} + \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{v^i}{\sqrt{v^0 + \rho}} \sigma_i \right) = \sqrt{\rho} (\cosh \alpha + \sinh \alpha \frac{v^i}{|v|} \sigma_i) = \sqrt{\rho} \exp(\alpha \frac{v^i}{|v|} \sigma_i), \quad (1.119)$$

kde $\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \sqrt{v^0 + \rho}$ a $\sinh \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{|v|}{\sqrt{v^0 + \rho}}$. V nerelativistické limitě $v^0 \gg v^i$ můžeme aproximovat

$$\cosh \alpha \approx 1, \quad \alpha \approx \sinh \alpha \approx \frac{|v|}{2\rho}. \quad (1.120)$$

Kapitola 2

Rotory a spinory v klasické mechanice

2.1 Geometrická algebra v klasické mechanice

Ve třech dimenzích nám geometrická algebra vytváří novou strukturu, díky které lze snadněji popsat některé fyzikální veličiny. Polohu, rychlost či hybnost budeme popisovat vektory stejně jako v klasické mechanice. Geometrický součin plně nahrazuje skalární a vektorový součin. Moment hybnosti standardně definovaný jako vektorový součin polohy a hybnosti tak můžeme definovat jako bivektor

$$L = x \wedge p. \quad (2.1)$$

Zbavíme se tak rozdělování na vektory a pseudovektory. Ve třech dimenzích můžeme každému bivektoru přiřadit vektor přenásobením pseudoskalárem. Velice užitečná bude identita pro vektorový součin

$$a \times b = -I(a \wedge b) = a \cdot (-Ib) = (-Ia) \cdot b. \quad (2.2)$$

Klasický moment hybnosti ve formě vektoru tedy dostaneme jako

$$l = -Ix \wedge p. \quad (2.3)$$

Geometrická algebra nám umožňuje provádět transformace, které pomohou v mnoha případech zjednodušit diferenciální rovnici pro daný problém. Ve třech dimenzích jsme ukázali (viz. (1.63)), že libovolný sudý multivektor M můžeme interpretovat jako rotor R vynásobený nějakým kladným číslem ρ . Pro libovolný vektor v tedy existuje multivektor M splňující

$$v = Me_1\tilde{M}, \quad (2.4)$$

kde e_1 je bazický vektor. Multivektor M nazveme spinorem. Pro libovolný vektor v není spinor určen jednoznačně. Vynásobením M zprava rotorem $e^{\frac{\alpha}{2}Ie_1}$ dostaneme

$$Me^{\frac{\alpha}{2}Ie_1}e_1(Me^{\frac{\alpha}{2}Ie_1})^\sim = M(e^{\frac{\alpha}{2}Ie_1}e_1e^{-\frac{\alpha}{2}Ie_1})\tilde{M} = Me_1\tilde{M}. \quad (2.5)$$

M a $Me^{\frac{\alpha}{2}Ie_1}$ tedy určují stejný vektor.

2.2 Kustaanheimo-Stiefelova transformace

Ukážeme využití transformace (2.4) v Keplerově úloze, kde problém převedeme na izotropní harmonický oscilátor. Poprvé tuto transformaci objevili P. Kustaanheimo a E. Stiefel v [5], ačkoli ještě

nepracovali s geometrickou algebrou. Tu zpopularizoval až D. Hestenes v [2]. My zde navíc ukážeme řešení trajektorie a také se budeme zabývat integrály pohybu, které dostaneme z této transformace.

Začneme s diferenciální rovnicí (viz. [9, kap. 4.4])

$$\mu\ddot{x} = -\frac{k}{r^3}x, \quad (2.6)$$

kde x je vektor určující relativní polohu dvou těles, μ je jejich redukovaná hmotnost, k konstanta a $r = \sqrt{x^2}$ velikost x . Pro moment hybnosti zavedený jako (2.1) potom platí

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt}(x\dot{x} - \dot{x}x) = \frac{\mu}{2}(x\ddot{x} - \ddot{x}x) = 0, \quad (2.7)$$

kde jsme v poslední rovnosti použili pohybovou rovnici (2.6). Díky konstantnímu momentu hybnosti je pohyb rovinný a přejdeme tak do dvou dimenzí. Rozložme nyní vektor polohy x do spinoru M vztahem

$$x(t) = M(t)e_1\tilde{M}(t). \quad (2.8)$$

Ve dvou dimenzích bivektor antikomutuje s vektory, a tak můžeme zjednodušit (2.8) na

$$x = M^2e_1. \quad (2.9)$$

Pro derivaci součinu multivektorů platí Leibnitzovo pravidlo, takže můžeme jednoduše najít první derivaci

$$\dot{x} = (\dot{M}M + M\dot{M})e_1 = 2\dot{M}Me_1, \quad (2.10)$$

kde jsme v druhé rovnosti využili komutativity sudých multivektorů. Vynásobením M zprava a využitím znalosti $r = M\tilde{M}$ z kapitoly 1.2.6 dostaneme

$$\dot{x}M = 2r\dot{M}e_1. \quad (2.11)$$

Nyní definujme novou proměnnou s vztahem

$$\frac{dt}{ds} = r. \quad (2.12)$$

Pro první a druhou derivaci M najdeme

$$\frac{d}{ds}M = \frac{1}{2}\dot{x}Me_1 \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}M = \frac{1}{2}r(\ddot{x}M + \dot{x}\dot{M})e_1 = \frac{1}{2}(\ddot{x}x + \frac{1}{2}\dot{x}^2)M, \quad (2.14)$$

kde jsme v poslední rovnosti dosadili (2.13) a využili definice (2.8). Rovnici pro M získáme dosazením za \ddot{x} z pohybové rovnice (2.6):

$$\frac{d^2}{ds^2}M = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{k}{r} + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 \right) M = \frac{E}{2\mu} M. \quad (2.15)$$

Výraz v závorce je celková energie, a tedy konstanta. Tím zůstává lineární diferenciální rovnice 2. řádu pro M . Stejný výsledek dostaneme i ve třech dimenzích (viz. [1, kap. 3.3.2]), musíme ale pro M přidat podmínku

$$\langle \dot{M}e_1\tilde{M} \rangle_3 = 0. \quad (2.16)$$

Pro $E < 0$ řešení najdeme analogicky jako u harmonického oscilátoru ve tvaru

$$M = M_1 e^{i\omega s} + M_2 e^{-i\omega s}, \quad (2.17)$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{-E}{2\mu}}$ a M_1 a M_2 konstantní spinory. Odtud lze snadno určit trajektorii i bez použití polárních souřadnic. Ve dvou dimenzích můžeme nahlížet sudé multivektory jako na komplexní čísla. Pro jednodušší zápis jen ztotožníme jednotkový pseudoskalár a imaginární jednotku $i \equiv I$. Přepíšeme (2.17) do tvaru

$$M = C_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega s} + C_2 e^{i\phi_2} e^{-i\omega s}, \quad (2.18)$$

kde C_1, C_2, ϕ_1 a ϕ_2 jsou konstanty určené počátečními podmínkami. Další úpravou získáme

$$M = e^{i\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}} (C_1 e^{i\omega s + i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} + C_2 e^{-i\omega s - i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}}). \quad (2.19)$$

Pro určení tvaru trajektorie není první faktor $e^{i\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}}$ důležitý a lze ho vynulovat vhodně zvolenou soustavou souřadnic. Stejně tak konstantní posunutí fáze $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ se můžeme zbavit posunutím proměnné s . Položíme tak $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Pro určení trajektorie $x(s)$ nemusíme přecházet do celé algebry, protože z (2.9) stačí najít M^2 a jednotlivé složky polohy najdeme triviálně vynásobením e_1 , máme tedy

$$M^2 = C_1^2 e^{2i\omega s} + C_2^2 e^{-2i\omega s} + 2C_1 C_2 = (C_1^2 + C_2^2) \cos(2\omega s) + 2C_1 C_2 + i(C_1^2 - C_2^2) \sin(2\omega s). \quad (2.20)$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že se jedná o elipsu posunutou v jednom směru. Přejít z s do t jde získat z (2.12) integrací.

Transformace z x do M nám také poskytuje integrály pohybu pro spinor M , které budeme moci vyjádřit pomocí známých integrálů pohybu pro vektor x . Přímou z rovnice (2.15) můžeme po vynásobení $\frac{dM}{ds}$ zleva a zprava najít

$$\frac{d^2 M}{ds^2} \frac{dM}{ds} + \frac{dM}{ds} \frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{E}{2\mu} \left(\frac{dM}{ds} M + M \frac{dM}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{dM}{ds} \right)^2 - \frac{E}{2\mu} M^2 \right) = 0. \quad (2.21)$$

Označme tuto zachovávající se veličinu A . Ve dvou dimenzích můžeme sudý multivektor ztotožnit s vektorem (viz. (1.30)). S využitím (2.13) po úpravách najdeme

$$A = \left(\frac{dM}{ds} \right)^2 - \frac{E}{2\mu} M^2 = \frac{1}{4} (\dot{x} M e_1)^2 - \frac{1}{4} \dot{x}^2 x e_1 + \frac{k}{2\mu r} x e_1 = \frac{1}{4} \left(\dot{x} x \dot{x} - \dot{x}^2 x + \frac{k}{2\mu} \frac{x}{r} \right) e_1 \quad (2.22)$$

$$= -\frac{1}{2\mu} \left(\mu L \dot{x} - k \frac{x}{r} \right) e_1 = -\frac{1}{2\mu} \left(l \times p - k \frac{x}{r} \right) e_1, \quad (2.23)$$

kde výraz v poslední závorce je známý Laplace-Rung-Lenzův vektor. Další integrály pohybu můžeme najít rozložením M do dvou složek $m_1 + Im_2$. Zde máme 2 "energie" a "moment hybnosti"

$$\epsilon_1 = \left(\frac{dm_1}{ds} \right)^2 - \frac{E}{2\mu} m_1^2 \quad (2.24)$$

$$\epsilon_2 = \left(\frac{dm_2}{ds} \right)^2 - \frac{E}{2\mu} m_2^2 \quad (2.25)$$

$$\lambda = \mu \left(\frac{dm_1}{ds} m_2 - m_1 \frac{dm_2}{ds} \right). \quad (2.26)$$

Poslední můžeme s pomocí (2.13) upravit do tvaru

$$\lambda = \frac{\mu}{2} (2m_1 m_2 v_1 + (m_1^2 - m_2^2) v_2) = \frac{\mu}{2} (-x_2 v_1 + x_1 v_2) = l. \quad (2.27)$$

Moment hybnosti pro vektor x tedy odpovídá "momentu hybnosti" pro spinor M . Pokud rozepíšeme do složek $A = a_1 + Ia_2$, nalezneme následující vztahy:

$$a_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (2.28)$$

$$a_2 = 2 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{E}{2\mu^3} \lambda^2}. \quad (2.29)$$

2.3 Pohyb setrvačnicku

Pomocí rotorů geometrická algebra umožňuje efektivní popis rotačních stupňů tělesa a jejich dynamický vývoj. Představíme zde základy, které jsou inspirovány [1, kap. 3.4]. Dále si ukážeme souvislost mezi rotory ve třech dimenzích a spinorem jako dvoukomponentním komplexním vektorem z kvantové mechaniky. Řešení symetrického setrvačnicku potom vyřešíme v této komplexní reprezentaci.

Uvažujme tuhé těleso a jeho 3 rotační stupně volnosti. Ty se dají reprezentovat dvěma soustavami - inerciální $\{e_i\}$ a pevně spojenou s tělesem $\{\tilde{f}_i\}$. Závislost mezi soustavami budeme popisovat rotorem

$$f_i(t) = R(t)e_i\tilde{R}(t). \quad (2.30)$$

Pomocí rototy R bychom měli najít vektor úhlové rychlosti, který je klasicky zaveden vztahem

$$\dot{f}_i = \omega \times f_i. \quad (2.31)$$

Derivací (2.30) na následnými úpravami najdeme

$$\dot{f}_i = \dot{R}e_i\tilde{R} + Re_i\dot{\tilde{R}} = \dot{R}\tilde{R}f_i + f_iR\dot{\tilde{R}} = \dot{R}\tilde{R}f_i - f_i\dot{R}\tilde{R} = (2I\dot{R}\tilde{R}) \times f_i. \quad (2.32)$$

Z posledního výrazu plyne

$$\omega = 2I\dot{R}\tilde{R}. \quad (2.33)$$

Zjevně je ale výhodnější zavést bivektor úhlové rychlosti

$$\Omega = I\omega = -2\dot{R}\tilde{R}. \quad (2.34)$$

Pokud máme zadané $\Omega(t)$, stačí vyřešit rotorovou rovnici

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R \quad (2.35)$$

Abychom plně popsali těleso v inerciální soustavě, potřebujeme ještě přidat tři translační stupně volnosti. Mějme bod x v soustavě spojené s tělesem. Jeho souřadnice v druhé soustavě budou

$$y(t) = R(t)x\tilde{R}(t) + y_0(t), \quad (2.36)$$

kde vektor y_0 je rozdíl počátků dvou soustav. Pro derivaci platí

$$\dot{y} = \dot{R}x\tilde{R} + Rx\dot{\tilde{R}} + \dot{y}_0 = R\left(-\frac{1}{2}\tilde{R}\Omega Rx + \frac{1}{2}x\tilde{R}\Omega R\right)\tilde{R} + \dot{y}_0 = R(x \cdot \Omega_B)\tilde{R} + \dot{y}_0, \quad (2.37)$$

kde pro zjednodušení zápisu jsme zavedli bivektor úhlové rychlosti v soustavě spojené s tělesem

$$\Omega_B = \tilde{R}\Omega R. \quad (2.38)$$

Nyní potřebujeme najít dynamické rovnice pro R a x . Těmi jsou 1. a 2. věta impulzová

$$\dot{P} = F \quad (2.39)$$

$$\dot{L} = N, \quad (2.40)$$

kde F je celková síla a N je celkový moment sil. Mějme tedy těleso popsané hustotou $\rho(x)$. Nejdříve najdeme celkovou hybnost a moment hybnosti

$$P = \int \rho y \, d^3x = \int \rho R(x \cdot \Omega_B) \tilde{R} + \dot{y}_0 \, d^3x = R \left(\int \rho x \, d^3x \cdot \Omega_B \, d^3x \right) \tilde{R} + \dot{y}_0 \int \rho \, d^3x \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} L &= \int \rho y \wedge \dot{y} \, d^3x = \int \rho (Rx \tilde{R} + y_0) \wedge (R(x \cdot \Omega_B) \tilde{R} + \dot{y}_0) \, d^3x \\ &= R \left(\int \rho x \wedge (x \cdot \Omega_B) \, d^3x \right) \tilde{R} + y_0 \wedge R \left(\int \rho x \, d^3x \cdot \Omega_B \right) \tilde{R} + R \int \rho x \, d^3x \tilde{R} \wedge \dot{y}_0 + \int \rho \, d^3x y_0 \wedge \dot{y}_0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Výrazy se značně zjednoduší umístěním počátku soustavy spojené s tělesem do hmotného středu tělesa y_t definovaného

$$\int \rho (y - y_t) \, d^3y = 0. \quad (2.43)$$

Stačí tedy nahradit y_0 za y_t a položit $\int \rho x \, d^3x = 0$. Označme také M celkovou hmotnost tělesa. Rovnice (2.41) a (2.42) se potom zjednoduší na

$$P = M \dot{y}_0 \quad (2.44)$$

$$L = R \int \rho x \wedge (x \cdot \Omega_B) \, d^3x \tilde{R} + M y_0 \wedge \dot{y}_0. \quad (2.45)$$

Všechny informace o setrvačnosti tělesa jsou ukryté v M a funkci

$$I(A) = \int \rho x \wedge (x \cdot A) \, d^3x. \quad (2.46)$$

Funkce je lineární a mapuje bivektory na bivektory. Můžeme ji tak reprezentovat maticí

$$I_{ij} = (Ie_i) \cdot \int \rho x \wedge (x \cdot (Ie_j)) \, d^3x, \quad (2.47)$$

kde jsme zvolili nějakou ortonormální bázi $\{e_i\}$ v soustavě tělesa. Ukážeme, že I_{ij} je tenzor setrvačnosti. Výraz v integrálu upravíme dále do tvaru

$$\begin{aligned} (Ie_i) \cdot (x \wedge (x \cdot (Ie_j))) &= (Ie_i) \cdot (-x \wedge (x \times e_j)) = e_i \cdot (x \times (x \times e_j)) \\ &= -x_i x_j + \delta_{ij} x^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

a dostáváme tak známý vzorec pro tenzor setrvačnosti

$$I_{ij} = \int \rho (\delta_{ij} x^2 - x_i x_j) \, d^3x. \quad (2.49)$$

Tenzor je zjevně symetrický a semi-pozitivně definitní, takže je vždy výhodné přejít do soustavy, kde je v diagonálním tvaru s třemi parametry $i_j \equiv I_{jj}$. Uvažujme nyní těžiště tělesa v klidu. 2. věta impulsová nám dává Eulerovy setrvačnickové rovnice

$$N = \dot{R}I(\Omega_B)\tilde{R} + RI(\dot{\Omega}_B)\tilde{R} + RI(\Omega_B)\dot{\tilde{R}} = R \left(I(\dot{\Omega}_B) + \frac{1}{2}[I(\Omega_B), \Omega_B] \right) \tilde{R}, \quad (2.50)$$

kde pro zjednodušení zápisu jsme zavedli komutátor $[A, B] = AB - BA$.

2.4 Reprezentace pomocí komplexních vektorů

Nyní na chvíli odbočíme do kvantové mechaniky a popisu spinu elektronu v magnetickém poli. Stav spinu popíšeme komplexním vektorem

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 \\ \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

který se vyvíjí v čase podle Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = \mu_0 B_j \sigma_j |\psi\rangle, \quad (2.52)$$

kde μ_0 je Bohrov magneton, σ_j Pauliho matice a B intenzita magnetického pole. Přepsáním do složek máme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 \\ \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0}{\hbar} B_j i\sigma_j \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 \\ \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Díky tomu, že $\langle\psi|\psi\rangle = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, zkusíme nahradit komplexní vektor rotorem R . Nejdříve ale musíme najít analogii násobení sigma maticemi. Ty vždy jednotlivé prvky prohodí a u některých změni znaménko. Analogie v geometrické algebře bude násobení rotoru bazickým bivektorem zleva. Pro zjednodušení rovnice (2.52) chceme tedy následující vlastnost

$$|Ie_j\psi\rangle = i\sigma_j |\psi\rangle, \quad (2.54)$$

kde výraz v prvním ketu chápeme jako násobení v geometrické algebře. Po rozepsání této podmínky snadno najdeme následující přiřazení, podrobněji vysvětleno například v [1, str. 270],

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 \\ \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \psi = \alpha_0 + \alpha_3 Ie_1 - \alpha_2 Ie_2 + \alpha_1 Ie_3. \quad (2.55)$$

Rovnici (2.52) potom můžeme přepsat do řeči geometrické algebry jako

$$\dot{R} = -\frac{\mu_0}{\hbar} I B R, \quad (2.56)$$

kde jsme jen přeznačili $|\psi\rangle$ na R a $B = B_j e_j$ chápeme jako vektor intenzity magnetického pole. Tato rovnice pro spin elektronu je analogická rovnici pro rotor (2.35) z klasické mechaniky. Násobení bivektorem zprava bude v této reprezentaci vypadat následovně

$$|\psi Ie_1\rangle = \sigma_2 |\psi\rangle^* \quad (2.57)$$

$$|\psi Ie_2\rangle = i\sigma_2 |\psi\rangle^* \quad (2.58)$$

$$|\psi Ie_3\rangle = i|\psi\rangle, \quad (2.59)$$

kde hvězdičkou značíme komplexní sdružení. Označme $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_0 + i\beta_1 \\ \beta_2 + i\beta_3 \end{pmatrix}$. Pro skalární součin dvou vektorů platí

$$Re\langle\psi|\phi\rangle = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \langle\tilde{\psi}\phi\rangle, \quad (2.60)$$

kde a poslední výraz chápeme jako skalární část součinu dvou multivektorů. Pomocí (2.59) a (2.60) pro skalární součin nyní najdeme přiřazení

$$\langle\psi|\phi\rangle = Re\langle\psi|\phi\rangle - iRe\langle\psi|\phi\rangle \leftrightarrow \langle\tilde{\psi}\phi\rangle - \langle\tilde{\psi}\phi Ie_3\rangle Ie_3. \quad (2.61)$$

Nyní můžeme najít podle (2.61) pro střední hodnoty spinu

$$\langle \psi | \hat{\sigma}_j | \psi \rangle \leftrightarrow -\langle \tilde{\psi} I e_j \psi I e_3 \rangle - \langle \tilde{\psi} I e_j \psi \rangle I e_3 = \langle \tilde{\psi} e_j \psi e_3 \rangle. \quad (2.62)$$

Poslední člen vypadl, protože rotace bivektoru má nulovou skalární část. Máme tedy jednoduchý výraz pro vektor středních hodnot spinu

$$s = \frac{\hbar}{2} \psi e_3 \tilde{\psi}. \quad (2.63)$$

2.5 Symetrický setrvačnick

V této části vyřešíme pohyb volného symetrického setrvačnicku. Máme zadané tři hlavní složky tenzoru setrvačnosti $i_1 = i_2 \neq i_3$. Nejprve musíme vyřešit Eulerovy setrvačnickové rovnice

$$I(\dot{\Omega}_B) + \frac{1}{2}[I(\Omega_B), \Omega_B] = 0. \quad (2.64)$$

Rozepsáním Ω_B do složek máme

$$\Omega_B = \omega_i I e_i \quad (2.65)$$

$$I(\Omega_B) = i_1 \omega_1 I e_1 + i_1 \omega_2 I e_2 + i_3 \omega_3 I e_3 = i_1 \Omega_B - (i_1 - i_3) \omega_3 I e_3. \quad (2.66)$$

Dosazením do (2.64) dostaneme

$$I(\dot{\Omega}_B) - \omega_3 \frac{(i_1 - i_3)}{2} [I e_3, \Omega_B] = I(\dot{\Omega}_B) - \omega_3 (i_1 - i_3) I e_3 \cdot \Omega_B = 0. \quad (2.67)$$

Z pozorování

$$e_3 \wedge (I e_3 \cdot \Omega_B) = e_3 \wedge e_3 \wedge (I \Omega_B) = 0 \quad (2.68)$$

plyne

$$e_3 \wedge I(\dot{\Omega}_B) = i_3 \dot{\omega}_3 = 0. \quad (2.69)$$

Složka ω_3 tak nezávisí na čase. Z (2.66) následně vyjádříme

$$\Omega_B = \frac{1}{i_1} I(\Omega_B) + \frac{i_1 - i_3}{i_1} \omega_3 I e_3. \quad (2.70)$$

Přechodem do inerciální soustavy dostaneme

$$\Omega = \frac{1}{i_1} L + \frac{i_1 - i_3}{i_1} \omega_3 R I e_3 \tilde{R}. \quad (2.71)$$

Nyní stačí vyřešit rovnici (2.35) pro

$$\dot{R} = -\frac{1}{2} \Omega R = -\frac{1}{2i_1} L R - \frac{i_1 - i_3}{2i_1} \omega_3 R I e_3. \quad (2.72)$$

Pro získání řešení přejdeme do komplexní reprezentace z minulé kapitoly. Rotor budeme značit komplexním vektorem $|\psi\rangle$. Násobení bivektorem L zprava přejde na násobení sigma maticemi. Ztotožníme tedy

$$L = l_i (I e_i) \leftrightarrow \mathbb{L} = l_i (i \sigma_i). \quad (2.73)$$

Pro druhý člen využijeme vlastnosti (2.59) a dostáváme tak rovnici

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{1}{2i_1} \mathbb{L} |\psi\rangle - i \frac{i_1 - i_3}{2i_1} \omega_3 |\psi\rangle. \quad (2.74)$$

Označme $\Omega_L \equiv \frac{1}{i_1}L$ a $\Omega_R \equiv \frac{i_1-i_3}{i_1}\omega_3$. Jelikož moment hybnosti je konstantní, řešení nalezneme ihned jako

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\Omega_L t - \frac{1}{2}i\Omega_R t} |\psi_0\rangle. \quad (2.75)$$

Protože Ω_L a Ω_R komutují, můžeme rozdělit exponenciálu na dvě části a přejít jednoduše zpátky do geometrické algebry

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\Omega_L t} e^{-\frac{1}{2}i\Omega_R t} |\psi_0\rangle \leftrightarrow \psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\Omega_L t} \psi_0 e^{-\frac{1}{2}Ie_3\Omega_R t}, \quad (2.76)$$

kde pro exponenciálu s Ω_R jsme využili opět vlastnosti (2.59). Konstantní vektor x v soustavě spojené s tělesem se podle (2.36) vyvíjí v inerciální soustavě rovnicí

$$y(t) = \psi(t)x\tilde{\psi}(t) + y_t. \quad (2.77)$$

Jelikož je rotace lineární transformace, můžeme zavést ortogonální matici

$$U_{ij}(t) = e_i \cdot (\psi(t)e_j\tilde{\psi}(t)) \quad (2.78)$$

a složky vektoru $y(t) = y_i(t)e_i$ najít jako

$$y_i(t) = U_{ij}(t)x_j + (y_t)_i. \quad (2.79)$$

Kapitola 3

Lagrangeův formalismus pro spinorové pole

V následujících kapitolách přejdeme z popisu jednoho spinoru na popis spinorového pole. Budeme uvažovat pouze časoprostorovou algebru, kde jsme spinor jsme zavedli jako prvek sudé podalgebry. Budeme také nadále pracovat jen v reprezentaci komplexními maticemi z kapitoly 1.4. Spinor tedy budeme značit komplexní matici $M \in \mathbb{C}^{2,2}$. Ukážeme si zde pohybové rovnice a obecné vzorce pro zachovávající se tenzory, které plynou ze spojitých symetrií lagrangiánu.

3.1 Pohybové rovnice

Uvažujme spinorové pole $M(x)$ a hustotu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M, \partial_\mu M, x^\mu)$. Hledat pohybové rovnice je většinou výhodné přímo variací $M' = M + \delta M$. Můžeme se ale také na M dívat jako na 4 komponenty matice $m_{\alpha\beta}(x)$, kde $\alpha, \beta = 1, 2$. Hustotu Lagrangeovy funkce potom vnímáme jako funkci

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(m_{\alpha\beta}, \partial_\mu m_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}^*, \partial_\mu m_{\alpha\beta}^*, x^\mu). \quad (3.1)$$

Zacházením $m_{\alpha\beta}$ a $m_{\alpha\beta}^*$ jako s nezávislými funkcemi získáme variací akce 2 sady Euler-Lagrangeových rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{\alpha\beta}} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{\alpha\beta}^*} = 0. \quad (3.3)$$

3.2 Teorém Noetherové

Spojitě symetrie lagrangiánu nám poskytují zachovávající se veličiny. Stručně zde shrneme výsledky z [4, kap. 2.4], kde lze najít celé odvození a více podrobností. Mějme obecně n polí $\phi_r(x)$, $r = 1, \dots, n$. Infinitesimalní transformace souřadnic

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (3.4)$$

Dále uvažujeme variaci pole

$$\phi_r'(x') = \phi_r(x) + \delta \phi_r(x), \quad (3.5)$$

kde $\delta\phi_r(x)$ obsahuje změnu "tvaru" polí (jako například změna směru vektorů při rotaci). Pokud chceme celkovou variaci polí, je nutné vzít rozdíl funkcí ve stejném bodě

$$\tilde{\delta}\phi_r(x) = \phi_r'(x) - \phi_r(x) = \delta\phi_r(x) - \partial_\mu\phi_r(x)\delta x^\mu. \quad (3.6)$$

Podmínkou zachování akce při této transformaci dostaneme

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \right] \tilde{\delta}\phi_r(x) + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \tilde{\delta}\phi_r(x) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu \right] = 0. \quad (3.7)$$

První výraz se vynuluje za použití pohybových rovnic a dosazením (3.6) získáme tak vztah pro Noetherovské proudy

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} (\delta\phi_r(x) - \partial_\mu\phi_r(x)\delta x^\mu) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu \right] = 0. \quad (3.8)$$

Pro spinorové pole dosadíme za ϕ_r komponenty M a jejich komplexní sdružení. Potom dostaneme rovnici

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta})} (\delta m_{\alpha\beta}(x) - \partial_\mu m_{\alpha\beta}(x)\delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} (\delta m_{\alpha\beta}^*(x) - \partial_\mu m_{\alpha\beta}^*(x)\delta x^\mu) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0. \quad (3.9)$$

3.2.1 Tenzor energie-hybnosti

Tenzor energie-hybnosti najdeme, pokud lagrangián explicitně nezávisí na souřadnicích, tj. je invariantní vůči transformaci

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu, \quad (3.10)$$

kde ϵ^μ je konstantní posunutí. Spinorové pole při translaci nemění tvar. Máme tedy

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu \quad (3.11)$$

$$\delta m_{\alpha\beta}(x) = \delta m_{\alpha\beta}^*(x) = 0. \quad (3.12)$$

Z (3.9) po dosazení a vytknutí ϵ^μ dostaneme kanonický tenzor energie-hybnosti

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta})} \partial_\nu m_{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} \partial_\nu m_{\alpha\beta}^* - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad \text{splňující} \quad \partial_\mu \mathcal{T}^\mu_\nu = 0. \quad (3.13)$$

3.2.2 Tenzor momentu hybnosti

Tenzor momentu hybnosti získáme v důsledku invariance lagrangiánu vůči Lorentzovým transformacím. Ty můžeme infinitezimálně zapsat pomocí libovolné antisymetrické matice $\delta\omega^{\mu\nu}$ jako

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta\omega^{\mu\nu} x_\nu. \quad (3.14)$$

Spinorové pole se transformuje vztahem

$$M'(x') = R M(x) \approx M(x) + A M(x), \quad (3.15)$$

kde $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ je generátor Lorentzovy transformace $R = e^A$, tedy musí splňovat $\text{Tr} A = 0$. Z (1.110) dostáváme vztah mezi A a $\delta\omega^{\mu\nu}$

$$\eta^{\mu\nu} + \delta\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}((1 + A^\dagger)\bar{\sigma}^\mu(1 + A)\sigma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}((1 + A^\dagger)\bar{\sigma}^\mu(1 + A)\sigma^\nu) \quad (3.16)$$

$$= \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu(A\sigma^\nu + \sigma^\nu A^\dagger)) + O(A^2). \quad (3.17)$$

Po odečtení $\eta^{\mu\nu}$ potom můžeme vyjádřit A

$$\delta\omega^{\mu\nu}\sigma_\mu = A\sigma^\nu + \sigma^\nu A^\dagger \quad (3.18)$$

$$\delta\omega^{\mu\nu}\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu = A\sigma^\nu\bar{\sigma}_\nu + \sigma^\nu A^\dagger\bar{\sigma}_\nu = 4A, \quad (3.19)$$

kde jsme v poslední rovnosti použili identity

$$\sigma^\nu\bar{\sigma}_\nu = 4\mathbb{I}, \quad \sigma^\nu(z^\mu\sigma_\mu)\bar{\sigma}_\nu = 4z_0\mathbb{I}, \quad (3.20)$$

a faktu, že A neobsahuje nulovou složku. Pro variaci M a M^\dagger máme

$$\delta M(x) = \frac{1}{4}\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu M(x)\delta\omega^{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

$$\delta M^\dagger(x) = \frac{1}{4}M^\dagger(x)\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\delta\omega^{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Dosažením do (3.9) nalezneme

$$\partial_\mu \left[\mathcal{T}^\mu_{\nu x\rho} - \frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta})} (\sigma_\nu\bar{\sigma}_\rho)_{\alpha\gamma} m_{\gamma\beta} - \frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} (\bar{\sigma}_\rho\sigma_\nu)_{\gamma\alpha} m_{\gamma\beta}^* \right] \delta\omega^{\nu\rho} = 0. \quad (3.23)$$

Abychom se zbavili $\omega^{\nu\rho}$, musí být výraz v hranaté závorce antisymetrický ve ν a ρ . To ale není problém. Rozdělením výrazu na symetrickou a antisymetrickou část se symetrická část vynásobením $\delta\omega^{\mu\nu}$ vynuluje. Dostaneme tedy nakonec tenzor momentu hybnosti

$$\mathcal{M}^\mu_{\nu\rho} = x_\nu \mathcal{T}^\mu_\rho - x_\rho \mathcal{T}^\mu_\nu + \mathcal{S}^\mu_{\nu\rho} \quad \text{splňující} \quad \partial_\mu \mathcal{M}^\mu_{\nu\rho} = 0. \quad (3.24)$$

kde jsme označili tenzor spinu

$$\mathcal{S}^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta})} (\Sigma_{\nu\rho})_{\alpha\gamma} m_{\gamma\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} (\Sigma_{\nu\rho}^\dagger)_{\gamma\alpha} m_{\gamma\beta}^*. \quad (3.25)$$

Pro přehlednost jsme zavedli $\Sigma_{\nu\rho} = \frac{1}{2}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\rho - \sigma_\rho\bar{\sigma}_\nu)$ jako antisymetrickou kombinaci dvou sigma matic. Tenzor spinu způsobuje asymetrii kanonického tenzoru energie-hybnosti. Z (3.24) plyne

$$\partial_\mu \mathcal{S}^\mu_{\nu\rho} = \mathcal{T}_{\rho\nu} - \mathcal{T}_{\nu\rho}. \quad (3.26)$$

Lze zkonstruovat symetrický (Belinfante-Rosenfeldův) tenzor energie-hybnosti způsobem

$$\mathcal{T}_B^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho (\mathcal{S}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\rho\mu} - \mathcal{S}^{\rho\nu\mu}) = \frac{1}{2} (\mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\nu\mu} + \partial_\rho (\mathcal{S}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\rho\mu})), \quad (3.27)$$

kde z prvního výrazu je vidět zachování díky antisymetrii $\rho \leftrightarrow \mu$ v závorce a z druhého výrazu symetrie tenzoru.

3.2.3 Vnitřní symetrie

Předpokládejme, že lagrangián je invariantní vůči vnitřním (infinitesimálním) rotacím ve smyslu

$$M'(x') = M(x) e^{\alpha^\nu i\sigma_\nu} \approx M(x) + M(x) \alpha^\nu i\sigma_\nu \quad (3.28)$$

$$M'^\dagger(x') = e^{-\alpha^\nu i\sigma_\nu} M^\dagger(x) \approx M^\dagger(x) - \alpha^\nu i\sigma_\nu M^\dagger(x) \quad (3.29)$$

$$x'^\mu = x^\mu. \quad (3.30)$$

Pro variaci komponentů M a M^\dagger potom plyne

$$\delta m_{\alpha\beta} = \alpha^\nu m_{\alpha\gamma} (i\sigma)_{\gamma\beta} \quad (3.31)$$

$$\delta m_{\alpha\beta}^* = -\alpha^\nu (i\sigma)_{\beta\gamma} m_{\alpha\gamma}^*. \quad (3.32)$$

Z (3.9) dostaneme čtyři zachovávající se proudy

$$j^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta})} m_{\alpha\gamma} (i\sigma_\nu)_{\gamma\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu m_{\alpha\beta}^*)} m_{\alpha\gamma}^* (i\sigma_\nu)_{\beta\gamma} \quad \text{splňující} \quad \partial_\mu j^\mu{}_\nu = 0. \quad (3.33)$$

Kapitola 4

Popis klasického kontinua pomocí spinorového pole

Kontinuum se klasicky popisuje (viz. [10]) pomocí vektorového pole (čtyř)rychlostí $u(x)$ a hustotou $\rho(x)$. Rovnice popisující vývoj těchto veličin jsou různé v závislosti na typu kontinua. My budeme uvažovat pouze ideální *relativistickou* tekutinu ([10, kap. 15]). Vývoj dostáváme z rovnice kontinuity a zachování tenzoru energie-hybnosti. Nabízí se tak otázka, jestli existuje vhodný lagrangián, ze kterého by šlo tenzor energie-hybnosti získat z translační invariance. Takové modely existují a najdeme je například v [1, kap. 12.4.2] nebo [6]. V obou modelech pro získání pohybových rovnic zde zůstává vektorové pole $j^\mu(x) = \rho(x)u^\mu(x)$ a navíc jsou přidány další kalibrační pole. My se pokusíme tento vývoj popsat pouze pomocí spinorového pole, jehož obecné základy jsme uvedli ve třetí kapitole. Spinor tedy popíšeme komplexní 2×2 maticí $M(x)$, která bude v každém bodě jednoznačně určovat proud j^μ podle

$$MM^\dagger = j^\mu \sigma_\mu \equiv \mathbf{J}. \quad (4.1)$$

K rovnicím pro ideální relativistickou tekutinu se budeme chtít dostat pomocí lagrangiánu inspirovaného Diracovou teorií, ta je v řeči geometrické algebry popsána v [1, kap. 8.2]. Budeme uvažovat jednodušší lagrangián než Diracův, ale vhodný pro přidání členu zajišťujícího nelinearitu rovnic, která je zásadní pro popis kontinua. Poté tenzor energie-hybnosti pro spinorové pole převedeme do tvaru připomínajícího tenzoru energie-hybnosti pro relativistickou tekutinu. Ukážeme, v jakých případech se oba modely přibližují, a jaká je přesná odchylka v pohybových rovnicích. Na závěr představíme výhodu takového modelu přidáním interakce s elektromagnetickým polem.

4.1 Relativistická tekutina

Stručně shrneme výsledky, které jsou s většími podrobnostmi probrané v [6]. Pohybové rovnice pro klasickou relativistickou tekutinu tvoří rovnice kontinuity $\partial_\mu j^\mu = 0$ a zachování tenzoru energie-hybnosti

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.2)$$

který má tvar

$$\mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu} = (p + \epsilon)u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} p = \frac{(p + \epsilon)}{\rho^2} j^\mu j^\nu - \eta^{\mu\nu} p, \quad (4.3)$$

kde p je tlak a ϵ hustota energie. Budeme uvažovat obě veličiny závislé jen na hustotě ρ . Za předpokladu ideální tekutiny se dá ukázat vztah mezi tlakem a energií. Označme

$$\epsilon = f(\rho). \quad (4.4)$$

Pro tlak potom platí

$$p = \rho f'(\rho) - f(\rho) \quad (4.5)$$

a tenzor energie-hybnosti tak bude mít tvar

$$\mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu} = \frac{f'(\rho)}{\rho} j^\mu j^\nu + \eta^{\mu\nu} (f(\rho) - \rho f'(\rho)). \quad (4.6)$$

4.2 Samointeragující spinorové pole

Uvažujme lagrangián

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \text{Tr}(M^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu M) + F(\rho), \quad (4.7)$$

kde $F(\rho)$ je libovolná reálná funkce proměnné $\rho = \sqrt{\det MM^\dagger}$. Přítomnost ρ zajišťuje nelinearitu pohybových rovnic, která je esenciální v rovnicích klasického kontinua. Snadno ověříme, že lagrangián je Lorentzovsky invariantní. Transformaci $x^{\mu'} = L^\mu_{\nu} x^\nu$ odpovídá $M'(x') = RM(x)$, $\partial_{\mu'} = L^\nu_{\mu} \partial_\nu$ a s využitím (1.110) plyne

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \text{Tr}(M^\dagger R^\dagger \bar{\sigma}^\mu R \partial_{\mu'} M) + F(\rho) = \frac{i}{2} \text{Tr}(M^\dagger L^\mu_{\nu} \bar{\sigma}^\nu (L^{-1})^\rho_{\mu} \partial_\rho M) + F(\rho) = \mathcal{L}. \quad (4.8)$$

Pohybové rovnice nalezneme užitím (3.2) a (3.3). Přepíšeme \mathcal{L} do složek

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} m_{\alpha\beta}^* \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} \partial_\mu m_{\gamma\beta} + F(\rho). \quad (4.9)$$

Pro ρ platí

$$\rho = \sqrt{\det M \det M^\dagger} = \sqrt{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})(m_{11}^* m_{22}^* - m_{12}^* m_{21}^*)}. \quad (4.10)$$

Pro derivace ρ podle $m_{\alpha\beta}$ a $m_{\alpha\beta}^*$ najdeme

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial m_{\alpha\beta}} \right) = \frac{\det M^\dagger}{2\rho} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix} = \frac{\rho}{2} (M^{-1})_{\beta\alpha} \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial m_{\alpha\beta}^*} \right) = \frac{\det M}{2\rho} \begin{pmatrix} m_{22}^* & -m_{21}^* \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{pmatrix} = \frac{\rho}{2} (M^{\dagger-1})_{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

Dvě sady pohybových rovnic tak mají tvar

$$i \partial_\mu m_{\alpha\beta}^* \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} - \rho F'(\rho) (M^{-1})_{\beta\gamma} = 0, \quad (4.13)$$

$$i \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} \partial_\mu m_{\gamma\beta} + \rho F'(\rho) (M^{\dagger-1})_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.14)$$

Vidíme, že rovnice jsou totožné až na hermitovské sdružení. V maticovém tvaru máme

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu M + \rho F'(\rho) M^{\dagger-1} = 0. \quad (4.15)$$

Vynásobením M^\dagger zprava pohybovou rovnicí zbavíme singularity pro $\rho = 0$ a získáme tak lepší tvar

$$i \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu M) M^\dagger + \rho F'(\rho) = 0. \quad (4.16)$$

Odtud je vidět, že lagrangián při splnění pohybových rovnic nabývá hodnoty

$$\mathcal{L} = F(\rho) - \rho F'(\rho). \quad (4.17)$$

4.2.1 Zachovávající se veličiny

Vidíme, že lagrangián je invariantní vůči translacím, Lorentzovým transformacím i všem čtyřem vnitřním rotacím. Použijeme tedy vzorce z 3. kapitoly a dostaneme kanonický tenzor energie-hybnosti, tenzor momentu hybnosti, tenzor spinu a 4 zachovávající se proudy

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{i}{2} m_{\alpha\beta}^* \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} \partial_\nu m_{\gamma\beta} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} = \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\nu \mathbf{M}) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (4.18)$$

$$\mathcal{M}^\mu_{\nu\rho} = x_\nu \mathcal{T}^\mu_\rho - x_\rho \mathcal{T}^\mu_\nu + \frac{i}{4} m_{\alpha\beta}^* \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} (\Sigma_{\nu\rho})_{\gamma\lambda} m_{\lambda\beta} = x_\nu \mathcal{T}^\mu_\rho - x_\rho \mathcal{T}^\mu_\nu - \frac{i}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \Sigma_{\nu\rho} \mathbf{M}) \quad (4.19)$$

$$\mathcal{S}^\mu_{\nu\rho} = \frac{i}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \Sigma_{\nu\rho} \mathbf{M}) \quad (4.20)$$

$$j^\mu_\nu = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}^* \bar{\sigma}^\mu_{\alpha\gamma} m_{\gamma\lambda} (\sigma_\nu)_{\lambda\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{M} \sigma_\nu). \quad (4.21)$$

Z poslední rovnice získáváme potřebnou rovnici kontinuity v případě $\nu = 0$. Pro získání Belinfante-Rosenfeldova tenzoru využijeme druhý tvar z (3.27). Upravíme výraz opakovaným použitím (1.84)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\mu\rho} &= \frac{i}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \Sigma^{\nu\rho} + \bar{\sigma}^\nu \Sigma^{\mu\rho})) \\ &= \frac{i}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger (4\eta^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho - 2\eta^{\rho\nu} \bar{\sigma}^\mu - 2\eta^{\rho\mu} \bar{\sigma}^\nu)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Využitím rovnice kontinuity $\partial_\mu j^\mu_0 = 0$ nám zůstane

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_\rho (\mathcal{S}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\mu\rho}) &= -\frac{i}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \mathbf{M} + \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \mathbf{M} + \partial^\mu \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\nu \mathbf{M} + \partial_\mu \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\nu \mathbf{M}) \\ &= -\text{Tr}\left(\frac{i}{4} \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \mathbf{M} + \frac{i}{4} \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \mathbf{M}\right) + \text{Tr}\left(\frac{i}{4} \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \mathbf{M} + \frac{i}{4} \mathbf{M}^\dagger \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \mathbf{M}\right)^* \\ &= -\frac{1}{2} \text{Im}(\mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\nu\mu}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

A konečně pro Belinfante-Rosenfeldův tenzor máme

$$\mathcal{T}_B^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\nu\mu}) = \frac{1}{4} \text{Re} \text{Tr}(i\mathbf{M}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \mathbf{M} + \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \mathbf{M})). \quad (4.24)$$

4.3 Přechod do klasického kontinua

Nejprve upravíme kanonický tenzor energie-hybnosti na tvar

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{J} \bar{\sigma}^\mu i \partial_\nu \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1}) + \delta^\mu_\nu (\rho F'(\rho) - F(\rho)). \quad (4.25)$$

Nyní rozložme \mathbf{M} na fázi

$$\mathbf{M}(x) = e^{-i\varphi(x)} \mathbf{M}_0(x). \quad (4.26)$$

Pohybové rovnice a tenzor potom vypadají následovně:

$$i\bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu \mathbf{M}_0) \mathbf{M}_0^\dagger + \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi \mathbf{J} + \rho F'(\rho) = 0 \quad (4.27)$$

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{J} \bar{\sigma}^\mu i \partial_\nu \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0^{-1}) + j^\mu_\nu \partial_\nu \varphi + \delta^\mu_\nu (\rho F'(\rho) - F(\rho)). \quad (4.28)$$

Z pohybové rovnice (4.27) lze najít triviální řešení pro konstantní proud, kdy

$$\partial_\mu M_0 = 0 \Rightarrow J = \text{konst.}, \quad (4.29)$$

a zbývá tak vyřešit

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi J + \rho F'(\rho) = 0. \quad (4.30)$$

Vynásobením \bar{J}/ρ^2 zprava dostaneme

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi = -\frac{F'(\rho)}{\rho} \bar{J} \Rightarrow \partial_\mu \varphi = -\frac{F'(\rho)}{\rho} j_\mu. \quad (4.31)$$

Pravá strana je konstantní a integrací tak dostáváme řešení

$$\varphi(x) = -\frac{F'(\rho)}{\rho} j_\mu x^\mu + \varphi_0. \quad (4.32)$$

Vidíme tedy, že pro konstantní proud se netriviálně vyvíjí fáze spinoru.

Předpokládejme pomalou změnu proudu, kdy $\partial_\mu M_0 \ll M_0$. V pohybové rovnici (4.27) zanedbáme první člen a dostaneme tak přibližně

$$\partial_\nu \varphi \approx -\frac{F'(\rho)}{\rho} j_\nu. \quad (4.33)$$

Po dosažení do (4.28) a znovu zanedbání derivací M_0 dostaneme až na znaménko tenzor energie-hybnosti pro ideální relativistickou tekutinu, tj.

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \approx -\frac{F'(\rho)}{\rho} j^\mu j^\nu - \eta^{\mu\nu} (F(\rho) - \rho F'(\rho)). \quad (4.34)$$

Můžeme tak indentifikovat $f(\rho) = -F(\rho)$.

Odvodíme nyní přesný rozdíl tenzorů energie-hybnosti pro samointeragující spinorové pole a ideální relativistickou tekutinu. Pro spinorové pole zvolíme Belinfante-Rosenfeldův tenzor, aby byly oba tenzory symetrické. Nejdříve přepíšeme pohybovou rovnici (4.27) vynásobením $J^{-1} = \frac{1}{\rho^2} \bar{J}$ do tvaru

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu M_0 M_0^{-1} + \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{F(\rho)}{\rho} \bar{J} = 0. \quad (4.35)$$

Vynásobením σ_ν a stopou z posledního členu vyjádříme j^ν

$$\frac{F(\rho)}{\rho} j_\nu = -\partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \text{Tr}(i\sigma_\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu M_0 M_0^{-1}). \quad (4.36)$$

Využitím rozkladu

$$\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = \frac{1}{2}(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu + \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) + \frac{1}{2}(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = \eta^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu} \quad (4.37)$$

dostaneme

$$\frac{F(\rho)}{\rho} j^\nu = -\partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} \text{Tr}(i\partial^\nu M_0 M_0^{-1}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(i\Sigma^{\nu\rho} \partial_\rho M_0 M_0^{-1}). \quad (4.38)$$

Podobně nyní upravíme Belinfante-Rosenfeldův tenzor:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_B^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} \text{Re Tr}(J\bar{\sigma}^\mu i\partial^\nu M M^{-1}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \frac{1}{4} j_\rho \text{Re Tr}(\sigma^\rho \bar{\sigma}^\mu i\partial^\nu M_0 M_0^{-1}) + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi j^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \frac{1}{4} j^\mu \text{Re Tr}(i\partial^\nu M_0 M_0^{-1}) + \frac{1}{4} j_\rho \text{Re Tr}(\Sigma^{\rho\mu} i\partial^\nu M_0 M_0^{-1}) + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi j^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dosažením (4.38) dostaneme do rovnice $\mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu}$, máme tedy

$$\mathcal{T}_B^{\mu\nu} = \mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

kde

$$\Delta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[j_\rho \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (i \Sigma^{\rho\mu} \partial^\nu M_0 M_0^{-1}) - j^\mu \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (i \Sigma^{\nu\rho} \partial_\rho M_0 M_0^{-1}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]. \quad (4.41)$$

Rozdíl tenzorů můžeme alternativně upravit do tvaru

$$\Delta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left(i \Sigma_\rho^\mu (j^\rho \partial^\nu M_0 M_0^{-1} + j^\nu \partial^\rho M_0 M_0^{-1}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right). \quad (4.42)$$

Ze zachování $\mathcal{T}_B^{\mu\nu}$ dostáváme rovnici ve tvaru

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{IF}^{\mu\nu} = -\partial_\mu \Delta^{\mu\nu}. \quad (4.43)$$

4.4 Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole popisujeme vektorovým potenciálem

$$A(x) = A^\mu(x) \sigma_\mu. \quad (4.44)$$

Vektorový potenciál přidáme do lagrangiánu z požadavku lokální kalibrační invariance vzhledem k fázi spinoru. Mějme skalární pole $\Lambda(x)$ a transformaci

$$M' = e^{i\Lambda(x)} M. \quad (4.45)$$

Volný lagrangián (4.7) není lokálně kalibračně invariantní. Platí

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (M^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Lambda(x) M). \quad (4.46)$$

Uvažujme elektrický náboj spinorového pole +1. Pro zajištění lokální kalibrační invariance přejdeme ke kovariantní derivaci vztahem

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x) \quad (4.47)$$

a zároveň požadujeme

$$A_\mu'(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x). \quad (4.48)$$

Tím se druhý člen z (4.46) odečte. Máme tak lokálně kalibračně invariantní lagrangián

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int.} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (M^\dagger \bar{\sigma}^\mu (i\partial_\mu - A_\mu) M) + F(\rho) = \mathcal{L} - j^\mu A_\mu. \quad (4.49)$$

Pohybovou rovnici najdeme z (3.2) a (3.3) ve tvaru

$$\bar{\sigma}^\mu i \partial_\mu M M^\dagger - \bar{A} J + \rho F'(\rho) = 0. \quad (4.50)$$

Hodnota lagrangiánů při splnění pohybových rovnic tak zůstává stejná:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int.} = F(\rho) - \rho F'(\rho). \quad (4.51)$$

V tomto případě neuvažujeme A jako dynamickou proměnnou, ale jako zadanou funkci souřadnic. Tenzor energie-hybnosti se tak nezachovává. Po explicitní derivaci obecného lagrangiánu n polí ϕ_r podle x^μ s použitím pohybových rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right)_{expl.} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \partial_\mu \phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \partial_\nu \partial_\mu \phi_r \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \right) \partial_\mu \phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \partial_\nu \partial_\mu \phi_r \\ &= -\partial_\nu \mathcal{T}^\nu_\mu. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Interakční člen se díky (4.51) v kanonickém tenzoru energie-hybnosti neobjeví a \mathcal{T}^μ_ν má tedy stejný tvar jako pro volný lagrangián (4.18). Z (4.52) následně plyne

$$\partial_\mu \mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{J} \partial_\nu \bar{\mathcal{A}}) = j^\mu \partial_\nu A_\mu = F_{\nu\mu} j^\mu + j^\mu \partial_\mu A_\nu = F_{\nu\mu} j^\mu + \partial_\mu (j^\mu A_\nu), \quad (4.53)$$

kde jsme vytvořili na pravé straně hustotu Lorentzovy síly a druhý výraz jsme s použitím rovnice kontinuity mohli napsat jako čtyřdivergenci tenzoru $j^\mu A_\nu$. Tu můžeme převést na druhou stranu a dostaneme

$$\partial_\mu \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (i\partial_\nu - A_\nu) \mathcal{M}) - \delta^\mu_\nu (F(\rho) - \rho F'(\rho)) \right] = F_{\nu\mu} j^\mu. \quad (4.54)$$

Vidíme, že na levé straně se jen změní parciální derivace za kovariantní (viz. (4.47)).

Úplný model, kde se bude dynamicky vyvíjet spinorové i elektromagnetické pole, získáme přidáním kinetického členu

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.55)$$

kde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ je tenzor elektromagnetického pole. Celý lagrangián má tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{celk} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (i\partial_\mu - A_\mu) \mathcal{M}) + F(\rho) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathcal{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \mathcal{M}) + F(\rho) - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Lagrangián tak už nebude explicitně záviset na souřadnicích a z Euler-Lagrangeových rovnic navíc dostaneme 1. sérii Maxwellových rovnic

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{celk}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{celk}}{\partial A_\nu} = \partial_\lambda F^{\nu\lambda} + j^\nu. \quad (4.57)$$

Celkový tenzor energie-hybnosti dostaneme z (3.13), kde nesmíme zapomenout počítat ještě přes vektorový potenciál A_μ . V interakčním členu se nevyskytují derivace \mathcal{M} a A_μ , takže můžeme celkový tenzor rozdělit na spinorovou a elektromagnetickou část

$$\mathcal{T}_{celk}^\mu_\nu = \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathcal{M}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\nu \mathcal{M}) - \delta^\mu_\nu (F(\rho) - \rho F'(\rho)) + \partial_\nu A_\rho F^{\rho\mu} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (4.58)$$

kde poslední dva členy představují kanonický tenzor energie-hybnosti pro elektromagnetické pole (viz. [9, str. 265]). Ten se standardně ještě upraví na kalibračně invariantní tvar přidáním čtyřdivergence

$$\partial_\rho (A_\nu F^{\mu\rho}) \quad \text{splňující} \quad \partial_\mu \partial_\rho (A_\nu F^{\mu\rho}) = 0. \quad (4.59)$$

Po úpravách s využitím Maxwellových rovnic nalezneme celkový tenzor energie-hybnosti ve tvaru

$$\mathcal{T}_{celk}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(M^\dagger \bar{\sigma}^\mu (i\partial^\nu - A^\nu) M) - \eta^{\mu\nu} (F(\rho) - \rho F'(\rho)) - \eta_{\rho\sigma} F^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (4.60)$$

Poznamenejme, že pokud uvažujeme nedynamicky se měnící proud, pro symetrický tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole dostaneme (viz. [9, str. 266])

$$\mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu} = -\eta_{\rho\sigma} F^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad \text{splňující} \quad \partial_\nu \mathcal{T}_{EM}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} j_\nu. \quad (4.61)$$

Kombinací (4.54) a (4.61) dostáváme rovnici

$$\partial_\mu \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(M^\dagger \bar{\sigma}^\mu (i\partial^\nu - A^\nu) M) - \eta^{\mu\nu} (F(\rho) - \rho F'(\rho)) - \eta_{\rho\sigma} F^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] = 0. \quad (4.62)$$

Výraz pod parciální derivací odpovídá celkovému tenzoru energie-hybnosti (4.60) a máme tak stejný výsledek.

Závěr

V prvních dvou kapitolách jsme představili základy geometrické algebry a řešení známých problémů klasické mechaniky, keplerovy úlohy a setrvačnicku, pomocí spinorů jako sudých multivektorů. Spojitost se spinory jako dvoukomponentními komplexními vektory z kvantové mechaniky jsme krátce uvedli v kapitole 2.4. Díky geometrické interpretaci jsme v této komplexní reprezentaci mohli vyřešit problém symetrického setrvačnicku z klasické fyziky. Dále jsme představili možnost reprezentovat sudé multivektory časoprostorové algebry pomocí 2×2 komplexních matic. Aplikaci časoprostorové algebry v relativistické klasické nebo kvantové fyzice lze najít např. v [1].

V dalších dvou kapitolách jsme zkoušeli aplikovat spinory v mechanice kontinua. Jako výchozí bod jsme zvolili lagrangián (4.7) inspirovaný Diracovou teorií. Bohužel jsme pro tento lagrangián nedokázali splnit zachování tenzoru energie-hybnosti pro ideální relativistickou tekutinu, ale našli jsme rozdíl dvou tenzorů energie-hybnosti $\Delta^{\mu\nu}$, který udává odchylku těchto modelů. Pro aplikaci je tak třeba uvažovat situace, kde se bude tenzor $\Delta^{\mu\nu}$ zachovávat nebo velmi pomalu měnit. Pro mechaniku kontinua má fyzikální význam vektorové pole proudu $J = MM^\dagger$. Polární rozklad spinoru představený v kapitole 1.4.3 rozděluje spinor na čtyři parametry určující proud a také na čtyři další parametry související s vnitřními rotacemi tekutiny. Pochopení jejich role by mohlo více osvětlit odchylku od modelu relativistické tekutiny a je předmětem dalšího zkoumání.

V kapitole 4.4 jsme naznačili interakci nabitého spinorového pole s elektromagnetickým polem. Vektorový potenciál se z podmínky lokální kalibrační invariance do lagrangiánu přidá minimální vazbou a nachází se tak přímo v pohybových rovnicích. Přešli jsme tedy od klasického popisu s proudem j^μ a tenzorem elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$ k vektorovému potenciálu A_μ a spinoru M . Tento alternativní popis by mohl být aplikovatelný například v teorii plazmatu [11] nebo kosmologii [12, 6. část].

Literatura

- [1] C. Doran, A. Lasenby: *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge Univ. Press (2007).
- [2] D. Hestenes: *New Foundations for Classical Mechanics*. Kluwer Academic Publ. (1999).
- [3] A. O. Barut: *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Dover Publ. (1980).
- [4] W. Greiner, J. Reinhardt, D. A. Bromley: *Field quantization*. Springer Berlin, Heidelberg (1993).
- [5] P. Kustaanheimo, E. Stiefel: *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization*. J. Reine Angew. Math. (1965).
- [6] J. W. van Holten: *Relativistic fluid dynamics*. (2006). Dostupné na:
<https://www.nikhef.nl/~t32/relhyd.pdf>.
- [7] P. Lounesto: *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 2nd edition (May 3, 2001).
- [8] W. E. Baylis: *Electrodynamics: A Modern Geometric Approach*. Springer (1998).
- [9] I. Štoll, J. Tolar a I. Jex: *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, (2017).
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Fluid mechanics*. Second edition (1987).
- [11] P. Kulhánek: *Úvod do teorie plazmatu*. Aldebaran Group for Astrophysics, (2011).
- [12] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*. W. Princeton University Press, (1973).